



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku



Univerzalni integral i njegova veza sa Šokeovim, Sugenovim i Šilkretovim integralom

Master rad

Olivera Lekić Ipač
student

dr Ivana Štajner-Papuga
mentor, redovni profesor

2026, Novi Sad

Sadržaj

Uvod	2
1 Klasifikacija fazi integrala	4
1.1 Motivacija: od klasične ka fazi meri	4
1.2 Uvodne definicije i propozicije	5
1.3 Bazične i proste funkcije	8
1.4 Šokeov integral	11
1.5 Šokeovi kapaciteti	16
1.6 Šugenov integral	21
1.7 Šilkretov integral	24
1.8 Diskretni slučaj	28
2 Univerzalni integral	31
2.1 Univerzalni integral - uvod i osnovni pojmovi	31
2.2 Ekstremni univerzalni integrali	38
2.3 Konstrukcija univerzalnih integrala	41
2.4 Univerzalni integrali na intervalu $[0,1]$	46
2.5 Semikopule i konkretni primeri pseudo-množenja	46
2.6 Konstrukcija preko kopula i dalja svojstva	47
3 Primeri primene u procesu odlučivanja	52
3.1 Primer 1: Izbor nastavnog kadra u internacionalnoj školi . . .	52
3.2 Primer 2: Upis dece: hijerarhijski (dvoetažni) model	59
3.3 Primer 3: Rangiranje predmeta za novi Cambridge program .	65
Zaključak	73
Literatura	77
Biografija	79
Ključna dokumentacijska informacija	80
Key Words Documentation	82

Uvod

Tokom čitave istorije čovečanstva prisutno je donošenje odluka, od onih koje čovek donosi na ličnom nivou u privatnoj ili poslovnoj sferi delovanja, od odluka direktora ili menadžera velikih kompanija, pa sve do odluka vladara ili političara koje su se odnosile i imale uticaj na čitavu državu ili više država. Sam proces donošenja odluke najčešće je kompleksan. Naravno u zavisnosti od situacije, povećava se broj i složenost faktora koji utiču na proces donošenja odluke. U ovom radu predstavljen je matematički aparat koji pomaže donosiocu odluke da istu donese na optimalan način, kroz razne primere.

Poznato je, prema [2, 16, 19], da se Šokeov, Sugenov i Šilkretov integral koriste za procenu raznih problema i predstavljaju pogodan alat pri odlučivanju. U radu su prvo navedene definicije i osobine ova tri integrala, a tek nakon toga, prateći aksiomatski pristup iz [8, 9], koncept integrala koji predstavlja njihovo uopštenje, takozvani univerzalni integral.

U prvom delu rada izložene su teorijske osnove koje su neophodne za razumevanje teme master rada, kao i osnovna klasifikacija fazi integrala. Prateći [20], prvo je naveden pojam monotone skupovne funkcije, koja je poznata i kao kapacitet ili fazi mera. Zatim su, kao u [1, 3], navedene najvažnije karakteristike iste, kao i pojam komonotonosti, bazičnih i prostih funkcija neophodan za dalje izlaganje. Prema [20], navedene su definicije Šokeovog, Sugenovog i Šilkretovog integrala, kao i njihove najvažnije karakteristike. Poseban akcenat je na diskretnom slučaju koji ima značajnu ulogu u modelovanju procesa donošenja odluka, te su navedeni integrali posmatrani kao integralni operatori agregacije. Ovaj deo rada predstavlja iscrpan i metodičan pregled poznatih rezultata iz literature, praćen odgovarajućim referencama, dok primeri i analiza u trećem delu rada predstavljaju originalni doprinos ovog master rada.

U drugom delu rada, prateći [9], predstavljen je aksiomatski pristup definiciji univerzalnog integrala, te osobine istog, kao i veza sa Šokeovim, Sugenovim i Šilkretovim integralom već predstavljenim u prvom delu. Definisano je pseudo – sabiranje i pseudo – množenje, razmotreni su ekstremni univerzalni integrali, kao i konstrukcija univerzalnih integrala i njihova restrikcija na jedinični interval.

U trećem delu rada predstavljena je analiza i diskusija praktične primene Šokeovog, Sugenovog i Šilkretovog integrala. Kroz odgovarajuće originalne primere analizirane su sličnosti i razmimoilaženja koja se javljaju u toku procesa odlučivanja u zavisnosti od izbora integrala. Data je analiza efikasnosti navedenih integralnih operatora agregacije u zavisnosti od tipa problema, te diskusija o optimalnom izboru integrala.

Ključne reči: fazi mera, monotona skupovna funkcija, kapacitet, Šokeov integral, Sugenov integral, Šilkretov integral, univerzalni integral, komonotonost, pseudo-sabiranje, pseudo-množenje, agregacija, donošenje odluka.

* * *

Pre svega, veliko hvala mojoj mentorki, dr Ivani Štajner-Papugi, na stručnom vođenju, dragocenim smernicama, strpljenju i velikoj podršci tokom celog procesa izrade ovog rada. Takođe, zahvaljujem se članicama komisije, dr Zagorki Lozanov-Crvenković i dr Mirjani Štrboji, na izdvojenom vremenu, posvećenosti i korisnim sugestijama.

Iskrenu zahvalnost i poštovanje dugujem svim profesorima i asistentima koji su tokom studija sa nama delili znanje, iskustvo i entuzijazam, oblikujući moj akademski i profesionalni put.

Posebno hvala dragim koleginicama i prijateljicama Tijani, Tamari, Milici i Miji na zajedničkim borbama, razmeni ideja, podršci i lepim trenucima koji su studiranje učinili posebnim.

Najveću i najdublju zahvalnost dugujem svojoj porodici. Hvala mojim roditeljima, Nataliji i Draganu, i sestri Jeleni, koji su od prvog dana moj oslonac i bezuslovna podrška u svemu što radim.

Na kraju, hvala mom suprugu Edvardu i sinu Filipu, što su uvek uz mene, na beskrajnom razumevanju, ljubavi i radosti kojima ispunjavaju svaki moj dan. Ovaj rad posvećujem vama.

1 Klasifikacija fazi integrala

Oslanjajući se na standardnu teoriju mere [5] i na teoriju fazi mera i integrala agregacije [3, 20], u ovom poglavlju izloženi su teorijski temelji potrebni za definisanje i razumevanje Šokeovog, Sugenovog i Šilkretovog integrala: motivacija za uvođenje fazi mere kao uopštenja klasične aditivne mere, uvodni pojmovi i komonotonost, te definicije i osnovna svojstva sva tri integrala, sa posebnim osvrtom na diskretan slučaj relevantan za primenu u procesu odlučivanja.

1.1 Motivacija: od klasične ka fazi meri

Pre definicija, korisno je videti *zašto* je uopšte potreban pojam fazi mere, umesto da se ostane pri klasičnoj, aditivnoj meri poznatoj iz standardne teorije mere [5]. U tu svrhu najpre se navode osnovni pojmovi klasične teorije mere koji se koriste u celom radu.

Definicija 1.1 [5]. Neka je X neprazan skup i $\mathcal{A}$ σ -algebra podskupova skupa X , to jest familija podskupova od X koja sadrži X i zatvorena je za komplement i za prebrojive unije. Par $(X, \mathcal{A})$ naziva se *merljiv prostor*, a elementi familije $\mathcal{A}$ *merljivi skupovi*. Funkcija $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ je $\mathcal{A}$ -*merljiva* (kraće: *merljiva*) ako za svaki Borelov skup $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ važi $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

U celom radu, ukoliko se izričito ne navede drugačije, oznaka $(X, \mathcal{A})$ odnosi se na merljiv prostor u smislu Definicije 1.1.

Definicija 1.2 [5]. Klasična (aditivna) mera na merljivom prostoru $(X, \mathcal{A})$ je funkcija $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ takva da je $\mu(\emptyset) = 0$ i, za sve disjunktne $A, B \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad (\text{aditivnost}).$$

Aditivnost je jak uslov: čim su vrednosti mere zadate na pojedinačnim (disjunktним) skupovima, vrednost na svakoj njihovoj uniji je time već *jednoznačno određena*, nema slobode da se ta vrednost naknadno podesi drugačije.

Primer 1.1 Kada je klasična mera dovoljna. Direktor internacionalne škole ocenjuje kandidata za nastavnika po dva kriterijuma: a , predmetna stručnost, i b , administrativna urednost (vođenje evidencije). Škola smatra da su ova dva kriterijuma suštinski nezavisna, dobar predavač ne mora nužno biti uredan sa papirologijom, i obrnuto, pa njihov zajednički doprinos treba jednostavno da bude zbir pojedinačnih doprinosa. Sa težinama $\mu(\{a\}) = 0,6$ i $\mu(\{b\}) = 0,4$, aditivnost daje $\mu(\{a, b\}) = 1,0$, i ukupna ocena kandidata f dobija se kao obična ponderisana suma (Lebegov integral u odnosu na μ):

$$S = 0,6 \cdot f(a) + 0,4 \cdot f(b).$$

Sve funkcioniše glatko, nema potrebe ni za kakvim uopštenjem.

Primer 1.2 Kada klasična mera nije dovoljna. Ista škola zatim ocenjuje istog kandidata i po druga dva kriterijuma, c , kreativnost u osmišljavanju časa, i d , sposobnost da motiviše učenike, koji nisu nezavisni na isti način: kandidat koji je odličan u *oba* konteksta pokazuje prenosivu pedagošku vještinu, vredniju od pukog zbira dva odvojena talenta. Škola želi da postavi

$$\mu(\{c\}) = 0,25, \quad \mu(\{d\}) = 0,25, \quad \mu(\{c, d\}) = 0,70.$$

Napomena 1.1 Ovo je nemoguće unutar klasične mere. Skupovi $\{c\}$ i $\{d\}$ su disjunktne, pa aditivnost (Definicija 1.2) nužno povlači

$$\mu(\{c, d\}) = \mu(\{c\}) + \mu(\{d\}) = 0,25 + 0,25 = 0,50.$$

Vrednost 0,70 je u direktnoj kontradikciji sa ovim, ne postoji klasična (aditivna) mera koja bi istovremeno zadovoljila zadate pojedinačne težine i željenu vrednost na uniji. Razlog je strukturan: aditivnost ne dozvoljava *nikakvu* interakciju između kriterijuma, ni sinergiju ni redundantnost, jer je vrednost mere na uniji uvek u potpunosti određena vrednostima na sastavnim (disjunktne) delovima, nema slobodnog parametra kojim bi se ta interakcija mogla izraziti.

Rešenje. Ako se aksiom aditivnosti oslabi na *monotonost* ($\mu(A) \leq \mu(B)$ kad god $A \subseteq B$), dobija se tačno onoliko slobode koliko je potrebno: vrednost $\mu(\{c, d\})$ više nije prisiljena da bude 0,50, već sme biti bilo šta između $\max(\mu(\{c\}), \mu(\{d\})) = 0,25$ (donja granica, po monotonosti) i $\mu(X)$ (gornja granica), pa i željenih 0,70. Ovakve skupovne funkcije, monotone ali ne obavezno aditivne, nazivaju se *fazi mere* (ili *monotone skupovne funkcije*, ili *kapaciteti*) i služe kao glavni alat u teorijskom i praktičnom delu ovog rada.

1.2 Uvodne definicije i propozicije

Neka je u nastavku $(X, \mathcal{A})$ fiksiran merljiv prostor (Definicija 1.1). Tačke skupa X u ovoj glavi označavaju se sa ω , budući da je oznaka x rezervisana za realne brojeve sa kojima se porede vrednosti funkcija (nivoa).¹

Pre uvođenja same fazi mere, korisno je najpre postaviti najširi mogući okvir unutar kojeg se ona nalazi.

Definicija 1.3 [20]. Skupovna funkcija $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ naziva se *opšta mera* na $(X, \mathcal{A})$ ako važi $\mu(\emptyset) = 0$ (kad god $\emptyset \in \mathcal{A}$), to jest ako *iščezava na praznom skupu*.

¹U [1] osnovni skup se označava sa Ω ; ovde se, radi jedinstvene notacije u celom radu, koristi X .

Ovo je jedini zahtev koji karakteriše opštu meru. Jasno, nenegativnost i iščezavanje na praznom skupu su izuzetno slabi zahtevi. Sužavanjem opšte mere dodatnim svojstvima (pre svega monotonošću) dobijaju se sve specijalnije klase mera koje se razmatraju u ovom radu, uključujući i klasičnu (aditivnu) meru iz Definicije 1.2. Najšira klasa mera od interesa za ovaj rad jesu mere kod kojih važi osobina monotonosti, poznate i pod nazivom fazi mere:

Definicija 1.4 [1]. Funkcija $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+ = [0, \infty]$ naziva se *monotona skupovna funkcija* (ili *fazi mera*, ili *kapacitet*) ako je neopadajuća skupovna funkcija i važi $\mu(\emptyset) = 0$. Trojka $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se naziva *prostor fazi mere*.

Napomena o terminologiji:

Pod terminom *mera* u matematičkoj literaturi uobičajeno se podrazumeva klasična, σ -aditivna mera u smislu Definicije 1.2, to jest, funkcija skupa koja je nenegativna, iščezava na praznom skupu i aditivna je na disjunktним skupovima. Definicija 1.3 zadržava taj naziv, ali od svih navedenih zahteva ostavlja samo nenegativnost i iščezavanje na praznom skupu, pa je *opšta mera*, uprkos imenu, daleko slabiji pojam od klasične mere: svaka klasična mera jeste opšta mera, ali obrnuto ne važi.

Da ovakvo preklapanje naziva ne bi dovodilo do zabune, u ovom radu se termin *mera* ne koristi sam kada iz konteksta nije jasno na koji se od dva pojma odnosi. Kada se misli na klasičnu, aditivnu meru, to se eksplicitno kaže, *klasična (aditivna) mera*, ili se navodi ustaljen naziv konkretne mere iz klasične teorije (Lebegova mera, Lebeg–Stieltjesova mera, verovatnosna mera), koje su sve klasične mere. Kada se, pak, uvodi monotona skupovna funkcija iz Definicije 1.4, koristi se termin *fazi mera* (ravnopravno sa nazivima *monotona skupovna funkcija* i *kapacitet*). Kada je konkretna fazi mera već uvedena i označena slovom, najčešće μ , ν ili m , u daljem tekstu se, radi kraćeg izražavanja, o njoj govori jednostavno kao o „meri μ ”, jer je iz konteksta jasno o kom je pojmu reč.

Radi jednostavnosti izražavanja, uz termin *fazi mera* se, kao i u literaturi, vezuju i pridevi preuzeti iz klasične teorije mere, govori se o *aditivnoj*, *superaditivnoj*, *subaditivnoj* ili *normiranoj* fazi meri, pri čemu ti pridevi opisuju dodatna svojstva koja fazi mera može, ali ne mora imati. Poseban je slučaj aditivna fazi mera: ona zadovoljava i sve zahteve klasične mere, pa se ta dva pojma tada zaista poklapaju, i to je na svakom takvom mestu eksplicitno naznačeno.

Monotonost sama po sebi ne kaže ništa o odnosu mere prema uniji disjunktних skupova. Upravo je taj odnos ono što razlikuje klasičnu aditivnu meru (Definicija 1.2) od njenih uopštenja. Dve korisne, međusobno suprotne

klase fazi mera dobijaju se slabljenjem jednakosti u aditivnosti na nejednakost u jednom ili drugom smeru:

Definicija 1.5 [20]. Fazi mera μ na $(X, \mathcal{A})$ je *superaditivna* ako

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$$

kad god su $A, B \in \mathcal{A}$ disjunktni skupovi ($A \cap B = \emptyset$) takvi da je $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Definicija 1.6 [20]. Fazi mera μ na $(X, \mathcal{A})$ je *subaditivna* ako

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

kad god su $A, B \in \mathcal{A}$ disjunktni skupovi ($A \cap B = \emptyset$) takvi da je $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Superaditivne mere izražavaju sinergiju (kooperativno dejstvo) između skupova, dok subaditivne mere izražavaju redundansu (preklapanje, inhibicioni efekat); klasična aditivna mera predstavlja granični slučaj u kojem oba svojstva važe kao jednakost, pa ne dozvoljava nijedan od ta dva tipa interakcije.

Opšta pretpostavka o neprekidnosti fazi mere μ se ne razmatra; kaže se da je μ *neprekidna od dole* ako:

$$C_n \in \mathcal{A}, C_n \nearrow C \implies \mu(C_n) \nearrow \mu(C).$$

Oznaka $C_n \nearrow C$ znači da je niz skupova rastući, $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$, i da je $C = \bigcup_n C_n$; analogno, $\mu(C_n) \nearrow \mu(C)$ znači da niz brojeva $\mu(C_n)$ konvergira odozdo ka $\mu(C)$. Sam uslov monotonosti fazi mere garantuje samo da niz $\mu(C_n)$ raste i da je ograničen odozgo sa $\mu(C)$; neprekidnost od dole je dodatni zahtev da se ta granična vrednost zaista dostigne.

Za fazi meru se kaže da je *aditivna* ako je:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

Štaviše, za fazi meru μ se kaže da je *maksitivna* ($\vee$ - aditivna) ako je:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

Bilo kojoj funkciji $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, pridružuje se familija $\mathbf{C}_f := \{C_f(x) : x \in \overline{\mathbb{R}}\} \cup \{C'_f(x) : x \in \overline{\mathbb{R}}\}$, gde je $C_f(x) = \{\omega \in X : f(\omega) > x\}$ (skraćeno se piše $\{f > x\}$) i $C'_f(x) = \{\omega \in X : f(\omega) \geq x\}$ (skraćeno će se pisati $\{f \geq x\}$). Familija $\mathbf{C}_f$ je lanac, to jest, potpuno je uređena u odnosu na skupovnu inkluziju. $\mathbf{C}_f$ se naziva lancem pridruženim funkciji f .

Pitanje kada se aditivnost, odnosno maksitivnost, integrala uopšte može očekivati svodi se na to da li su dve funkcije međusobno „saglasne“ u pogledu

redosleda svojih vrednosti. Taj pojam se naziva *komonotonost* (videti [3]). Svaka funkcija $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sama po sebi indukuje jedan poredak na domenu X : tačka ω_1 prethodi tački ω_2 u odnosu na f , u oznaci $\omega_1 <_f \omega_2$, kad god je $f(\omega_1) < f(\omega_2)$. Ako se posmatraju dve funkcije f i g istovremeno, prirodno se postavlja pitanje slažu li se njihovi poreci. Ovo poređenje definiše binarnu relaciju $\sim$ na $\overline{\mathbb{R}}^X$, koja je refleksivna i simetrična.

Definicija 1.7 [1]. Funkcije f i g su komonotone ($f \sim g$) ako se njima indukovani poreci nigde ne sudaraju: ne postoji par tačaka $\omega_1, \omega_2 \in X$ takav da f stavlja ω_1 ispred ω_2 , a g istovremeno ω_2 ispred ω_1 , to jest da važi $\omega_1 <_f \omega_2$ i $\omega_2 <_g \omega_1$ istovremeno.

Propozicija 1.1 [1]. Neka su date dve funkcije f i g na $\overline{\mathbb{R}}^X$, neka su $\mathbf{C}_f$ i $\mathbf{C}_g$ dva lanca pridružena f i g respektivno, i neka je $\mathbf{C}_h$ lanac pridružen funkciji $h = f + g$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

- (i) $f \sim g$
- (ii) $\mathbf{C}_f \cup \mathbf{C}_g = \mathbf{C}_h$
- (iii) postoje dve neprekidne neopadajuće funkcije φ_f i φ_g iz $\overline{\mathbb{R}}$ u $\overline{\mathbb{R}}$, takve da važi:

$$\varphi_f(z) + \varphi_g(z) = z, \quad f(\omega) = \varphi_f(h(\omega)), \quad g(\omega) = \varphi_g(h(\omega)).$$

1.3 Bazične i proste funkcije

Sa oznakom $\mathcal{F}(X)$, ili kraće $\mathcal{F}$, označava se skup svih merljivih funkcija (u smislu Definicije 1.1) iz X u $\overline{\mathbb{R}}^+$. Merljivost funkcije f može se ekvivalentno opisati i preko njoj pridruženog lanca: funkcija f je merljiva ako i samo ako je $\mathbf{C}_f \subseteq \mathcal{A}$. Zaista, skupovi $\{f > x\}$ i $\{f \geq x\}$ su inverzne slike intervala, pa pripadaju familiji $\mathcal{A}$ kad god je f merljiva. Obrnuto, familija svih skupova B za koje je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ i sama je σ -algebra (jer je $\mathcal{A}$ σ -algebra), a intervali oblika $(x, +\infty]$ generišu Borelovu σ -algebru na $\overline{\mathbb{R}}$, pa iz $\{f > x\} \in \mathcal{A}$ za sve x sledi da je f merljiva.

Definicija 1.8 [1]. Za proizvoljno $a \in \overline{\mathbb{R}}^+$ i bilo koje $A \in \mathcal{A}$, funkcija $b(a, A)$ definisana na sledeći način:

$$b(a, A)(\omega) = \begin{cases} a, & \text{ako } \omega \in A, \\ 0, & \text{ako } \omega \notin A, \end{cases}$$

naziva se *bazična funkcija*.

Definicija 1.9 [1]. Merljivo preslikavanje $s : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ naziva se *prosta funkcija* ako je skup vrednosti funkcije konačan.

Pomoću oznake $\mathcal{S}(X)$, ili kraće $\mathcal{S}$, označava se skup svih prostih funkcija iz X u $\mathbb{R}^+$. Proste funkcije imaju nekoliko reprezentacija u odnosu na bazične funkcije. Najpoznatija reprezentacija iz klasične teorije mere zasniva se na konačnoj particiji skupa X . Bilo kojoj prosto funkciji s , sa skupom vrednosti $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, pridružuje se konačna particija $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, gde je $A_i = \{\omega \in X \mid s(\omega) = a_i\}$. Funkcija s ima sledeću reprezentaciju:

$$s = \sum_{i=1}^n b(a_i, A_i) \equiv \bigvee_{i=1}^n b(a_i, A_i). \quad (1)$$

Mogući multi slučaj u (1) se može izbeći, ako se pretpostavi da važi:

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n, \quad (2)$$

te se jednoznačno dobija *klasična standardna reprezentacija*, sa minimalnim brojem korišćenih bazičnih funkcija.

Razlog zašto se konstrukcija integrala oslanja upravo na proste funkcije leži u tome što je skup $\mathcal{S}$ gust u širem skupu $\mathcal{F}$ svih merljivih funkcija. Ustvari, svaka merljiva funkcija može se dobiti kao granica nekog neopadajućeg niza prostih funkcija. Posledica toga je da, čim je neka funkcionala na $\mathcal{F}$ neprekidna od dole, njene vrednosti na celom $\mathcal{F}$ su već jednoznačno određene onim što ona radi na $\mathcal{S}$. Dovoljno je znati kako se integrale proste funkcije, pa ostatak sledi graničnim prelazom.

Lebegov integral proste funkcije s definiše se pomoću klasične reprezentacije iz (1) i stavljajući:

$$\int s dm = \int \left(\sum_{i=1}^n b(a_i, A_i) \right) dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i).$$

U klasičnoj teoriji mere, gde je σ -aditivnost na raspolaganju, ovaj račun se ne menja bez obzira na to koja se od aditivnih reprezentacija proste funkcije koristi: svaka daje istu vrednost integrala. Kod fazi mere to više ne važi, jer ona nije aditivna, pa reprezentacija mora biti pažljivije odabrana. Upravo zato se, radi ispravnog izražavanja komonotone aditivnosti Šokeovog integrala i komonotone maksitivnosti Sugenovog integrala, uvodi poseban tip reprezentacije preko sistema komonotonih bazičnih funkcija.

Propozicija 1.2 [1]. Proizvoljna prosta funkcija s ima komonotonu aditivnu step reprezentaciju:

$$s = \sum_{i=1}^n b(c_i, C_i) \quad (3)$$

i komonotonu maksitivnu step reprezentaciju:

$$s = \bigvee_{i=1}^n b(a_i, C_i) \quad (4)$$

gde je strogo $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \emptyset$.

Dokaz. Ideja je da se, umesto particije $\{A_i\}$, iskoristi opadajući lanac skupova koji ona generiše. Za $i = 1, \dots, n$ stavlja se

$$C_i = \bigcup_{j=i}^n A_j,$$

to jest C_i je skup onih ω na kojima funkcija s dostiže vrednost bar a_i . Prelazak sa C_i na C_{i+1} uklanja tačno član A_i particije, koji je neprazan, pa je lanac $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \emptyset$ zaista strogo opadajući, kako se u tvrđenju i zahteva.

Neka je sada $\omega \in A_k$ proizvoljna tačka, tako da je $s(\omega) = a_k$. Po konstrukciji lanca, ω pripada skupu C_i tačno za $i \leq k$.

Maksitivna reprezentacija. Ovde se za koeficijente uzimaju same vrednosti a_i funkcije s : bazična funkcija $b(a_i, C_i)$ u tački ω ima vrednost a_i za $i \leq k$, a nulu za $i > k$. Supremum tih vrednosti je $\max_{i \leq k} a_i = a_k$, jer je niz $\{a_i\}$ rastući po pretpostavci (2). Time je dobijeno (4).

Aditivna reprezentacija. Uzimajući umesto toga priraštaje

$$c_1 = a_1, \quad c_2 = a_2 - a_1, \quad \dots, \quad c_n = a_n - a_{n-1},$$

koji su svi pozitivni iz istog razloga, sabiranje po $i \leq k$ daje teleskopirajuću sumu

$$a_1 + (a_2 - a_1) + \dots + (a_k - a_{k-1}) = a_k = s(\omega),$$

čime je dobijeno i (3). Kako je tačka ω bila proizvoljna, obe reprezentacije važe na celom skupu X . $\square$

Reprezentacije (3) i (4) (uz ponovno izostavljanje mogućeg nultog člana) su minimalne u odnosu na broj bazičnih funkcija. Okarakterisane su zajedničkim uslovima: $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \emptyset$ i $\{C_i\} \subset \mathbb{C}_S$. Napomena: $\mathbb{C}_S = \{X, C_1, C_2, \dots, C_n, \emptyset\}$.

1.4 Šokeov integral

U ovom delu navode se definicija i osnovna svojstva Šokeovog integrala.

Definicija 1.10 [2]. Šokeov integral je funkcionala $\mathcal{F}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, definisana na sledeći način:

$$(\mathcal{C}) \int f d\mu := \int_0^\infty \mu(C_f(x)) dx. \quad (5)$$

Podintegralna funkcija $x \mapsto \mu(C_f(x))$ je nerastuća po x (jer skup $C_f(x)$ ne može da se poveća kad x raste), pa je Koši-Rimanov integral u definiciji (5) uvek dobro definisan, bez potrebe za dodatnim pretpostavkama. U nastavku se dokazuju sledeća svojstva Šokeovog integrala: monotonost, homogenost, bazične vrednosti, komonotona aditivnost, neprekidnost od dole i horizontalna aditivnost.

Svojstvo 1.1 (Monotonost) [1].

$$f \leq g \implies (\mathcal{C}) \int f d\mu \leq (\mathcal{C}) \int g d\mu.$$

Dokaz. Dovoljno je uporediti podintegralne funkcije koje se javljaju u definiciji (5). Neka je $f \leq g$ i neka je $x \in \mathbb{R}^+$ fiksirano. Ako za neko ω važi $f(\omega) > x$, onda je i $g(\omega) > x$, pa je $C_f(x) \subseteq C_g(x)$. Monotonost fazi mere μ odatle daje $\mu(C_f(x)) \leq \mu(C_g(x))$.

Pošto ova nejednakost važi za svaku vrednost x , ista relacija se prenosi i na njihove Koši-Rimanove integrale po x , što je upravo tvrđenje. $\square$

Sam iskaz je tehnički jednostavan, ali je u primeni reč o svojstvu bez kojeg agregacija ne bi imala smisla. Njime se garantuje da poboljšanje ocene ni po jednom kriterijumu ne može da pogorša ukupan rezultat: alternativa koja je bar jednako dobra kao neka druga po svakom pojedinačnom kriterijumu ne može biti rangirana ispod nje.

Svojstvo 1.2 (Homogenost) [1].

$$(\mathcal{C}) \int (c \cdot f) d\mu = c \cdot (\mathcal{C}) \int f d\mu \quad \forall c \in \mathbb{R}^+.$$

Dokaz. Slučaj $c = 0$ je trivijalan, jer su tada obe strane jednake nuli. Neka je zato $c > 0$. Za proizvoljno x i proizvoljno ω važi lanac ekvivalencija

$$(c \cdot f)(\omega) > x \iff f(\omega) > \frac{x}{c},$$

iz čega sledi jednakost nivo skupova $C_{c,f}(x) = C_f(x/c)$. Uvrštavanjem u definiciju (5) i smenom promenljive $y = x/c$, pri čemu je $dx = c dy$, dobija se

$$(\mathcal{C}) \int (c \cdot f) d\mu = \int_0^\infty \mu(C_f(x/c)) dx = c \cdot \int_0^\infty \mu(C_f(y)) dy = c \cdot (\mathcal{C}) \int f d\mu,$$

što je i trebalo pokazati. $\square$

Homogenost ima jasnu praktičnu posledicu: ukupan rezultat zavisi od izabrane skale ocenjivanja samo preko zajedničkog faktora. Prelazak sa jedne skale ocenjivanja na drugu, na primer sa $[0, 10]$ na $[0, 1]$, stoga menja brojčanu vrednost integrala, ali ne i poredak alternativa koje se porede.

Svojstvo 1.3 (Bazične vrednosti) [1]. Za bilo koju bazičnu funkciju važi:

$$(\mathcal{C}) \int b(c, C) d\mu = c \cdot \mu(C) \quad \forall c \in \mathbb{R}^+, \forall C \in \mathcal{A}, \quad (6)$$

i koristi se konvencija $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Dokaz. Neka je $f = b(c, C)$. Ova funkcija ima vrednost c na skupu C , a nulu izvan njega, pa njeni nivo skupovi imaju samo dva moguća oblika:

$$C_f(x) = C \quad \text{za } 0 \leq x < c, \quad C_f(x) = \emptyset \quad \text{za } x \geq c.$$

Podintegralna funkcija $x \mapsto \mu(C_f(x))$ iz definicije (5) stoga je konstantna i jednaka $\mu(C)$ na intervalu $[0, c)$, a nula na ostatku poluprave. Njen integral je površina pravougaonika stranica c i $\mu(C)$, odakle sledi (6). $\square$

Posebno, za $c = 1$, osnovna funkcija se poklapa sa karakterističnom funkcijom 1_C na skupu C i Šokeov integral rekonstruiše datu fazi meru:

$$(\mathcal{C}) \int 1_C d\mu = \mu(C) \quad \forall C \in \mathcal{A}.$$

Svojstvo 1.4 (Komonotona aditivnost) [1].

$$f \sim g \implies (\mathcal{C}) \int (f + g) d\mu = (\mathcal{C}) \int f d\mu + (\mathcal{C}) \int g d\mu. \quad (7)$$

Dokaz. Strategija dokaza je da se oba integrala, $(\mathcal{C}) \int f d\mu$ i $(\mathcal{C}) \int g d\mu$, izraze kao integrali jedne iste podintegralne funkcije $y \mapsto \mu(C_h(y))$, ali u odnosu na dve različite mere na $\mathbb{R}^+$, čiji je zbir Lebegova mera. Time se aditivnost svodi na aditivnost integrala po meri.

Neka je $h = f + g$ i neka su φ_f i φ_g funkcije pridružene komonotonom paru $f \sim g$ kao u tački (iii) Propozicije 1.1, tako da je $f = \varphi_f \circ h$ i $g = \varphi_g \circ h$. Za φ_f se uvodi pseudo-inverzna funkcija

$$\varphi_f^*(x) = \sup\{t : \varphi_f(t) \leq x\} = \inf\{t : \varphi_f(t) > x\}.$$

Ključna je sledeća karakterizacija, koja prevodi uslov na f u uslov na h :

$$\varphi_f(y) > x \iff y > \varphi_f^*(x),$$

pa i

$$f(\omega) = \varphi_f(h(\omega)) > x \iff h(\omega) > \varphi_f^*(x).$$

Druga ekvivalencija znači da se nivo skup funkcije f na visini x poklapa sa nivo skupom funkcije h na visini $\varphi_f^*(x)$, pa definicija (5) daje

$$(\mathcal{C}) \int f d\mu = \int_0^\infty \mu(C_f(x)) dx = \int_0^\infty \mu(C_h(\varphi_f^*(x))) dx.$$

Da bi se argument $\varphi_f^*(x)$ uklonio iz podintegralne funkcije, prenosi se Lebegova mera l preko preslikavanja φ_f^* na Borelovim skupovima iz $\mathbb{R}^+$ posmatra se

$$m_f(B) = l(\{x : \varphi_f^*(x) \in B\}).$$

Radi se upravo o Lebeg–Stieltjesovoj meri koju generiše φ_f , što se vidi iz njenog dejstva na poluotvorene intervale:

$$m_f([a, b)) = l([\varphi_f(a), \varphi_f(b))) = \varphi_f(b) - \varphi_f(a).$$

Smena $y = \varphi_f^*(x)$ (videti npr. [5, Sec. 39]) sada daje

$$(\mathcal{C}) \int f d\mu = \int_0^\infty \mu(C_h(y)) dm_f,$$

a ponavljanje istog postupka sa φ_g i pripadajućom merom m_g daje

$$(\mathcal{C}) \int g d\mu = \int_0^\infty \mu(C_h(y)) dm_g.$$

Preostaje da se iskoristi veza između φ_f i φ_g . Po tački (iii) Propozicije 1.1 važi $\varphi_f(y) + \varphi_g(y) = y$, pa priraštaji ove dve funkcije na svakom intervalu daju zbir jednak dužini tog intervala; drugim rečima, $m_f + m_g = l$. Sabiranjem prethodna dva izraza i korišćenjem aditivnosti integrala po meri konačno se dobija

$$\int_0^\infty \mu(C_h(y)) dm_f + \int_0^\infty \mu(C_h(y)) dm_g = \int_0^\infty \mu(C_h(y)) dy = (\mathcal{C}) \int h d\mu,$$

što je tačno tvrđenje (7). □

Ograničenje na komonotone funkcije ovde nije tehnička sitnica. Za proizvoljan par funkcija Šokeov integral po pravilu nije aditivan, i upravo u tom odstupanju od aditivnosti smešten je efekat interakcije između kriterijuma koji se fazi merom i modeluje. Komonotonost isključuje situaciju u kojoj se dve funkcije kreću u suprotnim smerovima, pa se njihovi doprinosi sabiraju kao da je mera aditivna. Tek kada se taj uslov naruši, razlika između aditivne i neaditivne agregacije postaje vidljiva.

Svojstvo 1.5 (Neprekidnost od dole) [1]. Ako je fazi mera μ neprekidna od dole, onda je Šokeov integral takođe neprekidan od dole, to jest, za bilo koji neopadajući niz f_n važi:

$$(\mathcal{C}) \int (\sup_n f_n) d\mu = \sup_n (\mathcal{C}) \int f_n d\mu. \quad (8)$$

Dokaz. Neka je $\{f_n\}$ neopadajući niz sa supremumom f . Za fiksirano x , iz $f_n \nearrow f$ tačkasto sledi da nivo skupovi rastu, $C_{f_n}(x) \nearrow C_f(x)$: svaka tačka koja u nekom trenutku pređe nivo x ostaje iznad njega, a svaka tačka sa $f(\omega) > x$ pređe ga za dovoljno veliko n .

Pretpostavka da je fazi mera μ neprekidna od dole tada daje $\mu(C_{f_n}(x)) \rightarrow \mu(C_f(x))$, i to monotono rastuće. Kako podintegralne funkcije rastu ka graničnoj, teorema o monotonoj konvergenciji za Koši-Rimanov integral dozvoljava zamenu mesta supremumu i integralu, čime se dobija (8). $\square$

Svojstvo 1.6 (Horizontalna aditivnost) [1]. Neka je data merljiva funkcija f i $c \in \mathbb{R}^+$. Odsecanjem funkcije f na nivou c i stavljajući:

$$f = (f \wedge c) + f_c^+, \quad \text{gde je} \quad f_c^+ = \begin{cases} 0 & \text{ako je } f(\omega) \leq c, \\ f(\omega) - c & \text{ako je } f(\omega) > c, \end{cases}$$

dobija se horizontalna aditivna dekompozicija funkcije f . Za bilo koju horizontalnu aditivnu dekompoziciju Šokeov integral je aditivan:

$$(\mathcal{C}) \int f d\mu = (\mathcal{C}) \int (f \wedge c) d\mu + (\mathcal{C}) \int f_c^+ d\mu. \quad (9)$$

Dokaz. Dovoljno je primetiti da su sabirci $(f \wedge c)$ i f_c^+ komonotoni: obe funkcije su neopadajuće funkcije vrednosti $f(\omega)$, pa ne mogu da se kreću u suprotnim smerovima ni na jednom paru tačaka. Time (9) postaje poseban slučaj komonotone aditivnosti, Svojstvo 1.4. $\square$

Horizontalna dekompozicija odgovara vodoravnom preseku funkcije na visini c : ispod tog nivoa posmatra se odsečena funkcija, a iznad njega samo

višak preko praga. Ovakvo razlaganje prirodno se javlja svuda gde postoji prag, jer dozvoljava da se doprinos do praga i doprinos preko njega vrednuju odvojeno, a integral izračuna po delovima.

Teorema 1.1 [1]. Ako je μ σ - aditivna, to jest klasična mera, Šokeov integral se podudara sa Lebegovim integralom:

$$(\mathcal{C}) \int f d\mu = \int_X f d\mu.$$

Dokaz. Dokaz se izvodi najpre za proste funkcije, a zatim se prenosi na celu familiju $\mathcal{F}(X)$ graničnim prelazom.

Neka je s prosta funkcija zapisana pomoću komonotone step reprezentacije (3), sa strogo opadajućim lancem $C_1 \supset \dots \supset C_n$. Njeni nivo skupovi su tada

$$C_S(x) = \begin{cases} C_1 & \text{ako } 0 \leq x < a_1, \\ C_i & \text{ako } a_{i-1} \leq x < a_i, \\ \emptyset & \text{ako } a_n \leq x, \end{cases}$$

pa je podintegralna funkcija iz (5) stepenasta, sa vrednošću $\mu(C_i)$ na intervalu dužine $a_i - a_{i-1}$. Sabiranjem površina tih pravougaonika dobija se

$$(\mathcal{C}) \int s d\mu = a_1 \mu(C_1) + (a_2 - a_1) \mu(C_2) + (a_3 - a_2) \mu(C_3) + \dots + (a_n - a_{n-1}) \mu(C_n).$$

Do sada nije korišćena nikakva pretpostavka o μ osim monotonosti. Ako se sada iskoristi to da je μ σ - aditivna, onda se iz $C_i = A_i \cup C_{i+1}$, uz disjunktnost, dobija $\mu(C_i) - \mu(C_{i+1}) = \mu(A_i)$ (pri čemu je $C_n = A_n$). Pregrupisavanjem prethodne sume po članovima a_i svi mešoviti sabirci se potiru i ostaje

$$(\mathcal{C}) \int s d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i),$$

a to je tačno vrednost Lebegovog integrala proste funkcije s .

Dakle, dva integrala se poklapaju na $\mathcal{S}(X)$. Kako je svaka merljiva funkcija granična vrednost nekog neopadajućeg niza prostih funkcija, a oba integrala su neprekidna od dole, poklapanje se prenosi na celu familiju $\mathcal{F}(X)$. $\square$

Vredi primetiti da je za aditivnost Šokeovog integrala dovoljno da fazi mera μ bude aditivna. Prema tome, nije neophodna puna σ -aditivnost iz Teoreme 1.1 [3].

Sledeći korak je pokazati da se, kad god je μ neprekidna od dole, Šokeov integral proizvoljne (a ne nužno σ -aditivne) funkcije f i dalje može zapisati kao običan Lebegov integral, samo što se sada mera m_f i σ -algebra $\mathcal{A}_f$ prilagođavaju samoj funkciji f .

Teorema 1.2 [1]. Na prostoru fazi mere $(X, \mathcal{A}, \mu)$, gde je μ neprekidna od dole, Šokeov integral bilo koje funkcije f se podudara sa Lebegovim integralom na merljivom prostoru $(X, \mathcal{A}_f, m_f)$:

$$(\mathcal{C}) \int f d\mu = \int_X f dm_f.$$

gde je $\mathcal{A}_f$ σ - algebra generisana sa $\mathcal{C}_f$ i m_f je σ - aditivna mera indukovana na $\mathcal{A}_f$ restrikcijom μ na lanac $\mathcal{C}_f$.

Dokaz. Neka je μ neprekidna od dole. Njena restrikcija na lanac $\mathcal{C}_f$ tada dopušta tačno jedno proširenje do σ - aditivne mere na σ - algebri $\mathcal{A}_f$ koju taj lanac generiše [5, sekcija 13]; to proširenje je upravo m_f .

Šokeov integral funkcije f zavisi od mere samo preko njenih vrednosti na nivo skupovima te funkcije, a svi oni leže u $\mathcal{C}_f$, gde se μ i m_f po konstrukciji poklapaju. Stoga je $(\mathcal{C}) \int f d\mu = (\mathcal{C}) \int f dm_f$.

Preostaje da se na desnu stranu primeni Teorema 1.1: pošto je m_f σ - aditivna, njen Šokeov integral se poklapa sa Lebegovim na prostoru sa merom $(X, \mathcal{A}_f, m_f)$, a funkcija f je po konstrukciji $\mathcal{A}_f$ - merljiva. Spajanjem ova dva koraka dobija se tvrđenje. $\square$

1.5 Šokeovi kapaciteti

Sledeći koncept, koji potiče od samog Šokea [2], uvodi hijerarhiju monotonih skupovnih funkcija prema stepenu koherentnosti u odnosu na uniju i presek konačno mnogo skupova. Izlaganje u ovom odeljku prati [20, Definicije 4.1–4.2].

Definicija 1.11 [20]. Za dati broj $k \geq 2$, *Šokeov kapacitet reda k* je monotona skupovna funkcija μ na merljivom prostoru $(X, \mathcal{A})$ koja zadovoljava nejednakost

$$\mu \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) \geq \sum_{\emptyset \neq K \subseteq N_k} (-1)^{|K|+1} \mu \left(\bigcap_{j \in K} A_j \right) \quad (10)$$

za sve familije $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$, gde je $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$.

Kako skupovi A_j u nejednakosti (10) ne moraju biti međusobno različiti, svaki Šokeov kapacitet reda k je automatski i reda $k' = k - 1, k - 2, \dots, 2$, dakle, što je red niži, uslov je opštiji (slabiji). Obrnuto ne mora da važi: kapacitet reda k ne mora biti kapacitet nekog višeg reda.

Za $k = 2$, nejednakost (10) svodi se na

$$\mu(A_1 \cup A_2) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2),$$

poznatu i kao svojstvo *2-monotonosti* ili *supermodularnosti*; ovo je najopštija (najslabija) klasa Šokeovih kapaciteta. Ovo je uopštenje superaditivnosti sa disjunktnih na proizvoljne skupove, kada je $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, nejednakost se svodi na običnu superaditivnost, ali za $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ 2-monotonost postavlja dodatne zahteve, pa je klasa 2-monotonih skupovnih funkcija pravi podskup klase superaditivnih skupovnih funkcija.

Fazi mera koja zadovoljava (10) za svako $k \geq 2$ naziva se *Šokeov kapacitet reda ∞* , ili *beskonačno (totalno) monotona skupovna funkcija*; ovo je najspecijalnija (najjača) klasa u ovoj hijerarhiji. Ovakve fazi mere su usko povezane sa Dempster–Šeferovom teorijom uverenja (funkcije uverenja, eng. *belief functions*): granični slučaj kada nejednakost (10) važi kao jednakost za svako k odgovara klasičnim (aditivnim) merama.

Napomena 1.2. Dualan pojam „obrnute” nejednakosti daje *alternirajući Šokeov kapacitet reda k* : monotona skupovna funkcija μ koja zadovoljava

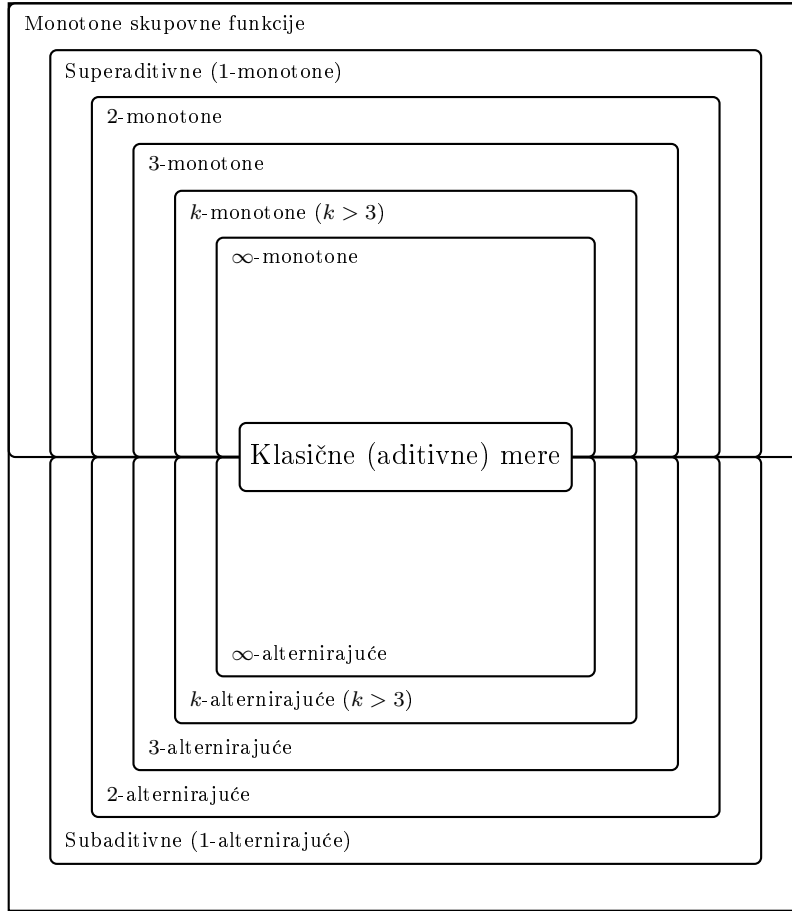
$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^k A_j\right) \leq \sum_{\emptyset \neq K \subseteq N_k} (-1)^{|K|+1} \mu\left(\bigcup_{j \in K} A_j\right) \quad (11)$$

za sve familije $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$. Za $k = 2$ ovo daje $\mu(A_1 \cap A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cup A_2)$, uopštenje subaditivnosti, analogno tome kako obična ($k = 2$) verzija (10) uopštava superaditivnost. Poredak po opštosti ostaje isti kao kod običnih Šokeovih kapaciteta: zahtevi za alternirajuće kapacitete reda k slabiji su od zahteva za redove $k + 1, k + 2, \dots$, pa alternirajući kapaciteti reda 2 čine najopštiju (najslabiju), a alternirajući kapaciteti reda ∞ najspecijalniju (najjaču) klasu u ovoj hijerarhiji. Obrće se, dakle, samo smer same nejednakosti, a time i tip interakcije koji se njome opisuje: umesto sinergije (superaditivnosti) opisuje se redundansa (subaditivnost). Kao i kod običnih kapaciteta, uslov (11) za $k = 2$ obuhvata sve nejednakosti iz definicije subaditivnosti (slučaj $A_1 \cap A_2 = \emptyset$), ali i dodatne zahteve za $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, pa su 2-alternirajuće skupovne funkcije prava potklasa subaditivnih.

U literaturi se Šokeovi kapaciteti reda k često nazivaju i *k -monotone skupovne funkcije*, a alternirajući Šokeovi kapaciteti *k -alternirajuće skupovne funkcije*; superaditivna skupovna funkcija naziva se, radi jednoobraznosti oznake u ovoj hijerarhiji, i *1-monotonom* skupovnom funkcijom [20, Sl. 4.1], ovaj naziv se odnosi konkretno na (strogo užu) superaditivnu klasu, ne na običnu monotonost skupovne funkcije iz Definicije 1.4, koja nema svoj broj reda u ovoj hijerarhiji.

Odnos između svih uvedenih klasa skupovnih funkcija, za $k \geq 1$, može se predstaviti kao lanac uklapanja jedne klase u drugu [20, Sl. 4.1]: monotone skupovne funkcije su najšira (najopštija) klasa; unutar nje leže superaditivne (1-monotone) skupovne funkcije; unutar njih 2-monotone skupovne

funkcije; zatim 3-monotone, i tako dalje, sve do ∞ -monotonih (totalno monotoni) skupovnih funkcija. Simetrično, sa „druge strane” istog lanca leže ∞ -alternirajuće skupovne funkcije, pa (za opadajuće k) k -alternirajuće skupovne funkcije, sve do 2-alternirajućih i, na kraju, subaditivnih (1-alternirajućih) skupovnih funkcija kao najšire klase te strane. Klasične (aditivne) mere leže tačno u preseku ∞ -monotonih i ∞ -alternirajućih skupovnih funkcija, to jest, aditivnost je jedina klasa koja pripada objema hijerarhijama istovremeno, što je u skladu sa intuicijom da klasična (aditivna) mera ne dozvoljava ni sinergiju (superaditivnost) ni redundantnost (subaditivnost) ni na jednom nivou k .



Slika 1: Odnos uklapanja između klasa skupovnih funkcija, za $k \geq 1$ (prilagođeno prema [20, Sl. 4.1]).

Definicija 1.12 [20]. Za monotonu skupovnu funkciju μ na merljivom prostoru $(X, \mathcal{A})$ sa $\mu(X) < \infty$, *dualna* (ili *konjugovana*) *mera* μ^* definiše se

sa

$$\mu^*(A) = \mu(X) - \mu(X \setminus A), \quad A \in \mathcal{A}. \quad (12)$$

Za normiranu meru ($\mu(X) = 1$), definicija (12) se svodi na $\mu^*(A) = 1 - \mu(\overline{A})$, gde je $\overline{A} = X \setminus A$ komplement skupa A . Lako se proverava da je μ^* takođe monotona skupovna funkcija, i da važi $(\mu^*)^* = \mu$. Prema tome, dualnost je involucija (primena dva puta vraća početnu meru).

Teorema 1.3 [20]. Neka je μ normirana 2-monotona skupovna funkcija na merljivom prostoru $(X, \mathcal{A})$. Tada je dualna mera μ^* normirana 2-alternirajuća skupovna funkcija na $(X, \mathcal{A})$.

Dokaz. Zamisao je da se 2-monotonost primeni na komplemente, a zatim De Morganovim zakonima vrati na polazne skupove. Neka su $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ proizvoljni. Polazeći od definicije (12) u normiranom slučaju ($\mu(X) = 1$), redom se dobija:

$$\begin{aligned} \mu^*(A_1 \cap A_2) &= 1 - \mu(\overline{A_1 \cap A_2}) \\ &= 1 - \mu(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) \\ &\leq 1 - (\mu(\overline{A_1}) + \mu(\overline{A_2}) - \mu(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})) \\ &= (1 - \mu(\overline{A_1})) + (1 - \mu(\overline{A_2})) - 1 + \mu(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \\ &= \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 1 + \mu(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \\ &= \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - \mu^*(A_1 \cup A_2). \end{aligned}$$

U drugom redu iskorišćen je De Morganov zakon, a u trećem 2-monotonost skupovne funkcije μ , to jest nejednakost (10) za $k = 2$ primenjena na par $\overline{A_1}, \overline{A_2}$; obrtanje smeru nejednakosti posledica je oduzimanja od jedinice. Peti red ponovo koristi De Morganov zakon u obliku $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \overline{A_1 \cup A_2}$, a poslednji definiciju (12). Dobijena nejednakost je upravo uslov iz definicije 2-alternirajuće skupovne funkcije, to jest (11) za $k = 2$. Normiranost dualne mere sledi neposredno iz $\mu^*(X) = 1 - \mu(\emptyset) = 1$. $\square$

U kontekstu odlučivanja dualna mera ima prirodno tumačenje. Ako $\mu(A)$ meri koliko koalicija kriterijuma A sama po sebi garantuje, onda $\mu^*(A)$ meri koliko joj se najviše može pripisati kada se sve što nije obuhvaćeno sa A tumači u njenu korist. Prva vrednost odgovara opreznom, a druga velikodušnom čitanju iste situacije, pa se par (μ, μ^*) može posmatrati kao donja i gornja procena važnosti koalicije. Teorema 1.3 tada kaže da se sinergija, pri prelasku na dualnu meru, pretvara u redundansu, i obrnuto.

Napomena 1.3 [20]. Teorema 1.3 može se uopštiti na proizvoljno $k \geq 2$: dualna mera normirane k -monotone skupovne funkcije je normirana k -alternirajuća skupovna funkcija, istim postupkom dokaza (De Morganovi zakoni i k -monotonost primenjeni na komplemente). Treba, međutim, naglasiti da dualna mera obične superaditivne („1-monotone”) skupovne funkcije *ne mora* biti subaditivna. Sama superaditivnost, dakle, nije dovoljna da se ovakvo tvrđenje izvede, što ilustruje sledeći primer.

Primer 1.3 [20]. Neka je $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{A} = 2^X$, i neka je μ superaditivna (1-monotona) skupovna funkcija na $(X, 2^X)$ data sledećim vrednostima (zajedno sa dualnom merom μ^* , izračunatom preko (12)):

A	$\mu(A)$	$\mu^*(A)$
$\emptyset$	0,0	0,0
$\{a\}$	0,1	0,2
$\{b\}$	0,0	0,5
$\{c\}$	0,2	0,4
$\{a, b\}$	0,6	0,8
$\{a, c\}$	0,5	1,0
$\{b, c\}$	0,8	0,9
$\{a, b, c\}$	1,0	1,0

Mera μ je normirana i superaditivna, ali **nije** 2-monotona, zbog sledeća dva narušenja nejednakosti (10) (za $k = 2$):

$$\begin{aligned}\mu(X) &= 1,0 < \mu(\{a, b\}) + \mu(\{b, c\}) - \mu(\{b\}) = 0,6 + 0,8 - 0,0 = 1,4, \\ \mu(X) &= 1,0 < \mu(\{a, c\}) + \mu(\{b, c\}) - \mu(\{c\}) = 0,5 + 0,8 - 0,2 = 1,1.\end{aligned}$$

Dualna mera μ^* , prikazana u tabeli iznad, nije subaditivna, zbog sledećeg narušenja:

$$\begin{aligned}\mu^*(\{a, b\}) &= 0,8 > \mu^*(\{a\}) + \mu^*(\{b\}) = 0,2 + 0,5 = 0,7, \\ \mu^*(\{a, c\}) &= 1,0 > \mu^*(\{a\}) + \mu^*(\{c\}) = 0,2 + 0,4 = 0,6.\end{aligned}$$

Ovaj primer pokazuje da se pretpostavka 2-monotonosti u Teoremi 1.3 ne može oslabiti do puke superaditivnosti: sama superaditivnost (1-monotonost) nije dovoljna da bi dualna mera μ^* bila subaditivna.

1.6 Sugenov integral

U ovom delu navode se definicija i osnovna svojstva Sugenovog integrala. Za više detalja pogledati [15].

Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor fazi mere i $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$. $\mathcal{F}_1(X)$ je familija svih merljivih funkcija iz X na $[0, 1]$.

Definicija 1.13 [19]. Sugenov integral je funkcionela $\mathcal{F}_1(X) \rightarrow [0, 1]$ definisana na sledeći način:

$$(\mathcal{S}) \int f d\mu := \bigvee_{x \in [0,1]} (x \wedge \mu(C_f(x))). \quad (13)$$

Slede osnovna svojstva Sugenovog integrala. U nastavku su navedena i dokazana sledeća svojstva: monotonost, $\wedge$ -homogenost, bazične vrednosti, komonotona maksitivnost, neprekidnost od dole i horizontalna maksitivnost.

Svojstvo 1.7 (Monotonost) [1].

$$f \leq g \implies (\mathcal{S}) \int f d\mu \leq (\mathcal{S}) \int g d\mu.$$

Dokaz. Neka je $f \leq g$. Tada je $C_f(x) \subseteq C_g(x)$, pa monotonost fazi mere μ daje $\mu(C_f(x)) \leq \mu(C_g(x))$ za sve $x \in [0, 1]$.

Operacija $\wedge$ je monotona po oba argumenta, pa je $x \wedge \mu(C_f(x)) \leq x \wedge \mu(C_g(x))$ za svako x . Prelaskom na supremum po x u (13) dobija se tražena nejednakost između integrala. $\square$

Svojstvo 1.8 ($\wedge$ -homogenost) [1].

$$(\mathcal{S}) \int (c \wedge f) d\mu = c \wedge (\mathcal{S}) \int f d\mu \quad \forall c \in (0, 1].$$

Dokaz. Odsecanje funkcije na nivou c menja nivo skupove samo iznad tog nivoa: za $x < c$ je $C_{c \wedge f}(x) = C_f(x)$, dok je za $x \geq c$ skup $C_{c \wedge f}(x)$ prazan, jer funkcija $c \wedge f$ nigde ne prelazi c . Supremum se stoga svodi na interval $[0, c)$:

$$\bigvee_{x \in [0,1)} x \wedge \mu(C_{c \wedge f}(x)) = \bigvee_{x \in [0,c)} x \wedge \mu(C_f(x)) = c \wedge \left(\bigvee_{x \in [0,1)} x \wedge \mu(C_f(x)) \right).$$

Poslednja jednakost važi jer je ograničavanje supremuma na $[0, c)$ isto što i presecanje celog supremuma sa c . Nejednakost $\leq$ je očigledna, jer je svaki član sa $x < c$ i sam manji od c . Za obrnutu nejednakost dovoljno je pogledati članove sa $x \geq c$: za njih je $c \wedge x \wedge \mu(C_f(x)) = c \wedge \mu(C_f(x))$, a kako je

preslikavanje $x \mapsto \mu(C_f(x))$ nerastuće, za svako $x' < c$ važi $\mu(C_f(x)) \leq \mu(C_f(x'))$, pa se vrednost $c \wedge \mu(C_f(x))$ dobija kao supremum članova $x' \wedge \mu(C_f(x'))$ kad $x' \rightarrow c^-$. Dakle nijedan član sa $x \geq c$ ne doprinosi više od onoga što je već sadržano u supremumu po $[0, c)$. $\square$

Za razliku od Šokeovog integrala, kod kojeg množenje skalarom skalira rezultat, ovde se skalar ponaša kao gornja granica: nijedna vrednost iznad c ne može da prođe kroz odsecanje, pa se i rezultat zaustavlja na c . To je prvi nagoveštaj ne-kompenzatorne prirode Sugenovog integrala.

Svojstvo 1.9 (Bazične vrednosti) [1].

$$(\mathcal{S}) \int b(c, C) d\mu = c \wedge \mu(C) \quad \forall c \in [0, 1], \forall C \in \mathcal{A}.$$

Dokaz. Neka je $f = b(c, C)$, tako da su njeni nivo skupovi $C_f(x) = C$ za $0 \leq x < c$, odnosno $C_f(x) = \emptyset$ za $x \geq c$. Za $x \geq c$ je $x \wedge \mu(\emptyset) = 0$, pa ti članovi ne doprinose supremumu, i ostaje samo deo nad intervalom $[0, c)$:

$$(\mathcal{S}) \int b(c, C) d\mu = \bigvee_{x \in [0, c)} (x \wedge \mu(C)) = c \wedge \mu(C),$$

gde poslednja jednakost sledi razlikovanjem dva slučaja: ako je $\mu(C) \geq c$, izraz $x \wedge \mu(C)$ jednak je x i njegov supremum po $x < c$ je c ; ako je pak $\mu(C) < c$, vrednost $\mu(C)$ se dostiže već za $x = \mu(C)$ i dalje se ne menja. $\square$

Kao i kod Šokeovog integrala, i ovde se javlja poseban slučaj $c = 1$: pošto je 1 jedinični element operacije $\wedge$ na $[0, 1]$ (tj. $1 \wedge \mu(C) = \mu(C)$ za svako C), bazična funkcija $b(1, C)$ nije ništa drugo do karakteristična funkcija 1_C , pa Sugenov integral tada rekonstruiše polaznu fazi meru:

$$(\mathcal{S}) \int 1_C d\mu = \mu(C) \quad \forall C \in \mathcal{A}.$$

Poređenje sa Svojstvom 1.3 pokazuje, međutim, da se dva integrala razilaze već na najjednostavnijim netrivialnim funkcijama: na bazičnoj funkciji $b(c, C)$ Šokeov integral daje proizvod $c \cdot \mu(C)$, a Sugenov minimum $c \wedge \mu(C)$. Proizvod je osetljiv na obe veličine istovremeno, dok minimum u potpunosti zanemaruje onu veću od njih. U kontekstu odlučivanja to je razlika između ocene koja uzima u obzir sve raspoložive podatke i ocene koju određuje najslabija karika.

Svojstvo 1.10 (Komonotona maksitivnost) [1].

$$f \sim g \implies (\mathcal{S}) \int (f \vee g) d\mu = (\mathcal{S}) \int f d\mu \vee (\mathcal{S}) \int g d\mu. \quad (14)$$

Dokaz. Neka je $f \sim g$. Po Propoziciji 1.1 nivo skupovi obe funkcije pripadaju istom lancu, pa su za svako x uporedivi:

$$C_f(x) \supseteq C_g(x) \text{ ili } C_g(x) \supseteq C_f(x), \quad \forall x \in [0, 1).$$

U oba slučaja je unija jednaka većem od ta dva skupa, pa monotonost fazi mere μ daje

$$\mu(C_{f \vee g}(x)) = \mu(C_f(x) \cup C_g(x)) = \mu(C_f(x)) \vee \mu(C_g(x)).$$

Uvrštavanjem u definiciju (13) i korišćenjem distributivnosti operacije $\wedge$ prema $\vee$, kao i mogućnosti da se supremum razdvoji po dva člana, dobija se jednakost (14). $\square$

Poređenje sa Svojstvom 1.4 otkriva strukturnu razliku između dva integrala: ono što je kod Šokeovog integrala sabiranje, kod Sugenovog je uzimanje maksimuma. Kod sabiranja svaki sabirak nešto doprinosi konačnom rezultatu, dok kod maksimuma doprinosi samo jedan član, a svi ostali se gube. U toj razlici je izvor kompenzacije kod jednog i njenog odsustva kod drugog integrala.

Svojstvo 1.11 (Neprekidnost od dole) [1]. Ako je fazi mera μ neprekidna od dole, onda je Sugenov integral takođe neprekidan od dole, to jest, za bilo koji neopadajući niz $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ važi:

$$(\mathcal{S}) \int \left(\sup_n f_n \right) d\mu = \sup_n (\mathcal{S}) \int f_n d\mu.$$

Dokaz. Neka $f_n \nearrow f$ tačkasto. Kao i ranije, odatle sledi $C_{f_n}(x) \nearrow C_f(x)$ za svako x , a uz pretpostavljenu neprekidnost fazi mere od dole i $\mu(C_{f_n}(x)) \nearrow \mu(C_f(x))$.

Operacija $\wedge$ je neprekidna i monotona po drugom argumentu, pa je i $x \wedge \mu(C_{f_n}(x)) \nearrow x \wedge \mu(C_f(x))$. Kako supremum rastućeg niza komutira sa supremumom po x , dobija se tvrđenje. $\square$

Svojstvo 1.12 (Horizontalna maksitivnost) [1]. Neka je data merljiva funkcija $f \in \mathcal{F}_1(X)$ i $c \in (0, 1)$. Horizontalna maksitivna dekompozicija dobija se odsecanjem funkcije f na nivou c i koristeći:

$$f = (f \wedge c) \vee f_c^\vee, \text{ gde je } f_c^\vee(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{ako } f(\omega) \leq c, \\ f(\omega), & \text{ako } f(\omega) > c. \end{cases}$$

Za bilo koju horizontalnu maksitivnu dekompoziciju Sugenov integral je maksitivan:

$$(\mathcal{S}) \int f d\mu = (\mathcal{S}) \int (f \wedge c) d\mu \vee (\mathcal{S}) \int f_c^\vee d\mu. \quad (15)$$

Dokaz. Kao i kod Šokeovog integrala, dovoljno je uočiti da su $(f \wedge c)$ i $f_c^\vee$ komonotone, obe su neopadajuće funkcije vrednosti $f(\omega)$, pa je (15) poseban slučaj komonotone maksitivnosti, Svojstvo 1.10. $\square$

Poređenje sa Šokeovim integralom

Sada kada su izloženi i Šokeov i Sugenov integral, korisno je sumirati njihove ključne razlike. Oba integrala se konstruišu na potpuno analogan način, preko istih nivo skupova $C_f(x) = \{f > x\}$ podintegralne funkcije, ali se razlikuju u operacijama kojima se rezultati na tim nivo skupovima kombinuju:

- **Operacije.** Šokeov integral koristi standardne aritmetičke operacije sabiranja i množenja (Rimanov integral funkcije $x \mapsto \mu(C_f(x))$), dok je Sugenov integral izgrađen isključivo od rešetkastih operacija maksimuma i minimuma (Svojstvo 1.8, Svojstvo 1.10).
- **Tip homogenosti.** Šokeov integral je pozitivno homogen u odnosu na množenje skalarom (Svojstvo 1.2), dok je Sugenov integral $\wedge$ -homogen (Svojstvo 1.8): skalar c se „seče” sa integralom umesto da ga skalira.
- **Tip aditivnosti.** Šokeov integral je komonotono aditivan (Svojstvo 1.4), dok je Sugenov integral komonotono maksitivan (Svojstvo 1.10): sabiranje kod jednog odgovara uzimanju maksimuma kod drugog.
- **Kompenzacija.** Zbog aditivne strukture, Šokeov integral je *kompenzatoran*: visoka vrednost funkcije na jednom delu domena može delimično nadoknaditi nisku vrednost na drugom delu. Sugenov integral, zasnovan na maksimumu i minimumu, je *ne-kompenzatoran*. Naime, dominira ga takozvani *veto-efekat*: čim vrednost funkcije premaši meru odgovarajućeg nivo skupa, dalje povećanje te vrednosti više ne utiče na rezultat integrala.

Ova razlika između aditivne, kompenzatorne agregacije i agregacije zasnovane na maksimumu, koja nije kompenzatorna, može suštinski promeniti ishod procesa odlučivanja u praktičnoj primeni.

1.7 Šilkretov integral

U ovom delu navode se definicija i osnovna svojstva Šilkretovog integrala. Za više detalja pogledati originalni rad N. Šilkreta [16], gde se posmatra u

opštijem kontekstu maksitivnih mera, kao i pregledni rad Klementa, Lija, Mesijara i Papa [10].

Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor fazi mere, kao u prethodnim odeljcima.

Definicija 1.14 [16]. Šilkretov integral je funkcionala $\mathcal{F}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, definisana na sledeći način:

$$(\mathcal{S}h) \int f d\mu := \sup\{t \cdot \mu(C_f(t)) \mid t \in \overline{\mathbb{R}}^+\}, \quad (16)$$

gde se konvencija $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ usvaja kad god je potrebno.

Funkcija $t \mapsto \mu(C_f(t))$ je nerastuća (kao i u slučaju Šokeovog i Sugenovog integrala), pa je supremum u (16) dobro definisan za svako $\mu \in \mathcal{M}$ i svako $f \in \mathcal{F}(X)$. Slede osnovna svojstva Šilkretovog integrala.

Svojstvo 1.13 (Monotonost) [9].

$$f \leq g \implies (\mathcal{S}h) \int f d\mu \leq (\mathcal{S}h) \int g d\mu.$$

Dokaz. Neka je $f \leq g$. Za svako x je tada $C_f(x) \subseteq C_g(x)$, pa monotonost fazi mere μ daje $\mu(C_f(x)) \leq \mu(C_g(x))$. Množenjem nenegativnim brojem x nejednakost se čuva, to jest $x \cdot \mu(C_f(x)) \leq x \cdot \mu(C_g(x))$. Pošto je svaki član skupa čiji se supremum uzima na levoj strani ograničen odgovarajućim članom sa desne, nejednakost ostaje i nakon prelaska na supremum. $\square$

Svojstvo 1.14 (Pozitivna homogenost) [10].

$$(\mathcal{S}h) \int (c \cdot f) d\mu = c \cdot (\mathcal{S}h) \int f d\mu \quad \forall c \in \mathbb{R}^+.$$

Dokaz. Za $c = 0$ obe strane su nula, pa neka je $c > 0$. Kao i ranije, iz $(c \cdot f)(\omega) > x \iff f(\omega) > x/c$ sledi $C_{c \cdot f}(x) = C_f(x/c)$. Smenom $y = x/c$, pri čemu y prolazi istim skupom $\overline{\mathbb{R}}^+$, faktor c se izdvaja ispred suprema:

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}h) \int (c \cdot f) d\mu &= \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}^+} x \cdot \mu(C_f(x/c)) = \sup_{y \in \overline{\mathbb{R}}^+} c \cdot y \cdot \mu(C_f(y)) \\ &= c \cdot \sup_{y \in \overline{\mathbb{R}}^+} y \cdot \mu(C_f(y)) = c \cdot (\mathcal{S}h) \int f d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

Svojstvo 1.15 (Bazične vrednosti) [9]. Za bilo koju bazičnu funkciju važi:

$$(\mathcal{S}h) \int b(c, C) d\mu = c \cdot \mu(C) \quad \forall c \in \mathbb{R}^+, \forall C \in \mathcal{A}. \quad (17)$$

Dokaz. Neka je $f = b(c, C)$. Njeni nivo skupovi su $C_f(x) = C$ za $0 \leq x < c$, odnosno $C_f(x) = \emptyset$ za $x \geq c$. Time se skup čiji se supremum traži u (16) raspada na dva dela: na prvom je vrednost $x \cdot \mu(C)$, a na drugom $x \cdot \mu(\emptyset) = 0$, pa drugi deo ne utiče na supremum. Ostaje

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}h) \int b(c, C) d\mu &= \sup \left(\{x \cdot \mu(C) \mid 0 \leq x < c\} \cup \{x \cdot 0 \mid x \geq c\} \right) \\ &= \sup_{0 \leq x < c} x \cdot \mu(C) = c \cdot \mu(C), \end{aligned}$$

gde poslednja jednakost sledi iz toga što je $x \mapsto x \cdot \mu(C)$ neopadajuća funkcija na $[0, c)$. $\square$

Posebno, za $c = 1$, Šilkretov integral karakteristične funkcije rekonstruiše datu fazi meru:

$$(\mathcal{S}h) \int 1_C d\mu = \mu(C) \quad \forall C \in \mathcal{A}.$$

Na karakterističnim funkcijama, dakle, sva tri integrala daju istu vrednost $\mu(C)$ i na toj klasi funkcija se međusobno ne mogu razlikovati. Na opštijim bazičnim funkcijama $b(c, C)$ Šokeov i Šilkretov integral i dalje se poklapaju, jer oba daju $c \cdot \mu(C)$, dok Sugenov daje $c \wedge \mu(C)$. Razlika između Šokeovog i Šilkretovog integrala pojavljuje se tek na funkcijama koje uzimaju bar dve različite pozitivne vrednosti, jer se tek tada sabiranje doprinosa po nivoima i uzimanje najboljeg pojedinačnog nivoa zaista razilaze.

Šilkretov integral se, dakle, u pogledu homogenosti ponaša kao Šokeov, dok mu je sledeće svojstvo, komonotona maksitivnost, zajedničko sa Sugenovim integralom.

Svojstvo 1.16 (Komonotona maksitivnost) [10].

$$f \sim g \implies (\mathcal{S}h) \int (f \vee g) d\mu = (\mathcal{S}h) \int f d\mu \vee (\mathcal{S}h) \int g d\mu. \quad (18)$$

Dokaz. Neka je $f \sim g$. Po Propoziciji 1.1 skupovi $C_f(x)$ i $C_g(x)$ za svako x leže u istom lancu, pa je jedan sadržan u drugom; unija dva uporediva skupa je onaj veći, a monotonost fazi mere μ tada daje

$$\mu(C_{f \vee g}(x)) = \mu(C_f(x) \cup C_g(x)) = \mu(C_f(x)) \vee \mu(C_g(x)), \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}^+.$$

Množenje nenegativnim brojem x komutira sa uzimanjem maksimuma, to jest $x \cdot (a \vee b) = (x \cdot a) \vee (x \cdot b)$, pa se maksimum može izvući ispred proizvoda,

a zatim i ispred supremuma:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}h) \int (f \vee g) d\mu &= \sup_x x \cdot (\mu(C_f(x)) \vee \mu(C_g(x))) \\
&= \left(\sup_x x \cdot \mu(C_f(x)) \right) \vee \left(\sup_x x \cdot \mu(C_g(x)) \right) \\
&= (\mathcal{S}h) \int f d\mu \vee (\mathcal{S}h) \int g d\mu.
\end{aligned}$$

Time je dobijeno (18). □

Poznato je (videti Propoziciju 4.1 u [10]) da su svojstva pozitivne homogenosti i komonotone maksitivnosti, zajedno sa netrivialnošću integrala (to jest, $\mathcal{S}h$ nije konstantna funkcionala), zapravo potpuna aksiomska karakterizacija Šilkretovog integrala: funkcionala $I : \mathcal{F}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ je Šilkretov integral u odnosu na neku fazi meru μ ako i samo ako je netrivialna, komonotono maksitivna i pozitivno homogena, gde je μ tada jednoznačno određena sa $\mu(A) = I(1_A)$.

Propozicija 1.3 [10]. Neka je μ fazi mera na merljivom prostoru $(X, \mathcal{A})$.

- (i) Za svaku neprekidnu, strogo rastuću funkciju $\varphi : \overline{\mathbb{R}}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ koja zadovoljava $\varphi(x \cdot y) \leq \varphi(x) \cdot y$ za sve $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^+ \times [0, \mu(X)]$, i za svako $f \in \mathcal{F}(X)$, važi

$$\varphi((\mathcal{S}h) \int f d\mu) \geq (\mathcal{S}h) \int (\varphi \circ f) d\mu,$$

to jest, važi nejednakost Jensenovog tipa. Ako je μ normirana fazi mera i $f : X \rightarrow [0, 1]$, ovo znači da nejednakost važi za svaki konveksni automorfizam $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

- (ii) Ako je fazi mera μ konačna, tada za sve $f, g \in \mathcal{F}(X)$ važi

$$\mu(X) \cdot (\mathcal{S}h) \int (f \cdot g) d\mu \geq \left((\mathcal{S}h) \int f d\mu \right) \cdot \left((\mathcal{S}h) \int g d\mu \right),$$

to jest, važi nejednakost Čebiševljevog tipa. Ako je μ normirana fazi mera, nejednakost se svodi na

$$(\mathcal{S}h) \int (f \cdot g) d\mu \geq \left((\mathcal{S}h) \int f d\mu \right) \cdot \left((\mathcal{S}h) \int g d\mu \right).$$

Dokazi obe nejednakosti izlaze iz okvira ovog rada i mogu se naći u izvornoj literaturi citiranoj u [10]; ovde se navode radi potpunosti, jer pokazuju da se, slično kao i za Šokeov i Sugenov integral, i za Šilkretov integral mogu uspostaviti analogoni klasičnih nejednakosti iz teorije verovatnoće i funkcionalne analize.

Svojstvo 1.17 (Neprekidnost od dole) [10]. Ako je fazi mera μ neprekidna od dole, onda je Šilkretov integral takođe neprekidan od dole, to jest, za bilo koji neopadajući niz f_n koji tačkasto konvergira ka f važi:

$$(\mathcal{S}h) \int \left(\sup_n f_n \right) d\mu = \sup_n (\mathcal{S}h) \int f_n d\mu.$$

Dokaz. Neka $f_n \nearrow f$ tačkasto. Kao i u dokazima prethodnih svojstava, odatle sledi $C_{f_n}(x) \nearrow C_f(x)$ za svako x , a zbog pretpostavljene neprekidnosti fazi mere μ od dole i $\mu(C_{f_n}(x)) \nearrow \mu(C_f(x))$. Za fiksirano $x \geq 0$ preslikavanje $a \mapsto x \cdot a$ je neopadajuće i neprekidno, pa je i $x \cdot \mu(C_{f_n}(x)) \nearrow x \cdot \mu(C_f(x))$.

Izraz $x \cdot \mu(C_{f_n}(x))$ je time neopadajući i po x i po n , a za takve dvostruko monotone familije supremumi po dva indeksa mogu da zamene mesta. Zamenom njihovog redosleda dobija se tražena jednakost. $\square$

Napomena 1.4. Ako se fazi mera μ posmatra na $(X, 2^X)$ i ako je μ *kompletno maksitivna*, to jest

$$\mu\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \bigvee_{j \in J} \mu(A_j)$$

za svaku familiju $(A_j)_{j \in J}$ podskupova od X [10], tada se Šilkretov integral svodi na jednostavnu formulu

$$(\mathcal{S}h) \int f d\mu = \bigvee_{\omega \in X} \mu(\{\omega\}) \cdot f(\omega),$$

što je posebno pogodno za primenu u diskretnom slučaju (konačan skup kriterijuma), kada se Šilkretov integral svodi na težinski maksimum proizvoda $\mu(\{x_i\}) \cdot f(x_i)$.

1.8 Diskretni slučaj

U primenama koje se tiču procesa odlučivanja (izbor kandidata, upis, rangiranje alternativa i slično) skup X je najčešće konačan skup kriterijuma, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, sa $\mathcal{A} = 2^X$. U tom slučaju je svaka funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ prosta, pa se sva tri integrala iz prethodnih odeljaka svode na eksplicitne,

konačne formule pogodne za direktan račun. Funkcija f se poistovećuje sa vektorom ocena $(f(x_1), \dots, f(x_n))$, gde $f(x_i)$ predstavlja, na primer, ocenu kandidata po kriterijumu x_i .

Radi kraćeg zapisa, u ovom i narednim odeljcima (uključujući primere u trećem delu rada) uvode se skraćene oznake za vrednosti tri integrala iz prethodnih odeljaka, za fiksiranu fazi meru μ :

$$Ch(f) := (\mathcal{C}) \int f d\mu, \quad Su(f) := (\mathcal{S}) \int f d\mu, \quad Sh(f) := (\mathcal{S}h) \int f d\mu.$$

Neka je σ permutacija skupa $\{1, \dots, n\}$ takva da važi

$$f(x_{\sigma(1)}) \leq f(x_{\sigma(2)}) \leq \dots \leq f(x_{\sigma(n)}), \quad (19)$$

uz konvenciju $f(x_{\sigma(0)}) = 0$, i za $i \in \{1, \dots, n\}$ neka je

$$A_i = \{x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(i+1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\}, \quad (20)$$

uz konvenciju $A_{n+1} = \emptyset$. Skup A_i sastoji se od $n-i+1$ kriterijuma sa najvišim ocenama, to jest od svih onih čija ocena nije manja od $f(x_{\sigma(i)})$; ti skupovi čine (kao i u Propoziciji 1.2) opadajući lanac $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} = \emptyset$.

Lema 1.1. Neka je $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, μ monotona skupovna funkcija na $(X, 2^X)$, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, sa lancem $(A_i)_{i=1}^{n+1}$ definisanim kao u (19)–(20), i neka je $\odot : \overline{\mathbb{R}}^+ \times \overline{\mathbb{R}}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ neopadajuća funkcija u obe promenljive takva da je $t \odot 0 = 0$ za svako t . Tada važi

$$\sup_{t \in \overline{\mathbb{R}}^+} (t \odot \mu(\{f \geq t\})) = \max_{i=1, \dots, n} (f(x_{\sigma(i)}) \odot \mu(A_i)).$$

Dokaz. Poluprava po kojoj se uzima supremum razbija se na intervale na kojima je skup $\{f \geq t\}$ konstantan. Neka je $i \in \{1, \dots, n\}$ i neka t pripada intervalu $(f(x_{\sigma(i-1)}), f(x_{\sigma(i)}))$. Po konstrukciji lanca (20), uslov $f(x) \geq t$ ispunjavaju tačno oni elementi čija ocena nije manja od $f(x_{\sigma(i)})$, to jest $\{f \geq t\} = A_i$. Na tom intervalu je izraz $t \odot \mu(A_i)$ neopadajuća funkcija promenljive t , jer je $\odot$ neopadajuća u prvoj promenljivoj, pa se njegov supremum dostiže u desnom kraju intervala i iznosi $f(x_{\sigma(i)}) \odot \mu(A_i)$.

Ako je $f(x_{\sigma(i-1)}) = f(x_{\sigma(i)})$, posmatrani interval je prazan i ne doprinosi supremumu. Odgovarajući član ipak ne narušava tvrđenje: zbog $A_i \subseteq A_{i-1}$ i monotonosti fazi mere μ je $\mu(A_i) \leq \mu(A_{i-1})$, pa monotonost operacije $\odot$ u drugoj promenljivoj daje $f(x_{\sigma(i)}) \odot \mu(A_i) \leq f(x_{\sigma(i-1)}) \odot \mu(A_{i-1})$. Ponašanjem tog zaključka dolazi se do indeksa čiji interval nije prazan, pa se maksimum ne menja.

Vrednost $t = 0$ nije obuhvaćena nijednim od navedenih intervala; tu je $\{f \geq 0\} = A_1$, a zbog monotonosti operacije $\odot$ u prvoj promenljivoj je $0 \odot \mu(A_1) \leq f(x_{\sigma(1)}) \odot \mu(A_1)$, pa ni ona ne može podići supremum. Preostaje deo $t > f(x_{\sigma(n)})$, gde je $\{f \geq t\} = \emptyset$; tu je $t \odot \mu(\emptyset) = t \odot 0 = 0$, pa taj deo ne može podići supremum. Ukupan supremum je stoga maksimum vrednosti dobijenih na n opisanih intervala, što je upravo tvrđenje leme. $\square$

Primenom Leme 1.1 na definicije Sugenovog i Šilkretovog integrala (Definicije 1.13 i 1.14, ili ekvivalentno formule (24) i (25) iz drugog dela rada, jer za $t' < t$ važi $\mu(\{f > t'\}) \geq \mu(\{f \geq t\})$) dobijaju se sledeće diskretne formule. Same formule izvedene su ovde; uporediti ih sa (4.2) i (4.7) u [10], gde se isti rezultat dobija preko posibilističke Mebijusove transformacije.

Posledica 1.1 (Diskretni Sugenov integral) [10, 12].

$$Su(f) = \bigvee_{i=1}^n (f(x_{\sigma(i)}) \wedge \mu(A_i)) = \max_{i=1, \dots, n} \min(f(x_{\sigma(i)}), \mu(A_i)).$$

Dokaz. Sugenov integral je po formuli (24) oblika $Su(f) = \sup\{t \wedge \mu(\{f \geq t\}) \mid t \in \overline{\mathbb{R}}^+\}$. Operacija $\wedge$ je neopadajuća u obe promenljive i zadovoljava $t \wedge 0 = 0$, pa Lema 1.1 sa $\odot = \wedge$ daje traženu formulu. $\square$

Posledica 1.2 (Diskretni Šilkretov integral) [10].

$$Sh(f) = \bigvee_{i=1}^n (f(x_{\sigma(i)}) \cdot \mu(A_i)) = \max_{i=1, \dots, n} f(x_{\sigma(i)}) \cdot \mu(A_i).$$

Dokaz. Šilkretov integral je po formuli (25) oblika $Sh(f) = \sup\{t \cdot \mu(\{f \geq t\}) \mid t \in \overline{\mathbb{R}}^+\}$. Standardno množenje je neopadajuće u obe promenljive i zadovoljava $t \cdot 0 = 0$, pa su ispunjeni uslovi Leme 1.1 za $\odot = \cdot$, odakle neposredno sledi navedena formula. $\square$

Za razliku od Sugenovog i Šilkretovog integrala, Šokeov integral se ne dobija redukcijom jednog supremuma, već računanjem Rimanovog integrala nerastuće step-funkcije $x \mapsto \mu(C_f(x))$, što je sprovedeno u dokazu Teoreme 1.1 za proizvoljnu prostu funkciju. Za konačno X dobija se poznata formula za diskretni Šokeov integral (videti i jednačine (3.5)–(3.6) u [10]):

Posledica 1.3 (Diskretni Šokeov integral) [10].

$$Ch(f) = \sum_{i=1}^n (f(x_{\sigma(i)}) - f(x_{\sigma(i-1)})) \cdot \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n f(x_{\sigma(i)}) \cdot (\mu(A_i) - \mu(A_{i+1})).$$

2 Univerzalni integral

Oslanjajući se na aksiomatski pristup univerzalnom integralu koji su uveli Klement i saradnici [8, 9], u ovom poglavlju Šokeov, Sugenov i Šilkretov integral iz prethodnog poglavlja objedinjeni su u jedinstven okvir preko pojma pseudo-sabiranja i pseudo-množenja. Razmotreni su ekstremni univerzalni integrali, konstrukcija preko integral operativnog para, kao i restrikcija na jedinični interval $[0, 1]$ i veza sa semikopulama.

2.1 Univerzalni integral - uvod i osnovni pojmovi

Šokeov i Sugenov integral predstavljaju koristan alat u rešavanju mnogih problema u inženjeringu i pri donošenju važnih odluka (na primer u politici ili upravljanju velikim korporacijama), gde je neophodna agregacija podataka. Ipak, njihova primenljivost je ograničena specifičnim operacijama na kojima počiva njihova konstrukcija, pa je potreban opštiji koncept integrala koji uopštava i Šokeov i Sugenov integral. Za funkcije sa nenegativnim realnim vrednostima takvi, takozvani univerzalni integrali zaista postoje, i mogu se definisati na proizvoljnom merljivom prostoru, za proizvoljnu monotonu skupovnu funkciju. Fiksiranjem pseudo-množenja nad nenegativnim realnim brojevima dobijaju se najmanji i najveći takav integral; poglavlje se zaključuje još jednim metodom konstrukcije i razmatranjem restrikcije na jedinični interval, to jest na fazi integrale.

L. A. Zadeh [23] i M. Sugeno [19] predložili su dva rana koncepta za merenje fazi skupova [22], svaki zasnovan na drugačijem tipu integrala. Zadeh polazi od standardne mere verovatnoće P na nekoj σ -algebri podskupova univerzalnog skupa X . Verovatnoća fazi događaja F , to jest fazi podskupa F od X sa merljivom funkcijom pripadnosti μ_F (koja se naziva i vertikalna reprezentacija od F), definiše se na sledeći način:

$$\tilde{P}(F) = \int_X \mu_F dP \quad (21)$$

gde je integral standardni Lebegov integral. Kasnija literatura je ovaj koncept intenzivno istraživala i uopštavala, ali on ima značajno ograničenje zbog σ -aditivnosti mere verovatnoće P : takva aditivnost isključuje bilo kakvu vezu između poddomena univerzalnog skupa X .

Sugeno [19] je za merenje fazi skupa F koristio *horizontalnu reprezentaciju* preko nivo skupova $(F_t)_{t \in [0,1]}$ fazi podskupa F od X , gde se skup F_t sastoji od svih tačaka skupa X sa stepenom pripadnosti većim ili jednakim t , to jest

$$F_t = \{x \in X \mid \mu_F(x) \geq t\} \quad (22)$$

zajedno sa *Sugenovim integralom* zasnovanim na neprekidnoj monotonij skupovnoj funkciji (vidi (24) ispod). Kasnije se pokazalo da se ovaj pristup može proširiti i na opšte monotone skupovne funkcije (videti npr. [3]).

Situacija je slična za *Šokeov integral* (videti (23) ispod) [2] koji je zasnovan na ne obavezno aditivnim merama (*kapacitetima*) i, kao i u slučaju Sugenovog integrala, na nivo skupovima podintegralne funkcije. Štaviše, Šokeov integral pokriva takođe i klasični Lebegov integral. Kao posledica toga, verovatnoća fazi događaja (21) može se dobiti i korišćenjem Šokeovog integrala.

I kod Šokeovog i kod Sugenovog integrala, horizontalna reprezentacija (22) fazi podskupa F od X može se proširiti na proizvoljne nenegativne merljive funkcije; horizontalni pristup integraciji, koji takođe vodi do Šokeovog integrala, može se naći i u [11, Poglavlje 4], i daje određenu slobodu pri izboru tipa mere. Šokeov integral se, s druge strane, zasniva na standardnim aritmetičkim operacijama sabiranja i množenja, što svaku agregaciju zasnovanu na njemu čini komonotono aditivnom, dok je Sugenov integral zasnovan na rešetkastim (eng. *lattice*) operacijama join (maksimum) i meet (minimum), pa je odgovarajuća agregacija obavezno join i meet-homogena. Ipak, nisu svi agregacioni procesi u inženjeringu i pri donošenju ovakvih odluka komonotono aditivni ili join i meet-homogeni. Ako bi takve agregacije trebalo modelirati integralom, bilo bi neophodno pronaći drugačije tipove integrala, različite od Šokeovog i Sugenovog.

Uzimajući za polaznu osnovu horizontalni pristup integraciji, dolazi se do koncepta univerzalnih integrala na intervalu $[0, \infty]$ koji uopštavaju i Šokeov i Sugenov integral.

Univerzalni integrali se mogu definisati na proizvoljnom merljivom prostoru $(X, \mathcal{A})$ koji se zasniva na proizvoljnoj monotonij skupovnoj funkciji $m : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ (fazi meri, u smislu Definicije 1.4 iz prvog dela rada, jedina razlika je što se ovde, radi opštosti, ne pretpostavlja $m(X) = 1$) i mogu se primeniti na proizvoljne merljive funkcije $f : X \rightarrow [0, \infty]$ koristeći njihove nivo skupove.

Važno je napomenuti da fazi mera nije obavezno σ - aditivna. Ovaj koncept datira još od Sugena [19] (gde je takođe bila neophodna neprekidnost fazi mere). Preciznije, normirane monotone skupovne funkcije na merljivom prostoru $(X, \mathcal{A})$, to jest monotone skupovne funkcije koje zadovoljavaju $m(X) = 1$ nazivaju se *fazi mere* [19] ili *kapaciteti* [2] ili (*monotone*) *igre*, zavisno od konteksta. Merljive funkcije iz X na $[0, 1]$ mogu se posmatrati kao (funkcije pripadnosti) *fazi događaji* u $(X, \mathcal{A})$ [23]. Shodno tome, Sugenov i Šokeov integral na intervalu $[0, 1]$ se često nazivaju *fazi integrali* [8]. Postoje proširenja ovih integrala na funkcije čiji je kodomen dvojna (bipolarna) skala (na primer interval $[-1, 1]$ ili prava realnih brojeva).

Pokazalo se da Šokeov i Sugenov integral imaju široku primenu, naročito

u pojedinim problemima teorije igara i u višekriterijumskom odlučivanju, gde se vektor ocena koji opisuje pojedinu alternativu modeluje kao fazi podskup skupa svih alternativa.

Druge primene tiču se operatora agregacije, prepoznavanja i klasifikacije oblika (šablona), kao i teorije informacija. Posebno popularan primer Sugenovog integrala je takozvani Hiršov indeks (h -indeks) koji meri širinu odjeka naučnog rada pojedinca na osnovu broja citiranja tog naučnog rada.

Poznato je da su i Sugenov i Šokeov integral u bliskoj vezi sa operatorima agregacije. Kao noviji primer, Grabiš i saradnici [4] ističu da su matematička svojstva ova dva integrala kao operatora agregacije opširno proučavana, i da su mnogi klasični operatori agregacije zapravo njihovi posebni slučajevi, na primer ponderisana aritmetička sredina, uređeni ponderisani prosek (OWA, eng. *ordered weighted average*), ponderisani minimum i maksimum, i slično.

Cilj rada na univerzalnim integralima jeste da se, za funkcije sa nenegativnim realnim vrednostima, dođe do koncepta integrala dovoljno opšteg da se može definisati na proizvoljnom merljivom prostoru, u odnosu na proizvoljnu (nenegativnu) monotonu skupovnu funkciju, i to tako da obuhvati i Sugenov i Šokeov integral kao posebne slučajeve.

U nastavku se, za merljiv prostor $(X, \mathcal{A})$ i merljive funkcije u smislu Definicije 1.1, koriste sledeće oznake:

Definicija 2.1 [9]. Neka je $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor.

- (i) $\mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})}$ označava skup svih $\mathcal{A}$ – merljivih funkcija $f : X \rightarrow [0, \infty]$
- (ii) za svaki broj $a \in (0, \infty]$, $\mathcal{M}_a^{(X, \mathcal{A})}$ označava skup svih monotoni skupovnih funkcija (u smislu Definicije 1.4 iz prvog dela rada) koje zadovoljavaju $m(X) = a$ pa je

$$\mathcal{M}^{(X, \mathcal{A})} = \bigcup_{a \in (0, \infty]} \mathcal{M}_a^{(X, \mathcal{A})}$$

Svaka neopadajuća funkcija $H : \mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})} \rightarrow [0, \infty]$ gde je $H(0) = 0$ naziva se *funkcija agregacije* na $\mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})}$. Koje funkcije agregacije „zaslužuju” da se nazivaju integralom klasično je i kontroverzno pitanje; u nastavku se navode tri poznata primera koji se koriste kao integrali.

Primer 2.1. Šokeov [2], Sugenov [19] i Šilkretov [16] integral, respektivno, se definišu na bilo kom merljivom prostoru $(X, \mathcal{A})$ za bilo koju merljivu funkciju $f \in \mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})}$ i za bilo koju fazi meru $m \in \mathcal{M}^{(X, \mathcal{A})}$ na sledeći način:

$$\mathbf{Ch}(m, f) = \int_0^\infty m(\{f \geq t\}) dt, \quad (23)$$

$$\mathbf{Su}(m, f) = \sup\{\min(t, m(\{f \geq t\})) \mid t \in [0, \infty]\}, \quad (24)$$

$$\mathbf{Sh}(m, f) = \sup\{t \cdot m(\{f \geq t\}) \mid t \in [0, \infty]\}, \quad (25)$$

gde se konvencija $0 \cdot \infty = 0$ usvaja kad god je potrebno.

U prvom delu rada (Sekcija 1.8), gde je fazi mera μ fiksirana, iste vrednosti su pisane bez podebljanja i bez eksplicitnog argumenta mere, $Ch(f)$, $Su(f)$, $Sh(f)$. Ovde, gde fazi mera m i sama predstavlja argument, iste tri vrednosti se pišu podebljano i sa eksplicitnim argumentom, $\mathbf{Ch}(m, f)$, $\mathbf{Su}(m, f)$, $\mathbf{Sh}(m, f)$, kako bi se razlikovale kao imenovani, konkretni primeri opšteg univerzalnog integrala $\mathbf{I}(m, f)$. U sve tri notacije, Ch uvek označava Šokeov, Su Sugenov, a Sh Šilkretov integral.

Nezavisno od toga koji merljiv prostor $(X, \mathcal{A})$ se bira, svi ovi integrali slikaju $\mathcal{M}^{(X, \mathcal{A})} \times \mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})}$ u interval $[0, \infty]$ i pri fiksiranju proizvoljne fazi mere $m \in \mathcal{M}^{(X, \mathcal{A})}$ oni postaju funkcije agregacije na $\mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})}$. Štaviše, fiksiranjem proizvoljne funkcije $f \in \mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})}$, ovi integrali su neopadajuće funkcije iz $\mathcal{M}^{(X, \mathcal{A})}$ na $[0, \infty]$.

Neka je $\mathcal{S}$ klasa svih merljivih prostora, i neka je

$$\mathcal{D}_{[0, \infty]} = \bigcup_{(X, \mathcal{A}) \in \mathcal{S}} \mathcal{M}^{(X, \mathcal{A})} \times \mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})}.$$

Svi integrali pomenuti u (23)–(25) slikaju $\mathcal{D}_{[0, \infty]}$ u $[0, \infty]$ i neopadajući su u svakoj koordinati.

Za definisanje univerzalnog integrala potreban je koncept pseudo-množenja, koji se najpre spominje (u, za nijansu, restriktivnijem smislu) u ranijoj literaturi. Treba uzeti u obzir da je pseudo-množenje prilično uopštena operacija, jer generalno nije ni asocijativna ni komutativna operacija.

Definicija 2.2 [9]. Funkcija $\otimes : [0, \infty]^2 \rightarrow [0, \infty]$ naziva se *pseudo-množenje* ako zadovoljava sledeća svojstva:

- (i) $\otimes$ je neopadajuća u svakoj komponenti, to jest, za sve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, \infty]$ gde je $a_1 \leq a_2$ i $b_1 \leq b_2$ važi $a_1 \otimes b_1 \leq a_2 \otimes b_2$;
- (ii) 0 je anihilator za $\otimes$, to jest, za svako $a \in [0, \infty]$ važi $a \otimes 0 = 0 \otimes a = 0$;
- (iii) $\otimes$ ima neutralni element različit od 0, to jest postoji $e \in (0, \infty]$ takvo da za svako $a \in [0, \infty]$ važi $a \otimes e = e \otimes a = a$.

Sva tri pomenuta integrala iz Primera 2.1 zadovoljavaju jednačinu:

$$\mathbf{I}(m_1, f_1) = \mathbf{I}(m_2, f_2)$$

kad god parovi $(m_1, f_1), (m_2, f_2) \in \mathcal{D}_{[0, \infty]}$ za svako $t \in (0, \infty]$ zadovoljavaju:

$$m_1(\{f_1 \geq t\}) = m_2(\{f_2 \geq t\}). \quad (26)$$

Na osnovu toga, uvodi se relacija ekvivalencije na klasi $\mathcal{D}_{[0, \infty]}$:

Definicija 2.3 [9]. Parovi $(m_1, f_1) \in \mathcal{M}^{(X_1, \mathcal{A}_1)} \times \mathcal{F}^{(X_1, \mathcal{A}_1)}$ i $(m_2, f_2) \in \mathcal{M}^{(X_2, \mathcal{A}_2)} \times \mathcal{F}^{(X_2, \mathcal{A}_2)}$ koji zadovoljavaju svojstvo (26) nazivaju se *integral-ekvivalentni* što se označava sa

$$(m_1, f_1) \sim_{ie} (m_2, f_2),$$

Integrali iz (23)–(25) se ne razlikuju u integral-ekvivalentnim parovima, to jest, kad god važi $(m_1, f_1) \sim_{ie} (m_2, f_2)$ tada važi i $\mathbf{Ch}(m_1, f_1) = \mathbf{Ch}(m_2, f_2)$, $\mathbf{Su}(m_1, f_1) = \mathbf{Su}(m_2, f_2)$ kao i $\mathbf{Sh}(m_1, f_1) = \mathbf{Sh}(m_2, f_2)$. Ova karakteristika je motivacija da se nerazličitost između integral-ekvivalentnih parova uzme kao aksioma za univerzalni integral.

Napomena o oznaci. U teorijskim izvorima [8, 9] integral-ekvivalentnost se označava istim simbolom $\sim$ kojim se, u [1, 3], označava i komonotonost funkcija. Kako se oba pojma javljaju u ovom radu, (komonotonost u Definiciji 1.7 iz prvog dela rada, integral-ekvivalentnost ovde), za integral-ekvivalentnost se uvodi oznaka $\sim_{ie}$, sa indeksom kao skraćenicom za *integral-ekvivalentnost*, dok oznaka $\sim$ bez indeksa ostaje rezervisana isključivo za komonotonost.

Univerzalnost integrala koja se traži jeste u tome da se isti može definisati na bilo kom merljivom prostoru $(X, \mathcal{A})$. Shodno tome, u narednim odeljcima koristi se naziv *univerzalni integral*.

Uzimajući u obzir sve što je do sada navedeno za Šokeov, Sugenov i Šil-kretov integral, dolazi se do sledećeg aksiomatskog pristupa za univerzalni integral [9]:

Definicija 2.4 [9]. Funkcija $\mathbf{I} : \mathcal{D}_{[0, \infty]} \rightarrow [0, \infty]$ naziva se *univerzalni integral* ako važe sledeće aksiome:

- (I1) Za bilo koji merljiv prostor $(X, \mathcal{A})$, restrikcija funkcije $\mathbf{I}$ na $\mathcal{M}^{(X, \mathcal{A})} \times \mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})}$ je neopadajuća u svakoj koordinati;
- (I2) postoji pseudo-množenje $\otimes : [0, \infty]^2 \rightarrow [0, \infty]$ takvo da za sve parove $(m, c \cdot \mathbf{1}_A) \in \mathcal{D}_{[0, \infty]}$

$$\mathbf{I}(m, c \cdot \mathbf{1}_A) = c \otimes m(A);$$

(I3) za sve integral - ekvivalentne parove $(m_1, f_1), (m_2, f_2) \in \mathcal{D}_{[0, \infty]}$ važi

$$\mathbf{I}(m_1, f_1) = \mathbf{I}(m_2, f_2).$$

Napomena 2.1. (i) Očigledno, sva tri integrala (23)–(25) su univerzalni integrali u smislu Definicije 2.4; da se primetiti da je pseudo-množenje $\otimes$ standardni proizvod (kod koga je 1 neutralni element) za Šokeov i Šilkretov integral, dok je za Sugenov integral minimum (sa neutralnim elementom ∞).

(ii) Aksiom (I1) je dosta prirodan u smislu da zahteva da se integral ne smanjuje ako se podintegralna funkcija i/ili osnovna (eng. underlying) monotona skupovna funkcija zameni sa većom.

(iii) Aksiom (I2) se može razumeti kao verzija „istinitosne funkcionalnosti” (kako je poznato u propozicionalnoj logici) primenjena za slučaj integrala. Eksplicitno govoreći, (I2) znači da za funkciju $c \cdot \mathbf{1}_A : X \rightarrow [0, \infty]$ (gde je $\mathbf{1}_A(x) = 1$ ako $x \in A$, i $\mathbf{1}_A(x) = 0$ inače $c \cdot \mathbf{1}_A$ zavisi jedino od c i A), integral od $c \cdot \mathbf{1}_A$ zavisi jedino od brojeva c i $m(A)$, a ne od merljivog prostora $(X, \mathcal{A})$.

Činjenica da je e levi neutralni element za $\otimes$ dozvoljava rekonstrukciju osnovne monotone skupovne funkcije m iz $\mathbf{I}$ tako što je $m(A) = \mathbf{I}(m, e \cdot \mathbf{1}_A)$.

To isto e je takođe desni neutralni element za $\otimes$ implicira da je $\mathbf{I}$ idempotentan u smislu da je $\mathbf{I}(m, c \cdot \mathbf{1}_X) = c$ za sve merljive prostore $(X, \mathcal{A}) \in \mathcal{S}$, za sve konstante $c \in [0, \infty]$ i za sve monotone skupovne funkcije $m \in \mathcal{M}_e^{(X, \mathcal{A})}$.

(iv) Konačno, aksiom (I3) garantuje da integral $\mathbf{I}$ ne pravi razliku između integral - ekvivalentnih parova.

Na osnovu aksioma (I3), za svaki univerzalni integral $\mathbf{I}$ i za svaki par $(m, f) \in \mathcal{D}_{[0, \infty]}$ vrednost $\mathbf{I}(m, f)$ zavisi jedino od funkcije $h^{(m, f)} : (0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ date sa:

$$h^{(m, f)}(x) = m(\{f \geq x\}).$$

Treba primetiti, da je za svako $(m, f) \in \mathcal{D}_{[0, \infty]}$ funkcija $h^{(m, f)}$ nerastuća, a time i Borel-merljiva.

Sa $\mathcal{H}$ će biti označen podskup svih nerastućih funkcija iz $\mathcal{F}^{((0, \infty], \mathcal{B}((0, \infty]))}$.

Propozicija 2.1 [9]. *Funkcija $\mathbf{I} : \mathcal{D}_{[0, \infty]} \rightarrow [0, \infty]$ je univerzalni integral povezan sa nekim pseudo množenjem $\otimes$ ako i samo ako postoji funkcija $J : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ koja zadovoljava sledeće uslove:*

(J1) J je neopadajuća;

(J2) $J(d \cdot \mathbf{1}_{(0,c]}) = c \otimes d$ za svako $c, d \in [0, \infty]$;

(J3) $\mathbf{I}(m, f) = J(h^{(m,f)})$ za svako $(m, f) \in \mathcal{D}_{[0,\infty]}$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $\mathbf{I}$ univerzalni integral povezan sa pseudo-množenjem $\otimes$. Po aksiomi (I3) vrednost $\mathbf{I}(m, f)$ za svako $(m, f) \in \mathcal{D}_{[0,\infty]}$ zavisi jedino od pridružene funkcije $h^{(m,f)} \in \mathcal{H}$, pa je prirodno pokušati da se J definiše tako što se svakoj funkciji $h \in \mathcal{H}$ pridruži jedan konkretan par koji je generiše.

Uzima se $X = (0, \infty]$ sa $\mathcal{A} = \mathcal{B}((0, \infty])$, funkcija $\mathbf{j} : X \rightarrow [0, \infty]$ data sa $\mathbf{j}(x) = x$, i za svako $h \in \mathcal{H}$ skupovna funkcija $m^{(h)} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ data sa

$$m^{(h)}(E) = \sup\{h(t) \mid [t, \infty] \subseteq E\}.$$

Neposrednom proverom dobija se $h^{(m^{(h)}, \mathbf{j})} = h$, to jest svaka funkcija iz $\mathcal{H}$ zaista se javlja kao funkcija nivoa nekog para. Time je opravdano definisati $J : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ sa $J(h) = \mathbf{I}(m^{(h)}, \mathbf{j})$. Uslov (J3) važi po konstrukciji, (J1) sledi iz monotonosti integrala, a (J2) iz aksiome (I2), jer je $h^{(m, c \cdot \mathbf{1}_A)} = m(A) \cdot \mathbf{1}_{(0,c]}$.

($\Leftarrow$) Neka sada postoji funkcija J koja zadovoljava (J1)–(J3); treba proveriti tri aksiome univerzalnog integrala.

Aksioma (I1): ako je $m_1 \leq m_2$ i $f_1 \leq f_2$ na istom merljivom prostoru, onda je $\{f_1 \geq x\} \subseteq \{f_2 \geq x\}$ za svako x , pa monotonost skupovne funkcije daje $h^{(m_1, f_1)} \leq h^{(m_2, f_2)}$ tačku po tačku. Po (J1) i (J3) je tada $\mathbf{I}(m_1, f_1) \leq \mathbf{I}(m_2, f_2)$.

Aksioma (I2): za funkciju oblika $c \cdot \mathbf{1}_A$ skup $\{c \cdot \mathbf{1}_A \geq x\}$ jednak je A za $x \in (0, c]$, a prazan za $x > c$, pa je $h^{(m, c \cdot \mathbf{1}_A)} = m(A) \cdot \mathbf{1}_{(0,c]}$. Sada (J3) i (J2) daju

$$\mathbf{I}(m, c \cdot \mathbf{1}_A) = J(m(A) \cdot \mathbf{1}_{(0,c]}) = c \otimes m(A).$$

Aksioma (I3): integral-ekvivalentni parovi po definiciji zadovoljavaju $h^{(m_1, f_1)} = h^{(m_2, f_2)}$, pa im po (J3) J dodeljuje istu vrednost, to jest $\mathbf{I}(m_1, f_1) = \mathbf{I}(m_2, f_2)$. $\square$

Sličan pristup ovome iz Propozicije 2.1 za univerzalne integrale može se naći i u drugim radovima iz ove oblasti. Primer koji sledi je apstraktan primer za univerzalni integral (koji nije ni Šokeovog ni Sugenovog ni Šilkretovog tipa) i ilustruje vezu između funkcija $\mathbf{I}$, $\otimes$ i J .

Primer 2.2. Neka je $\mathbf{I} : \mathcal{D}_{[0,\infty]} \rightarrow [0, \infty]$ dato sa

$$\mathbf{I}(m, f) = \sup\left\{\frac{t \cdot m(\{f \geq t\})}{t + m(\{f \geq t\})} \mid t \in (0, \infty)\right\}.$$

Tada je $\mathbf{I}$ univerzalni integral. Štaviše, tada je $\mathbf{I}(m, c \cdot \mathbf{1}_A) = \frac{c \cdot m(A)}{c + m(A)}$ to jest pridruženo pseudo-množenje $\otimes : [0, \infty]^2 \rightarrow [0, \infty]$ (sa neutralnim elementom ∞) dato je sa $a \otimes b = \frac{a \cdot b}{a + b}$, a funkcija $J : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$ data je sa

$$J(h) = \sup\left\{\frac{t \cdot h(t)}{t + h(t)} \mid t \in (0, \infty]\right\}.$$

Treba napomenuti da ovaj integral nije ni komonotono aditivan ni join ni meet - homogen.

Napomena 2.2. (i) Sva razmatranja prethodno pomenuta mogu se izomorfno transformisati tako što se interval $[0, \infty]$ (koji je ovde naveden zbog svoje opštosti) može zameniti intervalom $[0, b]$ gde $b \in (0, \infty)$.

(i) Kada se dosadašnja razmatranja svedu na interval $[0, 1]$ (to jest kada je $b = 1$), tada se interesantan model za subjektivnu evaluaciju ponaša isto kao integral koji pokriva i Šokeov i Sugenov integral. Ovaj integral je poznat kao *Imaoka integral* [6] i uklapa se u rad sa univerzalnim integralima kao u Definiciji 2.4, i odgovarajuće pseudo-množenje $\otimes$ je član Frankove familije t-normi.

2.2 Ekstremni univerzalni integrali

U onome što sledi razmatra se kanonički parcijalni poredak funkcija dve promenljive (kao što su univerzalni integrali, pseudo-množenja, binarni operatori agregacije i tome slično), definisan tačkasto: za dve takve funkcije F_1 i F_2 sa istim domenom važi $F_1 \leq F_2$ ako je $F_1(a, b) \leq F_2(a, b)$ za svaki par (a, b) iz domena. Najmanji i najveći elementi posmatraju se u odnosu na ovaj parcijalni poredak.

Vodeći se idejom o unutrašnjim i spoljašnjim merama kao u Karateodori-jevom pristupu [11] [5], dolazi se do sledećih rezultata:

Propozicija 2.2 [9]. Neka je $\otimes : [0, \infty]^2 \rightarrow [0, \infty]$ pseudo-množenje na $[0, \infty]$. Tada je najmanji univerzalni integral $\mathbf{I}_\otimes$, a najveći univerzalni integral je $\mathbf{I}^\otimes$, u odnosu na $\otimes$ i dati su sa:

$$\mathbf{I}_\otimes(m, f) = \sup\{t \otimes m(\{f \geq t\}) \mid t \in (0, \infty]\}, \quad (27)$$

$$\mathbf{I}^\otimes(m, f) = (\text{essup}_m f) \otimes \sup\{m(\{f \geq t\}) \mid t \in (0, \infty]\}, \quad (28)$$

gde je

$$\text{essup}_m f = \sup\{t \in [0, \infty] \mid m(\{f \geq t\}) > 0\}.$$

Dokaz. Tvrdjenje ima dva dela: treba pokazati da su $\mathbf{I}_\otimes$ i $\mathbf{I}^\otimes$ uopšte univerzalni integrali u odnosu na $\otimes$, a zatim da svaki drugi takav integral leži između njih.

Donja granica. Da je $\mathbf{I}_\otimes$ iz (27) univerzalni integral u odnosu na $\otimes$ proverava se neposredno iz definicije. Neka je sada $\mathbf{I}$ proizvoljan univerzalni integral u odnosu na $\otimes$. Za svaki merljiv prostor $(X, \mathcal{A})$, svaku $f \in \mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})}$ i svako $t \in (0, \infty]$ funkcija $t \cdot \mathbf{1}_{\{f \geq t\}}$ ne prelazi f ni u jednoj tački, jer je ispod nivoa t jednaka nuli, a na skupu $\{f \geq t\}$ iznosi tačno t . Monotonost integrala i aksioma (I2) zato za svako $m \in \mathcal{M}^{(X, \mathcal{A})}$ daju

$$\mathbf{I}(m, t \cdot \mathbf{1}_{\{f \geq t\}}) = t \otimes m(\{f \geq t\}) \leq \mathbf{I}(m, f).$$

Leva strana ne zavisi od izbora t osim kroz sam izraz, pa prelaskom na supremum po t sledi $\mathbf{I}_\otimes \leq \mathbf{I}$.

Gornja granica. I za $\mathbf{I}^\otimes$ iz (28) se proverava da je univerzalni integral u odnosu na $\otimes$. Da bi se pokazalo da je on najveći, par (m, f) se zamenjuje pogodnim parom na realnoj poluosi. Za dati merljiv prostor $(X, \mathcal{A})$ i par $(m, f) \in \mathcal{M}^{(X, \mathcal{A})} \times \mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})}$ posmatra se funkcija $g : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ data sa

$$g = \operatorname{essup}_m f \cdot \mathbf{1}_{[0, \sup\{m(\{f \geq t\}) \mid t \in (0, \infty]\}]}.$$

Ona je Borel-merljiva, i ako se sa λ označi Lebegova mera na merljivom prostoru $([0, \infty], \mathcal{B}([0, \infty]))$, onda je $m(\{f \geq t\}) \leq \lambda(\{g \geq t\})$ za svako $t \in (0, \infty]$, drugim rečima, par (λ, g) ima „šire” nivo skupove od polaznog para. Po Propoziciji 2.1 vrednost univerzalnog integrala zavisi samo od funkcije nivoa, pa odatle za svaki univerzalni integral $\mathbf{I}$ sledi $\mathbf{I}(m, f) \leq \mathbf{I}(\lambda, g)$.

Ako je $\mathbf{I}$ zasnovan na $\otimes$, desna strana se računa neposredno, jer je g oblika konstanta puta indikator intervala:

$$\mathbf{I}(\lambda, g) = \operatorname{essup}_m f \otimes \lambda([0, \sup\{m(\{f \geq t\}) \mid t \in (0, \infty]\}]).$$

Kako je desna strana upravo $\mathbf{I}^\otimes(m, f)$, dobija se $\mathbf{I}(m, f) \leq \mathbf{I}^\otimes(m, f)$, čime je dokaz završen. $\square$

Jasno se vidi da je $\mathbf{Su} = \mathbf{I}_{Min}$ i $\mathbf{Sh} = \mathbf{I}_{Prod}$, gde su pseudo-množenja Min i $Prod$ data sa $Min(a, b) = \min(a, b)$ i $Prod(a, b) = a \cdot b$. Treba primetiti da nelinearnost Sugenovog integrala $\mathbf{Su}$ implicira da su, u opštem slučaju, i univerzalni integrali nelinearni.

Ne postoji ni najmanje ni najveće pseudo-množenje $\otimes$ na $[0, \infty]$. Ipak, ako se fiksira neutralni element $e \in (0, \infty]$, tada je najmanje pseudo-množenje $\otimes_e$ sa neutralnim elementom e dato sa

$$a \otimes_e b = \begin{cases} 0, & \text{ako je } (a, b) \in [0, e]^2, \\ \max(a, b), & \text{ako je } (a, b) \in [e, \infty]^2, \\ \min(a, b), & \text{inače,} \end{cases}$$

a najveće pseudo-množenje $\otimes^e$ sa neutralnim elementom e sa

$$a \otimes^e b = \begin{cases} \min(a, b), & \text{ako je } \min(a, b) = 0 \text{ ili } (a, b) \in (0, e]^2, \\ \infty, & \text{ako je } (a, b) \in (e, \infty]^2, \\ \max(a, b), & \text{inače.} \end{cases}$$

Propozicija 2.3 [9]. Neka je $\otimes : [0, \infty]^2 \rightarrow [0, \infty]$ pseudo-množenje na $[0, \infty]$ sa neutralnim elementom $e \in (0, \infty]$, i neka je sa $\mathcal{K}$ označen skup svih univerzalnih integrala $\mathbf{I}$ takav da:

(i) za svako $m \in \mathcal{M}_e^{(X, \mathcal{A})}$ i svako $c \in [0, \infty]$ važi

$$\mathbf{I}(m, c \cdot \mathbf{1}_X) = c,$$

(ii) za svako $m \in \mathcal{M}^{(X, \mathcal{A})}$ i svako $A \in \mathcal{A}$ važi

$$\mathbf{I}(m, e \cdot \mathbf{1}_A) = m(A). \quad (29)$$

Tada su $\mathbf{I}_{\otimes_e}$ i $\mathbf{I}^{\otimes_e}$ najmanji i najveći element skupa $\mathcal{K}$, respektivno, a njihove eksplicitne formule date su sa:

$$\mathbf{I}_{\otimes_e}(m, f) = \max(m(\{f \geq e\}), \operatorname{essinf}_m f),$$

gde je

$$\operatorname{essinf}_m f = \sup\{t \in [0, \infty] \mid m(\{f \geq t\}) \geq e\},$$

i, uz skraćene oznake $u = \operatorname{essup}_m f$ i $v = \lim_{t \rightarrow 0^+} m(\{f \geq t\})$,

$$\mathbf{I}^{\otimes_e}(m, f) = \begin{cases} \min(u, v), & \text{ako je } \max(u, v) \leq e, \\ \infty, & \text{ako je } \min(u, v) > e, \\ u, & \text{ako je } v < e \text{ i } u \geq e, \\ v, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dokaz. Radi kraćeg zapisa uvodi se oznaka $\alpha = \operatorname{essinf}_m f$. Dokaz se vodi razlikovanjem položaja neutralnog elementa e u odnosu na α , jer upravo od toga zavisi kako se pseudo-množenje $\otimes_e$ ponaša na pojedinim delovima poluprave.

Slučaj $e < \alpha$. Za t izvan intervala $[e, \alpha)$ odgovarajući članovi ne mogu podići supremum, pa se on računa samo po tom intervalu:

$$\mathbf{I}_{\otimes_e}(m, f) = \sup\{t \otimes_e m(\{f \geq t\}) \mid t \in (0, \infty]\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup\{t \otimes_e m(\{f \geq t\}) \mid t \in [e, \alpha)\} \\
&= \max(m(\{f \geq e\}), \alpha).
\end{aligned}$$

Slučaj $e = \alpha$. Ovde treba razlikovati dve mogućnosti. Ako je $m(\{f \geq e\}) = e = \alpha$, vrednost integrala je neposredno $\mathbf{I}_{\otimes_e}(m, f) = e = \max(m(\{f \geq e\}), \alpha)$. Ako je pak $m(\{f \geq e\}) < e = \alpha$, onda je na intervalu $(0, e)$

$$\sup\{t \otimes_e m(\{f \geq t\}) \mid t \in (0, e)\} = \sup\{t \mid t \in (0, e)\} = e,$$

pa je i u ovom podslučaju $\mathbf{I}_{\otimes_e}(m, f) = e = \max(m(\{f \geq e\}), \alpha)$.

Slučaj $e > \alpha$. Poluprava se deli na dva dela, na kojima se supremumi računaju odvojeno:

$$\sup\{t \otimes_e m(\{f \geq t\}) \mid t \in [e, \infty]\} = m(\{f \geq e\}),$$

$$\sup\{t \otimes_e m(\{f \geq t\}) \mid t \in (0, e)\} = \alpha.$$

Uzimanjem većeg od ta dva broja ponovo se dobija $\mathbf{I}_{\otimes_e}(m, f) = \max(m(\{f \geq e\}), \alpha)$.

Time je formula za $\mathbf{I}_{\otimes_e}$ dokazana u svim slučajevima. Formula za $\mathbf{I}^{\otimes^e}$ dobija se analognim razmatranjem slučaja, pa se njen dokaz ovde ne navodi. $\square$

Posledica 2.1 [9]. Najmanji univerzalni integral $\mathbf{I}_{\otimes_\infty}$ dat je formulom

$$\mathbf{I}_{\otimes_\infty}(m, f) = \begin{cases} m(\{f = \infty\}), & \text{ako je } m(X) < \infty, \\ \max(m(\{f = \infty\}), \tau), & \text{inače,} \end{cases}$$

gde je $\tau = \sup\{t \in [0, \infty] \mid m(\{f \geq t\}) = \infty\}$.

2.3 Konstrukcija univerzalnih integrala

Propozicija 2.2 daje dva metoda za konstrukciju univerzalnih integrala, oba zasnovana na pseudo-množenju $\otimes$ na $[0, \infty]$. Oslanjajući se na [1], u nastavku se uvodi i treći metod konstrukcije.

Za dato pseudo-množenje $\otimes$ na $[0, \infty]$, pretpostavlja se da postoji pseudo-sabiranje $\oplus : [0, \infty]^2 \rightarrow [0, \infty]$ koje je neprekidno, asocijativno, neopadajuće, 0 je neutralni element (odakle sledi i komutativnost operacije $\oplus$, videti [7]) i distributivno s leva u odnosu na $\otimes$, to jest za sve $a, b, c \in [0, \infty]$ važi:

$$(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$$

Par $(\oplus, \otimes)$ se tada naziva *integral operativni par*.

Za svaki merljiv prostor $(X, \mathcal{A})$ i za svaku *prostu* funkciju $s \in \mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})}$, to jest s ima konačan range $\text{Ran}(s) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ gde je $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ i uz notacije $A_i = \{s \geq a_i\}$, $a_0 = 0$ i $b_i = \inf\{c \in [0, \infty] \mid a_{i-1} \oplus c = a_i\}$ dobija se sledeća jedinstvena reprezentacija:

$$s = \bigoplus_{i=1}^n b_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}, \quad (30)$$

Skup svih prostih funkcija iz $\mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})}$ označava se sa $\mathcal{F}_{simple}^{(X, \mathcal{A})}$.

Napomena 2.3. Koristeći prethodnu reprezentaciju za funkciju $s \in \mathcal{F}_{simple}^{(X, \mathcal{A})}$, treba primetiti da neprekidnost $\oplus$ implicira $a_{i-1} \oplus b_i = a_i$ za svako $i \in \{1, \dots, n\}$. Sa indukcijom i asocijativnošću $\oplus$ dobija se, za svako $j \in \{1, \dots, n-1\}$ i $r \in \{1, \dots, n-j\}$:

$$a_{j-1} \oplus b_j \oplus \dots \oplus b_{j+r} = a_{j+r}$$

Koristeći monotonost i neprekidnost $\oplus$, dobija se:

$$b_j \oplus \dots \oplus b_{j+r} = \inf\{c \in [0, \infty] \mid a_{j-1} \oplus c = a_{j+r}\}.$$

Analogno Lebegovom integralu, za svaki merljiv prostor $(X, \mathcal{A})$ i svaku monotonu skupovnu funkciju m na $(X, \mathcal{A})$ neka je $\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}^{simple} : \mathcal{M}^{(X, \mathcal{A})} \times \mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})} \rightarrow [0, \infty]$ funkcija data sa:

$$\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}^{simple} \left(m, \bigoplus_{i=1}^n b_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \right) = \bigoplus_{i=1}^n b_i \otimes m(A_i). \quad (31)$$

Za prostu funkciju $s \in \mathcal{F}_{simple}^{(X, \mathcal{A})}$ može postojati nekoliko reprezentacija:

$$s = \bigoplus_{j=1}^k c_j \cdot \mathbf{1}_{C_j} \quad (32)$$

gde je svako c_j nenegativno i merljivi skupovi $C_1, \dots, C_k$ formiraju (ne obavezno strogo) opadajući lanac. Ovakve reprezentacije nazivaju se *komonotone reprezentacije* jer su funkcije $c_1 \cdot \mathbf{1}_{C_1}, \dots, c_k \cdot \mathbf{1}_{C_k}$ po parovima komonotone.

Komonotona reprezentacija (32) ima minimalan broj članova sume. Zbog [1], za svaku komonotonu reprezentaciju od s i za svaku monotonu skupovnu funkciju $m \in \mathcal{M}^{(X, \mathcal{A})}$ dobija se:

$$\bigoplus_{j=1}^k c_j \otimes m(C_j) = \bigoplus_{i=1}^n b_i \otimes m(A_i).$$

Prethodna jednakost implicira monotonost $\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}^{simple}$ na $\mathcal{F}_{simple}^{(X, \mathcal{A})}$: zaista, za dve proizvoljne funkcije $s_1, s_2 \in \mathcal{F}_{simple}^{(X, \mathcal{A})}$ gde je $s_1 \leq s_2$, neka je $\text{Ran}(s_1) \cup \text{Ran}(s_2) = \{u_1, \dots, u_k\}$ gde je $0 \leq u_1 < \dots < u_k$ i ako se uzme $c_1 = u_1$ i za svako $j \in \{2, \dots, k\}$ neka je:

$$c_j = \inf\{c \in [0, \infty] \mid u_{j-1} \oplus c = u_j\}$$

Tada su komonotone reprezentacije za s_1 i s_2 date sa:

$$s_1 = \bigoplus_{j=1}^k c_j \cdot \mathbf{1}_{C_j}$$

$$s_2 = \bigoplus_{j=1}^k c_j \cdot \mathbf{1}_{D_j}$$

gde je $C_j \subseteq D_j$ za svako $j \in \{1, \dots, k\}$. Sada, monotonost $\oplus$ i $\otimes$ daje:

$$\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}^{simple}(m, s_1) = \bigoplus_{j=1}^k c_j \otimes m(C_j) \leq \bigoplus_{j=1}^k c_j \otimes m(D_j) = \mathbf{I}_{\oplus, \otimes}^{simple}(m, s_2).$$

Ako je skup X konačan (na primer skup kriterijuma), onda je svaka funkcija $f \in \mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})}$ prosta, pa je prema tome $\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}^{simple}$ dobro definisan univerzalni integral. Treba primetiti da ovo jeste slučaj za većinu primena u inženjeringu i pri donošenju važnih odluka.

Naredna propozicija odnosi se na opšti slučaj i navodi se univerzalni integral na proizvoljnom merljivom prostoru $(X, \mathcal{A})$.

Propozicija 2.4 [9]. Neka je $(\oplus, \otimes)$ proizvoljan integral operativni par. Funkcija $\mathbf{I}_{\oplus, \otimes} : \mathcal{D}_{[0, \infty]} \rightarrow [0, \infty]$ data sa:

$$\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}(m, f) = \sup\{\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}^{simple}(\mu, s) \mid (\mu, s) \in \mathcal{D}_{[0, \infty]}, s \text{ je prosta, } h^{(\mu, s)} \leq h^{(m, f)}\}$$

je univerzalni integral koji je proširenje $\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}^{simple}$ iz (31).

Dokaz. Dokaz ima dva dela: najpre se provere aksiome (I1) i (I2), a zatim se aksioma (I3) svodi na Propoziciju 2.1 konstrukcijom odgovarajuće funkcije J .

Iz same definicije se vidi da je $\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}$ dobro definisana i neopadajuća funkcija sa $\mathcal{D}_{[0, \infty]}$ u $[0, \infty]$, jer se supremum uzima po sve široj familiji kada par (m, f)

raste. Za funkcije oblika $c \cdot \mathbf{1}_A$ supremum se dostiže na samoj toj funkciji, pa je

$$\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}(m, c \cdot \mathbf{1}_A) = c \otimes m(A),$$

čime su (I1) i (I2) ispunjene.

Preostaje (I3), i dovoljno ju je proveriti najpre za proste funkcije. Neka je $(m, s) \in \mathcal{D}_{[0, \infty]}$, gde je $s \in \mathcal{F}_{simple}^{(X, A)}$ prosta funkcija oblika (32). Pridružena funkcija $h^{(m, s)} : (0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ tada je i sama prosta i nerastuća, sa konačnim skupom vrednosti $\text{Ran}(h^{(m, s)}) = \{u_1, u_2, \dots, u_{k+1}\}$, gde je $u_1 > u_2 > \dots > u_{k+1} = 0$. Kao nerastuća step-funkcija, ona se može zapisati preko svojih intervala konstantnosti:

$$h^{(m, s)} = \sum_{j=1}^k u_j \cdot \mathbf{1}_{(c_{j-1}, c_j]} \quad (33)$$

za pogodne $c_1, \dots, c_k \in (0, \infty]$ sa $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_k$. Ista funkcija dopušta i zapis preko lanca skupova iz reprezentacije funkcije s ,

$$h^{(m, s)} = \sum_{j=1}^n m(A_j) \cdot \mathbf{1}_{(a_{j-1}, a_j]}, \quad (34)$$

pri čemu je $\{u_1, \dots, u_{k+1}\} = \{0, m(A_1), \dots, m(A_n)\}$; zapis (33) je pritom onaj sa najmanjim mogućim brojem sabiraka.

Na osnovu prvog zapisa definiše se

$$J\left(\sum_{j=1}^k u_j \cdot \mathbf{1}_{(c_{j-1}, c_j]}\right) = \bigoplus_{j=1}^k d_j \otimes u_j, \quad (35)$$

gde je $d_j = \inf\{d \in [0, \infty] \mid c_{j-1} \oplus d = c_j\}$, to jest d_j je „priraštaj” potreban da se od c_{j-1} stigne do c_j u smislu operacije $\oplus$. Distributivnost operacije $\oplus$ sleva u odnosu na $\otimes$, zajedno sa Napomenom 2.3, obezbeđuje da se ovako definisano J slaže sa (31), to jest

$$\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}^{simple}(m, s) = J(h^{(m, s)}). \quad (36)$$

Za proizvoljan par $(m, f) \in \mathcal{D}_{[0, \infty]}$ funkcija J se sa prostih funkcija proširuje na celu familiju $\mathcal{H}$ aproksimacijom odozdo:

$$J(h) = \sup\{J(s) \mid s \in \mathcal{H}, s \text{ je prosta, } s \text{ je neprekidna s leva i } s \leq h\}.$$

Tako prošireno J zadovoljava uslove (J1)–(J3), pa Propozicija 2.1 daje da je $\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}$ univerzalni integral.

Konačno, da je reč o proširenju funkcije $\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}^{simple}$ vidi se iz same konstrukcije: za prostu funkciju s supremum u definiciji dostiže se na samom paru (m, s) , pa je

$$\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}^{simple}(m, s) = \mathbf{I}_{\oplus, \otimes}(m, s).$$

□

Treba primetiti da integrali Šokeovog tipa iz [13] jesu specijalni slučajevi univerzalnog integrala tipa $\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}$ gde je $(\oplus, \otimes)$ odgovarajući integral operativni par.

Primer 2.3. (i) Za svako pseudo množenje $\otimes$ na $[0, \infty]$, par $(\sup, \otimes)$ je integral operativni par i važi $\mathbf{I}_{\sup, \otimes} = \mathbf{I}_{\otimes}$ (što implicira da je $\mathbf{Su} = \mathbf{I}_{\sup, \text{Min}}$).

(ii) Šokeov integral je povezan s parom $(+, \text{Prod})$ to jest $\mathbf{Ch} = \mathbf{I}_{+, \text{Prod}}$.

(iii) Za svako $p \in (0, \infty)$ neka je definisano pseudo - sabiranje $+_p : [0, \infty]^2 \rightarrow [0, \infty]$ sa

$$a +_p b = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Par $(+_p, \text{Prod})$ je integral operativni par i važi

$$\mathbf{I}_{+_p, \text{Prod}}(m, f) = (\mathbf{Ch}(m^p, f^p))^{\frac{1}{p}},$$

to jest $\mathbf{I}_{+_p, \text{Prod}}$ može da se izvede iz Šokeovog integrala $\mathbf{Ch}$ (doduše ne-standardnom transformacijom) primenjujući funkciju $x \mapsto x^p$ na oba argumenta para (m, f) . Očigledno, $\mathbf{I}_{+_p, \text{Prod}}$ nije ni join ni meet - homogen, i komonotono aditivan je ako i samo ako $p = 1$.

Napomena 2.4 Veza sa diskretnim slučajem iz prvog dela rada. Ova konstrukcija objašnjava diskretne formule za Šokeov, Sugenov i Šilkretov integral izvedene u prvom delu rada (Sekcija 1.8). Za konačno $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ lanac $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \emptyset$ iz (20) je tačno komonotona reprezentacija (u smislu Propozicije 1.2, odnosno konstrukcije (32) iz Propozicije 2.4) podintegralne funkcije f . Kako je za konačno X svaka funkcija prosta, diskretne formule za $Ch(f)$, $Su(f)$, $Sh(f)$ su, u notaciji Primera 2.3 i formule (31), tačno vrednosti $\mathbf{I}_{\oplus, \otimes}^{simple}(\mu, f)$ za odgovarajući integral operativni par:

- $(\oplus, \otimes) = (+, \text{Prod})$ za Šokeov integral, gde su $b_i = f(x_{\sigma(i)}) - f(x_{\sigma(i-1)})$ prirastaji (aditivna komonotona reprezentacija (3));
- $(\oplus, \otimes) = (\sup, \text{Min})$ za Sugenov integral, gde su $a_i = f(x_{\sigma(i)})$ same vrednosti funkcije (maksitivna komonotona reprezentacija (4));

- $(\oplus, \otimes) = (\sup, \text{Prod})$ za Šilkretov integral, sa istim vrednostima $a_i = f(x_{\sigma(i)})$.

Drugim rečima, u diskretnom slučaju sve tri formule imaju istu „geometriju”, isti lanac $A_1 \supset \dots \supset A_n$ dobijen sortiranjem kriterijuma po oceni, a razlikuju se jedino u načinu na koji se ocene $f(x_{\sigma(i)})$ kombinuju sa vrednostima mere $\mu(A_i)$ (zbir prirastaja i proizvoda kod Šokeovog integrala nasuprot maksimumu minimuma, odnosno maksimumu proizvoda, kod Sugenovog i Šilkretovog integrala). Ova razlika u načinu kombinovanja, aditivna i kompenzatorna kod Šokeovog integrala, naspram ne-kompenzatorne (zasnovane na maksimumu) kod Sugenovog i Šilkretovog integrala, je od ključnog značaja za izbor integrala u praktičnoj primeni.

2.4 Univerzalni integrali na intervalu $[0,1]$

Za monotonu skupovnu funkciju $m \in \mathcal{M}_1^{(X,\mathcal{A})}$ (fazi mera m zadovoljava $m(X) = 1$) i funkciju $f \in \mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}$ za koju važi $\text{Ran}(f) \subseteq [0,1]$ (i u ovom slučaju piše se skraćeno $f \in \mathcal{F}_{[0,1]}^{(X,\mathcal{A})}$), univerzalni integrali su vezani za pseudo-množenja $\otimes$ čiji je neutralni element 1.

U tom slučaju se restrikcija univerzalnog integrala na klasu

$$\mathcal{D}_{[0,1]} = \bigcup_{(X,\mathcal{A}) \in \mathcal{S}} \mathcal{M}_1^{(X,\mathcal{A})} \times \mathcal{F}_{[0,1]}^{(X,\mathcal{A})}$$

naziva univerzalni integral na skali $[0,1]$, ili jednostavno fazi integral. Pri tom se koristi samo restrikcija pseudo-množenja $\otimes$ na $[0,1]^2$, koja se još naziva semikopula, konjunktorka ili t-seminorma.

Semikopula (konjunktorka, t - seminorma) je binarna operacija $\otimes : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ koja je neopadajuća po obe komponente, neutralni element je 1 i zadovoljeno je $a \otimes b \leq \min(a,b)$ za sve $(a,b) \in [0,1]^2$.

Štaviše, ako je pseudo-množenje $\otimes : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ asocijativno i komutativno, tada se ono naziva trougaona (triangularna) norma, skraćeno t-norma.

2.5 Semikopule i konkretni primeri pseudo-množenja

Prirodno je zapitati se kako se apstraktan pojam semikopule (t-seminorme) odnosi na konkretna pseudo-množenja $\otimes$ koja su već viđena kod Šokeovog, Sugenovog i Šilkretovog integrala u prvom delu rada. Odgovor je da su upravo ta tri pseudo-množenja, ograničena na $[0,1]^2$, tri od četiri tzv. *prototipske t-norme*:

- T_M , to jest restrikcija operacije Min na $[0, 1]^2$, koja je *najveća* semikopula i predstavlja osnovu Sugenovog integrala (Definicija 1.13);
- T_P , to jest restrikcija operacije Prod (standardno množenje) na $[0, 1]^2$, koja predstavlja osnovu i Šilkretovog integrala (Definicija 1.14) i Šokeovog integrala na skali $[0, 1]$;
- T_L , data sa $T_L(a, b) = \max(a + b - 1, 0)$ (Lukašijevičeva t-norma), koja u ovom radu nije direktno korišćena, ali se navodi radi potpunosti klasifikacije;
- T_D , data sa $T_D(a, b) = 0$ za $(a, b) \in [0, 1]^2$ i $T_D(a, b) = a \cdot b$ inače, koja je *najmanja* semikopula („drastičan proizvod”).

Sve četiri su ujedno i t-norme (asocijativne i komutativne), pa dakle i semikopule u smislu prethodne definicije. Osim toga, T_M , T_P i T_L su takođe i *kopule*, zajedničke raspodele slučajnih vektora sa uniformnim marginalama na $[0, 1]$, dok T_D to nije. U terminima stohastičke zavisnosti, T_M opisuje potpunu pozitivnu (komonotonu) zavisnost, T_P nezavisnost, a T_L potpunu negativnu (kontramonotonu) zavisnost.

Ova veza objašnjava, na jeziku semikopula, izbor pseudo-množenja u konstrukciji sva tri integrala: Šokeov i Šilkretov integral dele isto pseudo-množenje (T_P , standardni proizvod), dok Sugenov integral koristi T_M (minimum). Sama kompenzatornost integrala, međutim, određena je izborom pseudo-*sabiranja* $\oplus$, a ne pseudo-množenja, videti diskusiju u Sekciji 1.6, gde je pokazano da Šokeov integral (sa $\oplus = +$) ostaje kompenzatoran, dok su Sugenov i Šilkretov integral (oba sa $\oplus = \sup$) ne-kompenzatorni, uprkos tome što Šilkretov deli pseudo-množenje sa Šokeovim integralom. Vredi primetiti i da T_M i T_P , iako su to dve semikopule na kojima počivaju sva tri integrala iz ovog rada, nisu dva ekstrema u smislu stohastičke zavisnosti: ekstremi su T_M (potpuna pozitivna zavisnost) i T_L (potpuna negativna zavisnost), dok T_P leži između njih i odgovara nezavisnosti.

2.6 Konstrukcija preko kopula i dalja svojstva

Još jedna važna podklasa skupa semikopula su *kopule*, koje je uveo Sklar [17] (videti i pregledni udžbenik [14]). Kopule su zajedničke funkcije raspodele, ograničene na $[0, 1]^2$, dvodimenzionalnih slučajnih vektora čije su marginalne raspodele uniformne na $[0, 1]$. U skupu semikopula, kopule C se karakterišu svojstvom *dvostruke monotonosti* (eng. *2-increasing*): za sve $0 \leq a \leq b \leq 1$ i $0 \leq c \leq d \leq 1$ mora važiti

$$C(a, c) + C(b, d) - C(b, c) - C(a, d) \geq 0. \quad (37)$$

Vredi primetiti da leva strana nejednakosti (37) predstavlja upravo verovatnoću pravougaonika $[a, b] \times [c, d]$ u odnosu na dvodimenzionalnu raspodelu verovatnoće koju opisuje kopula C .

Od četiri prototipske t-norme uvedene u prethodnom odeljku, jedino T_D nije kopula; preostale tri karakterišu tri posebna slučaja stohastičke zavisnosti marginalnih slučajnih promenljivih: T_M , kao najveća kopula, opisuje komonotonu rastuću zavisnost (potpunu pozitivnu zavisnost), T_P opisuje nezavisnost, a najmanja kopula T_L opisuje kontramonotonu zavisnost (potpunu negativnu zavisnost), što se lepo poklapa sa zapažanjem o stohastičkoj zavisnosti iz prethodnog odeljka.

Sve konstrukcije koje se tiču univerzalnih integrala na skali $[0, \infty]$, a zasnovane su na fiksiranom pseudo-množenju na $[0, \infty]$, mogu se primeniti i na univerzalne integrale na skali $[0, 1]$, polazeći od fiksirane semikopule umesto od pseudo-množenja. Na primer, najmanji i najveći univerzalni integral $\mathbf{I}_{\otimes}$ i $\mathbf{I}^{\otimes}$ na skali $[0, 1]$, u odnosu na semikopulu $\otimes$, dati su, redom, sa:

$$\mathbf{I}_{\otimes}(m, f) = \sup\{t \otimes m(\{f \geq t\}) \mid t \in [0, 1]\}, \quad (38)$$

$$\mathbf{I}^{\otimes}(m, f) = (\text{essup}_m f) \otimes \sup\{m(\{f \geq t\}) \mid t \in (0, 1]\}. \quad (39)$$

Vredi primetiti da je, za fiksiranu strogu t-normu T , odgovarajući univerzalni integral $\mathbf{I}_T$ poznat kao *Sugeno–Veberov integral* [21]. Štaviše, za opštu semikopulu $\otimes$, odgovarajući univerzalni integral $\mathbf{I}_{\otimes}$ nazvan je *seminormirani integral* u radu [18]. Treba takođe primetiti da je, za svaku semikopulu $\otimes$ koja je različita od minimuma, dobijeni univerzalni integral $\mathbf{I}_{\otimes}$ join-homogen, ali nije ni meet-homogen ni komonotono aditivan.

Činjenica da su kopule specijalan slučaj semikopula omogućava još jednu, drugačiju konstrukciju univerzalnih integrala, koja prati izračunavanje standardne očekivane vrednosti iz teorije verovatnoće:

Propozicija 2.5 [9]. Neka je $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ kopula, i neka je funkcija $K_C : \mathcal{D}_{[0,1]} \rightarrow [0, 1]$ definisana sa

$$K_C(m, f) = P_C(\{(x, y) \in (0, 1]^2 \mid y < m(\{f \geq x\})\}), \quad (40)$$

gde je P_C verovatnosna mera na $\mathcal{B}([0, 1]^2)$ indukovana kopulom C , to jest, za sve $(a, b) \in [0, 1]^2$ važi $P_C((0, a) \times (0, b)) = C(a, b)$. Tada je K_C univerzalni integral na skali $[0, 1]$.

Dokaz. Treba proveriti sve tri aksiome univerzalnog integrala, ograničene na skalu $[0, 1]$.

Monotonost, to jest aksioma (I1), čita se neposredno iz (40): uvećanjem m ili f skup $\{(x, y) \mid y < m(\{f \geq x\})\}$ se može samo proširiti, a P_C je monotona kao verovatnosna mera.

Za aksiomu (I2) posmatra se funkcija oblika $t \cdot \mathbf{1}_A$. Njen nivo skup je A za $x \leq t$, a prazan iznad, pa se oblast iz (40) svodi na pravougaonik, i po definiciji mere P_C dobija se

$$K_C(m, t \cdot \mathbf{1}_A) = P_C((0, t] \times (0, m(A))) = C(t, m(A)),$$

za svako $m \in \mathcal{M}_1^{(X, \mathcal{A})}$, $t \in [0, 1]$ i $A \in \mathcal{A}$. Time kopula C igra ulogu pseudo-množenja.

Najzad, izraz (40) zavisi od para (m, f) isključivo preko preslikavanja $x \mapsto m(\{f \geq x\})$. Integral-ekvivalentni parovi po definiciji imaju isto to preslikavanje, pa im se i vrednosti K_C poklapaju, čime je zadovoljena i aksioma (I3). $\square$

Napomena 2.5 [9]. (i) Univerzalni integral K_{T_P} na skali $[0, 1]$ jednak je upravo Šokeovom integralu na $[0, 1]$. Kopula T_P ukazuje da u ovom slučaju vrednosti osnovne monotone skupovne funkcije i podintegralne funkcije deluju nezavisno jedna od druge. Konkretno, ako je $m(A) > 0$ i $f_t = t \cdot \mathbf{1}_A$, tada je $K_{T_P}(m, f_t)$ strogo rastuća funkcija po t . Sa druge strane, K_{T_M} je tačno Sugenov integral (Definicija 1.13). Kopule T_M i T_L ukazuju na maksimalnu pozitivnu, odnosno maksimalnu negativnu zavisnost između vrednosti osnovne monotone skupovne funkcije i podintegralne funkcije. Kao posledica toga, za m , A i f_t kao gore, $K_{T_M}(m, f_t)$ je strogo rastuća funkcija po t samo ako je $t < m(A)$, dok je $K_{T_L}(m, f_t)$ strogo rastuća funkcija po t samo ako je $t > 1 - m(A)$.

(ii) Ako je X konačan skup, to jest $X = \{1, 2, \dots, n\}$ za neko $n \in \mathbb{N}$ i $\mathcal{A} = 2^X$, tada svaka funkcija $f \in \mathcal{F}_{[0,1]}^{(X, \mathcal{A})}$ odgovara n -torki $(f(1), f(2), \dots, f(n)) \in [0, 1]^n$. Neka je σ permutacija skupa X takva da je $f(\sigma(1)) \leq f(\sigma(2)) \leq \dots \leq f(\sigma(n))$, i neka je $A_i = \{\sigma(i), \dots, \sigma(n)\}$. Tada se, uz konvencije $A_{n+1} = \emptyset$ i $f(\sigma(0)) = 0$, dobijaju dva ekvivalentna izraza za $K_C(m, f)$:

$$\begin{aligned} K_C(m, f) &= \sum_{i=1}^n (C(f(\sigma(i)), m(A_i)) - C(f(\sigma(i)), m(A_{i+1}))) \\ &= \sum_{i=1}^n (C(f(\sigma(i)), m(A_i)) - C(f(\sigma(i-1)), m(A_i))). \end{aligned}$$

Ovo je direktno uopštenje diskretnih formula za Šokeov i Sugenov integral iz Sekcije 1.8, jer se za $C = T_P$ (Šokeov slučaj) i $C = T_M$ (Sugenov slučaj) formula svodi tačno na formule iz Posledica 1.3 i 1.1. Treba

naglasiti da Šilkretov integral *nije* obuhvaćen ovom konstrukcijom: njegovo pseudo-množenje jeste Prod , ali za $C = T_P$ konstrukcija K_C daje Šokeov, a ne Šilkretov integral. Šilkretov integral se dobija kao $\mathbf{I}_{\text{Prod}}$, to jest kao *najmanji* univerzalni integral u odnosu na isto to pseudo-množenje (Propozicija 2.2).

- (iii) Moguće je uvesti univerzalne integrale na proizvoljnoj fiksiranoj skali $[0, e]$ za $e \in (0, \infty]$, posmatrajući, za fiksiran merljiv prostor $(X, \mathcal{A})$, monotone skupovne funkcije iz $\mathcal{M}_e^{(X, \mathcal{A})}$ i funkcije $f \in \mathcal{F}^{(X, \mathcal{A})}$ sa $\text{Ran}(f) \subseteq [0, e]$, radeći sa pseudo-množenjem $\otimes$ čiji je neutralni element e (u stvari, potrebna je samo restrikcija $\otimes$ na $[0, e]^2$). Ipak, za svaki univerzalni integral $\mathbf{U}^{[0, e]}$ na $[0, e]$ postoji univerzalni integral $\mathbf{I}$ na skali $[0, 1]$ takav da važi:

$$\mathbf{U}^{[0, e]}(m, f) = \begin{cases} e \cdot \mathbf{I}\left(\frac{m}{e}, \frac{f}{e}\right), & \text{ako je } e < \infty, \\ \frac{\mathbf{I}\left(\frac{m}{m+1}, \frac{f}{f+1}\right)}{1 - \mathbf{I}\left(\frac{m}{m+1}, \frac{f}{f+1}\right)}, & \text{ako je } e = \infty. \end{cases} \quad (41)$$

Obrnuto, ako je $\mathbf{I}$ univerzalni integral na skali $[0, 1]$, tada je $\mathbf{U}^{[0, e]}$ konstruisan preko (41) zaista univerzalni integral na $[0, e]$.

- (iv) Ako se krene od $\mathbf{I} = K_{T_M}$ (to jest, od Sugenovog integrala na skali $[0, 1]$), formula (41) uvek dovodi do Sugenovog integrala $Su^{[0, e]}$ na $[0, e]$, zbog činjenice da restrikcija operacije Min na $[0, e]^2$ ima neutralni element baš e . Sa druge strane, ako je $\mathbf{I} = K_{T_P}$ (to jest, Šokeov integral na skali $[0, 1]$), formula (41) dovodi do univerzalnog integrala koji se *razlikuje* od Šokeovog integrala na $[0, e]$, kad god je $e \neq 1$. Ova asimetrija između Sugenovog i Šokeovog integrala u pogledu invarijantnosti na promenu skale još je jedna posledica njihove fundamentalno različite (join-meet naspram aritmetičke) strukture, već viđene u Sekciji 1.6.

Pregled specijalnih univerzalnih integrala

Integral	Na skali $[0, \infty]$	Na skali $[0, 1]$
Šokeov integral [2]	$\mathbf{I}_{+, \text{Prod}}$	K_{T_P}
Sugenov integral [19]	$\mathbf{I}_{\text{Min}}$	K_{T_M}
Šilkretov integral [16]	$\mathbf{I}_{\text{Prod}}$	–
integral Šokeovog tipa [13]	$\mathbf{I}_{\oplus, \otimes} [(\oplus, \otimes) \text{ integral}]$ operativni par]	–
Sugeno–Veberov integral [21]	–	$\mathbf{I}_T$ [T stroga t-norma]
seminormirani integral [18]	–	$\mathbf{I}_{\otimes}$ [$\otimes$ semikopula]
Imaoka integral [6]	–	K_C [C Frankova kopula]
„suprotan” Sugenov integral [6]	–	K_{T_L}

Tabela 1. Specijalni slučajevi univerzalnog integrala i odgovarajuća pseudo-množenja, odnosno semikopule.

Ova tabela zatvara krug između prvog i drugog dela rada: Šokeov, Sugenov i Šilkretov integral iz prvog dela prepoznaju se kao specijalni slučajevi univerzalnog integrala, dobijeni za konkretno pseudo-množenje ili semikopulu. Šokeov i Sugenov integral javljaju se na dva načina, preko integral operativnog para na skali $[0, \infty]$ i preko kopule na skali $[0, 1]$, a Šilkretov samo na prvi način.

3 Primeri primene u procesu odlučivanja

Oslanjajući se na primenu integrala agregacije u procesu odlučivanja [4, 20], u ovom poglavlju teorijski aparat iz prethodna dva poglavlja primenjen je na tri originalna primera iz konteksta rada u internacionalnoj školi: izbor nastavnog kadra (Primer 1), upis dece kroz hijerarhijski model (Primer 2), i rangiranje predmeta za uvođenje Cambridge programa (Primer 3). Svaki primer osmišljen je tako da osvetli drugačiji aspekt razlika između Šokeovog, Sugenovog i Šilkretovog integrala, kao i njihove univerzalne varijante.

3.1 Primer 1: Izbor nastavnog kadra u internacionalnoj školi

U ovom primeru posmatra se proces zapošljavanja nastavnog kadra u internacionalnoj školi. Kandidati se ocenjuju po pet kriterijuma, koji se poistovećuju sa skupom $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$:

- x_1 , stručnost za predmet koji nastavnik predaje,
- x_2 , znanje engleskog jezika (usmeno i pismeno),
- x_3 , pismenost za vođenje dokumentacije (e-dnevnik, papirni dnevnik i sl.),
- x_4 , rad sa kolegama (timski rad),
- x_5 , rad sa decom.

Poslednja dva kriterijuma su namerno razdvojena: x_4 meri sposobnost saradnje sa odraslima (kolegama), dok x_5 meri sposobnost rada sa decom, to jest populacijom koja u internacionalnoj školi često obuhvata decu iz ratom pogođenih područja i decu koja se često sele, gde se ljudi ponašaju bitno drugačije nego u kolegijalnom okruženju. Svaki kandidat se poistovećuje sa funkcijom $f : X \rightarrow [0, 1]$, gde $f(x_i)$ predstavlja (normalizovanu) ocenu kandidata po kriterijumu x_i .

Definisanje fazi mere

Kriterijumima x_4 i x_5 pridaje se izuzetna važnost (škola prioritetno traži nastavnika koji dobro funkcioniše i sa kolegama i sa decom), i pretpostavlja se da postoji *sinergija* između njih: nastavnik koji je dobar u oba konteksta poseduje prenosivu, generalizovanu socio-emocionalnu kompetenciju, koja je vrednija od proste sume dva odvojena talenta. Ovi zahtevi modeluju se (2-aditivnom) fazi merom $\mu : 2^X \rightarrow [0, 1]$, $X = \{x_1, \dots, x_5\}$, koja je određena sledećim uslovima:

- (1) $\mu(\{x_1\}) = 0,15$, $\mu(\{x_2\}) = 0,10$, $\mu(\{x_3\}) = 0,05$, $\mu(\{x_4\}) = \mu(\{x_5\}) = 0,25$;
- (2) $\mu(\{x_4, x_5\}) = 0,70 > \mu(\{x_4\}) + \mu(\{x_5\}) = 0,50$;
- (3) za ostale skupove $S \subseteq X$ mera je zbir težina pojedinačnih kriterijuma, $\mu(S) = \sum_{x_i \in S} \mu(\{x_i\})$, uz jedan izuzetak: za svaki skup S koji sadrži i x_4 i x_5 važi $\mu(S) = \sum_{x_i \in S} \mu(\{x_i\}) + 0,20$;
- (4) $\mu(X) = 1$, $\mu(\emptyset) = 0$.

Uslov (2) izražava sinergiju: par kriterijuma x_4 i x_5 vredi više od zbira svojih pojedinačnih doprinosa, a razlika od 0,20 je *sinergijski bonus* iz uslova (3). Uslov (4) je saglasan sa uslovima (1) i (3), jer je

$$\mu(X) = 0,15 + 0,10 + 0,05 + 0,25 + 0,25 + 0,20 = \mathbf{1,00},$$

a kako su sve težine i bonus nenegativni, mera je i monotona. Dakle, μ je normirana fazi mera u smislu Definicije 1.4, superaditivna na paru $\{x_4, x_5\}$.

Uslov „eliminatorsni prag” za engleski jezik

Nezavisno od gornje fazi mere, znanje engleskog jezika mora dostići nivo B2, jer je to jezik svakodnevne komunikacije u školi. Ovo se modeluje kao *spoljni filter*, primenjen pre integrala: kandidat sa $f(x_2)$ ispod praga automatski ispada iz razmatranja, bez obzira na ostale ocene. Koristi se sledeća orijentaciona skala (CEFR nivoi preslikani na $[0, 1]$): B2 $\approx 0,6$ –0,7, C1 $\approx 0,8$ –0,9, C2 = 1. Prag je postavljen na $f(x_2) \geq 0,6$.

Kandidati

Za svakog kandidata navode se ocene, sortiranje po formuli (19), lanac A_i iz (20) i vrednosti $\mu(A_i)$, a zatim se korak po korak primenjuju Posledice 1.3, 1.1 i 1.2.

Kandidat A. Ocene: $f(x_1) = 1,0$ (stručnost), $f(x_2) = 0,0$ (engleski), $f(x_3) = 1,0$ (pismenost), $f(x_4) = 0,5$ (kolege), $f(x_5) = 0,4$ (deca).

i	kriterijum	$f(x_{\sigma(i)})$	A_i	$\mu(A_i)$
1	engleski	0,0	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	1,00
2	deca	0,4	$\{x_1, x_3, x_4, x_5\}$	0,90
3	kolege	0,5	$\{x_1, x_3, x_4\}$	0,45
4	stručnost	1,0	$\{x_1, x_3\}$	0,20
5	pismenost	1,0	$\{x_3\}$	0,05

Formirajući opadajući lanac kao u prethodnoj tabeli, radi potpunosti se eksplicitno računa svaka vrednost mere iz definicije, sabiranjem odgovarajućih pojedinačnih težina (i sinergijskog bonusa, kada je primenljivo):

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \\
\mu(A_1) &= \mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_2\}) + \mu(\{x_3\}) + \mu(\{x_4\}) + \mu(\{x_5\}) + \text{sinergija} \\
&= 0,15 + 0,10 + 0,05 + 0,25 + 0,25 + 0,20 = \mathbf{1,00} \\
A_2 &= \{x_1, x_3, x_4, x_5\}, \\
\mu(A_2) &= \mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_3\}) + \mu(\{x_4\}) + \mu(\{x_5\}) + \text{sinergija} \\
&= 0,15 + 0,05 + 0,25 + 0,25 + 0,20 = \mathbf{0,90} \\
A_3 &= \{x_1, x_3, x_4\}, \\
\mu(A_3) &= \mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_3\}) + \mu(\{x_4\}) = 0,15 + 0,05 + 0,25 = \mathbf{0,45} \\
A_4 &= \{x_1, x_3\}, \\
\mu(A_4) &= \mu(\{x_1\}) + \mu(\{x_3\}) = 0,15 + 0,05 = \mathbf{0,20} \\
A_5 &= \{x_3\}, \quad \mu(A_5) = \mu(\{x_3\}) = \mathbf{0,05}
\end{aligned}$$

Šokeov integral (Posledica 1.3), po definiciji se sabira pet članova, gde svaki član množi *prirastaj* ocene (razliku između trenutne i prethodne ocene u sortiranom nizu, uz konvenciju $f(x_{\sigma(0)}) = 0$) sa merom odgovarajućeg skupa A_i :

$$Ch(f) = \sum_{i=1}^5 (f(x_{\sigma(i)}) - f(x_{\sigma(i-1)})) \cdot \mu(A_i)$$

Član $i = 1$: $(0,0 - 0,0) \cdot 1,00 = 0,0 \cdot 1,00 = 0,00$
Član $i = 2$: $(0,4 - 0,0) \cdot 0,90 = 0,4 \cdot 0,90 = 0,36$
Član $i = 3$: $(0,5 - 0,4) \cdot 0,45 = 0,1 \cdot 0,45 = 0,045$
Član $i = 4$: $(1,0 - 0,5) \cdot 0,20 = 0,5 \cdot 0,20 = 0,10$
Član $i = 5$: $(1,0 - 1,0) \cdot 0,05 = 0,0 \cdot 0,05 = 0,00$
 $Ch(f) = 0,00 + 0,36 + 0,045 + 0,10 + 0,00 = \mathbf{0,505}$

Sugenov integral (Posledica 1.1), za svaki od pet članova uzima se *manja* od dve vrednosti (sama ocena ili mera skupa A_i), a zatim se od svih pet tih minimuma uzima *najveći*:

$$Su(f) = \max_{i=1,\dots,5} \min(f(x_{\sigma(i)}), \mu(A_i))$$

Član $i = 1$: $\min(0,0; 1,00) = 0,00$ (manji je 0,0)
Član $i = 2$: $\min(0,4; 0,90) = 0,40$ (manji je 0,4)
Član $i = 3$: $\min(0,5; 0,45) = 0,45$ (manji je 0,45)
Član $i = 4$: $\min(1,0; 0,20) = 0,20$ (manji je 0,20)
Član $i = 5$: $\min(1,0; 0,05) = 0,05$ (manji je 0,05)
 $Su(f) = \max\{0,00; 0,40; 0,45; 0,20; 0,05\} = \mathbf{0,45}$

Šilkretov integral (Posledica 1.2), za svaki od pet članova ocena se množi merom skupa A_i , a zatim se uzima najveći od tih pet proizvoda:

$$Sh(f) = \max_{i=1,\dots,5} f(x_{\sigma(i)}) \cdot \mu(A_i)$$

Član $i = 1$: $0,0 \cdot 1,00 = 0,00$
Član $i = 2$: $0,4 \cdot 0,90 = 0,36$
Član $i = 3$: $0,5 \cdot 0,45 = 0,225$
Član $i = 4$: $1,0 \cdot 0,20 = 0,20$
Član $i = 5$: $1,0 \cdot 0,05 = 0,05$
 $Sh(f) = \max\{0,00; 0,36; 0,225; 0,20; 0,05\} = \mathbf{0,36}$

Kandidat A je odličan stručnjak, ali ne zna engleski ($f(x_2) = 0,0 < 0,6$), po eliminatornom pragu, **automatski ispada iz razmatranja**, bez obzira na gornje vrednosti integrala (koje su ovde izračunate samo ilustrativno).

Kandidat B. Isti kao Kandidat A, osim poboljšanog rada sa kolegama: $f(x_4) = 0,9$ (umesto 0,5). Lanac A_i i mere $\mu(A_i)$ ostaju identični kao kod Kandidata A (prikazano

gore), jer promena $f(x_4)$ sa 0,5 na 0,9 ne menja redosled sortiranja, menja se samo koji broj se množi/upoređuje na mestu $i = 3$ (kriterijum kolege, x_4):

$$\begin{aligned} Ch(f) &= (0,0-0,0) \cdot 1,00 + (0,4-0,0) \cdot 0,90 \\ &\quad + (0,9-0,4) \cdot 0,45 + (1,0-0,9) \cdot 0,20 + (1,0-1,0) \cdot 0,05 \\ &= 0,00 + 0,36 + 0,225 + 0,02 + 0,00 = \mathbf{0,605} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Su(f) &= \max\{\min(0,0; 1,00); \min(0,4; 0,90); \\ &\quad \min(0,9; 0,45); \min(1,0; 0,20); \min(1,0; 0,05)\} \\ &= \max\{0,00; 0,40; 0,45; 0,20; 0,05\} = \mathbf{0,45} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sh(f) &= \max\{0,0 \cdot 1,00; 0,4 \cdot 0,90; \\ &\quad 0,9 \cdot 0,45; 1,0 \cdot 0,20; 1,0 \cdot 0,05\} \\ &= \max\{0,00; 0,36; 0,405; 0,20; 0,05\} = \mathbf{0,405} \end{aligned}$$

Primećuje se da se Šokeov i Šilkretov integral povećavaju (jer je $f(x_4)$ direktno pomnožen/dodat u sumu), dok Sugenov integral ostaje na 0,45, **nepromenjen**, jer je odgovarajući član i dalje ograničen sa $\mu(A_3) = 0,45$, koji sad postaje „usko grlo” umesto same ocene. Ovo je konkretna ilustracija *veto-efekta* Sugenovog integrala: dokle god je $f(x_4) \geq \mu(A_3) = 0,45$, dalje povećanje ocene x_4 ne menja rezultat, Šokeov i Šilkretov integral, s druge strane, nastavljaju da nagrađuju svako poboljšanje. I Kandidat B ostaje eliminisan zbog engleskog jezika.

Kandidat C. Mladi nastavnik, tek iznad proseka tehnički, ali izuzetno jak u radu sa ljudima. Ocene: $f(x_1) = 0,6$, $f(x_2) = 0,7$, $f(x_3) = 0,6$, $f(x_4) = 0,9$, $f(x_5) = 0,85$.

i	kriterijum	$f(x_{\sigma(i)})$	A_i	$\mu(A_i)$
1	stručnost	0,6	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	1,00
2	pismenost	0,6	$\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$	0,85
3	engleski	0,7	$\{x_2, x_4, x_5\}$	0,80
4	deca	0,85	$\{x_4, x_5\}$	0,70
5	kolege	0,9	$\{x_4\}$	0,25

Šokeov integral, svaki od pet članova je (prirastaj ocene) $\times$ (mera preostalog skupa):

$$\begin{aligned} Ch(f) &= (0,6-0,0) \cdot 1,00 + (0,6-0,6) \cdot 0,85 \\ &\quad + (0,7-0,6) \cdot 0,80 + (0,85-0,7) \cdot 0,70 + (0,9-0,85) \cdot 0,25 \\ &= 0,6 \cdot 1,00 + 0,0 \cdot 0,85 + 0,1 \cdot 0,80 + 0,15 \cdot 0,70 + 0,05 \cdot 0,25 \\ &= 0,60 + 0,00 + 0,08 + 0,105 + 0,0125 = \mathbf{0,7975} \end{aligned}$$

Sugenov integral, najveći od pet minimuma $\min(f(x_{\sigma(i)}), \mu(A_i))$:

$$\begin{aligned} Su(f) &= \max\{\min(0,6; 1,00); \min(0,6; 0,85); \\ &\quad \min(0,7; 0,80); \min(0,85; 0,70); \min(0,9; 0,25)\} \\ &= \max\{0,60; 0,60; 0,70; 0,70; 0,25\} = \mathbf{0,70} \end{aligned}$$

Šilkretov integral, najveći od pet proizvoda $f(x_{\sigma(i)}) \cdot \mu(A_i)$:

$$\begin{aligned} Sh(f) &= \max\{0,6 \cdot 1,00; 0,6 \cdot 0,85; \\ &\quad 0,7 \cdot 0,80; 0,85 \cdot 0,70; 0,9 \cdot 0,25\} \\ &= \max\{0,60; 0,51; 0,56; 0,595; 0,225\} = \mathbf{0,60} \end{aligned}$$

Engleski $0,7 \geq 0,6$, Kandidat C **prolazi** prag i sva tri integrala su visoka, uprkos skromnoj tehničkoj stručnosti.

Kandidat D. „Solidan svuda”: $f(x_1) = 0,7$, $f(x_2) = 0,6$, $f(x_3) = 0,8$, $f(x_4) = 0,7$, $f(x_5) = 0,7$.

i	kriterijum	$f(x_{\sigma(i)})$	A_i	$\mu(A_i)$
1	engleski	0,6	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	1,00
2	stručnost	0,7	$\{x_1, x_3, x_4, x_5\}$	0,90
3	kolege	0,7	$\{x_3, x_4, x_5\}$	0,75
4	deca	0,7	$\{x_3, x_5\}$	0,30
5	pismenost	0,8	$\{x_3\}$	0,05

(Kriterijumi x_1, x_4, x_5 su međusobno izjednačeni na 0,7; redosled među njima ne utiče na rezultat.)

Šokeov integral:

$$\begin{aligned} Ch(f) &= (0,6-0,0) \cdot 1,00 + (0,7-0,6) \cdot 0,90 \\ &\quad + (0,7-0,7) \cdot 0,75 + (0,7-0,7) \cdot 0,30 + (0,8-0,7) \cdot 0,05 \\ &= 0,6 \cdot 1,00 + 0,1 \cdot 0,90 + 0,0 \cdot 0,75 + 0,0 \cdot 0,30 + 0,1 \cdot 0,05 \\ &= 0,60 + 0,09 + 0,00 + 0,00 + 0,005 = \mathbf{0,695} \end{aligned}$$

Sugenov integral:

$$\begin{aligned} Su(f) &= \max\{\min(0,6; 1,00); \min(0,7; 0,90); \\ &\quad \min(0,7; 0,75); \min(0,7; 0,30); \min(0,8; 0,05)\} \\ &= \max\{0,60; 0,70; 0,70; 0,30; 0,05\} = \mathbf{0,70} \end{aligned}$$

Šilkretov integral:

$$\begin{aligned} Sh(f) &= \max\{0,6 \cdot 1,00; 0,7 \cdot 0,90; \\ &\quad 0,7 \cdot 0,75; 0,7 \cdot 0,30; 0,8 \cdot 0,05\} \\ &= \max\{0,60; 0,63; 0,525; 0,21; 0,04\} = \mathbf{0,63} \end{aligned}$$

Ovde je **prvi put** $Su(f) > Ch(f)$: $0,70 > 0,695$. To pokazuje da ne postoji opšte pravilo „Šokeov je uvek najveći”. Uređenosti koje uvek važe jesu $Sh(f) \leq Su(f)$ (za normiranu fazi meru i ocene u $[0, 1]$, što sledi iz elementarne nejednakosti $x \cdot y \leq \min(x, y)$ za $x, y \in [0, 1]$) i $Sh(f) \leq Ch(f)$, koja važi i bez tih pretpostavki: za svako i je $Ch(f) \geq \sum_{j \leq i} (f(x_{\sigma(j)}) - f(x_{\sigma(j-1)})) \cdot \mu(A_j) \geq \mu(A_i) \cdot f(x_{\sigma(i)})$, jer je $\mu(A_j) \geq \mu(A_i)$ za $j \leq i$, pa je $Ch(f)$ veće i od najvećeg takvog proizvoda, to jest od $Sh(f)$. Neodređen ostaje jedino odnos između Ch i Su . Engleski 0,6 je tačno na granici praga, Kandidat D **prolazi**, za dlaku.

Kandidat E. Fenomenalan stručnjak, odličan i sa kolegama i sa decom, ali sa slabim engleskim: $f(x_1) = 1,0$, $f(x_2) = 0,3$, $f(x_3) = 0,9$, $f(x_4) = 0,9$, $f(x_5) = 0,9$.

i	kriterijum	$f(x_{\sigma(i)})$	A_i	$\mu(A_i)$
1	engleski	0,3	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	1,00
2	pismenost	0,9	$\{x_1, x_3, x_4, x_5\}$	0,90
3	kolege	0,9	$\{x_1, x_4, x_5\}$	0,85
4	deca	0,9	$\{x_1, x_5\}$	0,40
5	stručnost	1,0	$\{x_1\}$	0,15

Šokeov integral, pet članova, svaki (prirastaj ocene) $\times$ (mera preostalog skupa):

$$\begin{aligned}
Ch(f) &= (0,3-0,0) \cdot 1,00 + (0,9-0,3) \cdot 0,90 \\
&\quad + (0,9-0,9) \cdot 0,85 + (0,9-0,9) \cdot 0,40 + (1,0-0,9) \cdot 0,15 \\
&= 0,3 \cdot 1,00 + 0,6 \cdot 0,90 + 0,0 \cdot 0,85 + 0,0 \cdot 0,40 + 0,1 \cdot 0,15 \\
&= 0,30 + 0,54 + 0,00 + 0,00 + 0,015 = \mathbf{0,855}
\end{aligned}$$

(Ovo se poklapa sa alternativnim izračunom preko ekvivalentne formule $Ch(f) = \sum f(x_{\sigma(i)}) \cdot (\mu(A_i) - \mu(A_{i+1}))$ iz Posledice 1.3: $0,3 \cdot (1,00-0,90) + 0,9 \cdot (0,90-0,85) + 0,9 \cdot (0,85-0,40) + 0,9 \cdot (0,40-0,15) + 1,0 \cdot (0,15-0) = 0,03 + 0,045 + 0,405 + 0,225 + 0,15 = 0,855$, dve ekvivalentne formule, isti rezultat, kao potvrda tačnosti.)

Sugenov integral:

$$\begin{aligned}
Su(f) &= \max\{\min(0,3; 1,00); \min(0,9; 0,90); \\
&\quad \min(0,9; 0,85); \min(0,9; 0,40); \min(1,0; 0,15)\} \\
&= \max\{0,30; 0,90; 0,85; 0,40; 0,15\} = \mathbf{0,90}
\end{aligned}$$

Šilkretov integral:

$$\begin{aligned}
Sh(f) &= \max\{0,3 \cdot 1,00; 0,9 \cdot 0,90; \\
&\quad 0,9 \cdot 0,85; 0,9 \cdot 0,40; 1,0 \cdot 0,15\} \\
&= \max\{0,30; 0,81; 0,765; 0,36; 0,15\} = \mathbf{0,81}
\end{aligned}$$

Sva tri integrala daju **najviše vrednosti od svih razmatranih kandidata**, po čistoj agregaciji, Kandidat E bi bio ubedljivo najbolji izbor. Ipak, engleski $0,3 < 0,6$, Kandidat E **automatski ispada**, uprkos tome što bi ga integral proglasio najboljim.

Univerzalna varijanta

Za poređenje se primenjuje i univerzalni integral $\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}$ iz Primera 2.3(iii) (Sekcija 2), dat sa $\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}(m, f) = \sqrt{Ch(m^2, f^2)}$, gde se Šokeov integral računa u odnosu na kvadrirane vrednosti mere i funkcije, to jest, umesto vrednosti $f(x_{\sigma(i)})$ i $\mu(A_i)$ koriste se njihovi kvadrati $f(x_{\sigma(i)})^2$ i $\mu(A_i)^2$, na njih se primenjuje formula Šokeovog integrala (Posledica 1.3), a na kraju se izvlači kvadratni koren dobijenog zbira. Budući da je kvadriranje rastuća operacija na $[0, \infty)$, redosled sortiranja (lanac A_i) ostaje potpuno isti kao i kod običnog Šokeovog integrala za dati primer.

Kandidat A. Kvadrirane ocene (redom po lancu $A_1 \supset \dots \supset A_5$ iz prethodnog dela): $f(x_2)^2 = 0,0^2 = 0,00$, $f(x_5)^2 = 0,4^2 = 0,16$, $f(x_4)^2 = 0,5^2 = 0,25$, $f(x_1)^2 = 1,0^2 = 1,00$, $f(x_3)^2 = 1,0^2 = 1,00$. Kvadrirane mere: $\mu(A_1)^2 = 1,00^2 = 1,00$, $\mu(A_2)^2 = 0,90^2 = 0,81$,

$$\mu(A_3)^2 = 0,45^2 = 0,2025, \mu(A_4)^2 = 0,20^2 = 0,04, \mu(A_5)^2 = 0,05^2 = 0,0025.$$

$$\begin{aligned} Ch(\mu^2, f^2) &= (0,00-0,00) \cdot 1,00 + (0,16-0,00) \cdot 0,81 + (0,25-0,16) \cdot 0,2025 \\ &\quad + (1,00-0,25) \cdot 0,04 + (1,00-1,00) \cdot 0,0025 \\ &= 0,00 \cdot 1,00 + 0,16 \cdot 0,81 + 0,09 \cdot 0,2025 + 0,75 \cdot 0,04 + 0,00 \cdot 0,0025 \\ &= 0,0000 + 0,1296 + 0,0182 + 0,0300 + 0,0000 = \mathbf{0,1778} \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}(A) = \sqrt{Ch(\mu^2, f^2)} = \sqrt{0,1778} \approx \mathbf{0,4217} \approx 0,422.$$

Kandidat B. Isti lanac kao kod Kandidata A, ali $f(x_4)^2 = 0,9^2 = 0,81$ (umesto 0,25):

$$\begin{aligned} Ch(\mu^2, f^2) &= (0,00-0,00) \cdot 1,00 + (0,16-0,00) \cdot 0,81 + (0,81-0,16) \cdot 0,2025 \\ &\quad + (1,00-0,81) \cdot 0,04 + (1,00-1,00) \cdot 0,0025 \\ &= 0,00 + 0,1296 + 0,65 \cdot 0,2025 + 0,19 \cdot 0,04 + 0,00 \\ &= 0,0000 + 0,1296 + 0,1316 + 0,0076 + 0,0000 = \mathbf{0,2688} \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}(B) = \sqrt{0,2688} \approx \mathbf{0,5185} \approx 0,519.$$

Kandidat C. Lanac (po tabeli): $x_1(0,6) \rightarrow x_3(0,6) \rightarrow x_2(0,7) \rightarrow x_5(0,85) \rightarrow x_4(0,9)$, sa vrednostima $\mu(A_1), \dots, \mu(A_5)$ redom jednakim 1,00; 0,85; 0,80; 0,70; 0,25. Kvadrirane vrednosti: $f^2 = 0,36; 0,36; 0,49; 0,7225; 0,81; \mu^2 = 1,00; 0,7225; 0,64; 0,49; 0,0625$.

$$\begin{aligned} Ch(\mu^2, f^2) &= (0,36-0,00) \cdot 1,00 + (0,36-0,36) \cdot 0,7225 + (0,49-0,36) \cdot 0,64 \\ &\quad + (0,7225-0,49) \cdot 0,49 + (0,81-0,7225) \cdot 0,0625 \\ &= 0,3600 + 0,0000 + 0,13 \cdot 0,64 + 0,2325 \cdot 0,49 + 0,0875 \cdot 0,0625 \\ &= 0,3600 + 0,0000 + 0,0832 + 0,1139 + 0,0055 = \mathbf{0,5626} \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}(C) = \sqrt{0,5626} \approx \mathbf{0,7501} \approx 0,750.$$

Kandidat D. Lanac: $x_2(0,6) \rightarrow x_1(0,7) \rightarrow x_4(0,7) \rightarrow x_5(0,7) \rightarrow x_3(0,8)$, sa $\mu(A_i) \in \{1,00; 0,90; 0,75; 0,30; 0,05\}$.

Kvadrirano: $f^2 = 0,36; 0,49; 0,49; 0,49; 0,64; \mu^2 = 1,00; 0,81; 0,5625; 0,09; 0,0025$.

$$\begin{aligned} Ch(\mu^2, f^2) &= (0,36-0,00) \cdot 1,00 + (0,49-0,36) \cdot 0,81 + (0,49-0,49) \cdot 0,5625 \\ &\quad + (0,49-0,49) \cdot 0,09 + (0,64-0,49) \cdot 0,0025 \\ &= 0,3600 + 0,13 \cdot 0,81 + 0,0000 + 0,0000 + 0,15 \cdot 0,0025 \\ &= 0,3600 + 0,1053 + 0,0000 + 0,0000 + 0,0004 = \mathbf{0,4657} \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}(D) = \sqrt{0,4657} \approx \mathbf{0,6824} \approx 0,682.$$

Kandidat E. Lanac: $x_2(0,3) \rightarrow x_3(0,9) \rightarrow x_4(0,9) \rightarrow x_5(0,9) \rightarrow x_1(1,0)$, sa $\mu(A_i) \in \{1,00; 0,90; 0,85; 0,40; 0,15\}$.

Kvadrirano: $f^2 = 0,09; 0,81; 0,81; 0,81; 1,00; \mu^2 = 1,00; 0,81; 0,7225; 0,16; 0,0225$.

$$\begin{aligned} Ch(\mu^2, f^2) &= (0,09-0,00) \cdot 1,00 + (0,81-0,09) \cdot 0,81 + (0,81-0,81) \cdot 0,7225 \\ &\quad + (0,81-0,81) \cdot 0,16 + (1,00-0,81) \cdot 0,0225 \\ &= 0,0900 + 0,72 \cdot 0,81 + 0,0000 + 0,0000 + 0,19 \cdot 0,0225 \\ &= 0,0900 + 0,5832 + 0,0000 + 0,0000 + 0,0043 = \mathbf{0,6775} \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}(E) = \sqrt{0,6775} \approx \mathbf{0,8231} \approx 0,823.$$

Sve dobijene vrednosti $\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}$ poklapaju se (do na zaokruživanje na tri decimale) sa vrednostima u rezimirajućoj tabeli ispod.

Rezimirajuća tabela

Kandidat	Profil	Engleski $\geq 0,6$?	Ch	Su	Sh	$\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}$
A	Specijalista, slab soft	Ne (0,0)	0,505	0,45	0,36	0,422
B	A + poboljšani tim	Ne (0,0)	0,605	0,45	0,405	0,519
C	Mlad, jak interspers.	Da (0,7)	0,7975	0,70	0,60	0,750
D	Solidan svuda	Da (granica)	0,695	0,70	0,63	0,682
E	Fenomenalan, slab engl.	Ne (0,3)	0,855	0,90	0,81	0,823

Diskusija

Primer ilustruje nekoliko principa iz prethodnih odeljaka:

- **Kompenzatorna nasuprot ne-kompenzatornoj agregaciji.** Šokeov integral (i, u manjoj meri, univerzalni integral $\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}$) dozvoljava da visoke ocene na jednim kriterijumima nadoknade niske na drugim. Sugenov integral to ne dozvoljava iznad praga određenog merom koalicije, Kandidat B to jasno pokazuje.
- **Nema opšteg poretka između integrala.** Iako su $Sh \leq Su$ (za normiranu fazi meru, kao posledica $xy \leq \min(x, y)$ za $x, y \in [0, 1]$) i $Sh \leq Ch$ uvek tačni, odnos između Ch i Su zavisi od profila kandidata, kod Kandidata D je $Su > Ch$, dok je kod sva ostala četiri kandidata obrnuto.
- **Integral sam po sebi nije dovoljan.** Kandidat E ima najviše vrednosti sva četiri integrala, ali biva eliminisan tvrdim pragom za engleski jezik. Ovo pokazuje da realan proces odlučivanja često zahteva kombinaciju *kompenzatorne agregacije* (za kriterijume koji dozvoljavaju kompromis) i *tvrdih ograničenja* (za kriterijume koji su apsolutni preduslov), sama teorija fazi integrala modeluje prvi deo, dok se drugi deo mora dodati spolja, kao filter pre primene integrala.

3.2 Primer 2: Upis dece: hijerarhijski (dvoetažni) model

Drugi primer se odnosi na evaluaciju kandidata za upis u internacionalnu školu, gde se procenjuje kako spremnost deteta tako i pogodnost porodice za saradnju sa školom. Za razliku od Primera 1, gde su svi kriterijumi pripadali jednom, ravnom skupu, ovde je prirodno koristiti *hijerarhijski* (dvoetažni) model: kriterijumi se prvo grupišu u dva pod-sistema, dete i roditelji/porodica, koji se svaki posebno agregiraju, a zatim se dobijene ocene D i R spajaju u konačnu ocenu S . Ovaj pristup izbegava problem klasičnog aritmetičkog proseka, gde bi izuzetan potencijal deteta mogao u potpunosti da nadoknadi ozbiljnu nesaradnju porodice (i obrnuto).

Nivo 1a: Podsystem „Dete” (D)

Kriterijumi za dete: k_1 , samostalnost i socijalizacija (odnos prema vršnjacima), k_2 , jezičko razumevanje i komunikacija (sposobnost praćenja nastave), k_3 , emocionalna regulacija (reakcija na frustraciju i promene), k_4 , prilagodljivost (prihvatanje školskih pravila i rutine). Fazi mera μ_D na skupu $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ određena je sledećim uslovima:

- (1) $\mu_D(\{k_1\}) = 0,20$, $\mu_D(\{k_2\}) = 0,30$, $\mu_D(\{k_3\}) = 0,20$, $\mu_D(\{k_4\}) = 0,15$;
- (2) $\mu_D(\{k_1, k_3\}) = 0,55 > \mu_D(\{k_1\}) + \mu_D(\{k_3\}) = 0,40$;
- (3) za ostale skupove S mera je zbir težina pojedinačnih kriterijuma, uz jedan izuzetak: za svaki skup S koji sadrži i k_1 i k_3 zbiru se dodaje sinergijski bonus 0,15;
- (4) $\mu_D(\{k_1, k_2, k_3, k_4\}) = 1$, $\mu_D(\emptyset) = 0$.

Sinergijski bonus između k_1 (socijalizacija) i k_3 (emocionalna regulacija) odražava ideju da ova dva kriterijuma zajedno grade „socio-emocionalnu zrelost” deteta, slično paru „rad sa kolegama”/„rad sa decom” iz Primera 1. Uslov (4) je saglasan sa uslovima (1) i (3): $0,20 + 0,30 + 0,20 + 0,15 + 0,15 = 1,00$, pa je μ_D normirana fazi mera.

Nivo 1b: Podsystem „Roditelji/Porodica” (R)

Kriterijumi za roditelje: r_1 , usklađenost sa vrednostima i pravilima škole, r_2 , realnost očekivanja (odsustvo neopravdanog pritiska na dete/tim), r_3 , kooperativnost i komunikacija. Fazi mera μ_R na skupu $\{r_1, r_2, r_3\}$ određena je sledećim uslovima:

- (1) $\mu_R(\{r_1\}) = \mu_R(\{r_2\}) = 0,25$, $\mu_R(\{r_3\}) = 0,50$;
- (2) među kriterijumima nema interakcije, pa je μ_R aditivna: $\mu_R(S) = \sum_{r_i \in S} \mu_R(\{r_i\})$ za svaki skup S ;
- (3) $\mu_R(\{r_1, r_2, r_3\}) = 1$, $\mu_R(\emptyset) = 0$.

Kooperativnost (r_3) nosi polovinu ukupne težine, jer je najbitnija za tekuću saradnju tokom školske godine. Uslov (3) je saglasan sa uslovom (2): $0,25 + 0,25 + 0,50 = 1,00$.

Nivo 2: Spajanje D i R

Pokazuje se da se zahtevi „dete je generalno važnije” i „ekstremno nesaradljivi roditelji ipak mogu sve da ponište” ne mogu istovremeno izraziti jednim konstantnim kapacitetom na $\{D, R\}$, isti problem kao sa engleskim jezikom u Primeru 1. Zato se koristi isti dvodelni pristup:

- **Spoljni filter:** ako je agregirana ocena roditelja $R < 0,25$ („izuzetno nesaradljivi”), kandidat automatski ispada, bez obzira na D .
- **Kapacitet za preostale slučajeve** ($R \geq 0,25$), na $\{D, R\}$:

$$\nu(\{D\}) = 0,65, \quad \nu(\{R\}) = 0,25, \quad \nu(\{D, R\}) = 1, \quad (42)$$

to jest, dete nosi jasno veću težinu, uz malu sinergiju od 0,10 kada su i dete i roditelji dobri. Provera: $\nu(\{D\}) + \nu(\{R\}) + \text{sinergija} = 0,65 + 0,25 + 0,10 = 1,00 = \nu(\{D, R\})$, tačno kao što je i navedeno.

Tri porodice

Porodica 1 (jaki svuda). Dete: $k_1=0,8$, $k_2=0,9$, $k_3=0,8$, $k_4=0,7$. Roditelji: $r_1=0,9$, $r_2=0,8$, $r_3=0,9$.

Nivo 1: podsistem Dete (D). Sortirano: $k_4(0,7) \leq k_1(0,8) \leq k_3(0,8) \leq k_2(0,9)$. Formira se lanac $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4$ i eksplicitno se računa svaku vrednost mere μ_D iz gornje definicije mere μ_D , sabiranjem odgovarajućih pojedinačnih težina (i sinergijskog bonusa za $\{k_1, k_3\}$, kada je primenljivo):

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{k_1, k_2, k_3, k_4\}, \\
\mu_D(A_1) &= \mu_D(\{k_1\}) + \mu_D(\{k_2\}) + \mu_D(\{k_3\}) + \mu_D(\{k_4\}) + \text{sinergija} \\
&= 0,20 + 0,30 + 0,20 + 0,15 + 0,15 = \mathbf{1,00} \\
A_2 &= \{k_1, k_2, k_3\}, \\
\mu_D(A_2) &= \mu_D(\{k_1\}) + \mu_D(\{k_2\}) + \mu_D(\{k_3\}) + \text{sinergija} \\
&= 0,20 + 0,30 + 0,20 + 0,15 = \mathbf{0,85} \\
A_3 &= \{k_2, k_3\}, \\
\mu_D(A_3) &= \mu_D(\{k_2\}) + \mu_D(\{k_3\}) = 0,30 + 0,20 = \mathbf{0,50} \\
A_4 &= \{k_2\}, \quad \mu_D(A_4) = \mu_D(\{k_2\}) = \mathbf{0,30}
\end{aligned}$$

Šokeov integral:

$$\begin{aligned}
Ch(D) &= (0,7-0,0) \cdot 1,00 + (0,8-0,7) \cdot 0,85 \\
&\quad + (0,8-0,8) \cdot 0,50 + (0,9-0,8) \cdot 0,30 \\
&= 0,7 \cdot 1,00 + 0,1 \cdot 0,85 + 0,0 \cdot 0,50 + 0,1 \cdot 0,30 \\
&= 0,70 + 0,085 + 0,00 + 0,03 = \mathbf{0,815}
\end{aligned}$$

Sugenov integral:

$$\begin{aligned}
Su(D) &= \max\{\min(0,7; 1,00); \min(0,8; 0,85); \\
&\quad \min(0,8; 0,50); \min(0,9; 0,30)\} \\
&= \max\{0,70; 0,80; 0,50; 0,30\} = \mathbf{0,80}
\end{aligned}$$

Šilkretov integral:

$$\begin{aligned}
Sh(D) &= \max\{0,7 \cdot 1,00; 0,8 \cdot 0,85; 0,8 \cdot 0,50; 0,9 \cdot 0,30\} \\
&= \max\{0,70; 0,68; 0,40; 0,27\} = \mathbf{0,70}
\end{aligned}$$

Nivo 1: podsistem Roditelji (R). Sortirano: $r_2(0,8) \leq r_1(0,9) \leq r_3(0,9)$. Mera μ_R (aditivna, bez sinergije):

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{r_1, r_2, r_3\}, \\
\mu_R(A_1) &= \mu_R(\{r_1\}) + \mu_R(\{r_2\}) + \mu_R(\{r_3\}) = 0,25 + 0,25 + 0,50 = \mathbf{1,00} \\
A_2 &= \{r_1, r_3\}, \\
\mu_R(A_2) &= \mu_R(\{r_1\}) + \mu_R(\{r_3\}) = 0,25 + 0,50 = \mathbf{0,75} \\
A_3 &= \{r_3\}, \quad \mu_R(A_3) = \mu_R(\{r_3\}) = \mathbf{0,50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ch(R) &= (0,8-0,0) \cdot 1,00 + (0,9-0,8) \cdot 0,75 + (0,9-0,9) \cdot 0,50 \\
&= 0,80 + 0,075 + 0,00 = \mathbf{0,875} \\
Su(R) &= \max\{\min(0,8; 1,00); \min(0,9; 0,75); \min(0,9; 0,50)\} \\
&= \max\{0,80; 0,75; 0,50\} = \mathbf{0,80} \\
Sh(R) &= \max\{0,8 \cdot 1,00; 0,9 \cdot 0,75; 0,9 \cdot 0,50\} \\
&= \max\{0,80; 0,675; 0,45\} = \mathbf{0,80}
\end{aligned}$$

$Ch(R) = 0,875 \geq 0,25$, filter prolazi (nije „izuzetno nesaradljivi”), pa se prelazi na Nivo 2.

Nivo 2: spajanje D i R . Ulazne vrednosti su ocene sa Nivoa 1: $D = Ch(D) = 0,815$, $R = Ch(R) = 0,875$ (Šokeove ocene se koriste kao ulaz za Nivo 2, u skladu sa merom (42)). Kako je $D = 0,815 \leq R = 0,875$, sortiran lanac je $A_1 = \{D, R\}$, $A_2 = \{R\}$:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{D, R\}, \\
\nu(A_1) &= \nu(\{D\}) + \nu(\{R\}) + \text{sinergija} = 0,65 + 0,25 + 0,10 = \mathbf{1,00} \\
A_2 &= \{R\}, \quad \nu(A_2) = \nu(\{R\}) = \mathbf{0,25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ch(S) &= (0,815-0,000) \cdot 1,00 + (0,875-0,815) \cdot 0,25 \\
&= 0,815 \cdot 1,00 + 0,06 \cdot 0,25 = 0,81500 + 0,01500 = \mathbf{0,830} \\
Su(S) &= \max\{\min(0,815; 1,00); \min(0,875; 0,25)\} \\
&= \max\{0,815; 0,25\} = \mathbf{0,815} \\
Sh(S) &= \max\{0,815 \cdot 1,00; 0,875 \cdot 0,25\} \\
&= \max\{0,815; 0,21875\} = \mathbf{0,815}
\end{aligned}$$

Porodica 2 (dete jako, roditelji nesaradljivi). Dete: $k_1=0,7$, $k_2=0,9$, $k_3=0,7$, $k_4=0,6$. Roditelji: $r_1=0,3$, $r_2=0,3$, $r_3=0,1$.

Nivo 1: podsistem Dete (D). Sortirano: $k_4(0,6) \leq k_1(0,7) \leq k_3(0,7) \leq k_2(0,9)$. Sinergijski par $\{k_1, k_3\}$ je u ovom slučaju rastavljen na dve različite pozicije lanca (k_1 i k_3 nisu susedni po vrednosti, ali oba imaju istu ocenu 0,7 pa se tretiraju kao izjednačeni, jer redosled među njima ne utiče na rezultat):

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{k_1, k_2, k_3, k_4\}, \\
\mu_D(A_1) &= 0,20 + 0,30 + 0,20 + 0,15 + 0,15 = \mathbf{1,00} \\
A_2 &= \{k_1, k_2, k_3\}, \\
\mu_D(A_2) &= 0,20 + 0,30 + 0,20 + 0,15 = \mathbf{0,85} \\
A_3 &= \{k_2, k_3\}, \quad \mu_D(A_3) = 0,30 + 0,20 = \mathbf{0,50} \\
A_4 &= \{k_2\}, \quad \mu_D(A_4) = \mathbf{0,30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ch(D) &= (0,6-0,0) \cdot 1,00 + (0,7-0,6) \cdot 0,85 \\
&\quad + (0,7-0,7) \cdot 0,50 + (0,9-0,7) \cdot 0,30 \\
&= 0,60 + 0,085 + 0,00 + 0,06 = \mathbf{0,745} \\
Su(D) &= \max\{\min(0,6; 1,00); \min(0,7; 0,85); \\
&\quad \min(0,7; 0,50); \min(0,9; 0,30)\} \\
&= \max\{0,60; 0,70; 0,50; 0,30\} = \mathbf{0,70} \\
Sh(D) &= \max\{0,6 \cdot 1,00; 0,7 \cdot 0,85; 0,7 \cdot 0,50; 0,9 \cdot 0,30\} \\
&= \max\{0,60; 0,595; 0,35; 0,27\} = \mathbf{0,60}
\end{aligned}$$

Nivo 1: podsistem Roditelji (R). Sortirano: $r_3(0,1) \leq r_1(0,3) \leq r_2(0,3)$:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{r_1, r_2, r_3\}, \quad \mu_R(A_1) = 0,25 + 0,25 + 0,50 = \mathbf{1,00} \\
A_2 &= \{r_1, r_2\}, \quad \mu_R(A_2) = 0,25 + 0,25 = \mathbf{0,50} \\
A_3 &= \{r_2\}, \quad \mu_R(A_3) = \mathbf{0,25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ch(R) &= (0,1-0,0) \cdot 1,00 + (0,3-0,1) \cdot 0,50 + (0,3-0,3) \cdot 0,25 \\
&= 0,10 + 0,10 + 0,00 = \mathbf{0,20} \\
Su(R) &= \max\{\min(0,1; 1,00); \min(0,3; 0,50); \min(0,3; 0,25)\} \\
&= \max\{0,10; 0,30; 0,25\} = \mathbf{0,30} \\
Sh(R) &= \max\{0,1 \cdot 1,00; 0,3 \cdot 0,50; 0,3 \cdot 0,25\} \\
&= \max\{0,10; 0,15; 0,075\} = \mathbf{0,15}
\end{aligned}$$

$Ch(R) = 0,20 < 0,25$, **filter ne prolazi**. Porodica 2 automatski ispada, bez obzira na visoko $D = 0,745$, direktna analogija sa Kandidatom E iz Primera 1.

Porodica 3 (dete sa slabijim rezultatima, roditelji odlični). Dete: $k_1=0,3$, $k_2=0,4$, $k_3=0,3$, $k_4=0,5$. Roditelji: $r_1=r_2=r_3=1,0$ (savršeni).

Nivo 1: podsistem Dete (D). Sortirano: $k_1(0,3) \leq k_3(0,3) \leq k_2(0,4) \leq k_4(0,5)$. Ovde su k_1 i k_3 (baš sinergijski par) dve najniže ocene, pa ih lanac „otpisuje” prve, sinergijski bonus je izgubljen u A_2 i dalje:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{k_1, k_2, k_3, k_4\}, \\
\mu_D(A_1) &= 0,20 + 0,30 + 0,20 + 0,15 + 0,15 = \mathbf{1,00} \\
A_2 &= \{k_2, k_3, k_4\}, \\
\mu_D(A_2) &= 0,30 + 0,20 + 0,15 = \mathbf{0,65} \quad (\text{bez sinergije, } k_1 \notin A_2) \\
A_3 &= \{k_2, k_4\}, \quad \mu_D(A_3) = 0,30 + 0,15 = \mathbf{0,45} \\
A_4 &= \{k_4\}, \quad \mu_D(A_4) = \mathbf{0,15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ch(D) &= (0,3-0,0) \cdot 1,00 + (0,3-0,3) \cdot 0,65 \\
&\quad + (0,4-0,3) \cdot 0,45 + (0,5-0,4) \cdot 0,15 \\
&= 0,30 + 0,00 + 0,045 + 0,015 = \mathbf{0,36} \\
Su(D) &= \max\{\min(0,3; 1,00); \min(0,3; 0,65); \\
&\quad \min(0,4; 0,45); \min(0,5; 0,15)\} \\
&= \max\{0,30; 0,30; 0,40; 0,15\} = \mathbf{0,40} \\
Sh(D) &= \max\{0,3 \cdot 1,00; 0,3 \cdot 0,65; 0,4 \cdot 0,45; 0,5 \cdot 0,15\} \\
&= \max\{0,30; 0,195; 0,18; 0,075\} = \mathbf{0,30}
\end{aligned}$$

Nivo 1: podsistem Roditelji (R). Sve tri ocene su 1,0 („savršeni” roditelji), pa je f konstantna funkcija $f \equiv 1,0$. Jedini element lanca je $A_1 = \{r_1, r_2, r_3\} = Y$, sa $\mu_R(A_1) = 0,25 + 0,25 + 0,50 = 1,00$. Kako je $f(x_{\sigma(0)}) = 0$, direktnom primenom formula dobija se:

$$\begin{aligned}
Ch(R) &= (1,0 - 0,0) \cdot 1,00 = \mathbf{1,00}, \\
Su(R) &= \min(1,0; 1,00) = \mathbf{1,00}, \\
Sh(R) &= 1,0 \cdot 1,00 = \mathbf{1,00}
\end{aligned}$$

(Ovo je i očekivano: svaki univerzalni integral je idempotentan za konstantne funkcije na normiranoj fazi meri, tj. $\mathbf{I}(m, c \cdot \mathbf{1}_X) = c$ kada je $m(X) = 1$, videti Napomenu 2.1(iii) u drugom delu rada.)

$Ch(R) = 1,00 \geq 0,25$, filter prolazi.

Nivo 2: spajanje D i R . Ulaz: $D = Ch(D) = 0,36$, $R = Ch(R) = 1,00$. Kako je $D = 0,36 \leq R = 1,00$, lanac je $A_1 = \{D, R\}$, $A_2 = \{R\}$, sa istim vrednostima mere ν kao kod Porodice 1: $\nu(A_1) = 1,00$, $\nu(A_2) = 0,25$.

$$\begin{aligned}
Ch(S) &= (0,36-0,00) \cdot 1,00 + (1,00-0,36) \cdot 0,25 \\
&= 0,36 \cdot 1,00 + 0,64 \cdot 0,25 = 0,3600 + 0,1600 = \mathbf{0,52} \\
Su(S) &= \max\{\min(0,36; 1,00); \min(1,00; 0,25)\} \\
&= \max\{0,36; 0,25\} = \mathbf{0,36} \\
Sh(S) &= \max\{0,36 \cdot 1,00; 1,00 \cdot 0,25\} \\
&= \max\{0,36; 0,25\} = \mathbf{0,36}
\end{aligned}$$

Rezimirajuća tabela

Porodica	$Ch(R) \geq 0,25?$	$Ch(S)$	$Su(S)$	$Sh(S)$
1 (jaki svuda)	Da (0,875)	0,830	0,815	0,815
2 (dete jako, roditelji nesaradljivi)	Ne (0,20)	eliminisan (veto)		
3 (dete sa slabijim rezultatima, roditelji odlični)	Da (1,00)	0,52	0,36	0,36

Diskusija

- **Hijerarhijska primena istog formalizma.** Na Nivou 1 izračunate su vrednosti sva tri integrala radi poređenja, dok su za potrebe hijerarhijskog spajanja na Nivou

2 kao ulazne vrednosti izabrane Šokeove agregirane ocene, što pokazuje da se konstrukcija iz prvog dela rada prirodno rekurzivno primenjuje na višestruke probleme odlučivanja.

- **Kompenzacija zavisi od izbora integrala, čak i na Nivou 2.** Kod Porodice 3, Šokeov integral dozvoljava da odlični roditelji *delimično* poprave nizak rezultat deteta ($D=0,36 \rightarrow S=0,52$), dok Sugenov i Šilkretov integral to ne dozvoljavaju, rezultat ostaje zaglavljen na $D=0,36$, jer je $\nu(\{R\}) = 0,25 < D$, pa doprinos roditelja nikad ne postane „vezujući” član maksimuma. Ovo je ista suština ne-kompenzatorne agregacije, već videne u Primeru 1, sada primenjena na spajanju dva podsistema umesto na pojedinačnim kriterijumima.
- **Filter i integral rade zajedno, na dva mesta.** Kao i engleski jezik u Primeru 1, ekstremna nesaradnja roditelja (Porodica 2) modelovana je kao tvrd prag, a ne kao deo kapaciteta, jer se pokazalo da građirana važnost („dete je važnije”) i apsolutni veto („ekstremno nesaradljivi roditelji ipak sve poništavaju”) ne mogu istovremeno stati u jedan monotoni kapacitet.

3.3 Primer 3: Rangiranje predmeta za novi Cambridge program

Treći primer se razlikuje od prethodna dva po prirodi odluke koja se donosi: Primer 1 i Primer 2 ocenjivali su pojedinačnog kandidata (nastavnika, odnosno porodicu) naspram fiksnog praga, dok se ovde *rangira* više alternativa jedna naspram druge. To otvara pitanje koje se u prethodna dva primera nije postavljalo: da li tri integrala uvek daju *isti poredak* alternativa, ili izbor integrala može promeniti ne samo brojčanu ocenu, već i to ko je „pobednik”?

Kontekst: škola razmatra uvođenje zvaničnog Cambridge ispitnog programa, sa namerom da vremenom ponudi sve nivoe (npr. IGCSE i AS/A Level). Pošto su resursi za prvu godinu uvođenja, obuka nastavnika, ispitne licence, budžet, ograničeni, škola mora da odluči koje predmete će prioriteto pokriveni. Pošto je reč o internacionalnoj školi, prirodno je da su strani jezici zastupljeni među razmatranim predmetima. Razmatra se pet predmeta, Matematika, Informatika, Biologija, Nemački jezik i Španski jezik, ocenjenih po četiri kriterijuma, koji se poistovećuju sa skupom $Y = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$:

- c_1 , potražnja učenika (procenjena anketom o interesovanju),
- c_2 , dostupnost kvalifikovanih nastavnika (broj i spremnost postojećeg kadra da preda je program),
- c_3 , isplativost uvođenja (obrnuta skala: veća vrednost znači manje dodatnih troškova po učeniku),
- c_4 , usklađenost sa postojećim nastavnim planom (koliko lako se predmet uklapa bez velikih izmena kurikuluma).

Definisanje fazi mere

Slično kao u Primeru 1 (Sekcija 3.1), potražnja i dostupnost nastavnika nisu nezavisni: ako su oba istovremeno visoko ocenjena, škola realno *može* da pokrene program (postoji i tražnja i kadar), što je vrednije od pukog zbira dva pojedinačna doprinosa. Ovo se modeluje fazi merom $\nu : 2^Y \rightarrow [0, 1]$, $Y = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, koja je određena sledećim uslovima:

- (1) $\nu(\{c_1\}) = 0,30$, $\nu(\{c_2\}) = 0,25$, $\nu(\{c_3\}) = 0,20$, $\nu(\{c_4\}) = 0,15$;
(2) $\nu(\{c_1, c_2\}) = 0,65 > \nu(\{c_1\}) + \nu(\{c_2\}) = 0,55$;
(3) za ostale skupove $S \subseteq Y$ mera je zbir težina pojedinačnih kriterijuma, uz jedan izuzetak: za svaki skup S koji sadrži i c_1 i c_2 zbiru se dodaje sinergijski bonus 0,10;
(4) $\nu(Y) = 1$, $\nu(\emptyset) = 0$.

Potražnja nosi najveću pojedinačnu težinu (0,30), jer bez dovoljno zainteresovanih učenika program nije opravdan; dostupnost nastavnika je druga po važnosti (0,25); isplativost i uklapanje sa planom su i dalje relevantni, ali manje kritični (0,20 i 0,15). Uslov (4) je saglasan sa uslovima (1) i (3): $0,30 + 0,25 + 0,20 + 0,15 + 0,10 = \mathbf{1,00}$.

Predmeti (alternative)

Predmet A, Matematika. $f(c_1) = 0,8$, $f(c_2) = 0,9$, $f(c_3) = 1,0$, $f(c_4) = 1,0$. Vrlo tražena, dobra dostupnost nastavnika (predaju srodan sadržaj u redovnom programu), izuzetno isplativa, savršeno se uklapa u trenutni plan.

i	kriterijum	$f(c_{\sigma(i)})$	A_i	$\nu(A_i)$
1	potražnja	0,8	$\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$	1,00
2	nastavnici	0,9	$\{c_2, c_3, c_4\}$	0,60
3	isplativost	1,0	$\{c_3, c_4\}$	0,35
4	uklapanje	1,0	$\{c_4\}$	0,15

Radi potpunosti se eksplicitno računaju vrednosti mere iz gornje definicije mere ν , sabiranjem odgovarajućih pojedinačnih težina i sinergijskog bonusa kada je primenljivo:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{c_1, c_2, c_3, c_4\}, \\
\nu(A_1) &= \nu(\{c_1\}) + \nu(\{c_2\}) + \nu(\{c_3\}) + \nu(\{c_4\}) + \text{sinergija} \\
&= 0,30 + 0,25 + 0,20 + 0,15 + 0,10 = \mathbf{1,00} \\
A_2 &= \{c_2, c_3, c_4\}, \\
\nu(A_2) &= \nu(\{c_2\}) + \nu(\{c_3\}) + \nu(\{c_4\}) = 0,25 + 0,20 + 0,15 = \mathbf{0,60} \\
&\text{(bez sinergije, jer } c_1 \notin A_2\text{)} \\
A_3 &= \{c_3, c_4\}, \\
\nu(A_3) &= \nu(\{c_3\}) + \nu(\{c_4\}) = 0,20 + 0,15 = \mathbf{0,35} \\
A_4 &= \{c_4\}, \quad \nu(A_4) = \nu(\{c_4\}) = \mathbf{0,15}
\end{aligned}$$

Šokeov integral, svaki od četiri člana je (prirastaj ocene) $\times$ (mera preostalog skupa):

$$\begin{aligned}
Ch(A) &= (0,8-0,0) \cdot 1,00 + (0,9-0,8) \cdot 0,60 \\
&\quad + (1,0-0,9) \cdot 0,35 + (1,0-1,0) \cdot 0,15 \\
&= 0,8 \cdot 1,00 + 0,1 \cdot 0,60 + 0,1 \cdot 0,35 + 0,0 \cdot 0,15 \\
&= 0,80 + 0,06 + 0,035 + 0,00 = \mathbf{0,895}
\end{aligned}$$

Sugenov integral, najveći od četiri minimuma:

$$\begin{aligned}
Su(A) &= \max\{\min(0,8; 1,00); \min(0,9; 0,60); \\
&\quad \min(1,0; 0,35); \min(1,0; 0,15)\} \\
&= \max\{0,80; 0,60; 0,35; 0,15\} = \mathbf{0,80}
\end{aligned}$$

Šilkretov integral, najveći od četiri proizvoda:

$$\begin{aligned} Sh(A) &= \max\{0,8 \cdot 1,00; 0,9 \cdot 0,60; 1,0 \cdot 0,35; 1,0 \cdot 0,15\} \\ &= \max\{0,80; 0,54; 0,35; 0,15\} = \mathbf{0,80} \end{aligned}$$

Predmet B, Informatika. $f(c_1) = 0,9$, $f(c_2) = 0,9$, $f(c_3) = 1,0$, $f(c_4) = 0,5$. Čak i veća potražnja od Matematike, ista dostupnost nastavnika i isplativost, ali slabije uklapanje sa trenutnim planom (zahteva nov kurikulum i opremu).

i	kriterijum	$f(c_{\sigma(i)})$	A_i	$\nu(A_i)$
1	uklapanje	0,5	$\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$	1,00
2	potražnja	0,9	$\{c_1, c_2, c_3\}$	0,85
3	nastavnici	0,9	$\{c_2, c_3\}$	0,45
4	isplativost	1,0	$\{c_3\}$	0,20

Eksplisitno se računaju mere lanca, ovde c_1 i c_2 (sinergijski par) ostaju *zajedno* u skupu A_2 , jer se prvo otpisuje c_4 (najniža ocena):

$$A_1 = \{c_1, c_2, c_3, c_4\},$$

$$\nu(A_1) = 0,30 + 0,25 + 0,20 + 0,15 + 0,10 = \mathbf{1,00}$$

$$A_2 = \{c_1, c_2, c_3\},$$

$$\nu(A_2) = \nu(\{c_1\}) + \nu(\{c_2\}) + \nu(\{c_3\}) + \text{sinergija} = 0,30 + 0,25 + 0,20 + 0,10 = \mathbf{0,85}$$

$$A_3 = \{c_2, c_3\},$$

$$\nu(A_3) = \nu(\{c_2\}) + \nu(\{c_3\}) = 0,25 + 0,20 = \mathbf{0,45} \quad (\text{bez sinergije, } c_1 \notin A_3)$$

$$A_4 = \{c_3\}, \quad \nu(A_4) = \nu(\{c_3\}) = \mathbf{0,20}$$

Šokeov integral:

$$\begin{aligned} Ch(B) &= (0,5-0,0) \cdot 1,00 + (0,9-0,5) \cdot 0,85 \\ &\quad + (0,9-0,9) \cdot 0,45 + (1,0-0,9) \cdot 0,20 \\ &= 0,5 \cdot 1,00 + 0,4 \cdot 0,85 + 0,0 \cdot 0,45 + 0,1 \cdot 0,20 \\ &= 0,50 + 0,34 + 0,00 + 0,02 = \mathbf{0,86} \end{aligned}$$

Sugenov integral:

$$\begin{aligned} Su(B) &= \max\{\min(0,5; 1,00); \min(0,9; 0,85); \\ &\quad \min(0,9; 0,45); \min(1,0; 0,20)\} \\ &= \max\{0,50; 0,85; 0,45; 0,20\} = \mathbf{0,85} \end{aligned}$$

Šilkretov integral:

$$\begin{aligned} Sh(B) &= \max\{0,5 \cdot 1,00; 0,9 \cdot 0,85; 0,9 \cdot 0,45; 1,0 \cdot 0,20\} \\ &= \max\{0,50; 0,765; 0,405; 0,20\} = \mathbf{0,765} \end{aligned}$$

Predmet C, Biologija. $f(c_1) = 0,5$, $f(c_2) = 0,5$, $f(c_3) = 0,6$, $f(c_4) = 0,6$. Umerene ocene po svim kriterijumima, ni po jednom nije istaknuta.

i	kriterijum	$f(c_{\sigma(i)})$	A_i	$\nu(A_i)$
1	potražnja	0,5	$\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$	1,00
2	nastavnici	0,5	$\{c_2, c_3, c_4\}$	0,60
3	isplativost	0,6	$\{c_3, c_4\}$	0,35
4	uklapanje	0,6	$\{c_4\}$	0,15

Ovde je c_1 najniža ocena (izjednačena sa c_2 , redosled među njima je proizvoljan), pa se, kao i kod Matematike, sinergija gubi u A_2 :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{c_1, c_2, c_3, c_4\}, \\
\nu(A_1) &= 0,30 + 0,25 + 0,20 + 0,15 + 0,10 = \mathbf{1,00} \\
A_2 &= \{c_2, c_3, c_4\}, \quad \nu(A_2) = 0,25 + 0,20 + 0,15 = \mathbf{0,60} \\
A_3 &= \{c_3, c_4\}, \quad \nu(A_3) = 0,20 + 0,15 = \mathbf{0,35} \\
A_4 &= \{c_4\}, \quad \nu(A_4) = \mathbf{0,15}
\end{aligned}$$

Šokeov integral:

$$\begin{aligned}
Ch(C) &= (0,5-0,0) \cdot 1,00 + (0,5-0,5) \cdot 0,60 \\
&\quad + (0,6-0,5) \cdot 0,35 + (0,6-0,6) \cdot 0,15 \\
&= 0,50 + 0,00 + 0,035 + 0,00 = \mathbf{0,535}
\end{aligned}$$

Sugenov integral:

$$\begin{aligned}
Su(C) &= \max\{\min(0,5; 1,00); \min(0,5; 0,60); \\
&\quad \min(0,6; 0,35); \min(0,6; 0,15)\} \\
&= \max\{0,50; 0,50; 0,35; 0,15\} = \mathbf{0,50}
\end{aligned}$$

Šilkretov integral:

$$\begin{aligned}
Sh(C) &= \max\{0,5 \cdot 1,00; 0,5 \cdot 0,60; 0,6 \cdot 0,35; 0,6 \cdot 0,15\} \\
&= \max\{0,50; 0,30; 0,21; 0,09\} = \mathbf{0,50}
\end{aligned}$$

Predmet D, Nemački jezik. $f(c_1) = 0,6$, $f(c_2) = 0,5$, $f(c_3) = 0,7$, $f(c_4) = 0,8$. Umerena potražnja, ali ograničena dostupnost kvalifikovanih nastavnika nemačkog (teže se pronalaze od nastavnika engleskih/romanskih jezika), pristojna isplativost, dobro uklapanje jer se nemački već predaje kao izborni predmet.

Sortirano: $f(c_2) = 0,5 \leq f(c_1) = 0,6 \leq f(c_3) = 0,7 \leq f(c_4) = 0,8$. Lanac i mere:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{c_1, c_2, c_3, c_4\}, \\
\nu(A_1) &= 0,30 + 0,25 + 0,20 + 0,15 + 0,10 = \mathbf{1,00} \\
A_2 &= \{c_1, c_3, c_4\}, \\
\nu(A_2) &= \nu(\{c_1\}) + \nu(\{c_3\}) + \nu(\{c_4\}) = 0,30 + 0,20 + 0,15 = \mathbf{0,65} \\
&\quad (\text{bez sinergije, jer } c_2 \notin A_2) \\
A_3 &= \{c_3, c_4\}, \quad \nu(A_3) = 0,20 + 0,15 = \mathbf{0,35} \\
A_4 &= \{c_4\}, \quad \nu(A_4) = \mathbf{0,15}
\end{aligned}$$

Šokeov integral:

$$\begin{aligned}
Ch(D) &= (0,5-0,0) \cdot 1,00 + (0,6-0,5) \cdot 0,65 \\
&\quad + (0,7-0,6) \cdot 0,35 + (0,8-0,7) \cdot 0,15 \\
&= 0,5 \cdot 1,00 + 0,1 \cdot 0,65 + 0,1 \cdot 0,35 + 0,1 \cdot 0,15 \\
&= 0,50 + 0,065 + 0,035 + 0,015 = \mathbf{0,615}
\end{aligned}$$

Sugenov integral:

$$\begin{aligned}
Su(D) &= \max\{\min(0,5; 1,00); \min(0,6; 0,65); \\
&\quad \min(0,7; 0,35); \min(0,8; 0,15)\} \\
&= \max\{0,50; 0,60; 0,35; 0,15\} = \mathbf{0,60}
\end{aligned}$$

Šilkretov integral:

$$\begin{aligned}
Sh(D) &= \max\{0,5 \cdot 1,00; 0,6 \cdot 0,65; 0,7 \cdot 0,35; 0,8 \cdot 0,15\} \\
&= \max\{0,50; 0,39; 0,245; 0,12\} = \mathbf{0,50}
\end{aligned}$$

Predmet E, Španski jezik. $f(c_1) = 0,7$, $f(c_2) = 0,8$, $f(c_3) = 0,75$, $f(c_4) = 0,6$. Veća po-tražnja od nemačkog, znatno bolja dostupnost nastavnika (romanski jezici su zastupljeniji među kandidatima za posao), dobra isplativost, umereno uklapanje sa trenutnim planom.

Sortirano: $f(c_4) = 0,6 \leq f(c_1) = 0,7 \leq f(c_3) = 0,75 \leq f(c_2) = 0,8$. Lanac i mere:

$$A_1 = \{c_1, c_2, c_3, c_4\},$$

$$\nu(A_1) = 0,30 + 0,25 + 0,20 + 0,15 + 0,10 = \mathbf{1,00}$$

$$A_2 = \{c_1, c_2, c_3\},$$

$$\nu(A_2) = \nu(\{c_1\}) + \nu(\{c_2\}) + \nu(\{c_3\}) + \text{sinergija} = 0,30 + 0,25 + 0,20 + 0,10 = \mathbf{0,85}$$

$$A_3 = \{c_2, c_3\},$$

$$\nu(A_3) = \nu(\{c_2\}) + \nu(\{c_3\}) = 0,25 + 0,20 = \mathbf{0,45} \quad (\text{bez sinergije, } c_1 \notin A_3)$$

$$A_4 = \{c_2\}, \quad \nu(A_4) = \mathbf{0,25}$$

Šokeov integral:

$$\begin{aligned}
Ch(E) &= (0,6-0,0) \cdot 1,00 + (0,7-0,6) \cdot 0,85 \\
&\quad + (0,75-0,7) \cdot 0,45 + (0,8-0,75) \cdot 0,25 \\
&= 0,6 \cdot 1,00 + 0,1 \cdot 0,85 + 0,05 \cdot 0,45 + 0,05 \cdot 0,25 \\
&= 0,60 + 0,085 + 0,0225 + 0,0125 = \mathbf{0,72}
\end{aligned}$$

Sugenov integral:

$$\begin{aligned}
Su(E) &= \max\{\min(0,6; 1,00); \min(0,7; 0,85); \\
&\quad \min(0,75; 0,45); \min(0,8; 0,25)\} \\
&= \max\{0,60; 0,70; 0,45; 0,25\} = \mathbf{0,70}
\end{aligned}$$

Šilkretov integral:

$$\begin{aligned}
Sh(E) &= \max\{0,6 \cdot 1,00; 0,7 \cdot 0,85; 0,75 \cdot 0,45; 0,8 \cdot 0,25\} \\
&= \max\{0,60; 0,595; 0,3375; 0,20\} = \mathbf{0,60}
\end{aligned}$$

Univerzalna varijanta

Kao i u Primeru 1, primenjuje se i univerzalni integral $\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}(m, f) = \sqrt{Ch(m^2, f^2)}$ (Primer 2.3(iii)) na svih pet predmeta, radi potpunosti, i radi provere da li dodatni „kompenzatorniji” integral menja poredak.

Matematika (A). Kvadirane ocene po lancu: $f(c_1)^2 = 0,64$, $f(c_2)^2 = 0,81$, $f(c_3)^2 = 1,00$, $f(c_4)^2 = 1,00$; kvadirane mere: $\nu(A_1)^2 = 1,00$, $\nu(A_2)^2 = 0,36$, $\nu(A_3)^2 = 0,1225$, $\nu(A_4)^2 = 0,0225$.

$$\begin{aligned} Ch(\nu^2, f^2) &= (0,64-0,00) \cdot 1,00 + (0,81-0,64) \cdot 0,36 \\ &\quad + (1,00-0,81) \cdot 0,1225 + (1,00-1,00) \cdot 0,0225 \\ &= 0,6400 + 0,17 \cdot 0,36 + 0,19 \cdot 0,1225 + 0,00 \\ &= 0,6400 + 0,0612 + 0,0233 + 0,0000 = \mathbf{0,7245} \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}(A) = \sqrt{0,7245} \approx \mathbf{0,8512} \approx 0,851.$$

Informatika (B). $f(c_4)^2 = 0,25$, $f(c_1)^2 = 0,81$, $f(c_2)^2 = 0,81$, $f(c_3)^2 = 1,00$; $\nu(A_1)^2 = 1,00$, $\nu(A_2)^2 = 0,7225$, $\nu(A_3)^2 = 0,2025$, $\nu(A_4)^2 = 0,04$.

$$\begin{aligned} Ch(\nu^2, f^2) &= (0,25-0,00) \cdot 1,00 + (0,81-0,25) \cdot 0,7225 \\ &\quad + (0,81-0,81) \cdot 0,2025 + (1,00-0,81) \cdot 0,04 \\ &= 0,2500 + 0,56 \cdot 0,7225 + 0,00 + 0,19 \cdot 0,04 \\ &= 0,2500 + 0,4046 + 0,0000 + 0,0076 = \mathbf{0,6622} \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}(B) = \sqrt{0,6622} \approx \mathbf{0,8138} \approx 0,814.$$

Biologija (C). $f(c_1)^2 = 0,25$, $f(c_2)^2 = 0,25$, $f(c_3)^2 = 0,36$, $f(c_4)^2 = 0,36$; $\nu(A_1)^2 = 1,00$, $\nu(A_2)^2 = 0,36$, $\nu(A_3)^2 = 0,1225$, $\nu(A_4)^2 = 0,0225$.

$$\begin{aligned} Ch(\nu^2, f^2) &= (0,25-0,00) \cdot 1,00 + (0,25-0,25) \cdot 0,36 \\ &\quad + (0,36-0,25) \cdot 0,1225 + (0,36-0,36) \cdot 0,0225 \\ &= 0,2500 + 0,0000 + 0,11 \cdot 0,1225 + 0,0000 \\ &= 0,2500 + 0,0000 + 0,0135 + 0,0000 = \mathbf{0,2635} \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}(C) = \sqrt{0,2635} \approx \mathbf{0,5133} \approx 0,513.$$

Nemački (D). $f(c_2)^2 = 0,25$, $f(c_1)^2 = 0,36$, $f(c_3)^2 = 0,49$, $f(c_4)^2 = 0,64$; $\nu(A_1)^2 = 1,00$, $\nu(A_2)^2 = 0,4225$, $\nu(A_3)^2 = 0,1225$, $\nu(A_4)^2 = 0,0225$.

$$\begin{aligned} Ch(\nu^2, f^2) &= (0,25-0,00) \cdot 1,00 + (0,36-0,25) \cdot 0,4225 \\ &\quad + (0,49-0,36) \cdot 0,1225 + (0,64-0,49) \cdot 0,0225 \\ &= 0,2500 + 0,11 \cdot 0,4225 + 0,13 \cdot 0,1225 + 0,15 \cdot 0,0225 \\ &= 0,2500 + 0,0465 + 0,0159 + 0,0034 = \mathbf{0,3158} \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}(D) = \sqrt{0,3158} \approx \mathbf{0,5620} \approx 0,562.$$

Španski (E). $f(c_4)^2 = 0,36$, $f(c_1)^2 = 0,49$, $f(c_3)^2 = 0,5625$, $f(c_2)^2 = 0,64$; $\nu(A_1)^2 = 1,00$, $\nu(A_2)^2 = 0,7225$, $\nu(A_3)^2 = 0,2025$, $\nu(A_4)^2 = 0,0625$.

$$\begin{aligned} Ch(\nu^2, f^2) &= (0,36-0,00) \cdot 1,00 + (0,49-0,36) \cdot 0,7225 \\ &\quad + (0,5625-0,49) \cdot 0,2025 + (0,64-0,5625) \cdot 0,0625 \\ &= 0,3600 + 0,13 \cdot 0,7225 + 0,0725 \cdot 0,2025 + 0,0775 \cdot 0,0625 \\ &= 0,3600 + 0,0939 + 0,0147 + 0,0048 = \mathbf{0,4734} \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}(E) = \sqrt{0,4734} \approx \mathbf{0,6880} \approx 0,688.$$

Poredak po $\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}$: $A(0,851) \succ B(0,814) \succ E(0,688) \succ D(0,562) \succ C(0,513)$, identičan poretaku po Šokeovom i Šilkretovom integralu (Matematika ispred Informatike). Ovo je očekivano, jer je $\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}$ izveden iz Šokeovog integrala nestandardnom transformacijom (Primer 2.3(iii)) i nasleđuje njegovu kompenzatornu prirodu, potvrđuje da je inverzija ranga kod Sugenovog integrala zaista posledica njegove nekompenzatorne, nemaksitivne strukture, a ne slučajnost izbora konkretnog kapaciteta.

Rezimirajuća tabela i poredak

Predmet	Ch	Su	Sh	$\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}$
A, Matematika	0,895	0,80	0,80	0,851
B, Informatika	0,86	0,85	0,765	0,814
C, Biologija	0,535	0,50	0,50	0,513
D, Nemački jezik	0,615	0,60	0,50	0,562
E, Španski jezik	0,72	0,70	0,60	0,688

Poredak po Šokeovom integralu: $A \succ B \succ E \succ D \succ C$ ($0,895 > 0,86 > 0,72 > 0,615 > 0,535$). Poredak po Sugenovom integralu: $\mathbf{B} \succ \mathbf{A} \succ E \succ D \succ C$ ($0,85 > 0,80 > 0,70 > 0,60 > 0,50$). Poredak po Šilkretovom integralu: $A \succ B \succ E \succ D = C$ ($0,80 > 0,765 > 0,60 > 0,50 = 0,50$).

Za sva tri integrala Španski jezik je ispred Nemačkog jezika i Biologije, dok se razlika javlja kod Šilkretovog integrala, gde su Nemački jezik i Biologija izjednačeni. Kod Šokeovog i Sugenovog integrala, Informatika i Matematika su ubedljivo prva dva mesta. Dva zapažanja, međutim, zaslužuju posebnu pažnju:

- **Promena poretka na prvom mestu.** Šokeov i Šilkretov integral slažu se da je Matematika bolji izbor od Informatike, dok Sugenov integral daje suprotan poredak, Informatika ispred Matematike. Ovo predstavlja konkretnu inverziju poretka između različitih integrala.
- **Neočekivano identičan rezultat kod Šilkretovog integrala.** Nemački jezik (D) i Biologija (C) imaju potpuno različite profile ocena, D je umereno dobar na sve četiri kriterijuma (0,5–0,8), dok je C osrednji svuda (0,5–0,6), a ipak $Sh(D) = Sh(C) = 0,50$, potpuno identičan rezultat. Razlog je strukturan: Šilkretov integral je *maksimum* od svega četiri proizvoda $f(c_{\sigma(i)}) \cdot \nu(A_i)$, pa ne „vidi” čitav profil ocena, već samo *jednu* najbolju kombinaciju („trenutak”) $t \cdot \nu(\{f \geq t\})$, i kod oba predmeta se ispostavlja da je taj najbolji trenutak identičan broj, iako su do njega došli različitim ocenama. Ovo pokazuje da Šilkretov integral, iako koristan, nosi realan rizik gubitka informacije o profilu alternative u odnosu na Šokeov ili Sugenov integral, koji „koriste” više članova niza pri agregaciji.

Diskusija: zašto dolazi do inverzije ranga

Objašnjenje leži u redosledu kojim se kriterijumi „isključuju” iz lanca $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ pri sortiranju (Sekcija 1.8), u kombinaciji sa sinergijskim bonusom u meri ν .

Kod Matematike (A), najniže ocenjen kriterijum je baš potražnja c_1 ($f(c_1) = 0,8$), onaj koji učestvuje u sinergijskom paru $\{c_1, c_2\}$. Kako se c_1 prvi „otpisuje” iz lanca, preostali skup $A_2 = \{c_2, c_3, c_4\}$ više *ne sadrži* c_1 , pa gubi sinergijski bonus: $\nu(A_2) = 0,60$, umesto potencijalno više vrednosti da je c_1 ostao u skupu. Sugenov integral tada, za $i = 2$, računa $\min(0,9; 0,60) = 0,60$, sinergija je „izgubljena” pre nego što je iskorišćena.

Kod Informatike (B), najniže ocenjen kriterijum je uklapanje sa planom c_4 ($f(c_4) = 0,5$), koje *nije* deo sinergijskog para. Kada se c_4 otpiše, preostali skup $A_2 = \{c_1, c_2, c_3\}$ i dalje sadrži *oba* kriterijuma sinergijskog para, pa je $\nu(A_2) = 0,85$, sinergijski bonus je sačuvan. Sugenov integral tada, za $i = 2$, računa $\min(0,9; 0,85) = 0,85$, što je znatno veće nego odgovarajući član kod Matematike.

Drugim rečima: kod Sugenovog integrala nije bitno samo *koliko* je neki kriterijum dobro ocenjen, već i *koji* kriterijum je najslabija karika, jer upravo taj kriterijum prvi napušta lanac i može poneti sa sobom (ili sačuvati) sinergijski bonus sa preostalim kriterijumima. Šokeov integral, s druge strane, sabira doprinose svih slojeva, pa ravnomernije uzima u obzir svaki kriterijum.

Ova pojava je snažnija verzija zapažanja iz Primera 1 (Kandidat D, Sektija 3.1) da ne postoji opšti poredak između Ch i Su : tamo je razlika bila samo u brojčanoj oceni istog kandidata, dok ovde izbor integrala menja *ko pobeđuje* u rangiranju. Za instituciju koja donosi odluku na osnovu ovakvog rangiranja, ovo je važno praktično upozorenje: izbor integrala nije samo tehnička, matematička odluka, već može direktno odrediti ishod procesa odlučivanja, pa ga treba birati svesno, u zavisnosti od toga da li je poželjno kompenzatorno rezonovanje (Šokeov) ili rezonovanje zasnovano na „uskom grlu” (Sugenov), videti diskusiju u Sektiji 1.6.

Zaključak

Master rad je organizovan u tri celine koje se prirodno nadovezuju jedna na drugu: prva celina uvodi fazi mere i tri klasična integrala (Šokeov, Sugenov, Šilkretov integral) konstruktivnim putem; druga celina uvodi njihovo zajedničko aksiomatsko uopštenje, univerzalni integral, i pokazuje kako se sva tri integrala iz prve celine dobijaju kao specijalni slučajevi jedne opšte konstrukcije; treća celina primenjuje čitav aparat na tri originalna primera iz konteksta rada u internacionalnoj školi, birana upravo tako da svaki od njih osvetli drugačiji aspekt teorijskih razlika između integrala, pojedinačnu ocenu naspram praga (Primer 1), hijerarhijsko spajanje pod-ocena (Primer 2), i rangiranje više alternativa (Primer 3). Ovo poglavlje sumira glavne rezultate svake celine i predlaže pravce daljeg istraživanja.

Pregled teorijskih rezultata

U prvom delu rada uveden je pojam fazi mere kao oslabljenja klasične aditivne mere, motivisan konkretnim primerom u kojem aditivnost onemogućava modelovanje sinergije između kriterijuma (Sekcija 1.1). Uvedeni su pojmovi komonotonosti, bazičnih i prostih funkcija, i njihove komonotone reprezentacije, kao neophodan aparat za definisanje sva tri integrala. Detaljno su izložena osnovna svojstva Šokeovog integrala (monotonost, homogenost, komonotona aditivnost, horizontalna aditivnost, neprekidnost od dole), Sugenovog integrala (analogna svojstva, ali sa $\wedge$ -homogenošću i komonotonom maksitivnošću umesto aditivnosti) i Šilkretovog integrala (pozitivna homogenost i komonotona maksitivnost, uz potpunu aksiomatsku karakterizaciju). Uveden je i pojam Šokeovih kapaciteta proizvoljnog reda k (Sekcija 1.5), koji hijerarhijski klasifikuju monotone skupovne funkcije prema stepenu superaditivnosti, sa vezom ka Dempster–Šeferovoj teoriji uverenja. Posebna pažnja posvećena je diskretnom slučaju (Sekcija 1.8), koji je od suštinskog značaja za primenu u procesu odlučivanja, jer svodi sva tri integrala na eksplicitne, konačne formule pogodne za direktan račun preko sortiranog lanca kriterijuma.

Poređenje Šokeovog i Sugenovog integrala (Sekcija 1.6) istaklo je ključnu konceptualnu razliku koja se provlači kroz čitav rad: Šokeov integral je *kompensatoran*, dozvoljavajući da visoke ocene na jednim kriterijumima nadoknade niske na drugim. Sugenov integral je *ne-kompensatoran* i pokazuje veto-efekat: čim ocena premaši meru odgovarajućeg nivo skupa, njeno dalje povećanje ne utiče na rezultat. Šilkretov integral je takođe *ne-kompensatoran*, jer je zasnovan na maksimumu, pa u rezultatu odlučuje samo jedan član, ali proizvod, za razliku od minimuma, ne ograničava doprinos ocene merom, pa

ne pokazuje veto-efekat.

U drugom delu rada predstavljen je aksiomatski pristup univerzalnom integralu (Definicija 2.4), koji preko tri aksioma (monotonost, „istinitosna funkcionalnost” preko pseudo-množenja, i nerazlikovanje integral-ekvivalentnih parova) obuhvata i Šokeov, i Sugenov, i Šilkretov integral kao specijalne slučajeve. Pokazana je konstrukcija najmanjeg i najvećeg univerzalnog integrala u odnosu na fiksirano pseudo-množenje (Propozicija 2.2), kao i konstrukcija preko integral operativnog para $(\oplus, \otimes)$ (Propozicija 2.4), koja objašnjava sva tri klasična integrala kao specijalne slučajeve jedne opšte šeme, $(+, \text{Prod})$ za Šokeov, $(\sup, \text{Min})$ za Sugenov i $(\sup, \text{Prod})$ za Šilkretov integral. Konačno, razmotrena je restrikcija na jedinični interval $[0, 1]$ i veza sa semikopulama (t-seminormama), gde je eksplicitno pokazano (Sekcija 2.5) da su pseudo-množenja iz sva tri integrala, T_M , T_P , dve od četiri prototipske t-norme, čime je zatvoren krug između aksiomatskog pristupa iz drugog dela i konstruktivnih definicija iz prvog dela rada.

Pregled primera i glavni nalazi

Treći deo rada sadrži tri originalna primera iz konteksta rada u internacionalnoj školi, svaki osmišljen da osvetli drugačiji aspekt razlika između integrala:

- **Primer 1 (Sekcija 3.1)**, izbor nastavnog kadra, pokazao je da kompenzatorna (Šokeov) i ne-kompenzatorna (Sugenov, Šilkretov) agregacija mogu dati kvalitativno različite zaključke o istom kandidatu (Kandidat B), da ne postoji opšti poredak između Ch i Su (Kandidat D, gde je $Su(f) > Ch(f)$), i da sama teorija fazi integrala ne može zameniti tvrda, apsolutna ograničenja (eliminatorni prag za engleski jezik), one moraju biti dodate spolja, kao filter primenjen pre integrala.
- **Primer 2 (Sekcija 3.2)**, upis dece, proširio je isti formalizam na hijerarhijski, dvoetažni model, pokazujući da se ista konstrukcija integrala može rekursivno primeniti na spajanje pod-ocena u finalnu ocenu, i da izbor integrala utiče na to koliko snažno odličan rezultat na jednom nivou (roditelji) može nadoknaditi slab rezultat na drugom (dete), Šokeov integral to delimično dozvoljava, Sugenov i Šilkretov integral ne.
- **Primer 3 (Sekcija 3.3)**, rangiranje predmeta za uvođenje Cambridge programa, uveo je pitanje koje se u prethodna dva primera nije postavljalo: da li tri integrala uvek daju *isti poredak* više alternativa. Konstruisan je konkretan primer *inverzije ranga* (Matematika naspram

Informatike), objašnjen preko toga koji kriterijum prvi napušta sortirani lanac i da li pri tome „nosi sa sobom” sinergijski bonus sa preostalim kriterijumima. Dodatno je uočen i neočekivano identičan rezultat kod Šilkretovog integrala između dva predmeta sa potpuno različitim profilima ocena (Nemački jezik i Biologija), što je razjašnjeno strukturnom osobinom Šilkretovog integrala da „vidi” samo jedan, najbolji trenutak niza, a ne čitav profil. Univerzalna varijanta $\mathbf{I}_{+2, \text{Prod}}$, izvedena iz Šokeovog integrala, potvrdila je da inverzija ranga nije slučajnost izbora konkretnog kapaciteta, već posledica fundamentalne, strukturne razlike između kompenzatorne i ne-kompenzatorne agregacije.

Praktične implikacije

Zajednička nit sva tri primera jeste da **izbor integrala nije tehnička, matematička sitnica, već svesna modelska odluka** koja direktno utiče na ishod procesa odlučivanja. Kada je poželjno da izuzetan rezultat na jednom kriterijumu (ili podsistemu) delimično nadoknadi slabost na drugom, Šokeov integral je prirodan izbor. Kada je, naprotiv, poželjno da nijedan kriterijum ne sme biti zapostavljen, da „najslabija karika” realno ograničava ukupnu ocenu, Sugenov integral bolje odražava takvu politiku. Institucija koja donosi odluku (škola, komisija, upravni odbor) treba da bira integral u skladu sa svojim vrednostima i prioritetima, a ne isključivo iz matematičke pogodnosti, i treba da bude svesna da za rangiranje više alternativa taj izbor može promeniti ne samo brojčanu ocenu, već i to ko je krajnji „pobednik”.

Ograničenja rada

Vredi eksplicitno navesti i ograničenja predstavljenog pristupa. Prvo, sve fazi mere korišćene u primerima su *ručno konstruisane* radi ilustracije, u realnoj primeni bilo bi neophodno sprovesti formalan proces elicitanije fazi mere od donosilaca odluke (na primer, upitnicima o relativnoj važnosti pojedinačnih kriterijuma i koalicija), što izlazi iz okvira ovog rada. Drugo, primeri koriste isključivo 2-aditivne fazi mere (sa najviše jednim sinergijskim parom po primeru); opštije, više-aditivne fazi mere sa interakcijama višeg reda nisu razmatrane, iako bi u principu mogle dati bogatiju, ali i teže interpretabilnu sliku. Treće, spoljni filteri (eliminatorsni pragovi) korišćeni u prva dva primera predstavljaju pojednostavljenje, u praksi bi granica prolaska/eliminacije retko bila oštra, već bi verovatno postojala neka forma postepenog, „mekog” opadanja poverenja u kandidata/alternativu ispod željenog nivoa, što bi zahtevalo drugačiji matematički aparat (na primer, fazi pragove) od onog korišćenog ovde. Četvrto, broj kandidata/porodica/predmeta u svakom primeru

je namerno mali (tri do pet alternativa), radi preglednosti ručnog računa, zaključci o postojanju inverzije ranga ili identičnih rezultata ne moraju se uopštiti na sve moguće profile ocena i kapacitete, već su prikazani kao *postojeci* fenomeni (dokazi postojanja preko konkretnih konstruisanih primera), a ne kao tvrdnje o njihovoj učestalosti u opštem slučaju.

Pravci daljeg istraživanja

Nekoliko prirodnih proširenja ostaje otvoreno za dalji rad. Prvo, primeri u ovom radu koriste ručno konstruisane (2-aditivne) fazi mere sa jednim sinergijskim parom po primeru; u praksi bi fazi mera trebalo da se *uči* iz podataka ili elicituje od donosilaca odluke, na primer preko Šeplijeve vrednosti i indeksa interakcije, koji pružaju interpretabilnu dekompoziciju doprinosa i interakcija pojedinačnih kriterijuma. Drugo, rad se ograničio na diskretan slučaj sa malim brojem kriterijuma (četiri do pet); veći broj kriterijuma otvara pitanja izračunljivosti i elicitarke kapaciteta, koja su predmet aktivnog istraživanja u literaturi (npr. k -aditivne fazi mere kao kompromis između izražajnosti i broja parametara). Treće, primeri su ograničeni na fiksne, izvesne ocene kriterijuma; realni sistemi za podršku odlučivanju često rade sa neizvesnim ili intervalno-vrednim ocenama, gde bi generalizacije Šokeovog integrala na fazi-vrednosne ili intervalne integrale (izvan okvira ovog rada) bile relevantne. Četvrto, primer 3 je otkrio i neočekivano identičan rezultat kod Šilkretovog integrala (Nemački jezik naspram Biologije), sistematska karakterizacija uslova pod kojima Šilkretov integral proizvodi ovakve identične rezultate, i koliko su oni „tipični” za slučajno izabrane profile ocena, ostaje otvoreno pitanje. Konačno, sistematsko istraživanje uslova pod kojima dolazi do inverzije ranga (koliko je „tipična” ili „retka” u odnosu na proizvoljno izabrane profile ocena i kapacitete) ostaje otvoreno pitanje koje bi zaslužilo dublju teorijsku i eksperimentalnu analizu, na primer, kroz simulacije sa slučajno generisanim kapacitetima i profilima ocena, ili kroz analitičku karakterizaciju granice između „bezbednih” i „rizičnih” regiona parametara u kojima različiti integrali garantovano daju isti poredak alternativa. Peto, bilo bi vredno sprovesti i empirijsku validaciju predstavljenog pristupa u stvarnom, a ne hipotetičkom okruženju internacionalne škole, na primer, prikupljanjem stvarnih ocena kandidata i konsultacijom sa članovima komisije za zapošljavanje ili upis o tome koji od tri integrala (ili neki drugi univerzalni integral) najbolje odražava njihovu intuitivnu politiku odlučivanja, čime bi se izbor konkretnog integrala i konkretne fazi mere u budućem radu mogao osloniti na empirijske, a ne isključivo ilustrativne argumente.

Literatura

- [1] Pietro Benvenuti, Radko Mesiar, and Doretta Vivona. Monotone set functions-based integrals. In Endre Pap, editor, *Handbook of Measure Theory*, pages 1329–1379. Elsevier Science, Amsterdam, 2002.
- [2] Gustave Choquet. Theory of capacities. *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)*, 5:131–292, 1954.
- [3] Dieter Denneberg. *Non-additive Measure and Integral*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [4] Michel Grabisch and Éric Raufaste. An empirical study of statistical properties of choquet and sugeno integrals. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(6):839–850, 2008.
- [5] Paul R. Halmos. *Measure Theory*. Van Nostrand, New York, 1950.
- [6] Hitoshi Imaoka. On a subjective evaluation model by a generalized fuzzy integral. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 5:517–529, 1997.
- [7] Erich Peter Klement, Radko Mesiar, and Endre Pap. *Triangular Norms*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [8] Erich Peter Klement, Radko Mesiar, and Endre Pap. A universal integral. In *Proceedings of the Joint 2007 EUSFLAT Conference*, 2007.
- [9] Erich Peter Klement, Radko Mesiar, and Endre Pap. A universal integral as common frame for choquet and sugeno integral. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(1):178–187, 2010.
- [10] Erich Peter Klement, Jun Li, Radko Mesiar, and Endre Pap. Integrals based on monotone set functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 281:88–102, 2015. doi: 10.1016/j.fss.2015.07.010.
- [11] Heinz König. *Measure and Integration: An Advanced Course in Basic Procedures and Applications*. Springer, Berlin, 1997.
- [12] Jean-Luc Marichal. On Choquet and Sugeno integrals as aggregation functions. In M. Grabisch, T. Murofushi, and M. Sugeno, editors, *Fuzzy Measures and Integrals – Theory and Applications*, pages 247–272. Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.

- [13] Radko Mesiar. Choquet-like integrals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 194:477–488, 1995.
- [14] Roger B. Nelsen. *An Introduction to Copulas*, volume 139 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer, New York, 2nd edition, 2006.
- [15] Endre Pap. *Null-Additive Set Functions*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [16] Niel Shilkret. Maxitive measure and integration. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 33:109–116, 1971.
- [17] Abe Sklar. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 8:229–231, 1959.
- [18] Fernando Suárez García and Pedro Gil Álvarez. Two families of fuzzy integrals. *Fuzzy Sets and Systems*, 18:67–81, 1986.
- [19] Michio Sugeno. *Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications*. PhD thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.
- [20] Zhenyuan Wang and George J. Klir. *Generalized Measure Theory*. Springer, New York, 2009.
- [21] Siegfried Weber. Two integrals and some modified versions: Critical remarks. *Fuzzy Sets and Systems*, 20:97–105, 1986.
- [22] Lotfi A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [23] Lotfi A. Zadeh. Probability measures of fuzzy events. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 23:421–427, 1968.

Biografija

Olivera Lekić Ipač rođena je 13.05.1991. godine u Somboru. Osnovnu školu „Branko Radičević” u Staparuu završila je kao nosilac Vukove diplome, a Gimnaziju „Veljko Petrović” u Somboru sa odličnim uspehom. Na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu upisuje osnovne studije, smer Primenjena matematika, 2010. godine, a master studije istog smera 2014. godine. Od 2017. godine radi u prosveti, gde aktivno učestvuje u nastavnim i organizacionim procesima u školama – upravo iz tog iskustva proistekla je i motivacija za primenu matematičkih alata u optimizaciji procesa odlučivanja, kojom se bavi ovaj rad.



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Olivera Lekić Ipač

AU

Mentor: dr Ivana Štajner-Papuga, redovni profesor

ME

Naslov rada: Univerzalni integral i njegova veza sa Šokeovim, Sugenovim i Šilkretovim integralom

NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski / engleski

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2026.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (3/84/23/12/1/0/0)

(broj poglavlja/broj strana/broj lit. citata/broj tabela/broj slika/broj grafi-
ka/broj priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Primenjena matematika

ND

Ključne reči: fazi mera, monotona skupovna funkcija, kapacitet, Šokeov integral, Sugenov integral, Šilkretov integral, univerzalni integral, komonotonost, pseudo-sabiranje, pseudo-množenje, agregacija, donošenje odluka.

PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: U ovom radu razmatraju se Šokeov, Sugenov i Šilkretov integral, kao i univerzalni integral koji ih objedinjuje, te njihova uloga u procesu donošenja odluka. Najpre se uvodi pojam monotone skupovne funkcije, odnosno fazi mere, kao oslabljenja klasične aditivne mere, zajedno sa pojmovima komonotonosti, bazičnih i prostih funkcija i njihovih komonotonih reprezentacija. Zatim se izlažu definicije i osnovna svojstva Šokeovog, Sugenovog i Šilkretovog integrala, kao i hijerarhija Šokeovih kapaciteta reda k , uz poseban osvrt na diskretan slučaj, koji navedene integrale svodi na eksplicitne konačne formule. U nastavku se, prateći aksiomatski pristup, uvode univerzalni integral, pseudo-sabiranje i pseudo-množenje, ekstremni univerzalni integrali i metodi njihove konstrukcije. Završni deo rada posvećen je primeni navedenih integrala u procesu odlučivanja. Kroz tri originalna primera iz okruženja internacionalne škole analiziraju se veto-efekat, kompenzabilnost kriterijuma i pojava inverzije ranga u zavisnosti od izbora integrala.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

ČK

Predsednik: dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Ivana Štajner-Papuga, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Mirjana Štrboja, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Olivera Lekić Ipač

AU

Mentor: Ivana Štajner-Papuga, PhD, Full Professor

MN

Title: Universal Integral in Relation with Choquet, Sugeno and Shilkret
Integral

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: serbian / english

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2026.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (3/84/23/12/1/0/0)

(chapters/pages/quotations/tables/pictures/graphics/enclosures)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Applied Mathematics

SD

Subject/Key words: fuzzy measure, monotone set function, capacity, Choquet integral, Sugeno integral, Shilkret integral, universal integral, comonotonicity, pseudo-addition, pseudo-multiplication, aggregation, decision making.
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: This thesis considers the Choquet, Sugeno and Shilkret integrals, together with the universal integral that unifies them, and their role in decision making. First, the notion of a monotone set function, that is, a fuzzy measure, is introduced as a weakening of the classical additive measure, along with the notions of comonotonicity, basic and simple functions and their comonotone representations. The definitions and basic properties of the Choquet, Sugeno and Shilkret integrals are then presented, as well as the hierarchy of Choquet capacities of order k , with particular emphasis on the discrete case, which reduces these integrals to explicit finite formulas. Following the axiomatic approach, the universal integral, pseudo-addition and pseudo-multiplication, the extremal universal integrals and methods for their construction are introduced next. The final part of the thesis is devoted to the application of these integrals in decision making. Through three original examples set in an international school, the veto effect, the compensability of criteria and the occurrence of rank reversal depending on the choice of integral are analysed.

AB

Accepted by the Scientific Board on:

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Zagorka Lozanov-Crvenković, PhD, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: Ivana Štajner-Papuga, PhD, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Mirjana Štrboja, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad