



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku



Vuk Stojiljković

Neprekidni funkcionalni račun i primene

-Master rad-

Novi Sad, 2026. god.

Predgovor

Početak dvadesetog veka, sa razvojem kvantne mehanike i teorije operatora na beskonačnodimenzionalnim prostorima, javila se potreba za rigoroznim definisanjem funkcija operatora. Nije zato iznenađenje što je jedan od vodećih matematičara tog doba, J. von Neumann, dao temelje teoriji koja je omogućila upravo to — današnjem neprekidnom funkcionalnom računu. Značaj von Neumannovog rada na onome što danas poznajemo kao spektralna teorija operatora odmah je prepoznat od strane matematičke javnosti, a njegove ideje su kasnije uopštene i proširene od strane M. Stonea i F. Riesz.

Sama potreba za funkcionalnim računom nastala je radi toga da se da ispravan smisao izrazima poput e^{tA} , $\sqrt{A}$ ili $\log A$, gde je A linearni operator. Do toga je najviše dovela težnja fizičara i primenjenih matematičara da reše evolucione jednačine kvantne mehanike, gde se rešenje formalno zapisuje kao $e^{itH}\psi$, ali bez odgovarajuće teorije ovaj izraz nema rigorozno značenje. Ovakav pristup pokazao se odgovarajući za primene.

Postoje dva osnovna pristupa funkcionalnom računu. Prvi, tzv. spektralni pristup, razvili su von Neumann, Stone i Riesz, zasnovan na spektralnoj meri i spektralnoj teoremi. Taj pristup je elegantniji i apstraktniji, i najviše je prihvaćen od strane matematičara. U ovom radu bavimo se pristupom neprekidnog funkcionalnog računa, čiji je začetnik von Neumann, a koji je kasnije uobličio F. Riesz. On je prvi objavio sistematizovanu teoriju funkcionalnog računa u svojim radovima iz 1930-ih godina. Ispostavilo se da je neprekidni funkcionalni račun zaista imao odnos prema polinomima kakav realni brojevi imaju prema racionalnim brojevima: $\mathbb{R}$ je najmanja moguća ekstenzija $\mathbb{Q}$ u kojoj je $\mathbb{Q}$ gust; isto važi i za $C(\sigma(A))$ (prostor neprekidnih funkcija na spektru operatora A) i $\mathcal{P}(\sigma(A))$ (prostor polinoma na spektru operatora). Dalje, svaki $f \in C(\sigma(A))$ može se aproksimirati nizom polinoma (P_n) ; isto važi i za $f(A)$ i $P_n(A)$.

Najzad, mora se spomenuti značajna prednost funkcionalnog računa u proučavanju evolucionih jednačina. Vrlo su česte situacije u kojima se rešenje diferencijalne jednačine $\dot{x}(t) = Ax(t)$ formalno zapisuje kao $x(t) = e^{tA}x_0$, ali bez funkcionalnog računa ovaj izraz nema rigorozno značenje. Pomenimo za kraj i Löwner-Heinzovu nejednakost, jedan od najlepših rezultata dobijenih primenom funkcionalnog računa: naime, za pozitivne operatore $A \geq B \geq 0$ i svako $r \in [0, 1]$ važi $A^r \geq B^r$. Bez funkcionalnog računa, ovakva tvrdnja ne bi imala ni smisla.

Rad se sastoji od 3 glave. U prvoj glavi dati su osnovni pojmovi i tvrdnje vezani za normirane prostore, Banahove prostore i Hilbertove prostore koji će biti potrebni u nastavku. Uvedeni su linearni operatori, ograničenost i neprekidnost, čime je postavljen temelj za izučavanje spektra operatora. Dodatno, navedeni su i neki bitni pojmovi u vezi sa Banahovim algebrama i C^* -algebrama.

U drugoj glavi uvodimo pojam funkcionalnog računa. Najpre definišemo polinomni funkcionalni račun i dokazujemo teoremu o preslikavanju spektra za polinome. Zatim, koristeći Vajerštrasovu teoremu o aproksimaciji, proširujemo ovaj račun na sve neprekidne funkcije definisane na spektru operatora. Time dobijamo neprekidni funkcionalni račun — izometrički $*$ -homomorfizam $\varphi_A : C(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{B}(H)$. Dokazujemo teoremu o preslikavanju spektra za neprekidne funkcije, koja predstavlja jedan od centralnih rezultata ovog rada, kao i posledicu o egzistenciji n -tog korena pozitivnog operatora.

Cilj treće glave je primena neprekidnog funkcionalnog računa. Prvo je prikazana primena u teoriji operatorskih nejednakosti, naime, pokazana je Löwner-Heinzova nejednakost, nakon čega je prikazano rešavanje apstraktnog Cauchy-evog problema. Definišemo operator e^{tA} pomoću funkcionalnog računa i dokazujemo da je rešenje problema $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$ dato sa $x(t) = e^{tA}x_0$. Izračunavamo izvod operatora e^{tA} i time potvrđujemo da funkcija zaista zadovoljava polaznu diferencijalnu jednačinu. Ovim smo pokazali kako se apstraktni rezultati funkcionalnog računa mogu uspešno primeniti u teoriji diferencijalnih jednačina. Treći primer je u klasičnoj teoriji operatora, pokazujemo da se invertibilan operator može zapisati u polarnoj formi, analogon $z = e^{i\theta}|r|$ u kompleksnim brojevima.

Zahvaljujem se članovima komisije dr Stevanu Pilipoviću i dr Milošu Kuriliću za sve korisne razgovore i preneto znanje tokom studija, kao i za sve savete prilikom pisanja ovog rada.

Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru dr Nikoli Sarajliji na velikoj pomoći i stručnim sugestijama prilikom pisanja ovog rada.

Novi Sad, 2026.

Vuk Stojiljković

Sadržaj

Predgovor	i
1 Uvodni pojmovi	1
1.1 Uvod	1
1.2 Metrički prostor i topologija indukovana metrikom	4
1.3 Normirani prostori i nejednakosti Minkovskog, Höldera i Janga	7
1.4 Ograničeni linearni operatori	10
1.5 Banahovi prostori, Banahove algebre i dualni prostori	11
1.6 Hilbertovi prostori	18
1.7 Spektar linearnih operatora	22
1.8 Tehničke propozicije o operatorima	24
1.9 Spektar samoadjungovanih i pozitivnih operatora	26
2 Funkcionalni račun	28
2.1 Uvod u funkcionalni račun	28
2.2 Neprekidni funkcionalni račun	32
3 Primene	36
3.1 Löwner-Heinzova nejednakost	36
3.2 Primena na apstraktni Cauchy-jev problem	39
3.3 Polarna dekompozicija invertibilnog operatora	41
Literatura	44

Glava 1

Uvodni pojmovi

1.1. Uvod

Linearni operatori se pojavljuju sasvim prirodno u mnogim oblastima matematike, a teorija ovih operatora ima primenu u brojnim naučnim poljima. Operatori su preslikavanja između prostora, tačnije između vektorskih prostora ili modula, a linearnost je poželjan uslov kada želimo da operator poštuje algebarsku strukturu prostora.

Fokusiraćemo se na operatore na vektorskim prostorima nad poljem K , gde će za nas K uvek biti polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Vektorski prostor nad poljem K naziva se K -vektorski prostor.

Definicija 1.1. Neka je $\mathbb{K}$ polje, čiji će elementi biti zvani skalari. Neprazan skup X na kome su definisane operacije

$$+ : X \times X \rightarrow X \quad (\text{sabiranje}) \quad \text{i} \quad \cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X \quad (\text{množenje skalarom})$$

naziva se vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ (ili $\mathbb{K}$ -vektorski prostor) ako za sve vektore $x, y, z \in X$ i sve skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ važe sledeći aksiomi:

- (i) $x + y = y + x$ (komutativnost sabiranja);
- (ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asocijativnost sabiranja);
- (iii) postoji element $0 \in X$ takav da je $x + 0 = x$ za svako $x \in X$ (postojanje neutralnog elementa za sabiranje);
- (iv) za svako $x \in X$ postoji element $-x \in X$ takav da je $x + (-x) = 0$ (postojanje inverznog elementa za sabiranje);
- (v) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ (distributivnost množenja skalarom u odnosu na sabiranje vektora);
- (vi) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (distributivnost množenja skalarom u odnosu na sabiranje skalara);
- (vii) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ (kompatibilnost množenja skalarom sa množenjem u polju);
- (viii) $1 \cdot x = x$, gde je 1 multiplikativni neutral polja $\mathbb{K}$ (neutralnost jedinice polja).

Elemente skupa X nazivamo vektorima, a elemente polja $\mathbb{K}$ skalarima.

Primedba 1.2. U daljem tekstu, umesto $\alpha \cdot x$ često ćemo pisati αx , kada to neće dovesti do zabune.

Vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ naziva se $\mathbb{K}$ -vektorski prostor.

Pre nego što definišemo linearni operator, prikazaćemo primer jednog K -vektorskog prostora.

Primer 1.3. Neka je

$$\ell^p(\mathbb{N}) := \left\{ s : \mathbb{N} \rightarrow K \mid \sum_{n=0}^{\infty} |s(n)|^p < \infty \right\}$$

za $1 \leq p < \infty$, i neka je

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) := \{ s : \mathbb{N} \rightarrow K \mid s \text{ je ograničeno preslikavanje} \}.$$

Označavaćemo $\ell^p := \ell^p(\mathbb{N})$ za $1 \leq p \leq \infty$. Štaviše, elementi u ℓ^p se mogu posmatrati kao nizovi i za svako $s \in \ell^p$ korišćićemo notaciju $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} := s$ ili samo $(s_n) := s$, i označavaćemo $s_n := s(n)$. Definišemo sabiranje i skalarno množenje na sledeći način:

- $(s_n) + (t_n) := (s_n + t_n)$ za svako $(s_n), (t_n) \in \ell^p$,
- $\alpha(s_n) := (\alpha s_n)$ za svako $(s_n) \in \ell^p$ i svako $\alpha \in K$.

Jasno je da je ℓ^∞ jedan K -vektorski prostor sa prethodno definisanim operacijama, jer je zbir dva ograničena niza takođe ograničen niz, a niz (αs_n) je ograničen za svako $(s_n) \in \ell^\infty$ i svako $\alpha \in K$. Takođe je jasno da je ℓ^p zatvoren u odnosu na skalarno množenje, jer važi:

$$\sum_{n=0}^N |\alpha s_n|^p = |\alpha|^p \sum_{n=0}^N |s_n|^p \quad \forall (s_n) \in \ell^p, \forall \alpha \in K, \forall N \in \mathbb{N} \text{ i svako } 1 \leq p < \infty.$$

Štaviše, ℓ^1 je zatvoren u odnosu na sabiranje zbog:

$$\sum_{n=0}^N |s_n + t_n| \leq \sum_{n=0}^N (|s_n| + |t_n|) = \sum_{n=0}^N |s_n| + \sum_{n=0}^N |t_n| \quad \forall (s_n), (t_n) \in \ell^1, \forall N \in \mathbb{N}$$

(na osnovu nejednakosti trougla). Da bismo dokazali da je ℓ^p zatvoren u odnosu na sabiranje za $1 < p < \infty$, primetimo da je funkcija $f(x) = x^p$ konveksna nad $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ za $1 < p < \infty$, što znači:

$$(\lambda a + (1 - \lambda)b)^p \leq \lambda a^p + (1 - \lambda)b^p \quad \text{za sve } a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ i } \lambda \in [0, 1].$$

Ako uzmemo $\lambda = \frac{1}{2}$, imamo:

$$\left| \frac{1}{2}s_n + \frac{1}{2}t_n \right|^p \leq \left(\frac{1}{2}|s_n| + \frac{1}{2}|t_n| \right)^p \leq \frac{1}{2}|s_n|^p + \frac{1}{2}|t_n|^p.$$

Odavde sledi:

$$|s_n + t_n|^p \leq 2^{p-1}(|s_n|^p + |t_n|^p).$$

Posledično, ℓ^p je zatvoren u odnosu na sabiranje. Prema tome, ℓ^p je K -vektorski prostor za $1 \leq p \leq \infty$.

Definicija 1.4. Neka su $(X, \oplus_x, \odot_x)$ i $(Y, \oplus_y, \odot_y)$ K -vektorski prostori. Linearni operator je funkcija $T : X \rightarrow Y$ takva da ako su $x_1, x_2 \in X$ i $\alpha \in K$, važi:

$$T(x_1 \oplus_x (\alpha \odot_x x_2)) = T(x_1) \oplus_y (\alpha \odot_y T(x_2)).$$

Primer 1.5 (Primeri linearnih operatora).

1. Neka je $M_{m \times n}(K)$ skup svih matrica dimenzija $m \times n$ nad poljem K . Svaka matrica $A \in M_{m \times n}(K)$, posmatrana kao preslikavanje $A : K^n \rightarrow K^m$, predstavlja linearni operator.
2. Za dato $D \subseteq \mathbb{C}$, neka je

$$C(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ je neprekidna}\}$$

i

$$C^n(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ je } n \text{ puta neprekidno diferencijabilna}\}$$

gde je $n \in \mathbb{N}$. Preslikavanje $T : C^1(D) \rightarrow C(D)$ definisano sa $T(f) = f'$ za svako $f \in C^1(D)$ je linearni operator.

3. Desni i levi operator pomeraja (shift) na ℓ^p su definisani sa:

- $R : \ell^p \rightarrow \ell^p, \quad s \mapsto Rs$ gde je $Rs(n) = \begin{cases} s(n-1) & \text{ako } n > 0, \\ 0 & \text{ako } n = 0. \end{cases}$
- $L : \ell^p \rightarrow \ell^p, \quad s \mapsto Ls$ gde je $Ls(n) = s(n+1)$.

Lako se dokazuje da su oba operatora dobro definisana i linearna.

1. Linearnost operatora desnog pomeraja (R): Neka su $s = (s_n)$ i $t = (t_n)$ elementi prostora ℓ^p i neka je $\alpha \in K$. Posmatrajmo proizvoljnu komponentu n niza $R(\alpha s + t)$.

- Za $n = 0$:

$$[R(\alpha s + t)](0) = 0$$

$$S \text{ druge strane, } \alpha[Rs](0) + [Rt](0) = \alpha \cdot 0 + 0 = 0.$$

- Za $n > 0$:

$$\begin{aligned} [R(\alpha s + t)](n) &= (\alpha s + t)(n-1) \\ &= \alpha s(n-1) + t(n-1) \\ &= \alpha[Rs](n) + [Rt](n) \end{aligned}$$

Pošto jednakost važi za svako n , zaključujemo da je $R(\alpha s + t) = \alpha Rs + Rt$, pa je R linearan.

2. Linearnost operatora levog pomeraja (L): Neka su $s = (s_n)$ i $t = (t_n)$ elementi prostora ℓ^p i neka je $\alpha \in K$. Posmatrajmo n -tu komponentu niza $L(\alpha s + t)$:

$$\begin{aligned} [L(\alpha s + t)](n) &= (\alpha s + t)(n+1) \\ &= \alpha s(n+1) + t(n+1) \\ &= \alpha[Ls](n) + [Lt](n) \end{aligned}$$

Ova jednakost važi za svako $n \in \mathbb{N}$, iz čega sledi $L(\alpha s + t) = \alpha Ls + Lt$. Dakle, L je linearan operator.

1.2. Metrički prostor i topologija indukovana metrikom

Definicija 1.6. Metrika [1] na nepraznom skupu X je preslikavanje

$$d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$$

takvo da za sve $x, y, z \in X$ važi:

$$(i) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

$$(ii) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(iii) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Poslednja nejednakost naziva se nejednakost trougla. Metrički prostor (X, d) je neprazan skup X zajedno sa metrikom d na X .

Primer 1.7 (Primeri metričkih prostora).

1. $(\mathbb{R}^n, d)$ je metrički prostor, gde je d Euklidsko rastojanje definisano sa:

$$d(x, y) = \left((x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \right)^{1/2}$$

za bilo koje $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

2. Neka je X neprazan skup. Preslikavanje $d_d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definisano sa:

$$d_d(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 \neq x_2 \\ 0, & x_1 = x_2 \end{cases}$$

je metrika na X . Prema tome, (X, d_d) je metrički prostor (diskretna metrika).

Za dati metrički prostor (X, d) i $x, y, z \in X$, kažemo da je y bliže tački x nego što je to tačka z ako je $d(x, y) < d(x, z)$. Generalizovaćemo ovaj smisao blizine. Podsetimo se da je partitivni skup bilo kog skupa X , u oznaci $\mathcal{P}(X)$, skup svih podskupova od X , uključujući prazan skup $\emptyset$ i sam skup X .

Definicija 1.8. Neka je X skup. Kolekcija $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ naziva se topologija [10] na X ako važi:

$$(i) \quad \emptyset, X \in \mathcal{T},$$

$$(ii) \quad U \cap V \in \mathcal{T} \text{ za bilo koje } U, V \in \mathcal{T} \text{ (zatvorenost u odnosu na konačne preseke),}$$

$$(iii) \quad \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T} \text{ za bilo koju familiju } \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{T}, \text{ gde je } A \text{ skup indeksa (zatvorenost u odnosu na unije).}$$

Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je skup X zajedno sa topologijom $\mathcal{T}$ na X . Elementi skupa $\mathcal{T}$ nazivaju se otvorenim skupovima.

Definicija 1.9 (Otvorena i zatvorena lopta). Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$.

1. Otvorena lopta sa centrom u x_0 i poluprečnikom r je skup

$$B(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

2. Zatvorena lopta sa centrom u x_0 i poluprečnikom r je skup

$$\overline{B}(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}.$$

Primer 1.10. Neka je X neprazan skup. $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$ je topologija na X koja se naziva diskretna topologija na X .

Želimo da opišemo topologiju za metrički prostor (X, d) , ali je u opštem slučaju topologija velika i kompleksna familija. Opisaćemo topologiju koristeći manju familiju skupova.

Definicija 1.11. Neka je X skup i $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija podskupova. Kažemo da je $\mathcal{S}$ pokrivač skupa X , ili da $\mathcal{S}$ pokriva X , ako je $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$.

Definicija 1.12. Neka je X skup i $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ pokrivač skupa X . Definišemo topologiju generisanu sa $\mathcal{S}$, u oznaci $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, kao najmanju topologiju na X koja sadrži $\mathcal{S}$.

Pod najmanjom topologijom koja sadrži $\mathcal{S}$ podrazumevamo da je $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{T}$ za bilo koju topologiju $\mathcal{T}$ koja sadrži $\mathcal{S}$. Karakterišemo topologiju generisanu pokrivačem skupa na sledeći način.

Primer 1.13. Neka je X skup i $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ pokrivač skupa X . Tada je topologija generisana sa $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, skup svih unija konačnih preseka elemenata iz $\mathcal{S}$, to jest:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} \left(\bigcap_{i=1}^{N_{\alpha}} S_{\alpha_i} \right) \mid A \text{ je skup indeksa, } N_{\alpha} \in \mathbb{N} \text{ i } S_{\alpha_i} \in \mathcal{S} \text{ za } i = 1, \dots, N_{\alpha} \right\}$$

Dokaz. ($\supseteq$) Neka je

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} \left(\bigcap_{i=1}^{N_{\alpha}} S_{\alpha_i} \right)$$

za neki skup indeksa A , $N_{\alpha} \in \mathbb{N}$ i $S_{\alpha_i} \in \mathcal{S}$ za $i = 1, \dots, N_{\alpha}$. Po definiciji sledi da $S_{\alpha_i} \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ za sve α, N_{α}, i . Otuda $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$, jer je $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ topologija i zatvorena je u odnosu na unije i konačne preseke.

($\subseteq$) Označimo sa

$$\mathcal{F} := \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} \left(\bigcap_{i=1}^{N_{\alpha}} S_{\alpha_i} \right) \mid A \text{ je skup indeksa, } N_{\alpha} \in \mathbb{N} \text{ i } S_{\alpha_i} \in \mathcal{S} \text{ za } i = 1, \dots, N_{\alpha} \right\}$$

Lako se dokazuje da je $\mathcal{F}$ topologija na X koja sadrži $\mathcal{S}$. Očigledno je da $\mathcal{F}$ sadrži $\mathcal{S}$. Dokazaćemo da $\mathcal{F}$ zadovoljava uslove (i), (ii) i (iii) iz Definicije 1.8.

1. $X \in \mathcal{F}$ jer je $\mathcal{S}$ pokrivač skupa X , to jest $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$.
2. Ako $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, tada postoje skupovi indeksa A i B , $N_{\alpha} \in \mathbb{N}$ za sve $\alpha \in A$, $N_{\beta} \in \mathbb{N}$ za sve $\beta \in B$, i postoje $S_{\alpha_i} \in \mathcal{S}$ i $S_{\beta_i} \in \mathcal{S}$ takvi da je:

$$F_1 = \bigcup_{\alpha \in A} \left(\bigcap_{i=1}^{N_{\alpha}} S_{\alpha_i} \right) \quad \text{ i } \quad F_2 = \bigcup_{\beta \in B} \left(\bigcap_{i=1}^{N_{\beta}} S_{\beta_i} \right)$$

Sada imamo:

$$F_1 \cap F_2 = \bigcup_{\beta \in B} \left(F_1 \cap \bigcap_{i=1}^{N_\beta} S_{\beta_i} \right) = \bigcup_{\beta \in B} \left(\left(\bigcup_{\alpha \in A} \bigcap_{i=1}^{N_\alpha} S_{\alpha_i} \right) \cap \bigcap_{i=1}^{N_\beta} S_{\beta_i} \right)$$

$$F_1 \cap F_2 = \bigcup_{\beta \in B} \left(\bigcup_{\alpha \in A} \left(\bigcap_{i=1}^{N_\alpha} S_{\alpha_i} \cap \bigcap_{i=1}^{N_\beta} S_{\beta_i} \right) \right)$$

Pošto je presek dva konačna preseka elemenata iz $\mathcal{S}$ ponovo konačan presek elemenata iz $\mathcal{S}$, sledi da je $F_1 \cap F_2$ unija konačnih preseka elemenata iz $\mathcal{S}$, dakle $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

3. Na sličan način se dokazuje i uslov (iii) (zatvorenost za proizvoljne unije).

Konačno, primetimo da je $\mathcal{F}$ topologija koja sadrži $\mathcal{S}$. Štaviše, po definiciji, $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ je sadržana u svakoj topologiji koja sadrži $\mathcal{S}$, pa posebno važi $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{F}$. $\square$

Definicija 1.14. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Kažemo da je kolekcija $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ baza topologije $\mathcal{T}$ na X ako za svako $U \in \mathcal{T}$ i svako $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ tako da važi $x \in B$ i $B \subseteq U$.

Primedba 1.15. Neka je X skup, $\mathcal{T}$ topologija na X i $\mathcal{B}$ baza za $\mathcal{T}$. Tada je:

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \mid A \text{ je skup indeksa i } \{B_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

Dokaz. ($\subseteq$) Neka je $U \in \mathcal{T}$ i $x \in U$. Tada postoji $B_x \in \mathcal{B}$ tako da je $x \in B_x \subseteq U$. Prema tome, $U = \bigcup_{x \in U} B_x$, što znači da $U \in \{ \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \mid \{B_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{B} \}$.

($\supseteq$) Ako je $U \in \{ \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \mid \{B_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{B} \}$, tada je U unija otvorenih skupova, pa stoga $U \in \mathcal{T}$. $\square$

Ovo je razlog zašto smo definisali bazu topologije: za datu topologiju $\mathcal{T}$ i bazu $\mathcal{B}$, svaki otvoren skup se može posmatrati kao unija elemenata iz $\mathcal{B}$.

Primedba 1.16. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Ako je $\mathcal{B}$ baza za $\mathcal{T}$, tada je $\mathcal{B}$ pokrivač skupa X .

Dokaz. Iz $X \in \mathcal{T}$ sledi da za svako $x \in X$ postoji $B_x \in \mathcal{B}$ tako da je $x \in B_x \subseteq X$. Prema tome, $X = \bigcup_{x \in X} B_x$, iz čega sledi da je $\mathcal{B}$ pokrivač skupa X . $\square$

Primedba 1.17. Neka je X skup, $\mathcal{T}$ topologija na X i $\mathcal{B}$ baza za $\mathcal{T}$. Tada je $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{T}$.

Dokaz. Prvo primetimo da je $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ dobro definisana na osnovu Primedbe 1.13.

($\subseteq$) Ovaj smer je trivijalan jer je $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ sadržana u svakoj topologiji koja sadrži $\mathcal{B}$, a posebno $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{T}$.

($\supseteq$) Prema Primedbi 1.15, $\mathcal{T}$ je skup svih unija elemenata iz $\mathcal{B}$, a prema Primedbi 1.13, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ je skup svih unija konačnih preseka elemenata iz $\mathcal{B}$. Stoga je $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \supseteq \mathcal{T}$. $\square$

Primedba 1.18. Neka je X skup. Ako kolekcija $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ zadovoljava:

1. $\mathcal{B}$ je pokrivač skupa X ,
2. za sve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i za svako $x \in B_1 \cap B_2$ postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ tako da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$,

tada je $\mathcal{B}$ baza za topologiju $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ (topologija generisana sa $\mathcal{B}$).

Dokaz. Prvo primetimo da je $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ dobro definisana na osnovu (i). Neka je $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ i $x \in U$. Prema Primedbi 1.13, U je unija konačnih preseka elemenata iz $\mathcal{B}$, to jest

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} \left(\bigcap_{i=1}^{N_{\alpha}} B_{\alpha_i} \right)$$

gde je A skup indeksa, $N_{\alpha} \in \mathbb{N}$ i $B_{\alpha_i} \in \mathcal{B}$ za $i = 1, \dots, N_{\alpha}$. □

Tada je x u bar jednom od ovih konačnih preseka, to jest $x \in \bigcap_{i=1}^{N_{\alpha}} B_{\alpha_i}$ za neko $\alpha \in A$, $N_{\alpha} \in \mathbb{N}$ i $B_{\alpha_i} \in \mathcal{B}$. Prema (ii), postoji $B \in \mathcal{B}$ takvo da je

$$x \in B \subseteq \bigcap_{i=1}^{N_{\alpha}} B_{\alpha_i} \subseteq U$$

Stoga je $\mathcal{B}$ baza za $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Sada možemo opisati topologiju metričkog prostora i bazu za tu topologiju.

Primedba 1.19. Metrika d na nepraznom skupu X indukuje topologiju na X .

Dokaz. Posmatrajmo kolekciju

$$\mathcal{B} := \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x) \mid x \in X \text{ i } n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

gde je $B_{\epsilon}(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ otvorena kugla radijusa $\epsilon \in (0, \infty)$ sa centrom u x . Jasno je da važi

$$X = \bigcup_{x \in X} B_1(x)$$

tako da $\mathcal{B}$ zadovoljava uslov (i) iz Primedbe 1.18. Štaviše, za dve date otvorene kugle $B_{\frac{1}{n}}(x), B_{\frac{1}{m}}(y) \in \mathcal{B}$ sa $x, y \in X$ i $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ako je $p \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap B_{\frac{1}{m}}(y)$, tada je $B_{\epsilon}(p) \subseteq B_{\frac{1}{n}}(x) \cap B_{\frac{1}{m}}(y)$, gde je $\epsilon = \min\{\frac{1}{n} - d(p, x), \frac{1}{m} - d(p, y)\}$.

Konačno, postoji neko $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takvo da je $\frac{1}{N} \leq \epsilon$, pa sledi:

$$B_{\frac{1}{N}}(p) \subseteq B_{\epsilon}(p) \subseteq B_{\frac{1}{n}}(x) \cap B_{\frac{1}{m}}(y) \quad \text{ i } \quad B_{\frac{1}{N}}(p) \in \mathcal{B}$$

Stoga $\mathcal{B}$ zadovoljava uslov (ii) iz Primedbe 1.18.

Konsekventno, $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ je topološki prostor i, prema Primedbi 1.18, $\mathcal{B}$ je baza za $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. □

1.3. Normirani prostori i nejednakosti Minkovskog, Höldera i Janga

Sada se fokusiramo na vektorske prostore i generalizujemo ideju „dužine vektora”.

Definicija 1.20. Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathcal{K}$. Norma na X je preslikavanje

$$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

takvo da za sve $x, y \in X$ i $\alpha \in \mathcal{K}$ važi:

$$1. \|x\| = 0 \iff x = 0,$$

$$2. \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Poslednja nejednakost se naziva nejednakost trougla. Normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ je vektorski prostor X zajedno sa normom $\|\cdot\|$ na X .

Primer 1.21. Primeri normiranih prostora:

1. Racionalni brojevi zajedno sa apsolutnom vrednošću $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ čine normiran prostor.

2. Neka je $K \subset \mathbb{R}$ kompaktan skup. Definišemo $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$ za sve $f \in C(K)$. Primetimo najpre da je $\|f\|_\infty < \infty$ za sve $f \in C(K)$ jer je K kompaktan skup. Dalje, $\|\cdot\|_\infty$ je norma na $C(K)$, na osnovu svojstava supremuma i apsolutne vrednosti. Prema tome, $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ je normiran prostor.

Dokazaćemo da je ℓ^p normiran prostor, ali ćemo najpre dokazati tri važne nejednakosti.

Propozicija 1.22 (Jangova nejednakost). Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ i $p, q \in (1, \infty)$ takvi da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. U ovom slučaju kažemo da su p i q konjugovani eksponenti. Tada važi sledeća nejednakost:

$$\alpha^{1/p} \beta^{1/q} \leq \frac{1}{p} \alpha + \frac{1}{q} \beta. \quad (1.3.1)$$

Dokaz. Poznato je da je eksponencijalna funkcija $f(x) = e^x$ konveksna na $\mathbb{R}$, što znači da je $e^{\lambda x + (1-\lambda)y} \leq \lambda e^x + (1-\lambda)e^y$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$ i svako $\lambda \in [0, 1]$. Postavimo $\lambda = \frac{1}{p}$, $x = \ln \alpha$ i $y = \ln \beta$. Tada imamo:

$$\alpha^{1/p} \beta^{1/q} = e^{\frac{1}{p} \ln \alpha + \frac{1}{q} \ln \beta} = e^{\lambda x + (1-\lambda)y} \leq \lambda e^x + (1-\lambda)e^y = \frac{1}{p} \alpha + \frac{1}{q} \beta.$$

□

Propozicija 1.23 (Helderova nejednakost). Neka su $1 < p < \infty$ i $1 < q < \infty$ takvi da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada za bilo koji niz $(s_n) \in \ell^p$ i bilo koji niz $(t_n) \in \ell^q$, red $\sum_{n=0}^\infty s_n t_n$ konvergira apsolutno i važi sledeća nejednakost:

$$\sum_{n=0}^\infty |s_n t_n| \leq \left(\sum_{n=0}^\infty |s_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=0}^\infty |t_n|^q \right)^{1/q} \quad (1.3.2)$$

Dokaz. Ako je $(s_n) = 0$ ili $(t_n) = 0$, nejednakost je trivijalna. Pretpostavimo da je $(s_n) \neq 0$ i $(t_n) \neq 0$ i definišimo:

$$\alpha = \frac{|s_k|^p}{\sum_{n=0}^\infty |s_n|^p} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{|t_k|^q}{\sum_{n=0}^\infty |t_n|^q}$$

Primetimo da je $\alpha, \beta \geq 0$. Na osnovu Jangove nejednakosti imamo:

$$\frac{|s_k t_k|}{\left(\sum_{n=0}^\infty |s_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=0}^\infty |t_n|^q \right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|s_k|^p}{\sum_{n=0}^\infty |s_n|^p} + \frac{1}{q} \frac{|t_k|^q}{\sum_{n=0}^\infty |t_n|^q}$$

Zbrajanjem po svim k dobijamo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k t_k|}{(\sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p)^{1/p} (\sum_{n=0}^{\infty} |t_n|^q)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} |s_k|^p}{\sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} |t_k|^q}{\sum_{n=0}^{\infty} |t_n|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Odakle direktno sledi Helderova nejednakost. $\square$

Propozicija 1.24 (Nejednakost Minkovskog). *Neka je $1 \leq p < \infty$. Ako $(s_n), (t_n) \in \ell^p$, tada važi sledeća nejednakost:*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |s_n + t_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |t_n|^p \right)^{1/p} \quad (1.3.3)$$

Dokaz. Najpre podsetimo da je ℓ^p vektorski prostor nad poljem $\mathcal{K}$, pa je zatvoren u odnosu na sabiranje, te leva strana nejednakosti ima smisla. Za $p = 1$, dokaz sledi direktno iz nejednakosti trougla za apsolutnu vrednost. Pretpostavimo da je $1 < p < \infty$ i neka je $1 < q < \infty$ takvo da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |s_n + t_n|^p &= \sum_{n=0}^N |s_n + t_n| |s_n + t_n|^{p-1} \\ &\leq \sum_{n=0}^N |s_n| |s_n + t_n|^{p-1} + \sum_{n=0}^N |t_n| |s_n + t_n|^{p-1} \quad (\text{na osnovu nejednakosti trougla}). \end{aligned}$$

Primenom Helderove nejednakosti na oba sabirka dobijamo:

$$\sum_{n=0}^N |s_n + t_n|^p \leq \left(\sum_{n=0}^N |s_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=0}^N |s_n + t_n|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \left(\sum_{n=0}^N |t_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=0}^N |s_n + t_n|^{(p-1)q} \right)^{1/q}.$$

Kako je $(p-1)q = p$ (jer iz $1/q = 1 - 1/p = (p-1)/p$ sledi $q = p/(p-1)$), izraz sa desne strane nejednakosti postaje:

$$\left(\sum_{n=0}^N |s_n + t_n|^p \right)^{1/q} \left[\left(\sum_{n=0}^N |s_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=0}^N |t_n|^p \right)^{1/p} \right].$$

Ako je $\sum_{n=0}^{\infty} |s_n + t_n|^p = 0$, nejednakost je trivijalna. Pretpostavimo da je suma pozitivna za dovoljno veliko N . Deljenjem obe strane sa $(\sum_{n=0}^N |s_n + t_n|^p)^{1/q}$ i koristeći $1 - 1/q = 1/p$, dobijamo:

$$\left(\sum_{n=0}^N |s_n + t_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=0}^N |s_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=0}^N |t_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |t_n|^p \right)^{1/p}. \quad (1.3.4)$$

Konačna nejednakost se dobija puštanjem da $N \rightarrow \infty$. $\square$

Primer 1.25.

1. Za $1 \leq p < \infty$ definišemo normu:

$$\|s\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p \right)^{1/p} \quad \text{za svaki } s = (s_n) \in \ell^p.$$

2. Za $p = \infty$ definišemo:

$$\|s\|_{\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} \{|s_n|\} \text{ za svaki } s = (s_n) \in \ell^{\infty}.$$

Lako se dokazuje da je $\|\cdot\|_{\infty}$ norma na ℓ^{∞} . Takođe, na osnovu nejednakosti Minkovskog, $\|\cdot\|_p$ na ℓ^p zadovoljava nejednakost trougla. Dakle, $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ je normiran prostor za $1 \leq p \leq \infty$.

Primedba 1.26. Neka je X vektorski prostor nad poljem K . Norma $\|\cdot\|$ na X indukuje metriku d na X , gde je d definisana sa $d(x, y) := \|x - y\|$ za bilo koje $x, y \in X$. Trivijalno se dokazuje da je d metrika na X . Konsekventno, prema Primedbi 1.19, norma $\|\cdot\|$ takođe indukuje i topologiju na X .

Sada napominjemo da je norma na vektorskom prostoru nad poljem K neprekidno preslikavanje, ali najpre se podsetimo definicije neprekidnosti.

Definicija 1.27. Neka su $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topološki prostori. Kažemo da je preslikavanje $f : X \rightarrow Y$ neprekidno ako i samo ako je $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ za svako $U \in \mathcal{T}_Y$.

Primedba 1.28. Neka je X normiran prostor. Norma $\|\cdot\|$ na X je neprekidno preslikavanje.

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathbb{R}^+$ i $\|\cdot\|$ norma na X . Po definiciji norme, imamo:

$$\|\cdot\|^{-1}((a, b)) = \{x \in X \mid a < \|x\| < b\}.$$

Ako $x \in \|\cdot\|^{-1}((a, b))$, tada je $a < \|x\| < b$. Tada je $x \in B_{\epsilon}(x) \subseteq \|\cdot\|^{-1}((a, b))$, gde je $\epsilon = \min\{b - \|x\|, \|x\| - a\}$. Zaista, ako je $y \in B_{\epsilon}(x)$, tada je $\|y - x\| < \epsilon$, pa na osnovu obrnute nejednakosti trougla važi:

$$\| \|y\| - \|x\| \| \leq \|y - x\| < \epsilon$$

što povlači $a < \|y\| < b$. Dakle, $\|\cdot\|^{-1}((a, b))$ je otvoren skup. Konsekventno, norma je neprekidno preslikavanje. $\square$

Na sličan način možemo dokazati da je i metrika neprekidno preslikavanje.

1.4. Ograničeni linearni operatori

Sada kada znamo da su normirani prostori ujedno i topološki prostori, možemo govoriti o neprekidnim operatorima.

Primedba 1.29. Neka su X i Y normirani prostori [1] i $T : X \rightarrow Y$ linearni operator. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

1. T je neprekidan.
2. T je neprekidan u nuli (0).
3. T je ograničen, to jest $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ za svako $x \in X$ i neko $C \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Implikacija (1) $\implies$ (2) je očigledna.

(3) $\implies$ (1): Ako je T ograničen, tada je T Lipšic-neprekidan, što povlači da je T ravnomerno neprekidan, a samim tim i neprekidan.

(2) $\implies$ (3): Dokažemo kontrapozicijom. Ako T nije ograničen, tada postoji niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ takav da je $\|x_n\| = 1$ i $\|Tx_n\| > n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada $\frac{x_n}{n} \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$, ali je $\|T(\frac{x_n}{n})\| = \frac{1}{n}\|Tx_n\| > 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ovo implicira da T nije neprekidan u nuli. $\square$

Primer 1.30. Operator desnog pomeraja $R : \ell^p \rightarrow \ell^p$ je ograničen. Po definiciji je $\|Rs\|_p = \|s\|_p$ za svako $s \in \ell^p$, pa je R ograničen, a samim tim i neprekidan.

Primedba 1.31. Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normirani prostori. Definišemo:

$$\mathcal{B}(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ je neprekidan linearni operator}\}$$

Lako se dokazuje da je $\mathcal{B}(X, Y)$ vektorski prostor. Ako je T ograničen, tada važi $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ za svako $x \in X$ i neko $C \in \mathbb{R}$, pa možemo definisati normu operatora:

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq C \quad (1.4.1)$$

Preslikavanje $\|\cdot\|$ je norma na $\mathcal{B}(X, Y)$. Lako se dokazuju uslovi (i) i (ii) iz definicije 1.20, a nejednakost trougla (iii) dokazujemo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \|T + S\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|(T + S)x\|_Y}{\|x\|_X} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx + Sx\|_Y}{\|x\|_X} \\ &\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Sx\|_Y}{\|x\|_X} \quad (\|\cdot\|_Y \text{ je norma na } Y) \\ &= \|T\| + \|S\| \text{ za sve } T, S \in \mathcal{B}(X, Y). \end{aligned}$$

Neposredno dobijamo i sledeće jednakosti za normu operatora:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \\ &= \sup_{x \neq 0} \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y \quad (T \text{ je linearan i } \|\cdot\|_Y \text{ je norma}) \\ &= \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y. \end{aligned}$$

Primer 1.32. Neka je $R : \ell^p \rightarrow \ell^p$ operator desnog pomeraja. Direktnim izračunavanjem dobijamo:

$$\|R\| = \sup_{\|x\|_p=1} \|Rx\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|x\|_p = 1.$$

1.5. Banahovi prostori, Banahove algebre i dualni prostori

Poznato je da se skup $\mathbb{R}$ konstruiše iz skupa $\mathbb{Q}$, tako da je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$ kao topološki prostor i da je $\mathbb{R}$ kompletan. U opštem slučaju, za dati metrički prostor X , možemo konstruisati kompletan metrički prostor $\tilde{X}$ tako da je X gust u $\tilde{X}$.

Definicija 1.33. Neka je (X, d) metrički prostor. Kompletiranje prostora (X, d) je par $(\tilde{X}, \tilde{d})$ i izometrija $\varphi : X \rightarrow \tilde{X}$ takva da je $\varphi(X)$ gust skup u $\tilde{X}$.

Ovde je $\tilde{X}$ prostor čiji su elementi klase ekvivalencije Košijevih nizova iz X , pri čemu su dva niza (x_n) i (y_n) ekvivalentna ako $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$.

Metrika $\tilde{d}$ na $\tilde{X}$ definisana je sa

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n),$$

gde su $(x_n) \in \tilde{x}$ i $(y_n) \in \tilde{y}$ proizvoljni predstavnici klasa ekvivalencije $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$.

Izometrija $\varphi : X \rightarrow \tilde{X}$ preslikava svaki element $x \in X$ u klasu ekvivalencije konstantnog niza $(x, x, x, \dots)$.

Teorema 1.34. Svaki metrički prostor ima kompletiranje.

Za dokaz ove teoreme upućujemo na [7, p. 82].

Za dati metrički prostor (X, d) i njegovo kompletiranje $(\tilde{X}, \tilde{d}, \varphi)$, formalno $\tilde{X}$ nije nužno nadskup od X , ali ćemo identifikovati X sa $\varphi(X)$. To znači da ćemo govoriti da je X gust potprostor od $\tilde{X}$, izostavljajući izometriju φ .

Definicija 1.35. Banahov prostor je kompletan normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$, što znači da svaki Košijev niz u X konvergira ka nekom elementu u X .

Navešćemo neke primere Banahovih prostora.

Primer 1.36. Skup realnih brojeva zajedno sa apsolutnom vrednošću, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, jeste Banahov prostor.

Primer 1.37. Neka je Y Banahov prostor. Tada je $(\mathcal{B}(X, Y), \|\cdot\|)$ Banahov prostor.

Dokaz. Neka je $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ Košijev niz. Tada za svako $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n, m > N$ važi:

$$\|T_n - T_m\| < \epsilon.$$

Odavde dobijamo:

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| < \epsilon \|x\|.$$

Konsekventno, $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ je Košijev niz u Y za svako $x \in X$. Pošto je Y kompletan, niz $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira u Y , pa možemo definisati:

$$Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x.$$

Jasno je da je T linearan operator. Štaviše, na osnovu obrnute nejednakosti trougla važi:

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \leq \|T_n - T_m\| < \epsilon.$$

Dakle, $(\|T_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ je Košijev niz u $\mathbb{R}$. Pošto je $\mathbb{R}$ kompletan, $(\|T_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka nekom $C \in \mathbb{R}$. Sada primetimo:

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \quad (\|\cdot\| \text{ je neprekidna}) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \|x\| = C \|x\|. \end{aligned}$$

Dakle, T je ograničen operator. Na kraju, primetimo da je $T_n - T_m$ ograničen operator za svako $n, m \in \mathbb{N}$, pa imamo:

$$\|(T_n - T)x\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|(T_n - T_m)x\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_n - T_m\| \|x\|.$$

Iz prethodnih nejednakosti dobijamo:

$$\|(T_n - T)x\| \leq \epsilon \|x\|$$

za dovoljno veliko n i za svako $x \in X$. Prema tome, za svako $\epsilon > 0$:

$$\|T_n - T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(T_n - T)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\epsilon \|x\|}{\|x\|} = \epsilon$$

za dovoljno veliko n . Zaključujemo da $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka T u normi operatora. $\square$

Primer 1.38. Neka je $1 \leq p < \infty$. Tada je $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ Banahov prostor.

Dokaz. Neka je $(s^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ Košijev niz u ℓ^p , gde je svaki $s^{(m)} = (s_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$. Važi da je:

$$|s_j^{(m)} - s_j^{(k)}| \leq \|s^{(m)} - s^{(k)}\|_p$$

za bilo koje $j, m, k \in \mathbb{N}$. Ovo implicira da je $(s_j^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ Košijev niz u $\mathbb{K}$ za svako fiksirano $j \in \mathbb{N}$. Prema tome, $(s_j^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ konvergira ka nekom $s_j \in \mathbb{K}$. Neka je $s := (s_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

Želimo da dokažemo da je $s \in \ell^p$ i da niz $(s^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ konvergira ka s . Primitimo najpre da je niz $(s^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ ograničen (kao svaki Košijev niz), pa postoji $M > 0$ tako da je:

$$\left(\sum_{j=0}^N |s_j^{(m)} - s_j^{(k)}|^p \right)^{1/p} \leq \|s^{(m)} - s^{(k)}\|_p \leq M$$

za sve $m, k, N \in \mathbb{N}$. Puštajući $m \rightarrow \infty$ i koristeći obrnutu nejednakost trougla, imamo:

$$\left| \left(\sum_{j=0}^N |s_j|^p \right)^{1/p} - \left(\sum_{j=0}^N |s_j^{(k)}|^p \right)^{1/p} \right| \leq \left(\sum_{j=0}^N |s_j - s_j^{(k)}|^p \right)^{1/p} \leq M$$

za sve $k, N \in \mathbb{N}$. Otuda:

$$\left(\sum_{j=0}^N |s_j|^p \right)^{1/p} \leq M + \left(\sum_{j=0}^N |s_j^{(k)}|^p \right)^{1/p} \leq M + \|s^{(k)}\|_p$$

za svako $N \in \mathbb{N}$. Pošto ovo važi za svako N , zaključujemo da $(s_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^p$.

Konačno, neka je $\epsilon > 0$. Za dovoljno veliko m i k , imamo:

$$\left(\sum_{j=0}^N |s_j^{(m)} - s_j^{(k)}|^p \right)^{1/p} \leq \|s^{(m)} - s^{(k)}\|_p \leq \epsilon$$

za svako $N \in \mathbb{N}$. Puštajući $k \rightarrow \infty$, sledi:

$$\left(\sum_{j=0}^N |s_j^{(m)} - s_j|^p \right)^{1/p} \leq \epsilon$$

za svako $N \in \mathbb{N}$. Ako sada pustimo da $N \rightarrow \infty$, dobijamo:

$$\|s^{(m)} - s\|_p \leq \epsilon$$

za dovoljno veliko m , što znači da niz $(s^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ konvergira ka s u normi $\|\cdot\|_p$.

Na sličan način se može dokazati da je $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ Banahov prostor, koristeći analogne argumente gde se $\sum_{j=0}^N$ zamenjuje sa $\max_{0 \leq j \leq N}$, a norma $\|\cdot\|_p$ normom $\|\cdot\|_\infty$. $\square$

Teorema 1.39. *Neka je $(X, \|\cdot\|_X)$ normiran prostor, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banahov prostor i $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Tada postoji jedinstven neprekidan linearni operator $\tilde{T} : \tilde{X} \rightarrow Y$ takav da je $\tilde{T}|_X = T$. Pri tome važi $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Dokaz. Ako je $T \equiv 0$, produženje je trivijalno, pa pretpostavimo da je $T \neq 0$. Neka je $\tilde{X}$ kompletiranje prostora X . Za svako $x \in \tilde{X}$ postoji niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ takav da $x_n \rightarrow x$ kada $n \rightarrow \infty$. Kako $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira u $\tilde{X}$, on je Košijev niz u X . Stoga, za svako $\epsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da za $m, n > N$ važi $\|x_n - x_m\| < \frac{\epsilon}{\|T\|}$.

Sledi da je:

$$\epsilon > \|T\| \|x_n - x_m\| \geq \|T(x_n - x_m)\| = \|Tx_n - Tx_m\|,$$

što implicira da je $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev niz u Y . Pretpostavili smo da je Y kompletan, pa stoga $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka nekom $y \in Y$. Definišimo:

$$\tilde{T}x := y.$$

Moramo pokazati da je definicija nezavisna od izbora niza. Neka su (x_n) i $(\tilde{x}_n)$ dva niza u X koji konvergiraju ka istom x . Konstruišimo novi niz $(x_1, \tilde{x}_1, x_2, \tilde{x}_2, \dots)$ koji takođe konvergira ka x . Tada niz $(Tx_1, T\tilde{x}_1, Tx_2, \dots)$ konvergira ka nekom $\tilde{y} \in Y$. Odavde sledi:

$$\tilde{T}(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \tilde{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} T\tilde{x}_n = \tilde{T}(\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n).$$

Štaviše, ako $x_n \rightarrow x$, imamo:

$$\|\tilde{T}x\| = \|\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n\| \quad (\text{zbog neprekidnosti norme})$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\| \|x_n\| = \|T\| \|x\|_X.$$

Konsekventno, $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$, a trivijalno je da važi $\|T\| \leq \|\tilde{T}\|$. Dakle, $\tilde{T}$ je ograničen i $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. Linearnost operatora $\tilde{T}$ sledi iz linearnosti limesa i linearnosti operatora T .

Na kraju, pokažimo jedinstvenost neprekidnog produženja. Posmatrajmo dva neprekidna produženja $\tilde{T}$ i $\bar{T}$ operatora T . Za proizvoljan element $x \in \tilde{X}$ i niz (x_n) takav da $x_n \rightarrow x$, sledi:

$$\tilde{T}x = \tilde{T}(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \bar{T}(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \bar{T}x.$$

Dakle, $\tilde{T}$ je jedinstven. $\square$

Definicija 1.40 (Algebra). *Neka je A vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Kažemo da je A asocijativna algebra ako je na njemu definisana operacija množenja $\circ : A \times A \rightarrow A$ koja je:*

1. Asocijativna: $S \circ (T \circ R) = (S \circ T) \circ R$,

2. *Bilinearna*: $S \circ (\alpha T + \beta R) = \alpha(S \circ T) + \beta(S \circ R)$ i $(\alpha T + \beta R) \circ S = \alpha(T \circ S) + \beta(R \circ S)$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Primedba 1.41. Poznato je da je kompozicija neprekidnih funkcija neprekidna. Ako je $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ i $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$, tada je $ST \in \mathcal{B}(X, Z)$. Posebno,

$$\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$$

je asocijativna algebra.

Definicija 1.42 (Banahova algebra). Neka je $(A, +, \cdot, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Struktura $(A, +, \cdot, \circ, \|\cdot\|)$ je **Banahova algebra** ako važi:

1. $(A, +, \cdot, \circ)$ je asocijativna algebra,
2. $(A, \|\cdot\|)$ je Banahov prostor (kompletan normiran prostor),
3. $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$ za sve $T, S \in A$ (submultiplikativnost norme).

Primedba 1.43. Neka je X Banahov prostor. Tada je $\mathcal{B}(X)$ Banahova algebra.

Dokaz. Prema Primedbi 1.41, $\mathcal{B}(X)$ je asocijativna algebra, a prema Primeru 1.37, $\mathcal{B}(X)$ je Banahov prostor. Neka su $S, T \in \mathcal{B}(X)$. Za svako $x \in X$ imamo:

$$\|(ST)x\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|$$

za svako $x \in X$. Odavde sledi:

$$\frac{\|(ST)x\|}{\|x\|} \leq \|S\| \|T\|$$

za svako $x \neq 0$. Prema tome:

$$\|ST\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(ST)x\|}{\|x\|} \leq \|S\| \|T\|. \quad (1.5.1)$$

Konsekventno, $\mathcal{B}(X)$ je Banahova algebra. □

Postoji važan prostor linearnih operatora koje ćemo sledeće definisati.

Definicija 1.44 (Dualni prostor). Neka je X normiran prostor. Prostor $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ je **dualni prostor** prostora X . Elementi prostora X^* nazivaju se **funkcionalni**.

Primetimo da je X^* kompletan prostor (Banahov prostor) na osnovu primera 1.37, jer je polje $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) kompletan prostor.

Primer 1.45. Neka je $1 < p < \infty$ i neka je q takvo da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Neka je preslikavanje $\varphi : \ell^q \rightarrow (\ell^p)^*$ definisano sa:

$$(\varphi x)y = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$

za $x = (x_n) \in \ell^q$ i $y = (y_n) \in \ell^p$. Tada je φ izometrički izomorfizam.

Dokaz. Najpre primetimo da red $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ konvergira apsolutno na osnovu Helderove nejednakosti 1.23. Prema tome, φ je dobro definisano. Dalje, za dato $x = (x_n) \in \ell^q$, imamo:

$$|\varphi(x)y| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_q \|y\|_p$$

za svako $y = (y_n) \in \ell^p$. Odavde sledi $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|_q$, što znači da je φ ograničen operator. Za dokaz da je φ „na“ (surjekcija) i da važi $\|\varphi(x)\| \geq \|x\|_q$, upućujemo na [7]. $\square$

Definicija 1.46 (Seminorma). *Neka je X normiran prostor. Kažemo da je preslikavanje $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ seminorma na X [2] ako važi:*

1. $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$ za sve $x \in X$ i sve $\lambda \in \mathbb{K}$,
2. $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ za sve $x, y \in X$.

Primetimo da je svaka norma na vektorskom prostoru ujedno i seminorma na tom prostoru. Razlika je u tome što kod seminorme može postojati $x \neq 0$ takvo da je $\rho(x) = 0$. Iskoristićemo koncept seminorme da formulišemo važnu teoremu o produženju funkcionala.

Teorema 1.47 (Han-Banahova teorema). *Neka je X normiran prostor i neka je $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ seminorma na X . Neka je $Y \leq X$ potprostor i $\phi \in Y^*$ takav da važi:*

$$|\phi(y)| \leq \rho(y) \quad \text{za sve } y \in Y.$$

Tada postoji produženje $\tilde{\phi} \in X^$ funkcionala ϕ takvo da važi:*

$$|\tilde{\phi}(x)| \leq \rho(x) \quad \text{za sve } x \in X.$$

Posledica 1.48. *Neka je Y normiran prostor. Tada za svako $y \in Y$ važi:*

$$\|y\| = \sup_{\substack{y^* \in Y^* \\ \|y^*\|=1}} |y^*(y)|. \quad (1.5.2)$$

Za dokaz ove teoreme upućujemo na [7]. Koristićemo neke posledice Han-Banahove teoreme, ali ćemo se pozivati samo na glavnu teoremu.

Definicija 1.49. *Neka su X i Y normirani prostori i $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Definišemo **adjungovani operator** (u smislu Banahovih prostora) sa:*

$$T^* : Y^* \rightarrow X^*, \quad (T^* y^*)(x) = y^*(Tx) \quad \text{za sve } x \in X \text{ i sve } y^* \in Y^*.$$

Propozicija 1.50. *Neka su X, Y i Z normirani prostori. Tada važi:*

1. Ako $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, tada $T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$.
2. Preslikavanje $T \mapsto T^*$ je linearna izometrija sa $\mathcal{B}(X, Y)$ u $\mathcal{B}(Y^*, X^*)$.
3. $(ST)^* = T^* S^*$ za sve $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ i $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Dokaz. (i) Neka $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Neka su $y_1^*, y_2^* \in Y^*$, $x \in X$ i $\lambda \in \mathbb{K}$. Sledi:

$$T^*(\lambda y_1^* + y_2^*)x = (\lambda y_1^* + y_2^*)(Tx) = \lambda y_1^*(Tx) + y_2^*(Tx) = \lambda(T^*y_1^*)x + (T^*y_2^*)x,$$

što znači da je T^* linearan. Štaviše:

$$\|T^*y^*\| = \|y^* \circ T\| \leq \|y^*\| \|T\|,$$

što znači da je T^* ograničen. Konsekventno, $T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$.

(ii) Linearost preslikavanja $T \mapsto T^*$ je jasna. Želimo da dokažemo da je $\|T\| = \|T^*\|$, pa računamo:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left(\sup_{y^* \in Y^*, \|y^*\|=1} |y^*(Tx)| \right) \quad (\text{na osnovu posledice Han-Banahove teoreme (1.5.2)}) \\ &= \sup_{y^* \in Y^*, \|y^*\|=1} \left(\sup_{\|x\|=1} |(T^*y^*)x| \right) \\ &= \sup_{\|y^*\|=1} \|T^*y^*\| = \|T^*\|. \end{aligned}$$

(iii) Neka $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Neka je $z^* \in Z^*$ i $x \in X$. Sledi:

$$((ST)^*z^*)(x) = z^*(STx) = (S^*z^*)(Tx) = (T^*(S^*z^*))(x) = ((T^*S^*)z^*)(x).$$

Dakle, $(ST)^* = T^*S^*$. □

Primer 1.51. Neka je $1 \leq p < \infty$ i neka je q takvo da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Neka je $L : \ell^p \rightarrow \ell^p$ operator levog pomeraja (left shift). Primećujemo da je, prema Primeru 1.41, $(\ell^p)^* \cong \ell^q$ i za bilo koje $y = (y_n) \in \ell^q$ i $x = (x_n) \in \ell^p$ imamo:

$$\begin{aligned} (L^*y)x &= y(Lx) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n (Lx)_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n x_{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} y_{n-1} x_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (Ry)_n x_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (Ry)_n x_n = (Ry)x. \end{aligned}$$

Prema tome, desni pomeraj (right shift) na $\ell^q \cong (\ell^p)^*$ je adjungovani operator (u smislu Banahovih prostora) levog pomeraja na ℓ^p .

Razmatraćemo različite tipove konvergencije na $\mathcal{B}(X, Y)$, videti [6].

Definicija 1.52. Neka su X i Y normirani prostori, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ niz ograničenih linearnih operatora i $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

1. $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira u **normi operatora** ka T , što označavamo sa $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ ili $T_n \rightarrow T$, ako i samo ako je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0.$$

2. $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira **jako** ka T , što označavamo sa $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ ili $T_n \xrightarrow{s} T$, ako i samo ako je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x - T x\| = 0 \quad \text{za svako } x \in X.$$

3. $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira **slabo** ka T , što označavamo sa $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ ili $T_n \xrightarrow{w} T$, ako i samo ako je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi(T_n x) - \phi(T x)| = 0 \quad \text{za svako } x \in X \text{ i svako } \phi \in Y^*.$$

Važno je primetiti da ova tri tipa konvergencije nisu ista, ali postoji veza između njih.

Primedba 1.53. U definiciji 1.52 važi sledeće: $(1) \implies (2) \implies (3)$, ali $(3) \nRightarrow (2) \nRightarrow (1)$.

Dokaz. (i) $\implies$ (ii) Znamo da je $\|T_n x - T x\| = \|(T_n - T)x\| \leq \|T_n - T\| \|x\|$ za svako $x \in X$. Dakle, ako $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$, onda $\|T_n x - T x\| \rightarrow 0$ za svako $x \in X$.

(ii) $\implies$ (iii) Ponovo, $|\phi(T_n x) - \phi(T x)| = |\phi(T_n x - T x)| \leq \|\phi\| \|T_n x - T x\|$ za svako $\phi \in X^*$ i svako $x \in X$. Dakle, ako $\|T_n x - T x\| \rightarrow 0$, onda $|\phi(T_n x) - \phi(T x)| \rightarrow 0$.

(ii) $\nRightarrow$ (i) Neka je $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\ell^2)$ definisano sa $T_n x = (x_0, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ za $x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. Jasno je da $T_n x \rightarrow x$ kada $n \rightarrow \infty$ za svako $x \in \ell^2$, stoga $T_n \xrightarrow{s} id$. Međutim:

$$\|T_n - id\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(T_n - id)x\|}{\|x\|} \geq \|(T_n - id)e_{n+1}\| = 1$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Dakle, (T_n) ne konvergira ka id u normi operatora.

(iii) $\nRightarrow$ (ii) Neka je $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\ell^2)$ definisano sa $T_n x = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, x_0, x_1, \dots)$. Neka je $x = (x_n) \in \ell^2$, $\phi \in (\ell^2)^* = \ell^2$ i $\epsilon > 0$. Postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n > N$ važi $(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\phi_k|^2)^{1/2} < \frac{\epsilon}{\|x\|}$. Konsekventno:

$$|\phi(T_n x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \phi_k x_{k-n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\phi_k x_{k-n}| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\phi_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} < \epsilon.$$

To znači da $|\phi(T_n x)| \rightarrow 0$ za svako ϕ i svako x , pa $T_n \xrightarrow{w} 0$. S druge strane, $\|T_n x\| = \|x\|$ za svako n , pa (T_n) ne konvergira jako ka 0 (osim ako je $x = 0$). $\square$

1.6. Hilbertovi prostori

Iz linearne algebre znamo da je $\mathbb{K}^n$ izometrički izomorfno svom dualu $(\mathbb{K}^n)^*$ (u odnosu na Euklidsku normu) za svako $n \in \mathbb{N}$, videti [5]. Takođe, prema primedbi 1.45, ℓ^2 je izometrički izomorfno svom dualu $(\ell^2)^*$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_2$. Proučaćemo prostore kod kojih se dualni prostor može identifikovati sa samim prostorom.

Definicija 1.54. Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$. **Skalarni proizvod** na X je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ takvo da za sve $x, y, z \in X$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ važi:

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je seskvilinearna forma, tj.
 - $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$,
 - $\langle x, y + \lambda z \rangle = \langle x, y \rangle + \bar{\lambda} \langle x, z \rangle$,
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je pozitivno definitna forma, tj. $\langle x, x \rangle > 0$ ako je $x \in X \setminus \{0\}$ i $\langle x, x \rangle = 0$ ako je $x = 0$,
3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je hermitska forma, tj. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Prostor sa skalarnim proizvodom $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je vektorski prostor X zajedno sa skalarnim proizvodom $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Primer 1.55.

1. Standardni skalarni proizvod na $\mathbb{K}^n$ definisan sa:

$$x \cdot y := \sum_{i=0}^n x_i \bar{y}_i \quad \text{za } x = (x_i)_{i=0}^n, y = (y_i)_{i=0}^n \in \mathbb{K}^n$$

je skalarni proizvod na $\mathbb{K}^n$. Prema tome, $(\mathbb{K}^n, \cdot)$ je prostor sa skalarnim proizvodom.

2. Neka je $K \subset \mathbb{R}$ kompaktan skup. Seskvilinearna forma na $C(K)$ definisana sa:

$$\langle f, g \rangle := \int_K f(t) \overline{g(t)} dt \quad \text{za } f, g \in C(K)$$

je skalarni proizvod na $C(K)$. Dakle, $(C(K), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je prostor sa skalarnim proizvodom.

Skalarni proizvod nam daje veoma jaku strukturu na vektorskom prostoru. Primećimo da je $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$ za svako $x \in X$, i navešćemo jednu važnu nejednakost.

Teorema 1.56 (Cauchy-Schwarzova nejednakost). Neka je $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ prostor sa skalarnim proizvodom. Tada za sve $x, y \in X$ važi sledeća nejednakost:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \quad (1.6.1)$$

Jednakost u (1.6.1) važi ako i samo ako su x i y linearno zavisni.

Dokaz. Ako je $x = 0$ ili $y = 0$, nejednakost (1.6.1) je trivijalna. Pretpostavimo da je $y \neq 0$. Za bilo koje $\lambda \in \mathbb{K}$ važi:

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle.$$

Ako izaberemo $\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$, dobijamo:

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle},$$

odakle direktno sledi nejednakost. Ako je $x = \alpha y$, jednakost važi očigledno. Ako važi jednakost, tada je $\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = 0$ za gore navedeno λ , što povlači $x + \lambda y = 0$, čime je dokaz završen. $\square$

Primedba 1.57. Neka je X vektorski prostor nad $\mathbb{K}$. Skalarni proizvod $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na X indukuje normu na X .

Dokaz. Definišemo $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ za svako $x \in X$.

1. $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} \in \mathbb{R}^+$ i $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{1/2} = (\lambda \bar{\lambda})^{1/2} \langle x, x \rangle^{1/2} = |\lambda| \|x\|$ za sve $x \in X$.
3. Neka su $x, y \in X$. Imamo:

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
 &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \\
 &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\
 &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \quad (\text{prema Cauchy-Schwarz nejednakosti}) \\
 &= (\|x\| + \|y\|)^2.
 \end{aligned}$$

Prema tome, $(X, \|\cdot\|)$ je normiran prostor. □

Dakle, prema primedbama, skalarni proizvod indukuje normu Primedba 1.57, dok norma indukuje metriku Primedba 1.26, dok metrika indukuje topologiju Primedba 1.19.

Definicija 1.58. Kompletan prostor sa skalarnim proizvodom naziva se **Hilbertov prostor**.

Primer 1.59. Definišemo skalarni proizvod na ℓ^2 kao:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \bar{y}_n \quad \text{za sve } x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Najpre primetimo da je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dobro definisan na ℓ^2 na osnovu Helderove nejednakosti. Lako se dokazuje da je ovo zaista skalarni proizvod na ℓ^2 . Primetimo da je norma indukovana ovim skalarnim proizvodom upravo $\|\cdot\|_2$, a prema primeru 1.38, ℓ^2 je kompletan. Dakle, ℓ^2 je Hilbertov prostor.

Na kraju navodimo teoremu koja karakteriše dualni prostor Hilbertovog prostora.

Definicija 1.60. Neka su X i Y vektorski prostori nad $\mathbb{K}$. Kažemo da je preslikavanje $\varphi : X \rightarrow Y$ **antilinearno** ako važi $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \bar{\lambda} \varphi(y)$ za sve $x, y \in X$ i za svako $\lambda \in \mathbb{K}$.

Teorema 1.61 (Riesz-Fréchetova teorema o reprezentaciji). Neka je H Hilbertov prostor. Tada je preslikavanje

$$\Phi : H \rightarrow H^*, \quad y \mapsto \langle \cdot, y \rangle \tag{1.6.2}$$

izometrička antilinearna bijekcija.

Za dokaz upućujemo na [7]. Za dati Hilbertov prostor H , kažemo da je kanonski izomorfizam sa H na H^* definisan sa (1.6.2). U nastavku koristimo ovaj izomorfizam za definisanje novog operatora.

Definicija 1.62. Neka su H_1 i H_2 Hilbertovi prostori i neka je $\Phi_j : H_j \rightarrow H_j^*$ kanonski izomorfizam (1.6.2) za $j = 1, 2$. Neka je $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Definišemo **Hilbert-adjungovani operator** sa:

$$T^* = \Phi_1^{-1} T' \Phi_2 \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$$

gde je T' Banahov-adjungovani operator.

Primetimo da je svaki Φ_j izometrija, a T' je neprekidan (prema propoziciji 1.49), pa je i T^* neprekidan.

Propozicija 1.63. Neka su H_1 i H_2 Hilbertovi prostori i $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Operator $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ je Hilbert-adjungovani operator ako i samo ako važi:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \text{za svako } x \in H_1 \text{ i svako } y \in H_2. \quad (1.6.3)$$

Dokaz. Neka su $\Phi_j : H_j \rightarrow H_j^*$ kanonski izomorfizmi za $j = 1, 2$, i neka je $x \in H_1$ i $y \in H_2$.

($\Rightarrow$) Ako je $T^* = \Phi_1^{-1} T' \Phi_2$, tada imamo:

$$\langle Tx, y \rangle = (\Phi_2(y))(Tx) = (T'(\Phi_2(y)))(x) = \langle x, (\Phi_1^{-1} T' \Phi_2)y \rangle = \langle x, T^*y \rangle.$$

Ovde smo koristili

- **Korak 1: Koristimo Risovu teoremu o reprezentaciji za H_1 .** Budući da ovaj funkcional deluje na H_1 , postoji jedinstven vektor $z \in H_1$ takav da važi:

$$(T' \Phi_2 y)(x) = \Phi_1(z)(x) = \langle x, z \rangle_1$$

- **Korak 2: Rešavamo po z .** Iz jednakosti funkcionala $T' \Phi_2 y = \Phi_1 z$, primenom inverznog Risovog preslikavanja Φ_1^{-1} dobijamo:

$$z = \Phi_1^{-1} T' \Phi_2 y$$

- **Korak 3: Zamenjujemo z nazad u skalarni proizvod.** Uvrštavanjem dobijenog izraza za z u desnu stranu skalarnog proizvoda dobijamo:

$$\langle x, \Phi_1^{-1} T' \Phi_2 y \rangle_1$$

Prema našoj početnoj definiciji $T^* = \Phi_1^{-1} T' \Phi_2$, ovo je upravo:

$$\langle x, T^*y \rangle_1$$

($\Leftarrow$) Ako važi $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$, tada:

$$(T' \Phi_2(y))(x) = \Phi_2(y)(Tx) = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \Phi_1(T^*y)(x).$$

Primenjujući Φ_1^{-1} na obe strane poslednje jednakosti, dobijamo $T^* = \Phi_1^{-1} T' \Phi_2$. $\square$

Na osnovu prethodnog stava, primetimo da se Hilbert-adjungovani operator podudara sa uobičajenim adjungovanim operatorom (konjugovano-transponovana matrica) na prostoru $\mathbb{C}^n$.

Primedba 1.64. Neka su H_1 i H_2 Hilbertovi prostori i $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Neka je $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ Hilbert-adjungovani operator operatora T . Tada važi $\|T\| = \|T^*\|$.

Dokaz. Primetimo da je, prema propoziciji 1.49 (ii), preslikavanje $T \mapsto T'$ izometrija. Kako je Hilbert-adjungovani operator T^* definisan kao kompozicija izometrija (Φ_1^{-1} , T' i Φ_2), sledi da je i preslikavanje $T \mapsto T^*$ izometrija. Konsekventno, $\|T\| = \|T^*\|$. $\square$

Definicija 1.65. Neka je H Hilbertov prostor i $T \in \mathcal{B}(H)$. Kažemo da je operator T **samo-adjungovan** (self-adjoint) ako važi $T^* = T$.

Kasnije ćemo se detaljnije fokusirati na ovu posebnu vrstu operatora.

1.7. Spektar linearnih operatora

Ako je T linearna transformacija na $\mathbb{K}^n$, tada su sopstvene vrednosti operatora T brojevi $\lambda \in \mathbb{C}$ takvi da $T - \lambda I$ nije invertibilan. Sopstvene vrednosti su veoma važne u proučavanju linearnih transformacija. Stoga ćemo generalizovati pojam sopstvene vrednosti za ograničene operatore na Banahovim prostorima.

Definicija 1.66. Neka je X Banahov prostor i $T \in \mathcal{B}(X)$. Za kompleksan broj λ kažemo da se nalazi u **rezolventnom skupu** $\rho(T)$ operatora T ako je $T - \lambda I$ bijekcija sa ograničenim inverzom. Operator $R_T(\lambda) := (T - \lambda I)^{-1}$ naziva se **rezolventa** operatora T u tački $\lambda \in \rho(T)$. Skup $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ naziva se **spektar** operatora T .

Lema 1.67 (Nojmanov red). Neka je X Banahov prostor i $T \in \mathcal{B}(X)$. Ako je $\|T\| < 1$, tada operator $(I - T)^{-1}$ postoji i ograničen je. Štaviše, važi:

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n = I + T + T^2 + \dots \quad (1.7.1)$$

gde red konvergira u normi operatora.

Dokaz. Prvo dokazujemo da red konvergira u normi operatora. Primetimo da važi:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^N T^n \right\| &\leq \sum_{n=0}^N \|T^n\| \quad (\text{subaditivnost norme}) \\ &\leq \sum_{n=0}^N \|T\|^n \quad (\text{submultiplikativnost norme (1.5.1)}) \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

za svako $N \in \mathbb{N}$. Na osnovu osobina geometrijskog reda, izraz 1.7.2 konvergira kada $N \rightarrow \infty$, jer je $\|T\| < 1$. Prema tome, red $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ konvergira apsolutno. Pošto je X kompletan, sledi da je $\mathcal{B}(X)$ takođe kompletan (prema primeru 1.37), pa red konvergira u normi operatora.

Označimo sa $S := \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. Izračunajmo:

$$(I - T)(I + T + \dots + T^N) = (I + T + \dots + T^N)(I - T) = I - T^{N+1}.$$

Ako pustimo da $N \rightarrow \infty$, tada $T^{N+1} \rightarrow \mathbf{0}$ jer je $\|T\| < 1$, pa dobijamo:

$$(I - T)S = S(I - T) = I,$$

što znači da je S inverz operatora $(I - T)$. □

Teorema 1.68. Neka je X Banahov prostor i $T \in \mathcal{B}(X)$. Tada je rezolventni skup $\rho(T)$ otvoren.

Dokaz. Ako je $\rho(T) = \emptyset$, tada je po definiciji $\rho(T)$ otvoren skup. Pretpostavimo da je $\rho(T) \neq \emptyset$. Za fiksirano $\lambda_0 \in \rho(T)$ i bilo koje $\lambda \in \mathbb{C}$ imamo:

$$\begin{aligned} T - \lambda I &= T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I \\ &= T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)(T - \lambda_0 I)^{-1} \\ &= (T - \lambda_0 I) \left[I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Označimo sa $V := I - (\lambda - \lambda_0)R_T(\lambda_0)$. Na osnovu leme 1.67, operator V ima inverz ako važi:

$$\|(\lambda - \lambda_0)R_T(\lambda_0)\| < 1.$$

Dakle, V ima inverz ako je:

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_T(\lambda_0)\|}.$$

Konsekventno, $T - \lambda I$ je invertibilan ako $\lambda \in B_\epsilon(\lambda_0)$, gde je $\epsilon := \frac{1}{\|R_T(\lambda_0)\|}$. Prema tome, $\lambda \in B_\epsilon(\lambda_0) \subseteq \rho(T)$, što znači da je $\rho(T)$ otvoren skup.

Pošto je cela kugla $B_\epsilon(\lambda_0)$ sadržana u $\rho(T)$, i pošto je λ_0 proizvoljno izabrano, zaključujemo da $\rho(T)$ sadrži okolinu za svaku svoju tačku. Prema tome, $\rho(T)$ je otvoren skup u $\mathbb{C}$. $\square$

Iz ove teoreme direktno slede sledeće posledice:

Posledica 1.69. Neka je X Banahov prostor i $T \in \mathcal{B}(X)$. Tada je spektar $\sigma(T)$ zatvoren skup.

Posledica 1.70. Neka je X Banahov prostor i $T \in \mathcal{B}(X)$. Za svako $\lambda_0 \in \rho(T)$, rezolventa $R_T(\lambda)$ ima predstavljanje u obliku reda:

$$R_T(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_T(\lambda_0)^{n+1} \quad (1.7.3)$$

za svako $\lambda \in B_\epsilon(\lambda_0) \subseteq \rho(T)$, gde je $\epsilon := \frac{1}{\|R_T(\lambda_0)\|}$. Red konvergira u normi operatora.

Dokaz. Kao u dokazu Teoreme 1.68, imamo:

$$T - \lambda I = (T - \lambda_0 I)(I - (\lambda - \lambda_0)R_T(\lambda_0)).$$

Ako je $\lambda \in B_\epsilon(\lambda_0) \subseteq \rho(T)$, gde je $\epsilon := \frac{1}{\|R_T(\lambda_0)\|}$, tada je prema lemi 1.67 operator $I - (\lambda - \lambda_0)R_T(\lambda_0)$ invertibilan i važi:

$$\begin{aligned} R_T(\lambda) &= (T - \lambda I)^{-1} \\ &= (I - (\lambda - \lambda_0)R_T(\lambda_0))^{-1}(T - \lambda_0 I)^{-1} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_T(\lambda_0)^n \right) R_T(\lambda_0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_T(\lambda_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Na kraju, prema Lemi 1.67, ovaj red konvergira u normi operatora. $\square$

Teorema 1.71. Neka je X Banahov prostor i $T \in \mathcal{B}(X)$. Tada se spektar $\sigma(T)$ nalazi u zatvorenoj kugli $\bar{B}_{\|T\|}(0)$, odnosno $|\lambda| \leq \|T\|$ za svako $\lambda \in \sigma(T)$.

Dokaz. Neka je $|\lambda| > \|T\|$. Tada je $\|\frac{1}{\lambda}T\| < 1$. Na osnovu leme 1.67, rezolventa $R_T(\lambda)$ ima predstavljanje u obliku reda na sledeći način:

$$\begin{aligned} R_T(\lambda) &= (T - \lambda I)^{-1} = \left(-\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda}T \right) \right)^{-1} \\ &= -\frac{1}{\lambda} \left(I - \frac{1}{\lambda}T \right)^{-1} \\ &= -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}T \right)^n \end{aligned}$$

ako je $\|\frac{1}{\lambda}T\| < 1$, što je ekvivalentno sa $\|T\| < |\lambda|$. Dakle, $\rho(T) \supseteq \mathbb{C} \setminus \bar{B}_{\|T\|}(0)$. Odavde direktno sledi da je $\sigma(T) \subseteq \bar{B}_{\|T\|}(0)$. $\square$

Posledica 1.72. *Neka je X Banahov prostor i $T \in \mathcal{B}(X)$. Tada je spektar $\sigma(T)$ kompaktan skup.*

Dokaz. Prema posledici 1.69, $\sigma(T)$ je zatvoren skup, a prema Teoremi 1.71, $\sigma(T)$ je ograničen. Konsekventno, na osnovu Hajne-Borelove teoreme, $\sigma(T)$ je kompaktan skup. $\square$

Takođe, kao posledicu imamo da rezolventni skup ograničenog operatora nije prazan. Štaviše, kako je spektar ograničenog operatora ograničen skup, možemo definisati sledeći koncept.

Definicija 1.73. *Neka je X Banahov prostor i $T \in \mathcal{B}(X)$. **Spektralni radijus** operatora T definiše se kao:*

$$r(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|. \quad (1.7.4)$$

Iz teoreme 1.71 je očigledno da važi $r(T) \leq \|T\|$.

Teorema 1.74 (Formula za spektralni radijus). *Neka je X Banahov prostor i $T \in \mathcal{B}(X)$. Tada niz $(\|T^n\|^{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira i važi:*

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}. \quad (1.7.5)$$

Za dokaz ove teoreme upućujemo na [9, str. 253].

1.8. Tehničke propozicije o operatorima

Teorema 1.75. *Neka je H Hilbertov prostor i $T \in \mathcal{B}(H)$. Tada važi dekompozicija:*

$$H = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \ker(T^*) \quad (1.8.1)$$

odnosno, $\mathcal{R}(T)^\perp = \ker(T^*)$.

Dokaz. Da bismo dokazali da je $H = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \ker(T^*)$, dovoljno je pokazati da je ortogonalni komplement slike jednak jezgru adjungovanog operatora, tj. $\mathcal{R}(T)^\perp = \ker(T^*)$.

Krenimo od definicije ortogonalnog komplementa. Vektor y pripada $\mathcal{R}(T)^\perp$ ako i samo ako je ortogonalan na svaki element iz slike operatora T :

$$y \in \mathcal{R}(T)^\perp \iff \langle Tx, y \rangle = 0 \quad \text{za svako } x \in H.$$

Koristeći definiciju adjungovanog operatora ($\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$), gornji uslov postaje:

$$\langle x, T^*y \rangle = 0 \quad \text{za svako } x \in H.$$

Jedini vektor koji je ortogonalan na ceo prostor H je nula-vektor. Dakle, prethodni uslov je ekvivalentan sa:

$$T^*y = 0,$$

što po definiciji znači da $y \in \ker(T^*)$.

Ovim smo pokazali da je $\mathcal{R}(T)^\perp = \ker(T^*)$. Pošto za svaki zatvoren potprostor M u Hilbertovom prostoru važi $H = M \oplus M^\perp$, videti [8, str. 80], i uzimajući $M = \overline{\mathcal{R}(T)}$ (pri čemu je $M^\perp = (\overline{\mathcal{R}(T)})^\perp = \mathcal{R}(T)^\perp$), dobijamo traženu dekompoziciju:

$$H = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \ker(T^*).$$

□

Propozicija 1.76. *Operator T je injektivan ako i samo ako je njegovo jezgro trivijalno, tj. $\ker(T) = \{0\}$.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Neka je $\ker(T) = \{0\}$. Pokažimo da je T injektivan odnosno $(1-1)$. Neka je $T(x) = T(y)$. Zbog linearnosti operatora važi $T(x-y) = 0$, odakle sledi da $x-y \in \ker(T)$. Na osnovu pretpostavke o jezgru, zaključujemo $x-y = 0$, tj. $x = y$.

($\Rightarrow$) Neka je T injektivan. Neka je $x \in \ker(T)$, tada je $T(x) = 0$. S druge strane, znamo da za linearne operatore uvek važi $T(0) = 0$, pa imamo $T(x) = T(0)$. Iz definicije injektivnosti, gde $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$, direktno sledi $x = 0$. Pošto je x bio proizvoljan element jezgra, sledi $\ker(T) = \{0\}$. □

Pre nego što kompletiramo dokaz o spektru samoadjungovanih operatora, formulišemo sledeće opšte rezultate.

Propozicija 1.77. *Neka je $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ linearan operator koji je **ograničen odozdo**, tj. postoji $c > 0$ tako da je $\|Tx\| \geq c\|x\|$ za svako $x \in X$. Tada je T injektivan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x \in \ker(T)$. Tada je $Tx = 0$, pa iz uslova ograničenosti odozdo sledi $0 = \|Tx\| \geq c\|x\|$. Kako je $c > 0$, mora biti $\|x\| = 0$, odnosno $x = 0$. Dakle, $\ker(T) = \{0\}$, odakle po Propoziciji 1.76 imamo da je injektivan. □

Propozicija 1.78. *Neka su X, Y Banahovi prostori. Ako je $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ograničen odozdo, tada je njegova slika $\mathcal{R}(T)$ zatvoren potprostor u Y .*

Dokaz. Neka je (y_n) niz u $\mathcal{R}(T)$ takav da $y_n \rightarrow y \in Y$. Pokažimo da je $y \in \mathcal{R}(T)$. Za svako n postoji $x_n \in X$ tako da je $Tx_n = y_n$. Iz ograničenosti odozdo sledi:

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c} \|T(x_n - x_m)\| = \frac{1}{c} \|y_n - y_m\|.$$

Budući da je (y_n) konvergentan, on je Cauchy-jev, pa je i (x_n) Cauchy-jev niz u X . Zbog kompletnosti prostora X , $x_n \rightarrow x$. Zbog neprekidnosti operatora T važi $Tx = T(\lim x_n) = \lim Tx_n = \lim y_n = y$. Dakle, $y = Tx \in \mathcal{R}(T)$, što znači da je $\mathcal{R}(T)$ zatvoren skup. □

Propozicija 1.79. *Neka je H Hilbertov prostor i $T \in \mathcal{B}(H)$ samoadjungovan operator. Ako je T injektivan i ima zatvorenu sliku, tada je T surjektivan (preslikava **na** H).*

Dokaz. Koristimo jednakost 1.8.1, odakle imamo $H = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \ker(T^*)$. Kako je T samoadjungovan, imamo $T = T^*$. Iz injektivnosti sledi $\ker(T) = \{0\}$, pa je i $\ker(T^*) = \{0\}$. To implicira da je $\overline{\mathcal{R}(T)} = H$, odnosno slika je gusta u H . Pošto je slika po pretpostavci zatvorena, važi $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)} = H$. Dakle, T je surjektivan. □

1.9. Spektar samoadjungovanih i pozitivnih operatora

Pre nego što pređemo na funkcionalni račun, moramo precizno odrediti gde se u kompleksnoj ravni nalazi spektar operatora sa specijalnim svojstvima.

Teorema 1.80. *Ako je $A \in \mathcal{B}(H)$ samoadjungovan operator, tada je $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Dokaz. Neka je $\lambda \in \sigma(A)$ sopstvena vrednost i $x \neq 0$ pripadajući sopstveni vektor ($Ax = \lambda x$). Tada važi:

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle.$$

Pošto je $\langle x, x \rangle > 0$, sledi $\lambda = \bar{\lambda}$, što znači da je $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Teorema 1.81. *Neka je $A : X \rightarrow Y$ ograničen linearan operator između normiranih prostora X i Y . Operator A ima ograničen inverzni operator $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \rightarrow X$ ako i samo ako je A ograničen odozdo, tj. ako postoji konstanta $m > 0$ takva da važi:*

$$\|Ax\|_Y \geq m\|x\|_X, \quad \forall x \in X. \quad (1.9.1)$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da postoji ograničen inverzni operator $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \rightarrow X$. Po definiciji ograničenog operatora, postoji realan broj $M > 0$ takav da za svako $y \in \mathcal{R}(A)$ važi nejednakost:

$$\|A^{-1}y\|_X \leq M\|y\|_Y.$$

Budući da je svaki element $y \in \mathcal{R}(A)$ oblika $y = Ax$ za neko $x \in X$, i kako je $A^{-1}Ax = x$, zamenom dobijamo:

$$\|x\|_X \leq M\|Ax\|_Y.$$

Odavde direktno sledi da je:

$$\|Ax\|_Y \geq \frac{1}{M}\|x\|_X.$$

Uzimajući $m = \frac{1}{M} > 0$, zaključujemo da je operator A ograničen odozdo.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo sada da je operator A ograničen odozdo, odnosno da postoji $m > 0$ takvo da je $\|Ax\| \geq m\|x\|$ za svako $x \in X$.

1. *Injektivnost:* Kako je operator ograničen odozdo, on je i injektivan prema Propoziciji 1.77, što garantuje postojanje inverznog preslikavanja A^{-1} na slici $\mathcal{R}(A)$.
2. *Ograničenost inverza:* Neka je $y \in \mathcal{R}(A)$ i $x = A^{-1}y$. Koristeći uslov ograničenosti odozdo, imamo:

$$\|y\|_Y = \|Ax\|_Y \geq m\|x\|_X = m\|A^{-1}y\|_X.$$

Sređivanjem dobijamo:

$$\|A^{-1}y\|_X \leq \frac{1}{m}\|y\|_Y, \quad \forall y \in \mathcal{R}(A).$$

Ovo dokazuje da je operator A^{-1} ograničen, pri čemu je njegova norma $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$.

Time je dokaz završen. □

Teorema 1.82. *Ako je $A \in \mathcal{B}(H)$ nenegativan operator ($\langle Ax, x \rangle \geq 0$), tada je $\sigma(A) \subset [0, \infty)$.*

Dokaz. Već znamo da je $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ jer je svaki nenegativan operator nužno samoadjungovan. Pretpostavimo da je $\lambda < 0$. Pokažimo da je $A - \lambda I$ invertibilan. Za svako $x \neq 0$ imamo:

$$\langle (A - \lambda I)x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle - \lambda \langle x, x \rangle.$$

Pošto je $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ i $-\lambda > 0$, sledi:

$$\langle (A - \lambda I)x, x \rangle \geq |\lambda| \|x\|^2.$$

Primenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti:

$$|\lambda| \|x\|^2 \leq \langle (A - \lambda I)x, x \rangle \leq \|(A - \lambda I)x\| \cdot \|x\|.$$

Deljenjem sa $\|x\|$ dobijamo $\|(A - \lambda I)x\| \geq |\lambda| \|x\|$. Ovo znači da je operator $A - \lambda I$ odozdo ograničen pa ima ograničen inverzni operator prema Teoremi 1.81, pa je injektivan po Propoziciji 1.77 i ima zatvorenu sliku po Propoziciji 1.78. Kako je operator samoadjungovan, on je i surjektivan po Propoziciji 1.79, pa je $\lambda \in \rho(A)$. Dakle, λ ne može biti u spektru. $\square$

Glava 2

Funkcionalni račun

2.1. Uvod u funkcionalni račun

U ovom poglavlju radićemo sa ograničenim linearnim operatorima.

Definicija 2.1 (Polinomni račun). *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{B}(X)$ i $P(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ polinom sa kompleksnim koeficijentima. Definišemo operator:*

$$P(T) := \sum_{n=0}^N a_n T^n \quad (2.1.1)$$

rekurzivno sa $T^0 = I$ i $T^n = T^{n-1} \circ T$ za $n = 1, \dots, N$.

Na osnovu primedbe 1.41, $P(T)$ je dobro definisan ograničen linearan operator. Sada možemo razmatrati polinomske izraze po T , kao što je T^2 . Kasnije ćemo konstruisati i složenije operatore poput $T^{1/2}$. U nastavku pokazujemo da se spektar operatora $P(T)$ može karakterisati preko spektra operatora T .

Teorema 2.2 (Teorema o preslikavanju spektra za polinome). *Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{B}(X)$ i $P(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ polinom sa koeficijentima u $\mathbb{C}$. Tada važi:*

$$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)) := \{P(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\}. \quad (2.1.2)$$

Dokaz. ($\supseteq$) Neka je $\lambda \in \sigma(T)$. Tada je $x = \lambda$ koren polinoma $P(x) - P(\lambda)$, što znači da važi:

$$P(x) - P(\lambda) = (x - \lambda)Q(x) = Q(x)(x - \lambda)$$

gde je Q polinom sa kompleksnim koeficijentima. Prema definiciji 2.1, sledi:

$$P(T) - P(\lambda)I = (T - \lambda I)Q(T) = Q(T)(T - \lambda I).$$

Kako operator $(T - \lambda I)$ nema inverz (jer $\lambda \in \sigma(T)$), ni operator $P(T) - P(\lambda)I$ ne može imati inverz. Dakle, $P(\lambda) \in \sigma(P(T))$.

($\subseteq$) Neka je $\mu \in \sigma(P(T))$. Ako su $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ koreni polinoma $P(x) - \mu$, onda je:

$$P(x) - \mu = a_N(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_N).$$

Pretpostavimo da $\lambda_1, \dots, \lambda_N \notin \sigma(T)$. Tada je operator $(T - \lambda_i I)$ invertibilan za svako $i = 1, \dots, N$. U tom slučaju, operator $(P(T) - \mu I)$ bi bio invertibilan, a njegov inverz bi bio:

$$(P(T) - \mu I)^{-1} = a_N^{-1}(T - \lambda_N I)^{-1} \cdots (T - \lambda_1 I)^{-1}.$$

To bi značilo da $\mu \notin \sigma(P(T))$, što je u kontradikciji sa našom pretpostavkom. Prema tome, bar neko λ_i mora pripadati spektru $\sigma(T)$. Za to λ_i važi:

$$P(\lambda_i) - \mu = a_N(\lambda_i - \lambda_1) \cdots (\lambda_i - \lambda_N) = 0.$$

Sledi da je $\mu = P(\lambda_i)$, odnosno $\mu \in P(\sigma(T))$. □

Uvodi se generalizacija prostora ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru.

Definicija 2.3. Neka je $\mathcal{C}$ [3] Banahova algebra. **Involucija** na $\mathcal{C}$ je preslikavanje $*$: $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ takvo da za sve $T, S \in \mathcal{C}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ važi:

1. Svojstva involucije:

- $(T + S)^* = T^* + S^*$,
- $(TS)^* = S^*T^*$,
- $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$,
- $(T^*)^* = T$.

2. C^* -identitet:

$$\|TT^*\| = \|T\|^2. \quad (2.1.3)$$

C^* -algebra $(\mathcal{C}, *)$ je Banahova algebra $\mathcal{C}$ zajedno sa involucijom $*$.

Primetimo da iz C^* -identiteta direktno sledi $\|TT^*\| = \|T^*T\|$, prvo zamenom T sa T^* u C^* identitet imamo $\|T^*T\| = \|T^*\|^2$, a posto je Banahova adjungovanost izometrija, znamo da je $\|T\| = \|T^*\|$ te imamo jednakost. Nećemo detaljno razvijati teoriju ovih prostora, ali ćemo ih koristiti za proširenje definicije 2.1.

Primer 2.4. Primeri C^* -algebri:

1. Kompleksni brojevi $\mathbb{C}$ zajedno sa kompleksnom konjugacijom čine C^* -algebru.
2. Neka je $K \subset \mathbb{C}$ kompaktan skup. Prostor neprekidnih funkcija $C(K)$ zajedno sa kompleksnom konjugacijom je C^* -algebra.
3. Neka je H Hilbertov prostor. Neka je involucija definisana kao:

$$*: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H), \quad T \mapsto T^*$$

gde je T^* Hilbert-adjungovani operator. Jasno je da $*$ zadovoljava uslove svojstva involucije iz definicije 2.3. Prema Primedbi 1.64, važi $\|T\| = \|T^*\|$, pa imamo:

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2.$$

Štaviše, važi:

$$\begin{aligned}\|T^*T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T^*Tx\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} (\sup\{|\phi(T^*Tx)| : \phi \in H^*, \|\phi\| = 1\})\end{aligned}\quad (2.1.4)$$

$$= \sup_{\|x\|=1} (\sup\{|\langle T^*Tx, z \rangle| : z \in H, \|z\| = 1\}) \quad (2.1.5)$$

$$\geq \sup_{\|x\|=1} |\langle T^*Tx, x \rangle|$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, Tx \rangle$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \|T\|^2.$$

Dakle, $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Jednakost (2.1.4) važi na osnovu Han-Banahove teoreme, a (2.1.5) na osnovu Ris-Frešeoove teoreme o reprezentaciji. Ova jednakost implicira C^* -identitet, pa je $(\mathcal{B}(H), *)$ C^* -algebra.

Primedba 2.5. Neka je H Hilbertov prostor, $T \in \mathcal{B}(H)$, i neka je $r(T^*T)$ spektralni radijus operatora T^*T . Tada važi:

$$\|T\|^2 = \|T^*T\| = r(T^*T). \quad (2.1.6)$$

Dokaz. Prva jednakost je zapravo (2.1.3). Za drugu jednakost, primetimo najpre da za bilo koji operator $A \in \mathcal{B}(H)$ važi $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$ (formula za spektralni radijus [9]). Ako je A samoadjungovan, tada je $\|A^2\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$ prema C^* -identitetu. Indukcijom dobijamo $\|A^{2^k}\| = \|A\|^{2^k}$, pa sledi:

$$r(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{2^k}\|^{1/2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\|A\|^{2^k})^{1/2^k} = \|A\|. \quad (2.1.7)$$

Kako je operator T^*T uvek samoadjungovan ($(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T$), primenom (2.1.7) na $A = T^*T$ dobijamo drugu jednakost. $\square$

Lema 2.6. Neka je H Hilbertov prostor, $A \in \mathcal{B}(H)$ samoadjungovan operator i P polinom. Tada važi:

$$\|P(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|. \quad (2.1.8)$$

Dokaz. Primenom C^* -identiteta,

$$\begin{aligned}\|P(A)\|^2 &= \|P(A)^*P(A)\| \\ &= r(P(A)^*P(A)) \quad (\text{prema (2.1.6)}) \\ &= r((\bar{P}P)(A)) \quad (\text{jer je } A \text{ samoadjungovan}) \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |(\bar{P}P)(\lambda)| \quad (\text{prema Teoremi 2.2}) \\ &= \left(\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)| \right)^2 \quad (\text{zbog osobine } C^*\text{-algebre za kompleksne brojeve}).\end{aligned}$$

Jednakost gde je korišćena Teorema 2.2 ćemo dodatno objasniti. Po definiciji spektralnog radijusa, imamo $r((\bar{P}P)(A)) = \sup_{\lambda \in \sigma((\bar{P}P)(A))} |\lambda|$. Korišćenjem Teoreme 2.2 imamo $\sigma(\bar{P}P(A)) = \{\bar{P}P(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}$, te povezivanjem ove dve stvari, imamo traženu jednakost. Kvadratni koren ove jednakosti daje traženi rezultat. $\square$

Nećemo koristiti opštu teoriju C^* -algebri; zapravo, koristićemo samo C^* -algebre prikazane u primeru 2.4. Definisaćemo operator $f(T)$ za bilo koju neprekidnu funkciju f koristeći homomorfizam između C^* -algebri. Konstruisaćemo preslikavanje sa skupa svih neprekidnih funkcija na kompaktnom skupu u skup svih ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru. Ovaj homomorfizam ćemo konstruisati kao proširenje Definicije 2.1 koristeći Vajerštrasovu teoremu.

Definicija 2.7. Neka je $D \subset \mathbb{C}$. Definišemo:

$$\mathcal{P}(D) := \{P|_D : P \text{ je polinom sa koeficijentima u } \mathbb{C}\}.$$

U sledećoj lemi sumiramo neke važne činjenice.

Lema 2.8. Neka je H Hilbertov prostor i $A \in \mathcal{B}(H)$ samoadjungovan operator. Tada postoji jedinstveni izometrički $*$ -homomorfizam

$$\tilde{\varphi}_A : \mathcal{P}(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{B}(H)$$

takav da važi $id \mapsto A$ i $1 \mapsto I$, gde je $id(x) = x$ identička funkcija, a $1 \equiv 1$ konstantna funkcija.

Dokaz. Postavimo $\tilde{\varphi}_A(P) := P(A)$ za bilo koji polinom P , kao u Definiciji 2.1. Na osnovu definicije, jasno je da je $\tilde{\varphi}_A$ $*$ -homomorfizam, tj. važi:

$$\tilde{\varphi}_A(PQ) = \tilde{\varphi}_A(P)\tilde{\varphi}_A(Q), \quad (2.1.9)$$

$$\tilde{\varphi}_A(\lambda P + Q) = \lambda \tilde{\varphi}_A(P) + \tilde{\varphi}_A(Q), \quad (2.1.10)$$

$$\tilde{\varphi}_A(1) = I, \quad (2.1.11)$$

$$\tilde{\varphi}_A(\bar{P}) = \tilde{\varphi}_A(P)^*, \quad (\text{jer je } A \text{ samoadjungovan})$$

za sve polinome P i Q i svako $\lambda \in \mathbb{C}$.

Na osnovu Leme 2.6, $\tilde{\varphi}_A$ je izometrija, jer je:

$$\|\tilde{\varphi}_A(P)\| = \|P(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)| = \|P\|_\infty.$$

Takođe, po definiciji imamo:

$$\tilde{\varphi}_A(id) = A. \quad (2.1.12)$$

Štaviše, svaki polinom $p(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i$ može se zapisati kao $p(x) = \sum_{i=0}^N a_i id(x)^i$. Stoga dobijamo:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_A(p) &= \tilde{\varphi}_A\left(\sum_{i=0}^N a_i id^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^N a_i \tilde{\varphi}_A(id^i) \quad (\text{na osnovu (2.1.10)}) \\ &= \sum_{i=0}^N a_i \tilde{\varphi}_A(id)^i \quad (\text{na osnovu (2.1.9)}) \\ &= \sum_{i=0}^N a_i A^i, \quad \text{gde je } A^0 = I \quad (\text{na osnovu (2.1.12) i (2.1.11)}). \end{aligned}$$

Dakle, ako je p polinom, operator $\tilde{\varphi}_A(p)$ je potpuno određen operatorom A .

Pretpostavimo da postoji još jedan proizvoljni $*$ -homomorfizam $\psi : \mathcal{P}(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ takav da važi $\psi(1) = I$ i $\psi(id) = A$.

Proizvoljan polinom $P \in \mathcal{P}(\sigma(A))$ stepena n može se zapisati kao:

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_0 \cdot 1(z) + \sum_{k=1}^n a_k (id(z))^k.$$

Koristeći aksiome $*$ -homomorfizma, imamo sledeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} \psi(P) &= \psi\left(a_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^n a_k id^k\right) \\ &= a_0 \psi(1) + \sum_{k=1}^n a_k \psi(id^k) \quad (\text{linearnost}) \\ &= a_0 \psi(1) + \sum_{k=1}^n a_k (\psi(id))^k \quad (\text{multiplikativnost}) \\ &= a_0 I + \sum_{k=1}^n a_k A^k \quad (\text{zamena uslova}) \\ &= P(A) = \tilde{\varphi}_A(P) \end{aligned}$$

Budući da se ψ i $\tilde{\varphi}_A$ podudaraju na svakom elementu $P \in \mathcal{P}(\sigma(A))$, zaključujemo da je preslikavanje $\tilde{\varphi}_A$ jedinstveno.

Konsekventno, $\tilde{\varphi}_A$ je jedinstveni $*$ -homomorfizam takav da $id \mapsto A$ i $1 \mapsto I$. $\square$

2.2. Neprekidni funkcionalni račun

Konstruisali smo račun za polinome. Sada ćemo konstruisati račun za neprekidne funkcije i samoadjungovane operatore, te ćemo pokazati neke primene.

Teorema 2.9. *Neka je H Hilbertov prostor i $A \in \mathcal{B}(H)$ samoadjungovan operator. Postoji jedinstveni izometrički $*$ -homomorfizam $\varphi_A : C(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ takav da važi:*

1. $\varphi_A(1) = I$ (gde je $1(t) = 1$)
2. $\varphi_A(id) = A$ (gde je $id(t) = t$)

Dokaz. Dokaz se izvodi u dva ključna koraka

Korak 1: Konstrukcija na prostoru polinoma

Ovaj deo smo već uradili u Lemi 2.8.

Korak 2: Proširenje na $C(\sigma(A))$

Pošto je $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ kompaktan skup, prema Stone-Weierstrassovoj teoremi [7, p. 162], polinomi $\mathcal{P}(\sigma(A))$ su gusti u $C(\sigma(A))$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_\infty$.

Neka je $f \in C(\sigma(A))$. Postoji niz polinoma (P_n) takav da $P_n \rightarrow f$ u $C(\sigma(A))$. Zbog izometrije imamo

$$\|P_n(A) - P_m(A)\| = \|(P_n - P_m)(A)\| = \|P_n - P_m\|_\infty.$$

Kako je (P_n) konvergentan, on je Košijev niz u $C(\sigma(A))$, pa je i $(P_n(A))$ Košijev niz u Banahovom prostoru $\mathcal{B}(H)$. Definišemo:

$$\varphi_A(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(A).$$

Dobra definisanost: Ako je (Q_n) drugi niz polinoma takav da $Q_n \rightarrow f$, tada važi:

$$\|P_n - Q_n\|_\infty = \|P_n - f + f - Q_n\|_\infty \leq \|P_n - f\|_\infty + \|Q_n - f\|_\infty \rightarrow 0.$$

Zbog izometrije, $\|P_n(A) - Q_n(A)\| = \|P_n - Q_n\|_\infty \rightarrow 0$, pa je granična vrednost jedinstvena i ne zavisi od izbora niza.

Budući da su operacije u algebri $\mathcal{B}(H)$ i norma neprekidne, sva svojstva $*$ -homomorfizma i izometrije se prenose sa $\mathcal{P}(\sigma(A))$ na $C(\sigma(A))$ graničnim prelazom. $\square$

Iz ove teoreme direktno slede važne posledice.

Posledica 2.10. $\mathcal{R}(\varphi_A) := \{\varphi_A(f) \mid f \in C(\sigma(A))\}$ je Abelova C^* -algebra, koja se naziva C^* -algebra generisana operatorom A .

Dokaz. Dovoljno je primetiti da je $C(\sigma(A))$ Abelova C^* -algebra i da važi $C(\sigma(A)) \cong \mathcal{R}(\varphi_A)$. $\square$

Posledica 2.11. $\mathcal{R}(\varphi_A)$ je najmanja C^* -algebra koja sadrži A .

Dokaz. Primećujemo da je $\mathcal{R}(\varphi_A)$ $*$ -izomorfna sa $C(\sigma(A))$, koja je, prema Vajerštrasovoj teoremi, najmanja kompletna algebra koja sadrži polinome (a samim tim i identičku funkciju koja odgovara operatoru A). $\square$

U nastavku definišemo familiju operatora.

Definicija 2.12. Neka je $A \in \mathcal{B}(H)$ samoadjungovan operator i φ_A homomorfizam iz Teoreme 2.9. Definišemo:

$$f(A) := \varphi_A(f) \quad \text{za svako } f \in C(\sigma(A)). \quad (2.2.1)$$

Izraz (2.2.1) je dobro definisan na osnovu Teoreme 2.9. Dodatno, na osnovu Posledica 2.10 i 2.11, možemo identifikovati $C(\sigma(A))$ sa Abelovom C^* -algebrom operatora. Ponovo ćemo pokazati da se spektar operatora $f(A)$ može karakterisati preko spektra operatora A .

Teorema 2.13 (Teorema o preslikavanju spektra za neprekidne funkcije). Neka je H Hilbertov prostor, $A \in \mathcal{B}(H)$ samoadjungovan operator i $f \in C(\sigma(A))$. Tada važi:

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) := \{f(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}. \quad (2.2.2)$$

Dokaz. ($\subseteq$) Dokazaćemo kontrapozicijom. Pretpostavimo da $\lambda \notin f(\sigma(A))$. Tada λ nije u slici funkcije f , pa je funkcija $g(x) := (f(x) - \lambda)^{-1}$ neprekidna na $\sigma(A)$. Prema tome, operator $g(A) = (f(A) - \lambda I)^{-1}$ je dobro definisan na osnovu Teoreme 2.9, iz čega sledi da $\lambda \notin \sigma(f(A))$.

($\supseteq$) Ponovo koristimo kontrapoziciju. Pretpostavimo da $\lambda \notin \sigma(f(A))$, što znači da postoji $(f(A) - \lambda I)^{-1}$. Tada možemo pisati:

$$(f(A) - \lambda I)(f(A) - \lambda I)^{-1} = I.$$

Primetimo da je preslikavanje φ_A injektivno jer je izometrija.

Lema 2.14 (Zatvorenost C^* -algebre prema inverziji). *Neka je $\mathcal{A} \subseteq B(H)$ C^* -algebra i neka je $T \in \mathcal{A}$. Ako je T invertibilan u $B(H)$, tada je $T^{-1} \in \mathcal{A}$.*

Dokaz. Neka je $T \in \mathcal{A}$ invertibilan u $B(H)$.

Pošto je $\mathcal{A}$ C^* -algebra, imamo $T^* \in \mathcal{A}$, pa je

$$S := T^*T \in \mathcal{A}.$$

Operator S je pozitivan:

$$\langle Sx, x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = \|Tx\|^2 \geq 0, \quad \forall x \in H.$$

Takođe, S je invertibilan jer je

$$S^{-1} = T^{-1}(T^{-1})^*.$$

Kako je S pozitivan i invertibilan, važi $\sigma(S) \subseteq (0, \infty)$. Zato je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

neprekidna na $\sigma(S)$.

Primenimo neprekidni funkcionalni račun na operator S :

$$f(S) = S^{-1}.$$

Pošto je $\mathcal{A}$ C^* -algebra, zatvorena je u normi, pa $f(S) \in \mathcal{A}$. Dakle,

$$S^{-1} \in \mathcal{A}.$$

Konačno,

$$T^{-1} = S^{-1}T^* \in \mathcal{A},$$

jer je $\mathcal{A}$ algebra. □

Nastavljamo dokaz teoreme, primetimo sledeće

$$f(A) - \lambda I \in \mathcal{R}(\phi_A)$$

(jer je to $\phi_A(f - \lambda \mathbf{1})$).

Po Posledici 2.11, $\mathcal{R}(\phi_A)$ je C^* -algebra.

Ako je $f(A) - \lambda I$ invertibilan u $B(H)$, onda prema gornjoj lemi

$$(f(A) - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{R}(\phi_A).$$

Zato postoji $g \in C(\sigma(A))$ takav da je

$$(f(A) - \lambda I)^{-1} = g(A).$$

Sada ϕ_A^{-1} sme da se primeni, jer je sve unutar slike od ϕ_A . Primenom inverznog preslikavanja φ_A^{-1} na gornju jednakost dobijamo:

$$(f(x) - \lambda)\varphi_A^{-1}\left((f(A) - \lambda I)^{-1}\right) = 1.$$

To znači da je $\varphi_A^{-1}\left((f(A) - \lambda I)^{-1}\right)$ inverz funkcije $(f(x) - \lambda)$ u algebri $C(\sigma(A))$. Dakle, funkcija $(f(x) - \lambda)$ nema nula na $\sigma(A)$, što posebno znači da $\lambda \notin f(\sigma(A))$. $\square$

U nastavku navodimo neke specifične familije operatora.

Definicija 2.15. Neka je H Hilbertov prostor i $A \in \mathcal{B}(H)$. Kažemo da je A **nenegativan** ako važi $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ za svako $x \in H$.

Lema 2.16. Neka je H Hilbertov prostor, $A \in \mathcal{B}(H)$ samoadjungovan operator i $f \in C(\sigma(A))$. Ako je $f(x) \geq 0$ za svako $x \in \sigma(A)$, tada je $f(A)$ nenegativan operator.

Dokaz. Ako je $f \geq 0$, tada postoji realna funkcija $g \in C(\sigma(A))$ takva da je $f = g^2$. Tada je $f(A) = g(A)^2$, pri čemu je $g(A)$ samoadjungovan operator (pošto je g realna funkcija na $\sigma(A)$, važi $\bar{g} = g$, pa iz svojstva $*$ -homomorfizma φ_A imamo $(g(A))^* = \varphi_A(\bar{g}) = \varphi_A(g) = g(A)$). Sledi da je $f(A) = g(A)g(A) = g(A)g(A)^*$, pa imamo

$$\langle f(A)x, x \rangle = \langle g(A)g(A)^*x, x \rangle = \langle g(A)^*x, g(A)^*x \rangle = \|g(A)x\|^2 \geq 0.$$

Konsekventno, $f(A)$ je nenegativan operator. $\square$

Posledica 2.17. Neka je H Hilbertov prostor i $A \in \mathcal{B}(H)$ nenegativan samoadjungovan operator. Tada za svako $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ postoji tačno jedan nenegativan samoadjungovan operator $A^{1/n} \in \mathcal{B}(H)$ takav da važi:

$$A = \underbrace{A^{1/n} \cdot A^{1/n} \dots A^{1/n}}_{n \text{ puta}}. \quad (2.2.3)$$

Operator $A^{1/n}$ nazivamo **n -ti koren** operatora A . Dodatno, važi:

$$\sigma(A^{1/n}) = \{\lambda^{1/n} \mid \lambda \in \sigma(A)\} \subseteq \mathbb{R}^+ := [0, \infty). \quad (2.2.4)$$

Dokaz. Ako je A nenegativan samoadjungovan operator, tada je $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$. Stoga je funkcija $f(x) = x^{1/n}$ neprekidna na spektru operatora A za svako $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Prema Teoremi 2.9, $\varphi_A(f) = f(A) = A^{1/n}$ je dobro definisan samoadjungovan operator. Jasno je da $A^{1/n}$ zadovoljava jednakost (2.2.3) jer je φ_A $*$ -homomorfizam. Prema Lemi 2.16, $A^{1/n}$ je nenegativan. Na kraju, prema Teoremi 2.13, spektar operatora $A^{1/n}$ je dat sa (2.2.4). $\square$

Posledica 2.18. Neka je H Hilbertov prostor i $A \in \mathcal{B}(H)$ samoadjungovan operator. Ako $0 \notin \sigma(A)$, tada postoji jedinstveni samoadjungovan operator A^{-1} takav da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Dodatno, važi:

$$\sigma(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A) \right\} \subset \mathbb{R}. \quad (2.2.5)$$

Dokaz. Ako $0 \notin \sigma(A)$, po definiciji spektra, A je invertibilan i $f(x) = 1/x$ je neprekidna funkcija na $\sigma(A)$. Pošto je A samoadjungovan, važi $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Na osnovu Teoreme 2.9, imamo $A^{-1} = f(A)$, te prema Teoremi 2.13 važi jednakost (2.2.5). $\square$

Glava 3

Primene

3.1. Löwner-Heinzova nejednakost

Narednim rezultatom pripremamo teren za dokaz Löwner-Heinzove nejednakosti.

Teorema 3.1. *Neka su A i B pozitivni invertibilni operatori na Hilbertovom prostoru H . Ako važi $A \geq B$, tada je $B^{-1} \geq A^{-1}$.*

Dokaz. Dokaz izvodimo kroz nekoliko ključnih koraka:

1. Svođenje na identitet: Budući da je $B > 0$ i invertibilan, on poseduje jedinstven pozitivni kvadratni koren $B^{1/2}$ koji je takođe invertibilan i samoadjungovan. Polaznu nejednakost $A \geq B$ transformišemo množenjem sa $B^{-1/2}$ sa obe strane:

$$B^{-1/2}AB^{-1/2} \geq B^{-1/2}BB^{-1/2} = I.$$

Ovaj korak je opravdan jer preslikavanje $X \mapsto TXT^*$ čuva operatorski poredak za proizvoljan invertibilan operator T (u ovom slučaju $T = B^{-1/2} = T^*$).

2. Spektralna analiza: Neka je $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$. Kako je C samoadjungovan operator, njegov spektar $\sigma(C)$ je sadržan u zatvorenju njegovog numeričkog opsega [9], $\overline{W(C)}$. Iz $C \geq I$ sledi da je $\langle Cx, x \rangle \geq \langle x, x \rangle = \|x\|^2$, što za svaki jedinični vektor x ($\|x\| = 1$) daje $\langle Cx, x \rangle \geq 1$. Odatle zaključujemo da je numerički opseg $W(C) \subseteq [1, \infty)$, a samim tim i $\sigma(C) \subseteq [1, \infty)$.

Prema teoremi o preslikavanju spektra 2.13, za bilo koju neprekidnu funkciju f definisanu na $\sigma(C)$ važi $\sigma(f(C)) = f(\sigma(C))$. Odaberimo funkciju $f(t) = \frac{1}{t}$. Kako je $t \geq 1$ za svako $t \in \sigma(C)$, sledi da je $f(t) = \frac{1}{t} \leq 1$ za sve tačke spektra. Dakle, $\sigma(C^{-1}) \subseteq (0, 1]$, što implicira:

$$C^{-1} \leq I.$$

3. Povratak na originalne operatore: Izračunajmo eksplicitno C^{-1} koristeći svojstvo inverzije proizvoda operatora:

$$C^{-1} = (B^{-1/2}AB^{-1/2})^{-1} = (B^{-1/2})^{-1}A^{-1}(B^{-1/2})^{-1} = B^{1/2}A^{-1}B^{1/2}.$$

Zamenom ovog izraza u nejednakost $C^{-1} \leq I$ dobijamo:

$$B^{1/2}A^{-1}B^{1/2} \leq I.$$

4. Finalna transformacija: Da bismo izolovali A^{-1} , pomnožimo dobijenu nejednakost sa $B^{-1/2}$ sa obe strane:

$$B^{-1/2}(B^{1/2}A^{-1}B^{1/2})B^{-1/2} \leq B^{-1/2}IB^{-1/2},$$

što se svodi na:

$$A^{-1} \leq B^{-1}.$$

Ovo je ekvivalentno sa $B^{-1} \geq A^{-1}$, čime je dokaz završen. $\square$

Jedan od najznačajnijih rezultata koji direktno proističe iz neprekidnog funkcionalnog računa je Löwner-Heinzova nejednakost, koja utvrđuje uslove pod kojima se operatorski poredak očuvava pri stepenovanju.

Definicija 3.2 (Konus pozitivnih operatora). *Neka je H Hilbertov prostor. Skup*

$$\mathcal{B}(H)^+ := \{T \in \mathcal{B}(H) : \langle Tx, x \rangle \geq 0 \text{ za svako } x \in H\}$$

naziva se konus pozitivnih operatora na H .

Drugim rečima, $\mathcal{B}(H)^+$ je skup svih nenegativnih (pozitivno semidefinitnih) ograničenih linearnih operatora na H .

Teorema 3.3 (Löwner-Heinz). *Neka su A i B pozitivni ograničeni linearni operatori na Hilbertovom prostoru H takvi da važi $A \geq B \geq 0$. Tada je:*

$$A^r \geq B^r$$

za svako $r \in [0, 1]$.

Dokaz. Slučajevi $r = 0$ ($I \geq I$) i $r = 1$ ($A \geq B$) su trivijalni. Razmotrimo slučaj $r \in (0, 1)$.

Osnovni alat u dokazu je integralna reprezentacija funkcije $f(t) = t^r$. Za $t > 0$ i $r \in (0, 1)$ važi identitet:

$$t^r = \frac{\sin(r\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{r-1} \frac{t}{t + \lambda} d\lambda,$$

koji se može naći u sledećoj knjizi [4, str. 317].

Primenom neprekidnog funkcionalnog računa Teorema 2.9 na ovaj identitet, za operator A dobijamo:

$$A^r = \frac{\sin(r\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{r-1} A(A + \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

Transformišimo podintegralni izraz korišćenjem algebarskog identiteta $A(A + \lambda I)^{-1} = I - \lambda(A + \lambda I)^{-1}$:

$$A^r = \frac{\sin(r\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{r-1} (I - \lambda(A + \lambda I)^{-1}) d\lambda.$$

Pretpostavimo prvo da su A i B invertibilni. Iz pretpostavke $A \geq B$ sledi:

- $A + \lambda I \geq B + \lambda I > 0$
- $(A + \lambda I)^{-1} \leq (B + \lambda I)^{-1}$ (po 3.1)
- $-\lambda(A + \lambda I)^{-1} \geq -\lambda(B + \lambda I)^{-1}$
- $I - \lambda(A + \lambda I)^{-1} \geq I - \lambda(B + \lambda I)^{-1}$.

Budući da je težinska funkcija $\frac{\sin(r\pi)}{\pi} \lambda^r$ pozitivna na čitavom domenu integracije, integracijom gornje nejednakosti dobijamo:

$$\int_0^\infty \dots(A) d\lambda \geq \int_0^\infty \dots(B) d\lambda \implies A^r \geq B^r.$$

Slučaj neinvertibilnosti

Ukoliko operatori A i B nisu invertibilni, za svako $\epsilon > 0$ posmatramo operatore $A_\epsilon = A + \epsilon I$ i $B_\epsilon = B + \epsilon I$. Budući da važi $A \geq B \geq 0$, dobijamo $A_\epsilon \geq B_\epsilon \geq \epsilon I > 0$, pa su A_ϵ i B_ϵ strogo pozitivni i invertibilni. Prema prethodno dokazanom slučaju, sledi:

$$A_\epsilon^r \geq B_\epsilon^r, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Za opravdanje prelaska na graničnu vrednost koristimo neprekidni funkcionalni račun. Definišimo funkcije $f(t) = t^r$ i $f_\epsilon(t) = (t + \epsilon)^r$. Kako je neprekidni funkcionalni račun izometrički izomorfizam, važi:

$$\|A_\epsilon^r - A^r\| = \|f_\epsilon(A) - f(A)\| = \|f_\epsilon - f\|_\infty = \sup_{t \in \sigma(A)} |(t + \epsilon)^r - t^r|.$$

Pošto su funkcije f_ϵ i f neprekidne, a spektar $\sigma(A)$ kompaktan, funkcija $g(t, \epsilon) = (t + \epsilon)^r$ uniformno konvergira ka t^r na $\sigma(A)$ kada $\epsilon \rightarrow 0^+$. Iz toga direktno sledi:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup_{t \in \sigma(A)} |(t + \epsilon)^r - t^r| = 0 \implies \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|A_\epsilon^r - A^r\| = 0.$$

Na potpuno isti način dobijamo da $B_\epsilon^r \xrightarrow{\|\cdot\|} B^r$.

Konačno, relacija poretka $\geq$ u $\mathcal{B}(H)$ je definisana preko konusa pozitivnih operatora koji je zatvoren u normi topologiji.

Lema 3.4. *Konus pozitivnih ograničenih linearnih operatora $\mathcal{B}(H)^+$ je zatvoren u topologiji indukovanoj normom.*

Dokaz. Neka je $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz operatora iz $\mathcal{B}(H)^+$ takav da $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ za neki operator $T \in \mathcal{B}(H)$. Potrebno je pokazati da je $T \in \mathcal{B}(H)^+$.

Prvo, pokažimo da je T samoadjungovan. Budući da je operacija adjungovanja izometrija na $\mathcal{B}(H)$, važi $\|T_n^* - T^*\| = \|T_n - T\|$. Kako su svi T_n pozitivni, oni su i samoadjungovani ($T_n = T_n^*$), pa imamo:

$$T^* = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} T_n \right)^* = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T.$$

Drugo, pokažimo da je kvadratna forma operatora T nenegativna. Fiksirajmo proizvoljan vektor $x \in H$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ važi $\langle T_n x, x \rangle \geq 0$. Koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost, ocenjujemo razliku:

$$|\langle T_n x, x \rangle - \langle T x, x \rangle| = |\langle (T_n - T)x, x \rangle| \leq \|T_n - T\| \cdot \|x\|^2.$$

Kako $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$, niz realnih brojeva $(\langle T_n x, x \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka $\langle T x, x \rangle$. Budući da je granična vrednost niza nenegativnih brojeva takođe nenegativna, zaključujemo da je:

$$\langle T x, x \rangle \geq 0 \quad \text{za svako } x \in H.$$

Iz samoadjungovanosti i nenegativnosti kvadratne forme sledi da je $T \in \mathcal{B}(H)^+$, čime je dokazano da je konus zatvoren u topologiji indukovanoj normom. $\square$

Definišimo niz pozitivnih operatora $C_\epsilon = A_\epsilon^r - B_\epsilon^r \geq 0$. Kako je konus pozitivnih operatora $\mathcal{B}(H)^+$ zatvoren u topologiji indukovanoj normom, granična vrednost normkonvergentnog niza pozitivnih operatora je takođe pozitivan operator:

$$A^r - B^r = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (A_\epsilon^r - B_\epsilon^r) \in \mathcal{B}(H)^+.$$

Iz $A^r - B^r \geq 0$ direktno sledi $A^r \geq B^r$, čime je dokaz Löwner-Heinzove teoreme u potpunosti završen. $\square$

Primer nevaženja nejednakosti za $r > 1$

Interesantno je pokazati da se monotonost gubi čim r prekorači vrednost 1. Posmatrajmo matrice A i B u prostoru $M_2(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jasno je da je $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$, dakle važi $A \geq B$. Izračunajmo kvadrate ovih matrica ($r = 2$):

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Razlika kvadrata iznosi:

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 5-2 & 3-2 \\ 3-2 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinanta matrice $A^2 - B^2$ je $3 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$. Kako je determinanta negativna, matrica $A^2 - B^2$ nije pozitivno semidefinitna, što znači da $A^2 \not\geq B^2$. Ovo potvrđuje da Löwner-Heinzova nejednakost generalno ne važi za $r > 1$.

3.2. Primena na apstraktni Cauchy-jev problem

Jedna od najznačajnijih primena neprekidnog funkcionalnog računa je u teoriji evolucionih jednačina. On nam omogućava da formalna rešenja linearnih diferencijalnih jednačina, poznata iz skalarnog slučaja, prenesemo u kontekst operatora na Hilbertovim prostorima.

1. Definisanje eksponencijalne funkcije operatora

Neka je $A \in \mathcal{B}(H)$ samoadjungovan operator. Na osnovu spektralne teoreme, spektar $\sigma(A)$ je kompaktan podskup od $\mathbb{R}$. Za svako fiksirano $t \in \mathbb{R}$, funkcija $f_t(s) = e^{ts}$ je neprekidna na $\mathbb{R}$.

Definicija 3.5. Operator e^{tA} definišemo kao sliku funkcije f_t pod homomorfizmom neprekidnog funkcionalnog računa:

$$e^{tA} := \phi(e^{ts}).$$

Za ovako definisan operator važe standardne osobine eksponencijalne funkcije:

1. $e^{0A} = I$, gde je I identički operator;
2. $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$ za sve $t, s \in \mathbb{R}$;
3. $(e^{tA})^* = e^{tA}$ (samoadjungovanost, jer je e^{ts} realna funkcija).

2. Formulacija problema

Posmatrajmo apstraktni Cauchy-jev problem u Hilbertovom prostoru H :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

gde je $A \in \mathcal{B}(H)$ zadati samoadjungovan operator, $x_0 \in H$ početni vektor, a $x(t)$ nepoznata funkcija $x : [0, \infty) \rightarrow H$.

Teorema 3.6. *Jedinstveno rešenje gornjeg problema dato je sa:*

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

3. Dokaz teoreme

Da bismo dokazali da je $x(t) = e^{tA}x_0$ rešenje, ključno je odrediti izvod operator-vrednosne funkcije $F(t) = e^{tA}$ u normi operatora.

Lema 3.7 (O izvodu). *Neka je $A \in \mathcal{B}(H)$ samoadjungovan. Tada važi:*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}.$$

Dokaz leme (pomoću Taylorovog ostatka). Posmatrajmo diferencijalni količnik u normi. Korišćenjem osobine $e^{(t+h)A} = e^{tA}e^{hA}$, imamo:

$$\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} - Ae^{tA} = e^{tA} \left(\frac{e^{hA} - I}{h} - A \right).$$

Dovoljno je pokazati da izraz u zagradi teži nuli u normi. Definišimo funkciju $g_h(s) = \frac{e^{hs} - 1}{h}$ za $s \in \sigma(A)$. Korišćenjem Taylorovog razvoja funkcije e^{hs} dobijamo:

$$g_h(s) - s = \frac{(1 + hs + \frac{h^2s^2}{2!} + \frac{h^3s^3}{3!} + \dots) - 1}{h} - s = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-1}s^n}{n!}.$$

Izvlačenjem h ispred sume dobijamo:

$$g_h(s) - s = h \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-2}s^n}{n!}.$$

Budući da je A ograničen samoadjungovan operator, za svako $s \in \sigma(A)$ važi $|s| \leq \|A\|$. Primenom nejednakosti trougla, uz pretpostavku $|h| \leq 1$, sledi:

$$|g_h(s) - s| \leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|h|^{n-2} \|A\|^n}{n!} \leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}.$$

Gornji red je razvoj eksponencijalne funkcije bez prva dva člana:

$$|g_h(s) - s| \leq |h| (e^{\|A\|} - 1 - \|A\|).$$

Budući da ocena ne zavisi od s , izometričnost funkcionalnog računa nam daje:

$$\left\| \frac{e^{hA} - I}{h} - A \right\| = \sup_{s \in \sigma(A)} |g_h(s) - s| \leq |h| \cdot C \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

gde je $C = e^{\|A\|} - 1 - \|A\|$. Ovim je dokazano da je $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$. □

Dokaz teoreme. Diferenciranjem rešenja $x(t) = e^{tA} x_0$ dobijamo:

$$\dot{x}(t) = \left(\frac{d}{dt} e^{tA} \right) x_0 = A e^{tA} x_0 = A x(t).$$

Proverom početnog uslova za $t = 0$:

$$x(0) = e^{0A} x_0 = I x_0 = x_0$$

čime je potvrđeno da funkcija zadovoljava postavljeni Cauchy-jev problem. □

3.3. Polarna dekompozicija invertibilnog operatora

Neprekidni funkcionalni račun nam pruža elegantan način za razlaganje operatora na geometrijske komponente, slično zapisu kompleksnog broja u obliku $z = r e^{i\theta}$. Ovde ulogu modula igra pozitivan operator, dok ulogu rotacije preuzima unitarni operator.

Definicija 3.8 (Unitaran operator). *Neka je H kompleksan Hilbertov prostor. Linearan ograničen operator $U \in \mathcal{B}(H)$ naziva se **unitaran operator** ako je invertibilan i ako važi:*

$$U^* U = U U^* = I,$$

gde je U^* adjungovani operator operatora U , a I identički operator na H .

Teorema 3.9 (Polarna dekompozicija). *Svaki invertibilan operator $A \in \mathcal{B}(H)$ može se na jedinstven način predstaviti u obliku:*

$$A = U|A|$$

gde je U unitaran operator, a $|A|$ pozitivan i invertibilan operator.

Dokaz. Dokaz izvodimo u nekoliko faza, koristeći neprekidni funkcionalni račun za konstrukciju ključnih komponenti.

1. Konstrukcija pozitivnog dela $|A|$: Posmatrajmo operator A^*A . On je samoadjungovan i pozitivan jer je $\langle A^*Ax, x \rangle = \|Ax\|^2 \geq 0$ za svako $x \in H$. Budući da je A invertibilan, postoji konstanta $c > 0$ takva da je $\|Ax\| \geq c\|x\|$. Kvadriranjem dobijamo:

$$\langle A^*Ax, x \rangle = \|Ax\|^2 \geq c^2\|x\|^2 = \langle c^2Ix, x \rangle,$$

što znači da je $A^*A \geq c^2I$. Iz ovoga sledi da je spektar $\sigma(A^*A) \subseteq [c^2, \|A\|^2]$. Kako nula ne pripada spektru, funkcija $f(t) = \sqrt{t}$ je neprekidna na $\sigma(A^*A)$. Definišemo:

$$|A| := (A^*A)^{1/2}.$$

Pošto je $f(t) > 0$ na celom spektru, operator $|A|$ je invertibilan i pozitivan.

2. Konstrukcija unitarnog dela U : Definišimo operator U kao:

$$U = A|A|^{-1}.$$

Ova definicija je korektna jer smo u prethodnom koraku pokazali da je $|A|$ invertibilan. Iz ove definicije direktno sledi tražena dekompozicija $A = U|A|$.

3. Provera unitarnosti: Ispitajmo operator U^*U . Koristeći osobine adjungovanja i činjenicu da je $|A|$ samoadjungovan (pa je i $|A|^{-1}$ samoadjungovan), imamo:

$$U^*U = (|A|^{-1})^* A^* A |A|^{-1} = |A|^{-1} (A^* A) |A|^{-1}.$$

Po definiciji je $|A|^2 = A^*A$. Zamenom dobijamo:

$$U^*U = |A|^{-1} |A|^2 |A|^{-1} = |A|^{-1} |A| |A| |A|^{-1} = I \cdot I = I.$$

Pošto je A invertibilan, a $U = A|A|^{-1}$ proizvod dva invertibilna operatora, i U je invertibilan. Iz $U^*U = I$ i invertibilnosti U direktno sledi da je $U^* = U^{-1}$, odnosno $UU^* = I$, čime je dokazano da je U unitaran. $\square$

Zaključak

U radu smo se bavili neprekidnim funkcionalnim računom za samoadjungovane operatore na Hilbertovim prostorima, i prikazali smo njegovu konstrukciju i primene. Dali smo i tri ilustrativna primera primene prikazane teorije.

Najpre smo uveli osnovne pojmove iz teorije normiranih prostora, Banahovih prostora i Hilbertovih prostora. Definisan je pojam linearnog operatora, ograničenosti i neprekidnosti. Uveli smo spektar linearnog operatora i dokazali osnovna svojstva spektra, uključujući da je spektar ograničenog operatora kompaktan skup i da se nalazi u krugu poluprečnika $\|T\|$. Takođe smo uveli pojam Banahove algebre i C^* -algebre, sa posebnim naglaskom na $\mathcal{B}(H)$ kao primer C^* -algebre.

Nakon toga smo se koncentrisali na konstrukciju polinomnog funkcionalnog računa. Pokazali smo da za svaki polinom P važi teorema o preslikavanju spektra $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$. Zatim smo, koristeći Vajerštrasovu teoremu o aproksimaciji i činjenicu da su polinomi gusti u prostoru neprekidnih funkcija na kompaktnom skupu, proširili ovaj račun na sve neprekidne funkcije definisane na spektru operatora. Time smo dobili neprekidni funkcionalni račun — izometrički $*$ -homomorfizam $\varphi_A : C(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ za koji važi $\varphi_A(id) = A$ i $\varphi_A(1) = I$.

Zatim smo primenili ovaj račun na proučavanje pozitivnih operatora. Definisan je n -ti koren pozitivnog operatora i pokazano je da važi $\sigma(A^{1/n}) = \{\lambda^{1/n} \mid \lambda \in \sigma(A)\}$. Dokazali smo ključnu teoremu o inverziji poretka: ako je $A \geq B > 0$, tada je $B^{-1} \geq A^{-1}$. Na osnovu toga, koristeći integralnu reprezentaciju funkcije t^r , dokazali smo Löwner-Heinzovu nejednakost: za pozitivne operatore $A \geq B \geq 0$ i svako $r \in [0, 1]$ važi $A^r \geq B^r$. Prikazali smo i primer koji pokazuje da ova nejednakost ne važi za $r > 1$.

Data je i primena neprekidnog funkcionalnog računa na rešavanje apstraktnog Cauchyjevog problema $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$, gde je A samoadjungovan operator. Koristeći definiciju e^{tA} putem funkcionalnog računa, pokazali smo da je rešenje dato sa $x(t) = e^{tA}x_0$. Izračunali smo izvod operatora e^{tA} i time potvrdili da ova funkcija zaista zadovoljava diferencijalnu jednačinu i početni uslov.

Time smo pokazali kako se neprekidni funkcionalni račun može uspešno primeniti u teoriji diferencijalnih jednačina, pružajući elegantan i formalan okvir za rešavanje evolucionih problema na Hilbertovim prostorima.

Na kraju je pokazano da se proizvoljan ograničen invertibilan operator može napisati kao kompozicija unitarnog i pozitivnog operatora.

Bibliografija

- [1] Aljančić S., Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Građevinska knjiga, Beograd, 1979.
- [2] Pilipović S., Seleši D., Mera i integral, fundamenti teorije verovatnoće, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.
- [3] Davidson K., Functional Analysis and Operator Algebras, Springer, 2025.
- [4] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M., Table of Integrals, Series, and Products, Edited by Daniel Zwillinger and Victor Moll, 8th ed., Elsevier: Academic Press, 2014.
- [5] Kurepa S., Funkcionalna analiza: elementi teorije operatora, Školska knjiga, Zagreb, 1981.
- [6] Rakočević V., Funkcionalna analiza, Naučna knjiga, Beograd, 1994.
- [7] Rudin W., Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, 1976.
- [8] Rudin W., Real and Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, 1987.
- [9] Rudin W., Functional analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, 1991.
- [10] Kurilić M., Osnovi opšte topologije, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1998.

Biografija



Vuk Stojiljković rođen je 1. aprila 1999. godine u Smederevu. Osnovnu školu Jovan Jovanović Zmaj je završio u Smederevu 2014. godine. Iste godine je upisao gimnaziju u Smederevu, prirodno-matematički smer koju je završio 2018. godine. Odmah zatim je upisao osnovne akademske studije na Matematičkom fakultetu u Beogradu, smer Primenjena matematika. Studije nastavlja na Prirodno-Matematičkom fakultetu u Novom Sadu na smeru Matematika koje završava 2023. godine. Iste godine je upisao master akademske studije - Matematika na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija u julskom roku 2026. godine.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Vuk Stojiljković

AU

Mentor: dr Nikola Sarajlija

MN

Naslov rada: Nепrekidni funkcionalni račun i primene

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2026

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: 3/50/10/0/0/0/0

(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Funkcionalna analiza

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: linearni operatori, Banahovi prostori, Hilbertovi prostori, spektar, neprekidni funkcionalni račun, Löwner-Heinzova nejednakost, Cauchyjev problem.

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

CHU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

U ovom master radu bavimo se neprekidnim funkcionalnim računom za samoadjungovane operatore na Hilbertovim prostorima. U prvom poglavlju dati su osnovni pojmovi iz teorije normiranih prostora, Banahovih prostora, Hilbertovih prostora i spektralne teorije ograničenih linearnih operatora. U drugom poglavlju konstruišemo polinomni funkcionalni račun, a zatim ga, koristeći Vajerštrasovu teoremu o aproksimaciji, proširujemo do neprekidnog funkcionalnog računa. Dokazujemo teoremu o preslikavanju spektra za neprekidne funkcije. Zatim uvodimo pojam pozitivnog operatora i definišemo njegov n -ti koren. Kao glavni rezultat izvodimo Löwner-Heinzovu nejednakost: za pozitivne operatore $A \geq B \geq 0$ i svako $r \in [0, 1]$ važi $A^r \geq B^r$. U trećem poglavlju prikazujemo primenu neprekidnog funkcionalnog računa na rešavanje apstraktnog Cauchyjevog problema $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$, čije je rešenje dato sa $x(t) = e^{tA}x_0$, kao i na polarnu dekompoziciju invertibilnog operatora.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: Akademik dr Stevan Pilipović, profesor emeritus, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Nikola Sarajlija, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Miloš Kurilić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Vuk Stojiljković

AU

Mentor: Nikola Sarajlija, Ph.D.

MN

Title: Continuous functional calculus and applications

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: English/Serbian (cyrillic/latin)

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2026

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: 3/50/10/0/0/0/0

(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Functional Analysis

SD

Subject/Key words: linear operators, Banach spaces, Hilbert spaces, spectrum, continuous functional calculus, Löwner-Heinz inequality, Cauchy problem.

SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

AB

In this master thesis we deal with the continuous functional calculus for self-adjoint operators on Hilbert spaces. In the first chapter we give basic notions from the theory of normed spaces, Banach spaces, Hilbert spaces and spectral theory of bounded linear operators. In the second chapter we construct the polynomial functional calculus and then, using the Weierstrass approximation theorem, extend it to the continuous functional calculus. We prove the spectral mapping theorem for continuous functions. Then we introduce the notion of a positive operator and define its n -th root. As the main result we derive the Löwner-Heinz inequality: for positive operators $A \geq B \geq 0$ and for every $r \in [0, 1]$ we have $A^r \geq B^r$. In the third chapter we present an application of the continuous functional calculus to solving the abstract Cauchy problem $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$, whose solution is given by $x(t) = e^{tA}x_0$, as well as the polar decomposition of an invertible operator.

Accepted by the Scientific Board on:

ASB .2026.

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

- | | |
|------------|---|
| President: | Academician Phd Stevan Pilipović, professor emeritus, Faculty of Sciences, University of Novi Sad |
| Member: | Phd Nikola Sarajlija, assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad |
| Member: | Phd Miloš Kurilić, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad. |