

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ МАСТЕР РАДА

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ
1. Датум и орган који је именовео комисију 23. 6. 2026. Веће Департмана за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду 2. Састав Комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен: • Академик др Стеван Пилиповић, професор емеритус Природно-математичког факултета у Новом Саду, уже научна област: анализа и вероватноћа, избор у звање 12. 11. 2020. – председник • др Никола Сарајлија, доцент Природно-математичког факултета у Новом Саду, уже научна област: анализа и вероватноћа, изабран у звање 12. 3. 2024. –ментор • др Милош Курилић, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, уже научна област: анализа и вероватноћа, изабран у звање 15. 6. 2004. - члан
II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ
1. Име, име једног родитеља, Презиме: Вук Негован Стојиљковић 2. Датум рођења, општина република: 01.04.1999. Смедерево, СРЈ 3. Година уписа на дипломске академске студије, смер/усмерење: 2018, Математика

III НАСЛОВ МАСТЕР РАДА

Непрекидни функционални рачун и примене

IV ПРЕГЛЕД МАСТЕР РАДА

У раду је обрађена теорија непрекидног функционалног рачуна за самоадјунговане операторе на Хилбертовим просторима и приказане су три илустративне примене приказане теорије.

Најпре су у првом поглављу уведени основни појмови из теорије нормираних простора, Банахових простора и Хилбертових простора. Дефинисан је појам линеарног оператора, ограничености и непрекидности, са посебним освртом на просторе l^p и $C(K)$ као кључне примере. Уведен је спектар линеарног оператора и доказана су основна својства спектра, укључујући да је спектар ограниченог оператора компактан скуп и да се налази у кругу полупречника $\|T\|$. Такође су уведени појмови Банахове алгебре и C^* -алгебре, са посебним нагласком на $B(H)$ као природан пример C^* -алгебре. Посебна пажња посвећена је спектру самоадјунгованих и позитивних оператора, што је представљало неопходну припрему за конструкцију функционалног рачуна.

У другом поглављу фокус је пребачен на конструкцију функционалног рачуна. Најпре је дефинисан полиномни функционални рачун и доказана је теорема о пресликавању спектра за полиноме. Затим је, користећи Вајерштрасову теорему о апроксимацији и чињеницу да су полиноми густе у простору непрекидних функција на компактном скупу, овај рачун проширен на све непрекидне функције дефинисане на спектру оператора. Тиме је добијен непрекидни функционални рачун – изометрички $*$ -хомоморфизам $\phi_A : C(\sigma(A)) \rightarrow B(H)$ за који важи $\phi_A(\text{id}) = A$ и $\phi_A(1) = I$. Доказана је теорема о пресликавању спектра за непрекидне функције, која представља један од централних резултата рада, као и последица о егзистенцији p -тог корена позитивног оператора.

Треће поглавље посвећено је применама непрекидног функционалног рачуна. Најпре је приказана примена у теорији операторских неједнакости - доказана је чувена Лоунер-Хајнцова неједнакост, која тврди да за позитивне операторе $A \geq B \geq 0$ и свако $r \in [0, 1]$ важи $A^r \gg B^r$. Затим је приказано решавање апстрактног Кошијевог проблема $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$, где је A самоадјунгован оператор. Дефинисан је оператор e^{tA} помоћу функционалног рачуна и доказано је да је решење проблема дато са $x(t) = e^{(tA)}x_0$. Израчунат је извод оператора e^{tA} и тиме је потврђено да функција заиста задовољава полазну диференцијалну једначину. На крају је показано да се произвољан ограничен инвертибилан оператор може написати у поларној форми $A = U|A|$, где је U унитаран, а $|A|$ позитиван оператор, што представља аналогон поларног записа комплексног броја.

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА МАСТЕР РАДА

Рад Непрекидни функционални рачун и примене садржи све битне елементе мастер рада: предговор, текст који је подељен у три главе, закључак и списак коришћене литературе. Рад је написан читко, математички прецизно и пружа увид у тему. Заступљени су и примери који јасно илуструју уведене појмове и тврђења.

Прва глава рада садржи основне појмове линеарне алгебре и функционалне анализе који су уведени постепено и изложени јасно. Уведени су појмови метричког, нормираног, Банаховог и Хилбертовог простора уз илустративне примере најзначајнијих од тих простора. Преостали део прве главе фокусира се на линеарне ограничене операторе, и у том делу су поступно и јасно изложени појмови везани за те операторе који су потребни у даљем раду.

У другој глави уведен је функционални рачун, и затим непрекидни функционални рачун, који и јести главни циљ овог рада. Текст је пропраћен одговарајућим примерима.

У трећој глави приказане су три различите примене непрекидног функционалног рачуна у математици и то: извођење Лоунер-Хајнцове неједнакости, примена на апстрактни Кошијев проблем, као и на поларну декомпозицију инвертибилног оператора.

VI ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

Непрекидни функционални рачун представља један од темељних алата модерне функционалне анализе и теорије оператора. Његов значај огледа се у могућности да се произвољној непрекидној функцији дефинисаној на спектру самодајунговог оператора додели ограничен линеаран оператор на природан и коректан начин. Овај рад је на систематичан начин приказао комплетну конструкцију тог рачуна, од полиномног до непрекидног случаја, са свим потребним доказима. Примене приказане у раду сведоче о изузетној снази овог концепта. Лоунер-Хајнцова неједнакост, која без функционалног рачуна не би имала смисла, представља један од најлепших резултата у теорији операторских неједнакости. Решавање апстрактног Кошијевог проблема показује како се формални изрази попут e^{tA} могу ригорозно дефинисати и користити у теорији еволуционих једначина. Поларна декомпозиција оператора пружа дубље геометријско разумевање структуре ограничених оператора. Закључујемо, дакле, да је непрекидни функционални рачун незаобилазни алат у савременој математици, како у теоријским истраживањима тако и у применама на диференцијалне једначине и квантну механику.

VII КОНАЧНА ОЦЕНА МАСТЕР РАДА

Садржај и структура мастер рада су у потпуности урађени у складу са одобреном темом. Прегледно и детаљно су дати резултати предвиђени у пријави теме, коришћена литература је релевантна и актуелна, докази су математички коректно изведени, а обухваћени су и адекватни примери. Кандидат је показао да влада овом темом тиме што је у трећој глави која се тиче примена, на неколико суштински различитих математичких проблема успешно применио теорију непрекидног функционалног рачуна уведеног раније.

VIII ПРЕДЛОГ

Имајући у виду све претходно речено, комисија предлаже да се мастер рад прихвати, а кандидату Вуку Стојиљковићу одобри одбрана.

Нови Сад,

ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

др Стеван Пилиповић,
академик, професор емеритус, председник

др Никола Сарајлија,
доцент, ментор

др Милош Курилић,
редовни професор, члан