



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU



Milica Teoharević

Klasične projektivne konfiguracije u rešavanju takmičarskih zadataka iz geometrije

- master rad -

Mentor: dr Vlado Uljarević

Novi Sad, 2026.

Sadržaj

Predgovor	5
1 Uvod	7
1.1 Uvodne napomene	7
1.2 Pomoćne teoreme	7
2 Važne teoreme projektivne geometrije	29
2.1 Dezargova teorema	29
2.2 Paskalova teorema	32
2.3 Papusova teorema	37
2.4 Brijanšonova teorema	42
2.5 Harmonijske četvorke i harmonijski četvorouglovi	43
3 Primena teorema projektivne geometrije	53
4 Zaključak	67
Literatura	69
Kratka biografija	71

Predgovor

Projektivna geometrija predstavlja jednu od najboljih i najsofisticiranijih oblasti klasične matematike. Iako je istorijski ponikla iz praktičnih potreba renesansnih umetnika i arhitekata za razumevanjem perspektive i vernim prikazivanjem trodimenzionalnog prostora na dvodimenzionalnom platnu, ona se tokom XVII i XIX veka, zahvaljujući radovima Žerara Dezarga, Bleza Paskala, Žan-Viktora Ponselea i Feliksa Klajna, razvila u samostalnu i strogo aksiomatizovanu matematičku disciplinu.

Glavna estetska i praktična moć projektivne geometrije leži u njenoj sposobnosti da apstrahuje metrička svojstva prostora, kao što su dužine i uglovi, i da se fokusira isključivo na relacije pripadnosti (incidencije) tačaka i pravih.

Motivacija za izradu ovog master rada proističe iz želje da se prikaže povezanost između euklidskog prostora i projektivnih alata. U savremenoj olimpijskoj geometriji i naprednom rešavanju problema, euklidski metodi često zahtevaju složene i glomazne metričke proračune, trigonometrijske transformacije ili komplikovan račun sa koordinatama. Nasuprot tome, projektivne metode, vođene konceptima harmonijskih četvorki i velikih teorema projektivne ravni, omogućavaju da se najteži planimetrijski zadaci reše elegantno, u svega nekoliko koraka.

Rad je strukturalno podeljen na tri celine:

- **Glava 1 (Uvod)** postavlja teorijsku osnovu rada kroz navođenje ključnih uvodnih teorema, kao što su Talesova, sinusna, Čevina i Menelajeva teorema, koje služe kao neophodan most ka naprednijim konceptima.
- **Glava 2 (Važne teoreme projektivne geometrije)** posvećena je fundamentalnim stubovima projektivne ravni. U njoj se detaljno analiziraju i ilustruju Dezargova, Paskalova, Papusova i Brijanšonova teorema, sa posebnim osvrtom na harmonijske četvorke i harmonijske četvorouglove.

- **Glava 3 (Primena teorema projektivne geometrije)** predstavlja praktični i aplikativni srž rada, gde se kroz pažljivo odabrane napredne primere i zadatke sa matematičkih takmičenja demonstrira moć i superiornost projektivnih metoda u poređenju sa klasičnim euklidskim pristupom.

Izražavam najdublju zahvalnost svom mentoru, **dr Vladu Uljareviću**, na svesrdnoj podršci, strpljenju, dragocenim savetima i stručnom vođenju tokom celokupnog procesa izrade ovog rada. Njegove kritike i sugestije su u velikoj meri doprinele podizanju kvaliteta ovog teksta.

Takođe, zahvaljujem se članovima komisije, **dr Petru Markoviću** i **dr Kristini Ago**, na izdvojenom vremenu, pažljivom čitanju rada i korisnim smernicama za njegovu konačnu odbranu. Veliku zahvalnost dugujem i svim profesorima i asistentima sa Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, koji su mi tokom studija preneli ljubav prema matematici i pružili vrhunsko akademsko obrazovanje.

Na samom kraju, neizmernu zahvalnost dugujem svojoj porodici, posebno svom vereniku Vuku i sestričini Luni, kao i prijateljima za безусловnu podršku, razumevanje i motivaciju koje su mi pružali tokom svih godina školovanja.

Novi Sad, 2026. godine

Milica Teoharević

Uvod

1.1 Uvodne napomene

Razumevanje odnosa euklidske i projektivne geometrije predstavlja jedan od važnih aspekata klasične geometrije. Dok se euklidska geometrija primarno oslanja na pojmove razdaljine, ugla i podudarnosti, projektivna geometrija fokus stavlja na invarijante, odnosno svojstva koja se ne menjaju pri projektovanju, poput kolinearnosti tačaka i konkurentnosti pravih.

Ovaj rad istražuje mogućnost da se principi projektivne geometrije — prvenstveno Paskalova, Dezargova, Papusova i Brijanšonova teorema — primene u rešavanju euklidskih problema. Kako bi analiza ovih teorema bila potpuna i metodološki utemeljena, neophodno je prvo definisati klasične alate euklidske geometrije na kojima se naši dokazi zasnivaju.

U nastavku ovog poglavlja predstavljamo osnovne teoreme i definicije, koje čine neophodan preduslov za razumevanje dokaza teorema u narednoj glavi. Potrebne teoreme, poput Menelajeve i Čevine, kao i koncept potencije tačke u odnosu na kružnicu, koriste se kao osnovni za tumačenje projektivnih relacija na euklidski način, čime se omogućava formalna potvrda geometrijskih svojstava bez potrebe za kompleksnom analitičkom geometrijom.

1.2 Pomoćne teoreme

Sve teoreme navedene u ovom odeljku smatramo poznatim rezultatima iz euklidske geometrije, te ih ovde navodimo radi potpune preglednosti dokaza koji slede u narednoj glavi.

TEOREMA 1.1 (Talesova teorema o proporcionalnim odsečcima). *Neka su p i q dve prave koje se seku u tački O , i neka su one presečene sa dve paralelne prave a i b . Ako prava a seče prave p i q redom u tačkama A i B , a prava*

b ih seče u tačkama A' i B' , tada važi sledeća proporcionalnost odsečaka:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'},$$

kao i

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}.$$

DOKAZ. Dokaz ćemo podeliti na dva dela: prvo ćemo dokazati jednakost prva dva odnosa ($\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$), a zatim ćemo uključiti i odnos sa paralelnim dužima.

Dokažimo prvo $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$. Posmatrajmo $\triangle OAB'$ i $\triangle OBA'$ (neka je raspored tačaka kao na slici 1.1). Primetimo da $\triangle ABB'$ i $\triangle ABA'$ imaju zajedničku stranicu AB , a njihova treća temena (B' i A') leže na pravoj b koja je paralelna pravoj a . Zbog toga su visine ovih trouglova spuštene na osnovicu AB jednake, pa zaključujemo $P(\triangle ABB') = P(\triangle ABA')$. Ako obema stranama gornje jednakosti dodamo površinu $\triangle OAB$, dobijamo

$$P(\triangle OAB) + P(\triangle ABB') = P(\triangle OAB) + P(\triangle ABA'),$$

što nam direktno daje $P(\triangle OAB') = P(\triangle OBA')$. Dalje, $\triangle OAB$ i $\triangle OA'B$ dele zajedničko teme B , pa su njihove visine spuštene na pravu p jednake. Zato se njihove površine odnose kao:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{P(\triangle OAB)}{P(\triangle OA'B)}.$$

Slično, posmatrajmo $\triangle OAB$ i $\triangle OB'A$; oni dele zajedničko teme A , pa su njihove visine spuštene na pravu q jednake. Njihove površine se odnose kao:

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{P(\triangle OAB)}{P(\triangle OB'A)}.$$

Pošto smo već dokazali da je $P(\triangle OAB') = P(\triangle OBA')$, desne strane poslednje dve jednakosti su potpuno jednake, odakle neposredno sledi:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}.$$

Da bismo dokazali da je odnos $\frac{AB}{A'B'}$ jednak prethodnim, povucimo pomoćnu pravu kroz tačku A koja je paralelna pravoj q (odnosno pravoj na kojoj leže B i B'). Neka ta prava seče pravu b (odnosno duž $A'B'$) u novoj tački C . Četvorougao $ABB'C$ je po konstrukciji paralelogram, jer su mu naspramne stranice paralelne ($AB \parallel CB'$ i $AC \parallel BB'$).

Iz osobina paralelograma znamo da su naspramne stranice jednake dužine: $B'C = AB$. Sada možemo primeniti već dokazani deo Talesove teoreme, ali

posmatrajući ugao sa temenom u tački A' i prave koje se seku u njemu. Dobijamo odnos:

$$\frac{A'A}{A'O} = \frac{A'C}{A'B'}.$$

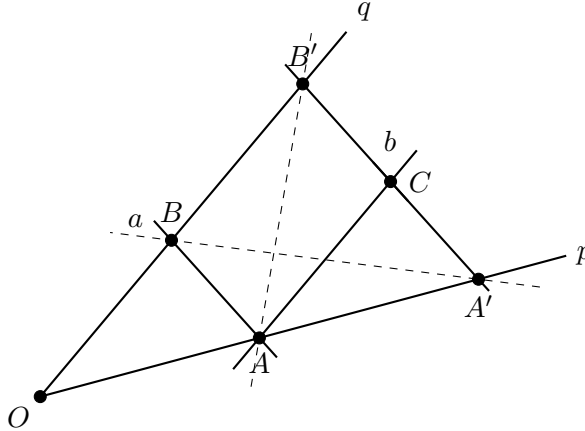
Odakle važi $1 - \frac{A'A}{A'O} = 1 - \frac{A'C}{A'B'}$, odnosno $\frac{A'O - A'A}{A'O} = \frac{A'B' - A'C}{A'B'}$, pa $\frac{AO}{A'O} = \frac{CB'}{A'B'}$. Pošto je $B'C = AB$, zamenom dobijamo:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Spajanjem rezultata iz prvog i drugog dela, dobijamo:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Iz $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$ sledi $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$, odakle $1 - \frac{OA'}{OA} = 1 - \frac{OB'}{OB}$, pa je $\frac{OA - OA'}{OA} = \frac{OB - OB'}{OB}$, tj. $\frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB}$, čime je teorema u potpunosti dokazana. $\square$



Slika 1.1: Ilustracija Talesove teoreme

TEOREMA 1.2 (Obrnuta Talesova teorema). *Neka su p i q dve prave koje se seku u tački O , i neka su one presečene sa dve prave a i b . Ako prava a seče prave p i q redom u tačkama A i B , a prava b ih seče u tačkama A' i B' , tako da važi $O - A - A'$, $O - B - B'$ i sledeća proporcionalnost odsečaka:*

$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'},$$

tada je $a \parallel b$.

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno da prave a i b nisu paralelne. Neka je b' prava kroz tačku A' paralelna pravoj a i neka je B'' presek pravih b' i q .

Tada po Talesovoj teoremi važi $\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB''}$, a kako je i $\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$, to je $BB' = BB''$, pa je $B' = B''$, tj. prave b i b' se poklapaju, pa prave a i b moraju biti paralelne. $\square$

Direktna posledica Talesove teoreme jeste i pojam sličnosti geometrijskih figura.

DEFINICIJA 1.3. Za $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ kažemo da su slični (u oznaci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$) ako su im odgovarajući uglovi jednaki ($\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$) i ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

U daljem radu, sličnost trouglova ćemo najčešće utvrđivati preko UU stava koji tvrdi:

TEOREMA 1.4. *Ukoliko dva trougla imaju dva jednaka ugla, onda su oni slični.*

DOKAZ. Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takvi da važi $\angle A = \angle A'$ i $\angle B = \angle B'$. Iz činjenice da je zbir uglova u svakom trouglu 180° , direktno sledi da im je i treći ugao jednak:

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (\angle A' + \angle B') = \angle C'.$$

Pokazaćemo da su njihove stranice proporcionalne, odnosno da je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Ako je $AB = A'B'$, tada su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ podudarni, pa ćemo nadalje pretpostaviti da to nije slučaj. Bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da je $AB > A'B'$. Nanesimo na poluprave $pp(A, B)$ i $pp(A, C)$ tačke B_1 i C_1 redom, tako da važi $AB_1 = A'B'$ i $AC_1 = A'C'$. Jasno je da tačka B_1 mora pripadati stranici AB . Pretpostavimo da je tačka C_1 takva da $A - C - C_1$, kao na slici 1.2 (b). $\triangle AB_1C_1$ i $\triangle A'B'C'$ su podudarni po stavu *SUS*, pa je $\angle AB_1C_1 = \angle A'B'C' = \angle ABC$. Označimo presek duži B_1C_1 i BC sa D . Tada je $\angle AB_1C_1$ spoljašnji ugao $\triangle B_1BD$, a istovremeno je i jednak njegovom unutrašnjem $\angle B_1BD$, što ne može. Zato se tačka C_1 mora naći na duži AC , kao na slici (videti 1.2 (a)). Posmatrajmo sada $\triangle AB_1C_1$ i $\triangle A'B'C'$. Oni su podudarni na osnovu *SUS* stava, jer je $AB_1 = A'B'$, $AC_1 = A'C'$ i $\angle A = \angle A'$. Iz ove podudarnosti direktno sledi jednakost odgovarajućih uglova $\angle AB_1C_1 = \angle B'$. Kako je po uslovu teoreme $\angle B' = \angle B$, dobijamo $\angle AB_1C_1 = \angle B$. Pošto su $\angle AB_1C_1$ i $\angle B$ odgovarajući uglovi na pravama B_1C_1 i BC koje seče prava AB , iz njihove jednakosti direktno sledi da su ove prave paralelne $B_1C_1 \parallel BC$.

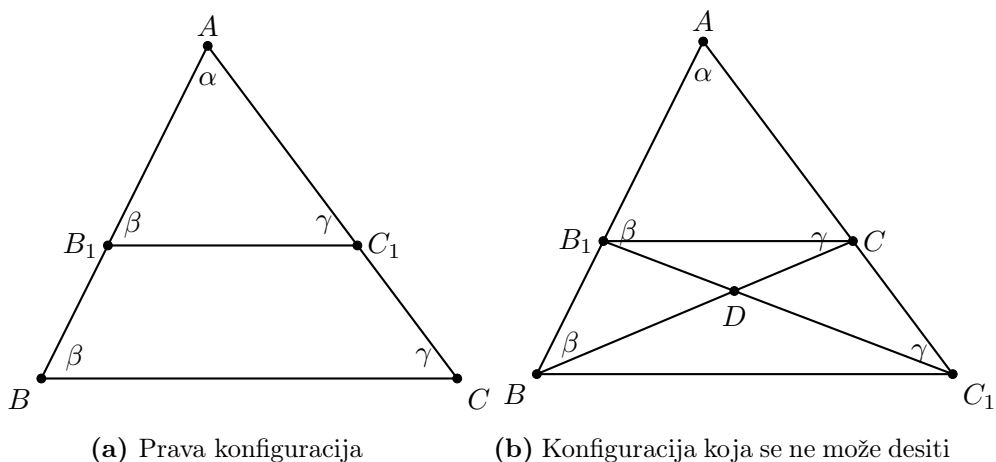
Sada, pošto prave koje sadrže krakove $\angle A$ presecaju dve paralelne prave B_1C_1 i BC , možemo primeniti Talesovu teoremu, koja nam daje:

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Zamenom dužina iz podudarnosti ($AB_1 = A'B'$, $AC_1 = A'C'$, $B_1C_1 = B'C'$) u gornju proporcionalnost, dobijamo:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Pošto su svi uglovi jednaki, a sve odgovarajuće stranice proporcionalne, po definiciji sličnosti zaključujemo da je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, čime je dokaz završen. $\square$



Slika 1.2: Slika uz Teoremu o stavu UU

Navešćemo jedno tvrđenje o simetrali uglova trougla:

TEOREMA 1.5 (Teorema o simetrali unutrašnjeg ugla). *Simetrala unutrašnjeg ugla trougla deli naspramnu stranicu na odsečke koji su proporcionalni naleglim stranicama. Preciznije, ako simetrala unutrašnjeg ugla kod temena A u $\triangle ABC$ seče stranicu BC u tački D, tada važi razmera:*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

DOKAZ. Neka je AD simetrala unutrašnjeg ugla kod temena A u $\triangle ABC$. To znači da ona deli $\angle A = \alpha$ na dva jednaka ugla:

$$\angle BAD = \angle CAD = \frac{\alpha}{2}.$$

Da bismo dokazali traženu proporcionalnost, povucimo pomoćnu pravu kroz teme C koja je paralelna simetrali AD (kao na slici 1.3). Neka ova prava seče produžetak stranice BA (preko temena A) u tački E.

Posmatrajmo uglove koje formiraju ove paralelne prave ($AD \parallel EC$) kada ih presecaju prave BE i AC : $\angle BAD$ i $\angle AEC$ su odgovarajući uglovi na paralelnim pravama koje seče prava BE , pa su oni jednaki:

$$\angle AEC = \angle BAD = \frac{\alpha}{2}.$$

$\angle CAD$ i $\angle ACE$ su naizmenični uglovi na paralelnim pravama koje seče prava AC , pa su i oni jednaki:

$$\angle ACE = \angle CAD = \frac{\alpha}{2}.$$

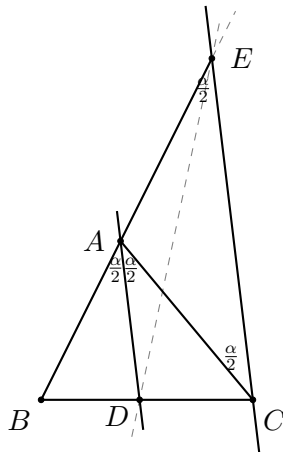
Iz gornje dve jednakosti direktno zaključujemo da u $\triangle ACE$ važi:

$$\angle AEC = \angle ACE = \frac{\alpha}{2}.$$

To znači da je $\triangle ACE$ jednakokraki, sa osnovicom EC i kracima $AE = AC$. Sada posmatrajmo $\angle EBC$ čije krake BE i BC presecaju dve paralelne prave AD i EC . Na osnovu Talesove teoreme, uzimajući u obzir da je $AE = AC$ važi sledeća razmera:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

čime je teorema u potpunosti dokazana. □



Slika 1.3: Slika uz teoremu o simetrali unutrašnjeg ugla.

TEOREMA 1.6 (Teorema o simetrali spoljašnjeg ugla). *Simetrala spoljašnjeg ugla trougla koji nije jednakokraki deli (u spoljašnjem smislu) naspramnu stranicu na odsečke koji su proporcionalni naleglim stranicama. Preciznije,*

ako simetrala spoljašnjeg ugla kod temena A u $\triangle ABC$ seče produžetak stranice BC u tački D , tada važi razmera:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

DOKAZ. Neka je dat $\triangle ABC$ u kome je stranica $AB \neq AC$. Neka je AD simetrala spoljašnjeg ugla kod temena A , pri čemu tačka D leži na produžetku stranice BC preko temena C .

Ako produžimo stranicu BA preko temena A , simetrala AD polovi taj spoljašnji ugao, pa važi:

$$\angle CAD = \frac{\alpha_1}{2},$$

gde je α_1 spoljašnji ugao kod temena A .

Povucimo pomoćnu pravu kroz teme C koja je paralelna sa AD . Neka ova prava seče stranicu AB u tački E .

Posmatrajmo uglove koje ove dve paralelne prave ($AD \parallel CE$) obrazuju sa pravama AB i AC . Ugao između produžetka BA preko A i AD i $\angle AEC$ su uglovi sa paralelnim kracima koje seče prava AB , pa su oni jednaki:

$$\angle AEC = \frac{\alpha_1}{2}.$$

$\angle DAC$ i $\angle ACE$ su uglovi sa istim paralelnim kracima koje seče prava AC , pa su i oni jednaki:

$$\angle ACE = \frac{\alpha_1}{2}.$$

Iz gornje dve jednakosti neposredno zaključujemo da u $\triangle ACE$ važi:

$$\angle AEC = \angle ACE = \frac{\alpha_1}{2}.$$

Pošto su uglovi na osnovici EC jednaki, $\triangle ACE$ je jednakokraki, odakle sledi jednakost njegovih krakova $AE = AC$. Sada posmatrajmo $\angle ABD$ čije krake BD i BA presecaju dve paralelne prave CE i AD . Na osnovu Talesove teoreme, uzimajući u obzir $AE = AC$ važi:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC},$$

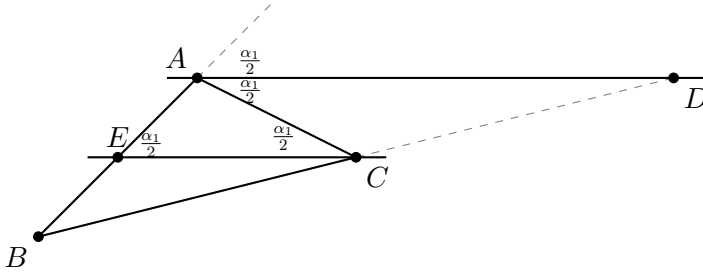
čime je teorema u potpunosti dokazana. $\square$

U mnogim geometrijskim zadacima gde je potrebno uspostaviti vezu između stranica trougla i njegovih unutrašnjih uglova, od presudnog značaja je primena sinusne teoreme.

TEOREMA 1.7 (Sinusna teorema). *Neka su a , b i c dužine stranica $\triangle ABC$, α , β i γ redom naspramni unutrašnji uglovi. Tada važi:*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

gde je R poluprečnik opisane kružnice oko ABC .



Slika 1.4: Ilustracija teoreme o simetrali spoljašnjeg ugla, $CE \parallel AD$.

DOKAZ. Dokazaćemo teoremu u slučaju kada je $\triangle ABC$ oštrogli. Slučaj kada je trougao tupougli se dokazuje slično, dok je dokaz za pravougli trougao dosta kraći. Prvo ćemo dokazati međusobnu jednakost ova tri odnosa. Spustimo visinu h_c iz temena C na stranicu $AB = c$. Neka je podnožje te visine tačka D . Ova visina deli polazni trougao na dva pravougla: $\triangle ADC$ i $\triangle BDC$.

Iz definicije trigonometrijskih funkcija oštrog ugla u pravouglom trouglu direktno sledi: $h_c = b \cdot \sin \alpha$ i $h_c = a \cdot \sin \beta$. Izjednačavanjem izraza za visinu h_c dobijamo jednakost:

$$b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta.$$

Deljenjem ove jednakosti sa $\sin \alpha \cdot \sin \beta$, dobijamo prvi odnos:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Potpuno analogno, ako spustimo visinu h_a iz temena A na stranicu $BC = a$, dobijamo da je $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, odakle direktno sledi:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Sada ćemo dokazati da je zajednička vrednost ovih odnosa jednaka prečniku opisane kružnice ($2R$). Neka je oko $\triangle ABC$ opisana kružnica sa centrom O i poluprečnikom R . Povucimo prečnik te kružnice iz temena B kroz centar O , i neka je njegova druga krajnja tačka na kružnici označena sa A' . Spajanjem tačaka A' i C dobijamo $\triangle A'BC$.

U $\triangle A'BC$, $\angle A'CB$ je prav jer je to periferni ugao nad prečnikom kružnice $A'B = 2R$. To znači da je $\triangle A'BC$ pravougli sa hipotenuzom dužine $2R$. Takođe, $\angle BAC = \alpha$ i $\angle BA'C$ su periferni uglovi nad istim kružnim lukom BC , pa su oni zato jednaki:

$$\angle BA'C = \alpha$$

Primenom definicije sinusa na oštar ugao u pravouglom $\triangle A'BC$, dobijamo:

$$\sin \angle BA'C = \frac{BC}{BA'} \implies \sin \alpha = \frac{a}{2R}.$$

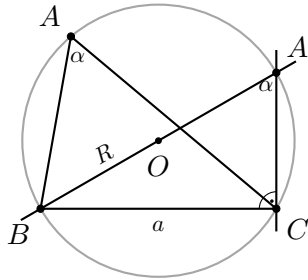
Iz ove formule direktno izražavamo prečnik kružnice:

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Pošto smo u prvom delu dokaza utvrdili da su sva tri odnosa stranica i sinusa uglova međusobno jednaki, kombinovanjem sa ovim rezultatom konačno dobijamo:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

čime je dokaz završen. $\square$



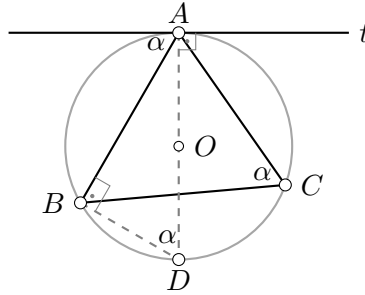
Slika 1.5: Slika uz dokaz sinusne teoreme

TEOREMA 1.8. *Manji ugao između tangente na kružnicu i tetive koja polazi iz dodirne tačke jednak je periferijskom uglu nad tom tetivom čije je teme sa iste strane kao i centar kružnice u odnosu na tetivu, dok je veći jednak periferijskom uglu nad tom tetivom čije je teme sa suprotne strane kao i centar kružnice u odnosu na tetivu.*

DOKAZ. Neka je $k(O, r)$ data kružnica sa centrom O , neka je prava t tangenta koja dodiruje kružnicu u tački A , i neka je AB tetiva te kružnice. Posmatrajmo $\alpha = \angle(t, AB)$ između tangente t i tetive AB , kao i periferijski $\angle ACB$ nad tetivom AB , gde je C tačka na kružnici kao na slici 1.6.

Dokaz ćemo najpre izvesti za bazični slučaj kada je tetiva AB ujedno i prečnik kružnice. U tom slučaju, centar kružnice O leži na duži AB . Pošto je poluprečnik OA normalan na tangentu t u tački dodira, ugao između tangente i prečnika AB je prav, odnosno $\alpha = 90^\circ$. Sa druge strane, periferijski $\angle ACB$ je ugao nad prečnikom, a svaki periferijski ugao nad prečnikom kružnice je prav. Dakle, u ovom bazičnom slučaju važi jednakost $\alpha = \angle ACB = 90^\circ$.

Sada ćemo dokazati opšti slučaj, pretpostavljajući, bez umanjenja opštosti, da ugao α nije prav (dokaz za oštar i tup ugao je analogan, ovde ćemo posmatrati oštar ugao). Povucimo pomoćni prečnik AD iz tačke A . Ugao između tangente t i prečnika AD je 90° , pa je $\angle DAB = 90^\circ - \alpha$. Posmatrajmo sada pravougli $\triangle ABD$. $\angle ABD$ je periferijski ugao nad prečnikom AD , pa je $\angle ABD = 90^\circ$. Pošto je zbir uglova u trouglu 180° , sledi da je $\angle ADB = 90^\circ - \angle DAB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$. Na kraju, ključno je uočiti da su $\angle ADB$ i traženi periferijski $\angle ACB$ konstruisani nad istom tetivom AB i nalaze se sa iste strane te tetive. Prema teoremi o periferijskim uglovima, svi periferijski uglovi nad istom tetivom su međusobno jednaki, pa zaključujemo da je $\angle ACB = \angle ADB = \alpha$. Time je teorema u potpunosti dokazana. $\square$



Slika 1.6: Jednakost uglova između tetive i tangente

Za analizu složenijih konfiguracija koje uključuju kružnice, neophodno je proširiti naš analitički aparat. Iz tog razloga, u narednom delu definisaćemo potenciju tačke u odnosu na kružnicu, čime ćemo stvoriti preduslove za izučavanje radikalnih osa i njihovu primenu u dokazivanju konkurentnosti pravih.

TEOREMA 1.9. *Neka je $k(O, r)$ kružnica i neka je M tačka u ravni. Ako bilo koja prava koja prolazi kroz tačku M seče kružnicu k u tačkama A i B , tada je proizvod MA i MB konstantan, bez obzira na izbor prave i važi*

$$MA \cdot MB = |MO^2 - r^2| = |d^2 - r^2|,$$

gde je $d = MO$ rastojanje tačke M od centra O . Ako je M spoljašnja tačka kružnice k i MT tangenta na kružnicu u tački T , tada je $MA \cdot MB = MT^2$.

DOKAZ. Pretpostavimo da je M spoljašnja tačka u ravni kružnice $k(O, r)$. Povucimo kroz tačku M dve proizvoljne prave: jednu koja seče kružnicu u tačkama A i B , i drugu koja ga seče u tačkama C i D , kao na slici 1.7. Dokazaćemo najpre da važi jednakost $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Posmatrajmo $\triangle MAC$ i $\triangle MDB$. Ovi trouglovi imaju jedan zajednički ugao kod temena M $\angle AMC = \angle DMB$. Takođe, $\angle MAC$ i $\angle MDB$ su jednaki (sledi iz tetivnosti četvorougla $ABDC$)

Pošto dva trougla imaju po dva jednaka ugla, oni su na osnovu stava o sličnosti trouglova (UU) međusobno slični $\triangle MAC \sim \triangle MDB$. Iz sličnosti ovih trouglova sledi proporcionalnost odgovarajućih stranica koje se nalaze naspram jednakih uglova:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}.$$

Unakrsnim množenjem, dobijamo jednakost: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. Pošto su sečice izabrane potpuno proizvoljno, zaključujemo da je proizvod $MA \cdot MB$ konstantan za bilo koju sečicu koja prolazi kroz tačku M .

Neka je T jedna od dve tačke u kojoj tangente iz M dodiruju kružnicu k . $\triangle MAT$ i $\triangle MTB$ su slični po stavu UU , jer imaju zajednički ugao kod M i $\angle MTA = \angle MBT$ (ugao između tetive i tangente podudaran je periferijskom uglu nad tom tetivom). Odatle sledi:

$$MA \cdot MB = MT \cdot MT = MT^2.$$

Na kraju, povežimo ovaj proizvod sa rastojanjem $d = MO$ od centra kružnice. Posmatrajmo pravougli $\triangle MTO$, koji nastaje jer je poluprečnik kružnice $OT = r$ uvek normalan na tangentu MT u tački dodira. Hipotenuza ovog trougla je dužina $MO (= d)$, a katete su MT i $OT = r$. Primenom Pitagorine teoreme na pravougli $\triangle MTO$ dobijamo:

$$MO^2 = MT^2 + OT^2 \implies d^2 = MT^2 + r^2.$$

Odavde možemo izraziti kvadrat dužine tangente: $MT^2 = d^2 - r^2$. Kombinovanjem svih prethodnih rezultata, dobijamo konačan niz jednakosti:

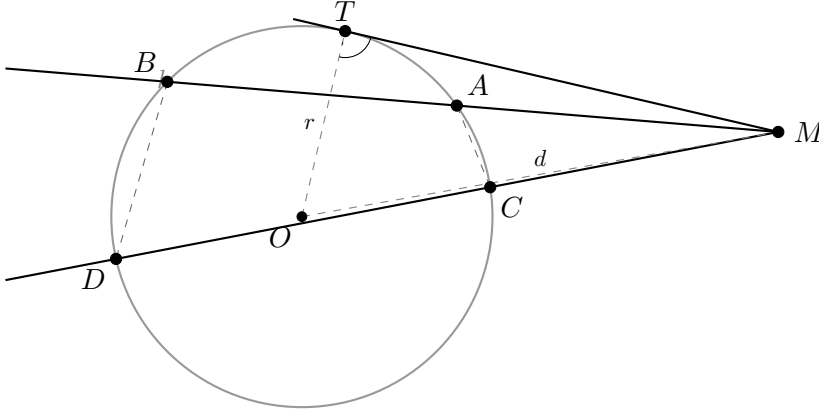
$$MA \cdot MB = MT^2 = d^2 - r^2 = MO^2 - r^2,$$

čime je teorema u potpunosti dokazana.

Ukoliko se tačka M nalazi u unutrašnjosti kružnice $k(O, r)$, tvrđenje i dalje važi, uz sledeće izmene:

Sličnost $\triangle MAC \sim \triangle MDB$ sledi po stavu UU , pri čemu su $\angle AMC$ i $\angle DMB$ unakrsni uglovi, dok su $\angle MCA$ i $\angle MBD$ periferijski uglovi nad istim lukom AD . Odatle je $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. Kako je M u unutrašnjosti, važi $MA \cdot MB = r^2 - d^2$. Jednakost sa dužinom tangente MT^2 u ovom slučaju ne važi, jer se iz unutrašnje tačke kružnice ne mogu konstruisati tangente na kružnicu.

□



Slika 1.7: Slika uz dokaz teoreme o potenciji tačke u odnosu na kružnicu

DEFINICIJA 1.10. Vrednost konstantnog proizvoda $\mathcal{P}(M, k) = MO^2 - r^2$ naziva se potencija tačke M u odnosu na kružnicu k .

TEOREMA 1.11. *Skup svih tačaka ravni kojima su potencije u odnosu na dve date nekoncentrične kružnice jednake čini pravu normalnu na pravu određenu centrima tih kružnica.*

DOKAZ. Neka su date dve nekoncentrične kružnice k_1 i k_2 . Pretpostavimo da se one seku u tačkama A i B .

Znamo da svaka tačka na pravoj AB (zajedničkoj sečici) ima jednaku potenciju u odnosu na obe kružnice. Naime, ako uzmemo bilo koju tačku M na produžetku prave AB , njena potencija u odnosu na obe kružnice iznosi:

$$\mathcal{P}_1(M) = \mathcal{P}_2(M) = MA \cdot MB.$$

Dakle, prava AB je podskup traženog skupa tačaka.

Sada uočimo simetralu duži AB . Budući da su A i B presečne tačke kružnica, duž AB je zajednička tetiva. Centri kružnica O_1 i O_2 moraju pripadati toj simetrali, jer su podjednako udaljeni od krajeva tetive ($O_1A = O_1B = r_1$ i $O_2A = O_2B = r_2$).

To znači da je prava koja spaja centre (O_1O_2) zapravo simetrala tetive AB .

Pošto je simetrala po definiciji normalna na duž koju polovi, sledi da je prava centara O_1O_2 normalna na zajedničku sečicu AB .

Ostalo je još pokazati da tačka van prave AB ne može imati jednake potencije u odnosu na obe kružnice.

Pretpostavimo suprotno, da postoji tačka N van prave AB za koju važi $\mathcal{P}_1(N) = \mathcal{P}_2(N)$. Po definiciji potencije sledi:

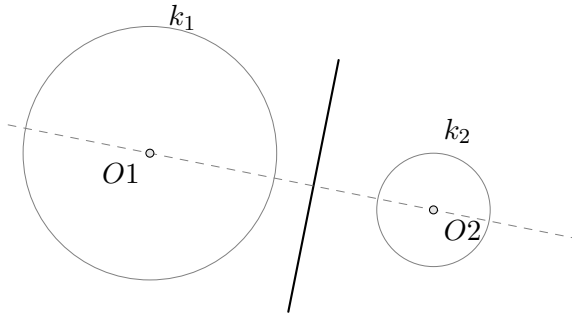
$$NO_1^2 - r_1^2 = NO_2^2 - r_2^2 \iff NO_1^2 - NO_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Neka je N' projekcija tačke N na pravu O_1O_2 . Primenom Pitagorine teoreme na $\triangle NO_1N'$ i $\triangle NO_2N'$ imamo:

$$NO_1^2 - NO_2^2 = (NN'^2 + N'O_1^2) - (NN'^2 + N'O_2^2) = N'O_1^2 - N'O_2^2.$$

Iz ovoga sledi da projekcija N' mora zadovoljavati $N'O_1^2 - N'O_2^2 = r_1^2 - r_2^2$. Kako je razlika kvadrata $r_1^2 - r_2^2$ konstantna, na pravoj O_1O_2 postoji jedinstvena tačka N' sa ovom osobinom. Stoga sve tačke sa jednakim potencijama moraju imati istu projekciju N' , odnosno moraju ležati na jedinstvenoj pravoj koja je normalna na O_1O_2 u tački N' , a to je upravo prava AB .

Ukoliko se kružnice ne seku, posmatramo pomoćnu treću kružnicu k_3 koja seče prve dve, takva da njen centar nije kolinearan sa centrima prve dve kružnice. Radikalne ose parova (k_1, k_3) i (k_2, k_3) se seku u tački N koja dokazano mora imati jednaku potenciju i za k_1 i k_2 . Kako smo pokazali da onda i njena projekcija N' na pravu O_1O_2 ima jednake potencije, kao i da na pravoj O_1O_2 postoji tačno jedna tačka koja ima jednake potencije u odnosu na kružnice k_1 i k_2 , to znači da sve tačke koje imaju jednaku potenciju u odnosu na obe kružnice moraju pripadati pravoj koja prolazi kroz N' i normalna je na O_1O_2 . Za proizvoljnu tačku X sa te prave, na osnovu Pitagorine teoreme primenjene na $\triangle XN'O_1$ i $\triangle XN'O_2$ i osobine da N' ima jednake potencije u odnosu na k_1 i k_2 sledi da i X ima jednake potencije u odnosu na obe kružnice, pa je prava kroz N' normalna na O_1O_2 radikalna osa kružnica k_1 i k_2 . $\square$



Slika 1.8: Radikalna osa dve kružnice

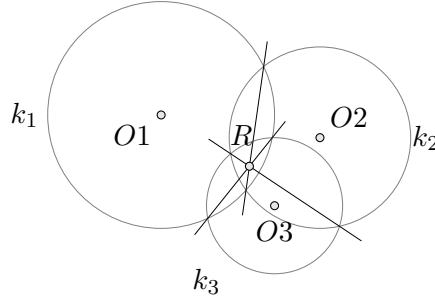
DEFINICIJA 1.12. Skup svih tačaka ravni kojima su potencije u odnosu na dve date nekoncentrične kružnice jednake naziva se radikalna osa tih kružnica.

TEOREMA 1.13. *Radikalne ose tri po parovima nekoncentrične kružnice neke ravni pripadaju istom pravu.*

DOKAZ. Neka su u ravni date tri kružnice k_1, k_2 i k_3 sa nekolinearnim centrima O_1, O_2 i O_3 . Označimo sa L_{12} radikalnu osu kružnica k_1 i k_2 , a sa L_{23} radikalnu osu kružnica k_2 i k_3 .

Budući da centri O_1, O_2, O_3 nisu kolinearni, prava centara O_1O_2 (koja je normalna na L_{12}) i prava centara O_2O_3 (koja je normalna na L_{23}) se seku. Zbog toga ni radikalne ose L_{12} i L_{23} ne mogu biti paralelne, pa se moraju seći u nekoj tački ravni. Označimo tu presečnu tačku sa R . Analizirajmo potenciju tačke R u odnosu na sve tri kružnice: Kako tačka R pripada radikalnoj osi L_{12} , važi $\mathcal{P}_1(R) = \mathcal{P}_2(R)$. Kako tačka R istovremeno pripada i radikalnoj osi L_{23} , važi $\mathcal{P}_2(R) = \mathcal{P}_3(R)$. Iz ove dve jednakosti, direktno sledi $\mathcal{P}_1(R) = \mathcal{P}_3(R)$. Ova poslednja jednakost nam govori da je potencija tačke R u odnosu na kružnicu k_1 jednaka njenoj potenciji u odnosu na kružnicu k_3 . Po definiciji radikalne ose, skup svih tačaka sa ovim svojstvom čini upravo radikalnu osu L_{13} kružnica k_1 i k_3 . Dakle, tačka R mora pripadati i trećoj radikalnoj osi L_{13} . Zaključujemo da sve tri radikalne ose prolaze kroz istu tačku R .

Ukoliko bi centri kružnica bili kolinearni, sve tri radikalne ose bi bile međusobno paralelne (jer su sve tri normalne na tu zajedničku pravu centara), pa bi pripadale pravu paralelnih pravih. Ovim je teorema dokazana. $\square$



Slika 1.9: Radikalne ose tri kružnice

DEFINICIJA 1.14. Skup svih međusobno paralelnih pravih u euklidskoj ravni naziva se pramen paralelnih pravih. Svakom pramenu paralelnih pravih pridružujemo jedinstven geometrijski objekat koji nazivamo beskonačno daleka tačka (ili tačka u beskonačnosti). Za dve prave p i q kažemo da se seku u beskonačno dalekoj tački ako pripadaju istom pramenu paralelnih pravih. Skup svih beskonačno dalekih tačaka zovemo pravom u beskonačnosti.

TEOREMA 1.15 (Menelajeva teorema). *Neka su u $\triangle ABC$ P, Q i R tačke koje redom pripadaju pravama određenim stranicama BC, CA i AB , pri čemu se nijedna od njih ne poklapa sa temenima trougla. Tačke P, Q i R su kolinearne ako i samo ako važi:*

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1,$$

gde označavanje razlomka vektora predstavlja odnos njihovih dužina, uzimajući u obzir smer. Pri tom, ukoliko je neka od tačaka, na primer R tačka u beskonačnosti, važi definiciona konvencija odnosa $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$.

DOKAZ. Dokaz izvodimo u dva smera. Ako su tačke X, Y, Z na nekoj pravoj raspoređene tako da vektor $\overrightarrow{XY}$ ima isti smer kao $\overrightarrow{YZ}$, odnos $\frac{\overrightarrow{XY}}{\overrightarrow{YZ}}$ je pozitivan, u suprotnom je negativan. Uočimo da prava može seći ili tačno dve stranice trougla (i produžetak treće) ili produžetke sve tri stranice. U oba slučaja, broj negativnih odnosa među tri navedena je neparan (ili jedan ili tri), pa je proizvod odnosa vektora uvek negativan ukoliko su tačke kolinearne. Zato je dovoljno dokazati jednakost dužina.

($\Rightarrow$): Pretpostavimo da su tačke P, Q i R kolinearne i da pripadaju pravoj p .

Slučaj 1:

Ako prava p nije beskonačno daleka prava. Tada razlikujemo 2 podslučaja:
1) prava p nije paralelna ni sa jednom od stranica trougla, tada tačke P, Q, R

nisu beskonačno daleke. Spustimo normale iz temena A, B i C na pravu p i označimo njihova podnožja redom sa A', B' i C' .

Uočimo parove sličnih pravouglanih trouglova (videti sliku 1.10):

- Iz sličnosti $\triangle BB'P$ i $\triangle CC'P$ važi $\frac{BP}{CP} = \frac{BB'}{CC'}$.
- Iz sličnosti $\triangle AA'Q$ i $\triangle CC'Q$ imamo: $\frac{CQ}{AQ} = \frac{CC'}{AA'}$.
- Iz sličnosti $\triangle AA'R$ i $\triangle BB'R$ sledi $\frac{AR}{BR} = \frac{AA'}{BB'}$.

Množenjem ove tri jednakosti dobijamo:

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} \cdot \frac{AA'}{BB'} = 1.$$

Uzimajući u obzir da se neparan broj tačaka nalazi na produžecima stranica, sledi:

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1.$$

2) Ako je prava p paralelna jednoj od stranica trougla, na primer $p \parallel AB$, tada je tačka R beskonačno daleka tačka, pa po definiciji važi: $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$. Pošto je $PQ \parallel AB$ iz Talesove teoreme sledi $\frac{CQ}{QA} = \frac{CP}{PB}$, pa je $\frac{CQ}{QA} \cdot \frac{BP}{PC} = 1$. Uzimajući u obzir da se P i Q nalaze ili obe na stranicama trougla ili obe van, sledi

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1.$$

Slučaj 2:

Prava p je beskonačno daleka prava. Tada su tačke P, Q, R beskonačno daleke tačke, pa važi: $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = -1$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = -1$, i $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$, pa je

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1.$$

Time je ovaj smer dokazan.

($\Leftarrow$): Pretpostavimo da za tačke P, Q i R važi data jednakost. Dokažimo da su one kolinearne. Razlikujemo 3 slučaja.

Slučaj 1:

Ni jedna od tačaka P, Q, R nije beskonačno daleka. Pokažimo najpre da prava PQ nije paralelna sa pravom AB . Pretpostavimo suprotno, da je $PQ \parallel AB$. Tada na osnovu Talesove teoreme važi $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}}$, odakle je $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1$. Zamenom ovog rezultata u uslov teoreme $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$ dobijamo $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$. Odatle je $\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RB} = \vec{0}$, iz čega sledi da je $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$,

što implicira $A = B$. Ovo je kontradikcija, jer su A i B različita temena trougla. Dakle, prava PQ ne može biti paralelna sa AB , pa se prave PQ i AB moraju seći. Neka prava PQ seče pravu AB u nekoj tački R' . Budući da su tačke P, Q i R' kolinearne, za njih na osnovu već dokazanog prvog smjera teoreme važi:

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}} = -1.$$

Iz uslova zadatka imamo da važi i:

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1.$$

Deljenjem ove dve jednakosti dobijamo:

$$\frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}} = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}},$$

odakle je

$$\frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'A} + \overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AB}},$$

pa je

$$\overrightarrow{AR'} \cdot \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AR'} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AR},$$

gde se pod množenjem vektora misli na množenje njihovih dužina, uzimajući u obzir usmerenje. Skraćivanjem dobijamo $\overrightarrow{AR'} = \overrightarrow{AR}$, odakle je $\overrightarrow{RR'} = \vec{0}$, odnosno $R = R'$, pa su P, Q, R kolinearne.

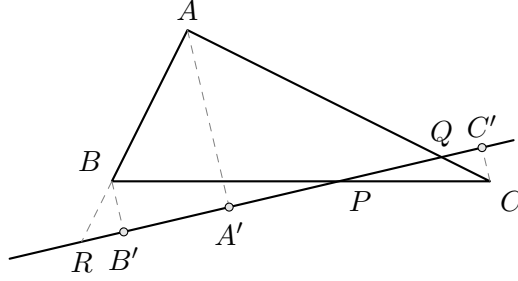
Slučaj 2:

Jedna od tačaka, na primer R je beskonačno daleka tačka, dok P, Q nisu. Tada je $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$, pa je $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1$. Odatle je $\frac{CQ}{QA} = \frac{CP}{PB}$, pa je po obrnutoj Talesovoj teoremi $PQ \parallel AB$, odakle prava PQ sadrži tačku R , pa su P, Q, R kolinearne.

Slučaj 3:

Dve od tačaka, na primer P i R su beskonačno daleke tačke. Tada je $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = -1$ i $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$. Zato je i $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = -1$, pa je i tačka Q beskonačno daleka tačka.

Ovim je dokaz Menelajevе teoreme završen. □



Slika 1.10: Ilustracija Menelajeve teoreme

NAPOMENA 1.16. Često ćemo koristiti da je proizvod naveden u Menelajevoj teoremi jednak 1 u neorijentisanom smislu, kada je u konkretnoj konfiguraciji jasno da je paran broj od tačaka P, Q, R na stranicama trougla. $\triangle$

TEOREMA 1.17 (Dopuna Menelajeve teoreme). *Neka je $\triangle ABC$ takav da je $AC \parallel BC$ i neka su P, Q i R tačke na pravama BC, CA i AB redom. Tačke P, Q i R su kolinearne ako i samo ako važi:*

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$

DOKAZ. ($\Rightarrow$): Pretpostavimo da su tačke P, Q i R kolinearne i da pripadaju pravoj p . Razlikujemo tri slučaja, kada je tačka R na stranici AB , kada je tačka R na produžetku stranice i kada je tačka R beskonačno daleka tačka. U prvom slučaju, kako je $AQ \parallel PB$, sledi da su $\triangle ARQ$ i $\triangle BRP$ slični, pa je $\frac{AR}{BR} = \frac{AQ}{BP}$, odnosno $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{AQ} = 1$, pa je $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} = 1$, odakle sledi

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$

U drugom slučaju, takođe iz $AQ \parallel PB$ sledi da su $\triangle ARQ$ i $\triangle BRP$ slični, pa je $\frac{AR}{RB} = \frac{AQ}{BP}$, odnosno $\frac{AR}{BR} \cdot \frac{BP}{AQ} = 1$, pa je $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{QA} = 1$, odakle sledi

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$

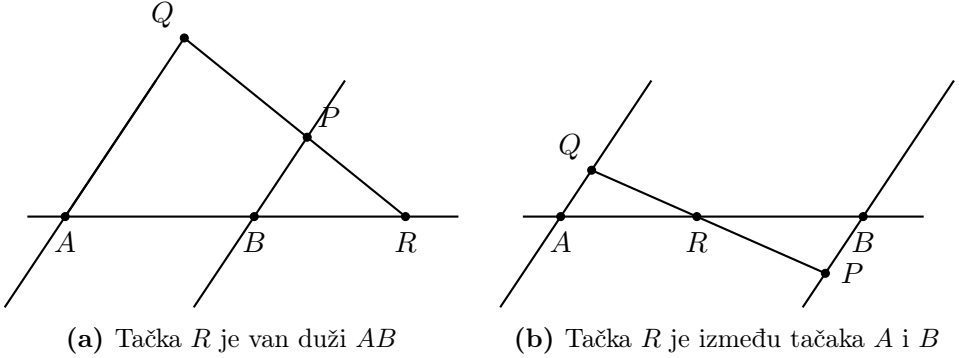
U trećem slučaju je $PQ \parallel AB$ i $AC \parallel BC$ pa je $AQ = BP$ pa je $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{QA} = 1$, odakle sledi

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$

($\Leftarrow$): Pretpostavimo sada da važi

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$

Onda je $\frac{AR}{BR} \cdot \frac{BP}{AQ} = 1$, odnosno $\frac{AR}{RB} = \frac{AQ}{BP}$, pa ukoliko je tačka R konačna važi da su $\triangle ARQ$ i $\triangle BRP$ slični odakle iz podudarnosti odgovarajućih uglova sledi da su P, Q, R kolinearne. Ako je tačka R beskonačna onda je i $\frac{AR}{RB} = 1$, pa je $\frac{AQ}{BP} = 1$ odnosno $AQ = BP$, a kako su P i Q ili obe na stranicama trougla ili obe van njih i $AQ \parallel BP$, to je četvorougao $AQPB$ paralelogram, pa je $PQ \parallel AB$, pa su P, Q, R kolinearne. $\square$



Slika 1.11: Ilustracija uz dopunu Menelajevе teoreme

NAPOMENA 1.18. U nastavku ćemo koristiti termin Menelajeva teorema, bilo da se pozivamo na samu Menelajevu teoremu (kada je $\triangle ABC$ takav da su mu sve tačke konačne) ili na njenu dopunu (prethodna teorema). $\triangle$

TEOREMA 1.19 (Čevina teorema). *Neka je $\triangle ABC$ proizvoljan i neka su P, Q i R tačke na pravama BC, CA i AB redom. Prave AP, BQ i CR se seku u jednoj tački S ili su sve tri međusobno paralelne ako i samo ako važi:*

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$

DOKAZ. Dokaz ćemo izvesti u slučaju kada su tačke P, Q i R na stranicama trougla, jer ćemo u nastavku koristiti baš taj slučaj, a dokaz se može izvesti i u slučaju kada su tačke na produžecima stranica trougla.

($\Rightarrow$)

Pretpostavimo prvo da se prave AP, BQ i CR seku u jednoj tački S . Dokazaćemo da je traženi proizvod jednak 1.

Posmatrajmo stranicu BC i tačku P na njoj. Znamo da je odnos dužina duži na koje tačka P deli stranicu BC jednak odnosu površina $\triangle ABP$ i $\triangle ACP$ kao i odnosu površina $\triangle BSP$ i $\triangle CSP$:

$$\frac{BP}{PC} = \frac{P(\triangle ABP)}{P(\triangle ACP)} \quad \text{i} \quad \frac{BP}{PC} = \frac{P(\triangle BSP)}{P(\triangle CSP)}.$$

Koristeći osobinu razmera da ako je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, onda je i $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$, dobijamo:

$$\frac{BP}{PC} = \frac{P(\triangle ABP) - P(\triangle BSP)}{P(\triangle ACP) - P(\triangle CSP)} = \frac{P(\triangle ABS)}{P(\triangle ACS)}.$$

Potpuno analogno, posmatrajući odnose duži na koje su podeljene preostale dve stranice dobijamo odgovarajuće odnose površina:

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{P(\triangle BCS)}{P(\triangle ABS)},$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{P(\triangle ACS)}{P(\triangle BCS)}.$$

Sada imamo proizvod:

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{P(\triangle ABS)}{P(\triangle ACS)} \cdot \frac{P(\triangle BCS)}{P(\triangle ABS)} \cdot \frac{P(\triangle ACS)}{P(\triangle BCS)}.$$

Nakon skraćivanja svih površina sa desne strane jednakosti, dobijamo:

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1.$$

Uzimajući u obzir smer vektora, pošto tačke P, Q, R u slučaju kada je S u unutrašnjosti $\triangle ABC$ leže na stranicama trougla (ili u slučaju kada je S u spoljašnjosti $\triangle ABC$ dve tačke su na produžecima stranica, dok je jedna na stranici), proizvod odnosa vektora ima znak plus, čime je dokazan smer ($\Rightarrow$).

($\Leftarrow$): Pretpostavimo da važi relacija iz teoreme. Neka se prave AP i BQ seku u tački S . Povucimo pravu CS i neka ona seče stranicu AB u nekoj tački R' .

Pošto se prave AP , BQ i CR' seku u jednoj tački (S), na osnovu već dokazanog smera važi:

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}} = 1.$$

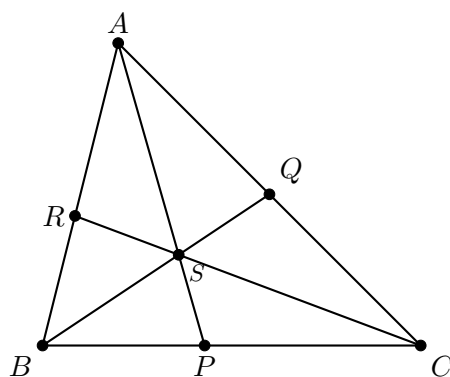
Iz uslova teoreme imamo datu relaciju:

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$

Upoređivanjem ove dve jednakosti i skraćivanjem istih članova dobijamo:

$$\frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}} = \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}.$$

Budući da tačka na pravoj jedinstveno deli duž u datom odnosu, zaključujemo da se tačke R i R' moraju poklapati. To znači da i prava CR prolazi kroz tačku S , čime je dokaz završen. $\square$



Slika 1.12: Ilustracija Čevine teoreme

Važne teoreme projektivne geometrije

2.1 Dezargova teorema

DEFINICIJA 2.1 (Perspektivnost u odnosu na tačku). Za $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ kažemo da su „perspektivni u odnosu na tačku“ (ili da imaju „centar perspektive“) ako se prave $\{AA', BB', CC'\}$ seku u tački P (koja može biti i beskonačno daleka tačka).

DEFINICIJA 2.2 (Perspektivnost u odnosu na pravu). Za $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ kažemo da su „perspektivni u odnosu na pravu“ (ili da imaju „osu perspektive“) ako tačke preseka njihovih odgovarajućih stranica:

$$\{C''\} = AB \cap A'B', \quad \{A''\} = BC \cap B'C', \quad \{B''\} = CA \cap C'A'$$

pripadaju jednoj istoj pravoj ε .

TEOREMA 2.3 (Dezargova teorema *). *Dva trougla su perspektivna u odnosu na tačku ako i samo ako su perspektivna u odnosu na pravu.*

DOKAZ. Pretpostavimo najpre da su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ perspektivni u odnosu na centar P . Dokaz ćemo izvesti trostrukom primenom Menelajevе teoreme na uočene konfiguracije trouglova i pravih. Neka je C'' presek pravih AB i $A'B'$, B'' presek pravih AC i $A'C'$ i A'' presek pravih BC i $B'C'$, pri čemu bilo koja od njih može biti i beskonačno daleka tačka. Posmatrajmo prvo slučaj kada centar P nije beskonačno daleka tačka.

Ukoliko posmatramo $\triangle PAB$ i pravu koja prolazi kroz tačke C'' , B' i A' , na osnovu Menelajevе teoreme važi:

$$\frac{\overrightarrow{AC''}}{\overrightarrow{C''B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'P}} \cdot \frac{\overrightarrow{PA'}}{\overrightarrow{A'A}} = -1.$$

*Gerard Desargues (1591–1661), francuski matematičar.

Slično, primenom Menelajevе teoreme na $\triangle PBC$ i pravu $p(A'', C', B')$ dobijamo relaciju:

$$\frac{\overrightarrow{BA''}}{\overrightarrow{A''C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'P}} \cdot \frac{\overrightarrow{PB'}}{\overrightarrow{B'B}} = -1,$$

dok za $\triangle PCA$ i pravu $p(B'', C', A')$ analogno važi:

$$\frac{\overrightarrow{CB''}}{\overrightarrow{B''A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'P}} \cdot \frac{\overrightarrow{PC'}}{\overrightarrow{C'C}} = -1.$$

Sada možemo pomnožiti ove tri jednakosti. Nakon skraćivanja odgovarajućih članova, preostaje:

$$\frac{\overrightarrow{AC''}}{\overrightarrow{C''B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA''}}{\overrightarrow{A''C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB''}}{\overrightarrow{B''A}} = -1.$$

Dobijeni proizvod, ponovo prema Menelajevoj teoremi, direktno implicira da je tačka C'' incidentna sa pravom $A''B''$, odnosno da su tačke A'' , B'' i C'' kolinearne (prava koja ih spaja može biti i beskonačno daleka prava). Sada posmatrajmo slučaj kada je P beskonačno daleka tačka.

Ukoliko posmatramo $\triangle PAB$ i pravu koja prolazi kroz tačke C'' , B' i A' , na osnovu Menelajevе teoreme važi:

$$\frac{\overrightarrow{AC''}}{\overrightarrow{C''B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{A'A}} = 1.$$

Slično, primenom Menelajevе teoreme na $\triangle PBC$ i pravu $p(A'', C', B')$ dobijamo relaciju:

$$\frac{\overrightarrow{BA''}}{\overrightarrow{A''C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{B'B}} = 1,$$

dok za $\triangle PCA$ i pravu $p(B'', C', A')$ analogno važi:

$$\frac{\overrightarrow{CB''}}{\overrightarrow{B''A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{C'C}} = 1.$$

Sada možemo pomnožiti ove tri jednakosti. Nakon skraćivanja odgovarajućih članova, preostaje:

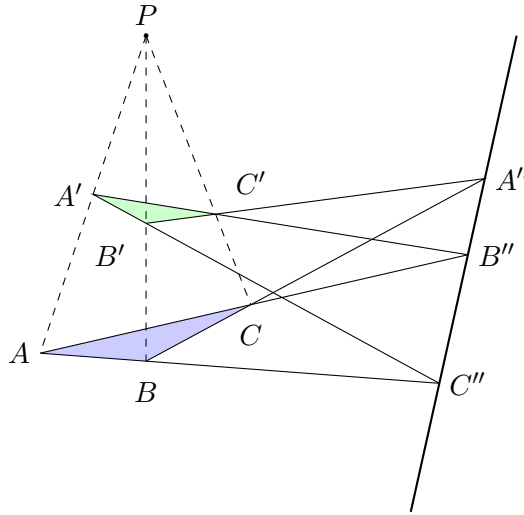
$$\frac{\overrightarrow{AC''}}{\overrightarrow{C''B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA''}}{\overrightarrow{A''C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB''}}{\overrightarrow{B''A}} = -1.$$

Dobijeni proizvod po Menelajevoj teoremi implicira da su A'' , B'' i C'' kolinearne.

Za dokaz u obrnutom smeru, pretpostavimo da tačke A'' , B'' i C'' pripadaju

jednoj pravoj (koja može biti i beskonačno daleka prava). Neka su prvo ili sve tri od A'', B'', C'' konačne ili je tačno jedna beskonačno daleka. Iskoristićemo upravo dokazano tvrđenje tako što ćemo ga primeniti na $\triangle C''BB'$ i $\triangle B''CC'$. Budući da se prave $C''B'', BC$ i $B'C'$ seku u tački A'' (koja može biti i beskonačno daleka tačka), ovi trouglovi su perspektivni u odnosu na centar A'' . Na osnovu prvog dela dokaza, njihove odgovarajuće presečne tačke: $\{A\} = C''B \cap B''C$, $\{A'\} = C''B' \cap B''C'$ i $\{P\} = BB' \cap C'C$ moraju biti kolinearne. Kolinearnost tačaka A, A' i P znači da se prave AA', BB' i CC' seku u jednoj tački, pa sledi da su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ perspektivni u odnosu na centar P .

Ako su sve tri od A'', B'', C'' beskonačno daleke, odnosno ako su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takvi da je $AB \parallel A'B', AC \parallel A'C'$ i $BC \parallel B'C'$, tada je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Ako je $AB \cong A'B'$, onda je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, pa su AB i $A'B'$, AC i $A'C'$ odnosno BC i $B'C'$ podudarne i paralelne. Posmatrajmo transformaciju podudarnosti koja preslikava A u A', B u B' i C u C' . Ako se AA' i BB' ne seku, onda je ta transformacija translacija i četvorougao $ABB'A'$ je paralelogram, pa je $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, a ako se AA' i BB' seku, onda je četvorougao $ABA'B'$ paralelogram i AA', BB' i CC' se seku u jednoj tački P . Ako AB i $A'B'$ nisu podudarne, onda su posmatrani trouglovi slični s koeficijentom sličnosti k . Neka se AA' i CC' seku u tački P . Po Talesovoj teoremi, iz $AC \parallel A'C'$ sledi da je $\frac{PC}{PC'} = \frac{AC}{A'C'} = k$, dok takođe iz Talesove teoreme zbog $BC \parallel B'C'$, ako se BB' i CC' seku u P' sledi $\frac{P'C}{P'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$. Kako P i P' dele CC' u istom odnosu, to je $P = P'$ pa se AA', BB' i CC' seku u tački P , tj. $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ su perspektivni iz tačke P . $\square$



Slika 2.1: Ilustracija Dezargove teoreme

2.2 Paskalova teorema

TEOREMA 2.4 (Paskalova teorema [†]). *Neka su A, B, C, D, E, F tačke na kružnici, koje nisu nužno sve različite. Prave AB i DE seku se u L , prave BC i EF u M , a CD i FA u N , pri čemu, ukoliko se neke dve tačke poklapaju, pod pravom XX podrazumevamo tangentu na kružnicu u tački X . Tada su tačke L, M, N kolinearne.*

DOKAZ. Neka se AB i CD seku u X , CD i EF u Y , a EF i AB u Z , pri čemu neke od tačaka X, Y, Z mogu biti i beskonačno daleke. Posmatrajmo prvo slučaj kada su sve konačne. Pokazaćemo da tačke L, M, N leže na pravim koje sadrže stranice $\triangle XYZ$, odnosno na osnovu Menelajeva teoreme: treba pokazati da je

$$\frac{\overrightarrow{ZL}}{\overrightarrow{LX}} \cdot \frac{\overrightarrow{XN}}{\overrightarrow{NY}} \cdot \frac{\overrightarrow{YM}}{\overrightarrow{MZ}} = -1.$$

Posmatramo $\triangle XYZ$. Znamo da su tačke L, D, E na pravoj, pa Menelajeva teorema daje:

$$\frac{\overrightarrow{XD}}{\overrightarrow{DY}} \cdot \frac{\overrightarrow{YE}}{\overrightarrow{EZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZL}}{\overrightarrow{LX}} = -1.$$

I tačke C, M, B su kolinearne, pa imamo:

$$\frac{\overrightarrow{XC}}{\overrightarrow{CY}} \cdot \frac{\overrightarrow{YM}}{\overrightarrow{MZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZB}}{\overrightarrow{BX}} = -1.$$

Najzad, tačke N, F, A su kolinearne, pa je:

$$\frac{\overrightarrow{XN}}{\overrightarrow{NY}} \cdot \frac{\overrightarrow{YF}}{\overrightarrow{FZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZA}}{\overrightarrow{AX}} = -1.$$

Množenjem ove tri jednakosti, dobijamo:

$$\frac{\overrightarrow{XD}}{\overrightarrow{DY}} \cdot \frac{\overrightarrow{YE}}{\overrightarrow{EZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZL}}{\overrightarrow{LX}} \cdot \frac{\overrightarrow{XC}}{\overrightarrow{CY}} \cdot \frac{\overrightarrow{YM}}{\overrightarrow{MZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZB}}{\overrightarrow{BX}} \cdot \frac{\overrightarrow{XN}}{\overrightarrow{NY}} \cdot \frac{\overrightarrow{YF}}{\overrightarrow{FZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZA}}{\overrightarrow{AX}} = -1.$$

Korišćenjem potencije tačke na kružnicu sledi:

$$XD \cdot XC = XB \cdot XA, \quad YD \cdot YC = YF \cdot YE, \quad ZF \cdot ZE = ZB \cdot ZA,$$

pa uvrštavanjem toga u prethodnu jednakost, dobijamo traženi rezultat. Neka je sada jedna od tačaka X, Y, Z beskonačno daleka, na primer X , dok su ostale nisu. Pokazaćemo da tačke L, M, N leže na pravim koje sadrže

[†]Blaise Pascal (1623–1662), francuski matematičar.

stranice $\triangle XYZ$, odnosno na osnovu Menelajeva teoreme: treba pokazati da je

$$\frac{\overrightarrow{ZL}}{\overrightarrow{NY}} \cdot \frac{\overrightarrow{YM}}{\overrightarrow{MZ}} = 1.$$

Posmatramo $\triangle XYZ$. Znamo da su tačke L, D, E na pravoj, pa Menelajeva teorema daje:

$$\frac{\overrightarrow{YE}}{\overrightarrow{EZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZL}}{\overrightarrow{DY}} = 1.$$

I tačke C, M, B su kolinearne, pa imamo:

$$\frac{\overrightarrow{YM}}{\overrightarrow{MZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZB}}{\overrightarrow{CY}} = 1.$$

Najzad, tačke N, F, A su kolinearne, pa je:

$$\frac{\overrightarrow{YF}}{\overrightarrow{FZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZA}}{\overrightarrow{NY}} = 1.$$

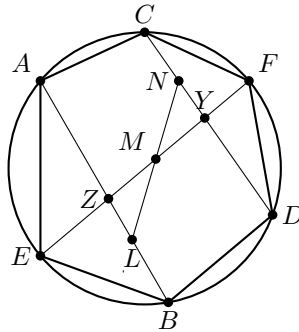
Množenjem ove tri jednakosti, dobijamo:

$$\frac{\overrightarrow{YE}}{\overrightarrow{EZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZL}}{\overrightarrow{DY}} \cdot \frac{\overrightarrow{YM}}{\overrightarrow{MZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZB}}{\overrightarrow{CY}} \cdot \frac{\overrightarrow{YF}}{\overrightarrow{FZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZA}}{\overrightarrow{NY}} = 1.$$

Korišćenjem potencije tačke na kružnicu sledi:

$$YD \cdot YC = YF \cdot YE, \quad ZF \cdot ZE = ZB \cdot ZA,$$

pa uvrštavanjem toga u prethodnu jednakost, dobijamo traženi rezultat.



Slika 2.2: Ilustracija Paskalove teoreme u slučaju različitih konačnih tačaka Y i Z

Ukoliko se AB, CD i EF seku u jednoj tački X , kao na slici 2.3. Označimo $XA = a$, $XB = b$, $XC = c$, $XD = d$, $XE = e$, $XF = f$, $XM = m$,

$XL = l$. Iz potencije tačke X u odnosu na krug sledi $ab = cd = ef$. Označimo $\angle BXC = \alpha$ i $\angle CXM = \beta$. Kako je $L-D-E$, to sledi $P(\triangle DXE) = P(\triangle LXE) - P(\triangle LXD)$, pa je $de \sin \beta = le \sin(\alpha + \beta) - ld \sin(\alpha)$, odakle je

$$l = \frac{de \sin \beta}{e \sin(\alpha + \beta) - d \sin(\alpha)}.$$

Kako je $B-C-M$, to sledi $P(\triangle CXM) = P(\triangle BXM) - P(\triangle BXC)$, pa je $cm \sin \beta = bm \sin(\alpha + \beta) - bc \sin \alpha$, odakle je

$$m = \frac{bc \sin \alpha}{b \sin(\alpha + \beta) - c \sin \beta}.$$

Kako je $A-N-F$, to je

$$\frac{AN}{NF} = \frac{P(\triangle AXN)}{P(\triangle NXF)} = \frac{AX \cdot NX \cdot \sin \alpha}{NX \cdot FX \cdot \sin \beta} = \frac{a \sin \alpha}{f \sin \beta},$$

odakle je

$$\frac{AN}{NF} = \frac{a \sin \alpha}{f \sin \beta}.$$

Sada je

$$\frac{XL}{LA} \cdot \frac{AN}{NF} \cdot \frac{FM}{MX} = \frac{l}{l-a} \cdot \frac{a \sin \alpha}{f \sin \beta} \cdot \frac{f-m}{m},$$

pa uvrštavanjem dobijenih izraza za l i m dobijamo:

$$\frac{XL}{LA} \cdot \frac{AN}{NF} \cdot \frac{FM}{MX} = \frac{\frac{de \sin \beta}{e \sin(\alpha+\beta)-d \sin \alpha}}{\frac{de \sin \beta}{e \sin(\alpha+\beta)-d \sin \alpha} - a} \cdot \frac{a \sin \alpha}{f \sin \beta} \cdot \frac{f - \frac{bc \sin \alpha}{b \sin(\alpha+\beta)-c \sin \beta}}{\frac{bc \sin \alpha}{b \sin(\alpha+\beta)-c \sin \beta}}.$$

Sređivanjem dvojnih razlomaka i skraćivanjem zajedničkih članova $\sin \alpha$ i $\sin \beta$, gornji izraz se svodi na

$$\frac{XL}{LA} \cdot \frac{AN}{NF} \cdot \frac{FM}{MX} = \frac{ade}{fbc} \cdot \frac{bf \sin(\alpha + \beta) - cf \sin \beta - bc \sin \alpha}{de \sin \beta - ae \sin(\alpha + \beta) + ad \sin \alpha}.$$

Poslednji razlomak je jednak 1 ako i samo ako je $adebf \sin(\alpha+\beta) - adecf \sin \beta - adebc \sin \alpha = fbcd \sin \beta - fbcae \sin(\alpha+\beta) + fbcd \sin \alpha$, odnosno ako i samo ako je $abef(c+d) \sin(\alpha+\beta) = cdef(a+b) \sin \beta + abcd(e+f) \sin \alpha$, što zbog $ab = cd = ef$ postaje ekvivalentno sa $(c+d) \sin(\alpha+\beta) = (a+b) \sin \beta + (e+f) \sin \alpha$. Da bismo pokazali tu jednakost, označimo centar kruga sa O , a njegove projekcije na prave XA, XC, XE sa A', C', E' redom. Tada je $XA' = \frac{a+b}{2}$, $XC' = \frac{c+d}{2}$ i $XE' = \frac{e+f}{2}$. Označimo $\angle A'XO = \theta$, tada u pravouglom $\triangle OA'X$ važi $XA' = XO \cos \theta$, pa je $a+b = 2XO \cos \theta$. Na isti način iz pravouglog $\triangle OC'X$ sledi $c+d = 2XO \cos(\theta - \alpha)$, dok iz pravouglog $\triangle OE'X$ sledi $e+f = 2XO \cos(\alpha + \beta - \theta)$. Uvrštavanjem ovoga, jednakost

koju dokazujemo postaje ekvivalentna sa $\cos \theta \sin \beta + \cos(\alpha + \beta - \theta) \sin \alpha = \cos(\theta - \alpha) \sin(\alpha + \beta)$.

$$\begin{aligned}
& \cos \theta \sin \beta + \cos(\alpha + \beta - \theta) \sin \alpha \\
&= \cos \theta \sin \beta + \cos(\theta - (\alpha + \beta)) \sin \alpha \\
&= \cos \theta \sin \beta + \left(\cos \theta \cos(\alpha + \beta) + \sin \theta \sin(\alpha + \beta) \right) \sin \alpha \\
&= \cos \theta \sin \beta + \cos \theta \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha + \sin \theta \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha \\
&= \cos \theta \left(\sin \beta + \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha \right) + \sin \theta \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha \\
&= \cos \theta \left(\sin \beta + (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \sin \alpha \right) + \sin \theta \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha \\
&= \cos \theta \left(\sin \beta + \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta - \sin^2 \alpha \sin \beta \right) + \sin \theta \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha \\
&= \cos \theta \left(\sin \beta (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \right) + \sin \theta \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha \\
&= \cos \theta \left(\sin \beta \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \right) + \sin \theta \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha \\
&= \cos \theta \cdot \cos \alpha \left(\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta \right) + \sin \theta \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha \\
&= \cos \theta \cos \alpha \sin(\alpha + \beta) + \sin \theta \sin \alpha \sin(\alpha + \beta) \\
&= \sin(\alpha + \beta) \left(\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \right) \\
&= \sin(\alpha + \beta) \cos(\theta - \alpha) \\
&= \cos(\theta - \alpha) \sin(\alpha + \beta),
\end{aligned}$$

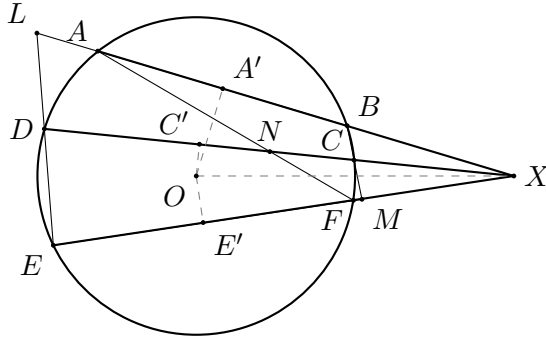
čime je pokazana željena jednakost. Zato je

$$\frac{XL}{LA} \cdot \frac{AN}{NF} \cdot \frac{FM}{MX} = 1.$$

Uzimajući u obzir da je neparan broj tačaka L, N, M van stranica $\triangle XAF$, sledi da je

$$\frac{\overrightarrow{XL}}{\overrightarrow{LA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NF}} \cdot \frac{\overrightarrow{FM}}{\overrightarrow{MX}} = -1,$$

odakle primenom Menelajevе teoreme na $\triangle XAF$ i tačke M, N, L sledi da su te tačke kolinearne.

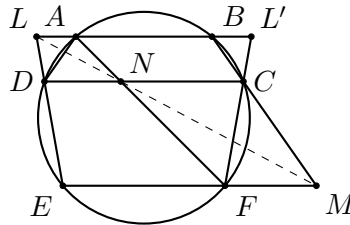


Slika 2.3: Ilustracija Paskalove teoreme u slučaju kada se AB, CD i EF seku u tački X .

Posmatrajmo sada slučaj kada su sve tri tačke X, Y, Z beskonačno daleke, odnosno kada je $AB \parallel CD \parallel EF$. Neka je L' presek pravih AB i FC . Kako je $AB \parallel CD$ to je tetivni četvorougao $ABCD$ jednakokraki trapez, pa je $AD = BC$, $\angle DAB = \angle CBA$, odakle je $\angle DAL = \angle CBL'$. Takođe tetivni četvorougao $DCFE$ je jednakokraki trapez, pa je $\angle DEF = \angle EFC$. Odatle, u trapezu $ELL'F$ važi $\angle ELL' = \angle FL'L$, odnosno $\angle DLA = \angle CL'B$. Zbog toga i $\angle DAL = \angle CBL'$ je i $\angle LDA = \angle L'CB$. Sada su $\triangle DAL$ i $\triangle CBL'$ podudarni po stavu USU , pa je $LA = L'B$. Iz Talesove teoreme sledi da je $\frac{BM}{CM} = \frac{AF}{NF}$. Takođe iz Talesove teoreme sledi $\frac{CN}{L'A} = \frac{FN}{FA}$. Odatle je $\frac{BM}{CM} = \frac{L'A}{CN}$, a iz $LA = L'B$ sledi $L'A = LB$, pa je $\frac{BM}{CM} = \frac{LB}{CN}$, pa je $\frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{LB} = 1$. Sada sledi da je

$$\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{LB}} = 1,$$

odakle primenom Menelajevе teoreme na $\triangle BCX$ i tačke M, N, L sledi da su M, N, L kolinearne, što je i trebalo dokazati. $\square$



Slika 2.4: Ilustracija Paskalove teoreme u slučaju kada su X, Y, Z beskonačno daleke tačke

TEOREMA 2.5. U tetivnom četvorouglu $ABCD$, prave AB i CD se seku u E , a prave BC i DA u F . Tangente na opisanu kružnicu u tačkama A i C

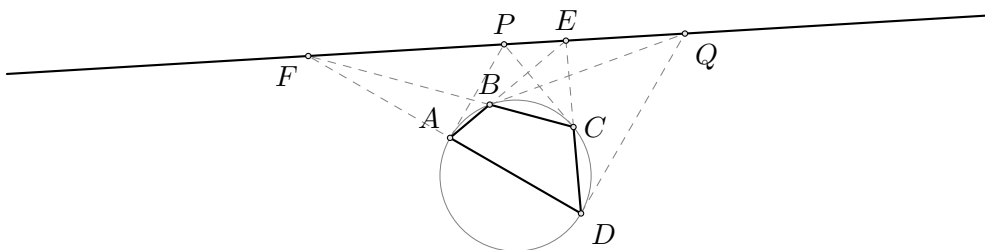
se seku u P , a tangente u B i D se seku u Q . Tada tačke E, F, P i Q leže na istoj pravoj.

DOKAZ. Primenićemo Paskalovu teoremu na degenerisani šestougao $AABCCD$. Prema Paskalovoj teoremi za šestougao čija su temena A, A, B, C, C, D :

- Prave AA (tangenta u A) i CC (tangenta u C) seku se u P .
- Prave AB i CD seku se u E .
- Prave BC i DA seku se u F .

Kako Paskalova teorema tvrdi da su preseki naspramnih stranica (pravih koje sadrže stranice) kolinearne, tačke P, E i F moraju biti kolinearne.

Analogno, posmatranjem degenerisanog šestougla $BBADDC$ i zaključujemo da i tačka Q pripada istoj pravoj. Dakle, tačke E, F, P i Q leže na jednoj pravoj. $\square$



Slika 2.5: Ilustracija Paskalove teoreme u slučaju kada nisu sve tačke razlčite

2.3 Papusova teorema

TEOREMA 2.6 (Papusova teorema [‡]). *Ako su A, C, E tri tačke na jednoj pravoj, a B, D, F na drugoj, i ako se prave AB i DE seku u tački L , prave CD i FA u tački M , a prave EF i BC u tački N , tada su tačke L, M i N kolinearne.*

DOKAZ. Pretpostavimo prvo da tri prave AB, CD i EF obrazuju $\triangle UVW$ (tj. da je najviše jedna od tačaka U, V, W beskonačno daleka tačka). Pretpostavimo prvo da ni jedna od tačaka U, V, W nije beskonačno daleka. Primenujući Menelajevu teoremu na pet trojki tačaka LDE, BCN, ACE, BDF, AMF i $\triangle UVW$, dobijamo sledećih pet jednakosti:

[‡]Papus iz Aleksandrije, matematičar koji je živeo u 4. veku

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{VE}}{\overrightarrow{EW}} \cdot \frac{\overrightarrow{WL}}{\overrightarrow{LU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UD}}{\overrightarrow{DV}} &= -1, \\
\frac{\overrightarrow{VN}}{\overrightarrow{NW}} \cdot \frac{\overrightarrow{WB}}{\overrightarrow{BU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UC}}{\overrightarrow{CV}} &= -1, \\
\frac{\overrightarrow{VE}}{\overrightarrow{EW}} \cdot \frac{\overrightarrow{WA}}{\overrightarrow{AU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UC}}{\overrightarrow{CV}} &= -1, \\
\frac{\overrightarrow{VF}}{\overrightarrow{FW}} \cdot \frac{\overrightarrow{WB}}{\overrightarrow{BU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UD}}{\overrightarrow{DV}} &= -1, \\
\frac{\overrightarrow{VM}}{\overrightarrow{MU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UA}}{\overrightarrow{AW}} \cdot \frac{\overrightarrow{WF}}{\overrightarrow{FV}} &= -1,
\end{aligned}$$

Deljenjem proizvoda prva dva izraza proizvodom poslednja tri uz skraćivanje dobijamo:

$$\frac{\overrightarrow{WL}}{\overrightarrow{LU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UM}}{\overrightarrow{MV}} \cdot \frac{\overrightarrow{VN}}{\overrightarrow{NW}} = -1.$$

Ovo je uslov Menelajevе teoreme za tačke L, M, N i $\triangle UVW$. Kako je proizvod jednak -1 , zaključujemo da su tačke L, M i N kolinearne, što je i trebalo dokazati.

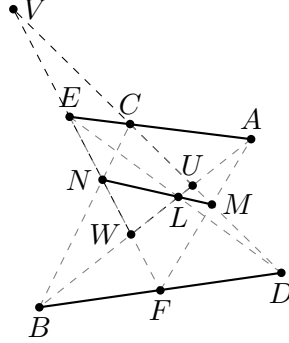
Neka je sada jedna od tačaka U, V, W beskonačno daleka, na primer W . Primenjujući Menelajevu teoremu na pet trojki tačaka LDE, BCN, ACE, BDF, AMF i $\triangle UVW$, dobijamo sledećih pet jednakosti:

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{VE}}{\overrightarrow{LU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UD}}{\overrightarrow{DV}} &= 1, \\
\frac{\overrightarrow{VN}}{\overrightarrow{BU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UC}}{\overrightarrow{CV}} &= 1, \\
\frac{\overrightarrow{VE}}{\overrightarrow{AU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UC}}{\overrightarrow{CV}} &= 1, \\
\frac{\overrightarrow{VF}}{\overrightarrow{BU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UD}}{\overrightarrow{DV}} &= 1, \\
\frac{\overrightarrow{VM}}{\overrightarrow{MU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UA}}{\overrightarrow{FV}} &= 1,
\end{aligned}$$

Deljenjem proizvoda prva dva izraza proizvodom poslednja tri uz skraćivanje dobijamo:

$$\frac{\overrightarrow{VN}}{\overrightarrow{LU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UM}}{\overrightarrow{MV}} = 1.$$

Ovo je uslov Menelajevе teoreme za tačke L, M, N i $\triangle UVW$. Kako je proizvod jednak -1 , zaključujemo da su tačke L, M i N kolinearne, što je i trebalo dokazati.



Slika 2.6: Ilustracija Papusove teoreme

Neka se sada AB, CD i EF seku u X , kao na slici 2.7, ostali slučajevi se dokazuju slično. Primenom Menelajevе teoreme na $\triangle AXC$ i tačke L, D, E dobijamo

$$\frac{AL}{LX} \cdot \frac{XD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Primenom Menelajevе teoreme na $\triangle XFD$ i tačke N, B, C dobijamo

$$\frac{XN}{NF} \cdot \frac{FB}{BD} \cdot \frac{DC}{CX} = 1.$$

Primenom Menelajevе teoreme na $\triangle FAE$ i tačke M, C, X dobijamo

$$\frac{FM}{MA} \cdot \frac{AC}{CE} \cdot \frac{EX}{XF} = 1.$$

Množenjem ove tri jednakosti dobijamo

$$\frac{AL}{LX} \cdot \frac{XN}{NF} \cdot \frac{FM}{MA} = \frac{AE \cdot BD \cdot XF \cdot XC}{BF \cdot AC \cdot XD \cdot XE}.$$

Označimo $\angle AXE = \alpha$ i $\angle AXC = \angle \alpha'$. Tada je

$$\frac{AE}{AC} = \frac{P(\triangle AXE)}{P(\triangle AXC)} = \frac{AX \cdot XE \cdot \sin \alpha}{AX \cdot XC \cdot \sin \alpha'} = \frac{XE \cdot \sin \alpha}{XC \cdot \sin \alpha'}$$

i

$$\frac{BD}{BF} = \frac{P(\triangle BXD)}{P(\triangle BFX)} = \frac{BX \cdot XD \cdot \sin \alpha'}{BX \cdot XF \cdot \sin \alpha} = \frac{XD \cdot \sin \alpha'}{XF \cdot \sin \alpha}.$$

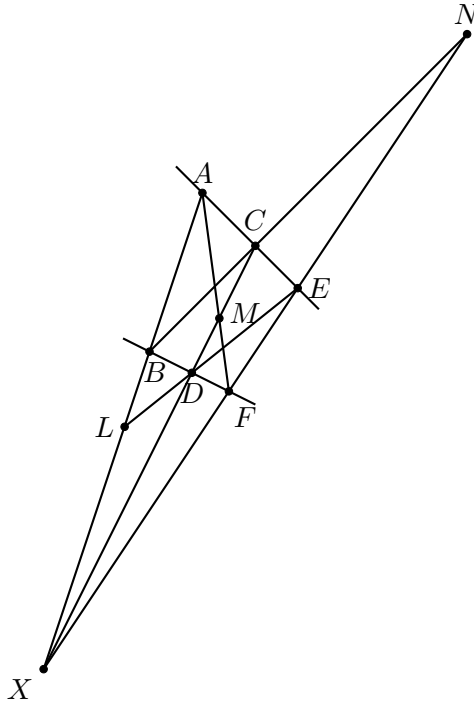
Odatle sledi

$$\frac{AL}{LX} \cdot \frac{XN}{NF} \cdot \frac{FM}{MA} = \frac{AE \cdot BD \cdot XF \cdot XC}{BF \cdot AC \cdot XD \cdot XE} = 1,$$

pa kako je neparan broj tačaka L, M, N van stranica $\triangle AXF$, to važi

$$\frac{\overrightarrow{AL}}{\overrightarrow{LX}} \cdot \frac{\overrightarrow{XN}}{\overrightarrow{NF}} \cdot \frac{\overrightarrow{FM}}{\overrightarrow{MA}} = -1,$$

pa po Menelajevoj teoremi primenjenoj na $\triangle AXF$ i tačke L, M, N sledi da su L, M, N kolinearne.



Slika 2.7: Ilustracija Papusove teoreme u slučaju kada su AB, CD i EF konkurentne prave

Neka su sada U, V, W beskonačno daleke tačke, odnosno neka je $AB \parallel CD \parallel EF$. Kako je $DL \parallel DE$, to su $\triangle DLB$ i $\triangle DEF$ slični, pa važi:

$$\frac{LB}{EF} = \frac{LD}{DE} = \frac{BD}{FD}.$$

Kako je $AL \parallel CD$, to po Talesovoj teoremi sledi da je $\frac{LD}{DE} = \frac{AC}{CE}$, pa je

$$\frac{LB}{EF} = \frac{AC}{CE}.$$

Kako je $CM \parallel EF$, to su $\triangle ACM$ i $\triangle AEF$ slični, pa je

$$\frac{CM}{EF} = \frac{AC}{AE}.$$

Deljenjem poslednje dve jednakosti dobijamo:

$$\frac{LB}{CM} = \frac{AE}{CE}.$$

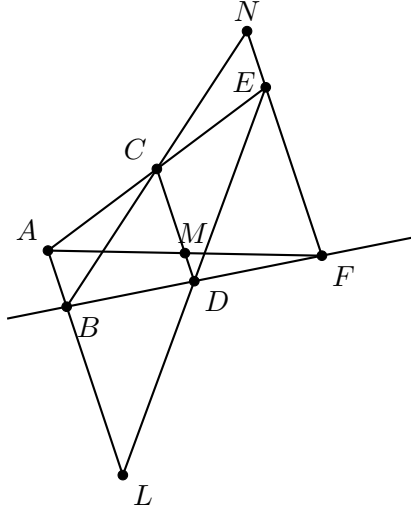
Kako je $AB \parallel NE$, to su $\triangle ABC$ i $\triangle ENC$ slični, pa je $\frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CN}$, odakle je $1 + \frac{AC}{CE} = 1 + \frac{BC}{CN}$, pa je $\frac{CE+AC}{CE} = \frac{CN+BC}{CN}$, odnosno $\frac{AE}{CE} = \frac{BN}{CN}$. Sada imamo $\frac{LB}{CM} = \frac{BN}{CN}$, odnosno $\frac{BN}{CN} \cdot \frac{CM}{LB} = 1$. Kako je U beskonačno daleka tačka, to je $\frac{UL}{MU} = 1$, pa je

$$\frac{BN}{NC} \cdot \frac{CM}{MU} \cdot \frac{UL}{LB} = 1.$$

Kako je neparan broj tačaka van stranica $\triangle BCU$, to je

$$\frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{NC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MU}} \cdot \frac{\overrightarrow{UL}}{\overrightarrow{LB}} = -1,$$

pa su po Menelajevoj teoremi primenjenoj na $\triangle BCU$ i tačke M, N, L te tačke kolinearne, što je i trebalo pokazati.



Slika 2.8: Ilustracija Papusove teoreme u slučaju kada su U, V, W beskonačno daleke tačke.

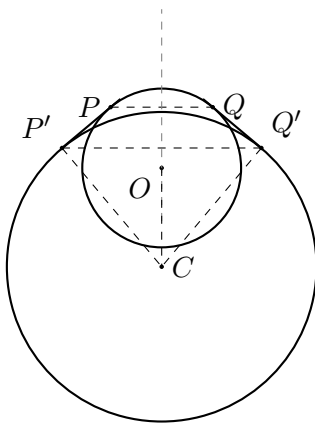
□

2.4 Brijanšonova teorema

TEOREMA 2.7. *Neka su P i Q tačke iste kružnice i neka su P' i Q' različite tačke koje pripadaju tangentama na kružnicu u P i Q redom tako da se one nalaze sa iste strane prave PQ i da je $PP' = QQ'$. Tada postoji kružnica koja dodiruje prave PP' i QQ' u tačkama P' i Q' .*

DOKAZ. Ukoliko je PQ prečnik kružnice, tada je $PQQ'P'$ pravougaonik, pa je središte duži $P'Q'$ centar kružnice koja prave PP' i QQ' dodiruje u tačkama P' i Q' redom.

Pretpostavimo sada da PQ nije prečnik kružnice. Ova geometrijska konfiguracija (kao na slici) ima simetriju u odnosu na simetralu duži PQ . Ta ista osa simetrije istovremeno predstavlja i simetralu duži PQ i sadrži prečnik prvobitne kružnice. Konstruisanjem normala na tangente PP' i QQ' u tačkama P' i Q' , uočavamo da se one seku na toj osi simetrije u zajedničkoj tački, koja zapravo predstavlja centar tražene kružnice C . $\square$



Slika 2.9: Ilustracija Teoreme 2.7.

TEOREMA 2.8 (Brijanšonova teorema [§]). *Neka je $ABCDEF$ konveksan šestougao takav da se u njega može upisati kružnica. Tada se njegove dijagonale AD , BE i CF seku u jednoj tački.*

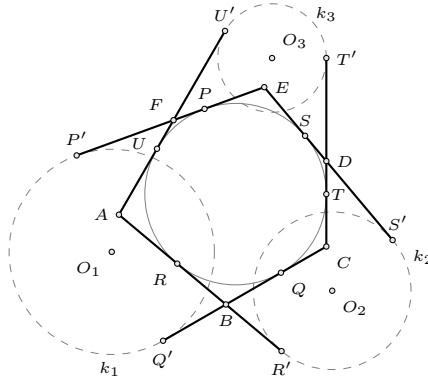
DOKAZ. Neka su R, Q, T, S, P, U dodirne tačke stranica AB, BC, CD, DE, EF, FA redom šestougla $ABCDEF$ sa upisanom kružnicom. Pod pretpostavkom da je šestougao konveksan, dijagonale AD, BE, CF prolaze kroz njegovu unutrašnjost. Na produžecima stranica biramo tačke P', Q', R', S', T', U' , kao na slici, tako da važi $PP' = QQ' = RR' = SS' = TT' = UU'$. Prema prethodnoj teoremi, konstruišemo tri kružnice:

[§]Charles Julien Brianchon (1783–1864), francuski matematičar.

- k_1 koja dodiruje prave PP' i QQ' u P' i Q' ,
- k_2 koja dodiruje prave RR' i SS' u R' i S' ,
- k_3 koja dodiruje prave TT' i UU' u T' i U' .

Koristeći svojstvo jednakosti tangenti iz iste tačke, vidimo da je $AR = AU$ i $RR' = UU'$, odakle sledi $AR' = AU'$. Analogno tome, iz $DS = DT$ i $SS' = TT'$ dobijamo $DS' = DT'$. Ovo znači da tačka A ima jednaku potenciju u odnosu na kružnice k_2 i k_3 i kako tačka D ima jednaku potenciju u odnosu na kružnice k_2 i k_3 , to prava AD mora biti radikalna osa tih kružnica.

Na isti način, dijagonala BE je radikalna osa kružnica k_1 i k_3 , dok CF predstavlja radikalnu osu kružnica k_1 i k_2 . Kako se radikalne ose triju kružnica, uzetih u parovima, uvek seku u jednoj zajedničkoj tački (ili su paralelne, što ovde nije slučaj jer su to dijagonale šestougla), a dijagonale našeg šestougla su upravo te ose, sledi da se one moraju seći u jednoj tački. Ovim je Brijanšonova teorema dokazana. $\square$



Slika 2.10: Ilustracija Brijanšonove teoreme

2.5 Harmonijske četvorke i harmonijski četvorouglovi

DEFINICIJA 2.9. Za tri kolinearne tačke A, B, C kažemo da tačka C deli duž AB u odnosu (razmeri) λ ako je $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \lambda$.

DEFINICIJA 2.10. Za četiri kolinearne tačke A, B, C, D definišemo dvorazmeru u oznaci $\mathcal{R}(A, B; C, D)$ kao količnik razmera u kojima C i D dele duž AB , odnosno $\mathcal{R}(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$.

DEFINICIJA 2.11. Za četiri kolinearne tačke A, B, C, D kažemo da čine harmonijsku četvorku i pišemo $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ ako $\mathcal{R}(A, B; C, D) = -1$.

TEOREMA 2.12. Ako za četiri tačke A, B, C, D važi relacija $\mathcal{H}(A, B; C, D)$, tada važe i relacije $\mathcal{H}(A, B; D, C)$ i $\mathcal{H}(C, D; A, B)$.

DOKAZ. Polazeći od definicije harmonijske četvorke tačaka, relacija $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ daje $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$. Ukoliko u prethodnoj jednakosti zamenimo mesta levoj i desnoj strani, dobijamo ekvivalentan odnos: $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$. Na osnovu definicije, ovo povlači da važi relacija $\mathcal{H}(A, B; D, C)$. Sa druge strane, važi i: $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$ odnosno $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AD}} = -\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BD}}$.

Na osnovu definicije važi $\mathcal{H}(C, D; A, B)$. Time je dokaz obe relacije izvršen. $\square$

TEOREMA 2.13. Ako su A, B, C, D četiri tačke jedne prave, O tačka van te prave, a E i F tačke u kojima prava kroz tačku B paralelna pravouj OA seče prave OC i OD , tada važi ekvivalencija:

$$\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff \sigma_B(E) = F,$$

gde notacija $\sigma_B(E) = F$ označava da se tačka E centralnom simetrijom u odnosu na tačku B slika u tačku F .

DOKAZ. ($\implies$) Pretpostavimo najpre da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. Po definiciji, to znači da važi:

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Ako posmatramo samo dužine ovih duži, važi proporcija:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}.$$

Po uslovu teoreme, prava EF prolazi kroz B i paralelna je sa OA ($EF \parallel OA$).

Iz sličnosti $\triangle ACO$ i $\triangle BCE$ dobijamo odnos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{OA}{BE}.$$

Iz sličnosti $\triangle ADO$ i $\triangle BDF$ dobijamo odnos:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{OA}{BF}.$$

Uvrštavanjem ova dva odnosa u polaznu definiciju $\mathcal{H}(C, D; A, B)$ dobijamo:

$$\frac{OA}{BE} = \frac{OA}{BF},$$

odnosno $BE = BF$. Kako su tačke E, B, F kolinearne i E i F su različite tačke, pa sledi da se B nalazi između E i F , pa je tačka B središte duži EF . Po definiciji centralne simetrije, ovo znači da je $\sigma_B(E) = F$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo sada obrnuto, da važi $\sigma_B(E) = F$. To implicira da je tačka B središte duži EF , pa je $BE = BF$. Koristeći iste sličnosti trouglova kao u prvom delu dokaza, imamo odnose:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{OA}{BE} \quad \text{i} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{OA}{BF}.$$

Zamenom uslova $BF = BE$ u drugu jednakost, dobijamo:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{OA}{BE}.$$

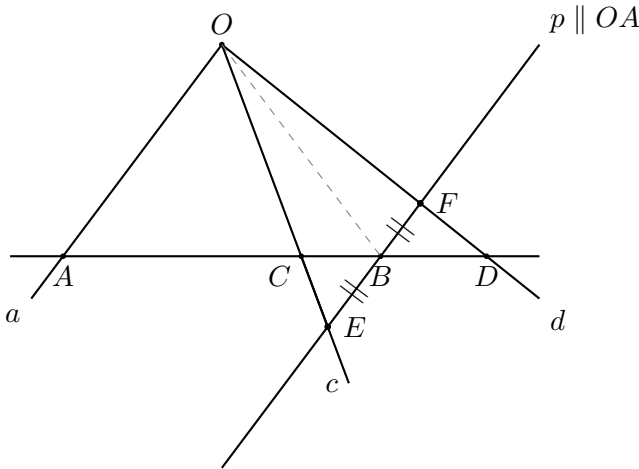
Sada vidimo da su desne strane obe jednakosti identične, što znači da moraju biti jednake i njihove leve strane:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}.$$

Uzmimo u obzir i raspored tačaka na pravoj: pošto tačke E i F leže na pravama OC i OD sa različitih strana tačke B , to znači da se i tačke C i D nalaze sa različitih strana u odnosu na par A, B . Zbog toga gornji odnos preko vektora glasi:

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}},$$

Ovim je teorema dokazana. □



Slika 2.11: Slika uz dokaz Teoreme 2.13.

DEFINICIJA 2.14. Za četiri prave a, b, c, d nekog pramena pravih kažemo da su harmonijski spregnute ako postoji prava p koja ih seče redom u tačkama A, B, C i D takvim da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. Tada koristimo oznaku $\mathcal{H}(a, b; c, d)$.

TEOREMA 2.15. *Ako neka prava s seče četiri harmonijski spregnute prave a, b, c i d u tačkama A, B, C i D , tada važi relacija $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.*

DOKAZ. Neka je O centar pramena u kojem se seku harmonijske prave a, b, c, d . Po definiciji harmonijskog pramena pravih $\mathcal{H}(a, b; c, d)$, postoji bar jedna prava p koja seče ove prave redom u tačkama A_0, B_0, C_0, D_0 tako da važi harmonijska spregnutost tačaka $\mathcal{H}(A_0, B_0; C_0, D_0)$.

Povucimo sada kroz tačku B_0 pravu koja je paralelna pravoj OA_0 . Neka ta prava seče pravu OC_0 i pravu OD_0 redom u tačkama E_0 i F_0 . Na osnovu prethodno dokazane teoreme, znamo da je tačka B_0 središte duži E_0F_0 , odnosno važi:

$$\sigma_{B_0}(E_0) = F_0 \implies B_0E_0 = B_0F_0.$$

Posmatrajmo sada proizvoljnu sečicu s koja seče prave a, b, c, d u tačkama A, B, C, D . Da bismo dokazali da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$, primenićemo isti postupak. Povucimo kroz tačku B pravu koja je paralelna pravoj OA . Neka ona seče prave c i d u tačkama E i F .

Kako je prava E_0F_0 paralelna sa OA_0 (što je zapravo prava a), a prava EF paralelna sa OA (što je takođe prava a), zaključujemo da su prave E_0F_0 i EF međusobno paralelne.

Ugao sa temenom O čiji su kraci prave c i d presečen je sa dve paralelne prave, E_0F_0 i EF . Na osnovu sličnosti $\triangle OE_0B_0$ i $\triangle OEB$, i sličnosti $\triangle OF_0B_0$ i $\triangle OFB$ važi:

$$\frac{BE}{B_0E_0} = \frac{BO}{B_0O} = \frac{BF}{B_0F_0},$$

odnosno

$$\frac{BE}{BF} = \frac{B_0E_0}{B_0F_0}.$$

S obzirom na to da smo već utvrdili da je $B_0E_0 = B_0F_0$ sledi $BE = BF$.

Dakle, tačka B je središte duži EF , što znači da važi centralna simetrija $\sigma_B(E) = F$.

Ponovnom primenom prethodne teoreme (u obrnutom smeru), iz činjenice da prava kroz B paralelna sa OA seče prave c i d tako da je B središte presečnih tačaka, zaključujemo da na pravoj s važi relacija $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

Ovim je dokaz završen u slučaju pramena konkurentnih pravih. Neka su sada prave a, b, c, d paralelne harmonijski spregnute prave. Važi: $\mathcal{H}(A_0, B_0; C_0, D_0)$ odnosno $\frac{\overrightarrow{A_0C_0}}{C_0B_0} = -\frac{\overrightarrow{A_0D_0}}{D_0B_0}$.

Posmatrajmo sada proizvoljnu drugu sečicu s koja iste te paralelne prave seče u tačkama A, B, C, D .

Prema Talesovoj teoremi o proporcionalnosti odsečaka koje paralelne prave a, b, c, d odsecaju na dve sečice p i s , odnosi odgovarajućih duži na tim sečicama moraju biti jednaki. Dakle, važe sledeće razmere:

$$\frac{AC}{A_0C_0} = \frac{CB}{C_0B_0}, \quad \text{odakle} \quad \frac{AC}{CB} = \frac{A_0C_0}{C_0B_0}.$$

Na potpuno isti način, posmatrajući odsečke koje formira tačka D , Talesova teorema nam daje:

$$\frac{AD}{A_0D_0} = \frac{DB}{D_0B_0} \quad \text{odakle} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{A_0D_0}{D_0B_0}.$$

Pošto su prave paralelne i tačke preseka se nalaze u istom poretku na obe transverzale, odnosi usmerenih duži će imati isti odnos kao i odnosi dužina, pa važi

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{A_0C_0}}{\overrightarrow{C_0B_0}} \quad \text{kao i} \quad \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{A_0D_0}}{\overrightarrow{D_0B_0}}$$

Uvrštavanjem ovih jednakosti u polazni odnos harmonijske spregnute četvorke $(A_0, B_0; C_0, D_0)$, dobijamo:

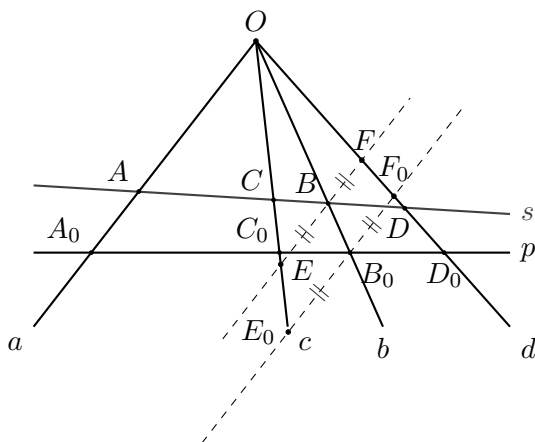
$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{A_0C_0}}{\overrightarrow{C_0B_0}} = -\frac{\overrightarrow{A_0D_0}}{\overrightarrow{D_0B_0}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Oдавде direktno sledi:

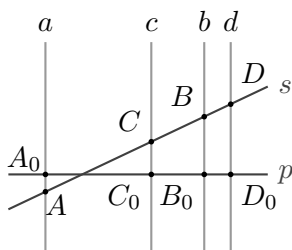
$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

što po definiciji znači da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

Ovim je dokaz završen. □



Slika 2.12: Slika uz dokaz Teoreme 2.15. u slučaju pramena konkurentnih pravih.



Slika 2.13: Slika uz dokaz Teoreme 2.15. u slučaju pramena paralelnih pravih.

TEOREMA 2.16. *Neka je $\triangle ABC$ takav da simetrala unutrašnjeg ugla kod temena B seče stranicu AC u tački D , a simetrala spoljašnjeg ugla kod B seče produžetak stranice AC u tački D' . Dokazati da je tada $\mathcal{H}(A, C; D, D')$.*

DOKAZ. Po teoremi o simetrali unutrašnjeg ugla važi

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC},$$

dok po teoremi o simetrali spoljašnjeg ugla važi

$$\frac{AD'}{D'C} = \frac{AB}{BC}.$$

Odatle sledi da je

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AD'}{D'C}.$$

Sada želimo da pređemo na odnose usmerenih duži. Kako se tačka D nalazi na duži AC , a tačka D' na produžetku te duži, $\overrightarrow{AD'}$ i $\overrightarrow{D'C}$ su suprotno usmereni, pa važi

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DC}} = -\frac{\overrightarrow{AD'}}{\overrightarrow{D'C}},$$

odnosno važi $\mathcal{H}(A, C; D, D')$ □

DEFINICIJA 2.17. Za tetivan četvorougao $ABCD$ kažemo da je harmonijski četvorougao, ako je $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

TEOREMA 2.18. Neka je H ortocentar $\triangle ABC$ koji nije pravougli i kod koga je $AB \neq AC$ i neka su D, E, F podnožja visina iz A, B, C redom. Ako je tačka P presek pravih FE i BC , tada je $\mathcal{H}(P, D; B, C)$.

DOKAZ. Pošto se AD, BE i CF seku u jednoj tački (ortocentru H), primenom Čevine teoreme na $\triangle ABC$ i AD, BE, CF dobijamo

$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} = 1.$$

Kako su F, E, P kolinearne, primenom Menelajevе teoreme na $\triangle ABC$ i F, E, P dobijamo

$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} = -1.$$

Deljenjem prethodne dve jednakosti dobijamo:

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} : \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = -1,$$

što po definiciji znači $\mathcal{H}(B, C; D, P)$, a odatle po prethodnoj teoremi sledi $\mathcal{H}(P, D; B, C)$, što smo i hteli da pokažemo. □

TEOREMA 2.19. *Neka četiri prave a, b, c, d prolaze kroz tačku A i neka su one harmonijski spregnute. Ako kružnica k prolazi kroz A i seče prave a, b, c, d redom u tačkama F, H, E, D , tada te tačke formiraju harmonijski četvorougao.*

DOKAZ. Po definiciji harmonijskog snopa, ako povučemo proizvoljnu pravu koja ne prolazi kroz centar A , ona će preseći prave a, b, c, d u tačkama P_1, P_2, P_3, P_4 koje formiraju harmonijsku četvorku na toj pravoj, odnosno važi $\frac{P_1P_3}{P_1P_4} = \frac{P_2P_3}{P_2P_4}$.

Posmatrajmo trouglove $\triangle AP_1P_3$ i $\triangle AP_1P_4$. Oni dele zajedničku visinu spuštenu iz temena A . Pošto je površina trougla jednaka polovini proizvoda baze i visine, odnos njihovih baza jednak je odnosu njihovih površina:

$$\frac{P_1P_3}{P_1P_4} = \frac{P(\triangle AP_1P_3)}{P(\triangle AP_1P_4)}.$$

Primenom formule za površinu trougla preko dve stranice i sinusa ugla između njih, dobijamo:

$$P(\triangle AP_1P_3) = \frac{1}{2} \cdot AP_1 \cdot AP_3 \cdot \sin \angle(a, c)$$

$$P(\triangle AP_1P_4) = \frac{1}{2} \cdot AP_1 \cdot AP_4 \cdot \sin \angle(a, d)$$

Uvrštavanjem ovih izraza u odnos površina i skraćivanjem dobijamo:

$$\frac{P_1P_3}{P_1P_4} = \frac{AP_3 \cdot \sin \angle(a, c)}{AP_4 \cdot \sin \angle(a, d)}$$

Potpuno analogno, posmatranjem trouglova $\triangle AP_2P_3$ i $\triangle AP_2P_4$ koji takođe dele zajedničku visinu iz temena A , dobijamo odnos:

$$\frac{P_2P_3}{P_2P_4} = \frac{P(\triangle AP_2P_3)}{P(\triangle AP_2P_4)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AP_2 \cdot AP_3 \cdot \sin \angle(b, c)}{\frac{1}{2} \cdot AP_2 \cdot AP_4 \cdot \sin \angle(b, d)} = \frac{AP_3 \cdot \sin \angle(b, c)}{AP_4 \cdot \sin \angle(b, d)}$$

Na osnovu svega prethodnog imamo:

$$\frac{AP_3 \cdot \sin \angle(a, c)}{AP_4 \cdot \sin \angle(a, d)} = \frac{AP_3 \cdot \sin \angle(b, c)}{AP_4 \cdot \sin \angle(b, d)},$$

odakle je:

$$\frac{\sin \angle(a, c)}{\sin \angle(a, d)} = \frac{\sin \angle(b, c)}{\sin \angle(b, d)}$$

Pošto centar snopa A leži na kružnici k , uglovi između pravih a, b, c, d su zapravo periferijski uglovi nad tetivama koje spajaju tačke preseka F, H, E, D na kružnici:

$$\angle(a, c) = \angle FAE, \angle(a, d) = \angle FAD, \angle(b, c) = \angle HAE, \angle(b, d) = \angle HAD.$$

Zato je:

$$\frac{\sin \angle FAE}{\sin \angle FAD} = \frac{\sin \angle HAE}{\sin \angle HAD} \quad (2.5.1)$$

Neka je R poluprečnik kružnice k . Prema Sinusnoj teoremi, važi:

$$\sin \angle FAE = \frac{FE}{2R}, \sin \angle FAD = \frac{FD}{2R}, \sin \angle HAE = \frac{HE}{2R}, \sin \angle HAD = \frac{HD}{2R}. \text{ Odatle je:}$$

$$\frac{\frac{FE}{2R}}{\frac{FD}{2R}} = \frac{\frac{HE}{2R}}{\frac{HD}{2R}}$$

Skraćivanjem dolazimo do konačnog odnosa stranica četvorougla:

$$\frac{FE}{FD} = \frac{HE}{HD}$$

Odnosno $FE \cdot HD = FD \cdot HE$. Pošto je četvorougao $FEHD$ tetivan i proizvod njegovih naspramnih stranica je jednak, on je po definiciji harmonijski.

□

Primena teorema projektivne geometrije

Sada ćemo pokazati kako se teoreme pokazane u prethodnoj glavi mogu primeniti na rešavanje zadataka iz euklidske geometrije.

PRIMER 1 (Singapore TST). Neka je O centar opisane kružnice oko pravouglog $\triangle ABC$, sa pravim uglom kod temena B i neka je tačka P bilo koja tačka tangente na tu kružnicu u tački A (različita od tačke A). Neka je tačka D je druga tačka preseka kružnice i prave PB , a tačka E presek prave DC i prave kroz A paralelne sa BC . Dokazati da su tačke P, E i O kolinearne.

DOKAZ. Označimo sa B_1 tačku simetričnu tački B u odnosu na centar kružnice O . Poznato je da je $\angle ABC = 90^\circ$ i $AE \parallel BC$. Kako prava AB seče paralelne prave AE i BC , na osnovu osobina transverzale sledi da je:

$$\angle BAE = 90^\circ.$$

Dalje, s obzirom na to da je $B - O - B_1$ prečnik kružnice opisane oko trougla, na osnovu teoreme o uglu nad prečnikom, važi:

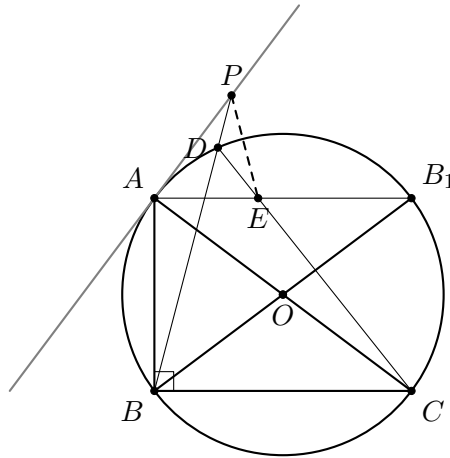
$$\angle B_1AB = 90^\circ.$$

Sada imamo:

- Prava AE prolazi kroz tačku A i važi $\angle BAE = 90^\circ$.
- Prava AB_1 prolazi kroz tačku A i važi $\angle B_1AB = 90^\circ$.

Budući da obe prave (AE i AB_1) grade prav ugao sa pravom AB u istoj tački A i nalaze se u istoj ravni, one moraju biti identične prave. Dakle,

tačke A, E i B_1 su kolinearne. Posmatrajmo heksagon AAB_1BDC upisan u kružnicu. Prema Paskalovoj teoremi, preseki suprotnih stranica ovog heksagona su kolinearni. Naspramne stranice heksagona su: AA (tangenta u tački A) i BD , AB_1 i DC , B_1B i CA . Odredimo presečne tačke suprotnih stranica: Presek stranica AA i BD je tačka P (prema definiciji zadatka). Presek stranica AB_1 i DC je tačka E (kako smo ranije dokazali da je A, E, B_1 kolinearno, prava AB_1 je ista prava kao AE). Presek stranica B_1B i CA je tačka O (jer su B_1B i CA prečnici kružnice koji se seku u centru O). Prema Paskalovoj teoremi, tačke P, E i O leže na istoj pravoj (Paskalova prava). Zaključak: Tačke P, O i E su kolinearne. $\square$



Slika 3.1: Slika uz Primer 1

PRIMER 2. Neka je Γ kružnica i neka su A, B, C tačke na njoj. Neka su t_A, t_B, t_C tangente na kružnicu Γ u tačkama A, B, C redom. Definišimo tačke:

$$\{P\} = t_B \cap t_C, \quad \{Q\} = t_A \cap t_C, \quad \{R\} = t_A \cap t_B.$$

1. Dokazati da su prave AP, BQ i CR konkurentne (seku se u jednoj tački S).
2. Neka su X, Y i Z preseki odgovarajućih stranica $\triangle ABC$ i $\triangle PQR$, definisani sa:

$$\{X\} = AB \cap PQ, \quad \{Y\} = BC \cap QR, \quad \{Z\} = CA \cap RP$$

Dokazati da su tačke X, Y i Z kolinearne.

DOKAZ. Kako je $RA = RB$, $QA = QC$ i $PB = PC$ (tangente iz iste tačke na krug) to je

$$\frac{PB}{BR} \cdot \frac{RA}{AQ} \cdot \frac{QC}{CP} = 1,$$

pa uzimajući u obzir da su tačke A, B, C na stranicama $\triangle PQR$ sledi

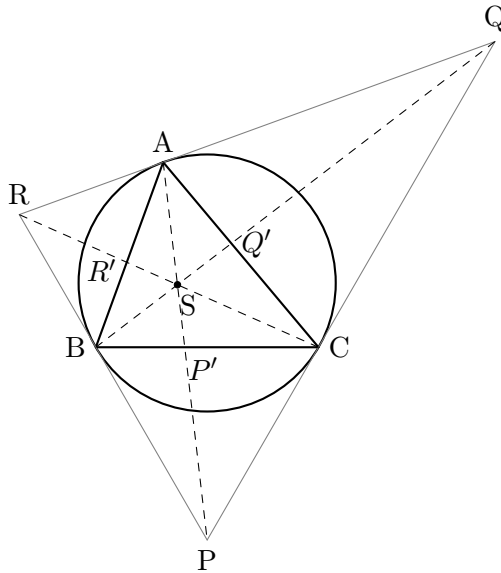
$$\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{BR}} \cdot \frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{AQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{CP}} = 1,$$

pa primenom Čevine teoreme na $\triangle PQR$ dobijamo da su prave AP, BQ i CR konkurentne, čime je pokazan 1. deo zadatka. Označimo njihov presek sa S . Sada pokazujemo 2. deo zadatka. Po delu 1. ovog zadatka, imamo da su $\triangle ABC$ i $\triangle PQR$ perspektivni iz tačke S . Prema Dezargovoj teoremi, ako su dva trougla perspektivna iz tačke, onda su preseki njihovih odgovarajućih stranica kolinearni. Zato

$$\{X\} = AB \cap PQ, \quad \{Y\} = BC \cap QR, \quad \{Z\} = AC \cap PR$$

moraju ležati na jednoj pravoj. Ovim je dokazana kolinearnost tačaka X, Y, Z .

□



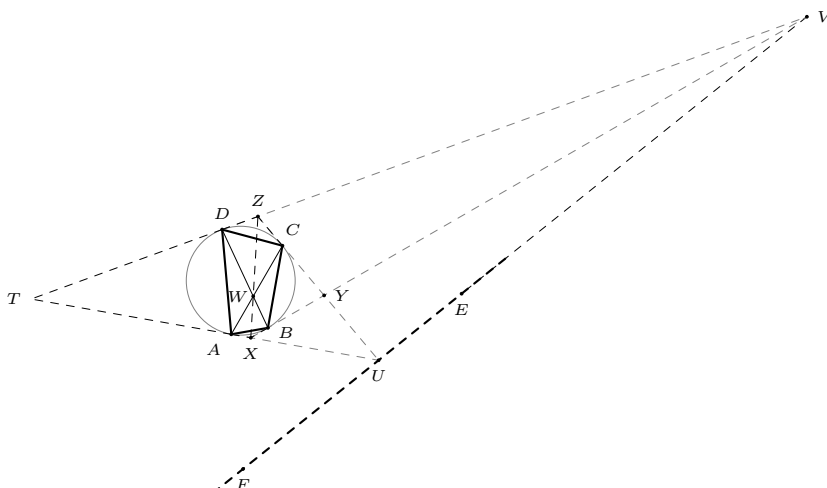
Slika 3.2: Slika uz Primer 2.

PRIMER 3. Neka je $ABCD$ tetivan četvorougao takav da se prave određene stranicama AB i CD seku u tački E , a prave određene stranicama BC i AD seku u tački F . Neka se:

- tangente na kružnicu u tačkama A i B seku u tački X ,
- tangente u tačkama B i C seku u tački Y ,
- tangente u tačkama C i D seku u tački Z ,
- tangente u tačkama A i D seku u tački T ,
- tangente u tačkama A i C seku u tački U ,
- tangente u tačkama B i D seku u tački V .

Ako je W presek dijagonala četvorougla $ABCD$, dokazati da prave XZ i YT sadrže tačku W .

DOKAZ. Posmatrajmo heksagon $AADBBC$ upisan u kružnicu. Prema Paskalovoj teoremi, preseki naspramnih stranica su kolinearni. Preseci su: tangenta u A i B (tačka X), stranice AC i BD (tačka W), kao i CB i DA (tačka F). Dakle, tačke X, W, F su kolinearne. Analogno, za heksagon $ADDBCC$, prema Paskalovoj teoremi, preseci tangenti u D i C (tačka Z), stranica AD i CB (tačka F), kao i DB i AC (tačka W) leže na istoj pravoj. Dakle, tačke Z, F, W su kolinearne. Time zaključujemo da su X, W, F i Z, F, W kolinearne tačke. Posmatrajmo heksagon $AABDDC$ upisan u kružnicu. Prema Paskalovoj teoremi, preseci naspramnih stranica su kolinearni. Preseci su: tangenta u A i D (tačka T), stranice AC i BD (tačka W), kao i CD i AB (tačka E). Dakle, tačke T, W, E su kolinearne. Analogno, za heksagon $ABBDC C$, prema Paskalovoj teoremi, preseci tangenti u B i C (tačka Y), stranica AB i CD (tačka E), kao i BD i AC (tačka W) leže na istoj pravoj. Dakle, tačke Y, E, W su kolinearne. Time zaključujemo da su T, W, E i Y, E, W kolinearne tačke. Odatle se tačka W nalazi i na pravoj XZ i na pravoj YT , što smo i hteli da pokažemo. $\square$



Slika 3.3: Slika uz zadatak 3.

PRIMER 4 (USA TSTS 2012.). U $\triangle ABC$, koji nije pravougli, tačke A_1, B_1 i C_1 su podnožja visina iz temena A, B i C redom na naspramne stranice. Neka su P, Q i R preseči pravih redom:

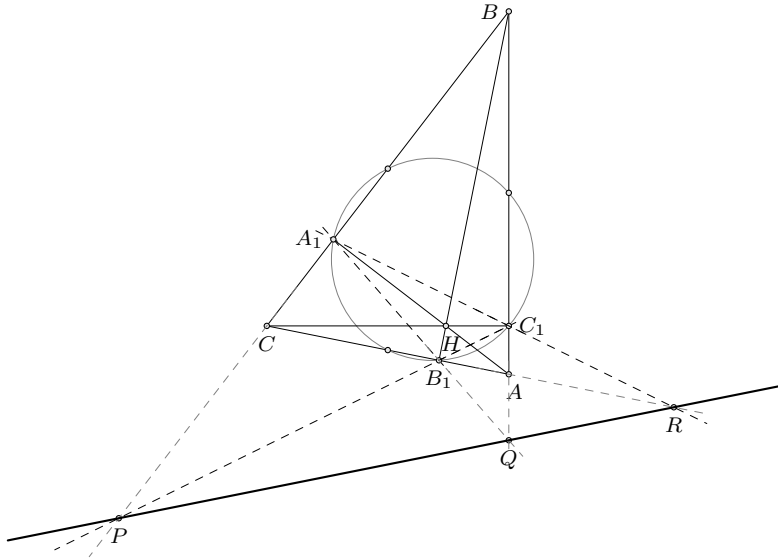
- $\{P\} = B_1C_1 \cap BC$,
- $\{Q\} = A_1B_1 \cap AB$,
- $\{R\} = A_1C_1 \cap AC$.

Dokazati da su tačke P, Q i R kolinearne.

DOKAZ. Visine trougla AA_1, BB_1 i CC_1 seku se u ortocentru H . To znači da su $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ perspektivni iz tačke H . Prema Dezagovoj teoremi, ako su dva trougla perspektivna u odnosu na tačku, oni su perspektivni i u odnosu na pravu. Preseči odgovarajućih stranica su:

- $\{Q\} = A_1B_1 \cap AB$,
- $\{R\} = A_1C_1 \cap AC$,
- $\{P\} = B_1C_1 \cap BC$.

Time je kolinearnost tačaka P, Q i R dokazana. □



Slika 3.4: Slika uz Primer 4.

PRIMER 5 (Apolonijeva kružnica). Neka su A i B dve fiksirane tačke u ravni, a m i n ($m \neq n$) dve zadate dužine. Dokazati da geometrijsko mesto

tačkaka X za koje važi odnos $AX : XB = m : n$ predstavlja kružnicu čiji je prečnik duž CD i da pri tome, tačke C i D pripadaju pravoj AB i dele duž AB unutrašnje i spoljašnje u istoj razmeri, odnosno zadovoljavaju uslov:

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{m}{n}.$$

DOKAZ. Označimo sa k kružnicu konstruisanu nad prečnikom CD . Neka je X bilo koja tačka ravni. Povucimo kroz tačku B pravu p koja je paralelna pravoj AX . Označimo sa E i F tačke u kojima prava p seče prave CX i DX , redom.

Iz polaznog uslova imamo da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. Na osnovu Teoreme 2.13. i konstruisane paralele kroz tačku B , sledi da je tačka B središte duži EF .

Pretpostavimo najpre da tačka X zadovoljava odnos $AX : XB = m : n$. Primenom Talesove teoreme na uglove sa temenima u C i D , dobijamo sledeće jednakosti:

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AX}{BE} = \frac{AC}{CB} = \frac{AX}{BF} = \frac{m}{n}.$$

Iz gornjih odnos zaključujemo da važi:

$$BE \cong BF \cong XB.$$

Kako je B središte duži EF , a dužina XB je jednaka polovini te duži, pa je težišna duž koja odgovara stranici EF u $\triangle EXF$ jednaka je polovini EF . Odavde sledi da je $\triangle EXF$ pravougao sa pravim uglom kod temena X . Pošto je $\angle CXD$ zapravo isti kao i $\angle EXF$, zaključujemo da je $\angle CXD = 90^\circ$. To znači da tačka X mora pripadati kružnici k nad prečnikom CD .

Pretpostavimo sada da tačka X pripada kružnici k čiji je prečnik CD .

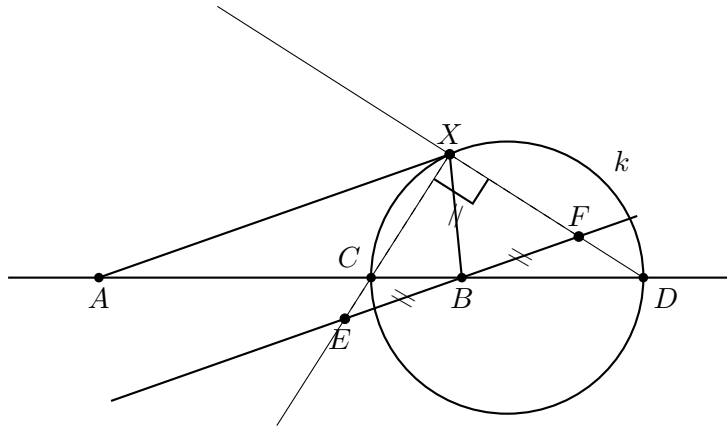
Prema teoremi o perifernom uglu nad prečnikom, $\angle CXD$ je prav (90°). S obzirom na to da je krak XE produžetak prave CX , a krak XF produžetak prave DX , zaključujemo da je i $\angle EXF$ takođe prav. U pravouglom $\triangle EXF$, tačka B je središte hipotenuze EF , što znači da je težišna duž XB jednaka polovini hipotenuze, odakle dobijamo relaciju:

$$XB \cong BE \cong BF.$$

Ponovnom primenom Talesove teoreme o proporcionalnosti odsečaka na kracima ugla, dobijamo traženi odnos:

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AX}{BE} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}.$$

Ovim je ekvivalencija u potpunosti dokazana. □



Slika 3.5: Slika uz Primer 5.

NAPOMENA 3.1. Kružnicu iz prethodnog primera zovemo Apolonijeva kružnica.

PRIMER 6. Dokazati da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ ako i samo ako središte O duži CD zadovoljava relaciju

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}^2.$$

DOKAZ. Uslov $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ po definiciji označava:

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Kako sve usmerene duži možemo izraziti preko vektora položaja u odnosu na referentnu tačku O :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}, \\ \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}, \\ \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}, \\ \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - (-\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

Zamenom dobijenih izraza u polaznu proporciju, dobija se jednačina:

$$\frac{\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}} = -\frac{-\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}} \iff \frac{\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}.$$

Unakrsnim množenjem elemenata ove razmere sledi:

$$(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}).$$

Odatle dobijamo:

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Skraćivanjem članova $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}$ i $-\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ sa obe strane jednakosti, izraz se svodi na:

$$\overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB},$$

odnosno grupisanjem članova na odgovarajućim stranama dobijamo:

$$2\overrightarrow{OC}^2 = 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \iff \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}^2.$$

S obzirom na to da su sve primenjene transformacije ekvivalentne, tvrđenje je dokazano u oba smera. $\square$

PRIMER 7. Dokazati da važi:

$$\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff \frac{1}{\overrightarrow{AC}} + \frac{1}{\overrightarrow{AD}} = \frac{2}{\overrightarrow{AB}},$$

gde se pod izrazom oblika $\frac{1}{\overrightarrow{AB}}$ misli na deljenje dužinom vektora $\overrightarrow{AB}$, uzimajući u obzir usmerenje.

DOKAZ. Po definiciji $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ znači:

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Da bismo relaciju izrazili samo preko odsečaka čija je početna tačka A , transformišemo imenice na sledeći način:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \\ \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}. \end{aligned}$$

Zamenom ovih identiteta u početnu jednakost dobija se izraz:

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}} \iff \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}}.$$

Unakrsnim množenjem dobijamo sledeću jednakost:

$$\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}),$$

odnosno:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Sada grupišemo članove:

$$2(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \iff 2(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}).$$

Deljenjem ove relacije proizvodom svih triju duži, tj. izrazom $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD})$, dobijamo:

$$\frac{2(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD})}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}}.$$

Nakon uprošćavanja razlomaka sa obe strane, izraz dobija oblik:

$$\frac{2}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}} \iff \frac{2}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}}.$$

Skraćivanjem odgovarajućih promenljivih unutar sabiraka desne strane, dolazimo do konačne tražene relacije:

$$\frac{1}{\overrightarrow{AC}} + \frac{1}{\overrightarrow{AD}} = \frac{2}{\overrightarrow{AB}}.$$

Ovim je tražena ekvivalencija dokazana. □

PRIMER 8 (Problem G5 - IMO Shortlist 2007). Neka je $\triangle ABC$ fiksna i neka su A_1 , B_1 i C_1 redom središta stranica BC , CA i AB . Neka je P promenljiva tačka na opisanoj kružnici tog trougla. Prave PA_1 , PB_1 i PC_1 seku opisanu kružnicu ponovo u tačkama A' , B' i C' , redom. Pretpostavimo da su tačke A , B , C , A' , B' i C' međusobno različite i da prave AA' , BB' i CC' grade trougao. Dokazati da površina tog novonastalog trougla ne zavisi od položaja tačke P .

DOKAZ. Neka su A_2 presek pravih BB' i CC' , B_2 presek pravih AA' i CC' i C_2 presek pravih AA' i BB' . Primenom Paskalove teoreme na šestougao $ABB'PC'C$, dobijamo:

$$AB \cap PC' = \{C_1\}, \quad BB' \cap CC' = \{A_2\}, \quad B'P \cap CA = \{B_1\}$$

da su tačke C_1 , A_2 i B_1 kolinearne. Analogno, primena Paskalove teoreme na šestouglove $BCC'PA'A$ i $CAA'PB'B$ daje da su trojke tačaka B_2 , C_1 , A_1 i A_1 , B_1 , C_2 takođe kolinearne.

Sada treba pokazati da površina $\triangle A_2B_2C_2$ ne zavisi od položaja tačke P . Kako su A_1C_1 i A_1B_1 srednje linije $\triangle ABC$, to važi $A_1C_1 \parallel AC$ i $A_1B_1 \parallel AB$. Zbog toga, po Talesovoj teoremi važi:

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{A_2C}{A_2B_2} \quad \text{kao i} \quad \frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{A_2C_2}{A_2B}.$$

Iz ova dva odnosa zaključujemo da je:

$$\frac{A_2C_2}{A_2B} = \frac{A_2C}{A_2B_2}, \quad \text{odnosno} \quad A_2B \cdot A_2C = A_2C_2 \cdot A_2B_2.$$

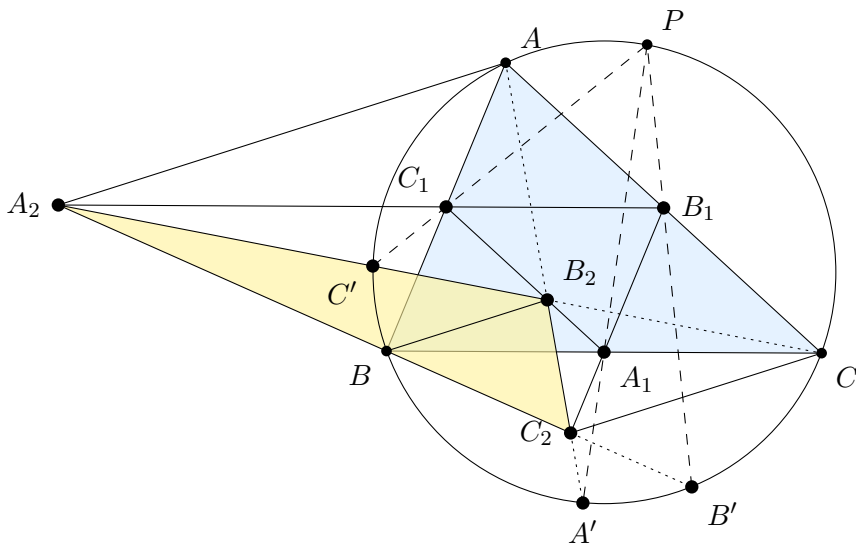
Posmatrajmo $\triangle A_2B_2C_2$ i $\triangle A_2BC$ i označimo njihov zajednički ugao kod temena A_2 sa α . Površine ovih trouglova možemo izraziti preko trigonometrijskog obrasca:

$$P_{A_2B_2C_2} = \frac{A_2C_2 \cdot A_2B_2 \cdot \sin \alpha}{2}, \quad \text{a} \quad P_{A_2BC} = \frac{A_2C \cdot A_2B \cdot \sin \alpha}{2}.$$

Iz prethodne jednakosti proizvoda dužina direktno zaključujemo da je $P_{A_2B_2C_2} = P_{A_2BC}$. Kako tačka A_2 pripada pravoj C_1B_1 (pravoj koja sadrži srednju liniju $\triangle ABC$), njeno rastojanje od stranice BC je jednako polovini odgovarajuće visine $\triangle ABC$, odakle je:

$$P_{A_2BC} = \frac{1}{2}P_{ABC}.$$

Odavde konačno dobijamo da je i $P_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{2}P_{ABC}$, što je konstantna vrednost, čime je dokazano da površina ne zavisi od položaja tačke P . $\square$

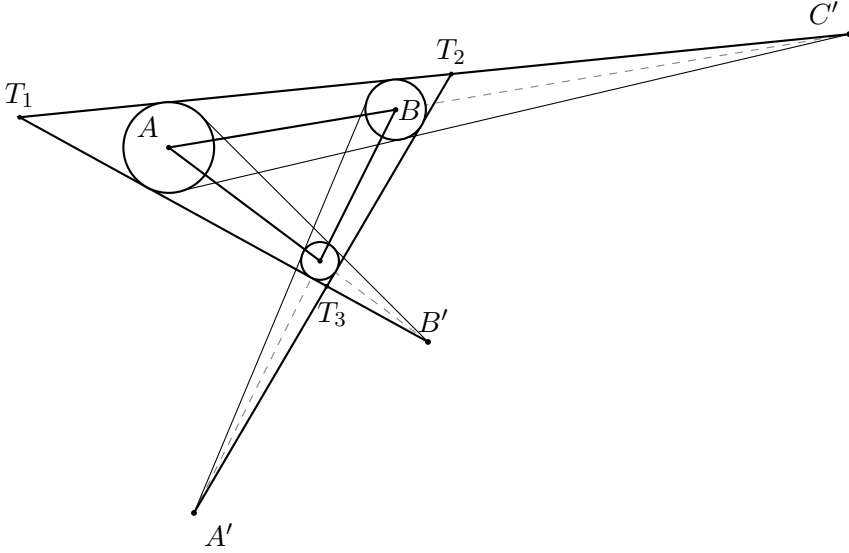


Slika 3.6: Slika uz Primer 8.

PRIMER 9 (Monžova teorema *). Ako su u ravni date tri kružnice različitih poluprečnika koje se nalaze jedna izvan druge, tada tri presečne tačke parova njihovih spoljašnjih zajedničkih tangenti leže na jednoj pravoj.

*Gaspard Monge (1746–1818), francuski matematičar.

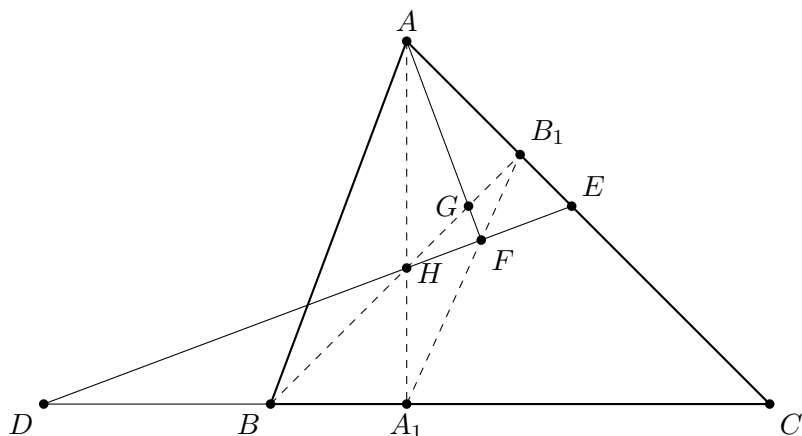
DOKAZ. Neka je tačka T_1 presek zajedničke spoljašnje tangente na kružnice sa centrima u A i B i zajedničke spoljašnje tangente na kružnice sa centrima u A i C , tačka T_2 presek zajedničke spoljašnje tangente na kružnice sa centrima u B i A i zajedničke spoljašnje tangente na kružnice sa centrima u B i C a tačka T_3 presek zajedničke spoljašnje tangente na kružnice sa centrima u C i A i zajedničke spoljašnje tangente na kružnice sa centrima u C i B kao na slici 3.7. Prave AT_1, BT_2, CT_3 su simetrale unutrašnjih uglova $\triangle T_1T_2T_3$, pa se seku u jednoj tački (centar upisane kružnice tog trougla). Zato su $\triangle ABC$ i $\triangle T_1T_2T_3$ perspektivni u odnosu na tačku, pa po Dezagovoj teoremi važi da su preseki odgovarajućih stranica kolinearne tačke, odnosno $AB \cap T_1T_2 = \{C'\}$, $BC \cap T_2T_3 = \{A'\}$, $AC \cap T_1T_3 = \{B'\}$ pa su A', B', C' kolinearne. $\square$



Slika 3.7: Slika uz Primer 9.

PRIMER 10 (Moldavian TST 2011.). Neka u $\triangle ABC$, koji nije pravougli, važi $AB < AC$. Neka je tačka H ortocentar tog trougla i neka su tačke A_1 i B_1 podnožja visina iz temena A odnosno B redom. Neka je tačka D je centralno simetrična tački C u odnosu na A_1 . Ako je $\{E\} = AC \cap DH$, $\{F\} = A_1B_1 \cap DH$, $\{G\} = AF \cap BH$, dokazati da su prave CH , EG i AD konkurentne.

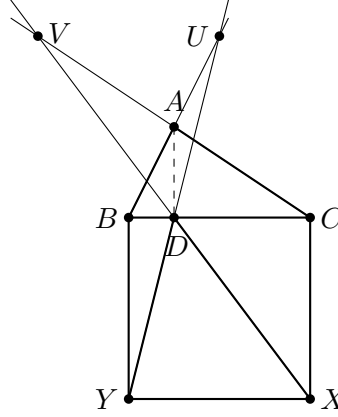
DOKAZ. Iz teksta zaključujemo da su sledeće tačke kolinearne: A, C, E, B_1 , zatim D, H, E, F , zatim A_1, B_1, F , takođe A, F, G , kao i B, H, G, B_1 , kao što je prikazano na slici. Kako je zato $\{B_1\} = CE \cap HG$, $\{F\} = ED \cap GA$,



Slika 3.8: Slika uz Primer 10.

PRIMER 11. Neka je pravougaonik $BCXY$ konstruisan u spoljašnjosti $\triangle ABC$. Neka je tačka D podnožje normale iz tačke A na BC i neka su U i V presečne tačke pravih DY i AB odnosno pravih DX i AC . Dokazati da je $UV \parallel BC$.

DOKAZ. Iz tvrđenja zadatka sledi da je $BY \parallel CX \parallel AD$, pa prave BY, CX, AD pripadaju istom pramenu paralelnih pravih, odnosno seku se u tački u beskonačnosti i $\triangle ABC$ i $\triangle DYX$ su perspektivni iz te tačke. Kako je $\{U\} = AB \cap DY$, $\{V\} = AC \cap DX$, $BC \parallel YX$ (prave BC i YX seku se u tački u beskonačnosti), Dezargovoj teoremi sledi da prava UV sadrži istu tačku u beskonačnosti kao i BC i YX . To znači da te tri prave pripadaju istom pramenu paralelnih pravih, odnosno važi $VU \parallel YX$. $\square$



Slika 3.9: Slika uz Primer 11.

PRIMER 12 (JBMO Shortlist 2023). Neka su D i E proizvoljne tačke na stranicama BC i AC $\triangle ABC$, redom. Opisana kružnica $\triangle ADC$ seče po drugi put opisanu kružnicu $\triangle BCE$ u tački F . Prava FE seče pravu AD u tački G , dok prava FD seče pravu BE u tački H . Dokazati da se prave CF , AH i BG seku u istoj tački.

DOKAZ. Po uslovima zadatka, tačke A, D, G i B, H, E su trojke kolinearnih tačaka. Posmatrajmo šestougao $AEGBDH$. Označimo presek AH i BG sa X . Kako se prave AE i DB seku u tački C , a prave EG i HD u tački F , po Papusovoj teoremi važi da su tačke C, F i X kolinearne, odnosno CF , AH i BG se seku u istoj tački. $\square$

PRIMER 13 (Brazil MO). Neka je $\triangle ABC$ oštrogli i neka je H njegov ortocentar. Neka je D presek prave BH i AC , a E presek prave CH i AB . Kružnica opisana oko $\triangle ADE$ seče kružnicu opisanu oko $\triangle ABC$ drugi put u tački F . Dokazati da se simetrale $\angle BFC$ i $\angle BHC$ seku u tački na BC .

DOKAZ. Kako je $\angle BDC = \angle BEC = 90^\circ$, to je četvorougao $BEDC$ tetivan. Kružnice opisane oko $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$ seku se u tačkama A i F , pa je zato prava AF radikalna osa za te dve kružnice. Kružnice opisane oko $\triangle ABC$ i četvorougla $BEDC$ seku se u B i C , pa je zato prava BC njihova radikalna osa. Kružnice opisane oko $\triangle ADE$ i četvorougla $BEDC$ se seku u D i E , pa je prava DE njihova radikalna osa. Po teoremi o radikalnim osama za 3 nekoncentrične kružnice, dokazanoj u prvoj glavi, sledi da se prave AF , BC i DE seku u jednoj tački. Označimo tu tačku sa P . Prema teoremi o potenciji tačke u odnosu na kružnicu opisanu oko četvorougla $BEDC$, sledi da je $BH \cdot HD = CH \cdot HE$, odakle je $\frac{BH}{CH} = \frac{HE}{HD}$. Ako presek simetrale $\angle BHC$ i BC označimo sa X , po teoremi o simetrali ugla je $\frac{BX}{CX} = \frac{BH}{CH}$, pa važi

$$\frac{BH}{CH} = \frac{HE}{HD} = \frac{BX}{CX}.$$

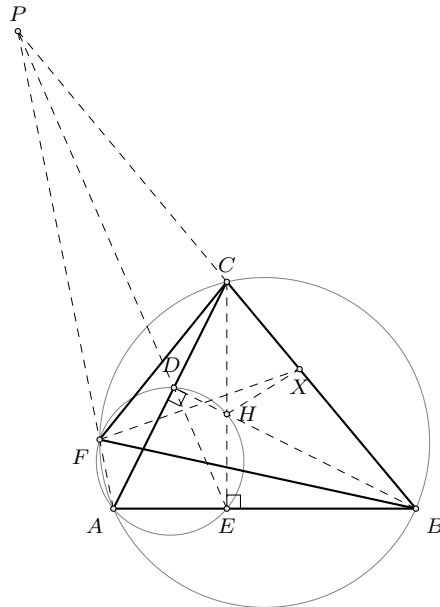
Po Teoremi 2.18. primenjenoj na $\triangle ABC$ važi $\mathcal{H}(P, AH \cap BC; B, C)$. Takođe, četvorougao $AEHD$ je tetivan jer je $\angle AEH = \angle ADH = 90^\circ$, pa su tačke A, E, H, D, F na istoj kružnici opisanoj oko $\triangle ADE$. Primenom Teoreme 2.19, kako su prave AF, AH, AD, AE harmonijski spregnute, to je četvorougao koji se dobija njihovim presekom sa kružnicom harmonijski, tj. $FDHE$ je harmonijski. Zato je $\frac{EH}{DH} = \frac{FE}{FD}$, odakle je

$$\frac{BX}{CX} = \frac{HE}{HD} = \frac{EF}{DF}.$$

Neka simetrala $\angle BFC$ seče BC u tački X' . Pošto su tačke A, E, D, F, H kao i A, B, C, F kociklične, važe sledeće jednakosti $\angle FDE = 180^\circ - \angle FAE = 180^\circ - \angle FAB = \angle FCB$ i $\angle FED = \angle FAD = \angle FAC = \angle FBC$. Odatle po sinusnoj teoremi primenjenoj na $\triangle FED$ i $\triangle FBC$ važi:

$$\frac{FB}{FC} = \frac{\sin \angle FCB}{\sin \angle FBC} = \frac{\sin \angle FDE}{\sin \angle FED} = \frac{FE}{DF}.$$

Kako je FX' simetrala $\angle BFC$, to po teoremi o simetrali ugla važi $\frac{BX'}{CX'} = \frac{FB}{FC} = \frac{FE}{DF} = \frac{BX}{CX}$, odakle tačke X i X' dele duž BC u istom odnosu, pa je $X = X'$, što smo i hteli da pokažemo. $\square$



Slika 3.10: Slika uz Primer 13.

Zaključak

U ovom master radu istražena je veza između euklidske i projektivne geometrije u ravni. Euklidske teoreme iz prve glave (Talesova, sinusna, Čevina, Menelajeva) poslužile su kao alat za dokazivanje važnih teorema projektivne geometrije u drugoj glavi — Dezargove, Paskalove, Papusove i Brijanšonove, uz osvrt na harmonijske četvorke. U trećoj glavi, kroz pažljivo odabrane zadatke, pokazano je da projektivni pristup omogućava znatno elegantnija rešenja od standardnih euklidskih metoda. Time je prikazana praktična primena projektivne geometrije i njen značaj za rešavanje geometrijskih problema.

Literatura

- [1] Art of Problem Solving, *IMO Shortlist 2007, Problem G5*. [Online]. Dostupno na: https://artofproblemsolving.com/community/c6h214646s1_problem_g5__imo_shortlist_2007
- [2] N. Altshiller-Court, *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, 2nd ed., Revised and Enlarged. Dover Publications, 2007. [Online]. Dostupno na: <https://cdnc.heyzine.com/files/uploaded/v2/2ac28e410455f91c0964a9a134db6fa7a037f9d7.pdf>
- [3] E. Chen, *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, Mathematical Association of America, 2016.
- [4] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1967.
- [5] R. Kvasov, *Math Olympiad Geometry*, Independently published, 2024.
- [6] R. Kurant, H. Robins, *Šta je matematika?*, Naučna knjiga, Beograd, 1973.
- [7] D. Lopandić, *Geometrija*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu. Dostupno na: http://old.matf.bg.ac.rs/p/files/34-Geometrija_Dragomir_Lopandic.pdf
- [8] S. Lozanovski, *A Beautiful Journey Through Olympiad Geometry*, 2020. [Online]. Dostupno na: <https://www.olympiadgeometry.com/the-book.html>
- [9] Matf OOP, *Projektivna geometrija – Predavanje 4*, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu. Dostupno na: <https://edusoft.matf.bg.ac.rs/oop/projektivna-geometrija/sm4.html>

- [10] A. Matthes, *tkz-euclide: AlterMundus package for Euclidean Geometry*, 2022. Dostupno na: <https://altermundus.fr/files/tkz-euclide/tkz-euclide.pdf>
- [11] M. Stanković, *Osnovi geometrije*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu. Dostupno na: https://www1.pmf.ni.ac.rs/pmf/vesti/biblioteka/knjige/osnovi_geometrije.pdf
- [12] P. Pamfilos, *Desargues' Theorem*, eGallery of Geometry. Dostupno na: <https://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/Desargues.pdf>
- [13] N. Petrović, *Projektivna geometrija*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 1999.
- [14] C. Pohoata, S. Korsky, and T. Andreescu, *Lemmas in Olympiad Geometry*, XYZ Series, vol. 19. XYZ Press, 2016.

Kratka biografija

Milica Teoharević rođena je 13. februara 1999. godine u Beogradu. Osnovnu školu Dositej Obradović je završila na Umci 2014. godine. Iste godine je upisala Matematičku gimnaziju u Beogradu koju je završila 2018. godine. Odmah zatim je upisala osnovne akademske studije na Matematičkom fakultetu u Beogradu, smer Teorijska matematika i primene. Studije nastavlja na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu na smeru Matematika koje završava 2023. godine. Iste godine je upisala master akademske studije - Matematika na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija u julskom roku 2026. godine.



Novi Sad, septembar 2026.

Milica Teoharević

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Milica Teoharević

AU

Mentor: dr Vlado Uljarević

MN

Naslov rada: Klasične projektivne konfiguracije u rešavanju takmičarskih zadataka iz geometrije

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2026

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: 3/70/14/0/35/0/0

(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Geometrija

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Teoreme projektivne geometrije (Dezargova, Paskalova, Papusova i Brijanšonova teorema), harmonijske četvorke, takmičarski zadaci iz geometrije.

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

CHU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Ovaj master rad istražuje povezanost između euklidske i projektivne geometrije, sa glavnim fokusom na primenu klasičnih projektivnih konfiguracija i teorema u rešavanju složenih zadataka sa matematičkih takmičenja. U uvodnom delu rada date su neophodne teorijske osnove euklidske geometrije, uključujući Talesovu, sinusnu, Cevinu i Menelajevu teoremu. Centralni deo rada posvećen je fundamentalnim teoremama projektivne ravni — Dezargovoj, Paskalovoj, Papusovoj i Brijanšovnoj teoremi, kao i analizi harmonijskih četvorki i harmonijskih četvorouglova. Kroz odabrane primere, u završnom delu rada je prikazana prednost projektivnih metoda nad klasičnim euklidskim pristupom, čime se složeni geometrijski problemi rešavaju znatno elegantnije i u manjem broju koraka.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:

DP 18.8.2026.

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Petar Marković, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Vlado Uljarević, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Kristina Ago, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Milica Teoharević

AU

Mentor: Vlado Uljarević, Ph.D.

MN

Title: Classical projective configurations in solving competition geometry problems

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: English/Serbian (latin/latin)

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2026

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences,
University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: 3/70/12/0/35/0/0

(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Geometry

SD

Subject/Key words: Projective geometry theorems (Desargues' theorem, Pascal's theorem, Pappus's theorem, Brianchon's theorem), Harmonic quadruples, Olympiad geometry.

SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

AB

This master's thesis explores the connection between Euclidean and projective geometry, with a primary focus on the application of classical projective configurations and theorems in solving complex mathematical competition problems. The introductory part of the thesis provides the necessary theoretical foundations of Euclidean geometry, including Thales's theorem, the law of sines, Ceva's and Menelaus's theorems. The central part of the thesis is dedicated to the fundamental theorems of the projective plane—Desargues's, Pascal's, Pappus's, and Brianchon's theorems—as well as the analysis of harmonic quadruples and harmonic quadrilaterals. Through selected examples, the final part of the thesis demonstrates the advantage of projective methods over the classical Euclidean approach, thereby solving complex geometric problems much more elegantly and in fewer steps.

Accepted by the Scientific Board on:

ASB 18.8.2026.

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

- | | |
|------------|---|
| President: | Phd Petar Marković, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad |
| Member: | Phd Vlado Uljarević, assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad |
| Member: | Phd Kristina Ago, assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad. |