



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU



Anja Batar

Zvezdasti hromatski indeks nekih klasa grafova

Master rad

Profesor:
dr Kristina Ago

Novi Sad, 2026

Sadržaj

1	Uvod	2
2	Osnovni pojmovi	4
2.1	Osnovni pojmovi teorije grafova	4
2.2	Podgrafovi i operacije nad grafovima	5
2.3	Putevi, konture, povezanost i stabla	6
2.4	Planarnost i auterplanarnost	7
2.5	Mečing, prekrivanja i hiperkocka	7
2.6	Bojenja grafova	8
2.7	Asimptotska notacija	8
3	Zvezdasti hromatski indeks kompletnih grafova	9
3.1	Gornja granica za kompletne grafove	9
3.2	Donja granica za kompletne grafove	15
4	Zvezdasti hromatski indeks stabala i supkubnih grafova	20
4.1	Stabla	20
4.2	Supkubni grafovi	26
5	Auterplanarni grafovi	48
5.1	Opšte gornje granice za auterplanarne grafove	48
5.2	Specifične familije auterplanarnih grafova sa ograničenim di- jametrom	60
5.2.1	Klasa 2-povezanih auterplanarnih grafova dijametra 2 .	62
5.2.2	Klasa 2-povezanih auterplanarnih grafova dijametra 3 .	63
5.3	Auterplanarni grafovi sa $\Delta = 5$	84
6	Otvoreni problemi i pravci daljeg istraživanja	86
6.1	Zvezdasti hromatski indeks kompletnih grafova	86
6.2	Gornje granice za supkubne i auterplanarne grafove	86
7	Zaključak	88
	Literatura	89
	Biografija	91

1 Uvod

Teorija bojenja grafova jedna je od najvažnijih oblasti diskretne matematike, prvenstveno zato što se lako primenjuje na stvarne probleme poput pravljenja rasporeda, raspodele resursa ili projektovanja mreža. Iako su klasični hromatski broj i hromatski indeks detaljno proučeni, poslednjih decenija sve se više istražuju varijante bojenja sa dodatnim i strožim pravilima. Glavni razlog leži u tome što u mnogim složenijim primenama obično pravilno bojenje nije dovoljno, pa se javlja potreba za strukturama koje pružaju veću pouzdanost.

Jedna od takvih varijanti jeste zvezdasto bojenje grana, koje predstavlja poštrenje pojma acikličnog bojenja grana. Zvezdasto bojenje grana grafa G je pravilno bojenje grana kod kojeg dodatno ne postoji dvobojan put niti dvobojna kontura dužine 4. Minimalan broj boja potreban za ovakvo bojenje naziva se zvezdasti hromatski indeks grafa G i obeležava se sa $\chi'_{st}(G)$.

Motivacija za proučavanje zvezdastog bojenja dolazi iz teorijskih i praktičnih razloga. S jedne strane, ono predstavlja prirodnu vezu između hromatskog indeksa i acikličnog bojenja, otkrivajući koliko dodatna pravila povećavaju broj potrebnih boja. S druge strane, izbegavanje naizmeničnih obrazaca boja veoma je korisno u praksi. Ovakva bojenja primenjuju se u problemima raspoređivanja gde treba sprečiti ponavljanje istih resursa, na primer kod dodele frekvencija u telekomunikacijama radi sprečavanja smetnji, kao i u analizi otpornosti mrežnih struktura na različite tipove kvarova ili napada.

Iako je zvezdasti hromatski indeks za jednostavnije klase grafova u potpunosti određen, za komplikovanije grafove precizne vrednosti ovog parametra i dalje predstavljaju otvoren ili delimično rešen problem. Cilj ovog master rada jeste da sistematizuje i prikaže postojeće rezultate o gornjim i donjim granicama za određene klase grafova, uz detaljno izlaganje odgovarajućih dokaznih tehnika.

U poglavlju 2 uvode se osnovni pojmovi i definicije iz teorije grafova koji se koriste u ostatku rada, uključujući pojmove pravilnog bojenja, hromatskog indeksa, acikličnog i zvezdastog bojenja, kao i definicije relevantnih klasa grafova (kompletni, supkubni, auterplanarni grafovi, stabla i dr.).

Poglavljje 3 posvećeno je zvezdastom hromatskom indeksu kompletnih grafo-

va K_n . Izvodi se gornja granica primenom Elkinove konstrukcije skupova bez tročlanih aritmetičkih progresija. Poglavlje se zaključuje izvođenjem odgovarajuće donje granice za kompletne grafove, koja se dobija metodom dvostrukog prebrojavanja.

U poglavlju 4 analizira se zvezdasti hromatski indeks za dve jednostavnije klase grafova, stabla i supkubne grafove. Za stabla se dokazuje oštra gornja granica u zavisnosti od maksimalnog stepena, dok se za supkubne grafove izvode i gornja i donja granica, uz karakterizaciju grafova koji dostižu minimalnu vrednost.

Poglavlje 5 bavi se klasom auterplanarnih grafova. Najpre se izvodi opšta gornja granica u zavisnosti od maksimalnog stepena, a zatim se posebna pažnja posvećuje preciznijim ocenama za auterplanarne grafove ograničenog stepena, kao i za specifične familije grafova sa ograničenim dijametrom.

Konačno, u poglavlju 6 dat je pregled otvorenih problema koji proizlaze iz izloženih rezultata, uključujući pitanje tačnog reda rasta zvezdastog hromatskog indeksa kompletnih grafova, kao i formulaciju hipoteza o oštrijim gornjim granicama za supkubne i auterplanarne grafove.

2 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju uvodimo definicije i oznake iz teorije grafova koje se koriste u ostatku rada, a koje se oslanjaju na literaturu [14], [4] i [6].

2.1 Osnovni pojmovi teorije grafova

Definicija 2.1. Graf G je uređeni par $G = (V, E)$, gde je $V = V(G)$ konačan neprazan skup čiji se elementi nazivaju *čvorovi*, a $E = E(G)$ skup *grana*, pri čemu je svaka grana neuređen par čvorova iz V . Broj čvorova $|V(G)|$ naziva se *red grafa*, a broj grana $|E(G)|$ *veličina grafa*.

Definicija 2.2. Ako je $e = uv \in E(G)$ grana grafa G , kažemo da su čvorovi u i v *krajevi* grane e , da su čvor u i grana e (kao i čvor v i grana e) međusobno *incidentni*, kao i da su čvorovi u i v *susedni*, odnosno da je u sused čvora v . Skup svih suseda čvora v u grafu G označavamo sa $N_G(v)$ (ili kraće sa $N(v)$ ukoliko je jasno o kom grafu je reč).

Definicija 2.3. Dve grane koje imaju zajednički čvor nazivaju se *susedne grane*.

Definicija 2.4. Stepen čvora v u grafu G , u oznaci $d_G(v)$, jednak je broju grana incidentnih sa v . Kada je jasno o kom grafu je reč, koristićemo kraću oznaku $d(v)$. Maksimalni stepen grafa G , u oznaci $\Delta(G)$, predstavlja najveći stepen među svim čvorovima grafa.

Definicija 2.5. Graf u kome se između dva čvora može nalaziti više od jedne grane naziva se *multigraf*. Kod multigrafa se $E = E(G)$ ne posmatra kao skup, već kao *multiskup* parova čvorova iz V , tj. dozvoljeno je da se ista grana pojavi više puta u E . Takve grane nazivamo *paralelnim granama*. Grana koja spaja čvor sa samim sobom naziva se *petlja*. Graf bez paralelnih grana i bez petlji naziva se *prost graf*. Ukoliko nije drugačije naglašeno, u ovom radu se pod pojmom graf podrazumeva prost graf.

Definicija 2.6. Kompletan graf sa n čvorova, u oznaci K_n , jeste graf u kome je svaki par različitih čvorova povezan granom.

Definicija 2.7. Kompletan bipartitni graf $K_{m,n}$ je graf čiji se skup čvorova može podeliti na dva disjunktne skupa veličine m i n , tako da su svaka dva čvora iz različitih skupova povezana granom, dok čvorovi unutar istog skupa nisu međusobno povezani.

Definicija 2.8. Graf G naziva se *kubnim* ukoliko je $d(v) = 3$ za svaki čvor $v \in V(G)$. Graf G naziva se *supkubnim* ukoliko je $d(v) \leq 3$ za svaki čvor $v \in V(G)$, odnosno ako je $\Delta(G) \leq 3$.

2.2 Podgrafovi i operacije nad grafovima

Definicija 2.9. Graf H je *podgraf* grafa G ukoliko važi $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$. Ako je H podgraf grafa G takav da za svaka dva čvora $u, v \in V(H)$ grana uv pripada skupu $E(H)$ kad god pripada skupu $E(G)$, tada se H naziva *indukovani podgraf* grafa G (indukovan skupom čvorova $V(H)$) i označava se sa $G[V(H)]$.

Definicija 2.10. *Brisanje grane* $e \in E(G)$ je operacija kojom se iz grafa G uklanja grana e . Dobijeni graf se označava sa $G - e$. *Brisanje čvora* $v \in V(G)$ je operacija kojom se iz grafa G uklanja čvor v , zajedno sa svim granama koje su sa njim incidentne. Dobijeni graf se označava sa $G - v$.

Definicija 2.11. Kontrakcija grane $e = uv$ grafa G je operacija kojom se čvorovi u i v spajaju u jedan novi čvor w , incidentan sa svim granama koje su prethodno bile incidentne sa u ili v , osim same grane e (koja se uklanja, jer bi njenom kontrakcijom nastala petlja). Ukoliko nakon spajanja između čvora w i nekog drugog čvora x postoji više grana (tj. nastanu paralelne grane, jer su i u i v bili susedni sa x), sve te grane se zamenjuju jednom granom wx , tako da rezultujući graf ostane prost.

Definicija 2.12. Graf H je *minor* grafa G ukoliko se H može dobiti iz G nizom operacija brisanja čvorova, brisanja grana i kontrakcije grana.

Definicija 2.13. *Subdivizija* grafa G je graf dobijen zamenom (jedne ili više) grana grafa G putevima, odnosno umetanjem novih čvorova stepena 2 na postojeće grane.

Definicija 2.14. *Supresija čvora* je operacija koja predstavlja obrnut postupak od umetanja čvora stepena 2: ukoliko je v čvor stepena 2 u grafu G čija su dva suseda u i w međusobno nesusedna, tada se supresija čvora v sastoji u brisanju čvora v (zajedno sa granama uv i vw) i dodavanju nove grane uw .

Definicija 2.15. Neka su $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ dva grafa sa disjunktnim skupovima čvorova, tj. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. *Disjunktna unija* grafova G_1 i G_2 , u oznaci $G_1 \cup G_2$, jeste graf sa skupom čvorova $V_1 \cup V_2$ i skupom grana $E_1 \cup E_2$.

Definicija 2.16. Neka su $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ dva grafa sa disjunktним skupovima čvorova. *Spoj* grafova G_1 i G_2 , u oznaci $G_1 \vee G_2$, jeste graf dobijen od disjunktne unije $G_1 \cup G_2$ dodavanjem svih grana koje povezuju svaki čvor iz V_1 sa svakim čvorom iz V_2 , tj.

$$G_1 \vee G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}).$$

Definicija 2.17. *Linijski graf* grafa G , u oznaci $L(G)$, jeste graf čiji je skup čvorova $V(L(G)) = E(G)$, pri čemu su dva čvora grafa $L(G)$ susedna ako i samo ako su odgovarajuće grane grafa G susedne.

2.3 Putevi, konture, povezanost i stabla

Definicija 2.18. Put P_n je graf sa n čvorova čiji se čvorovi mogu poredati u niz $v_1, v_2, \dots, v_n$ tako da su v_i i v_{i+1} susedni za svako $i \in \{1, \dots, n-1\}$, dok za ostale parove čvorova ne postoji susednost. Dužina puta jednaka je broju njegovih grana.

Definicija 2.19. Kontura C_n , gde je $n \geq 3$, je graf sa n čvorova dobijen od puta P_n dodavanjem grane koja povezuje njegova dva krajnja čvora. Analogno, dužina konture jednaka je broju njenih grana.

Definicija 2.20. Rastojanje $d(u, v)$ između dva čvora u i v u povezanom grafu G jednako je dužini najkraćeg puta koji ih povezuje. Dijametar grafa G , u oznaci $\text{diam}(G)$, predstavlja najveće rastojanje između bilo koja dva čvora grafa.

Definicija 2.21. Graf G je povezan ukoliko za svaka dva njegova čvora postoji put koji ih povezuje. Maksimalni povezani podgrafovi grafa G nazivaju se njegove *komponente povezanosti*.

Definicija 2.22. Grana e grafa G naziva se *most* ukoliko njeno uklanjanje povećava broj komponenti povezanosti grafa G .

Definicija 2.23. Čvor v povezanog grafa G naziva se *artikulacioni čvor* ukoliko njegovo uklanjanje (zajedno sa svim njemu incidentnim granama) povećava broj komponenti povezanosti grafa. Povezan graf G sa $|V(G)| \geq 3$ koji nema artikulacionih čvorova naziva se *2-povezan*. Maksimalni povezani podgraf grafa G bez artikulacionih čvorova naziva se *blok* grafa G .

Definicija 2.24. Graf bez kontura naziva se *acikličan*.

Definicija 2.25. Stablo je povezan acikličan graf. Graf bez kontura, ali ne nužno povezan u celini, naziva se *šuma* (odnosno disjunktne unije stabala). Čvor stepena 1 u stablu naziva se *list*.

Definicija 2.26. Korensko stablo je stablo T u kome je izdvojen jedan čvor v , nazvan *koren*. Za svaki čvor $u \neq v$, jedinstveni sused čvora u na putu ka korenu naziva se njegov *roditelj*, dok se preostali susedi čvora u nazivaju njegova *deca*. Rastojanje čvora od korena naziva se njegov *nivo* (ili *dubina*).

2.4 Planarnost i auterplanarnost

Definicija 2.27. Graf G je *planaran* ukoliko se može nacrtati u ravni tako da se njegove grane ne seku, osim eventualno u zajedničkim krajnjim čvorovima. Ovakav crtež naziva se *smeštanje grafa u ravan* (*plane embedding*). Delovi na koje ovakvo smeštanje deli ravan nazivaju se *oblasti*, a neograničena oblast naziva se *spoljašnja oblast*.

Definicija 2.28. Graf G je *auterplanaran* ukoliko poseduje smeštanje u ravan takvo da svi njegovi čvorovi leže na granici spoljašnje oblasti.

Definicija 2.29. Planaran graf G naziva se *maksimalan planaran* ukoliko dodavanje bilo koje grane između dva nesusedna čvora narušava planarnost grafa. Analogno, auterplanaran graf G naziva se *maksimalan auterplanaran* ukoliko dodavanje bilo koje grane između dva nesusedna čvora narušava njegovu auterplanarnost.

2.5 Mečing, prekrivanja i hiperkocka

Definicija 2.30. Mečing M u grafu G je skup grana od kojih nijedne dve nemaju zajednički kraj. Mečing M naziva se *savršen* ukoliko je svaki čvor grafa G incidentan sa tačno jednom granom iz M .

Definicija 2.31. *Rez* u povezanom grafu G je skup grana čijim se uklanjanjem graf raspada na dve ili više komponenti povezanosti. Rez veličine k naziva se *k-rez*.

Definicija 2.32. Neka su G i H grafovi. Preslikavanje $p : V(G) \rightarrow V(H)$ naziva se *prekrivanje* (covering map) ukoliko je homomorfizam grafova i ukoliko za svaki čvor $v \in V(G)$ njegova restrikcija $p : N_G(v) \rightarrow N_H(p(v))$ predstavlja bijekciju. U tom slučaju kažemo da graf G prekriva graf H .

Definicija 2.33. Hiperkocka Q_n je graf čiji su čvorovi svi binarni nizovi dužine n , pri čemu su dva čvora susedna ako i samo ako se odgovarajući nizovi razlikuju u tačno jednoj koordinati. Graf Q_3 (hiperkocka dimenzije 3) je kubni graf sa 8 čvorova i 12 grana.

2.6 Bojenja grafova

Definicija 2.34. Bojenje čvorova grafa G je preslikavanje $f : V(G) \rightarrow C$, gde je C skup boja. Bojenje je *pravilno* ukoliko važi $f(u) \neq f(v)$ za svaku granu $uv \in E(G)$. Najmanji broj boja potreban za pravilno bojenje čvorova grafa G naziva se *hromatski broj* grafa i označava se sa $\chi(G)$.

Definicija 2.35. Bojenje grana grafa G je preslikavanje $c : E(G) \rightarrow C$. Bojenje je *pravilno* ukoliko svake dve susedne grane dobijaju različite boje. Najmanji broj boja potreban za pravilno bojenje grana grafa G naziva se *hromatski indeks* grafa i označava se sa $\chi'(G)$.

Definicija 2.36. Pravilno bojenje grana naziva se *aciklično* ukoliko ne sadrži dvobojnu konturu.

Definicija 2.37. Pravilno bojenje grana grafa G naziva se *zvezdasto* ukoliko ne sadrži dvobojni put niti dvobojnu konturu dužine 4. Najmanji broj boja potreban za zvezdasto bojenje grana grafa G naziva se *zvezdasti hromatski indeks* grafa i označava se sa $\chi'_{st}(G)$.

2.7 Asimptotska notacija

Definicija 2.38. Neka su $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ funkcije. Kažemo da je $f(n) = O(g(n))$ ukoliko postoje konstanta $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svako $n \geq n_0$ važi:

$$f(n) \leq c \cdot g(n).$$

Definicija 2.39. Neka su $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ funkcije. Kažemo da je $f(n) = o(g(n))$ ukoliko za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svako $n \geq n_0$ važi:

$$f(n) \leq \varepsilon \cdot g(n),$$

odnosno ukoliko važi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Zapis $f(n) = g(n)(1 + o(1))$ koristi se da označi da je $f(n) = g(n) + o(g(n))$, odnosno da se $f(n)$ asimptotski ponaša kao $g(n)$ kada $n \rightarrow \infty$.

3 Zvezdasti hromatski indeks kompletnih grafova

U ovom poglavlju proučavamo zvezdasti hromatski indeks za klasu kompletnih grafova K_n . Prikazani rezultati u ovom poglavlju preuzeti su iz [9]. U nastavku, oznaka $\log n$ označava logaritam sa osnovom 2 (tj. $\log n = \log_2 n$).

Kompletni grafovi imaju ključnu ulogu u teoriji bojenja jer predstavljaju najgušće objekte sa maksimalnim mogućim brojem grana. U nastavku najpre izvodimo gornju granicu za zvezdasti hromatski indeks kompletnih grafova K_n , dok u drugom delu poglavlja određujemo i odgovarajuću donju granicu.

3.1 Gornja granica za kompletne grafove

Teorema 3.1. Zvezdasti hromatski indeks kompletnog grafa K_n zadovoljava nejednakost:

$$\chi'_{st}(K_n) \leq \frac{n \cdot 2^{2\sqrt{2}(1+o(1))\sqrt{\log n}}}{(\log n)^{1/4}}.$$

Posebno, za svako $\varepsilon > 0$ postoji konstanta c takva da važi:

$$\chi'_{st}(K_n) \leq c n^{1+\varepsilon}$$

za svako $n \geq 1$.

Dokaz. Neka je A skup prirodnih brojeva koji se sastoji od n elemenata, čiji će konkretan izbor biti preciziran u nastavku dokaza. Pretpostavimo da su čvorovi kompletnog grafa K_n identifikovani upravo sa elementima skupa A , odnosno važi $V(K_n) = A$.

Definišemo funkciju bojenja grana $c : E(K_n) \rightarrow \mathbb{Z}$ tako da je boja proizvoljne grane ij jednaka zbiru njenih krajnjih čvorova:

$$c(ij) = i + j.$$

Pre svega, dokazujemo da je ovako definisano bojenje pravilno bojenje grana. Posmatramo proizvoljan čvor $i \in A$ i dve različite grane incidentne sa njim, na primer grane incidentne sa čvorovima j i k (gde je $j \neq k$). Prema definiciji, boje ovih grana su:

$$c(ij) = i + j \quad \text{i} \quad c(ik) = i + k.$$

Budući da su j i k različiti čvorovi iz skupa A , sledi da je

$$i + j \neq i + k,$$

pa je bojenje pravilno.

Pretpostavimo da bojenje nije zvezdasto, odnosno da u grafu postoji dvobojni put ili kontura $ijklm$ dužine četiri. Prema definiciji funkcije bojenja c , grane koje se nalaze na neparnim pozicijama moraju imati istu boju i grane na parnim pozicijama moraju imati istu boju. Odatle dobijamo:

$$c(ij) = c(kl) \implies i + j = k + l,$$

$$c(jk) = c(lm) \implies j + k = l + m.$$

Iz ovoga sledi:

$$2k = i + m.$$

Jednačina $2k = i + m$ (uz uslov da su i i m različiti od k) direktno implicira da uređena trojka brojeva (i, k, m) formira aritmetičku progresiju sa 3 člana. Prema tome, ukoliko unapred osiguramo da izabrani skup čvorova A ne sadrži nijednu aritmetičku progresiju sa 3 člana, u grafu K_n biće nemoguće formirati sistem jednačina koji generiše dvobojni put ili konturu dužine 4.

U ovom dokazu oslonićemo se na poznatu eksplicitnu konstrukciju Elkina [10], koja predstavlja poboljšanje klasičnog Behrendovog rezultata [2]. Prema Elkinovoj konstrukciji, za dovoljno veliko N postoji skup prirodnih brojeva $A \subset \{1, 2, \dots, N\}$ takav da važi:

$$n = |A| \geq c_1 \frac{N \cdot (\log N)^{1/4}}{2^{2\sqrt{2}\sqrt{\log N}}},$$

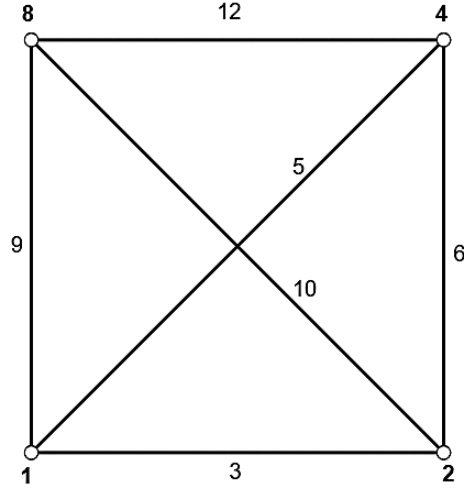
gde je c_1 apsolutna pozitivna konstanta, pri čemu skup A ne sadrži tročlane aritmetičke progresije.

Pošto su svi elementi skupa A iz intervala $[1, N]$, broj korišćenih boja u našem zvezdastom bojenju je najviše $2N$, pa važi:

$$\chi'_{st}(K_n) \leq 2N.$$

Preostaje da se N izrazi kao funkcija od n . Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je

$$\sqrt{\log N} = o(\log N),$$



Slika 1: Zvezdasto bojenje grana potpunog grafa K_4 generisano pomoću skupa čvorova $A = \{1, 2, 4, 8\}$ bez aritmetičkih progresija dužine 3.

za dovoljno veliko N važi

$$2\sqrt{2}\sqrt{\log N} \leq \varepsilon \log N.$$

iz čega

$$2^{2\sqrt{2}\sqrt{\log N}} \leq 2^{\varepsilon \log N} = N^{\varepsilon}.$$

Za dovoljno veliko N je i $(\log N)^{1/4} \geq 1$, pa iz Elkinove procene dobijamo

$$n \geq c_1 \frac{N(\log N)^{1/4}}{2^{2\sqrt{2}\sqrt{\log N}}} \geq c_1 N^{1-\varepsilon}.$$

Dakle, za svako $\varepsilon > 0$ i dovoljno veliko N važi

$$n \geq c_2 N^{1-\varepsilon},$$

gde možemo uzeti $c_2 = c_1$.

Sada želimo da iz ove nejednakosti dobijemo procenu oblika $N \leq c_3 n^{1+\varepsilon}$. Da se isti simbol ε ne bi koristio u dve različite uloge, prethodnu nejednakost primenjujemo sa

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Tada je

$$1 - \delta = \frac{1}{1 + \varepsilon},$$

pa

$$n \geq c_2 N^{1-\delta} = c_2 N^{1/(1+\varepsilon)}.$$

Stepenovanjem na $1 + \varepsilon$ dobijamo

$$N \leq \left(\frac{n}{c_2} \right)^{1+\varepsilon} = c_3 n^{1+\varepsilon},$$

gde je

$$c_3 = c_2^{-(1+\varepsilon)}.$$

Po potrebi možemo povećati konstantu c_3 tako da važi $c_3 \geq 1$.

Ovu procenu vraćamo u početnu Elkinovu nejednakost. Posmatrajmo funkciju

$$f(N) = (\log N)^{1/4} \cdot 2^{-2\sqrt{2}\sqrt{\log N}}.$$

Ova funkcija je monotono opadajuća za dovoljno velike vrednosti N .

Iz $N \leq c_3 n^{1+\varepsilon}$ i monotonosti funkcije f sledi

$$f(N) \geq f(c_3 n^{1+\varepsilon}).$$

Dalje,

$$\log(c_3 n^{1+\varepsilon}) = (1 + \varepsilon) \log n + \log c_3,$$

pa je

$$(\log(c_3 n^{1+\varepsilon}))^{1/4} \geq ((1 + \varepsilon) \log n)^{1/4}.$$

Sa druge strane, iz nejednakosti

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

dobijamo

$$\sqrt{\log(c_3 n^{1+\varepsilon})} \leq \sqrt{(1 + \varepsilon) \log n} + \sqrt{\log c_3}.$$

Prema tome,

$$f(N) \geq 2^{-2\sqrt{2}\sqrt{\log c_3}} \frac{((1 + \varepsilon) \log n)^{1/4}}{2^{2\sqrt{2}\sqrt{(1+\varepsilon)\log n}}}.$$

Vraćanjem ove procene u Elkinovu nejednakost dobijamo

$$n \geq c_4 \frac{N \cdot ((1 + \varepsilon) \log n)^{1/4}}{2^{2\sqrt{2}} \sqrt{(1+\varepsilon) \log n}},$$

gde je

$$c_4 = c_1 2^{-2\sqrt{2}\sqrt{\log c_3}}.$$

Oдавde sledi

$$N \leq c_4^{-1} (1 + \varepsilon)^{-1/4} n 2^{2\sqrt{2}\sqrt{(1+\varepsilon) \log n}} (\log n)^{-1/4}.$$

Ako označimo

$$c_5 = c_4^{-1} (1 + \varepsilon)^{-1/4},$$

dobijamo

$$N \leq c_5 n 2^{2\sqrt{2}\sqrt{(1+\varepsilon) \log n}} (\log n)^{-1/4}.$$

Ova procena još uvek sadrži faktor $1 + \varepsilon$ pod korenom. Koristićemo je jednom da bismo preciznije uporedili $\log N$ i $\log n$. Fiksirajmo, na primer, $\varepsilon = 1$. Tada za neku konstantu $C > 0$ važi

$$N \leq C n 2^{4\sqrt{\log n}} (\log n)^{-1/4}.$$

Logaritmovanjem dobijamo

$$\log N \leq \log n + 4\sqrt{\log n} - \frac{1}{4} \log \log n + \log C.$$

Prema tome,

$$\log N \leq \log n + O(\sqrt{\log n}).$$

Sa druge strane, pošto skup $A \subseteq \{1, \dots, N\}$ ima n različitih elemenata, mora biti $N \geq n$, pa je

$$\log N \geq \log n.$$

Zato možemo zaključiti da

$$\log N = \log n + O(\sqrt{\log n}).$$

Sada izračunavamo razliku kvadratnih korena:

$$\sqrt{\log N} - \sqrt{\log n} = \frac{\log N - \log n}{\sqrt{\log N} + \sqrt{\log n}}.$$

Brojilac je $O(\sqrt{\log n})$, dok je imenilac najmanje $2\sqrt{\log n}$, pa je

$$\sqrt{\log N} - \sqrt{\log n} = O(1).$$

Dakle,

$$\sqrt{\log N} = \sqrt{\log n} + O(1).$$

Sada se još jednom vraćamo na početnu Elkinovu nejednakost. Iz nje neposredno sledi

$$N \leq \frac{1}{c_1} n \frac{2^{2\sqrt{2}\sqrt{\log N}}}{(\log N)^{1/4}}.$$

Kako je $N \geq n$, imamo

$$(\log N)^{1/4} \geq (\log n)^{1/4}.$$

Takođe, iz

$$\sqrt{\log N} = \sqrt{\log n} + O(1)$$

sledi da postoji konstanta $C' > 0$ takva da

$$2^{2\sqrt{2}\sqrt{\log N}} \leq C' 2^{2\sqrt{2}\sqrt{\log n}}.$$

Zato, nakon objedinjavanja konstantnih faktora, postoji konstanta $c_6 > 0$ za koju važi

$$2N \leq c_6 \frac{n \cdot 2^{2\sqrt{2}\sqrt{\log n}}}{(\log n)^{1/4}}.$$

Preostaje da objasnimo zašto se konstanta c_6 može apsorbovati u eksponent. Pošto je c_6 fiksirana konstanta,

$$c_6 = 2^{\log c_6},$$

pa

$$c_6 2^{2\sqrt{2}\sqrt{\log n}} = 2^{2\sqrt{2}\sqrt{\log n} + \log c_6}.$$

Ovaj eksponent možemo zapisati u obliku

$$2\sqrt{2}\sqrt{\log n} + \log c_6 = 2\sqrt{2} \left(1 + \frac{\log c_6}{2\sqrt{2}\sqrt{\log n}} \right) \sqrt{\log n}.$$

Kako

$$\frac{\log c_6}{2\sqrt{2}\sqrt{\log n}} \longrightarrow 0,$$

dobijamo

$$c_6 2^{2\sqrt{2}\sqrt{\log n}} = 2^{2\sqrt{2}(1+o(1))\sqrt{\log n}}.$$

Konačno, pošto je $\chi'_{st}(K_n) \leq 2N$, sledi

$$\chi'_{st}(K_n) \leq \frac{n \cdot 2^{2\sqrt{2}(1+o(1))\sqrt{\log n}}}{(\log n)^{1/4}}.$$

Dokažimo još poslednju tvrdnju teoreme. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Pošto

$$\frac{2\sqrt{2}(1+o(1))\sqrt{\log n}}{\log n} = \frac{2\sqrt{2}(1+o(1))}{\sqrt{\log n}} \longrightarrow 0,$$

za dovoljno veliko n važi

$$2\sqrt{2}(1+o(1))\sqrt{\log n} \leq \varepsilon \log n.$$

Zato

$$2^{2\sqrt{2}(1+o(1))\sqrt{\log n}} \leq 2^{\varepsilon \log n} = n^{\varepsilon}.$$

Za dovoljno veliko n je $(\log n)^{1/4} \geq 1$, pa dobijamo

$$\chi'_{st}(K_n) \leq n^{1+\varepsilon}.$$

Preostaje još samo konačno mnogo manjih vrednosti n . Uvećavanjem konstante c možemo obuhvatiti i njih, pa za svako $n \geq 1$ važi

$$\chi'_{st}(K_n) \leq c n^{1+\varepsilon}.$$

□

3.2 Donja granica za kompletne grafove

Pokazali smo da zvezdasti hromatski indeks kompletnog grafa K_n raste gotovo linearno u odnosu na broj čvorova, preciznije kao $\mathcal{O}(n^{1+\varepsilon})$ za proizvoljno malo $\varepsilon > 0$. Kako bismo procenili kvalitet ove gornje granice i utvrdili asimptotsko ponašanje posmatranog parametra, u nastavku izvodimo odgovarajuću donju granicu primenom metode dvostrukog prebrojavanja.

Teorema 3.2. Zvezdasti hromatski indeks kompletnog grafa K_n zadovoljava nejednakost:

$$\chi'_{st}(K_n) \geq 2n(1+o(1)).$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoji zvezdasto bojenje grana kompletnog grafa K_n koje koristi b različitih boja. Neka a_i označava ukupan broj grana koje su obojene bojom i , i neka $b_{i,j}$ označava broj puteva dužine tri čije su grane naizmenično obojene bojama i, j, i .

Dokaz izvodimo metodom dvostrukog prebrojavanja ukupnog broja naizmeničnih puteva dužine 3 u grafu.

Budući da svaka grana grafa mora dobiti tačno jednu boju, suma broja grana svih pojedinačnih boja mora biti jednaka ukupnom broju grana u kompletnom grafu sa n čvorova:

$$\sum_{i=1}^b a_i = \binom{n}{2}.$$

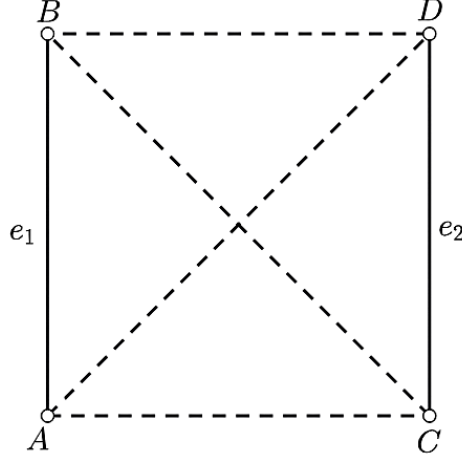
Fiksiramo proizvoljnu boju i . Da bi bojenje bilo pravilno, svake dve grane koje imaju istu boju ne smeju deliti zajednički čvor. To znači da za svaku boju i , skup grana obojenih tom bojom formira mečing M_i koji se sastoji od tačno a_i nezavisnih grana.

Sada posmatramo na koji način grane iz mečinga M_i mogu učestvovati u formiranju puteva dužine 3 oblika i, j, i . Da bismo formirali takav put, neophodno je izabrati bilo koje dve grane iz mečinga M_i (nazovimo ih e_1 i e_2), što možemo uraditi na tačno $\binom{a_i}{2}$ načina.

Neka grana e_1 spaja čvorove A i B , a grana e_2 spaja čvorove C i D , kao što je prikazano na slici 2. S obzirom da posmatramo kompletan graf K_n , između grana e_1 i e_2 postoje četiri moguće grane koje ih povezuju (AC, AD, BC, BD). Svaka od tih grana, ukoliko je obojena nekom bojom j , formira po jedan jedinstven naizmenični put dužine 3. Na taj način dobijamo tačno 4 moguća puta:

$$\sum_{j=1}^b b_{i,j} = 4 \binom{a_i}{2}. \quad (1)$$

Sada fiksiramo boju j i posmatramo mečing M_j koji se sastoji od a_j grana. Razmotrimo proizvoljan naizmeničan put dužine tri čije su grane obojene redom bojama i, j, i . Centralna grana ovog puta pripada mečingu M_j , dok spoljašnje grane moraju biti obojene bojom i .



Slika 2: Generisanje naizmeničnih puteva dužine tri u grafu K_n

Da bi uslov zvezdastog bojenja grana bio zadovoljen, grane boje i koje se nadovezuju na krajeve centralne grane iz mečinga M_j moraju svojim drugim krajevima voditi ka čvorovima koji se nalaze potpuno izvan mečinga M_j . Ukoliko bi neka spoljašnja grana boje i povezivala dva čvora koja oba pripadaju mečingu M_j , unutar grafa bi se formirala podstruktura koja dozvoljava smenjivanje boja i, j, i, j , što bi narušilo zvezdasto bojenje. Iz tog razloga, sve grane boje i koje učestvuju u posmatranim putevima dužine 3 moraju biti izabrane iz skupa grana koje imaju tačno jedan krajnji čvor u mečingu M_j , dok se njihov drugi krajnji čvor nalazi izvan tog mečinga.

Kako mečing M_j sadrži a_j grana, on zauzima ukupno $2a_j$ čvorova u grafu K_n , dok broj čvorova izvan mečinga iznosi $n - 2a_j$. Prema tome, ukupan broj grana kompletnog grafa koje imaju jedan krajnji čvor u mečingu M_j , a drugi izvan njega, jednak je:

$$2a_j(n - 2a_j).$$

Pošto svaki naizmenični dvobojni put i, j, i koristi tačno dve grane iz ovog skupa od $2a_j(n - 2a_j)$ prelaznih grana, dolazimo do sledeće gornje granice kada sumiramo po svim mogućim spoljašnjim bojama i :

$$\sum_{i=1}^b b_{i,j} \leq \frac{2a_j(n - 2a_j)}{2} = a_j(n - 2a_j). \quad (2)$$

Sada možemo da izračunamo vrednost dvostruke sume $\sum_{i,j} b_{i,j}$ na dva različita načina, koristeći rezultate iz (1) i (2). Primenom ovog postupka dobijamo nejednakost:

$$4 \sum_{i=1}^b \binom{a_i}{2} \leq \sum_{j=1}^b a_j(n - 2a_j).$$

Zamenom binomnog koeficijenta $\binom{a_i}{2}$ izrazom $\frac{a_i(a_i-1)}{2}$, gornja relacija prelazi u

$$4 \sum_{i=1}^b \frac{a_i(a_i-1)}{2} \leq \sum_{j=1}^b a_j(n - 2a_j).$$

Sređivanjem koeficijenata na levoj strani i množenjem članova unutar suma dobijamo:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^b (a_i^2 - a_i) &\leq \sum_{j=1}^b (na_j - 2a_j^2), \\ 2 \sum_{i=1}^b a_i^2 - 2 \sum_{i=1}^b a_i &\leq n \sum_{j=1}^b a_j - 2 \sum_{j=1}^b a_j^2. \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir da su indeksi i i j samo formalne oznake za sumiranje po istom skupu boja (pa važi $\sum a_i^2 = \sum a_j^2$ i $\sum a_i = \sum a_j$), grupisanjem kvadratnih članova na levoj strani dolazimo do oblika:

$$4 \sum_{i=1}^b a_i^2 \leq (n+2) \sum_{i=1}^b a_i. \quad (3)$$

Primenom Koši–Švarcove nejednakosti dobijamo relaciju:

$$\left(\sum_{i=1}^b a_i \right)^2 \leq b \sum_{i=1}^b a_i^2,$$

odnosno:

$$\sum_{i=1}^b a_i^2 \geq \frac{1}{b} \left(\sum_{i=1}^b a_i \right)^2.$$

Primenom dobijene procene na nejednakost (3) i uvrštavanjem identiteta $\sum_{i=1}^b a_i = \frac{n(n-1)}{2}$, nakon skraćivanja člana $\sum_{i=1}^b a_i$ dobijamo:

$$\frac{2n(n-1)}{b} \leq n+2.$$

Odavde direktno sledi donja granica za broj boja b :

$$b \geq \frac{2n(n-1)}{n+2} = 2n - 6 + \frac{12}{n+2}.$$

U asimptotskom smislu, kada veličina grafa neograničeno raste ($n \rightarrow \infty$), dobijamo:

$$b \geq 2n(1 + o(1)),$$

čime je dokaz donje granice teoreme završen. □

4 Zvezdasti hromatski indeks stabala i supkubnih grafova

U ovom poglavlju analiziramo zvezdasti hromatski indeks za dve specifične, jednostavnije klase grafova: stabla i supkubne grafove. Za razliku od opštih grafova, dodatna ograničenja ovih klasa omogućavaju dobijanje znatno preciznijih i oštrijih granica. Rezultati prikazani u ovom poglavlju zasnovani su na radovima [9] i [3].

4.1 Stabla

U ovom delu rada analiziramo kako se odsustvo kontura odražava na zvezdasti hromatski indeks i izvodimo oštru gornju granicu za proizvoljno stablo sa maksimalnim stepenom Δ . Prikazana procena je najbolja moguća, što potvrđuje da se navedena granica u opštem slučaju ne može dalje poboljšati.

Teorema 4.1. Neka je T stablo sa maksimalnim stepenom čvora Δ . Tada za njegov zvezdasti hromatski indeks važi:

$$\chi'_{st}(T) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta \right\rfloor.$$

Osim toga, navedena granica je oštra.

Dokaz. Pre nego što pređemo na opšti dokaz teoreme, pokazaćemo da se navedena gornja granica ne može smanjiti. U tu svrhu, konstruisaćemo jedno specifično korensko stablo T za koje je neophodno upotrebiti bar $\lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$ boja.

Neka je T stablo sa korenom v čiji je stepen jednak Δ . Neka je svaki od njegovih Δ suseda, koje označavamo sa $v_1, v_2, \dots, v_\Delta$, povezan sa po $\Delta - 1$ listova. Na ovaj način, stablo T ima tačno Δ grana na prvom nivou i ukupno $\Delta(\Delta - 1)$ grana na drugom nivou.

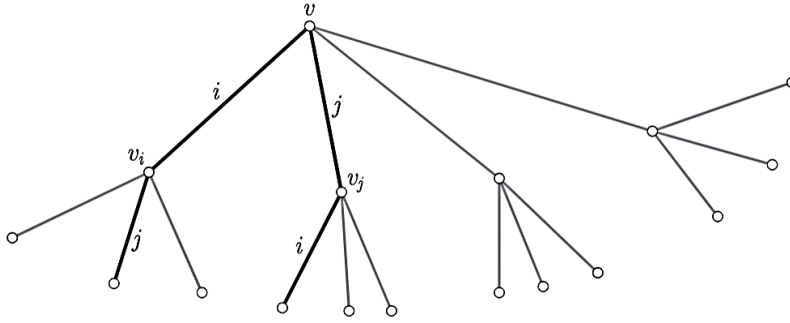
U nastavku ćemo analizirati kapacitete raspoloživih boja, pri čemu ćemo smatrati da se boja γ pojavljuje u čvoru u ukoliko postoji bar jedna grana incidentna sa u koja je obojena bojom γ .

Pretpostavimo da stablo T možemo zvezdasto obojiti sa ukupno $\Delta + k$ boja, gde Δ predstavlja osnovni broj boja potreban za bojenje grana incidentnih

sa korenom v , dok k označava broj dodatnih boja. Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da su grane prvog nivoa vv_i obojene redom bojama $1, 2, \dots, \Delta$, tako da grana vv_i nosi boju i .

Sada analiziramo mogućnosti bojenja za $\Delta(\Delta - 1)$ grana drugog nivoa:

- **Pojavljivanje osnovnih boja $\{1, 2, \dots, \Delta\}$:** Posmatrajmo bilo koja dva različita čvora v_i i v_j sa prvog nivoa. Zbog pravila zvezdastog bojenja, ako se boja j pojavi u čvoru v_i , tada se boja i ne sme pojaviti u čvoru v_j . U suprotnom, grane obojene bojama j i i bi formirale zabranjeni dvobojni put dužine 4 sa naizmeničnim bojama $j - i - j - i$, kao što je prikazano na slici 3. To znači da je za svaki par čvorova $\{v_i, v_j\}$ dozvoljena najviše jedna od dve mogućnosti: boja j kod čvora v_i ili boja i kod čvora v_j , ali ne i obe zajedno. Kako različitih parova osnovnih boja ima tačno $\binom{\Delta}{2} = \frac{\Delta(\Delta-1)}{2}$, zaključujemo da se sve osnovne boje $\{1, 2, \dots, \Delta\}$ zajedno mogu upotrebiti na najviše $\frac{\Delta(\Delta-1)}{2}$ grana drugog nivoa.



Slika 3: Korensko stablo T za $\Delta = 4$ sa prikazom nastanka dvobojnog puta dužine 4 u slučaju kada se boja j pojavi u čvoru v_i , a boja i u čvoru v_j .

- **Pojavljivanje dodatnih boja $\{\Delta+1, \dots, \Delta+k\}$:** Pošto dodatne boje nisu iskorišćene ni na jednoj grani prvog nivoa incidentnoj sa korenom v , one ne mogu stvoriti dvobojne puteve sa osnovnim bojama. Prema tome, svaka od k dodatnih boja se bezbedno može pojaviti po jednom

kod svakog od Δ čvorova drugog nivoa. Zbog toga, k dodatnih boja mogu da pokriju najviše $k \cdot \Delta$ grana drugog nivoa.

Da bi sve $\Delta(\Delta - 1)$ grane drugog nivoa bile uspešno obojene, ukupan kapacitet osnovnih i dodatnih boja mora zadovoljavati nejednakost:

$$\frac{\Delta(\Delta - 1)}{2} + k \cdot \Delta \geq \Delta(\Delta - 1).$$

Nakon deljenja sa Δ , sređivanjem dobijamo da za broj dodatnih boja važi $k \geq \frac{\Delta-1}{2}$. Zbog toga je ukupan broj boja $\Delta + k$ ograničen odozdo sa:

$$\Delta + k \geq \Delta + \frac{\Delta - 1}{2} = \frac{3\Delta - 1}{2}.$$

Budući da broj boja mora biti celobrojna vrednost, dobijamo:

$$\chi'_{st}(T) \geq \left\lceil \frac{3\Delta - 1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{3\Delta}{2} \right\rfloor.$$

Time je dokazano da je gornja granica $\lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$ zaista oštra i ne može se dalje poboljšati.

Nakon što smo dokazali oštrinu granice, dokazaćemo da se svako proizvoljno stablo T sa maksimalnim stepenom Δ može zvezdasto obojiti korišćenjem najviše $\lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$ boja. Neka je $C = \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor\}$ skup raspoloživih boja. Najpre ćemo formulisati algoritam koji konstruiše preslikavanje bojenja c , a zatim dokazati da tako dobijeno bojenje ne sadrži dvobojne puteve dužine 4. Neka je T proizvoljno stablo sa maksimalnim stepenom Δ . Izaberemo proizvoljan čvor $v \in V(T)$ i proglasimo ga korenom stabla. Radi jednostavnije formulacije algoritma bojenja, svim čvorovima čiji je stepen veći od 1 možemo formalno dodati pomoćne grane i nove listove, tako da stepen svakog takvog čvora postane tačno Δ . Nakon ove modifikacije, svaki čvor u stablu T ima stepen 1 (ukoliko je list) ili Δ . Jasno je da ukoliko konstruišemo zvezdasto bojenje za tako dopunjeno stablo, ono ostaje važeće i nakon uklanjanja pomoćnih grana.

Za svaki čvor $u \in V(T)$, njegove susede označavamo sa $n_0(u), n_1(u), \dots, n_{\Delta-1}(u)$. Pri tome, za sve čvorove osim korena ($u \neq v$), uvek uzimamo

da je $n_0(u)$ njegov roditelj u odnosu na koren v , dok su preostali susedi $n_1(u), \dots, n_{\Delta-1}(u)$ deca čvora u .

Dalje, sa $t(u)$ označavamo jedinstveni indeks i za koji važi $u = n_i(n_0(u))$, što zapravo predstavlja redni broj čvora u u skupu dece njegovog roditelja $n_0(u)$. Konačno, sa $C(u)$ označavamo skup boja koje su u posmatranom trenutku dodeljene granama incidentnim sa čvorom u .

Bojenje grana vršimo po nivoima, počevši od korena v i krećući se naniže ka listovima:

- Najpre bojimo Δ grana incidentnih sa korenom v , tako što im dodeljujemo prvih Δ osnovnih boja iz skupa C :

$$c(vn_i(v)) = i + 1, \quad \text{za } i = 0, 1, \dots, \Delta - 1.$$

- Pretpostavimo da su sve grane do nivoa $k - 1$ obojene. Neka je u čvor na nivou k čije grane ka njegovoj deci još nisu obojene. Posmatrajmo njegovog roditelja $n_0(u)$. Sa roditeljem je incidentno tačno Δ grana, pa njegov skup iskorišćenih boja $C(n_0(u))$ sadrži Δ elemenata. Skup boja koje nisu iskorišćene na granama incidentnim sa roditeljem $n_0(u)$ označavamo sa $C'(n_0(u)) = C \setminus C(n_0(u))$, pri čemu je kardinalnost ovog skupa jednaka:

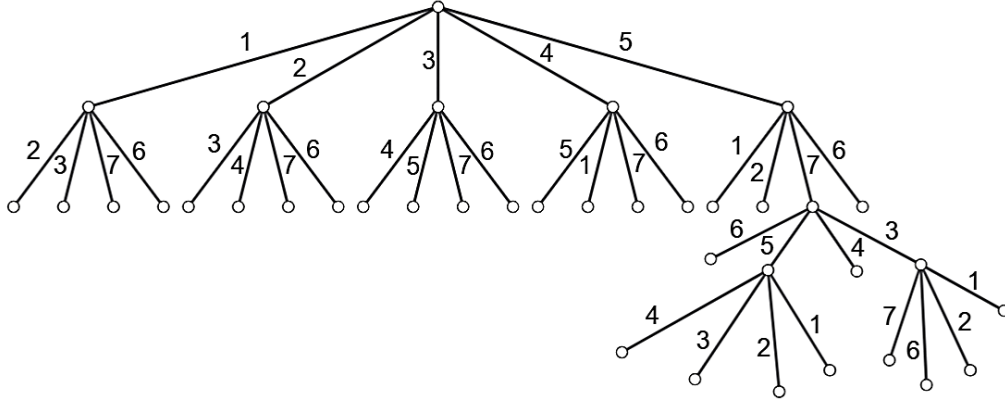
$$|C'(n_0(u))| = |C| - |C(n_0(u))| = \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta \right\rfloor - \Delta = \left\lfloor \frac{\Delta}{2} \right\rfloor.$$

Bojenje grana $un_i(u)$ incidentnih sa čvorom u vršimo na sledeći način:

- Poslednjim $\lfloor \Delta/2 \rfloor$ granama čvora u , odnosno granama $un_{\Delta-i}(u)$ za $i = 1, \dots, \lfloor \Delta/2 \rfloor$, dodeljujemo proizvoljne različite boje iz skupa neiskorišćenih boja $C'(n_0(u))$.
- Preostalo je obojiti još $\lceil \Delta/2 \rceil - 1$ grana čvora u .
Za $i = 1, \dots, \lceil \Delta/2 \rceil - 1$, boju grane $un_i(u)$ biramo iz skupa boja incidentnih sa roditeljem $C(n_0(u))$ po formuli:

$$c(un_i(u)) = c(n_0(u)n_j(n_0(u))), \quad \text{gde je } j = (t(u)+i) \bmod \Delta. \quad (*)$$

Primer opisanog algoritma prikazan je na slici 4. Ovim postupkom obojene su sve grane u stablu T .



Slika 4: Primer zvezdastog bojenja stabla sa maksimalnim stepenom $\Delta = 5$.

Očigledno je da grane incidentne sa istim čvorom dobijaju međusobno različite boje. Da bismo dokazali da je c zvezdasto bojenje, preostaje da utvrdimo da u stablu T ne postoji dvobojni put P_5 .

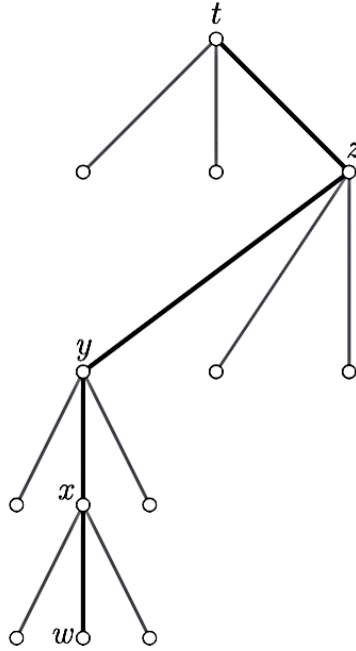
Pretpostavimo suprotno, da postoji dvobojni put $P = wxyz$ dužine 4, sa naizmeničnim bojama:

$$c(xw) = c(yz) \quad \text{i} \quad c(xy) = c(tz).$$

Kao što je prikazano na slici 5, bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da se čvor w nalazi na većoj udaljenosti od korena nego čvor z , tj. $d(v, w) > d(v, z)$. Iz strukture stabla i našeg algoritma sledi da je $y = n_0(x)$ roditelj čvora x , $w = n_i(x)$ neko dete čvora x ($i > 0$), a $z = n_j(y)$ roditelj ili dete čvora y ($j \geq 0$).

Iz jednakosti boja $c(xn_i(x)) = c(n_0(x)n_j(n_0(x)))$, na osnovu pravila bojenja (*), sledi da mora važiti relacija $j = (t(x) + i) \bmod \Delta$, gde je po konstrukciji algoritma indeks i ograničen na:

$$1 \leq i \leq \left\lceil \frac{\Delta}{2} \right\rceil - 1. \quad (1)$$



Slika 5: Mogući raspored čvorova pretpostavljenog dvobojnog puta P_5 u stablu T .

Sada analiziramo dve moguće vrednosti za indeks j :

- **Slučaj 1:** $j = (t(x) + i) \bmod \Delta = 0$. Ovo znači da je $i + t(x) = \Delta$. Kako je u ovom slučaju $z = n_0(y)$ zapravo roditelj čvora y , iz druge jednakosti boja $c(zx) = c(yx)$, primenom pravila (*), sledi da za indeks $t(x)$ mora važiti analogno ograničenje:

$$1 \leq t(x) \leq \left\lceil \frac{\Delta}{2} \right\rceil - 1. \quad (2)$$

Sabiranjem relacija (1) i (2) i korišćenjem činjenice da je $i + t(x) = \Delta$, dobijamo:

$$\Delta = i + t(x) \leq 2 \left\lceil \frac{\Delta}{2} \right\rceil - 2 < \Delta,$$

što predstavlja očiglednu kontradikciju.

- **Slučaj 2:** $j > 0$. U ovom slučaju $y = n_0(z)$ je roditelj čvora z . Iz jednakosti boja $c(yx) = c(zt)$, odnosno $c(n_0(z)n_{t(x)}(n_0(z))) = c(zn_\ell(z))$, prema formuli (*), važi da je $t(x) = (t(z) + \ell) \bmod \Delta$, pri čemu za indeks ℓ važi:

$$1 \leq \ell \leq \left\lceil \frac{\Delta}{2} \right\rceil - 1. \quad (3)$$

Zamenom $t(z) = j = (t(x) + i) \bmod \Delta$ u prethodni izraz, dobijamo $t(x) = (t(x) + i + \ell) \bmod \Delta$, odakle direktno sledi da je $i + \ell = \Delta$. Sabiranjem relacija (1) i (3), ponovo dobijamo kontradikciju:

$$\Delta = i + \ell \leq 2 \left\lceil \frac{\Delta}{2} \right\rceil - 2 < \Delta.$$

Kako u oba slučaja dolazimo do kontradikcije, zaključujemo da je pretpostavka o postojanju dvobojnog puta P_5 bila pogrešna. Prema tome, konstruisano preslikavanje c predstavlja zvezdasto bojenje grana stabla T sa $\lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$ boja, čime je teorema u potpunosti dokazana. $\square$

4.2 Supkubni grafovi

Nakon razmatranja kompletnih grafova kao primera grafova visoke povezanosti i velikog stepena čvorova, prirodno se nameće pitanje ponašanja zvezdastog hromatskog indeksa na klasama grafova sa ograničenim maksimalnim stepenom Δ . Posebno značajnu i široko proučavanu klasu grafova čine supkubni grafovi, kod kojih je stepen svakog čvora najviše 3.

Pre nego što pređemo na dokazivanje gornjih granica za ovu klasu, dokazaćemo lemu za zvezdasti hromatski indeks kontura koja će nam biti od značaja u nastavku.

Lema 4.1. Neka je C_n kontura sa n čvorova. Tada za njen zvezdasti hromatski indeks važi:

$$\chi'_{st}(C_n) = \begin{cases} 4, & n = 5, \\ 3, & n \neq 5. \end{cases}$$

Dokaz. Dokazaćemo najpre da kontura C_5 ne dopušta zvezdasto 3-bojenje, odnosno da je $\chi'_{st}(C_5) \geq 4$. Pretpostavimo suprotno, da postoji zvezdasto 3-bojenje konture C_5 .

Kako kontura C_5 ima 5 grana, a na raspolaganju su samo 3 boje, bar jedna boja mora biti dodeljena dvema ili više grana. Bez umanjenja opštosti, neka se boja 1 pojavljuje bar dva puta.

U konturi C_5 , rastojanje između bilo koje dve grane iznosi najviše 2. Ako bi dve grane imale istu boju (boju 1), one ne mogu biti susedne jer bi to narušilo pravilno bojenje. Dakle, moraju se nalaziti na rastojanju 2, što znači da je između njih tačno jedna grana obojena nekom drugom bojom (recimo bojom 2). Preostale 2 grane konture moraju biti obojene preostalim dvema bojama ($\{2, 3\}$). Time se u konturi stvara dvobojni put dužine 4, što je u suprotnosti sa definicijom zvezdastog bojenja, pa važi $\chi'_{st}(C_5) \geq 4$.

Sa druge strane, ako grane konture C_5 redom obojimo bojama 1, 2, 3, 4, 2, dobijamo pravilno zvezdasto bojenje sa 4 boje, odakle sledi da je $\chi'_{st}(C_5) = 4$.

Pokazaćemo sada da se za sve konture C_n ($n \neq 5$) može konstruisati zvezdasto bojenje sa tri boje (recimo $\{1, 2, 3\}$):

- Za konture dužine $n \in \{3, 4\}$, kao i za one čija je dužina deljiva sa 3, pronalaženje ovakvog bojenja je trivijalno.
- Ukoliko je $n \equiv 1 \pmod{3}$ i $n > 5$, boje možemo rasporediti po periodičnom šablonu:

$$1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3.$$

- Slično, ako je $n \equiv 2 \pmod{3}$ i $n > 5$, koristi se šablon:

$$1, 2, 1, 3, 2, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3.$$

Ovim je dokazano da je $\chi'_{st}(C_n) = 3$ za sve $n \neq 5$.

□

U narednoj teoremi navodimo ključne rezultate koji daju gornju i donju granicu za klasu supkubnih grafova.

Teorema 4.2. (a) Ako je G supkubni multigraf bez petlji, tada je $\chi'_{st}(G) \leq 7$.
(b) Ako je G kubni graf, tada je $\chi'_{st}(G) \geq 4$, pri čemu jednakost važi ako i samo ako G prekriva graf trodimenzionalne kocke.

Pre nego što dokažemo gornje granice iz teoreme 4.2., dokazaćemo tehniku pomoćnu lemu. Ova lema nam omogućava da zvezdasto bojenje grafa konstruišemo induktivno, deljenjem grafa na manje indukovane podgrafove i dodavanjem prelaznih grana bez narušavanja uslova zvezdastog bojenja.

Lema 4.2. Neka je $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dato k -bojenje grana grafa G .

- (a) Neka je e proizvoljna grana grafa G . Pretpostavimo da je restrikcija preslikavanja f na skup grana $E(G) \setminus \{e\}$ zvezdasto bojenje grana podgraфа $G - e$. Ako je boja grane e različita od boje bilo koje grane $e' \in E(G) \setminus \{e\}$ za koju važi $d(e, e') \leq 2$ (gde $d(e, e')$ označava rastojanje između grana e i e' u linijskom grafu $L(G)$), tada je f zvezdasto bojenje grana grafa G .
- (b) Neka je $A \subset V(G)$ proizvoljan podskup čvorova grafa G , neka skup $B = V(G) \setminus A$ predstavlja njegov komplement, i neka je X skup svih onih grana grafa G koje spajaju po jedan čvor iz skupa A i skupa B .

Pretpostavimo da važe sledeći uslovi:

- (1) Restrikcija bojenja f na indukovani podgraf $G[A]$ je zvezdasto bojenje;
- (2) Restrikcija bojenja f na indukovani podgraf $G[B]$ je zvezdasto bojenje;
- (3) Nijedne dve različite grane $e_1, e_2 \in X$ ne dele zajednički čvor u skupu A , niti imaju zajedničku susednu granu u podgrafu $G[A]$;
- (4) Za svaku granu $e \in X$ i svaku granu $e' \in E(G[B]) \cup X$ takvu da je $d(e, e') \leq 2$, važi $f(e) \neq f(e')$ (pri čemu se rastojanje $d(e, e')$ meri u podgrafu $G[B \cup A]$ određenom skupom grana $E(G[B]) \cup X$);
- (5) Za svaku granu $e \in X$ i svaku granu $e' \in E(G[A])$, važi $f(e) \neq f(e')$.

Tada je f zvezdasto bojenje grana grafa G .

U primenama, struktura grafa G je nepoznata, pa iz njega izdvajamo mali, poznati indukovani podgraf $G[A]$, dok ostatak $B = V(G) \setminus A$ posmatramo kao nepoznat. Skup grana X predstavlja mostove koji povezuju ova dva dela. Pretpostavljamo da već imamo zvezdasto bojenje za $G[A]$ i $G[B]$, a cilj je obojiti grane iz X . Da bismo izbegli eksplicitno merenje rastojanja između grana iz X i grana iz A kroz nepoznati blok B , uvodimo uslov (5): nijedna grana iz X ne sme deliti istu boju sa bilo kojom granom iz A . Iako stroži, ovaj uslov eliminiše potrebu za poznavanjem geometrije ostatka grafa B i omogućava direktnu primenu indukcije.

Dokaz leme 4.2. (a) Budući da je restrikcija preslikavanja f na skup $E(G) \setminus \{e\}$ zvezdasto bojenje grana podgraфа $G - e$, po definiciji sledi da unutar $G - e$ ne postoji dvobojni put dužine 4 (kao ni dvobojna kontura dužine 4). Pretpostavimo suprotno, da u celom grafu G postoji dvobojni put (ili kontura) P dužine 4 koji sadrži granu e . U tom slučaju, put P mora sadržati još bar jednu granu e' , koja je obojena istom bojom kao i grana e , pri čemu važi $d(e, e') \leq 2$. Međutim, ovo direktno protivreči polaznoj pretpostavci da je $f(e) \neq f(e')$ za svako e' za koje je $d(e, e') \leq 2$. Dakle, f je zvezdasto bojenje grana grafa G .

(b) Iz uslova (3), (4) i (5) sledi da za svaku prelaznu granu $e \in X$ i svaku granu celog grafa $e' \in E(G)$ važi: ako je $d(e, e') \leq 2$, tada je $f(e) \neq f(e')$. To nam omogućava da sukcesivno primenjujemo deo (a), počevši od grafa $G[A] \cup G[B]$ i dodajući jednu po jednu granu iz skupa X .

□

Dokaz teoreme 4.2. (a) Pretpostavimo suprotno, odnosno da je G supkuban graf sa minimalnim brojem grana za koji važi $\chi'_{st}(G) > 7$. Svaki supkuban graf sa strogo manjim brojem grana od G može se uspešno zvezdasto obojiti sa najviše 7 boja. U nastavku ćemo najpre dokazati nekoliko svojstava grafa G , kao što su povezanost i odsustvo određenih malih podgrafova. Ova svojstva će nam na kraju omogućiti da konstruišemo traženo zvezdasto 7-bojenje grana tako što ćemo graf G rastaviti na familiju kontura povezanih putevima dužine 1 ili 2.

Najpre, graf G mora biti povezan. Ukoliko bi graf G bio nepovezan, sastojao bi se od dve ili više komponenti povezanosti. S obzirom na to da svaka od tih komponenti pojedinačno ima strogo manje grana od grafa G , zbog pretpostavke o minimalnosti kontraprimera svaka komponenta bi se mogla

zvezdasto obojiti sa najviše 7 boja. Unija tih bojenja bi tada činila zvezdasto 7-bojenje celog grafa G , što je u kontradikciji sa izborom grafa G .

Pokazujemo sada da graf G ne sadrži mostove. Pretpostavimo suprotno, da u grafu G postoji most xy . Neka su G_x i G_y komponente grafa $G - xy$ koje sadrže čvorove x i y , respektivno. Kako obe komponente G_x i G_y imaju manje grana od početnog grafa G , prema pretpostavci o minimalnosti, za njih postoje zvezdasta 7-bojenja grana.

Pošto je graf G supkuban, u podgrafu G_x (nakon uklanjanja grane xy), čvor x može imati najviše dva suseda. Svaki od tih suseda može imati najviše dve preostale incidentne grane. Zbog toga unutar podgraфа G_x postoji najviše šest grana koje su incidentne sa susedima čvora x . Budući da nam je na raspolaganju ukupno 7 boja, permutacijom boja možemo postići da boja 7 ne bude iskorišćena ni na jednoj od tih grana u podgrafu G_x . Analogno, permutacijom boja u podgrafu G_y možemo obezbediti da boja 7 ne bude upotrebljena ni na jednoj grani incidentnoj sa susedima čvora y .

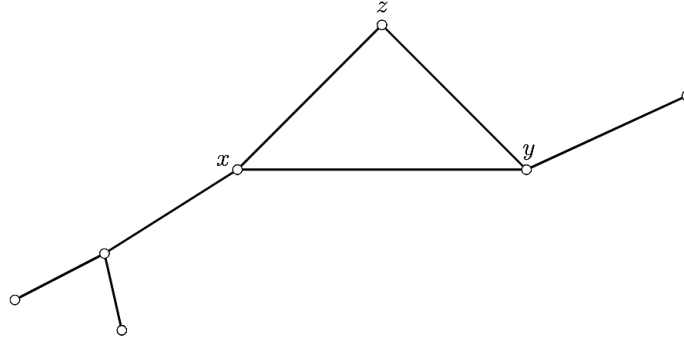
Ako sada ponovo spojimo komponente i granu xy obojimo upravo bojom 7, to neće narušiti pravila zvezdastog bojenja. Time bismo dobili zvezdasto 7-bojenje celog grafa G , što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom da je $\chi'_{st}(G) > 7$. Iz ovog zaključujemo da graf G ne može sadržati mostove.

Sledeće svojstvo koje dokazujemo je da graf G ne može da sadrži put $wxyz$ u kome su središnji čvorovi x i y stepena 2. Pretpostavimo suprotno, da takav put postoji u G . Posmatrajmo podgraf $G - xy$ koji nastaje uklanjanjem grane xy . Na osnovu pretpostavke o minimalnosti kontraprimera, graf $G - xy$ se može zvezdasto obojiti sa 7 boja. Ovo bojenje možemo proširiti na celokupan graf G primenom leme 4.2.(a), ukoliko za granu xy izaberemo boju koja se ne pojavljuje ni na jednoj grani na rastojanju najviše 2 od nje. Budući da su u polaznom grafu čvorovi x i y stepena 2, u podgrafu $G - xy$ čvor x je incidentan samo sa čvorom w , a čvor y samo sa čvorom z . To znači da su jedine grane na rastojanju najviše 2 od grane xy zapravo one grane koje su incidentne sa čvorovima w ili z . Kako je graf supkuban, takvih grana u okolini ima najviše šest. S obzirom na to da imamo na raspolaganju 7 boja, uvek možemo izabrati bar jednu slobodnu boju za granu xy koja se ne pojavljuje na tim granama. Time direktno ispunjavamo uslov leme 4.2.(a), što nam omogućava da graf G zvezdasto obojimo sa 7 boja, a to je u kontradik-

ciji sa polaznom pretpostavkom o minimalnosti kontraprimera. Kao direktnu posledicu ovog zaključka dobijamo da graf G ne može biti obična kontura.

Pretpostavimo da graf G sadrži čvor z stepena 2 čiji su susedi x i y susedni (odnosno, čvorovi x, y, z formiraju konturu dužine 3). Posmatrajmo podgraf $G - xz$ koji nastaje uklanjanjem grane xz . Prema pretpostavci o minimalnosti kontraprimera, podgraf $G - xz$ dopušta zvezdasto 7-bojenje grana. Kako je graf G supkuban, u podgrafu $G - xz$ možemo precizno prebrojati sve grane koje se nalaze na rastojanju ne većem od 2 od pozicije uklonjene grane xz . Kao što je prikazano na slici 6, te grane obuhvataju:

- grane unutar same konture (xy i yz),
- najviše jednu granu iz čvora x i najviše jednu granu iz čvora y koje vode ka ostatku grafa,
- najviše dve grane koje izlaze iz spoljašnjeg suseda čvora x .



Slika 6: Okolina grane xz na rastojanju $d \leq 2$ unutar konture dužine 3.

Dakle, u okolini grane xz na rastojanju najviše 2 postoji najviše šest grana. Njenim bojenjem, na osnovu leme 4.2.(a), dobijamo zvezdasto 7-bojenje celog grafa G , što direktno protivreči minimalnosti kontraprimera. Iz ovoga zaključujemo da susedi bilo kog čvora stepena 2 u grafu G ne mogu biti međusobno susedni.

Pretpostavimo dalje da graf G sadrži paralelne grane. Ukoliko bi između neka dva čvora postojale tri paralelne grane, te tri grane bi, zbog supkubnosti

grafa G , čine celokupan graf. Zbog toga pretpostavimo da u G postoje tačno dve paralelne grane između čvorova u i v . Kako se grafovi sa najviše tri čvora trivijalno zvezdasto boje sa najviše 7 boja, možemo pretpostaviti da G ima veći broj čvorova. Budući da je graf G povezan i bez mostova, čvorovi u i v moraju imati spoljašnje susede u' i v' , respektivno, pri čemu važi $u' \neq v'$. Na osnovu induktivne pretpostavke, podgraf $G - u - v$ dopušta zvezdasto 7-bojenje grana. Ovo bojenje najpre proširujemo na grane uu' i vv' . Kako se u okolini svake od njih na rastojanju najviše 2 nalazi najviše šest već obojenih grana, izbor slobodne boje za uu' i vv' je uvek garantovan.

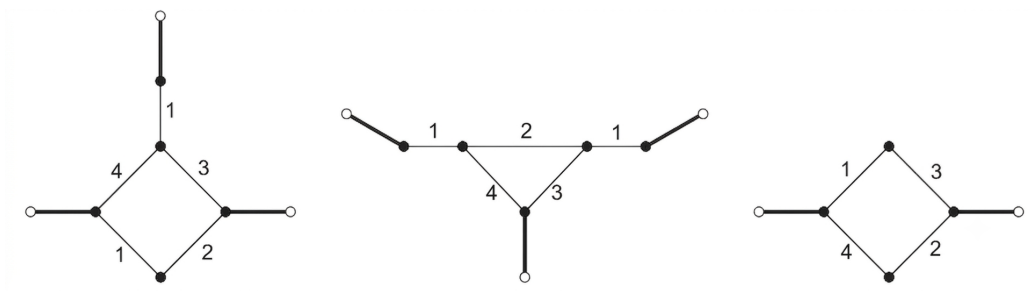
Sada razlikujemo dva slučaja u zavisnosti od dodeljenih boja:

- **Slučaj 1:** Grane uu' i vv' su obojene različitim bojama, recimo a i b . U ovom slučaju, za dve paralelne grane između u i v dovoljno je odabrati bilo koje dve preostale različite boje koje su pritom različite od a i b .
- **Slučaj 2:** Grane uu' i vv' su obojene istom bojom. Tada u okolini dve paralelne grane na rastojanju najviše 2 postoji najviše pet različitih boja. Zbog toga ponovo možemo primeniti lemu 4.2.(a), koja nam garantuje pronalaženje ispravnih boja za paralelne grane.

U oba slučaja dolazimo do kontradikcije sa polaznom pretpostavkom o minimalnosti kontraprimera, iz čega zaključujemo da graf G ne sadrži paralelne grane.

U nastavku pretpostavimo da graf G sadrži neki od podgrafova prikazanih na slici 7 kao svoj podgraf. Pritom, ostale grane grafa G mogu se vezivati za taj podgraf isključivo u čvorovima koji su na slici označeni praznim kružićima, uz mogućnost da se neki od tih praznih čvorova u celom grafu zapravo poklapaju.

U ovom koraku iskoristićemo lemu 4.2.(b). Neka je A skup čvorova posmatranog podgrafova koji su na slici označeni punim kružićima, i neka je X skup istaknutih podebljanih grana koje povezuju ove unutrašnje čvorove sa ostatkom grafa. Posmatrajmo podgraf $G[B]$ koji nastaje uklanjanjem skupa čvorova A i grana X . Na osnovu induktivne pretpostavke, podgraf $G[B]$ dopušta



Slika 7: Podgrafovi koji se ne mogu naći u minimalnom kontraprimeru.

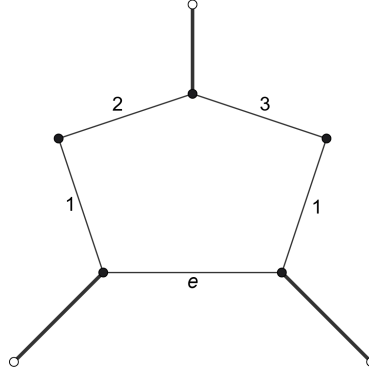
zvezdasto 7-bojenje grana.

Ovo bojenje najpre proširujemo na prelazne grane iz skupa X . Kako se u okolini svake od ovih grana na rastojanju ne većem od 2 nalazi najviše šest već obojenih grana iz podgrafa $G[B]$, za svaku od njih možemo izabrati slobodnu boju. Bez umanjenja opštosti, odgovarajućom permutacijom boja u celom grafu možemo postići da skup boja iskorišćenih na granama iz X bude podskup skupa $\{5, 6, 7\}$.

Za bojenje preostalih grana unutar skupa A koristimo fiksna bojenja koja su eksplicitno prikazana na slici 7. Primetimo da ova bojenja unutrašnjih grana koriste isključivo paletu boja $\{1, 2, 3, 4\}$. Budući da su skupovi boja prelaznih grana i unutrašnjih grana potpuno disjunktni, ovim su ispunjeni svi uslovi leme 4.2.(b). Na osnovu nje, sukcesivnim dodavanjem grana dobijamo zvezdasto 7-bojenje celokupnog grafa G , što je u direktnoj kontradikciji sa minimalnošću kontraprimera. Prema tome, nijedan od ova tri podgrafa ne može se naći u grafu G .

Sada pretpostavimo da graf G sadrži strukturu prikazanu na slici 8 kao svoj podgraf. Neka je A skup čvorova posmatranog petougla, a X skup od tri istaknute podebljane grane koje ga povezuju sa ostatkom grafa. Pokazaćemo da se primenom leme 4.2.(b) na podgraf $G - e$ može konstruisati zvezdasto 7-bojenje tog podgrafa, koje se potom primenom leme 4.2.(a) proširuje na granu e , a samim tim i na ceo graf G .

Neka je $G[B]$ podgraf koji nastaje uklanjanjem skupa čvorova A i grana X . Kako je G minimalni kontraprimer, podgraf $G[B]$ je manji od G , pa na osno-



Slika 8: Podgraf koji se ne može naći u minimalnom kontraprimeru.

vu induktivne pretpostavke dopušta zvezdasto 7-bojenje. Ovo bojenje potom proširujemo na prelazne grane iz skupa X , tako da svaka grana iz X dobije boju različitu od svih grana u svojoj okolini u $G[B] \cup X$ na rastojanju najviše 2. Budući da svaka grana iz skupa X u svojoj okolini unutar $G[B] \cup X$ na rastojanju najviše 2 ima najviše šest već obojenih grana, za svaku od njih možemo izabrati slobodnu boju.

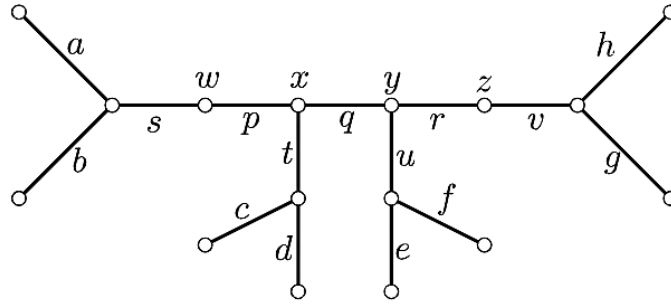
Posmatrajmo sada okolinu uklonjene grane e . Unutar do sada obojenog podgrafa $G[B] \cup X$, na rastojanju ne većem od 2 od grane e nalazi se najviše šest grana. Kako na raspolaganju imamo ukupno 7 boja, osigurano je da postoji bar jedna slobodna boja, označimo je sa Γ , koja nije iskorišćena u toj okolini. Ovu boju Γ rezervišemo za naknadno bojenje grane e .

Sada primenjujemo lemu 4.2.(b) kako bismo dobili zvezdasto 7-bojenje grana podgrafa $G - e$. Za bojenje unutrašnjih grana u $G[A]$ koristimo fiksno lokalno bojenje prikazano na slici 8. Odgovarajućom permutacijom boja uvek možemo postići da rezervisana boja Γ ne pripada skupu boja $\{1, 2, 3\}$ koje su iskorišćene na slici, kao i da se nijedna od boja 1, 2 i 3 ne pojavljuje na prelaznim granama iz skupa X . Ovim su svi uslovi leme 4.2.(b) ispunjeni, pa dobijamo pravilno zvezdasto 7-bojenje podgrafa $G - e$.

Na samom kraju, primenom leme 4.2.(a), vraćamo granu e u graf i dodeljujemo joj sačuvanu boju Γ . Pošto boja Γ po konstrukciji nije iskorišćena na rastojanju najviše 2 od grane e , ovo bojenje se uspešno proširuje na ceo

graf G . Dobijanje zvezdastog 7-bojenja grana celokupnog grafa G eliminiše mogućnost postojanja ovakvog kontraprimera, odatle zaključujemo da graf G ne može sadržati posmatranu strukturu kao svoj podgraf.

Kao poslednju redukciju u ovom delu, pokažaćemo da graf G ne može da sadrži put $wxyz$ u kojem su krajnji čvorovi w i z stepena 2. Ukoliko bi graf G sadržao takav put, posmatrali bismo podgraf $H = G - w - x - y - z$. Prema induktivnoj pretpostavci, podgraf H dopušta zvezdasto 7-bojenje, a u nastavku ćemo opisati kako se to bojenje može proširiti na ceo graf G . Grane ćemo označavati na način prikazan na slici 9, pri čemu ćemo istim slovom označavati i samu granu i njoj dodeljenu boju.



Slika 9: Konfiguracija puta $wxyz$.

Možemo pretpostaviti da su svi čvorovi na putu $wxyz$, kao i svi njihovi susedi, međusobno različiti. U suprotnom, graf G bi sadržao neku od struktura koje smo već eliminisali - podgrafove sa slike 7 i slike 8, trougao sa čvorom stepena 2, paralelne grane ili dva susedna čvora stepena 2. S druge strane, može se dogoditi da neke spoljašnje grane (na primer s i u) dele zajedničku susednu granu u grafu H . To nema uticaja na dokaz.

Budući da grane a, b, c, d, e, f, g, h pripadaju podgrafu H , one su već obojene. Slično kao u prethodnim koracima, najpre biramo boje za grane s, t, u, v tako da nijedna od njih ne deli boju sa granama iz podgraфа $G - p - q - r$ koje se nalaze na rastojanju najviše 2. Kako imamo na raspolaganju 7 boja, ovaj korak je uvek izvodljiv.

Pretpostavka da su svi posmatrani čvorovi i njihovi susedi međusobno različiti garantuje da bilo koji put dužine 3 koji polazi od čvorova w, x, y ili z preko prelaznih grana s, t, u ili v i nastavlja se dalje u dubinu podgraфа H , ne može istovremeno da sadrži centralne grane p, q, r . Prema tome, na svakom takvom putu, prelazna grana (s, t, u ili v) i grana iz podgraфа H koja se nalazi na rastojanju tačno 2 od nje, čine sastavni deo tog puta. Budući da smo prilikom proširenja bojenja zahtevali da se boja svake prelazne grane razlikuje od boja svih grana iz H na rastojanju ne većem od 2, te dve grane garantovano ne mogu imati istu boju. To direktno onemogućava formiranje lošeg dvobojnog šablona na svim putevima dužine 4 koji se protežu dublje u podgraf H . Ovo svojstvo drastično smanjuje broj spornih slučajeva o kojima moramo voditi računa u nastavku dokaza. Svi potencijalni alternirajući putevi ili konture dužine 4 mogu se formirati isključivo lokalno, unutar centralnog dela koji direktno obuhvata grane p, q i r .

Sledeći korak je izbor boje za granu q , koju biramo tako da se njena boja razlikuje od boja grana c, d, e, f, t i u .

Sada razlikujemo nekoliko slučajeva u zavisnosti od odnosa boja dodeljenih granama s, q i v . Zbog simetrije dovoljno je posmatrati sledeća četiri slučaja:

- **Slučaj 1:** $s = 1, q = 2, v = 3$. U ovom slučaju, jedino je potrebno izbeći formiranje loših dvobojnih puteva $aspt, bspt, sptc, sptd$, kao i četiri njima simetrična puta u desnom delu strukture. Ako je grana t obojena bojom 1, boju grane p biramo tako da bude različita od svih boja iz skupa $\{1, 2, a, b, c, d\}$. Ukoliko je $t \neq 1$, dovoljno je obezbediti da se boja grane p razlikuje od boja grana s, q i t . Postupak za određivanje boje grane r je analogan.
- **Slučaj 2:** $s = 1, q = 1, v = 2$. Ovde važi $t \neq 1$, pa je potrebno eliminisati dvobojne puteve $aspq, bspq, spqr, spqu$, kao i puteve $urvh, urvg, eurv, furv$. Ako je grana u obojena bojom 2, granu r bojimo tako da njena boja bude različita od boja iz skupa $\{1, 2, e, f, g, h\}$. U suprotnom, dovoljno je da boja grane r bude različita od boja grana q, u, v . Nakon toga, boju grane p biramo tako da bude različita od boja iz skupa $\{a, b, 1, t, u, r\}$.
- **Slučaj 3:** $s = 1, q = 2, v = 1$. Ovaj slučaj se rešava na potpuno isti način kao slučaj 1.

- **Slučaj 4:** $s = 1, q = 1, v = 1$. Sada važi $t, u \neq 1$, pa su jedini potencijalno sporni putevi $aspq, bspq, spqr, pqr v, qrv g, qrv h$, kao i $spqu$ i $tqrv$. Da bismo ih izbegli, dovoljno je da boju grane p izaberemo tako da važi $p \notin \{1, a, b, t, u, r\}$, a boju grane r tako da važi $r \notin \{1, h, g, u, t, p\}$, što je zbog dovoljnog broja boja uvek moguće postići.

Ovim je dokazana tvrdnja da minimalni kontraprimer G ne može da sadrži put $wxyz$ čiji su krajnji čvorovi stepena 2 i završen deo dokaza koji se odnosi na redukcije grafa.

U nastavku ćemo konstruisati zvezdasto 7-bojenje grana oslanjajući se na prethodno dokazana svojstva pretpostavljenog minimalnog kontraprimera G . Na osnovu dosadašnjih redukcija, graf G zadovoljava sledeće uslove:

- ne sadrži mostove i čvorove stepena 1;
- ne sadrži put $wxyz$ u kojem su središnji čvorovi x i y stepena 2;
- ne sadrži čvor stepena 2 čiji su susedi međusobno povezani granom;
- ne sadrži paralelne grane;
- ne sadrži zabranjene podgrafove sa slike 7 i slike 8;
- ne sadrži put $wxyz$ u kojem su krajnji čvorovi w i z stepena 2.

Neka je G' graf dobijen od grafa G eliminacijom svih čvorova stepena 2. Svaki put xzy dužine 2, gde je z čvor stepena 2, u grafu G' zamenjujemo jednom granom xy . Direktno iz prethodno dokazanih svojstava grafa G (odsustva mostova, paralelnih grana, trouglova sa čvorom stepena 2 i kontura dužine 4 sa dva naspramna čvora stepena 2) sledi da je nakon supresije čvorova stepena 2 dobijeni graf G' prost, kubni graf bez mostova.

Na osnovu poznatog rezultata Kajzera i Šrekovskog [12], svaki prost kubni graf bez mostova G' sadrži savršen mečing M' tako da M' ne sadrži sve grane nijednog minimalnog 3-reza niti 4-reza.

Svaka grana iz grafa G' u polaznom grafu G odgovara ili jednoj originalnoj grani, ili putu dužine 2 (ukoliko je nastala supresijom čvora stepena 2). Na osnovu savršenog mečinga M' grafa G' , definišemo skup grana M grafa G .

Skup M se sastoji od svih onih grana grafa G koje odgovaraju granama iz M' . Za svaku granu $e' \in M'$, ukoliko e' odgovara jednoj grani u G , ta grana pripada skupu M , a ukoliko odgovara putu dužine 2, obe grane tog puta pripadaju skupu M .

Svrha ove konstrukcije je da se skup grana grafa G podeli na dva dela koji se mogu nezavisno bojiti različitim paletama boja. Budući da je M' savršeni mečing u kubnom grafu G' , nakon uklanjanja njegovih grana stepen svakog čvora u podgrafu $G' - M'$ opada sa 3 na tačno 2, što znači da preostale grane čine disjunktну uniju kontura. Ovo svojstvo se direktno prenosi i na polazni graf G , gde preostale grane iz skupa $E(G) \setminus M$ takođe formiraju disjunktну uniju kontura. To nam omogućava da problem podelimo na dva koraka: grane iz skupa M bojićemo sa četiri boje (recimo $\{4, 5, 6, 7\}$), dok ćemo preostale konture obojiti sa preostale tri boje (recimo $\{1, 2, 3\}$). Time se automatski sprečava formiranje dvobojnog puta dužine 4 koji bi kombinovao grane iz oba dela grafa.

Da bismo uspešno raspodelili prve četiri boje na grane skupa M tako da se izbegnu konflikti na rastojanjima manjim od 2, konstruišemo pomoćni graf K na sledeći način:

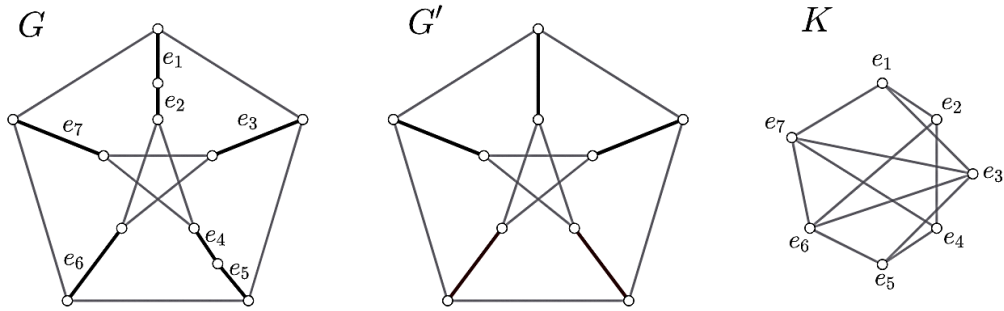
- Skup čvorova grafa K čine grane iz skupa M .
- Dva čvora $e, f \in V(K)$ su susedna u grafu K ako je ispunjen jedan od sledeća dva uslova:
 - grane e i f formiraju put dužine 2 u grafu G koji odgovara jednoj grani iz savršenog mečinga M' ,
 - u grafu G postoji treća grana (izvan skupa M) koja direktno spaja neki kraj grane e sa nekim krajem grane f .

Budući da je polazni graf G supkuban, svaka njegova grana može biti susedna sa najviše četiri druge grane. Iz definicije grafa K direktno sledi da nijedan njegov čvor ne može imati više od četiri suseda, odnosno važi $\Delta(K) \leq 4$. Takođe, ukoliko je graf K nepovezan, svaka njegova komponenta povezanosti sadrži bar jedan čvor stepena najviše 3.

Konstrukcija grafa K omogućava nam da problem bojenja grana u grafu G svedemo na pravilno bojenje čvorova. Ukoliko pronađemo pravilno bojenje

čvorova grafa K sa četiri boje tako da susedni čvorovi uvek imaju različite boje, to direktno rešava naš početni problem. Naime, pošto smo čvorove grafa K (koji su zapravo grane skupa M) povezali kad god se nalaze na rastojanju manjem od 2 u grafu G , različite boje susednih čvorova u K garantuju da će sve grane iste boje u grafu G biti na bezbednom rastojanju, odnosno nijedne dve grane skupa M koje dele istu boju neće se nalaziti na rastojanju manjem od 2.

Prema Bruksovoj teoremi, svaki graf K za koji važi $\Delta(K) \leq 4$ je 4-obojev, osim u slučaju kada sadrži komponentu povezanosti koja je izomorfna kompletnom grafu K_5 . Lako je videti da se ovaj izuzetan slučaj pojavljuje ako i samo ako važi $K = K_5$ i $G = G'$. Jedan opšti primer ove konstrukcije, gde graf K nije izomorfan kompletnom grafu K_5 , prikazan je na slici 10. Pošto u ovom slučaju nemamo situaciju da je svaka grana iz M na rastojanju manjem od 2 sa svim ostalim granama tog skupa, graf K ne sadrži sve moguće grane. Samim tim, on nije kompletan graf, pa je prema Bruksovoj teoremi garantovano 4-obojev, što nam omogućava da uspešno raspodelimo prve četiri boje bez ikakvih konflikata.



Slika 10: Ilustracija polaznog grafa G , kubnog grafa G' sa savršenim mečinjom M' i odgovarajućeg pomoćnog grafa K .

Razmotrimo najpre situaciju kada pomoćni graf K dopušta pravilno 4-bojenje čvorova. Primetimo da nam u ovom slučaju uopšte neće biti potrebna činjenica da mečinj M' ne sadrži sve grane nijednog minimalnog 3-reza ili 4-reza. Pravilno bojenje čvorova grafa K sa četiri boje direktno određuje bojenje grana skupa M , sa osobinom da svaka klasa boja predstavlja indukovani me-

čing u polaznom grafu G .

Naš plan je da preostale grane iz podgrafa $G - M$ zvezdasto obojimo sa tri preostale boje. Ukoliko to uspe, proširenjem ovog bojenja pomoću četiri boje već iskorišćene na skupu M , dobićemo zvezdasto 7-bojenje celog grafa G . Naime, pošto su palete boja potpuno razdvojene, nijedna od četiri boje sa grana skupa M ne može učestvovati u formiranju lošeg dvobojnog puta dužine 4 ili dvobojne konture. Prema tome, problem se svodi na pronalaženje zvezdastog 3-bojenja grana podgrafa $G - M$.

Kao što smo ranije ustanovili, $G - M$ predstavlja uniju disjunktних kontura. Na osnovu leme 4.1., svaka k -kontura gde je $k \neq 5$ dopušta zvezdasto 3-bojenje grana sa 3 boje.

Dakle, jedini preostali izazov jesu konture dužine 5. Da bismo rešili ovaj problem, u svakoj 5-konturi C izabraćemo jednu specifičnu granu $e = e_C$ i dodeliti joj boju $\gamma = \gamma_C$, koja je zapravo jedna od četiri boje prvobitno rezervisane isključivo za skup M . Preostali put dužine 4 (koji dobijamo kao $C \setminus \{e\}$) tada možemo bezbedno obojiti standardnim nizom boja 1, 2, 3, 1.

Ključno je da granu e i njenu „pozajmljenu” boju γ izaberemo tako da se u skupu M ne nalazi nijedna grana boje γ koja je od grane e na rastojanju manjem ili jednakom 2. U nastavku ćemo detaljno pokazati da je ovakav izbor uvek moguć. Pravilan izbor ove boje, uz činjenicu da je ostatak grafa K ispravno obojen, garantuje da nijedan put dužine 4 niti kontura dužine 4 neće postati dvobojni.

Definišemo sledeće skupove grana:

- Neka je F skup svih onih grana iz M koje su incidentne sa nekim čvorom konture C , ali same ne pripadaju toj konturi.
- Neka je X skup (koji može biti i prazan) grana iz M koje su susedne sa nekom granom iz skupa F .

Primetimo da kardinalnost skupa $|X|$ zapravo predstavlja broj puteva dužine 2 u skupu M koji su susedni sa konturom C . S obzirom na to da graf G po pretpostavci ne sadrži put dužine 3 čiji su svi unutrašnji čvorovi stepena 2, direktno sledi da važi ograničenje $|X| \leq 2$. U zavisnosti od rasporeda boja

na granama skupa F , razlikovaćemo dva glavna slučaja koja pokrivaju sve mogućnosti, izuzev same permutacije boja.

- **Slučaj 1.** Na granama skupa F se u nekom redosledu pojavljuju boje 4, 4, 5, 6 i 7 (odnosno, jedna boja se javlja dvaput, dok se preostale tri javljaju po jednom). Ukoliko je $X = \emptyset$, imamo na raspolaganju tri različita izbora za granu e : za svaku od boja $\gamma \in \{5, 6, 7\}$, možemo izabrati onu granu konture C koja se nalazi tačno naspram grane iz F obojene bojom γ . S druge strane, ukoliko skup X nije prazan, grane koje mu pripadaju mogu se nalaziti na rastojanju 2 od nekih od ovih potencijalnih grana konture C . Međutim, kako smo prethodno utvrdili da skup X sadrži najviše dve grane, te grane mogu eliminisati najviše dva izbora, pa nam čak i u najgorem slučaju preostaje bar jedna slobodna boja iz skupa $\{5, 6, 7\}$ za granu e .
- **Slučaj 2.** Na granama skupa F se u nekom redosledu pojavljuju boje 4, 4, 5, 5 i 6. U situaciji kada je skup X prazan, problem je trivijalan: nijedna grana u okolini konture ne koristi boju 7, pa bilo koju od pet grana konture C možemo izabrati za granu e i obojiti je bojom 7. Ukoliko skup X nije prazan, moramo voditi računa o njegovim elementima. Svaka pojedinačna grana iz skupa X može biti na rastojanju 2 od najviše dve grane konture C . Budući da skup X ima najviše dve grane, one ukupno mogu ugroziti najviše četiri grane konture C . Kako naša kontura C ima tačno pet grana, osigurano je da će bar jedna njena grana ostati dovoljno udaljena od svih grana skupa X . Tu granu proglašavamo za granu e , a njoj dodeljujemo preostalu boju $\gamma = 7$.

Na kraju, razmotrimo preostali slučaj kada pomoćni graf K ne dopušta pravilno 4-bojenje čvorova, što se prema Bruksovoj teoremi dešava ako i samo ako važi $K = K_5$. Kako skup čvorova grafa K čine upravo grane mečinga M' , činjenica da K ima tačno 5 čvorova implicira da mečing M' sadrži tačno 5 grana. Budući da je u ovom slučaju $G = G'$ kubni graf, zaključujemo da polazni graf G ima tačno 10 čvorova.

Podgraf $G - M$ nastaje uklanjanjem savršenog mečinga iz kubnog grafa, pa je on 2-regularan graf sa 10 čvorova i sastoji se od disjunktnih kontura. Budući

da zbog izbora mečinga M' ovaj podgraf ne može sadržati konture dužine 3 ili 4, preostaju samo dve mogućnosti: $G - M$ je unija dve disjunktne konture dužine 5 ili je jedinstvena kontura dužine 10.

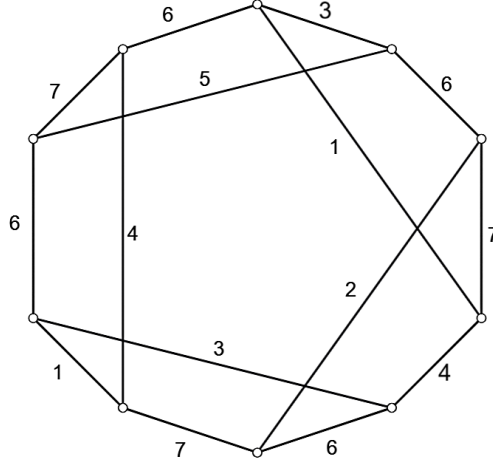
Ako je $G - M$ unija dve disjunktne 5-konture, svaka od 5 grana mečinga M mora spajati po jedan čvor jedne konture sa čvorom druge konture. Da se ne bi narušile početne pretpostavke o strukturi grafa, postoji samo jedan način da se ovi čvorovi međusobno povežu, pa je tako dobijeni graf izomorfan Petersenovom grafu, za koji važi $\chi'_{st}(G) = 5$ (rezultat dokazan u [9]).

Preostaje slučaj kada podgraf $G - M$ obrazuje jedinstvenu konturu dužine 10, dok preostalih 5 grana iz skupa M povezuju njene čvorove kao tetive. Kako u ovom slučaju pomoćni graf odgovara kompletnom grafu ($K = K_5$), svake dve tetive u grafu G moraju imati zajedničku susednu granu na konturi. Da bi se to ostvarilo, sve tetive moraju spajati čvorove na rastojanju 3 duž 10-konture, čime se osigurava da krajnji čvorovi bilo koje dve tetive budu susedni na C_{10} .

Konstrukcija zvezdastog 7-bojenja prikazana je na slici 11. Tetive se prvo oboje sa pet različitih boja iz palete $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nakon toga se prva, četvrta i sedma grana na 10-konturi oboje slobodnim bojama iz te iste palete, tako da nijedne dve grane iste boje ne budu na rastojanju manjem od 3. Na kraju, sve preostale grane konture oboje se bojama 6 i 7. Ovim je prvi deo dokaza u potpunosti završen.

(b) Prvo dokazujemo da je zvezdasti hromatski indeks svakog kubnog grafa najmanje 4, odnosno da važi $\chi'_{st}(G) \geq 4$. Pretpostavimo suprotno, da se grane kubnog grafa mogu zvezdasto obojiti sa tačno tri boje. Kako je graf kuban, sa svakim čvorom moraju biti incidentne tačno tri grane različitih boja. Ako posmatramo podgraf indukovani proizvoljnim parom boja, stepen svakog čvora u tom podgrafu je tačno 2, što znači da on predstavlja uniju disjunktne alternirajućih kontura. Međutim, svaka takva dvobojna kontura dužine $k \geq 4$ neizbežno sadrži ili dvobojni put dužine 4 ili sama predstavlja dvobojnu konturu dužine 4, što je u kontradikciji sa definicijom zvezdastog bojenja. Prema tome, tri boje nikada nisu dovoljne.

Na slici 12 prikazano je jedno pravilno 4-bojenje grana (hiper)kocke Q_3 . Da je reč o zvezdastom bojenju grana možemo se uveriti direktnom proverom

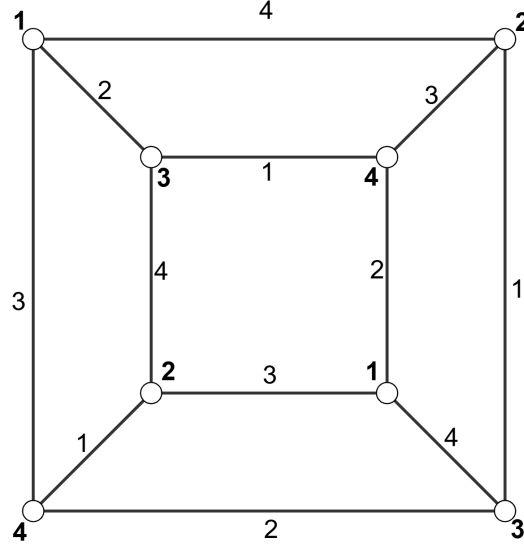


Slika 11: Šema zvezdastog 7-bojenja grana grafa G u slučaju kada podgraf $G - M$ čini konturu dužine 10.

podgrafa indukovanih bilo kojim parom boja $i \neq j$. Posmatranjem slike 12 uočava se da se za svake dve izabrane boje graf raspada na disjunktne puteve čija je maksimalna dužina 3.

Pretpostavimo sada da graf G prekriva hiperkocku Q_3 , i neka je $p : V(G) \rightarrow V(Q_3)$ odgovarajuće preslikavanje prekrivanja. Pomoću ovog preslikavanja možemo podići dato 4-bojenje grana $c : E(Q_3) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sa grafa Q_3 na graf G , tako što proizvoljnoj grani $uv \in E(G)$ dodeljujemo boju grane $p(u)p(v) \in E(Q_3)$, odnosno $c'(uv) = c(p(u)p(v))$. Kako je restrikcija preslikavanja p na susedstvo $N_G(u) \rightarrow N_H(p(u))$ bijekcija za svaki čvor $u \in V(G)$, proizvoljne dve incidentne grane $uv, uw \in E(G)$ preslikavaju se u dve različite i incidentne grane $p(u)p(v), p(u)p(w) \in E(Q_3)$. Budući da je polazno bojenje na hiperkocki pravilno, ovako definisano bojenje grana grafa G takođe mora biti pravilno.

Dalje, posmatramo ponašanje kritičnih podgrafova pri ovom preslikavanju. Kako je p lokalni izomorfizam na susedstvima, svaki put dužine 4 u grafu G preslikava se u šetnju dužine 4 u Q_3 u kojoj su svake dve susedne grane različite. Zbog toga se svaki put dužine 4 u grafu G preslikava ili u put dužine 4 ili u konturu dužine 4 u Q_3 . Slično tome, svaka kontura dužine 4 iz grafa G



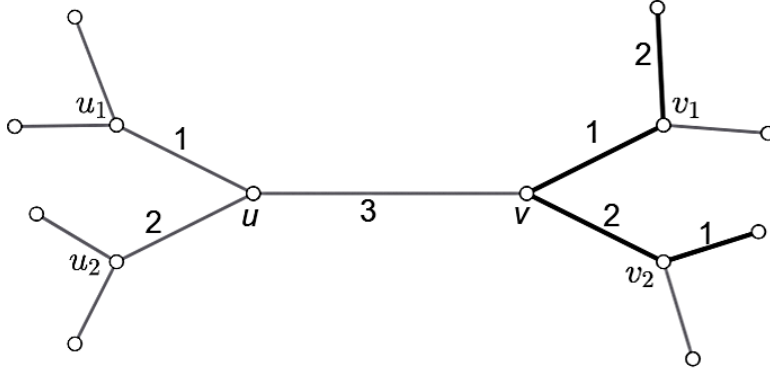
Slika 12: Zvezdasto 4-bojenje grana (hiper)kocke Q_3 .

preslikava se u konturu dužine 4 u Q_3 . S obzirom na to da je bojenje grana grafa Q_3 zvezdasto, ono po definiciji ne sadrži dvobojne puteve niti konture dužine 4. Pošto preslikavanje prekrivanja očuvava dužine i alternaciju boja, zaključujemo da ni u grafu G ne mogu nastati dvobojni putevi dužine 4 ni ti dvobojne 4-konture. Prema tome, indukovano bojenje grafa G je zvezdasto.

Za dokaz obrnute implikacije, pretpostavimo da graf G ima zvezdasto 4-bojenje grana c . Najpre ćemo definisati bojenje čvorova f sa četiri boje. Budući da je graf G kubni, svaki njegov čvor je incidentan sa tačno tri grane. S obzirom na to da na raspolaganju imamo četiri boje, za svaki čvor v definišemo $f(v)$ kao onu jedinstvenu boju iz palete $\{1, 2, 3, 4\}$ koja nije upotrebljena na granama incidentnim sa čvorom v .

Pokažimo najpre da je ovako definisano bojenje čvorova f pravilno bojenje grafa G . Pretpostavimo suprotno: da postoji grana uv u grafu G takva da važi $f(u) = f(v)$. Neka su u_1, u_2 preostali susedi čvora u , a v_1, v_2 preostali susedi čvora v . Zbog simetrije, bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da važi $f(u) = f(v) = 4$, što znači da sve grane incidentne sa u i v moraju biti obojene bojom iz skupa $\{1, 2, 3\}$. Ponovo zbog simetrije boja u

skupu $\{1, 2, 3\}$, možemo uzeti da sama grana uv nosi boju $c(uv) = 3$. Dalje, možemo uzeti da preostale grane incidentne sa ovim čvorovima imaju boje $c(uu_i) = c(vv_i) = i$ za $i \in \{1, 2\}$. Ukoliko posmatramo dvobojne puteve u_1uvv_1 i u_2uvv_2 , zaključujemo da se boja 3 ne može pojaviti ni na granama incidentnim sa v_1 , niti na onima incidentnim sa v_2 . Međutim, to direktno implicira da čvor v_1 mora biti incidentan sa granom boje 2, dok čvor v_2 mora biti incidentan sa granom boje 1. Ova konfiguracija stvara dvobojni put dužine 4 (ili dvobojnu 4-konturu), što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je bojenje c zvezdasto. Ova zabranjena struktura je prikazana na slici 13. Ovim izvedenim zaključkom su pokriveni i slučajevi kada grana uv pripada trouglu (gde je $u_1 = v_2$ i $u_2 = v_1$, ili oba). Dakle, f je pravilno bojenje čvorova grafa G .



Slika 13: Nastanak zabranjenog puta u slučaju kada bi susedni čvorovi u i v imali istu boju pod preslikavanjem f .

Sada dokazujemo da je preslikavanje čvorova $f : V(G) \rightarrow V(K_4)$ preslikavanje prekrivanja. Da bismo to pokazali, potrebno je utvrditi da se za svaki čvor $v \in V(G)$ njegova tri suseda preslikavaju u tri različita čvora u K_4 , odnosno da nikoja dva suseda čvora v nemaju istu boju. Pretpostavimo suprotno, da u grafu G postoji čvor v sa susedima v_1, v_2 takvim da važi $f(v_1) = f(v_2)$. Zbog simetrije, uzmimo da je $f(v) = 4$, $f(v_1) = f(v_2) = 3$, i $c(vv_i) = i$ za $i \in \{1, 2\}$. Tada čvor v_1 mora biti incidentan sa granom boje 2, a čvor v_2 sa granom boje 1, što ponovo generiše zabranjeni dvobojni put dužine 4 (ili konturu dužine 4). Zbog toga su sve tri boje u susedstvu $N_G(v)$ međusobno

različite, pa je restrikcija $f : N_G(v) \rightarrow N_{K_4}(f(v))$ bijekcija za svaki čvor v . Time je dokazano da je $f : V(G) \rightarrow V(K_4)$ preslikavanje prekrivanja.

Preostaje da konstruišemo preslikavanje prekrivanja $F : V(G) \rightarrow V(Q_3)$. Neka (i, j, k, l) predstavlja permutaciju boja $\{1, 2, 3, 4\}$. Ako za čvor $v \in V(G)$ važi $f(v) = i$, tada grane incidentne sa njim moraju imati boje j, k, l , a njegovi susedi moraju imati boje k, l, j ili l, j, k . Ova dva moguća poretka boja u susedstvu nazivamo lokalnim šablonima boja u čvoru v .

Primetimo da u hiperkocki Q_3 (prikazanoj na slici 12) za svaku boju i postoje tačno dva čvora obojena tom bojom. Neka je $f_{Q_3} : V(Q_3) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ bojenje čvorova hiperkocke Q_3 definisano na isti način (svakom čvoru se dodeljuje boja koja nedostaje na njegovim incidentnim granama). Dva čvora u Q_3 koji imaju istu boju pod f_{Q_3} koriste različite lokalne šablone boja. To nam omogućava da definišemo jedinstveno preslikavanje čvorova $F : V(G) \rightarrow V(Q_3)$ tako da za svaki čvor $v \in V(G)$ važe sledeća dva uslova:

- $f(v) = f_{Q_3}(F(v))$;
- v i $F(v)$ imaju potpuno isti lokalni šablon boja.

Da bismo dokazali da je F zaista preslikavanje prekrivanja, dovoljno je uočiti da se tri suseda čvora v iz grafa G preslikavanjem F slikaju u tačno tri suseda čvora $F(v)$ u hiperkocki Q_3 . Pošto već znamo da je f preslikavanje prekrivanja za K_4 , preostaje da se pokaže da se sused u čvora v slika baš u onaj sused čvora $F(v)$ koji nosi boju $f(u)$ (a ne u neki drugi čvor iste boje). Ovo direktno sledi iz činjenice da u svakom kubnom grafu sa zvezdastim 4-bojenjem grana, lokalni šablon boja u čvoru v jednoznačno određuje lokalni šablon boja u svim njegovim susednim čvorovima. Budući da ovo važi i u grafu G i u hiperkocki Q_3 , naša konstrukcija preslikavanja F uspešno definiše traženo preslikavanje prekrivanja. Time je dokaz ove teoreme u potpunosti završen.

□

Postoje kubni grafovi čiji je zvezdasti hromatski indeks jednak 6, a jedan takav primer je kompletno bipartitni graf $K_{3,3}$. Pokazaćemo prvo da se graf $K_{3,3}$ ne može zvezdasto obojiti sa manje od 6 boja.

Posmatramo proizvoljno zvezdasto bojenje grana grafa $K_{3,3}$. Graf $K_{3,3}$ ima 6 čvorova i ukupno 9 grana. Ukoliko bi neka klasa boja sadržala 3 grane, te

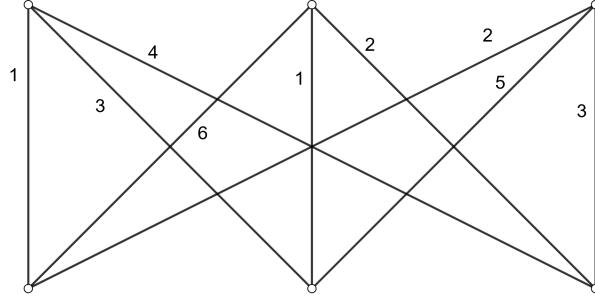
grane bi formirale savršen mečing. U tom slučaju, svaka druga klasa boja u zvezdastom bojenju mogla bi da sadrži najviše jednu granu, kako bi se sprečilo formiranje zabranjenog dvobojnog puta P_5 . Tada bi za preostalih 6 grana bilo neophodno upotrebiti 6 različitih boja, pa bi ukupan broj boja bio bar 7. Prema tome, da bismo ostvarili bojenje sa manje od 7 boja, svaka klasa boja sme da sadrži najviše 2 grane.

Pretpostavimo sada da postoji zvezdasto bojenje grafa $K_{3,3}$ sa 5 boja. Kako graf ima ukupno 9 grana, a svaka klasa boja sme da sadrži najviše 2 grane, analiziramo koliko grana svaka klasa mora da pokrije. Kada bi tri ili više klasa boja sadržale po jednu granu, preostale klase (kojih ima najviše dve) mogle bi da pokriju najviše 4 grane, pa bi ukupan broj obojenih grana bio najviše 7. Slično, ako bi tačno dve klase sadržale po 1 granu, preostale tri klase bi pokrile najviše 6 grana, pa bismo ukupno obojili najviše 8 grana. Prema tome, da bismo sa 5 boja obojili svih 9 grana, najviše jedna klasa boja sme da bude jednačlana (odnosno bar četiri klase moraju sadržati po 2 grane).

Posmatramo jednu dvočlanu klasu boja $F = \{ab, cd\}$. Preostale dve unakrsne grane između ova četiri čvora su ad i cb . Ako bi grana ad delila klasu boja sa još nekom granom e , ta grana e bi morala biti disjunktna sa skupom čvorova $\{a, b, c, d\}$. Kako graf $K_{3,3}$ ima ukupno 6 čvorova, u celom grafu postoji samo jedna grana koja ne dodiruje čvorove a, b, c, d . Isti uslov važi i za granu cb . Pošto postoji samo jedna slobodna grana disjunktna sa tim skupom, nemoguće je da i ad i cb istovremeno budu deo dvočlanih klasa boja. Dakle, bar jedna od grana ad ili cb mora formirati jednačlanu klasu boja.

Kako analizirana dvočlana klasa F primorava postojanje bar jedne jednačlane klase, a pošto u 5-bojenju moraju postojati bar četiri dvočlane klase, zaključujemo da moraju postojati bar dve jednačlane klase. Međutim, ovo je u suprotnosti sa prethodnim zaključkom da 5-bojenje dopušta najviše jednu jednačlanu klasu.

Ovim je dokazano da je za zvezdasto bojenje grafa $K_{3,3}$ neophodno upotrebiti bar 6 boja. Na slici 14 prikazano je eksplicitno zvezdasto 6-bojenje grana grafa $K_{3,3}$, čime se dobija $\chi'_{st}(K_{3,3}) = 6$.



Slika 14: Zvezdasto 6-bojenje grana potpunog bipartitnog grafa $K_{3,3}$.

5 Auterplanarni grafovi

U ovom poglavlju analiziramo zvezdasti hromatski indeks u klasi auterplanarnih grafova. Rezultati prikazani u nastavku preuzeti su iz radova [3] i [8]. Prvo izvodimo gornje granice u zavisnosti od maksimalnog stepena Δ i prikazujemo rezultat za supkubne auterplanarne grafove. Zatim analiziramo posebne familije auterplanarnih grafova sa malim dijametrom i za njih određujemo odgovarajuće granice, dok u završnom delu posmatramo slučaj 2-povezanih grafova sa $\Delta = 5$.

5.1 Opšte gornje granice za auterplanarne grafove

Pre nego što pređemo na analizu zvezdastog hromatskog indeksa auterplanarnih grafova, dokazaćemo poznatu vrednost ovog indeksa za puteve, koja će nam biti korisna u daljem radu.

Lema 5.1. Za put P_n sa $n \geq 5$ čvorova važi $\chi'_{st}(P_n) = 3$.

Dokaz. Jedino pravilno bojenje grana puta P_n sa dve boje je naizmenično bojenje $1, 2, 1, 2, \dots$, koje za $n \geq 5$ obrazuje dvobojni P_5 . Zato je $\chi'_{st}(P_n) \geq 3$.

Sa druge strane, ako granama puta P_n redom dodelimo periodični niz boja $1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$, dobijamo pravilno zvezdasto bojenje. U ovom bojenju, svake tri uzastopne grane sadrže tri različite boje, pa proizvoljne dve grane iste boje nalaze se na rastojanju bar 3. Zbog toga ne postoji indukovani dvobojni P_5 , pa sledi da je $\chi'_{st}(P_n) = 3$. $\square$

Takođe, navešćemo jednu od fundamentalnih karakterizacija ove klase grafova. Nju su dali Čartrand i Harari 1967. godine [5]. Ova karakterizacija biće nam od ključnog značaja u nastavku.

Teorema 5.1. Graf G je auterplanaran ako i samo ako ne sadrži K_4 niti $K_{2,3}$ kao minor.

Korišćenjem navedene zabranjene karakterizacije, u narednoj teoremi izvodimo opštu gornju granicu zvezdastog hromatskog indeksa za proizvoljne auterplanarne grafove u zavisnosti od njihovog maksimalnog stepena Δ .

Teorema 5.2. Neka je G auterplanaran graf sa maksimalnim stepenom Δ . Tada za njegov zvezdasti hromatski indeks važi:

$$\chi'_{st}(G) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta \right\rfloor + 12.$$

Dokaz. Dokazaćemo da teorema važi za svaki graf koji ne sadrži $K_{2,3}$ kao minor. U ovu klasu spadaju i grafovi koji sadrže K_4 kao blok, budući da takvi grafovi ne mogu sadržati subdiviziju grafa K_4 , jer bi svaka takva subdivizija formirala i $K_{2,3}$ minor.

Neka je G proizvoljan graf bez $K_{2,3}$ minora i neka je $v \in V(G)$ čvor grafa G .

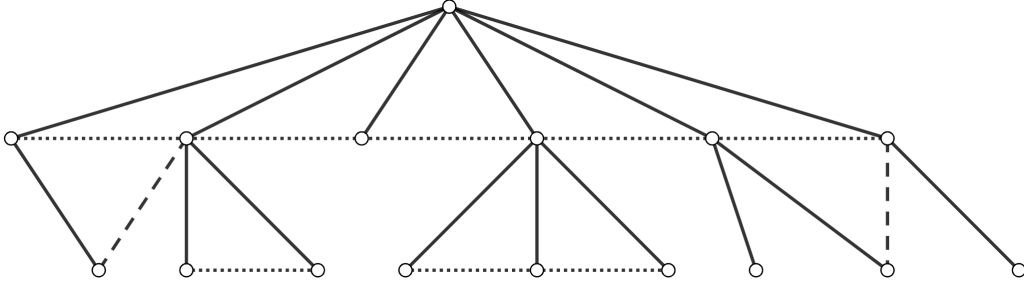
Konstruisaćemo pokrivajuće korensko stablo T grafa G sa korenom u čvoru v , primenom BFS algoritma. Ovako dobijeno stablo T sadrži sve čvorove grafa G , dok su uklanjanjem pojedinih grana eliminisane konture tako da je graf ostao povezan. Dodatno, BFS algoritam garantuje da je udaljenost od korena v do bilo kog čvora u u stablu T jednaka njihovom najkraćem rastojanju u originalnom grafu G , odnosno $d_G(v, u) = d_T(v, u)$.

Prema teoremi 4.1, za stablo T postoji zvezdasto bojenje grana c sa najviše $\left\lfloor \frac{3}{2}\Delta \right\rfloor$ boja.

Preostaje da obojimo grane koje pripadaju grafu G , a ne nalaze se u stablu T , tj. grane iz skupa $E(G) \setminus E(T)$. Posmatramo proizvoljnu takvu granu $uw \in E(G) \setminus E(T)$ i neka se njeni krajevi nalaze na nivoima k i ℓ u odnosu na koren v , gde je $d(v, u) = k$, $d(v, w) = \ell$ i $k \leq \ell$. Zbog osobina BFS stabla, razlika u nivoima može biti najviše 1, što znači da je ili $k = \ell$ ili $k = \ell - 1$:

- Ako je $k = \ell$, granu uw nazivamo **k -horizontalnom granom**.
- Ako je $k = \ell - 1$, granu uw nazivamo **k -dijagonalnom granom**.

Struktura ovih grana prikazana je na slici 15.



Slika 15: Auterplanaran graf sa granama pokrivajućeg stabla prikazanim punim linijama, horizontalnim granama prikazanim tačkastim linijama i dijagonalnim granama prikazanim isprekidanim linijama.

Kako graf G ne sadrži $K_{2,3}$ kao minor, horizontalne grane na bilo kom fiksiранom nivou k indukuju podgraf sa maksimalnim stepenom 2. Ukoliko bi neki čvor u na nivou k imao tri horizontalna suseda x, y, z na istom nivou, putevi u BFS stablu T od x, y, z ka korenu v imali bi sve unutrašnje čvorove na nivoima manjim od k . Kontrakcijom te unije puteva iznad nivoa k u jedan čvor w , dobili bismo $K_{2,3}$ minor sa bipartitnim klasama $\{u, w\}$ i $\{x, y, z\}$, što je kontradikcija.

Štaviše, ukoliko ovaj podgraf sadrži konture, sve te konture moraju biti dužine tačno 3, jer bi postojanje dužih kontura stvorilo subdiviziju grafa $K_{2,3}$. Pretpostavimo suprotno, da postoji kontura $C = x_1x_2 \dots x_r x_1$ dužine $r \geq 4$ na nivou k . Izaberimo dva nesusedna čvora na konturi, npr. x_1 i x_3 . Između njih postoje dva čvorno-disjunktna puta duž same konture C , dok treći put dobijamo spajanjem njihovih puteva u stablu T ka korenu v . Ovaj treći put je disjunktan od konture jer su njegovi unutrašnji čvorovi na nivoima manjim od k . Dobijena tri disjunktna puta između x_1 i x_3 čine subdiviziju grafa $K_{2,3}$, što je kontradikcija. Zato je jedina moguća kontura C_3 .

Poznato je da su za zvezdasto bojenje horizontalnih grana na jednom izolovanom nivou dovoljne tri boje, budući da one indukuju podgraf sastavljen

od disjunktih puteva i trouglova. Međutim, za bojenje celog grafa koristimo ukupno šest novih boja, tako što neparnim nivoima dodeljujemo jedan skup od tri boje, a parnim nivoima drugi, potpuno disjunktan skup od tri boje. Ovo razdvajanje boja po parnosti nivoa neophodno je kako se horizontalne grane sa uzastopnih nivoa ne bi spajale preko grana stabla T u dvobojne puteve dužine 4.

Preostaje da dodelimo boje dijagonalnim granama. Neka je L_k bipartitni graf čiji su skupovi čvorova sa k -tog i $(k + 1)$ -og nivoa grafa G , dok grane u L_k čine grane stabla T i k -dijagonalne grane.

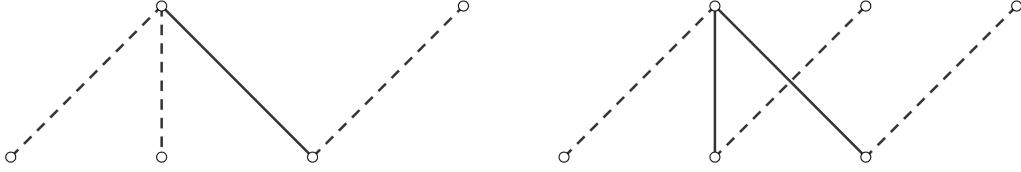
Graf L_k je acikličan. Ako bi u L_k postojala kontura dužine $r \geq 4$, izborom dva nesusedna čvora sa k -tog nivoa na toj konturi, konstruisali bismo tri disjunktne puta (dva duž konture na nivoima k i $k + 1$, i treći u stablu T preko nivoa manjih od k), čime bismo opet dobili $K_{2,3}$ minor.

Detaljnijom analizom ovih zabranjenih konfiguracija dobijamo sledeća svojstva:

- Svaki čvor sa $(k + 1)$ -og nivoa je incidentan sa najviše jednom dijagonalnom (isprekidanom) granom u L_k .
- Svaki čvor w sa k -tog nivoa je incidentan sa najviše dve dijagonalne grane u L_k .
- Ukoliko je čvor w sa k -tog nivoa incidentan sa dve dijagonalne grane, nijedan od njegovih potomaka u stablu T ne sme biti incidentan sa dijagonalnom granom. Ako je w incidentan sa samo jednom dijagonalnom granom, najviše jedan njegov potomak može imati dijagonalnu granu.

Ukoliko bilo koje od ovih svojstava ne bi bilo zadovoljeno, u grafu bi se pojavila bar tri čvora sa $(k + 1)$ -og nivoa povezana sa istim čvorom sa k -tog nivoa, pri čemu bi svaki bio povezan i sa bar još jednim čvorom, što bi proizvelo $K_{2,3}$ minor (dve takve zabranjene konfiguracije prikazane su na slici 16).

Ova ograničenja impliciraju da čvorovi koji su krajevi dijagonalnih grana, zajedno sa odgovarajućim granama stabla T koje ih povezuju, formiraju podgraf čije su povezane komponente putevi. U svakom takvom putu najviše dve



Slika 16: Zabranjene konfiguracije.

dijagonalne grane mogu biti uzastopne, dok su grane stabla T koje ih razdvajaju već ranije obojene. Prema tome, bojenje svake ovakve komponente možemo uspešno završiti dodavanjem svega 2 nove boje, bez stvaranja dvo-bojnih puteva dužine 4.

Da bismo sprečili međusobni uticaj i nastanak dvobojnih puteva dužine 4 između dijagonalnih grana sa bliskih nivoa, bojenje vršimo periodično po modulu 3:

- Za k -dijagonalne grane gde je $k \equiv 0 \pmod{3}$ koristimo 2 nove boje.
- Za k -dijagonalne grane gde je $k \equiv 1 \pmod{3}$ koristimo druge 2 nove boje.
- Za k -dijagonalne grane gde je $k \equiv 2 \pmod{3}$ koristimo još 2 nove boje.

Na ovaj način, za bojenje svih dijagonalnih grana upotrebljavamo ukupno 6 dodatnih boja.

Sabiranjem boja upotrebljenih u svim koracima konstrukcije ($\lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor$ boja za zvezdasto bojenje BFS stabla T , 6 boja za horizontalne i 6 boja za dijagonalne grane) dobijamo da je ukupan broj boja potreban za zvezdasto bojenje grafa G :

$$\chi'_{st}(G) \leq \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta \right\rfloor + 6 + 6 = \left\lfloor \frac{3}{2}\Delta \right\rfloor + 12.$$

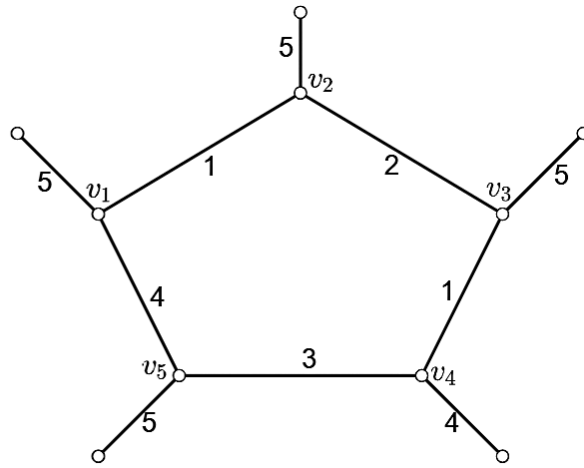
□

U slučaju kada je maksimalni stepen auterplanarnog grafa $\Delta = 3$, dokazaćemo da je za zvezdasto bojenje grana dovoljno svega 5 boja.

Teorema 5.3. Neka je G supkubni auterplanaran graf. Tada važi:

$$\chi'_{st}(G) \leq 5.$$

Ova granica je dostignuta. Da bismo to pokazali, posmatrajmo graf prikazan na slici 17, koji se sastoji od konture dužine 5 i po jedne viseće grane incidentne sa svakim od čvorova konture.



Slika 17: Primer zvezdastog bojenja grana auterplanarnog grafa sa $\Delta = 3$.

Pretpostavimo suprotno, da su 4 boje dovoljne za zvezdasto bojenje ovog grafa. U tom slučaju, sve četiri boje moraju biti upotrebljene na granama same konture, pri čemu se samo jedna boja može ponoviti dva puta. Stoga je bojenje grana konture jedinstveno do na permutaciju boja.

Ako posmatramo bojenje konture prikazano na slici 17, primećujemo da se za viseću granu incidentnu sa čvorom v_4 može upotrebiti jedino boja 4. Međutim, u tom slučaju su sve četiri boje zabranjene za viseću granu incidentnu sa čvorom v_1 , što znači da 4 boje nisu dovoljne. Prema tome, za zvezdasto bojenje ovog grafa neophodno je bar 5 boja. Sa druge strane, bojenje se lako kompletira tako što se svim visećim granama dodeli peta boja, čime se dobija zvezdasto 5-bojenje.

Pre nego što pređemo na sam dokaz teoreme, definisaćemo specijalnu klasu grafova i navesti odgovarajuću pomoćnu lemu.

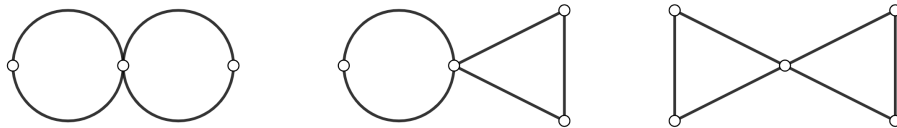
Definicija 5.1. Kaktus graf je multigraf u kome je svaki blok kontura ili pojedinačna grana. Nazivamo ga **laki kaktus graf** ukoliko važe sledeća svojstva:

- Svaki čvor grafa je stepena 2 ili 4;
- Samo čvorovi stepena 4 mogu biti artikulacioni čvorovi;
- Na svakoj konturi postoje najviše dva čvora stepena 2. Ukoliko na konturi postoje dva čvora stepena 2, oni moraju biti susedni.

Lema 5.2. Svako auterplanarno smeštanje lakog kaktus grafa u ravan dopušta pravilno 4-bojenje grana tako da na granici spoljašnje strane ne postoji dvobojni put dužine 4.

Dokaz. Dokaz se sprovodi indukcijom po broju artikulacionih čvorova n_c lakog kaktus grafa L .

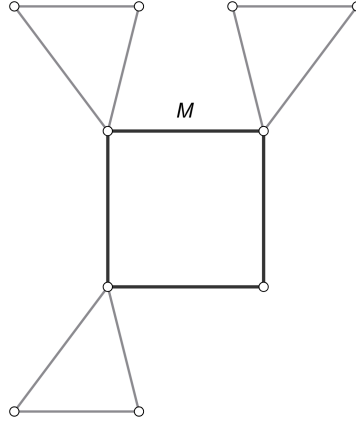
Za $n_c = 0$, graf L ne sadrži artikulacione čvorove, pa ima najviše dve grane i tvrđenje trivijalno važi. Za $n_c = 1$, graf L je izomorfan jednom od tri grafa prikazana na slici 18. Lako se može zaključiti da je tvrđenje ispunjeno za ove grafove.



Slika 18: Laki kaktus grafovi sa jednim artikulacionim čvorom.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve lake kaktus grafove koji imaju manje od k artikulacionih čvorova ($k \geq 2$). Posmatramo graf L sa tačno k artikulacionih čvorova. U grafu L uvek postoji blok M koji sadrži bar dva artikulaciona čvora celog grafa. Kao što je prikazano na slici 19, blok M ima ulogu centralne konture.

Neka su $v_1, v_2, \dots, v_\ell$ ($2 \leq \ell \leq k$) svi artikulacioni čvorovi grafa L koji leže na konturi M . Svaki od ovih čvorova v_i incidentan je sa tačno dve grane, t_i^1 i t_i^2 , koje ne pripadaju bloku M . Ove dve grane pripadaju istom spoljašnjem



Slika 19: Centralni blok M u lakom kaktus grafu.

bloku i nazivamo ih pipci.

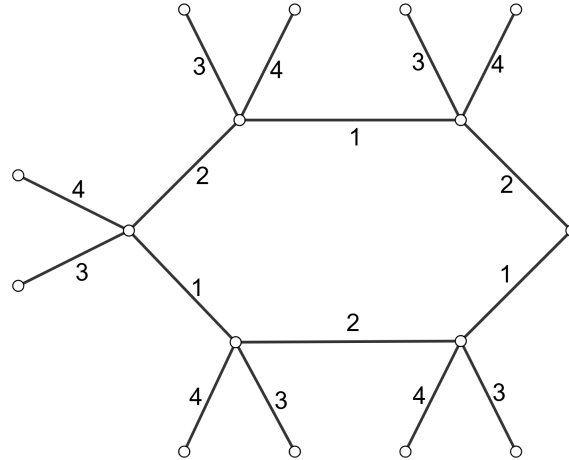
Graf L sada razlažemo na centralni deo i spoljašnje komponente:

- Neka je L_M podgraf grafa L koji se sastoji od same konture M i svih njenih pipaka.
- Uklanjanjem grana konture M , graf se raspada na komponente L_i , pri čemu svaka komponenta L_i sadrži čvor v_i i njegove odgovarajuće pipke t_i^1 i t_i^2 .
- Iz svake komponente L_i konstrukcijom formiramo pomoćni graf H_i , tako što čvor v_i povežemo sa novim, dodatim čvorom u_i pomoću dve nove grane e_i i f_i . Ovako konstruisani grafovi H_i zadovoljavaju uslove lakog kaktus grafa i imaju strogo manje od k artikulacionih čvorova. Stoga na njih možemo primeniti indukcijsku hipotezu, čime dobijamo da svaki H_i dopušta pravilno 4-bojenje grana.

Preostaje da obojimo grane podgraфа L_M koristeći 4 boje.

Ako je M parna kontura, grane same konture M naizmenično bojimo bojama 1 i 2, dok pipke bojimo bojama 3 i 4. Pritom pipke bojimo tako da su oni obojeni bojom 3 uvek usmereni na istu stranu (odnosno, kontrakcijom grana konture M dobija se zvezda čije su grane naizmenično obojene bojama 3 i

4).

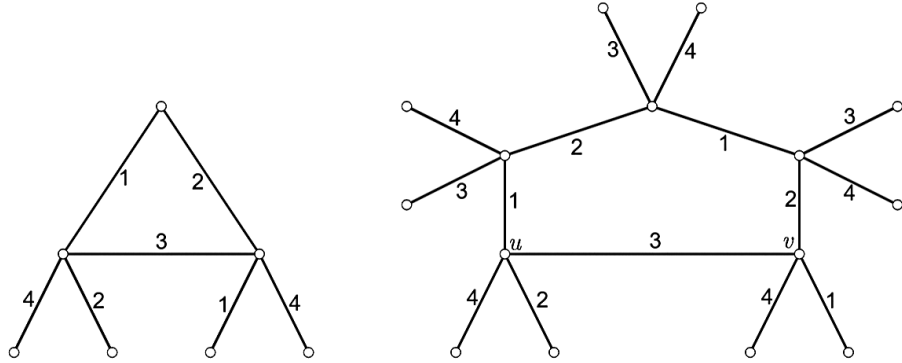


Slika 20: Primer bojenja grafa L_M kada je M parna kontura.

Ako je M neparna kontura, ona mora sadržati par susednih artikulacionih čvorova u i v grafa L . Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je čvor u incidentan sa čvorom stepena 2 u M (ukoliko takav postoji). Grani uv dodeljujemo boju 3, dok preostale grane konture M naizmenično bojimo bojama 1 i 2, počevši od grane incidentne sa u . Pipke bojimo bojama 3 i 4 kao kod prethodnog slučaja, tako da se na granici spoljašnje strane L_M grana obojena bojom 4 incidentna sa u nastavlja na granu obojenu bojom 1. Na kraju, vršimo prebojavanje pipaka incidentnih sa u i v :

- Ako je M kontura dužine 3 koja sadrži čvor stepena 2, pipak obojen bojom 3 incidentan sa u prebojavamo u boju 2, dok pipke obojene bojama 4 i 3 incidentne sa v prebojavamo u boje 1 i 4, respektivno, kao što je prikazano na slici 21 , levo.
- U suprotnom, pipak obojen bojom 3 incidentan sa u prebojavamo u boju 2, a pipak obojen bojom 3 incidentan sa v prebojavamo u boju 1 (slika 21, desno).

Konstruisano bojenje podgraфа L_M ima osobinu da bilo koje četiri uzastopne grane duž granice spoljašnje strane u L_M sadrže bar tri različite boje, pa ne



Slika 21: Primer bojenja grafa L_M kada je M neparna kontura.

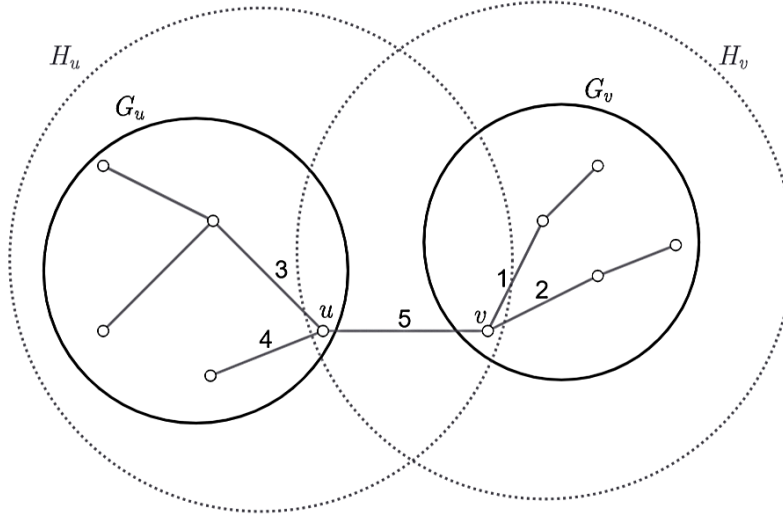
mogu formirati dvobojni put dužine 4.

Konačno bojenje celog grafa L dobijamo tako što u svakom obojenom grafu H_i izvršimo odgovarajuću permutaciju boja tako da se boje njegovih dodatih grana e_i i f_i savršeno poklope sa bojama grana konture M incidentnih sa v_i u podgrafu L_M .

Kako su i u L_M i u svim komponentama H_i eliminisani zabranjeni dvobojni putevi dužine 4 duž granice spoljašnje strane, novonastalo globalno bojenje grafa L je pravilno 4-bojenje bez dvobojnih puteva dužine 4 na rubu spoljašnje strane. $\square$

Dokaz teoreme 5.3. Pretpostavimo suprotno, da postoji minimalni kontra-primer G , odnosno supkubni auterplanarni graf sa minimalnim brojem grana koji ne dopušta zvezdasto 5-bojenje grana. Takođe pretpostavljamo da je graf G već smešten u ravan. U nastavku ćemo analizirati svojstva grafa G i pokazati da je za njega ipak moguće konstruisati zvezdasto 5-bojenje grana, čime dolazimo do kontradikcije.

Pretpostavimo najpre da graf G sadrži most uv , pri čemu su oba čvora u i v stepena bar 2 (takvu granu nazivamo netrivialan most). Neka su G_u i G_v dve povezane komponente grafa $G - uv$ koje sadrže čvorove u , odnosno v . Posmatramo podgrafe $H_u = G[V(G_u) \cup \{v\}]$ i $H_v = G[V(G_v) \cup \{u\}]$, koji nastaju kada komponentama G_u i G_v dodamo i sam most uv , kao što je ilustrovano na slici 22. Zbog pretpostavke o minimalnosti grafa G , manji grafovi



Slika 22: Konstrukcija zvezdastog bojenja grafa G permutacijom boja u podgrafovima H_u i H_v .

H_u i H_v dopuštaju zvezdasta 5-bojenja grana. Možemo pretpostaviti (što se uvek može postići odgovarajućom permutacijom boja u podgrafovima) da je zajedničkoj grani uv u oba grafa dodeljena boja 5. Pošto su bojenja u H_u i H_v nezavisna, permutacijom možemo osigurati da sve preostale grane incidentne sa čvorovima u i v dobiju međusobno različite boje iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$. Spajanjem ovakva dva bojenja dobija se zvezdasto 5-bojenje celog grafa G , što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je G kontraprimer.

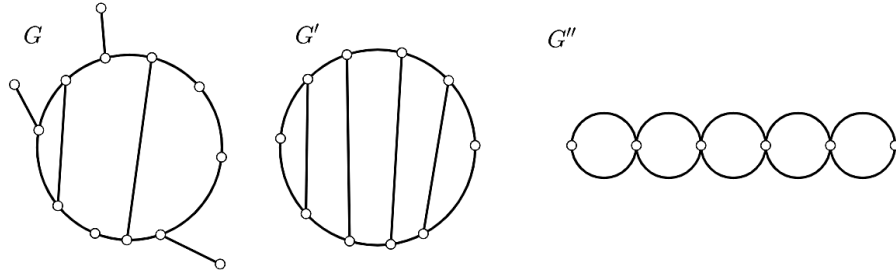
Prema tome, minimalni kontraprimer G ne može sadržati netrivialne mostove. To znači da se G sastoji od jedne spoljašnje konture $C = v_1v_2 \dots v_k$, određenog broja tetiva te konture i visećih grana.

Ideja za konstrukciju zvezdastog 5-bojenja grafa G je da grane konture C obojimo pomoću 4 boje tako da svaka tetiva konture bude incidentna sa četiri različito obojene grane. Na taj način, nakon što sve tetive i viseće grane obojimo petom bojom, dobićemo zvezdasto bojenje.

Najpre iz grafa G uklonimo sve viseće grane. Nakon toga, maksimizujemo broj tetiva konture C tako što spajamo parove nesusednih čvorova stepena 2

koji pripadaju istoj unutrašnjoj oblasti. Na ovaj način dobijamo 2-povezan supkuban auterplanaran graf G' koji je ili izomorfan konturi C_3 , ili važi da svaka njegova unutrašnja oblast sadrži najviše dva čvora stepena 2 (pri čemu su ta dva čvora obavezno susedna).

Posmatramo sada graf G'' koji nastaje od grafa G' kontrakcijom svih njegovih tetiva. Primetimo da je G'' auterplanarni multigraf u kome svi čvorovi imaju stepen 2 ili 4. Čvorovi stepena 4 su zapravo artikulacioni čvorovi nastali kontrakcijom tetiva, dok su čvorovi stepena 2 u G'' zapravo preostali čvorovi stepena 2 iz grafa G' . Na osnovu ovih svojstava, graf G'' je upravo laki kaktus graf (što je ilustrovano primerom na slici 23). Prema prethodno



Slika 23: Konstrukcija lakog kaktus grafa G'' kontrakcijom tetiva unutar 2-povezanog grafa G' .

dokazanoj lemi 5.1., grane lakog kaktus grafa G'' možemo obojiti pomoću 4 boje tako da na granici spoljašnje strane ne postoji dvobojni put dužine 4. Ovo bojenje direktno indukuje parcijalno bojenje grana početnog grafa G , pri čemu su grane konture C obojene u 4 boje, dok su tetive i viseće grane ostale neobojene.

Na samom kraju, sve neobojene grane (sve tetive i sve viseće grane) obojimo petom bojom. Budući da su sve grane incidentne sa bilo kojom granom obojenom bojom 5 dobile međusobno različite boje, u grafu ne mogu nastati dvobojne konture niti dvobojni putevi dužine 4 koji sadrže boju 5. Kako su i u bazičnoj konturi eliminisani dvobojni putevi dužine 4, dobijeno bojenje je pravilno zvezdasto 5-bojenje grafa G . $\square$

5.2 Specifične familije auterplanarnih grafova sa ograničenim dijametrom

U ovom delu rada fokusiramo se na analizu ponašanja zvezdastog hromatskog indeksa grafa u zavisnosti od njegovog dijametra. Jedini 2-povezan auterplanaran graf dijametra 1 jeste kompletna kontura K_3 , čije je bojenje trivijalno. Zbog toga su dijametri 2 i 3 prve netrivialne vrednosti za koje ispitujemo gornje granice zvezdastog hromatskog indeksa.

Radi lakšeg i preglednijeg izlaganja, uvodimo sledeću oznaku za posmatrane familije grafova:

$$\zeta_n^d = \{G_n \mid G_n \text{ je 2-povezan auterplanaran graf sa dijametrom } d \text{ i } n \text{ čvorova}\}$$

U ovom delu rada bavićemo se određivanjem gornjih granica zvezdastog hromatskog indeksa za grafove $G_n \in \zeta_n^2 \cup \zeta_n^3$ na osnovu njihovog maksimalnog stepena Δ .

Pre nego što pređemo na određivanje opštih gornjih granica, navodimo lemu dokazanu u [13].

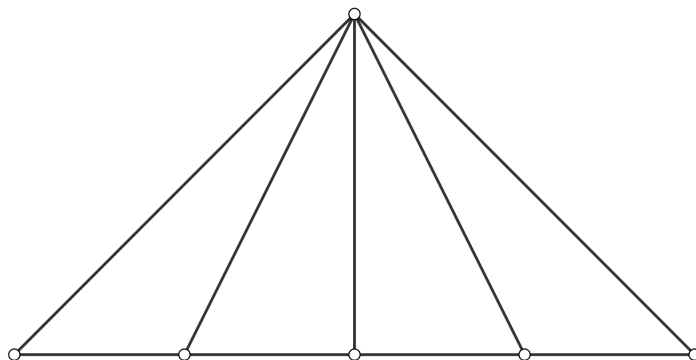
Lema 5.3. Neka je F_{n+1} lepeza sa $n + 1$ čvorova, definisana kao spoj $F_{n+1} = K_1 \vee P_n$ (slika 24). Tada važi:

$$\chi'_{st}(F_{n+1}) = \begin{cases} n + 2, & n = 4, \\ n + 1, & n \in \{2, 3, 5, 6\}, \\ n, & n \geq 7. \end{cases}$$

Definicija 5.2. Ako je G planaran graf, kažemo da je G maksimalan planaran graf ukoliko dodavanjem grane između bilo koja dva nesusedna čvora dobijeni graf postaje neplanaran.

Definicija 5.3. Neka je G auterplanaran graf. Ukoliko nakon dodavanja grane između bilo koja dva nesusedna čvora dobijeni graf postaje neauterplanaran graf, tada se G naziva maksimalan auterplanar graf.

Iz Definicije 5.3. direktno sledi svojstvo da se svaki auterplanaran graf može transformisati u maksimalan auterplanaran graf dodavanjem novih grana.



Slika 24: Lepeza F_6 sa 6 čvorova ($n = 5$).

Važno je uočiti da se ovim postupkom dodavanja grana dijametar polaznog grafa ne može povećati. Zbog toga je, u cilju pronalaženja gornje granice zvezdastog hromatskog indeksa za grafove iz klase ζ_n^2 , dovoljno posmatrati osobine onih maksimalnih auterplanarnih grafova čiji je dijametar nakon dodavanja grana ostao 2 ili je pao na 1. Kako je jedini maksimalan auterplanaran graf dijametra 1 kompletna kontura K_3 , njegov jedini povezani pravi podgraf dijametra 2 bio bi put P_3 . Međutim, budući da graf P_3 nije 2-povezan, on ne ispunjava uslove pripadnosti klasi ζ_n^2 , pa maksimalne auterplanarne grafove dijametra 1 uopšte ne moramo uzimati u obzir.

U radu [1], L. Beineke i R. Pippert dali su induktivnu karakterizaciju i metod za konstrukciju svih maksimalnih auterplanarnih grafova na sledeći način:

1. Graf K_3 je maksimalan auterplanaran graf.
2. Neka je G_1 maksimalan auterplanaran graf smešten u ravan, takav da svi njegovi čvorovi leže na spoljašnjoj oblasti F_1 . Ako grafu G_1 dodamo novi čvor i spojimo ga sa dva čvora koji čine krajeve neke grane na rubu oblasti F_1 , dobijeni graf G_2 je takođe maksimalan auterplanaran graf.
3. Svaki maksimalan auterplanaran graf može se dobiti konačnom primenom koraka 1. i 2.

5.2.1 Klasa 2-povezanih auterplanarnih grafova dijametra 2

Teorema 5.4. Neka je $G_n \in \zeta_n^2$ 2-povezan auterplanaran graf sa n čvorova i dijametrom 2. Tada za zvezdasti hromatski indeks grafa G_n važi sledeće ograničenje:

$$\Delta(G_n) \leq \chi'_{st}(G_n) \leq \begin{cases} n+1, & n=5, \\ n, & n \in \{4, 6, 7\}, \\ \Delta(G_n), & n \geq 8. \end{cases}$$

Dokaz. Prema prethodno opisanoj karakterizaciji Beineke i Pipperta, svaki maksimalan auterplanaran graf se konstruiše polazeći od konture K_3 sukcesivnim dodavanjem novih čvorova stepena 2 koji su incidentni sa krajevima neke rubne grane. Uzimajući u obzir uslov da posmatrani grafovi G_n moraju imati dijametar tačno 2, direktnom analizom dolazimo do zaključka da postoje samo dva moguća slučaja maksimalnih auterplanarnih grafova sa ovim svojstvom:

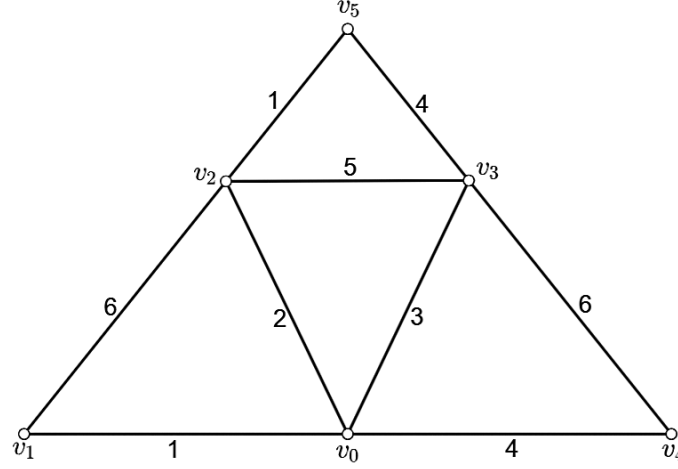
- Graf G_n je izomorfan lepezi F_n (gde je $n \geq 4$);
- Graf G_n je izomorfan specifičnom grafu sa 6 čvorova, koji označavamo sa G_6^1 .

Graf G_6^1 nastaje dodavanjem novog čvora stepena 2 na neku od spoljašnjih grana lepeze F_5 . Ovom intervencijom se ne narušava dijametar grafa, jer rastojanje od centralnog čvora lepeze do novog čvora iznosi tačno 2.

Ukoliko je graf G_n izomorfan lepezi F_n , tvđenje teoreme direktno sledi primenom leme 5.3.

U drugom slučaju, kada je $G_n \cong G_6^1$, uočavamo da ovaj graf sadrži lepezu F_5 kao indukovani podgraf, što implicira da važi $\chi'_{st}(G_6^1) \geq \chi'_{st}(F_5)$. Iz leme 5.3. znamo da je $\chi'_{st}(F_5) = 6$, odakle dobijamo donju granicu $\chi'_{st}(G_6^1) \geq 6$. S druge strane, konstrukcijom optimalnog bojenja sa 6 boja, koje je prikazano na slici 25, potvrđuje se da važi tačna jednakost $\chi'_{st}(G_6^1) = 6$.

Opšta donja granica $\chi'_{st}(G_n) \geq \Delta(G_n)$ važi trivijalno na osnovu definicije pravilnog bojenja grana, jer sve grane incidentne sa istim čvorom moraju dobiti različite boje. S druge strane, za $n \geq 8$, jedini maksimalni auterplanarni grafovi dijametra 2 su lepeze F_n . Primenom leme 5.3. na lepezu sa n



Slika 25: Zvezdasto 6-bojenje grana grafa G_6^1 , nastalog dodavanjem čvora v_5 na lepezu F_5 .

čvorova, dobijamo da je za njeno bojenje dovoljno najviše $n - 1$ boja, odnosno važi gornja granica $\chi'_{st}(G_n) \leq n - 1$. Budući da je maksimalni stepen centralnog čvora ove lepeze tačno $\Delta(G_n) = n - 1$, gornja i donja granica se poklapaju. Iz ovoga sledi da za grafove sa osam ili više čvorova važi jednakost $\chi'_{st}(G_n) = \Delta(G_n)$. $\square$

5.2.2 Klasa 2-povezanih auterplanarnih grafova dijametra 3

Na osnovu svojstava maksimalnih auterplanarnih grafova, analizu gornje granice zvezdastog hromatskog indeksa za proizvoljan graf $G_n \in \zeta_n^3$ možemo pojednostaviti posmatranjem odgovarajuće klase maksimalnih auterplanarnih grafova. Neka je H_n 2-povezan maksimalan auterplanaran graf sa n čvorova koji nastaje dodavanjem grana polaznom grafu G_n . Kako je G_n podgraf grafa H_n , sledi da zvezdasti hromatski indeks maksimalnog auterplanarnog grafa predstavlja gornju granicu za indeks polaznog grafa, odnosno važi:

$$\chi'_{st}(G_n) \leq \chi'_{st}(H_n).$$

Ako je polazni graf G_n imao dijametar 3, njegov maksimalni nadgraf H_n mo-

že zadržati dijametar 3 ili se njegov dijametar može smanjiti na 2. Uvedimo stoga familiju ξ_n^d koja označava skup svih 2-povezanih maksimalnih auterplanarnih grafova sa n čvorova i dijametrom d . Iz prethodnog razmatranja sledi da za svaki graf $G_n \in \zeta_n^3$ postoji neki maksimalan graf $H_n \in \xi_n^2 \cup \xi_n^3$ takav da je $G_n \subseteq H_n$. U zavisnosti od toga koliki je dijametar grafa H_n nakon kompletiranja grana, analizu dalje delimo na dva slučaja.

$H_n \in \xi_n^2$. U ovom delu posmatramo slučaj kada maksimalni auterplanarni nadgraf H_n ima dijametar 2. Neka je $G_n \in \zeta_n^3$ proizvoljan graf dijametra 3 čijim dodavanjem grana dobijamo $H_n \in \xi_n^2$. Na osnovu rezultata iz prethodnog odeljka, H_n može biti izomorfan lepezi F_n ili grafu G_6^1 . U narednoj teoremi određujemo ocene zvezdastog hromatskog indeksa za graf G_n u oba navedena slučaja.

Teorema 5.5. Neka je $H_n \in \xi_n^2$ i neka je $G_n \in \zeta_n^3$ podgraf grafa H_n . Ukoliko je $H_n \cong F_n$, tada važi:

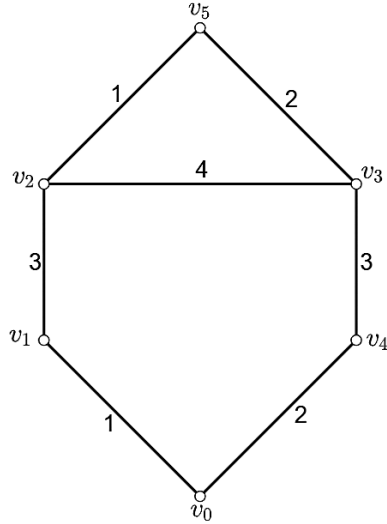
$$\Delta(G_n) \leq \chi'_{st}(G_n) \leq \Delta(G_n) + 3.$$

Ukoliko je $H_n \cong G_6^1$, tada važi:

$$\chi'_{st}(G_n) \leq 4.$$

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je graf H_n izomorfan grafu G_6^1 . Budući da polazni graf G_n ima dijametar 3, on nastaje iz grafa H_n uklanjanjem onih grana čija eliminacija povećava rastojanje među čvorovima. Brisanjem bilo koje dve grane iz skupa $\{v_0v_2, v_0v_3, v_2v_3\}$, dijametar grafa raste na 3. Zbog simetrije, dovoljno je posmatrati graf $G_6^{1'}$ sa slike 26, dobijen uklanjanjem grana v_0v_2 i v_0v_3 .

Posmatramo stazu $v_1v_2v_5v_3v_4$. Da bi se izbegao dvobojni put dužine 4, grane ove staze moraju biti obojene sa najmanje tri različite boje. Dodatno, unutrašnja grana v_2v_3 je incidentna sa svim granama te staze u čvorovima v_2 i v_3 , pa njena boja mora biti jedinstvena u odnosu na njih. Ovo direktno implicira donju granicu $\chi'_{st}(G_6^{1'}) \geq 4$. Budući da je na slici 26 konstruisano zvezdasto bojenje sa 4 boje, gornja i donja granica se poklapaju, čime dobijamo tačnu jednakost $\chi'_{st}(G_6^{1'}) = 4$ za slučaj kada uklonimo tačno dve grane. Sa druge strane, uklanjanjem sve tri unutrašnje grane dobija se kontura C_6



Slika 26: $G_6^{1'}$.

čiji je zvezdasti hromatski indeks 3. Dakle, u opštem slučaju važi $\chi'_{st}(G_n) \leq 4$.

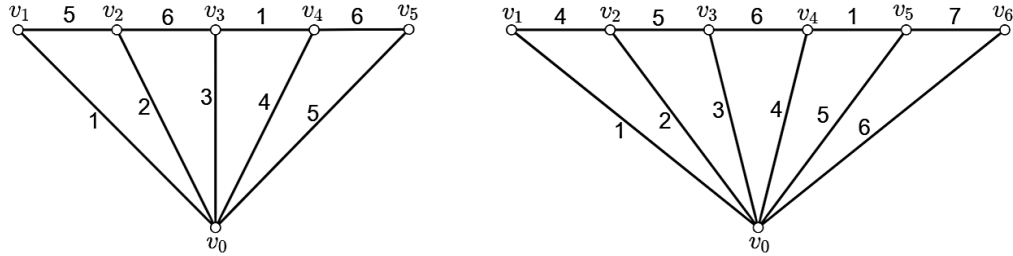
Sada posmatramo slučajeve kada je graf H_n izomorfan lepezi F_n .

Primetimo da za $n < 6$ iz lepeze F_n nije moguće brisanjem grana dobiti 2-povezan graf G_n koji ima dijametar 3. Zbog toga se analiza ograničava na $n \geq 6$.

- **Slučaj 1:** $n = 6$. Zvezdasto 6-bojenje grana grafa H_6 ilustrovano je na slici 27.

Da bi dijametar grafa G_6 porastao na 3, skup obrisanih grana $D = E(H_6) \setminus E(G_6)$ mora narušiti rastojanja dužine 2. Primetimo da brisanje centralne unutrašnje grane v_0v_3 ne menja dijametar zbog alternativnih puteva $v_0v_2v_3$ i $v_0v_4v_3$, pa skup D mora da sadrži grane v_0v_2 ili v_0v_4 čijom se eliminacijom povećava rastojanje između rubnih čvorova.

Uklanjanjem grana iz skupa D , zvezdasti hromatski indeks novog grafa se prirodno smanjuje, pa važi relacija:



Slika 27: F_6 i F_7 .

$$\chi'_{st}(G_6) \leq \chi'_{st}(H_6) - |D| \leq 6 - |D|.$$

- **Slučaj 2:** $n = 7$. Za razliku od prethodnog slučaja, eliminacijom bilo koje unutrašnje grane iz grafa H_7 , rastojanje između pojedinih rubnih čvorova raste na 3. Zbog toga, brisanjem skupa unutrašnjih grana D , polazni zvezdasti hromatski indeks opada za broj uklonjenih grana, pa važi relacija:

$$\chi'_{st}(G_7) \leq \chi'_{st}(H_7) - |D| \leq 7 - |D|.$$

U oba navedena slučaja, brisanjem $|D|$ unutrašnjih grana koje polaze iz centra lepeze, maksimalni stepen rezultujućeg grafa opada na vrednost $\Delta(G_n) = (n - 1) - |D|$. Odatle dobijamo:

$$\chi'_{st}(G_n) \leq n - (n - 1 - \Delta(G_n)) = \Delta(G_n) + 1, \quad \text{za } n \in \{6, 7\}.$$

- **Slučaj 3:** $n \geq 8$. Kada lepeza ima osam ili više čvorova, da bi se njen dijametar uklanjanjem grana povećao sa 2 na tačno 3, direktnom analizom dobija se da broj obrisanih unutrašnjih grana ne može biti veliki. Konkretno, skup D može sadržati najviše tri grane. U ovom opsegu čvorova možemo iskoristiti prethodno dokazanu teoremu 5.4, prema kojoj je $\chi'_{st}(H_n) = \Delta(H_n)$. Kako brisanje najviše tri

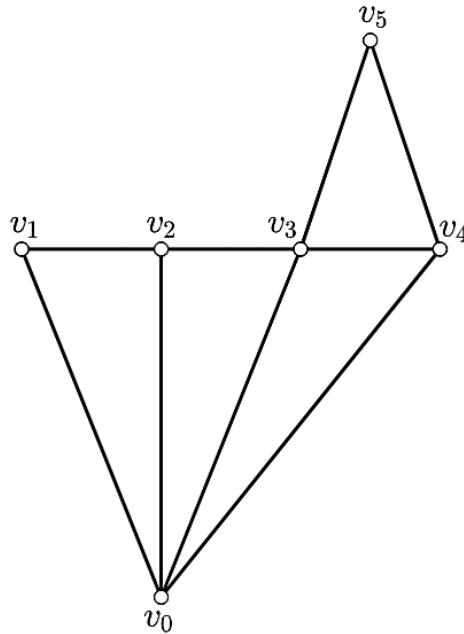
grane iz centra lepeze može smanjiti njen maksimalni stepen za najviše 3, zvezdasti hromatski indeks rezultujućeg grafa ograničen je sa:

$$\chi'_{st}(G_n) \leq \chi'_{st}(H_n) = \Delta(H_n) \leq \Delta(G_n) + 3.$$

□

$H_n \in \xi_n^3$. Razmotrimo sada drugi slučaj, u kome maksimalni nadgraf H_n zadržava dijametar 3. Najpre dokazujemo prisustvo specifičnih indukovanih podgrafova u klasi ξ_n^3 .

Teorema 5.6. Ukoliko je $H_n \in \xi_n^3$, tada graf H_n sadrži graf G_6^1 ili graf G_6^2 (prikazan na slici 28) kao indukovani podgraf.



Slika 28: G_6^2 .

Dokaz. Prema karakteristikama maksimalnih auterplanarnih grafova, jedinstveni maksimalni auterplanarni graf reda 5 je lepeza F_5 . Zbog toga, svaki

maksimalni auterplanarni graf H_n za $n \geq 5$ mora da sadrži F_5 kao svoj indukovani podgraf. Označimo čvor maksimalnog stepena u ovoj lepezi sa v_0 , dok preostale rubne čvorove možemo označiti sa v_1, v_2, v_3 i v_4 .

Posmatramo sada proširenje ovog podgrafa dodavanjem novog čvora v_5 kako bismo konstruisali veći maksimalni auterplanarni graf. U zavisnosti od pozicije na koju se čvor v_5 povezuje, razlikujemo sledeće mogućnosti:

- Ukoliko je čvor v_5 susedan sa nekim parom uzastopnih rubnih čvorova v_i i v_{i+1} (za $i \in \{1, 2, 3\}$), direktno se generiše jedan od traženih indukovanih podgrafa čime je tvrđenje teoreme dokazano.
- Ukoliko je čvor v_5 povezan sa centralnim čvorom v_0 i jednim od krajnjih rubnih čvorova (v_1 ili v_4), polazna lepeza se proširuje u lepezu F_6 . Nastavljajući ovaj proces sukcesivnog dodavanja čvorova, u nekom koraku se nužno mora pojaviti čvor v_j koji se povezuje sa dva uzastopna rubna čvora v_i i v_{i+1} (gde je $i \in \{1, 2, \dots, j-1\}$). U suprotnom, ako bi se svi novi čvorovi vezivali isključivo za centar v_0 , rezultujući graf bi zadržao formu čiste lepeze čiji je dijametar 2, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da posmatramo klasu grafova sa dijametrom 3. Time je dokaz završen.

□

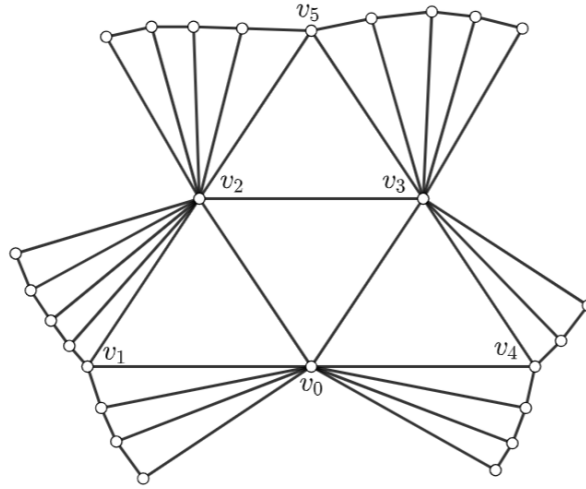
U nastavku detaljnije analiziramo mehanizam rasta auterplanarnih grafova i njihov uticaj na promenu rastojanja između čvorova. Posmatramo povezan graf G koji sadrži dva susedna čvora $v_0, v_1 \in V(G)$, takva da je rastojanje od centralnog čvora v_0 do bilo kog drugog čvora u grafu strogo manje od ukupnog dijametra grafa, odnosno $d(v_0, u) < \text{diam}(G)$ za svako $u \in V(G) \setminus \{v_0\}$.

Ukoliko graf proširimo uvođenjem novih čvorova $v_2, v_3, \dots, v_n$ i odgovarajućih grana $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$, kao i njihovim direktnim povezivanjem sa centralnim čvorom pomoću grana $v_0v_2, v_0v_3, \dots, v_0v_n$, lokalno se konstruiše nova lepeza.

Budući da su svi novododati čvorovi preko grana v_0v_i direktno vezani za centralni čvor v_0 , oni se ne udaljavaju od ostatka grafa. Ova centralna povezanost garantuje da maksimalno rastojanje između bilo koja dva čvora u

novonastalom grafu G' ne raste, što znači da dijametar grafa ostaje nepromenjen, odnosno važi $\text{diam}(G') = \text{diam}(G)$.

Na ovaj način, konture i putevi formirane od čvorova $v_0, v_1, v_2, v_5, v_3, v_4$ mogu se dalje proširivati u familije lepeza, kao što je ilustrirano na slici 29.



Slika 29: $H_n(G_6^1 \subseteq H_n)$.

Pretpostavimo da je maksimalni stepen posmatranog nadgraфа H_n jednak Δ . Iz konstruisanih lepeza uočavamo da su glavni kandidati za čvorove maksimalnog stepena centralni čvor v_0 , kao i specifični prelomni čvorovi v_2 i v_3 . Zbog toga važi relacija:

$$\Delta = \max\{d(v_0), d(v_2), d(v_3)\}.$$

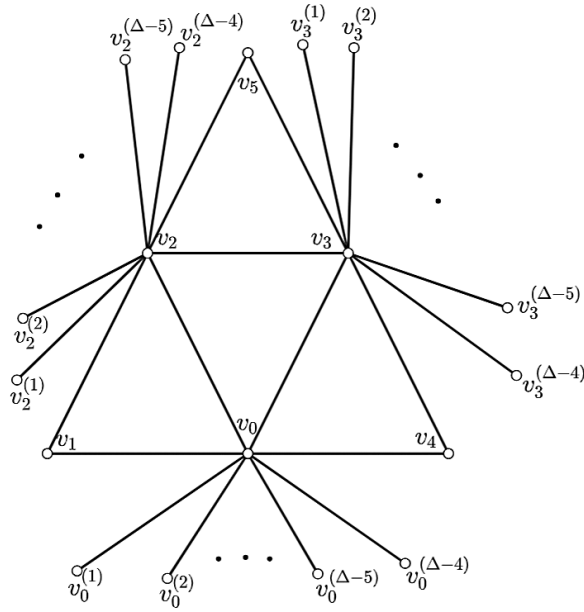
Posebno posmatramo klasu grafova kod kojih svi ovi ključni čvorovi istovremeno dostižu maksimalni stepen, odnosno gde važi jednakost $d(v_0) = d(v_2) = d(v_3) = \Delta$. Ovakvu familiju grafova u daljem tekstu označavamo sa $H_{n\Delta}$.

U narednoj teoremi formulisaćemo i dokazati donju granicu zvezdastog hromatskog indeksa upravo za ovu specifičnu klasu grafova.

Teorema 5.7. Za grafove koji pripadaju familiji $H_{n\Delta}$ važi nejednakost:

$$\chi'_{st}(H_{n_\Delta}) \geq \Delta + 2.$$

Dokaz. Posmatramo podgraf G_{n_Δ} grafa H_{n_Δ} koji je prikazan na slici 30. Kako je maksimalni stepen čvora jednak Δ , jasno je da je za zvezdasto bojenje potrebno najmanje Δ boja.



Slika 30: G_{n_Δ} .

Pretpostavimo da se graf G_{n_Δ} može zvezdasto obojiti sa tačno Δ boja. Kako je stepen centralnog čvora $d(v_0) = \Delta$, sve grane incidentne sa v_0 moraju biti obojene različitim bojama. Posmatrajmo granu v_2v_3 . Budući da je upotrebjeno tačno Δ boja, boja grane v_2v_3 mora biti identična boji neke grane incidentne sa v_0 . Neka je to grana $v_0v'_0$ za neko $v'_0 \in N(v_0)$, tako da važi $c(v_0v'_0) = c(v_2v_3)$.

S druge strane, čvor v_3 takođe ima stepen Δ , što znači da grana v_0v_2 mora deliti boju sa nekom od grana incidentnih sa v_3 , recimo sa granom $v_3v'_3$ gde je $v'_3 \in N(v_3)$, pa važi $c(v_3v'_3) = c(v_0v_2)$. Time je put $v'_0v_0v_2v_3v'_3$ dužine 4 obojen sa samo dve boje, što je u kontradikciji sa definicijom zvezdastog bojenja.

Dakle, važi:

$$\chi'_{st}(H_n^\Delta) \geq \chi'_{st}(G_{n_\Delta}) \geq \Delta + 1.$$

Pretpostavimo sada da je graf G_{n_Δ} moguće zvezdasto obojiti sa tačno $\Delta + 1$ boja. Bez umanjenja opštosti, za bojenje možemo koristiti skup boja $\{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$ i dodeliti boje granama incidentnim sa čvorom v_0 (čiji je stepen Δ) na sledeći način:

- Boje grana koje povezuju v_0 sa preostalim unutrašnjim i spoljašnjim susedima indeksiramo redom od 1 do $\Delta - 3$.
- Za preostale tri specifične grane oko lepeze fiksiramo: $c(v_0v_4) = \Delta - 2$, $c(v_0v_3) = \Delta - 1$ i $c(v_0v_2) = \Delta$.

Pošto je upotrebljeno ukupno $\Delta + 1$ boja, jedina preostala slobodna boja koja nije iskorišćena u čvoru v_0 je boja $\Delta + 1$. S obzirom na to da i čvorovi v_2 i v_3 imaju maksimalni stepen Δ , a na raspolaganju je ukupno $\Delta + 1$ boja, u svakom od njih nedostaje tačno jedna boja iz skupa raspoloživih boja. Ukoliko bi grana v_2v_3 imala boju koja se već pojavljuje na nekoj grani incidentnoj sa v_0 (recimo v_0x), da bi se izbegli dvobojni putevi dužine 4 oblika $xv_0v_2v_3y$ i $xv_0v_3v_2z$, boja grane v_0v_2 morala bi da nedostaje u čvoru v_3 , a boja grane v_0v_3 u čvoru v_2 . Otuda, zbog simetrije tri centralna čvora, bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je grana v_2v_3 obojena upravo onom bojom koja nedostaje u čvoru v_0 , odnosno $c(v_2v_3) = \Delta + 1$.

Označimo sa Q skup od $\Delta - 2$ boja preostalih grana incidentnih sa čvorom v_3 . Iz uslova pravilnosti bojenja jasno je da $\Delta - 1, \Delta + 1 \notin Q$. Takođe, $\Delta - 2 \notin Q$. Zaista, ako bi neka grana v_3y imala boju $\Delta - 2$, posmatrajmo boju grane v_3v_4 i označimo je sa $q = c(v_3v_4)$. Pošto je grana v_3v_4 susedna sa v_0v_4 , mora važiti $q \neq \Delta - 2$, a iz pravilnosti takođe sledi $q \notin \{\Delta - 1, \Delta + 1\}$. Zato u čvoru v_0 mora postojati grana v_0x obojena upravo bojom q , čime nastaje put $yv_3v_4v_0x$ naizmenično obojen bojama $\Delta - 2$ i q , što je u kontradikciji sa definicijom zvezdastog bojenja. Prema tome, eliminacijom boja $\Delta - 2, \Delta - 1, \Delta + 1$, dobijamo da je:

$$Q = \{1, 2, \dots, \Delta - 3, \Delta\}.$$

Analogno, neka je R skup boja na preostalim $\Delta - 2$ grana incidentnih sa čvorom v_2 . Iz pravilnosti sledi da $\Delta, \Delta + 1 \notin R$, dok se na isti način posmatrajući

put preko čvora v_1 dobija da $1 \notin R$. Odatle sledi:

$$R = \{2, 3, \dots, \Delta - 1\}.$$

Iz ovoga sledi da u čvoru v_3 postoji grana v_3y obojena bojom Δ , a u čvoru v_2 grana v_2z obojena bojom $\Delta - 1$. Međutim, tada je put $zv_2v_0v_3y$ naizmenično obojen bojama $\Delta - 1$ i Δ . Prema tome, polazna pretpostavka je neodrživa, čime je dokazano:

$$\chi'_{st}(H_{n_\Delta}) \geq \Delta + 2.$$

□

Kombinujući prethodno izvedene osobine i donje granice, u narednoj teoremi formulišemo glavni rezultat ovog poglavlja, kojim se uspostavlja opšte gornje granice zvezdastog hromatskog indeksa za posmatrane klase grafova.

Teorema 5.8. Ako je $H_n \in \xi_n^3$ i $G_n \in \zeta_n^3$, tada važi:

$$\chi'_{st}(G_n) \leq \Delta(G_n) + 6.$$

Kada $G_n \in \xi_n^3$, važi nejednakost:

$$\chi'_{st}(G_n) \leq \Delta(G_n) + 4.$$

Dokaz. • **Slučaj 1: Graf H_n sadrži G_6^1 kao indukovani podgraf**

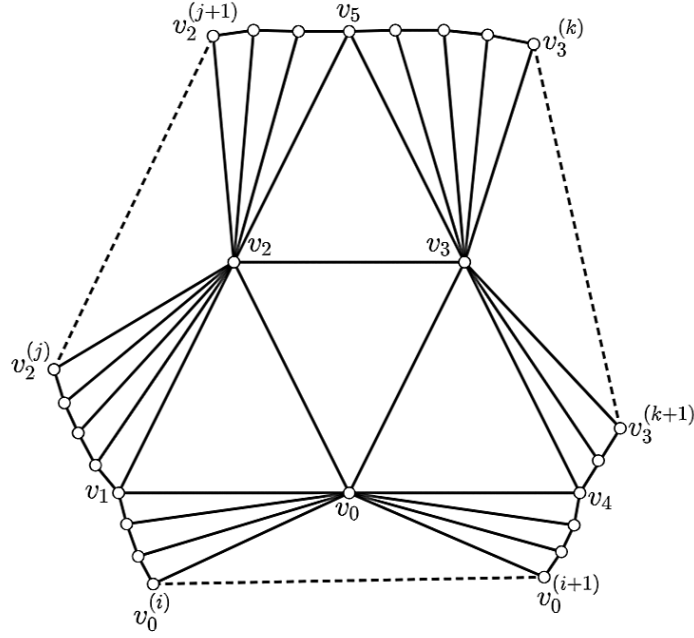
U ovom slučaju, posmatramo graf H'_{n_Δ} (prikazan na slici 31) koji dobijamo iz grafa G_{n_Δ} dodavanjem sledećih grana za $1 \leq i, j, k \leq \Delta - 3$:

- $v_1v_0^{(1)}, v_0^{(i)}v_0^{(i+1)}, v_0^{(\Delta-4)}v_4$;
- $v_2^{(1)}v_1, v_2^{(j)}v_2^{(j+1)}, v_2^{(\Delta-4)}v_5$;
- $v_5v_3^{(1)}, v_3^{(k)}v_3^{(k+1)}, v_3^{(\Delta-4)}v_4$.

U nastavku razmatramo gornju granicu za zvezdasti hromatski indeks $\chi'_{st}(H'_{n_\Delta})$ u zavisnosti od maksimalnog stepena $\Delta = \Delta(H'_{n_\Delta})$.

Za manje vrednosti Δ , gornja granica se dokazuje eksplicitnim konstruisanjem zvezdastog bojenja grana (prikazanih na slikama 32 i 33).

Na osnovu konstruisanih bojenja, za gornju granicu zvezdastog hromatskog indeksa direktno zaključujemo:



Slika 31: H'_{n_Δ} .

$$\chi'_{st}(H'_{n_\Delta}) \leq \begin{cases} 9 = \Delta + 4, & \text{za } \Delta = 5, \\ 9 = \Delta + 3, & \text{za } \Delta = 6, \\ 11 = \Delta + 4, & \text{za } \Delta = 7, \\ 11 = \Delta + 3, & \text{za } \Delta = 8. \end{cases}$$

Opšti slučaj ($\Delta \geq 9$).

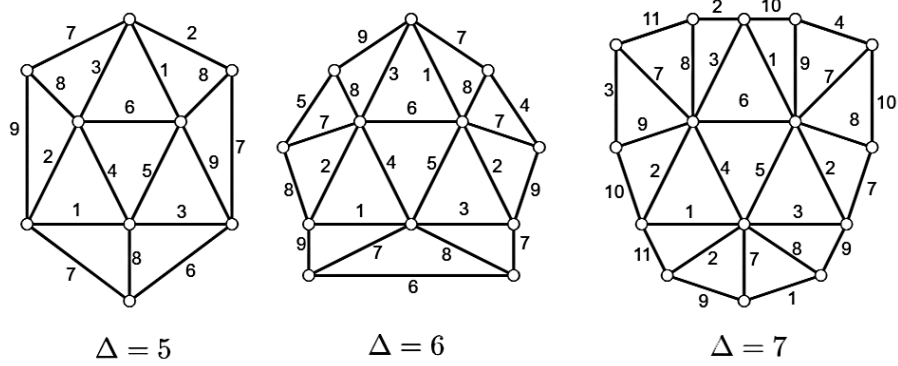
Za svako $\Delta \geq 9$ definiše se opšta funkcija bojenja grana

$$c : E(H'_{n_\Delta}) \rightarrow \{1, 2, \dots, \Delta + 3\}.$$

na sledeći način:

• **Unutrašnje grane centralnog jezgra:**

- $c(v_0v_1) = 1,$
- $c(v_0v_4) = \Delta - 2,$



Slika 32: Zvezdasto bojenje grana grafa H'_{n_Δ} za $\Delta = 5, 6, 7$.

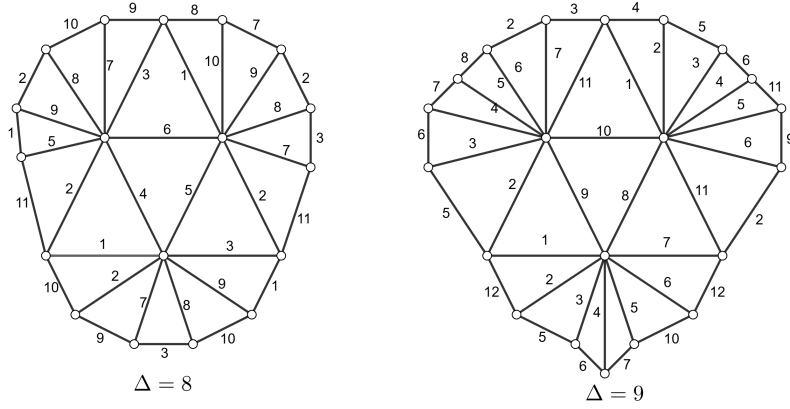
- $c(v_2v_1) = 2$,
- $c(v_2v_5) = \Delta + 2$,
- $c(v_3v_5) = 1$,
- $c(v_3v_4) = \Delta + 2$,
- $c(v_0v_2) = \Delta$,
- $c(v_0v_3) = \Delta - 1$,
- $c(v_2v_3) = \Delta + 1$.

• **Grane lepeze (zvezdaste grane iz centralnih čvorova v_0, v_2, v_3):**

- $c(v_0v_0^{(l)}) = l + 1$, za $l \in [1, \Delta - 4]$,
- $c(v_2v_2^{(l)}) = l + 2$, za $l \in [1, \Delta - 4]$,
- $c(v_3v_3^{(l)}) = l + 1$, za $l \in [1, \Delta - 4]$.

• **Spoljašnje grane dodate u H'_{n_Δ} (na obodu lepeze):**

- $c(v_1v_0^{(1)}) = \Delta + 3$,
- $c(v_0^{(m-1)}v_0^{(m)}) = m + 3$, za $m \in [2, \Delta - 5]$,
- $c(v_0^{(\Delta-5)}v_0^{(\Delta-4)}) = \Delta + 1$,
- $c(v_0^{(\Delta-4)}v_4) = \Delta + 3$,



Slika 33: Zvezdasto bojenje grana grafa H'_{n_Δ} za $\Delta = 8, 9$.

- $c(v_1 v_2^{(1)}) = 5$,
- $c(v_2^{(q-1)} v_2^{(q)}) = q + 4$ za $q \in [2, \Delta - 5]$,
- $c(v_2^{(\Delta-5)} v_2^{(\Delta-4)}) = 2$,
- $c(v_2^{(\Delta-4)} v_5) = 3$,
- $c(v_5 v_3^{(1)}) = 4$,
- $c(v_3^{(p-1)} v_3^{(p)}) = p + 3$, za $p \in [2, \Delta - 6]$,
- $c(v_3^{(\Delta-6)} v_3^{(\Delta-5)}) = \Delta + 2$,
- $c(v_3^{(\Delta-5)} v_3^{(\Delta-4)}) = \Delta$,
- $c(v_3^{(\Delta-4)} v_4) = 2$.

Primer ove opšte konstrukcije za $\Delta = 9$ sa 12 boja je prikazan na slici 33.

Sada proveravamo da je preslikavanje c zvezdasto bojenje grana grafa H'_{n_Δ} , odnosno da je bojenje pravilno i da ne postoje dvobojni putevi niti konture dužine 4.

Prvo posmatramo tri spoljašnja puta $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ definisana sa:

$$\mathcal{P}_0 = v_1 v_0^{(1)} v_0^{(2)} \dots v_0^{(\Delta-4)} v_4,$$

$$\mathcal{P}_2 = v_1 v_2^{(1)} v_2^{(2)} \dots v_2^{(\Delta-4)} v_5,$$

$$\mathcal{P}_3 = v_5 v_3^{(1)} v_3^{(2)} \dots v_3^{(\Delta-4)} v_4.$$

Prema rezultatima o lepezama iz [11], znamo da $\mathcal{P}_0 \vee v_0$, $\mathcal{P}_2 \vee v_2$ i $\mathcal{P}_3 \vee v_3$ pojedinačno nemaju dvobojne puteve ili konture dužine 4. Pretpostavimo sada da u grafu postoji dvobojni put P dužine 3 i analiziramo sve mogućnosti njegovog proširenja. Ukoliko P sadrži neku od unutrašnjih grana $v_0 v_2$, $v_0 v_3$ ili $v_2 v_3$, jedini mogući dvobojni 3-putevi su:

- $v_2^{(i)} v_2 v_3 v_3^{(i+1)}$,
- $v_1 v_2 v_3 v_3^{(1)}$,
- $v_5 v_2 v_3 v_4$,
- $v_2^{(i)} v_2 v_0 v_0^{(i+1)}$,
- $v_1 v_2 v_0 v_0^{(1)}$,
- $v_2^{(\Delta-4)} v_2 v_0 v_4$,
- $v_0^{(j)} v_0 v_3 v_3^{(j)}$,
- $v_1 v_0 v_3 v_5$.

Proverom boja dodatih susednih grana dobija se da se nijedan od ovih puteva ne može produžiti do dvobojnog puta ili konture dužine 4.

Ako P sadrži neku od graničnih grana lepeza $v_1 v_0^{(1)}$, $v_1 v_2^{(1)}$, $v_4 v_0^{(\Delta-4)}$, $v_4 v_3^{(\Delta-4)}$, $v_5 v_2^{(\Delta-4)}$ ili $v_5 v_3^{(1)}$, kandidati za dvobojne 3-puteve su:

- $v_1 v_2^{(1)} v_2 v_2^{(3)}$,
- $v_2^{(1)} v_1 v_2 v_2^{(3)}$,
- $v_2^{(1)} v_1 v_0 v_0^{(4)}$,
- $v_2^{(\Delta-4)} v_5 v_2 v_2^{(1)}$,
- $v_5 v_2^{(\Delta-4)} v_2 v_2^{(1)}$,
- $v_2^{(\Delta-4)} v_5 v_3 v_3^{(2)}$,
- $v_3^{(1)} v_5 v_3 v_3^{(3)}$,

- $v_5 v_3^{(1)} v_3 v_3^{(3)}$,
- $v_3^{(1)} v_5 v_2 v_2^{(2)}$,
- $v_3^{(\Delta-4)} v_4 v_3 v_3^{(1)}$,
- $v_4 v_3^{(\Delta-4)} v_3 v_3^{(1)}$,
- $v_3^{(\Delta-4)} v_4 v_0 v_0^{(1)}$.

Analizom boja na njihovim krajevima zaključuje se da se nijedan od njih ne može proširiti do dvobojnog 4-puta.

Slično, ukoliko P sadrži grane sa oboda centralnog trougla $v_0 v_1$, $v_1 v_2$, $v_2 v_5$, $v_5 v_3$, $v_3 v_4$ ili $v_4 v_0$, mogući dvobojni 3-putevi su:

- $v_1 v_2 v_2^{(\Delta-4)} v_2^{(\Delta-5)}$,
- $v_1 v_2 v_2^{(\Delta-5)} v_2^{(\Delta-4)}$,
- $v_2 v_1 v_0 v_0^{(1)}$,
- $v_2 v_5 v_3 v_4$,
- $v_4 v_3 v_3^{(\Delta-6)} v_3^{(\Delta-5)}$,
- $v_4 v_3 v_3^{(\Delta-5)} v_3^{(\Delta-6)}$,
- $v_4 v_0 v_0^{(\Delta-5)} v_0^{(\Delta-6)}$,
- $v_4 v_0 v_0^{(\Delta-6)} v_0^{(\Delta-5)}$,

pri čemu se nijedan ne može dalje produžiti u dvobojni 4-put.

Uklanjanjem svih navedenih centralnih i graničnih grana iz $H'_{n\Delta}$, preostali podgraf $H''_{n\Delta}$ se raspada na 3 disjunktne komponente, od kojih je svaka indukovani podgraf lepeze ($\mathcal{P}_0 \vee v_0$, $\mathcal{P}_2 \vee v_2$, $\mathcal{P}_3 \vee v_3$). Kako lepeze ne sadrže dvobojne 4-puteve/konture, ceo graf $H'_{n\Delta}$ ne sadrži dvobojne puteve niti konture dužine 4.

Dakle, preslikavanje c predstavlja pravilno zvezdasto bojenje grana grafa H'_{n_Δ} upotrebom najviše $\Delta + 3$ boje. Odatle sledi da za sve $\Delta \geq 9$ važi:

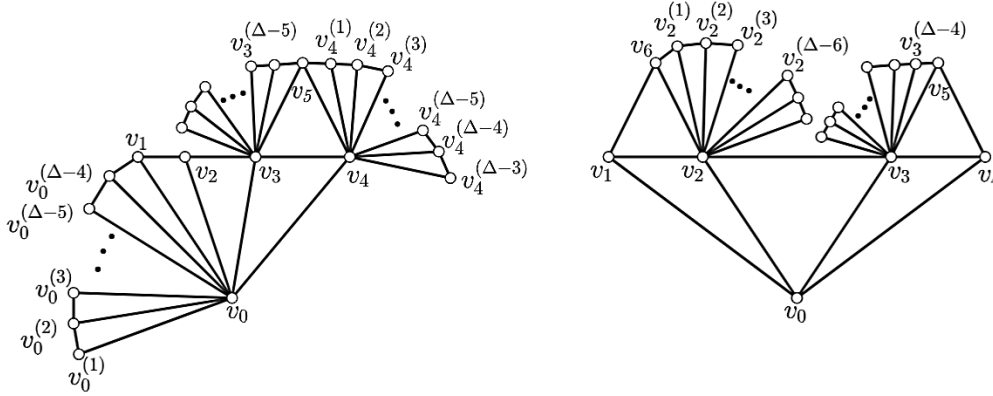
$$\chi'_{st}(H'_{n_\Delta}) \leq \Delta + 3.$$

• **Slučaj 2: Graf H_n ne sadrži G_6^1 kao indukovani podgraf**

Kako $H_n \in \xi_n^3$, on u ovom slučaju mora sadržati G_6^2 kao indukovani podgraf. S obzirom da H_n ne sadrži G_6^1 , prema konstrukciji maksimalnih auterplarnih grafova ne postoji čvor koji je istovremeno susedan sa v_0 i v_4 , niti sa v_2 i v_3 . Kako je dijametar grafa H_n jednak 3, postoje dva moguća podslučaja.

Podslučaj 1.

Posmatramo prvi slučaj, prikazan na slici 34, gde je $d(v_0) = d(v_3) = d(v_4) = \Delta$ (graf označavamo sa H_{n_Δ}). Razmatramo gornju granicu za zvezdasti hromatski indeks u zavisnosti od Δ .

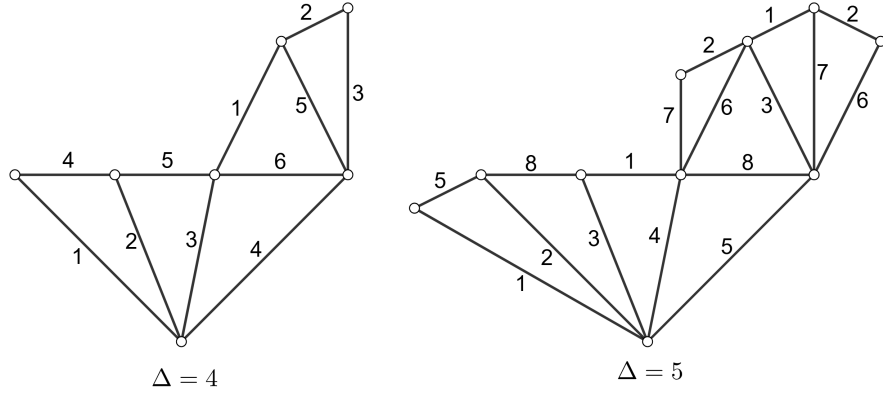


Slika 34: $H_n(G_6^2 \subseteq H_n)$.

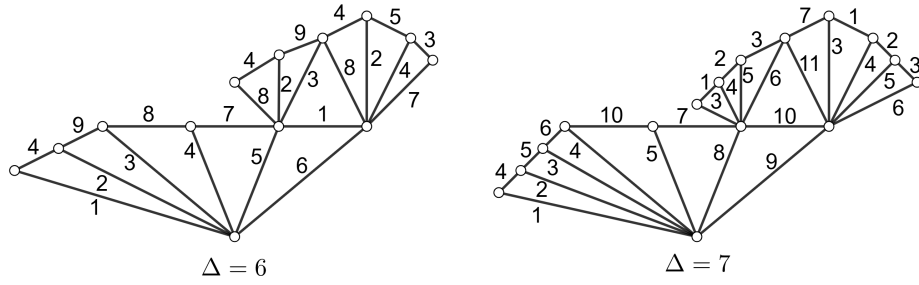
Za manje vrednosti Δ tvrđenje se dokazuje konstruisanjem odgovarajućih zvezdastih bojenja grana (prikazano na slikama 35 i 36).

Na osnovu konstruisanih bojenja, za gornju granicu zvezdastog hromatskog indeksa grafa H_{n_Δ} direktno zaključujemo:

$$\chi'_{st}(H_{n_\Delta}) \leq \begin{cases} 6 = \Delta + 2, & \text{za } \Delta = 4, \\ 8 = \Delta + 3, & \text{za } \Delta = 5, \\ 9 = \Delta + 3, & \text{za } \Delta = 6. \end{cases}$$



Slika 35: Zvezdasto bojenje grana grafa H_{n_Δ} za $\Delta = 4, 5$.



Slika 36: Zvezdasto bojenje grana grafa H_{n_Δ} za $\Delta = 6, 7$.

Opšti slučaj ($\Delta \geq 7$).

Za svako $\Delta \geq 7$ definiše se opšta funkcija bojenja grana c na sledeći način:

• **Unutrašnje grane centralnog jezgra:**

- $c(v_0v_1) = \Delta - 3$,
- $c(v_0v_2) = \Delta - 2$,
- $c(v_0v_3) = \Delta + 1$,
- $c(v_0v_4) = \Delta + 2$,
- $c(v_1v_2) = \Delta + 3$,
- $c(v_2v_3) = \Delta$,

- $c(v_3v_4) = \Delta + 3$,
- $c(v_3v_5) = \Delta - 1$,
- $c(v_4v_5) = \Delta + 4$.

• **Grane lepeze (zvezdaste grane iz čvorova v_0, v_3, v_4):**

- $c(v_0v_0^{(l)}) = l$, za $l \in [1, \Delta - 4]$,
- $c(v_3v_3^{(m)}) = m + 2$, za $m \in [1, \Delta - 4]$,
- $c(v_4v_4^{(p)}) = p + 2$, za $p \in [1, \Delta - 3]$.

• **Spoljašnje grane (na obodu lepeza):**

- $c(v_0^{(l)}v_0^{(l+1)}) = l + 3$, za $l \in [1, \Delta - 4]$,
- $c(v_3^{(m)}v_3^{(m+1)}) = m$, za $m \in [1, \Delta - 4]$,
- $c(v_4^{(p)}v_4^{(p+1)}) = p$, za $p \in [1, \Delta - 3]$,
- $c(v_3^{(\Delta-4)}v_5) = \Delta - 4$,
- $c(v_5v_4^{(1)}) = \Delta$.

Dokazujemo da je preslikavanje c zvezdasto bojenje grana grafa $H_{n\Delta}$.
Posmatramo tri spoljašnja puta $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$ definisana kao:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_0 &: v_0^{(1)}v_0^{(2)} \dots v_0^{(\Delta-4)}v_1v_2v_3v_4, \\ \mathcal{P}_3 &: v_3^{(1)}v_3^{(2)} \dots v_3^{(\Delta-4)}v_5, \\ \mathcal{P}_4 &: v_5v_4^{(1)}v_4^{(2)} \dots v_4^{(\Delta-4)}v_4^{(\Delta-3)}.\end{aligned}$$

Na osnovu poznatih rezultata o lepezama, lepeze formirane nad ovim putevima pojedinačno nemaju dvobojne puteve niti konture dužine 4.

Pretpostavimo da u grafu $H_{n\Delta}$ postoji dvobojni put dužine 3 koji sadrži neku od grana v_0v_3, v_3v_4, v_2v_3 ili $v_5v_4^{(1)}$. Svi takvi kandidati za dvobojne 3-puteve su:

- $v_1v_2v_3v_4$,
- $v_2v_3v_5v_4^{(1)}$,

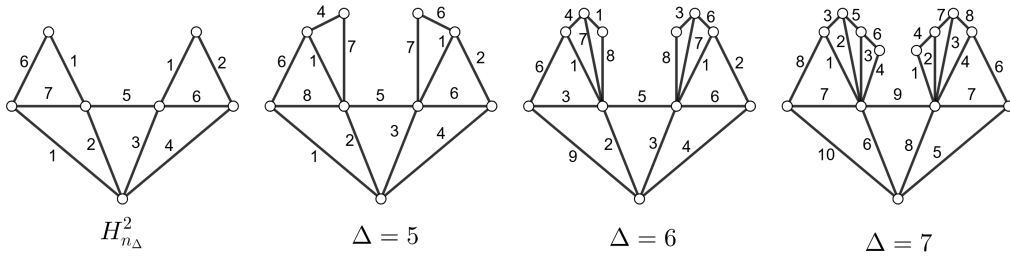
- $v_0v_2v_3v_3^{(3)}$,
- $v_3^{(i)}v_3v_4v_4^{(i)}$, $i \in [1, \Delta - 4]$,
- $v_5v_3v_4v_4^{(\Delta-3)}$,
- $v_4v_4^{(1)}v_5v_3^{(3)}$.

Proverom vrednosti funkcije c zaključuje se da se nijedan od ovih puteva ne može proširiti do dvobojnog 4-puta ili konture dužine 4.

Kako se boje $\Delta + 2$ i $\Delta + 4$ pojavljuju tačno jednom u celom grafu, uklanjanjem grana v_0v_3 , v_3v_4 , v_2v_3 , v_0v_4 , v_4v_5 i $v_5v_4^{(1)}$ dobijamo podgraf koji se raspada na 3 disjunktne komponente. Te komponente su indukovane lepeze, pa ne sadrže dvobojne 4-puteve niti konture dužine 4. Odatle sledi da celokupan graf nema dvobojnih 4-puteva niti kontura dužine 4, pa je zvezdasti hromatski indeks manji ili jednak $\Delta + 4$.

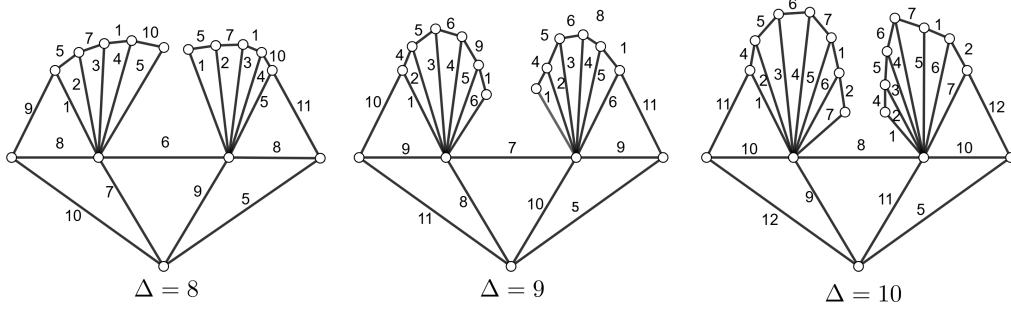
Podslučaj 2.

Sada posmatramo drugi slučaj gde je $d(v_2) = d(v_3) = \Delta$.



Slika 37: Zvezdasto bojenje grana grafa $H_{n_\Delta}^2$ za $\Delta = 4, 5, 6, 7$.

Na osnovu konstruisanih bojenja (prikazanih na slikama 37 i 38), za gornju granicu zvezdastog hromatskog indeksa grafa $H_{n_\Delta}^2$ direktno zaključujemo:



Slika 38: Zvezdasto bojenje grana grafa $H_{n_\Delta}^2$ za $\Delta = 8, 9, 10$.

$$\chi'_{st}(H_{n_\Delta}^2) \leq \begin{cases} 7 = \Delta + 3, & \text{za } \Delta = 4, \\ 8 = \Delta + 3, & \text{za } \Delta = 5, \\ 9 = \Delta + 3, & \text{za } \Delta = 6, \\ 10 = \Delta + 3, & \text{za } \Delta = 7, \\ 11 = \Delta + 3, & \text{za } \Delta = 8, \\ 11 = \Delta + 2, & \text{za } \Delta = 9, \\ 12 = \Delta + 2, & \text{za } \Delta = 10. \end{cases}$$

Opšti slučaj ($\Delta \geq 10$).

Za svako $\Delta \geq 10$ definiše se opšta funkcija bojenja grana c na sledeći način:

• **Grane centralnog jezgra:**

- $c(v_0v_1) = \Delta + 2$,
- $c(v_0v_2) = \Delta - 1$,
- $c(v_0v_3) = \Delta + 1$,
- $c(v_0v_4) = 5$,
- $c(v_1v_2) = \Delta$,
- $c(v_2v_3) = \Delta - 2$,
- $c(v_3v_4) = \Delta$,
- $c(v_1v_5) = \Delta + 1$,
- $c(v_2v_5) = 1$,

- $c(v_3v_6) = \Delta - 3$,
- $c(v_4v_6) = \Delta + 2$.

• **Grane lepeze (zvezdaste grane iz centralnih čvorova v_2, v_3):**

- $c(v_2v_2^{(l)}) = l + 1$, za $l \in [1, \Delta - 4]$
- $c(v_3v_3^{(m)}) = m$, za $m \in [1, \Delta - 4]$

• **Spoljašnje grane na obodu lepeza:**

- $c(v_5v_2^{(1)}) = 4$,
- $c(v_2^{(p)}v_2^{(p+1)}) = p + 4$, za $p \in [1, \Delta - 7]$,
- $c(v_2^{(\Delta-6)}v_2^{(\Delta-5)}) = 1$,
- $c(v_2^{(\Delta-5)}v_2^{(\Delta-4)}) = 2$,
- $c(v_3^{(q)}v_3^{(q+1)}) = q + 3$, za $q \in [1, \Delta - 6]$,
- $c(v_3^{(\Delta-5)}v_3^{(\Delta-4)}) = 1$,
- $c(v_3^{(\Delta-4)}v_4) = 2$.

Dokazujemo da je ovakva funkcija c zvezdasto bojenje.

Putevi na obodu čine indukovane lepeze sa čvorovima v_2 i v_3 koje po pretpostavci ne sadrže dvobojne 4-puteve niti konture dužine 4.

Pretpostavimo sada da postoji dvobojni 3-put koji sadrži neku od grana $v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4, v_1v_5, v_4v_6, v_1v_2$ i v_3v_4 . Mogući kandidati su:

- $v_5v_1v_0v_3$,
- $v_6v_4v_0v_1$,
- $v_1v_2v_3v_4$,
- $v_2^{(4)}v_2v_0v_4$,
- $v_3^{(5)}v_3v_0v_4$.

Proverom dodeljenih boja direktno se zaključuje da se nijedan od ovih puteva ne može proširiti do dvobojnog 4-puta ili konture. Takođe, kako se boja $\Delta - 2$ pojavljuje jedinstveno na grani v_2v_3 , ne postoji mogućnost formiranja dvobojnog 4-puta koji je sadrži.

Uklanjanjem grana $v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4, v_1v_5, v_4v_6, v_1v_2, v_3v_4$ i v_2v_3 dobija se podgraf koji se sastoji od dve disjunktne komponente (indukovane lepeze), što garantuje da u grafu nema dvobojnih 4-puteva niti kontura dužine 4. Odatle sledi da je $\chi'_{st}(H_{n_\Delta}^2) \leq \Delta + 2$ za $\Delta \geq 10$.

Svođenjem podslučajeva 1 i 2 zaključuje se da za posmatranu klasu grafova važi $\chi'_{st}(H_n) \leq \Delta + 4$.

Svođenjem rezultata iz oba posmatrana slučaja dolazimo do konačnog dokaza tvrđenja teoreme za grafove klase ξ_n^3 . U slučaju 1, gde graf sadrži G_6^1 kao indukovan podgraf, eksplicitnom konstrukcijom zvezdastog bojenja grana pokazano je da zvezdasti hromatski indeks ne prelazi $\Delta + 4$. Slično, u slučaju 2, gde graf sadrži G_6^2 , analizom obuhvaćenih podslučajeva dokazano je da zvezdasti hromatski indeks takođe ne prelazi $\Delta + 4$. Kako su ovo jedine dve moguće konfiguracije za klasu ξ_n^3 , zaključuje se da za sve grafove $G_n \in \xi_n^3$ važi:

$$\chi'_{st}(G_n) \leq \Delta(G_n) + 4.$$

Neka je sada $G_n \in \xi_n^3$ proizvoljan graf posmatrane klase. Na osnovu klasifikacije grafova klase ξ_n^3 date u radu [7], za svaki graf $G_n \in \xi_n^3$ postoji maksimalni auterplanarni graf $H_n \in \xi_n^3$ takav da je G_n njegov podgraf i da važi:

$$\Delta(H_n) \leq \Delta(G_n) + 2.$$

Kako je $G_n \subseteq H_n$, odatle sledi:

$$\chi'_{st}(G_n) \leq \chi'_{st}(H_n) \leq \Delta(H_n) + 4 \leq (\Delta(G_n) + 2) + 4 = \Delta(G_n) + 6.$$

Ovim je dokaz teoreme završen. □

5.3 Auterplanarni grafovi sa $\Delta = 5$

Sledeći rezultat, koji daje gornju granicu zvezdastog hromatskog indeksa za 2-povezane auterplanarne grafove sa maksimalnim stepenom 5, dokazan je u radu [8].

Teorema 5.9. Neka je G 2-povezan auterplanaran graf sa n čvorova i $\Delta(G) = 5$. Tada važi

$$\chi'_{st}(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor + 2 = \Delta + 4 = 9.$$

6 Otvoreni problemi i pravci daljeg istraživanja

Rezultati izloženi u ovom radu zaokružuju procene zvezdastog hromatskog indeksa za nekoliko značajnih klasa grafova. Međutim, precizne vrednosti ovog parametra u mnogim slučajevima ostaju van domašaja trenutnih analitičkih metoda. U nastavku dajemo pregled ključnih pitanja koja proističu iz dobijenih rezultata i predstavljaju prirodan smer za dalja naučna istraživanja.

6.1 Zvezdasti hromatski indeks kompletnih grafova

U prethodnim poglavljima određene su asimptotske granice za zvezdasti hromatski indeks kompletnih grafova K_n :

$$(2 + o(1))n \leq \chi'_{st}(K_n) \leq \frac{n \cdot 2^{2\sqrt{2}(1+o(1))\sqrt{\log n}}}{(\log n)^{1/4}}.$$

Donja granica pokazuje da zvezdasti hromatski indeks kompletnog grafa mora rasti najmanje linearno sa brojem čvorova. Sa druge strane, gornja granica dobijena pomoću konstrukcija skupova bez tročlanih aritmetičkih progresija još uvek sadrži dodatni faktor koji uzrokuje nešto brži rast od linearnog. Razlika između ovih procena ostavlja otvorenim pitanje o stvarnoj prirodi rasta ovog indeksa.

Otvoreni problem 1. Odrediti tačan red veličine funkcije $\chi'_{st}(K_n)$. Posebno, ostaje nepoznato da li postoji konstanta c takva da važi:

$$\chi'_{st}(K_n) \leq cn,$$

odnosno da li je zvezdasti hromatski indeks kompletnih grafova linearan.

6.2 Gornje granice za supkubne i auterplanarne grafove

U prethodnom poglavlju pokazano je da svaki supkubni graf može biti zvezdasto obojen sa najviše 7 boja.

Sa druge strane, najzahtevniji poznati primeri iz ove klase, kao što su kompletan bipartitni graf $K_{3,3}$ i Hivudov graf, imaju zvezdasti hromatski indeks jednak 6. Kako do sada nije poznat nijedan supkubni graf koji zahteva 7 boja, prirodno se nameće sledeća hipoteza.

Hipoteza 1.

Za svaki supkubni graf G važi:

$$\chi'_{st}(G) \leq 6.$$

U ovom radu smo takođe pokazali da je za zvezdasto bojenje grana proizvoljnog auterplanarnog grafa sa maksimalnim stepenom $\Delta \geq 3$ dovoljno $\lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor + 12$ boja. Iako se detaljnijom analizom ova konstanta može smanjiti na 9, pretpostavlja se da je stvarna granica znatno niža i da je dovoljna konstanta 1 (što je već potvrđeno za supkubne auterplanarne grafove).

Hipoteza 2.

Ako je G 2-povezan auterplanarni graf sa maksimalnim stepenom $\Delta \geq 6$, tada važi:

$$\chi'_{st}(G) \leq \Delta + 6$$

Ukoliko je G dodatno i maksimalni auterplanarni graf, važi još jača procena:

$$\chi'_{st}(G) \leq \Delta + 4$$

Otvoreni problem 2. Da li za svaku klasu 2-povezanih grafova G linearne veličine (po broju grana u odnosu na broj čvorova) sa maksimalnim stepenom Δ postoji univerzalna konstanta c takva da važi $\chi'_{st}(G) \leq \Delta + c$?

7 Zaključak

U ovom master rad analiziran je zvezdasti hromatski indeks grafova koji predstavlja pooštrenje klasičnog hromatskog indeksa koje zahteva da unija bilo koje dve klase boja ne sadrži put niti konturu dužine 4. Glavni cilj rada bio je pregled i analiza ovog parametra kroz nekoliko ključnih klasa grafova.

Za kompletne grafove K_n prikazano je da zvezdasti hromatski indeks ima donju granicu $2n(1 + o(1))$, dok gornja granica sadrži dodatni podlinearni faktor u eksponentu. Pitanje da li se gornja i donja granica za kompletne grafove mogu izjednačiti na čisto linearni red rasta formulisano je kao otvoreni problem 1.

U klasi stabala prikazana je tačna gornja granica $\chi'_{st}(T) \leq \lfloor 3\Delta/2 \rfloor$. Ovaj rezultat u potpunosti rešava slučaj stabala jer je prikazano konkretno bojenje koje dostiže ovu vrednost, ali i primer koji potvrđuje da se ta granica ne može dodatno smanjiti. Pored toga, posmatrana je i klasa supkubnih grafova za koju je navedena gornja granica 7 i donja granica 4, pri čemu su opisani i grafovi koji dostižu tu najnižu vrednost. S obzirom na to da u literaturi još uvek nije pronađen supkubni graf kome je potrebno 7 boja, formulisana je hipoteza 1 koja pretpostavlja da je stvarna gornja granica zapravo 6.

Za auterplanarne grafove u radu je prikazan niz sve preciznijih ocena. Pored opšte granice $\lfloor 3\Delta/2 \rfloor + 12$ za proizvoljan maksimalni stepen i oštre granice 5 za supkubni slučaj, detaljno su analizirane i posebne familije auterplanarnih grafova sa ograničenim dijametrom. Za te familije pokazano je da se zvezdasti hromatski indeks kreće u veoma uskom opsegu oko maksimalnog stepena, sa gornjim granicama oblika $\Delta + 3$, $\Delta + 4$ i $\Delta + 6$, kao i donjom granicom $\Delta + 2$ za određene klase. Svi ovi rezultati prirodno vode do hipoteze 2, po kojoj bi za celu klasu auterplanarnih grafova trebalo da važi linearna granica oblika $\Delta + c$, gde je c neka mala konstanta.

Otvorena pitanja i hipoteze koji su opisani u radu pokazuju dokle se stiglo u istraživanju zvezdastog bojenja grana i u kom smeru se ova tema dalje razvija u literaturi.

Literatura

- [1] L. Beineke and R. Pippert, *A Census of Ball and Disk Dissections*, In: *Graph Theory and Applications*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 303, Springer, 1972, 25–40.
- [2] F. Behrend, On Sets of Integers Which Contain No Three Terms in Arithmetic Progression, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 32 (1946), 331–332.
- [3] Ľ. Bezegová, B. Luzar, M. Mockovčiaková, R. Soták, and R. Škrekovski, Star Edge Coloring of Some Classes of Graphs, *Journal of Graph Theory*, 81(1) (2016), 73–82.
- [4] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 244, Springer, 2008.
- [5] G. Chartrand and F. Harary, Planar Permutation Graphs, *Journal of Combinatorial Theory*, 2(1) (1967), 78–83.
- [6] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, 3rd edition, MIT Press, 2009.
- [7] X. Deng, H. Song, G. Su, and R. Tian, Rainbow Connection Number of Biconnected Outerplanar Graphs with Small Diameters, *Advances in Mathematics (China)*, 47(3) (2018), 373–382.
- [8] X. Deng, Q. Yao, Y. Zhang, and X. Cui, A Note on a Conjecture of Star Chromatic Index for Outerplanar Graphs, *Applied Mathematics and Computation*, 384 (2020), 125353.
- [9] Z. Dvořák, B. Mohar, and R. Šámal, Star Chromatic Index, *Journal of Graph Theory*, 72(3) (2013), 313–326.
- [10] M. Elkin, An Improved Construction of Progression-Free Sets, *Israel Journal of Mathematics*, 184 (2011), 93–128.
- [11] B. Grünbaum, Acyclic Colorings of Planar Graphs, *Israel Journal of Mathematics*, 14 (1973), 390–408.

- [12] T. Kaiser and R. Škrekovski, Cycles Intersecting Edge-Cuts of Prescribed Sizes, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 22(3) (2008), 861–874.
- [13] X. S. Liu and K. Deng, *Star Edge Coloring of Graphs*, Master's thesis, Northwest Normal University, 2007.
- [14] A. Slivkova, *Diskretna matematika 2*, Prirodno-matematički fakultet, 2022.

Biografija



Anja Batar je rođena 23. juna 2002. godine u Novom Sadu. Osnovnu i srednju školu završila je u Novom Sadu. Nakon završetka srednje škole, 2021. godine, upisuje osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, na smeru Primjenjena matematika, modul Analitika podataka i statistika. Osnovne studije završila je 2024. godine. Nakon toga, upisuje master akademske studije na smeru Primjenjena matematika koje završava 2026. godine.

**UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA**

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Završni rad

VR

Autor: Anja Batar

AU

Mentor: dr Kristina Ago

MN

Naslov rada: Zvezdasti hromatski indeks nekih klasa grafova

NR

Jezik publikacije: srpski

JP

Jezik izvoda: srpski

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2026

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića
4, Novi Sad

MA

Fizički opis rada: 7/91/14/0/38/0/0

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Teorija grafova

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: teorija grafova, bojenje grana, zvezdasto bojenje, hromatski indeks

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: U ovoj tezi proučavamo zvezdasti hromatski indeks grana, parametar koji pooštrava acikličko bojenje zabranom dvobojnih puteva i kontura dužine 4. Prikazane su gornje i donje granice za kompletne i opšte grafove, stabla, supkubne i auterplanarne grafove, pri čemu su za pojedine klase dobijene granice oštre. Teza se završava otvorenim problemima i hipotezama za dalja istraživanja.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 23. 6. 2026.

DP

Datum Odbrane:

DO

Članovi komisije:

Predsednik: dr Ana Slivkova, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Vlado Uljarević, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član, mentor: dr Kristina Ago, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

KO

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY DOCUMENTARY INFORMATION**

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph publication

DT

Type of record: Textual printed material

TR

Content code: Final paper

CC

Author: Anja Batar

AU

Mentor: Kristina Ago, Ph.D.

MN

Title: Star chromatic index of some classes of graphs

TI

Language of the text: Serbian

LT

Language of the abstract: Serbian

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2026

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Faculty of Sciences, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

PP

Physical description: 7/91/14/0/38/0/0

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Graph Theory

SD

Subject / Keywords: graph theory, edge coloring, star coloring, chromatic index

SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: This thesis examines the star chromatic index of edges, a parameter that strengthens acyclic edge coloring by forbidding two-colored paths and 4-cycles. We present upper and lower bounds for complete and general graphs, trees, subcubic, and outerplanar graphs, with sharp bounds obtained for certain classes. Finally, several open problems and conjectures are highlighted for future research.

AB

Accepted by Scientific Board on: 23. 6. 2026.

DP

Defended:

DE

Thesis defend board:

President: Ana Slivkova, Ph.D., Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Vlado Uljarević, Ph.D., Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member, mentor: Kristina Ago, Ph.D., Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

DB