



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku



Anđela Bojičić

Tauberove teoreme

Master rad

Mentor:
dr Nenad Teofanov

2026, Novi Sad

Sadržaj

Predgovor	4
1 Tauberove teoreme o redovima	6
1.1 Uvodni pojmovi	6
1.1.1 O brojnim nizovima	6
1.1.2 O brojnim redovima	13
1.1.3 O funkcionalnim nizovima i redovima	19
1.1.4 O stepenim redovima	21
1.1.5 Predstavljanje funkcija pomoću stepenih redova	24
1.2 Metode sumabilnosti	26
1.2.1 Abelov metod sumabilnosti - Abelova teorema	26
1.2.2 Ćezaro sumabilnost	33
1.2.3 Borel sumabilnost	35
1.3 Tauberove teoreme	37
1.3.1 Hardijeva teorema	39
1.3.2 Litlvudova teorema	41
1.3.3 Hardi-Litlvudova teorema	42
2 Tauberove teoreme o Laplasovoj transformaciji	46
2.1 O Laplasovoj transformaciji	46
2.1.1 Osnovni pojmovi i rezultati kompleksne analize	46
2.1.2 Definicija i osnovne osobine Laplasove transformacije	55
2.1.3 Veza Laplasove transformacije i stepenih redova	56
2.2 Tauberovi rezultati za Laplasovu transformaciju	58
2.2.1 Abelova Tauberova teorema za Laplasovu transformaciju	59
2.2.2 Njumanova Tauberova teorema za Laplasovu transformaciju	60
2.2.3 Viner-Ikeharina Tauberova teorema za Laplasovu transformaciju	68
3 Tauberove teoreme i teorema o raspodeli prostih brojeva	69
3.1 Uvodni pojmovi	71
3.1.1 Rimanova zeta-funkcija	71
3.1.2 Fon Mangoltova funkcija i Ćebiševljeve funkcije	73
3.2 Teorema o raspodeli prostih brojeva	75
Zaključak	82
Literatura	83
Biografija	85

Predgovor

Zanimljiv primer koji ukazuje na suptilnost pojma beskonačnog zbira predstavlja Grandijev red

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Ovaj red je tokom istorije izazivao različita tumačenja, a njegova prividno paradoksalna svojstva bila su predmet interesovanja ne samo u teorijskom smislu nego i u nastavi matematike. Oko 1987. godine matematičarka Ana Sjerpinjska predstavila je Grandijev red grupi sedamnaestogodišnjih učenika jednog varšavskog liceja.

Ako označimo Grandijev red sa

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

onda se, formalnim grupisanjem njegovih članova, mogu dobiti dva različita rezultata. Grupisanjem susednih članova dobijamo

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0. \quad (1)$$

Sa druge strane, ako izdvojimo prvi član, a zatim grupišemo preostale članove, dobijamo

$$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1. \quad (2)$$

Na taj način se, u izvesnom smislu, može reći da se "istina nalazi negde na sredini". Formalnim sabiranjem jednakosti (1) i (2) dobijamo

$$2S = 1,$$

odakle sledi

$$S = \frac{1}{2}.$$

Ovakvo razmatranje, naravno, ne predstavlja sumiranje reda u uobičajenom smislu, jer Grandijev red nije konvergentan. Međutim, u nastavku ćemo pokazati da je Grandijevom redu moguće pridružiti vrednost $\frac{1}{2}$ u smislu Abel i Ćezaro sumabilnosti.

Tek je razmatranje pitanja konvergencije i srodnih primera otvorilo prostor za dublje razumevanje razlike između formalnog manipulisanja beskonačnim izrazima i matematički precizno definisane sume.

Ovaj primer ukazuje na potrebu za pažljivim razlikovanjem pojmova konvergencije i različitih metoda sumabilnosti. Grandijev red, iako divergentan u

uobičajenom smislu, predstavlja jedan od najjednostavnijih primera reda kojem se primenom određenih metoda sumabilnosti može pridružiti vrednost $\frac{1}{2}$.

Teorija sumabilnosti i Tauberove teoreme zauzimaju značajno mesto u matematičkoj analizi. Njihov razvoj započeo je proučavanjem brojnih i stepenih redova, a vremenom su Tauberove metode našle primenu i u drugim oblastima matematike, posebno u analitičkoj teoriji brojeva.

Cilj ovog rada je prikaz osnovnih Tauberovih teorema, njihovog razvoja i primene u dokazu teoreme o raspodeli prostih brojeva. Posebna pažnja posvećena je vezi između Abelovih i Tauberovih rezultata, kao i prelasku sa Tauberovih teorema za redove na rezultate povezane sa Laplasovom transformacijom.

Rad je organizovan u tri glave. U prvoj glavi uvedeni su osnovni pojmovi o brojnim, funkcionalnim i stepenim redovima, nakon čega su predstavljene metode sumabilnosti i Abelova teorema. Zatim su razmatrane klasične Tauberove teoreme, uključujući Tauberovu, Hardijevu, Litlvudovu i Hardi-Litlvudovu teoremu.

U drugoj glavi pažnja je usmerena na Laplasovu transformaciju i rezultate koji predstavljaju osnovu za dalju primenu Tauberovih metoda. Predstavljene su Abelova teorema za Laplasovu transformaciju, Njumanova teorema i Viner-Ikeharina Tauberova teorema.

U trećoj glavi prikazana je primena prethodno uvedenih rezultata u analitičkoj teoriji brojeva. Nakon uvođenja Dirihleovih redova, Rimanove zeta-funkcije i fon Mangoltove funkcije, Viner-Ikeharina teorema primenjena je na izvođenje asimptotske relacije za Čebiševljevu funkciju, iz koje se zatim dobija teorema o raspodeli prostih brojeva.

Na taj način rad prati razvoj od osnovnih rezultata teorije redova i sumabilnosti do jedne od najznačajnijih primena Tauberove teorije u teoriji brojeva.

* * *

Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru dr Nenadu Teofanovu na velikoj pomoći prilikom pisanja ovog rada, kao i na ukazanom poverenju.

Zahvaljujem se članovima komisije, dr Milici Žigić i dr Ivani Vojnović, koje su takođe izdvojile vreme za ovaj rad.

Na kraju, zahvaljujem se svojoj porodici, dragom Nikoli i prijateljima koji su mi podrška.

1 Tauberove teoreme o redovima

U ovoj glavi ćemo se najpre podsetiti definicija i teorema matematičke analize u vezi sa brojnim nizovima, brojnim redovima, kao i stepenim redovima. Zatim će biti predstavljene neke od metoda sumabilnosti, među kojima posebno mesto zauzima Abelova metoda. Ona je i bila motivacija Tauberu za njegov istorijski rezultat koji je otvorio put razvoju čitave klase Tauberovih teorema u različitim oblastima matematičke analize.

U trećem poglavlju biće formulisane Tauberova, Hardijeva, Litlvudova i Hardi-Litlvudova teorema, pri čemu će za Tauberovu i Hardi-Litlvudovu teoremu biti navedeni i dokazi.

U ovoj glavi biće predstavljeni osnovni pojmovi i rezultati koji su obrađeni u sledećoj literaturi: [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [10] i [15].

1.1 Uvodni pojmovi

Najpre ćemo se podsetiti osnovnih pojmova vezanih za brojne nizove, neophodnih za uvođenje pojma brojnog reda. Zatim uvodimo pojam brojnog reda i konvergencije reda, koji predstavljaju osnovu za dalje izlaganje. Na kraju će biti uveden pojam stepenog reda, koji ima centralnu ulogu u formulaciji Abelove i Tauberove teoreme.

U ovom poglavlju nećemo navoditi dokaze formulisanih teorema.

1.1.1 O brojnim nizovima

Definicija 1. *Realni brojni niz $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ jeste preslikavanje*

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R},$$

definisano sa

$$n \mapsto a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za označavanje realnog brojnog niza koriste se i zapisi

$$(a_n), \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (a_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Opštije, svaki uređeni skup oblika

$$(a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots), \quad m \in \mathbb{N},$$

takođe predstavlja realni brojni niz.

1.1 Uvodni pojmovi

Napomena 1. U tekstu se koriste uobičajene oznake $\mathbb{R}$ i $\mathbb{N}$ za skupove realnih i prirodnih brojeva.

Za realni brojni niz (a_n) ćemo koristiti i skraćene nazive: realni niz, odnosno niz ako je jasno da $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 2. Realni niz (a_n) konvergira ka broju $a \in \mathbb{R}$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da za svako $n \geq n_0$ važi

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Tada pišemo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

ili

$$a_n \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty$$

i kažemo da je broj a granična vrednost niza (a_n) .

U svim ostalim slučajevima niz (a_n) je *divergentan*. Pri tome, ako za svako $M > 0$ postoji $N(M) \in \mathbb{N}$ takav da za svako $n \geq N(M)$ važi

$$a_n > M,$$

odnosno

$$a_n < -M,$$

kažemo da niz *određeno divergira* ka $+\infty$, odnosno ka $-\infty$. To zapisujemo na sledeći način:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

respektivno.

Definicija 3. Neka je dat niz (a_n) i neka je

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

1.1 Uvodni pojmovi

strogo rastuća funkcija, odnosno

$$\varphi(1) < \varphi(2) < \dots < \varphi(k-1) < \varphi(k) < \varphi(k+1) < \dots.$$

Niz

$$(a_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$$

naziva se podniz niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Uobičajeno je da se koristi oznaka

$$\varphi(k) = n_k,$$

pa se podniz označava sa

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}},$$

pri čemu je njegov opšti član a_{n_k} .

Sada navodimo teoremu o uklještenim nizovima.

Teorema 1. Ako za nizove (a_n) , (b_n) i (c_n) važi

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

i ako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A,$$

onda je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A.$$

Naredna teorema koju ćemo formulisati je Štolcova teorema.

Teorema 2 (Štolc). Neka su (a_n) i (b_n) nizovi takvi da je (b_n) strogo rastući i neograničen. Ako postoji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

tada postoji i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n},$$

pri čemu važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

1.1 Uvodni pojmovi

Primer 1. *Posmatrajmo geometrijski niz*

$$(a_n) = (q^n)_{n \in \mathbb{N}},$$

gde je $q \in \mathbb{R}$. Konvergencija ovog niza zavisi od vrednosti parametra q , pa ćemo razmotriti sve moguće slučajeve.

1. Slučaj $|q| < 1$

Pretpostavimo najpre da je

$$0 < q < 1.$$

Tada postoji broj $h > 0$ takav da je

$$q = \frac{1}{1+h},$$

odakle sledi

$$q^n = \frac{1}{(1+h)^n}.$$

Primenom Bernulijeve nejednakosti

$$(1+h)^n \geq 1+nh, \quad h > -1, \quad n \geq 1,$$

dobijamo

$$0 < q^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}.$$

Pošto je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nh} = 0,$$

prema teoremi o uklještenim nizovima sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Neka sada važi

$$-1 < q < 0.$$

Tada je

1.1 Uvodni pojmovi

$$|q| < 1,$$

pa iz prethodno dokazanog slučaja sledi

$$|q|^n \longrightarrow 0.$$

Kako važi

$$|q^n| = |q|^n,$$

dobijamo

$$-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n.$$

Primenom teoreme o uklještenim nizovima zaključujemo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Prema tome,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \quad |q| < 1.$$

2. Slučaj $q=1$

Ako je $q = 1$, tada je

$$q^n = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, niz je konstantan, pa važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1.$$

3. Slučaj $q>1$

Neka je

$$q = 1 + h, \quad h > 0.$$

Iz Bernulijeve nejednakosti sledi

$$q^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

Neka je $M > 0$ proizvoljno. Kako je

1.1 Uvodni pojmovi

$$1 + nh \longrightarrow +\infty,$$

postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svako $n \geq n_0$ važi

$$1 + nh > M.$$

Otuda sledi

$$q^n \geq 1 + nh > M,$$

pa prema definiciji granične vrednosti niza u beskonačnosti dobijamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty.$$

Dakle, niz nije konvergentan u skupu realnih brojeva.

4. Slučaj $q < -1$

Neka je

$$q < -1.$$

Tada je

$$|q| > 1,$$

pa iz prethodnog slučaja sledi

$$|q|^n \longrightarrow +\infty.$$

Posmatrajmo podnizove

$$(q^{2k})_{k \in \mathbb{N}} \quad i \quad (q^{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}.$$

Pošto je

$$q^{2k} = |q|^{2k},$$

imamo

$$q^{2k} \longrightarrow +\infty.$$

Sa druge strane,

1.1 Uvodni pojmovi

$$q^{2k-1} = -|q|^{2k-1},$$

pa važi

$$q^{2k-1} \longrightarrow -\infty.$$

Kako jedan podniz teži ka $+\infty$, a drugi ka $-\infty$, niz (q^n) nema graničnu vrednost.

5. Slučaj $q=-1$

Ako je

$$q = -1,$$

tada je

$$a_n = (-1)^n.$$

Posmatrajmo podnizove

$$(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}} \quad i \quad (a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}.$$

Pošto je

$$a_{2k} = (-1)^{2k} = 1,$$

dobijamo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1.$$

Takođe,

$$a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1,$$

pa je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = -1.$$

Kako podnizovi imaju različite granične vrednosti, niz $((-1)^n)$ nije konverentan.

Prethodna razmatranja mogu se sažeti u sledećoj teoremi.

1.1 Uvodni pojmovi

Teorema 3. Za geometrijski niz $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1, \\ \text{ne postoji,} & q \leq -1. \end{cases}$$

Odnosno, geometrijski niz (q^n) konvergira ako i samo ako važi

$$-1 < q \leq 1.$$

Definicija 4. Realni niz (a_n) je ograničen ako postoji konstanta $M > 0$ takva da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$|a_n| \leq M.$$

1.1.2 O brojnim redovima

Definicija 5. Neka je $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ realni brojni niz. Beskonačni zbir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (3)$$

naziva se brojni ili numerički red.

Brojevi $a_1, a_2, \dots$ nazivaju se članovi reda, dok se a_n naziva opšti član reda. Red je u potpunosti određen svojim opštım članom.

Opštije, svaki beskonačni zbir oblika

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad (4)$$

takođe predstavlja brojni red. U opštem slučaju je $m \neq 1$, pa se redovi (3) i (4) razlikuju za konačno mnogo početnih članova.

Definicija 6. Zbir prvih n članova reda

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \cdots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

naziva se n -ta parcijalna suma reda.

1.1 Uvodni pojmovi

Kako je S_n konačan zbir brojeva, parcijalna suma postoji za svako $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 7. *Beskonačni zbir*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

naziva se ostatak reda nakon n -tog člana.

Definicija 8. *Brojni red*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

je konvergentan ako niz njegovih parcijalnih suma $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira. U suprotnom, red je divergentan.

Ako postoji granična vrednost

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

onda se broj S naziva *sumom* (ili *zbirom*) reda i piše se

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Ako važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$$

ili

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty,$$

kaže se da red *određeno divergira* ka $+\infty$, odnosno ka $-\infty$, respektivno.

Definicija 9 (Apsolutna konvergencija). *Red*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

je apsolutno konvergentan, odnosno konvergira apsolutno, ako je red

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

konvergentan.

1.1 Uvodni pojmovi

Teorema 4. *Ako je red apsolutno konvergentan, tada je i konvergentan.*

Teorema 5 (Integralni kriterijum). *Neka je $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pozitivna, neprekidna i opadajuća funkcija i neka je*

$$a_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergira ako i samo ako konvergira nesvojstveni integral

$$\int_1^{\infty} f(x) dx.$$

Primer 2 (Harmonijski red). *Red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

naziva se harmonijski red. Njegov opšti član je

$$a_n = \frac{1}{n},$$

dok je n-ta parcijalna suma

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Kako važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty,$$

niz parcijalnih suma ne konvergira. Prema Definiciji 8, harmonijski red je divergentan.

Primer 3. *Ispitati konvergenciju (geometrijskog) reda*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \tag{7}$$

u zavisnosti od realnog broja q .

Iz jednakosti

$$a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

1.1 Uvodni pojmovi

za $a = 1$ i $b = q$ sledi

$$1 - q^{n+1} = (1 - q)(1 + q + \cdots + q^n),$$

pa je za $q \neq 1$, n -ta parcijalna suma data sa

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q}{1 - q} q^n. \quad (8)$$

Za $q = 1$ dobijamo

$$S_n = \sum_{k=0}^n 1^k = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1,$$

pa red (7) određeno divergira ka $+\infty$.

Pošto za $|q| < 1$ važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0,$$

iz (8) dobijamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q} - \frac{q}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

Prema tome, geometrijski red konvergira za $|q| < 1$, pri čemu je

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

Ako je $q \geq 1$, tada važi

$$n + 1 = \sum_{k=0}^n 1^k \leq \sum_{k=0}^n q^k,$$

pa je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = +\infty.$$

To jest, red određeno divergira ka $+\infty$.

Ako je $q = -1$, niz parcijalnih suma ima oblik

$$1, 0, 1, 0, \dots,$$

1.1 Uvodni pojmovi

pa nema graničnu vrednost. Ako je $q < -1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$$

ne postoji (videti Primer 1). Iz (8) sledi da ne postoji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

odnosno dati red divergira.

Dakle, geometrijski red

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

konvergira ako i samo ako je $|q| < 1$, a tada je njegova suma data sa

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Teorema 6 (Potreban uslov za konvergenciju reda). *Ako je red*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergentan, tada važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Napomena 2. *Teorema 6 se najčešće primenjuje u obliku kontrapozicije. Naime, ako važi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0,$$

onda red

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

divergira.

Na primer, geometrijski red

1.1 Uvodni pojmovi

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

divergira za $q \geq 1$, jer je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n \neq 0.$$

Postoje razni kriterijumi konvergencije brojnih redova. Najpre ćemo navesti Lajbnicov kriterijum koji se primenjuje na alternirajuće redove oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n > 0.$$

Zatim ćemo navesti i poredbeni kriterijum za konvergenciju redova.

Teorema 7 (Lajbnicov kriterijum). *Alternirajući red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n > 0,$$

je konverentan ako je niz (a_n) opadajući i važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Teorema 8 (Poredbeni kriterijum). *Neka su*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad i \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

redovi za koje važi

$$0 < a_k \leq b_k, \quad \text{za svako } k \in \mathbb{N}.$$

Tada iz konvergencije reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

sledi konvergencija reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

1.1 Uvodni pojmovi

Takođe, iz divergencije reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

sledi divergencija reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

1.1.3 O funkcionalnim nizovima i redovima

Definicija 10. Neka su $f_n(x)$ realne funkcije za svako $n \in \mathbb{N}$, definisane na istoj oblasti

$$D \subseteq \mathbb{R}.$$

Preslikavanje

$$n \mapsto f_n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

odnosno uređeni skup funkcija $f_n(x)$, u oznaci

$$(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots),$$

naziva se funkcionalni niz. Umesto prethodne oznake, u upotrebi su i oznake

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}, \quad (f_n(x))_{n=1}^{\infty}, \quad (f_n(x)).$$

Takođe, funkcionalni niz je i

$$(f_m(x), f_{m+1}(x), \dots), \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Opšti član funkcionalnog niza je $f_n(x)$.

Definicija 11. Neka je $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ funkcionalni niz. Beskonačni zbir funkcija

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (9)$$

naziva se funkcionalni red.

Funkcije $f_1(x), f_2(x), \dots$ nazivaju se članovima reda, dok se $f_n(x)$ naziva opštim članom reda.

1.1 Uvodni pojmovi

Opštije, svaki beskonačni zbir funkcija oblika

$$\sum_{k=m}^{\infty} f_k(x) = f_m(x) + f_{m+1}(x) + \cdots, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

takođe predstavlja funkcionalni red.

Definicija 12. Za funkcionalni red

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

njegova n -ta parcijalna suma definiše se formulom

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Očigledno je da je $S_n(x)$ funkcija definisana na istoj oblasti $D \subseteq \mathbb{R}$ kao i članovi niza $f_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$.

Definicija 13. Neka je $(f_n(x))$ funkcionalni niz definisan na skupu $D \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da niz $(f_n(x))$ konvergira u tački $x = x_0 \in D$ ako konvergira brojni niz

$$(f_n(x_0)).$$

Definicija 14. Niz $(f_n(x))$ konvergira na intervalu $I \subseteq D$ ako postoji realna funkcija $f(x)$, $x \in I$, takva da važi

$$(\forall x \in I) (\forall \varepsilon > 0) (\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) (n > N(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Drugim rečima, niz $(f_n(x))$ konvergira na intervalu $I \subseteq D$ ako konvergira u svakoj tački tog intervala.

Za funkcionalne nizove i redove, pored tačkaste konvergencije, od posebnog značaja je i uniformna konvergencija, koja nema analogiju kod brojnih nizova i redova.

Definicija 15. Kaže se da niz $(f_n(x))$ ravnomerno (ili uniformno) konvergira ka graničnoj funkciji $f(x)$ na skupu $D \subseteq \mathbb{R}$, ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in D) (n > N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

1.1 Uvodni pojmovi

Definicija 16. *Funkcionalni red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

konvergira u tački x_0 ako konvergira brojni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0).$$

Skup svih tačaka $x_0 \in D$ u kojima red konvergira naziva se oblast konvergencije reda.

Definicija 17. *Funkcionalni red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

konvergira na intervalu $I \subseteq D$ ako niz njegovih parcijalnih suma

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

konvergira na intervalu I .

Definicija 18. *Funkcionalni red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

uniformno (ravnomerno) konvergira na intervalu $I \subseteq D$ ka funkciji $S(x)$ ako niz njegovih parcijalnih suma $(S_n(x))$ uniformno konvergira na intervalu I ka funkciji $S(x)$.

1.1.4 O stepenim redovima

Definicija 19. *Funkcionalni red oblika*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k, \tag{10}$$

gde je $a_k \in \mathbb{R}$ za svako $k \in \mathbb{N}_0$, naziva se stepeni red sa centrom u tački $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.1 Uvodni pojmovi

Napomena 3. Stepeni red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

uvek konvergira u razvojnoj tački $x = x_0$, jer za $n \geq 1$ važi

$$(x - x_0)^n = 0,$$

pa je vrednost reda u toj tački jednaka a_0 .

Ako stepeni red konvergira u nekoj tački $x_1 \neq x_0$, tada apsolutno konvergira u svakoj tački x za koju važi

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|.$$

Teorema 9. Za svaki stepeni red

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{11}$$

postoji broj $R \in [0, \infty]$ tako da važi:

1. red

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

apsolutno konvergira za

$$|x| < R;$$

2. red

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

divergira za

$$|x| > R.$$

Broj R , čije postojanje obezbeđuje prethodna teorema, naziva se poluprečnik ili radijus konvergencije stepenog reda (11). Ako je $R > 0$, interval

$$(-R, R)$$

naziva se interval konvergencije stepenog reda.

Ponašanje stepenog reda u krajnjim tačkama intervala konvergencije, odnosno za $x = \pm R$, mora se ispitivati posebno.

1.1 Uvodni pojmovi

Postoje razni načini određivanja poluprečnika konvergencije stepenih redova. Ovde navodimo jedan od njih.

Teorema 10 (Koši-Adamarova formula). *Poluprečnik konvergencije stepenog reda*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

određen je formulom

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Pri tome važe dogovori

$$\frac{1}{0} = +\infty, \quad \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Primer 4. *Ispitati konvergenciju stepenog reda*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k. \tag{12}$$

Red (12) je stepeni red sa $a_k = 1$ ($k \in \mathbb{N}_0$) i $x_0 = 0$. Na osnovu Primera 3 red (12) konvergira na intervalu $(-1, 1)$, dok se za $x = \pm 1$ dobija divergentni brojni red.

Teorema 11. *Neka je*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

stepeni red sa poluprečnikom konvergencije R . Tada je ovaj stepeni red uniformno konvergentan na svakom segmentu

$$[-r, r],$$

gde je $0 < r < R$.

Teorema 12. *Neka je*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

1.1 Uvodni pojmovi

stepeni red sa poluprečnikom konvergencije R . Ako važi

$$-R < \alpha < \beta < R,$$

onda se stepeni red može na segmentu $[\alpha, \beta]$ integraliti i diferencirati proizvoljno mnogo puta. Pri tome svi redovi dobijeni integracijom i diferenciranjem imaju isti poluprečnik konvergencije R .

1.1.5 Predstavljanje funkcija pomoću stepenih redova

Neka je $(-R, R)$, gde je $R \neq 0$, interval konvergencije stepenog reda

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (13)$$

Tada na intervalu $(-R, R)$ postoji suma reda (13), odnosno

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \in (-R, R). \quad (14)$$

Prema Teoremi 12, red (13) može se proizvoljan broj puta diferencirati član po član i integrirati, pri čemu dobijeni redovi konvergiraju na istom intervalu $(-R, R)$. Dakle, za svako $n \in \mathbb{N}$ postoje izvodi

$$S^{(n)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k x^k)^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k x^{k-n}, \quad x \in (-R, R).$$

Primer 5. Razvoj funkcije $\ln(1+x)$ u stepeni red. Pođimo od geometrijskog reda

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1.$$

Kako je

$$\frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{1}{1+x},$$

integracijom obe strane na intervalu $[0, x]$ dobijamo

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt.$$

1.1 Uvodni pojmovi

Pošto red uniformno konvergira na svakom segmentu $[-r, r]$, gde je $0 < r < 1$, dozvoljeno je integrisanje član po član. Zato je

$$\ln(1+x) - \ln 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt.$$

Kako je $\ln 1 = 0$, sledi

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Zamenom indeksa $k = n + 1$ dobijamo

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad |x| < 1.$$

Dakle, (Maklorenov) razvoj funkcije $\ln(1+x)$ u stepeni red glasi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

Primer 6 (Hiperharmonijski red). Za $\alpha > 1$ red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

naziva se hiperharmonijski red. Ovaj red je konvergentan za svako $\alpha > 1$.

Za $\alpha = 2$ kao poseban slučaj dobijamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Određivanje tačne vrednosti sume ovog reda poznato je kao Bazelski problem. Rešenje ovog problema dao je Ojler, pokazavši da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1.2 Metode sumabilnosti

Razvoj teorije sumabilnosti nastao je iz potrebe da se divergentnim brojnim i funkcionalnim redovima pridruži smisljena vrednost.

Pre uvođenja pojedinačnih metoda sumabilnosti potrebno je istaći razliku između konvergencije i sumabilnosti.

Konvergencija podrazumeva postojanje granične vrednosti niza parcijalnih suma reda, dok sumabilnost označava mogućnost da se redu dodeli vrednost primenom određene metode sumiranja. Za konvergentne redove suma dobijena metodom sumabilnosti poklapa se sa njihovom uobičajenom sumom.

Međutim, postoje divergentni redovi koji nisu konvergentni u uobičajenom smislu, ali su sumabilni u odnosu na neku od metoda sumiranja, poput Abelove ili Ćezarove.

U ovom poglavlju biće predstavljene Abelova, Ćezarova i Borelova metoda sumabilnosti, zajedno sa odgovarajućim primerima.

Biće navedena i Abelova teorema koja je otvorila put za razvoj Tauberove teorije.

1.2.1 Abelov metod sumabilnosti - Abelova teorema

Nils Henrik Abel je 1826. godine u časopisu *Journal für die reine und angewandte Mathematik* objavio rad u kojem je formulisao i dokazao sledeću teoremu za stepene redove. Ovaj rezultat predstavlja jedan od početaka razvoja Tauberove teorije.

Teorema 13 (Abelova teorema). *Neka je red*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konverentan i neka je njegova suma jednaka A , odnosno

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

Tada je stepeni red

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konverentan za svako $x \in (-1, 1)$ i važi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = A.$$

1.2 Metode sumabilnosti

Dokaz. Najpre pokažimo da je funkcija

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dobro definisana za svako $x \in (-1, 1)$.

Pošto je red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konvergentan, njegov opšti član teži nuli, odnosno

$$a_n \longrightarrow 0.$$

Prema tome, niz (a_n) je ograničen, pa postoji konstanta $M > 0$ takva da je

$$|a_n| \leq M, \quad n \geq 0.$$

Za svako $x \in (-1, 1)$ važi

$$|a_n x^n| \leq M |x|^n.$$

Kako geometrijski red

$$\sum_{n=0}^{\infty} M |x|^n$$

konvergira za $|x| < 1$, prema poredbenom kriterijumu apsolutno konvergira i red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Dakle, funkcija f dobro je definisana na intervalu $(-1, 1)$.

Označimo sa

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad n \geq 0,$$

parcijalne sume reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Po pretpostavci važi

$$s_n \longrightarrow A.$$

Niz (s_n) je konvergentan, pa je samim tim i ograničen. Stoga, za svako $|x| < 1$, red

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

1.2 Metode sumabilnosti

apsolutno konvergira.

Za $0 \leq x < 1$ važi identitet

$$f(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Zaista,

$$\begin{aligned} (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{n+1} \\ &= s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) x^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Pošto je za $0 \leq x < 1$ (videti Primer 3)

$$(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1,$$

imamo

$$A = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} A x^n.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} f(x) - A &= (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} A x^n \\ &= (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - A) x^n. \end{aligned}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Kako je

$$s_n \longrightarrow A,$$

postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za svako $n \geq N$ važi

$$|s_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

1.2 Metode sumabilnosti

Red razdvajamo na konačni deo i ostatak:

$$f(x) - A = (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} (s_n - A)x^n + (1-x) \sum_{n=N}^{\infty} (s_n - A)x^n.$$

Za ostatak reda važi

$$\begin{aligned} \left| (1-x) \sum_{n=N}^{\infty} (s_n - A)x^n \right| &\leq (1-x) \sum_{n=N}^{\infty} |s_n - A|x^n \\ &< \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \sum_{n=N}^{\infty} x^n \\ &= \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \frac{x^N}{1-x} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} x^N \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

za svako $0 \leq x < 1$.

S druge strane, funkcija

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} (s_n - A)x^n$$

je polinom, pa je ograničena u nekoj okolini tačke $x = 1$. Stoga važi

$$(1-x)P_N(x) \longrightarrow 0, \quad x \rightarrow 1^-.$$

Prema tome, postoji $\delta > 0$ takav da za

$$1 - \delta < x < 1$$

važi

$$\left| (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} (s_n - A)x^n \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Za takve vrednosti x dobijamo

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &\leq \left| (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} (s_n - A)x^n \right| \\ &\quad + \left| (1-x) \sum_{n=N}^{\infty} (s_n - A)x^n \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

1.2 Metode sumabilnosti

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, sledi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = A.$$

Time je dokaz završen. $\square$

Ova teorema predstavlja polaznu tačku za metodu sumabilnosti poznatu kao *Abelova sumabilnost* i zbog toga se smatra jednom od najvažnijih teorema u teoriji sumabilnosti. Brojni red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

koji ne mora biti konvergentan, naziva se *Abel-sumabilnim redom* ukoliko stepeni red

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergira za svako $|x| < 1$ i ako postoji granica

$$A := \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$

Granica A naziva se *Abelova suma* datog reda.

Koristeći ovu definiciju, Abelova teorema može se preformulisati na sledeći način: svaki konvergentan red je Abel-sumabilan, pri čemu je njegova suma jednaka njegovoj Abelovoj sumi. Drugim rečima, Abelova teorema pokazuje da se Abelova suma konvergentnog reda poklapa sa njegovom uobičajenom sumom.

Neka su M i N metode sumabilnosti. Abelovim teoremama nazivaju se teoreme oblika

$$\forall (a_n)_{n \geq 0} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ je } M\text{-sumabilan} \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ je } N\text{-sumabilan}$$

Tada se kaže da je metoda N *jača* od metode M , odnosno da je svaki M -sumabilan red istovremeno i N -sumabilan, dok mogu postojati redovi koji su N -sumabilni, ali nemaju M -sumu. Treba napomenuti da se u literaturi neke teoreme nazivaju *Abelovim*, iako se ne uklapaju u potpunosti u obrazac dat ovom definicijom.

Prvobitno je ova teorema bila posmatrana kao sredstvo za izračunavanje suma konvergentnih redova, kao što su

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2,$$

1.2 Metode sumabilnosti

i

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Kao ilustraciju primene Abelove teoreme razmotrimo red

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2,$$

i posmatraćemo razvoj $\ln(1+x)$ u stepeni red.

Kao što je pokazano u Primeru 5, funkcija $\ln(1+x)$ za $|x| < 1$ ima razvoj u stepeni red

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Brojni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

konvergira na osnovu Lajbnicovog kriterijuma, pa se na osnovu Abelove teoreme može opravdati prelaz na graničnu vrednost $x \rightarrow 1^-$ i dobijamo red koji je jednak

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Dok je jednakost

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

posledica Maklorenovog razvoja za funkciju $\arctan x$ u stepeni red.

Maklorenov razvoj funkcije $\arctan x$ može se dobiti polazeći od njenog izvoda.

Pošto je

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2},$$

za $|x| < 1$, primenom razvoja geometrijskog reda, dobijamo

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Integracijom prethodne jednakosti na intervalu od 0 do x sledi

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt.$$

1.2 Metode sumabilnosti

Kako se stepeni red može integraliti član po član unutar intervala konvergen-
cije, dobijamo

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Prema tome, Maklorenov razvoj funkcije $\arctan x$ glasi

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad |x| < 1.$$

Posmatrajmo sada brojni red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Kako niz

$$\left(\frac{1}{2n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

monotono opada i teži nuli, ovaj red konvergira na osnovu Lajbnicovog kriteriju-
ma.

Zato se može primeniti Abelova teorema, pa važi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Pošto je za $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x,$$

dobijamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x.$$

Kako je funkcija $\arctan x$ neprekidna u tački $x = 1$, sledi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Prema tome,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Ovaj red naziva se Lajbnicovim redom.

Mogućnost postojanja Abelovog limesa čak i kada je red divergentan pruža pri-
rodan način da mu se dodeli uopštena suma.

1.2 Metode sumabilnosti

Primer 7. Grandijev red koji predstavlja geometrijski red sa prvim članom $a = 1$ i količnikom $q = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

je divergentan, ali važi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad \text{kada } x \rightarrow 1^-.$$

Stoga možemo reći da je dati red Abel-sumabilan i da mu je Abelova suma jednaka $\frac{1}{2}$.

1.2.2 Ćezaro sumabilnost

Godine 1890. Ernesto Ćezaro uveo je novu metodu sumabilnosti divergentnih redova poznatu kao Ćezarova sumabilnost, objavivši svoj rad o srednjim vrednostima parcijalnih suma divergentnih redova u časopisu *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*.

Osnovna ideja Ćezarove metode jeste određivanje sume reda pomoću aritmetičkih sredina njegovih parcijalnih suma.

Neka je

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

n -ta parcijalna suma posmatranog reda, a neka je

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$

aritmetička sredina prvih $n+1$ parcijalnih suma. Niz (σ_n) naziva se nizom Ćezarovih sredina.

Kaže se da je red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Ćezaro-sumabilan sa sumom σ ako važi

$$\sigma_n \longrightarrow \sigma, \quad n \rightarrow \infty.$$

1.2 Metode sumabilnosti

Primer 8.

Grandijev red

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

ima parcijalne sume

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n \text{ paran,} \\ 0, & \text{ako je } n \text{ neparan.} \end{cases}$$

Aritmetičke sredine parcijalnih suma date su izrazom

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}.$$

Kako se u prvih $n+1$ parcijalnih suma vrednosti 0 i 1 smenjuju, dobija se

$$\sigma_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)}, & \text{ako je } n \text{ paran,} \\ \frac{1}{2}, & \text{ako je } n \text{ neparan.} \end{cases} \quad (15)$$

Dakle, niz Ćezarovih sredina ima oblik

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{1}{2}, \dots$$

odnosno

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \dots$$

Pošto važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0,$$

iz (15) sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{2}.$$

Kako važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{2},$$

zaključujemo da je Grandijev red Ćezaro-sumabilan sa sumom $\frac{1}{2}$, što se poklapa sa njegovom Abelovom sumom.

1.2 Metode sumabilnosti

1.2.3 Borel sumabilnost

1899. godine francuski matematičar Emil Borel uveo je novu metodu sumabilnosti.

Neka je dat brojni red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

i neka su

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

njegove parcijalne sume.

Ako stepeni red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} x^n$$

konvergira za svako $x \geq 0$ i postoji granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} x^n = L,$$

onda je red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *Borel-sumabilan* sa sumom L .

Oznaka za ovu sumabilnost je:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L (B).$$

Ovaj metod je koristan za sumiranje asimptotski divergentnih redova, odnosno redova koji klasično divergiraju, ali se njihove parcijalne sume mogu iskoristiti za izuzetno precizno izračunavanje vrednosti određene funkcije.

Primer 9. *Posmatrajmo Grandijev red*

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

Parcijalne sume Grandijevog reda su

$$1, 0, 1, 0, \dots,$$

1.2 Metode sumabilnosti

odnosno

$$s_{2k} = 1, \quad s_{2k+1} = 0, \quad k \geq 0.$$

Prema tome,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} x^n = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Na osnovu jednakosti

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

dobija se

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

iz čega sledi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} x^n = \cosh x.$$

Kako je

$$e^{-x} \cosh x = \frac{1 + e^{-2x}}{2}.$$

i važi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cosh x = \frac{1}{2},$$

zaključujemo da je red

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Borel-sumabilan i njegova Borelova suma iznosi $\frac{1}{2}$.

1.3 Tauberove teoreme

1.3 Tauberove teoreme

Kao što smo videli, brojni red može biti divergentan, ali sumabilan na osnovu različitih definicija sumabilnosti. Videli smo primere redova koji su Abel-sumabilni, Čezaro-sumabilni ili Borel-sumabilni.

Austrijski matematičar Alfred Tauber se zapitao da li važi obrat Abelove teoreme, odnosno šta izraz

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

znači za konvergenciju brojnog reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Godine 1897. Tauber je pokazao obrt Abelove teoreme uz dodatni uslov:

$$n a_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

odnosno

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Podsetimo se da zapis

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow \infty,$$

znači da važi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Teorema 14 (Tauberova teorema). *Pretpostavimo da važi*

$$n a_n \rightarrow 0 \quad \text{kada } n \rightarrow \infty,$$

i da stepeni red

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergira za $x \in (-1, 1)$. Ako

$$f(x) \rightarrow A \quad \text{kada } x \rightarrow 1^-,$$

1.3 Tauberove teoreme

onda brojni red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konvergira i njegova suma je jednaka A .

Dokaz. Koristeći oznaku

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

za parcijalne sume, možemo zapisati

$$s_n - f(x) = \sum_{k=1}^n a_k(1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k.$$

Za $0 < x < 1$ važi nejednakost

$$1 - x^k = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}) \leq k(1 - x),$$

odakle je

$$|s_n - f(x)| \leq (1 - x) \sum_{k=1}^n k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|x^k.$$

Neka je dato proizvoljno $\varepsilon > 0$. Po pretpostavci možemo izabrati n dovoljno veliko tako da za svako $k > n$ važi

$$k|a_k| < \varepsilon.$$

Tada dobijamo

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|x^k < \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k < \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\varepsilon}{n(1-x)}.$$

Sada biramo

$$x = x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

tako da je

$$1 - x_n = \frac{1}{n},$$

pri čemu važi $x_n \rightarrow 1$ kada $n \rightarrow \infty$. Na taj način dobijamo ocenu

$$|s_n - f(x_n)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k|a_k| + \varepsilon,$$

1.3 Tauberove teoreme

za dovoljno velike brojeve ($n \in \mathbb{N}$).

Pošto važi

$$k|a_k| \rightarrow 0,$$

primenom Štolcove teoreme zaključujemo da aritmetičke sredine

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k|a_k|$$

takođe teže nuli kada $n \rightarrow \infty$. Prema tome, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za svako $n \geq N$ važi

$$|s_n - f(x_n)| < 2\varepsilon.$$

Dakle,

$$s_n - f(x_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

S druge strane, pošto $x_n \rightarrow 1^-$ i po pretpostavci

$$f(x) \rightarrow A, \quad x \rightarrow 1^-,$$

sledi

$$f(x_n) \rightarrow A.$$

Konačno,

$$|s_n - A| \leq |s_n - f(x_n)| + |f(x_n) - A|.$$

Oba člana sa desne strane teže nuli kada $n \rightarrow \infty$, pa zaključujemo da

$$s_n \rightarrow A.$$

Prema tome, brojni red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konvergira i njegova suma je jednaka A . Time je dokaz završen. $\square$

1.3.1 Hardijeva teorema

1910. godine engleski matematičar Godfri Harold Hardi objavio je značajan rezultat koji je doprineo razvoju Tauberove teorije. Naime, on je Tauberov uslov

$$n a_n \rightarrow 0$$

1.3 Tauberove teoreme

zamenio slabijim uslovom, zahtevajući da niz

(na_n) bude ograničen.

To jest,

$$\exists C > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tako da za svako } n \geq n_0 \text{ važi } |a_n| \leq \frac{C}{n}.$$

Ekvivalentan zapis uslova ograničenosti je

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Oznaka

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow \infty,$$

znači da postoji konstanta $M > 0$ takva da za sve dovoljno velike vrednosti x važi

$$|f(x)| \leq M|g(x)|.$$

Sledeći rezultat poznat je kao Hardijeva teorema.

Teorema 15 (Hardijeva teorema). *Neka je red*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Ćezaro-sumabilan. Ako je niz

$$(na_n)$$

ograničen, onda red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konvergira.

1.3 Tauberove teoreme

1.3.2 Litlvudova teorema

Značajan napredak u razvoju Tauberove teorije, nezavisno od Hardijeve rezultata, ostvario je Džon Edensor Litlvud, koji je 1911. godine dokazao teoremu kojom je Tauberov uslov oslabljen na isti način na koji je to pretpostavio Hardi. Dok je u Tauberovoj teoremi potrebno pretpostaviti da važi

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

Litlvud je, kao i Hardi, pokazao da je dovoljno zahtevati slabiji uslov

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

odnosno da je niz (na_n) ograničen. Na taj način pokazano je da je obrat Abelove teoreme moguć pod znatno blažim dodatnim uslovom. Za razliku od Hardija, koji je koristio pretpostavku Ćezaro-sumabilnosti reda, Litlvud je razmatrao Abelovu sumabilnost reda.

Teorema 16 (Litlvudova teorema). *Pretpostavimo da je niz (na_n) ograničen, odnosno da postoji konstanta $C > 0$ takva da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi*

$$|na_n| \leq C.$$

Tada stepeni red

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergira za $x \in (-1, 1)$.

Ako važi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = A,$$

onda red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konvergira i njegova suma je jednaka A .

Nakon ovog rezultata započela je saradnja Hardija i Litlvuda duga 35 godina, u kojoj su između ostalog razvijali Tauberove teoreme tako što su tražili obrat Abelove pod Tauberovim uslovima.

1.3 Tauberove teoreme

1.3.3 Hardy-Litlvudova teorema

Sledeća teorema, dokazana 1914. godine, pokazuje da se iz Abelove sumabilnosti može zaključiti Ćezaro-sumabilnost pod uslovom da su parcijalne sume reda nenegativne.

Hardi-Litlvudova teorema predstavlja jedan od najvažnijih rezultata u razvoju Tauberove teorije i označila je početak intenzivnog razvoja savremenih Tauberovih teorema.

Originalni dokaz Hardija i Litlvuda bio je veoma složen. Godine 1930. Jovan Karamata pronašao je znatno jednostavniji dokaz koristeći Vajerštrasovu teoremu o aproksimaciji.

U nastavku ćemo formulisati Hardy-Litlvudovu teoremu i izložiti Karamatin dokaz.

Teorema 17 (Hardi-Litlvudova teorema). *Neka je*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \longrightarrow A, \quad x \rightarrow 1^-,$$

i neka za sve n važi

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \geq 0.$$

Tada važi

$$\sigma_n \longrightarrow A, \quad n \rightarrow \infty,$$

gde je σ_n Ćezarova sredina niza parcijalnih suma (s_n) , odnosno

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k.$$

Radi izlaganja Karamatinog dokaza, najpre ćemo navesti formulaciju Vajerštrasove aproksimacione teoreme.

Teorema 18 (Vajerštrasova teorema o aproksimaciji). *Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji polinom $P(x)$ takav da važi*

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

U Karamatinom dokazu korišćićemo sledeću pomoćnu lemu. Kako je njen dokaz tehničke prirode i nije od suštinskog značaja za osnovnu ideju dokaza, navodimo je bez dokaza (videti [10]).

1.3 Tauberove teoreme

Lema 1. Neka je $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je $0 < c < 1$. Pretpostavimo da su restrikcije funkcije g na intervale $[0, c)$ i $[c, 1]$ neprekidne i da važi

$$g(c-0) := \lim_{x \rightarrow c^-} g(x) \leq g(c).$$

Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoje polinomi P i Q takvi da važi

$$P(x) \leq g(x) \leq Q(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

kao i

$$\int_0^1 |g(x) - P(x)| dx \leq \varepsilon, \quad \int_0^1 |g(x) - Q(x)| dx \leq \varepsilon.$$

Sada možemo preći na Karamatin dokaz Hardi–Litlvudove teoreme.

Dokaz. Po pretpostavci važi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \longrightarrow A, \quad x \rightarrow 1^-.$$

Tvrdimo da iz ovoga, u opštijem slučaju, sledi da za svaki polinom $p(x)$ važi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n p(x^n) = A \int_0^1 p(t) dt. \quad (16)$$

Da bismo to dokazali, dovoljno je razmotriti slučaj kada je $p(x) = x^k$, odnosno kada je p monom. Tada leva strana jednakosti postaje

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{n+kn} = \frac{1-x}{1-x^{k+1}} \left[(1-x^{k+1}) \sum_{n=0}^{\infty} s_n (x^{k+1})^n \right].$$

Kako je

$$\frac{1-x}{1-x^{k+1}} \longrightarrow \frac{1}{k+1}, \quad x \rightarrow 1^-,$$

a po pretpostavci

$$(1-x^{k+1}) \sum_{n=0}^{\infty} s_n (x^{k+1})^n \longrightarrow A,$$

dobijamo

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{n+kn} \longrightarrow \frac{A}{k+1}.$$

1.3 Tauberove teoreme

Pošto je

$$\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1},$$

sledi da

$$\frac{A}{k+1} = A \int_0^1 p(t) dt,$$

čime je tvrdnja dokazana. Pozivajući se na prethodnu lemu, dokažimo da iz relacije 16 sledi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n g(x^n) = A \int_0^1 g(t) dt, \quad (17)$$

gde je g neprekidna na intervalu $[0, 1]$, osim eventualno u jednoj tački prekida prve vrste.

Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ izaberimo polinome P i Q kao u lemi. Tada za $0 < x < 1$ važi

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n P(x^n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n g(x^n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n Q(x^n).$$

Upravo na ovom mestu iskoristili smo pretpostavku $s_n \geq 0$. Pošto iz uslova $s_n \geq 0$ sledi da je $A \geq 0$, dobijamo

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n g(x^n) &\leq \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n Q(x^n) \\ &= A \int_0^1 Q(t) dt \leq A \int_0^1 g(t) dt + A\varepsilon. \end{aligned}$$

Puštajući da $\varepsilon \rightarrow 0$, zaključujemo da važi

$$\limsup_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n g(x^n) \leq A \int_0^1 g(t) dt.$$

Na sličan način dobija se

$$\liminf_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n g(x^n) \geq A \int_0^1 g(t) dt.$$

Kombinovanjem poslednje dve nejednakosti dobija se relacija 17. Zatim bismo funkciju

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{1}{e}, \\ \frac{1}{t}, & \frac{1}{e} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

1.3 Tauberove teoreme

koja je neprekidna na $[0, 1]$, osim u $t = \frac{1}{e}$, u kojoj ima prekid prve vrste. Tada važi

$$\int_0^1 g(t) dt = \int_{1/e}^1 \frac{1}{t} dt = 1.$$

Neka je

$$x_N = e^{-1/N}.$$

Primećujemo da je

$$x_N^n \geq \frac{1}{e}$$

ako i samo ako je

$$n \leq N,$$

pa sledi da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x_N^n g(x_N^n) = \sum_{n=0}^N s_n = (N+1)\sigma_N.$$

Sada iz relacije 17 dobijamo

$$(N+1)(1-x_N)\sigma_N = (1-x_N) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x_N^n g(x_N^n) \longrightarrow A \int_0^1 g(t) dt = A,$$

kada $N \rightarrow \infty$, pošto $x_N \rightarrow 1$.

S druge strane, koristeći Lopitalovo pravilo,

$$(N+1)(1-x_N) = (N+1)(1-e^{-1/N}) \longrightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty.$$

Kako

$$(N+1)(1-x_N) \longrightarrow 1,$$

a istovremeno

$$(N+1)(1-x_N)\sigma_N \longrightarrow A,$$

deljenjem druge granične relacije prvom dobijamo

$$\sigma_N \longrightarrow A,$$

čime je dokaz završen. □

2 Tauberove teoreme o Laplasovoj transformaciji

U prethodnoj glavi razmatrane su Tauberove teoreme za redove. Međutim, Tauberova teorija nije ograničena samo na redove, već obuhvata i funkcije definisane pomoću integrala.

Jedan od najznačajnijih primera jeste Laplasova transformacija, koja predstavlja jedan od osnovnih alata u formulisanju i dokazivanju brojnih Tauberovih teorema. Laplasova transformacija omogućava proučavanje ponašanja funkcija preko njihovih transformacija, čime se ideje Tauberove teorije prirodno proširuju sa beskonačnih redova na mnogo širu klasu funkcija. U ovoj glavi biće predstavljeni osnovni pojmovi i rezultati koji su obrađeni u sledećoj literaturi: [9], [16], [11], [12], [1] i [13].

2.1 O Laplasovoj transformaciji

Najpre ćemo se podsetiti osnovnih pojmova i tvrđenja iz kompleksne analize koji će nam biti korisni da bismo formulisali i dokazali Tauberove teoreme za Laplasovu transformaciju. Zatim ćemo definisati Laplasovu transformaciju i navesti njene osnovne osobine, a potom uspostaviti vezu između Laplasove transformacije i stepenih redova.

2.1.1 Osnovni pojmovi i rezultati kompleksne analize

Budući da se Laplasova transformacija u ovom radu posmatra kao funkcija kompleksne promenljive, za njeno proučavanje biće nam potrebni određeni pojmovi i rezultati kompleksne analize. U nastavku ćemo izdvojiti one pojmove koji će biti od značaja za razmatranje analitičkih osobina Laplasove transformacije i dokazivanje Tauberovih rezultata.

Definicija 20. *Kompleksan broj je izraz oblika*

$$a + bi,$$

gde su $a, b \in \mathbb{R}$.

Skup svih kompleksnih brojeva označavamo sa $\mathbb{C}$, odnosno

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

2.1 O Laplasovoj transformaciji

Element skupa kompleksnih brojeva najčešće obeležavamo slovom z , odnosno

$$z = a + bi.$$

Definicija 21. Za kompleksan broj $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, kažemo da je a njegov realni deo i pišemo

$$a = \operatorname{Re} z,$$

dok se b naziva imaginarni deo i pišemo

$$b = \operatorname{Im} z.$$

Ako je $a = 0$, kažemo da je $z = bi$ čisto imaginaran broj.

Dakle, i realni i imaginarni deo kompleksnog broja z su realni brojevi. Možemo da koristimo zapis

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}.$$

Definicija 22. Moduo kompleksnog broja $z = a + bi \in \mathbb{C}$, u oznaci $|z|$, je njegova euklidska udaljenost od koordinatnog početka, odnosno

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Moduo kompleksnog broja je uvek nenegativan realan broj, odnosno $|z| \geq 0$, za sve $z \in \mathbb{C}$.

Ravan u kojoj se predstavljaju kompleksni brojevi naziva se kompleksna ili Gausova ravan. Nju čine kompleksni brojevi, sa Dekartovim koordinatnim sistemom u kom horizontalnu x -osu, koja se naziva realna osa, čine realni brojevi, dok vertikalnu y -osu, koja se naziva imaginarna osa, čine imaginarni brojevi. Za nas će posebno biti značajna leva i desna poluravan

$$\operatorname{Re} z < 0, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

odnosno leva i desna zatvorena poluravan

$$\operatorname{Re} z \leq 0, \quad \operatorname{Re} z \geq 0,$$

respektivno.

Definicija 23. Okolina tačke z_0 je svaka otvorena lopta $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$, gde je $r > 0$. Kažemo da je z_0 unutrašnja tačka skupa $A \subseteq \mathbb{C}$ ako postoji $r > 0$ tako da je

$$B(z_0, r) \subseteq A.$$

2.1 O Laplasovoj transformaciji

Definicija 24. Skup $A \subseteq \mathbb{C}$ je otvoren ako i samo ako je svako $z \in A$ unutrašnja tačka skupa A .

Kao i u realnoj analizi skup $A \subseteq \mathbb{C}$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen.

Definicija 25. Tačka $z_0 \in \mathbb{C}$ je tačka nagomilavanja skupa $A \subseteq \mathbb{C}$ ako postoji niz $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tako da je $z_n \neq z_0$, $n \in \mathbb{N}$ i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0.$$

Definicija 26. Neka je kompleksna funkcija f definisana u nekoj okolini tačke z_0 . Kažemo da je w_0 granična vrednost funkcije f kada z teži z_0 i pišemo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0,$$

ako i samo ako važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall z \in D_f) \quad 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Definicija 27. Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini tačke z_0 . Tada je funkcija f neprekidna u tački z_0 ako i samo ako je

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Funkcija f je neprekidna na skupu $S \subseteq D_f$ ako i samo ako je neprekidna u svakoj tački skupa S .

Definicija 28. Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini tačke z_0 . Izvod funkcije f u tački z_0 dat je na sledeći način

$$\frac{df}{dz}(z_0) = f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

ako dati limes postoji. Tada kažemo da je funkcija f diferencijabilna u tački z_0 .

Istaknimo odmah da je funkcija koja je diferencijabilna u tački z_0 ujedno i neprekidna u toj tački, što se pokazuje analogno kao u realnoj analizi.

Definicija 29. Funkcija f je analitička na otvorenom skupu $S \subseteq \mathbb{C}$ ako je diferencijabilna u svakoj tački skupa S . Za kompleksnu funkciju f kažemo da je analitička u tački z_0 ako postoji okolina tačke z_0 , odnosno ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da je funkcija f analitička na otvorenoj lopti $B(z_0, \varepsilon)$. Specijalno, kažemo da je funkcija f cela ako je analitička na $\mathbb{C}$.

2.1 O Laplasovoj transformaciji

Definicija 30. Neka je z_0 tačka nagomilavanja domena D_f funkcije f . Tačka z_0 se naziva *singularna tačka*, ili *singularitet*, funkcije f , ako funkcija f nije analitička u tački z_0 , ali postoji niz tačaka koje konvergiraju u z_0 i u kojima f jeste analitička.

Dakle, singularitet je ona tačka u kojoj se gubi analitičnost funkcije. To znači dve stvari, da funkcija nije analitička u singularnoj tački, ali i da je analitička u njenoj okolini. Tačke koje su daleko od oblasti analitičnosti funkcije se ne uzimaju u obzir kada se govori o singularitetima. Postoje dve osnovne vrste singulariteta:

- z_0 je *izolovani singularitet* ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da je u lopti $B(z_0, \varepsilon)$ tačka z_0 jedini singularitet. U ovu grupu spadaju otklonjivi singulariteti, polovi i esencijalni singulariteti. Izolovani singulariteti najčešće nastaju kao posledica deljenja nulom.
- Inače, z_0 je *tačka nagomilavanja singulariteta*. Ovde postoje dve mogućnosti: ili je z_0 tačka nagomilavanja izolovanih singulariteta ili je *tačka grananja*. Tačke grananja pojavljuju se, na primer, kod logaritamske funkcije i korena.

Definicija 31. Neka je f analitička funkcija definisana na nepraznom otvorenom skupu $U \subset \mathbb{C}$ i neka je $V \subset \mathbb{C}$ otvoren skup takav da je $U \subset V$. Ako postoji analitička funkcija $F: V \rightarrow \mathbb{C}$ takva da je

$$F(z) = f(z), \quad z \in U,$$

onda se funkcija F naziva *analitičko produženje funkcije f sa skupa U na skup V* .

Dakle, analitičko produženje omogućava da se domen definisanosti analitičke funkcije proširi na veći otvoren skup, pri čemu se vrednosti funkcije na prvobitnom domenu ne menjaju.

Primer 10. Posmatrajmo funkciju

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Na osnovu formule za sumu geometrijskog reda važi

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

2.1 O Laplasovoj transformaciji

Funkcija

$$F(z) = \frac{1}{1-z}$$

je analitička na skupu $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ i na skupu $|z| < 1$ poklapa se sa funkcijom f . Prema tome, F predstavlja analitičko produženje funkcije f sa jediničnog diska na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Definicija 32. Neka je z_0 izolovani singularitet funkcije f . Kažemo da je z_0 otklonjivi singularitet funkcije f ako se funkcija f može analitički produžiti u tački z_0 , odnosno ako postoji funkcija $\tilde{f}$, analitička u nekoj okolini tačke z_0 , takva da je

$$\tilde{f}(z) = f(z), \quad z \neq z_0.$$

Primer 11. Posmatrajmo funkciju

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad z \neq 0.$$

Tačka $z = 0$ je izolovani singularitet funkcije f . Kako je

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1,$$

postoji konačna granična vrednost funkcije f u tački $z = 0$. Prema tome, $z = 0$ je otklonjivi singularitet.

Definisanjem

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0, \end{cases}$$

dobijamo analitičko produženje funkcije f u tačku $z = 0$.

Pored otklonjivih singulariteta, u nastavku će nam biti potreban još jedan tip izolovanog singulariteta - prost pol.

Definicija 33. Neka je z_0 izolovani singularitet funkcije f . Kažemo da je z_0 prost pol funkcije f ako funkcija

$$g(z) = (z - z_0)f(z)$$

ima otklonjivi singularitet u tački z_0 i njeno analitičko produženje u toj tački zadovoljava

$$g(z_0) \neq 0.$$

2.1 O Laplasovoj transformaciji

Primer 12. Posmatrajmo funkciju

$$f(z) = \frac{1}{z-2}.$$

Tačka $z = 2$ je izolovani singularitet funkcije f . Kako je

$$\lim_{z \rightarrow 2} (z-2)f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z-2}{z-2} = 1 \neq 0,$$

tačka $z = 2$ je prost pol funkcije f .

Pored analitičkih osobina kompleksnih funkcija, u nastavku će nam biti potrebna i integracija duž krivih u kompleksnoj ravni. Zbog toga ćemo uvesti osnovne pojmove vezane za glatke krive i konture, koji će kasnije biti korišćeni pri formulisanju Košijeve integralne teoreme i teoreme o reziduumima.

Definicija 34. Skup tačaka u kompleksnoj ravni, $\gamma \subset \mathbb{C}$, naziva se glatka kriva ako postoji preslikavanje

$$z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

takvo da je

$$\gamma = \{z(t) \mid t \in [a, b]\}$$

i zadovoljava sledeće uslove:

1. Preslikavanje z je neprekidno diferencijabilno na $[a, b]$, odnosno funkcija z je oblika

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b],$$

pri čemu je

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t), \quad t \in [a, b], \quad x, y \in C^1[a, b].$$

2. Važi

$$z'(t) \neq 0, \quad t \in [a, b].$$

3. Preslikavanje z je injektivno, odnosno kriva γ nema samopresečnih tačaka.

Skup $\gamma \subset \mathbb{C}$ naziva se zatvorena glatka kriva ako važe uslovi 1. i 2. i, umesto uslova 3., važi uslov

2.1 O Laplasovoj transformaciji

3'. Preslikavanje z je injektivno za $t \in [a, b]$ i važi

$$z(a) = z(b) \quad i \quad z'(a) = z'(b).$$

Preslikavanje $z(t)$, $t \in [a, b]$, naziva se dopuštena parametrizacija krive γ .

Definicija 35. Kažemo da je Γ kontura ako je ili jedna tačka z_0 ili konačan niz orijentisanih glatkih krivih $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, tako da se krajnja tačka krive γ_k poklapa sa početnom tačkom krive γ_{k+1} , $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Pišemo

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n.$$

Pojam orijentisane krive kao i pozitivne i negativne orijentacije krive je naveden u [9].

Pojam integrala duž (zatvorene) krive u kompleksnoj ravni se zasniva na odgovarajućim particijama P_n . Detalji definicije se mogu naći u [9].

Integral funkcije f duž krive γ se obeležavamo sa

$$\int_{\gamma} f(z) dz,$$

a kada želimo da naglasimo da se integracija vrši duž zatvorene krive γ , koristimo oznaku

$$\oint_{\gamma} f(z) dz.$$

Teorema 19. Ako je f neprekidna na konturi Γ i ako je

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in \Gamma,$$

onda važi

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot l(\Gamma),$$

gde $l(\Gamma)$ označava dužinu konture Γ .

Teorema 20 (Košijeva integralna teorema). Neka je Γ prosta zatvorena pozitivno orijentisana kontura koja zajedno sa svojom unutrašnjošću leži u prosto povezanoj oblasti D . Ako je funkcija f analitička u D , tada je

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

2.1 O Laplasovoj transformaciji

Primer 13. Posmatrajmo integral

$$\oint_{|z|=1} z^2 dz,$$

gde je kružnica $|z| = 1$ pozitivno orijentisana.

Funkcija

$$f(z) = z^2$$

je analitička na celoj kompleksnoj ravni, pa je, prema Košijevoj integralnoj teoremi,

$$\oint_{|z|=1} z^2 dz = 0.$$

Definicija 36. Prosto povezana oblast D je oblast sa sledećom osobinom: ako je Γ proizvoljna prosta (bez samopresečnih tačaka), orijentisana, zatvorena kontura u D , tada unutrašnjost konture Γ cela leži u D .

Teorema 21 (Košijeva integralna formula). Neka je Γ prosta zatvorena pozitivno orijentisana kontura. Ako je f analitička u nekoj prosto povezanoj oblasti D koja sadrži konturu Γ i ako je z_0 u unutrašnjosti Γ , onda

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Pored integrala duž krivih u kompleksnoj ravni, u definiciji Laplasove transformacije pojavljuje se nesvojstveni integral, pa ćemo navesti i pojam njegove konvergencije.

Definicija 37. Neka je funkcija f integrabilna na svakom konačnom intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Nesvojstveni integral funkcije f na $\mathbb{R}$ definiše se sa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow -\infty}} \int_{-y}^x f(t) dt,$$

ukoliko navedena granična vrednost postoji.

Kažemo da nesvojstveni integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

apsolutno konvergira ako konvergira integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt.$$

2.1 O Laplasovoj transformaciji

Apsolutna konvergencija povlači konvergenciju nesvojstvenog integrala.

Za primenu konturne integracije biće nam potreban i pojam reziduuma, kao i teorema o reziduumima.

Definicija 38. Neka je funkcija f analitička u okolini

$$|z - z_0| < R,$$

osim možda u tački z_0 . Reziduum funkcije f u tački z_0 , u oznaci $\text{Res}(f; z_0)$, definiše se sa

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(z) dz,$$

gde je C^+ pozitivno orijentisana kružnica sa centrom u z_0 i poluprečnikom r , pri čemu je $0 < r < R$.

Teorema 22 (Teorema o reziduumima). Neka je Γ prosta zatvorena pozitivno orijentisana kontura i neka je funkcija f analitička u oblasti koju ograničava Γ , osim u konačno mnogo izolovanih singulariteta $z_1, \dots, z_n$ koji se nalaze u unutrašnjosti konture. Tada važi

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f; z_k).$$

Primer 14. Odredimo integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz,$$

gde je kružnica $|z| = 1$ pozitivno orijentisana.

Funkcija

$$f(z) = \frac{e^z}{z}$$

ima unutar konture $|z| = 1$ samo jedan singularitet, i to prost pol u tački $z = 0$. Kako je $z = 0$ prost pol, važi

$$\text{Res}(f; 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1,$$

primenom teoreme o reziduumima dobijamo

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i \text{Res}(f; 0) = 2\pi i.$$

2.1 O Laplasovoj transformaciji

2.1.2 Definicija i osnovne osobine Laplasove transformacije

Nakon uvođenja osnovnih pojmova i tvrđenja iz kompleksne analize, možemo definisati Laplasovu transformaciju, koja će imati značajnu ulogu u formulisanju Tauberovih rezultata u nastavku.

Definicija 39. Neka je $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ funkcija i neka je $z \in \mathbb{C}$. Laplasova transformacija funkcije F definiše se sa

$$\mathcal{L}\{F\}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} F(t) dt,$$

za sve $z \in \mathbb{C}$ za koje navedeni integral konvergira.

Ako označimo

$$G(z) = \mathcal{L}\{F\}(z),$$

tada pišemo

$$G(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} F(t) dt.$$

Integral koji se pojavljuje u definiciji Laplasove transformacije je nesvojstveni integral i definiše se sa

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} F(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-zt} F(t) dt,$$

ukoliko navedena granična vrednost postoji.

Skup svih tačaka $z \in \mathbb{C}$ za koje Laplasova transformacija konvergira naziva se oblast konvergenije Laplasove transformacije.

Ako postoji $\omega \in \mathbb{R}$ takvo da je funkcija

$$t \mapsto e^{-\omega t} F(t)$$

apsolutno integrabilna na $[0, \infty)$, odnosno ako je

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega t} |F(t)| dt < \infty,$$

onda Laplasova transformacija postoji za svako $z \in \mathbb{C}$ za koje je

$$\operatorname{Re} z > \omega.$$

Dakle, u ovom slučaju oblast konvergenije sadrži otvorenu poluravan

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \omega\}.$$

Pored toga, Laplasova transformacija je analitička funkcija kompleksne promenljive z u ovoj poluravni.

2.1 O Laplasovoj transformaciji

Teorema 23. *Ako Laplasova transformacija*

$$G(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} F(t) dt$$

apsolutno konvergira u poluravni $\operatorname{Re} z > \omega$, tada je G analitička funkcija u toj poluravni.

Jedna od osnovnih osobina Laplasove transformacije jeste linearnost.

Teorema 24. *Ako postoje Laplasove transformacije funkcija F i G , onda za $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ važi*

$$\mathcal{L}\{\alpha F + \beta G\}(z) = \alpha \mathcal{L}\{F\}(z) + \beta \mathcal{L}\{G\}(z).$$

Primer 15. *Posmatrajmo konstantnu funkciju*

$$F(t) = 1, \quad t \geq 0.$$

Njena Laplasova transformacija je

$$\mathcal{L}\{F\}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt.$$

Za $\operatorname{Re} z > 0$ ovaj integral konvergira i važi

$$\mathcal{L}\{F\}(z) = \left[-\frac{1}{z} e^{-zt} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{z}.$$

Prema tome,

$$\mathcal{L}\{1\}(z) = \frac{1}{z}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Posebno je značajno što je Laplasova transformacija analitička u oblasti konvergencije. Upravo analitičke osobine Laplasove transformacije i mogućnost njenog produženja na graničnu pravu ili širu oblast predstavljaju osnovu za Tauberove rezultate koji će biti razmatrani u nastavku.

2.1.3 Veza Laplasove transformacije i stepenih redova

Posmatrajmo Laplasovu transformaciju

$$G(z) = \int_0^{\infty} F(t) e^{-zt} dt,$$

2.1 O Laplasovoj transformaciji

gde je $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ odgovarajuća funkcija, a z kompleksna promenljiva. U opštem obliku, Tauberove teoreme ovog tipa omogućavaju da se, na osnovu ponašanja funkcije $G(z)$ kada $\operatorname{Re} z \rightarrow 0^+$ i uz odgovarajuće pretpostavke o funkciji F , izvedu zaključci o konvergenciji integrala

$$\int_0^\infty F(t) dt.$$

Pre nego što formulišemo Tauberovu teoremu za Laplasovu transformaciju, pokažemo da se stepeni redovi mogu povezati sa Laplasovom transformacijom.

Neka je

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

stepeni red koji konvergira za $|x| < 1$. Definišimo funkciju $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ sa

$$F(t) = a_n, \quad n \leq t < n+1, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Tada za $\operatorname{Re}(z) > 0$ važi

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F(t) e^{-zt} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} F(t) e^{-zt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_n^{n+1} e^{-zt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z} (e^{-nz} - e^{-(n+1)z}) \\ &= \frac{1 - e^{-z}}{z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nz}. \end{aligned}$$

Kako je

$$g(e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nz},$$

dobijamo

$$g(e^{-z}) = \frac{z}{1 - e^{-z}} \int_0^\infty F(t) e^{-zt} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Dobijena jednakost uspostavlja vezu između stepenih redova i Laplasove transformacije. Ova veza pokazuje da se Tauberovi problemi za stepene redove mogu ugraditi u okvir Laplasove transformacije.

2.2 Tauberovi rezultati za Laplasovu transformaciju

Tauberove teoreme za Laplasovu transformaciju omogućavaju da se, uz odgovarajuće dodatne uslove, iz osobina Laplasove transformacije funkcije izvedu zaključci o ponašanju same funkcije, odnosno o konvergenciji odgovarajućeg nesvojstvenog integrala. Neka je

$$G(z) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-zt} dt,$$

gde je $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, a z kompleksna promenljiva. Tauberov problem ovog tipa može se opisati na sledeći način: pretpostavlja se da navedeni integral konvergira za

$$\operatorname{Re} z > 0,$$

da su poznate određene osobine funkcije $G(z)$ pri približavanju pravou

$$\operatorname{Re} z = 0,$$

kao i odgovarajući uslovi na funkciju F . Na osnovu tih pretpostavki nastoji se izvesti zaključak o konvergenciji integrala

$$\int_0^{\infty} F(t) dt.$$

Razvoj ove teorije započeo je Abel u 19. veku, dok je značajan doprinos dao Norbert Viner, koji je oko 1930. godine razvio opštu Tauberovu teoriju. Polazeći od Vinerovih rezultata, Šigeru Ikehara je 1931. godine izveo Tauberovu teoremu koja je danas poznata kao Viner-Ikeharina teorema i koja ima značajne primene u teoriji brojeva.

Kasnije, 1980. godine, Donald Njuman razvio je novi pristup izvođenju Tauberovih teorema, zasnovan na konturnoj integraciji, kojim se izbegava upotreba metoda funkcionalne analize.

Ovaj pristup je dalje razvijao Jakob Korevar.

U nastavku će najpre biti razmotrena Abelova, a potom Njumanova Tauberova teorema u formulaciji za Laplasovu transformaciju. Nakon toga formulisaćemo Viner-Ikeharinu Tauberovu teoremu u obliku povezanom sa Laplasovom transformacijom.

2.2 Tauberovi rezultati za Laplasovu transformaciju

2.2.1 Abelova Tauberova teorema za Laplasovu transformaciju

Teorema 25 (Lebegova teorema o dominantnoj konvergenciji). *Neka niz integrabilnih funkcija (f_n) konvergira ka funkciji f . Ako postoji integrabilna funkcija Φ takva da je*

$$|f_n(x)| \leq |\Phi(x)|, \quad x \in \mathbb{R},$$

za svako $n \in \mathbb{N}$, onda je funkcija f integrabilna i važi

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) dx.$$

Dodatno,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f_n(x)| dx = 0.$$

Teorema 26 (Abelova teorema za Laplasovu transformaciju). *Ako je*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) dt = A,$$

i $s > 0$, onda važi

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = A.$$

Dokaz. Primenimo parcijalnu integraciju na posmatrani integral. Neka je

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx.$$

Tada je

$$\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-st} dF(t).$$

Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\int_0^\infty e^{-st} dF(t) = [e^{-st} F(t)]_{t=0}^\infty + s \int_0^\infty F(t) e^{-st} dt.$$

Kako je

$$[e^{-st} F(t)]_{t=0}^\infty = 0,$$

sledi

$$\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = s \int_0^\infty F(t) e^{-st} dt.$$

2.2 Tauberovi rezultati za Laplasovu transformaciju

U poslednjem integralu izvršimo smenu

$$x = st.$$

Tada dobijamo

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty F\left(\frac{x}{s}\right) e^{-x} dx.$$

Pošto

$$F(t) \longrightarrow A \quad \text{kada } t \rightarrow \infty,$$

za svako $x > 0$ važi

$$F\left(\frac{x}{s}\right) \longrightarrow A \quad \text{kada } s \rightarrow 0^+.$$

Osim toga, funkcija F je ograničena u nekoj okolini beskonačnosti, jer ima konačan limes. Prema Lebegovoj teoremi o dominantnoj konvergenciji sledi

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^\infty F\left(\frac{x}{s}\right) e^{-x} dx = A \int_0^\infty e^{-x} dx = A.$$

Dakle,

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = A.$$

□

2.2.2 Njumanova Tauberova teorema za Laplasovu transformaciju

Sledeća teorema predstavlja Tauberov rezultat za Laplasovu transformaciju zasnovan na kompleksno-analitičkom pristupu Njumana. Najpre navodimo pomoćnu lemu o analitičnosti Laplasove transformacije.

Lema 2. *Neka je $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ merljiva i lokalno integrabilna funkcija. Pretpostavimo da postoji konstanta $M > 0$ takva da je*

$$|F(t)| \leq M, \quad t \geq 1.$$

Tada integral

$$G(z) = \int_0^\infty F(t)e^{-zt} dt$$

konvergira za $\operatorname{Re} z > 0$ i definiše analitičku funkciju u poluravni

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}.$$

2.2 Tauberovi rezultati za Laplasovu transformaciju

Sada možemo formulisati Tauberovu teoremu za Laplasovu transformaciju.

Teorema 27. *Neka je $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ funkcija koja zadovoljava sledeće uslove:*

1. *F je merljiva;*
2. *postoji $M > 0$ tako da je*

$$|F(t)| \leq M, \quad t \geq 0;$$

3. *postoji funkcija G , analitička na otvorenom skupu koji sadrži zatvorenu desnu poluravan*

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\},$$

takva da za $\operatorname{Re} z > 0$ važi

$$G(z) = \int_0^\infty F(t) e^{-zt} dt.$$

Tada nesvojstveni integral

$$\int_0^\infty F(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T F(t) dt$$

konvergira i važi

$$\int_0^\infty F(t) dt = G(0).$$

Napomena 4. *Integral*

$$\int_0^\infty F(t) dt$$

ne mora apsolutno konvergirati. Drugim rečima, moguće je da je

$$\int_0^\infty |F(t)| dt = \infty,$$

iako sam integral funkcije F konvergira.

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti u nekoliko koraka.

Najpre ćemo pokazati da je dovoljno dokazati teoremu u slučaju $G(0) = 0$, iz čega će slediti opšti slučaj.

2.2 Tauberovi rezultati za Laplasovu transformaciju

Korak 1. Svođenje na slučaj $G(0) = 0$.

Definišimo

$$\tilde{F}(t) = F(t) - G(0)e^{-t}$$

i

$$\tilde{G}(z) = G(z) - \frac{G(0)}{z+1}.$$

Funkcija $\tilde{F}$ je merljiva i ograničena, dok je $\tilde{G}$ analitička na odgovarajućoj oblasti. Takođe,

$$\tilde{G}(0) = 0.$$

Za $\operatorname{Re} z > 0$ imamo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \tilde{F}(t)e^{-zt} dt &= \int_0^\infty F(t)e^{-zt} dt - G(0) \int_0^\infty e^{-(z+1)t} dt \\ &= G(z) - \frac{G(0)}{z+1} \\ &= \tilde{G}(z). \end{aligned}$$

Prema tome, $\tilde{F}$ i $\tilde{G}$ zadovoljavaju pretpostavke teoreme, pri čemu je $\tilde{G}(0) = 0$.

Ako je teorema dokazana u tom slučaju, tada

$$\int_0^\infty \tilde{F}(t) dt = 0.$$

Otuda

$$\int_0^\infty F(t) dt = G(0) \int_0^\infty e^{-t} dt = G(0).$$

Zato u nastavku možemo pretpostaviti da je

$$G(0) = 0.$$

Korak 2. Uvođenje funkcije G_T .

Za $T > 0$ definišimo

$$G_T(z) = \int_0^T F(t)e^{-zt} dt.$$

Pošto se integral uzima na ograničenom intervalu, funkcija G_T je analitička na celoj kompleksnoj ravni.

Zaista, za kompaktan skup $K \subset \mathbb{C}$ postoji $A > 0$ takvo da

$$\operatorname{Re} z \geq -A, \quad z \in K,$$

2.2 Tauberovi rezultati za Laplasovu transformaciju

pa za $0 \leq t \leq T$

$$|F(t)e^{-zt}| \leq Me^{At}.$$

Kako je

$$\int_0^T Me^{At} dt < \infty,$$

sledi da je G_T cela funkcija.

Posebno,

$$G_T(0) = \int_0^T F(t) dt.$$

Zbog toga je dovoljno dokazati

$$\lim_{T \rightarrow \infty} G_T(0) = 0.$$

Korak 3. Integralni prikaz funkcije $G_T(0)$.

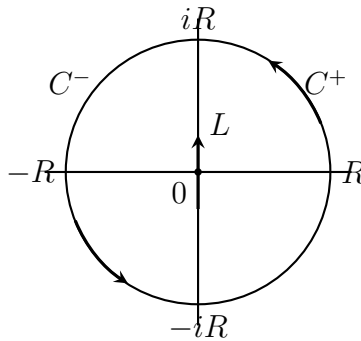
Fiksirajmo $R > 0$. Označimo sa C^+ desnu polukružnicu

$$|z| = R, \quad \operatorname{Re} z \geq 0,$$

a sa C^- levu polukružnicu

$$|z| = R, \quad \operatorname{Re} z \leq 0,$$

obe orijentisane suprotno smeru kazaljke na satu. Neka je L duž od $-iR$ do iR , orijentisana naviše.



Slika 1: Konture C^+ , C^- i duž L .

2.2 Tauberovi rezultati za Laplasovu transformaciju

Uvodimo pomoćnu Njumanovu funkciju

$$J_{R,T}(z) = e^{Tz} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z}.$$

Funkcija

$$G_T(z)J_{R,T}(z)$$

analitička je za $z \neq 0$, dok u $z = 0$ ima prost pol sa reziduumom

$$\text{Res}_{z=0} (G_T(z)J_{R,T}(z)) = G_T(0).$$

Teorema o reziduumima zato daje

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^+ + C^-} G_T(z)J_{R,T}(z) dz = G_T(0).$$

Sa druge strane, pošto je $G(0) = 0$, singularitet funkcije

$$G(z)J_{R,T}(z)$$

u nuli je otklonjiv. Prema Košijevoj teoremi,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^+ - L} G(z)J_{R,T}(z) dz = 0.$$

Oduzimanjem prethodna dva izraza dobijamo

$$\begin{aligned} G_T(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} (G_T(z) - G(z))J_{R,T}(z) dz \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} G_T(z)J_{R,T}(z) dz \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_L G(z)J_{R,T}(z) dz. \end{aligned}$$

Označimo ova tri integrala redom sa I_1 , I_2 i I_3 . Dakle,

$$G_T(0) = I_1 + I_2 + I_3.$$

2.2 Tauberovi rezultati za Laplasovu transformaciju

Korak 4. Ocena integrala I_1 .

Za $z \in C^+$ sa $\operatorname{Re} z > 0$ imamo

$$\begin{aligned} |G_T(z) - G(z)| &= \left| \int_T^\infty F(t) e^{-zt} dt \right| \\ &\leq \int_T^\infty |F(t)| e^{-t \operatorname{Re} z} dt \\ &\leq M \int_T^\infty e^{-t \operatorname{Re} z} dt \\ &= \frac{M}{\operatorname{Re} z} e^{-T \operatorname{Re} z}. \end{aligned}$$

Za $|z| = R$ važi

$$z\bar{z} = R^2.$$

Zato

$$\begin{aligned} |J_{R,T}(z)| &= e^{T \operatorname{Re} z} \left| 1 + \frac{z^2}{R^2} \right| \frac{1}{|z|} \\ &= 2e^{T \operatorname{Re} z} \frac{|\operatorname{Re} z|}{R^2}. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$|(G_T(z) - G(z))J_{R,T}(z)| \leq \frac{2M}{R^2}.$$

Po neprekidnosti ista ocena važi i na krajnjim tačkama polukružnice. Pošto je dužina C^+ jednaka πR , dobijamo

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \pi R \frac{2M}{R^2} = \frac{M}{R}.$$

Korak 5. Ocena integrala I_2 .

Za $z \in C^-$ i $\operatorname{Re} z < 0$ imamo

$$\begin{aligned} |G_T(z)| &\leq \int_0^T M e^{-t \operatorname{Re} z} dt \\ &= -\frac{M}{\operatorname{Re} z} (e^{-T \operatorname{Re} z} - 1) \\ &\leq \frac{M}{|\operatorname{Re} z|} e^{-T \operatorname{Re} z}. \end{aligned}$$

Koristeći prethodnu ocenu za $J_{R,T}$, sledi

$$|G_T(z)J_{R,T}(z)| \leq \frac{2M}{R^2}.$$

2.2 Tauberovi rezultati za Laplasovu transformaciju

Kako je dužina C^- takođe πR , dobijamo

$$|I_2| \leq \frac{M}{R}.$$

Korak 6. Ocena integrala I_3 .

Duž L parametrizujemo sa

$$z = iy, \quad -R \leq y \leq R.$$

Tada

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R H_R(y) e^{iTy} dy,$$

gde je

$$H_R(y) = G(iy) \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) \frac{1}{iy}, \quad y \neq 0.$$

Pošto je $G(0) = 0$, funkcija

$$\frac{G(z)}{z}$$

ima otklonjiv singularitet u $z = 0$ i analitički se produžava u toj tački. Zbog toga je H_R neprekidno diferencijabilna na $[-R, R]$.

Postoji, dakle, konstanta $A(R) > 0$, nezavisna od T , takva da

$$|H_R(y)| \leq A(R), \quad |H'_R(y)| \leq A(R), \quad -R \leq y \leq R.$$

Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\int_{-R}^R H_R(y) e^{iTy} dy = \frac{1}{iT} \left[H_R(R) e^{iTR} - H_R(-R) e^{-iTR} - \int_{-R}^R H'_R(y) e^{iTy} dy \right].$$

Kako je

$$|e^{iTy}| = 1,$$

sledi

$$\left| \int_{-R}^R H_R(y) e^{iTy} dy \right| \leq \frac{2A(R) + 2RA(R)}{T}.$$

Prema tome, postoji konstanta $C(R) > 0$, koja zavisi od R , ali ne od T , takva da

$$|I_3| \leq \frac{C(R)}{T}.$$

2.2 Tauberovi rezultati za Laplasovu transformaciju

Korak 7. Završetak dokaza.

Iz prethodnih koraka sledi

$$|G_T(0)| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| \leq \frac{2M}{R} + \frac{C(R)}{T}.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Najpre izaberemo $R > 0$ dovoljno veliko tako da

$$\frac{2M}{R} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pošto je sada R fiksirano, izaberimo $T_\varepsilon > 0$ tako da

$$\frac{C(R)}{T_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tada za svako $T > T_\varepsilon$ važi

$$|G_T(0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prema tome,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} G_T(0) = 0.$$

Kako je

$$G_T(0) = \int_0^T F(t) dt,$$

u slučaju $G(0) = 0$ dobijamo

$$\int_0^\infty F(t) dt = 0.$$

Korak 1 zatim daje opšti rezultat

$$\int_0^\infty F(t) dt = G(0).$$

□

2.2 Tauberovi rezultati za Laplasovu transformaciju

2.2.3 Viner-Ikeharina Tauberova teorema za Laplasovu transformaciju

U nastavku navodimo oblik Viner-Ikeharine teoreme formulisan pomoću Laplasove transformacije. Dokaz teoreme prevazilazi obim rada, a može se pronaći u [13]. Ova teorema je značajna za dokaz Teoreme o raspodeli prostih brojeva, što ćemo videti u narednoj glavi.

Pre nego što formulišemo Viner-Ikeharinu teoremu, podsetimo se oznake za asimptotsku ekvivalenciju. Za funkcije f i g pišemo

$$f(x) \sim g(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

ako i samo ako važi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Teorema 28 (Viner-Ikeharina Tauberova teorema). *Neka je*

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

neopadajuća funkcija. Pretpostavimo da postoje $a, c \geq 0$ takvi da integral

$$F(z) = \int_0^\infty f(x)e^{-zx} dx$$

konvergira za $\operatorname{Re}(z) > a$ i da funkcija

$$F(z) - \frac{c}{z - a}$$

ima neprekidno produženje na poluravan

$$\operatorname{Re}(z) \geq a.$$

Tada važi

$$f(x) \sim ce^{ax}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

3 Tauberove teoreme i teorema o raspodeli prostih brojeva

Proučavanje raspodele prostih brojeva privlači pažnju matematičara još od antičkih vremena. Međutim, tek u novijoj istoriji dobijen je precizan asimptotski zakon koji opisuje broj prostih brojeva među prirodnim brojevima.

Za realan broj $x > 1$, sa $\pi(x)$ označava se broj prostih brojeva koji nisu veći od x . Teorema o raspodeli prostih brojeva tvrdi da se za velike vrednosti promenljive x funkcija $\pi(x)$ ponaša kao $x/\log x$.

Ovu pretpostavku nezavisno su postavili Ležandr i Gaus.

Ležandr je 1798. godine predložio aproksimaciju

$$\pi(x) \approx \frac{x}{A \log x + B},$$

koju je kasnije usavršio određivanjem konstanti $A = 1$ i $B = -1.08366$.

Istovremeno, Gaus je još kao veoma mlad primetio da se gustina prostih brojeva smanjuje približno kao $1/\log x$. Na osnovu tog zapažanja zaključio je da se broj prostih brojeva može veoma dobro aproksimirati logaritamskim integralom

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Posebno je zanimljivo da je Gaus u jednom kasnijem pismu istakao kako nije mogao sa sigurnošću da tvrdi da količnik između stvarnog broja prostih brojeva i njegove aproksimacije teži jedinici, iako je bio uveren da su te dve funkcije veoma bliske.

Prvi značajan rezultat u proučavanju asimptotske raspodele prostih brojeva dao je Čebišev 1848. godine. Pokazao je da bi svaka dovoljno dobra aproksimacija funkcije $\pi(x)$ morala biti ekvivalentna logaritamskom integralu. Nekoliko godina kasnije uspeo je da dokaže da funkcija $\pi(x)$ ima isti red rasta kao funkcija $x/\log x$, čime je napravljen veliki korak ka konačnom dokazu teoreme o raspodeli prostih brojeva.

Godine 1896. Žak Adamar i Šarl de la Vale Pusen nezavisno su jedan od drugog dokazali Teoremu o raspodeli prostih brojeva. Njihov dokaz nije bio elementaran, već se zasnivao na metodama kompleksne analize i proučavanju analitičkih osobina Rimanove zeta funkcije. Ključni korak u dokazu bilo je pokazivanje da Rimanova zeta-funkcija nema nula na pravoj $\text{Re}(s) = 1$, što je omogućilo izvođenje formule

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

3 Tauberove teoreme i teorema o raspodeli prostih brojeva

Ovim rezultatom konačno je potvrđena pretpostavka koju su gotovo jedan vek ranije postavili Ležandr i Gaus. Dokaz Adamara i de la Vale Pusena označio je početak savremene analitičke teorije brojeva i pokazao duboku vezu između raspodele prostih brojeva i analitičkih svojstava Rimanove zeta-funkcije.

Iako je dokaz Adamara i de la Vale Pusena bio revolucionaran, tokom XX veka razvijeni su novi pristupi dokazivanju Teoreme o raspodeli prostih brojeva, među kojima posebno mesto zauzimaju Tauberove teoreme.

Naročito značajna je Viner-Ikeharina teorema, koja omogućava izvođenje teoreme o raspodeli prostih brojeva iz analitičkih osobina odgovarajućih Dirihleovih redova i predstavlja jednu od najvažnijih primena Tauberove teorije u analitičkoj teoriji brojeva.

Godine 1948. Atle Selberg i Pol Erdoš dali su prvi elementarni dokaz Teoreme o raspodeli prostih brojeva. Za razliku od dokaza Adamara i de la Vale Pusena, njihov pristup nije koristio metode kompleksne analize niti analitička svojstva Rimanove zeta-funkcije, već se zasnivao isključivo na elementarnim metodama teorije brojeva. Iako je ovaj dokaz predstavljao veliki uspeh, smatra se da je analitički pristup putem Rimanove zeta-funkcije i danas jedan od najznačajnijih zbog dubokih veza koje uspostavlja između analize i teorije brojeva.

U nastavku će biti uvedeni Dirihleovi redovi i Rimanova zeta-funkcija, koji predstavljaju osnovne alate analitičke teorije brojeva.

Nakon toga biće formulisana teorema o raspodeli prostih brojeva i primena Viner-Ikeharina teoreme u njenom dokazu.

3.1 Uvodni pojmovi

3.1 Uvodni pojmovi

Definicija 40 (Funkcija raspodele prostih brojeva). *Funkcija koja broji proste brojeve (engl. prime counting function) definiše se formulom*

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{P} : p \leq x\} = \sum_{p \leq x} 1, \quad x > 0,$$

gde je $\mathbb{P}$ skup svih prostih brojeva.

Primer 16. Za $x = 10$ prosti brojevi koji nisu veći od 10 jesu

$$2, 3, 5, 7.$$

Prema tome,

$$\pi(10) = \#\{2, 3, 5, 7\} = 4.$$

Ekvivalentno, koristeći zapis iz definicije,

$$\pi(10) = \sum_{p \leq 10} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Dakle, funkcija $\pi(x)$ broji proste brojeve koji nisu veći od x .

Definicija 41 (Dirihleov red). *Dirihleov red je red oblika*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

gde je s kompleksna promenljiva, a (a_n) niz kompleksnih brojeva.

3.1.1 Rimanova zeta-funkcija

Definicija 42 (Rimanova zeta-funkcija). *Funkcija $\zeta(s)$, definisana na oblasti*

$$D = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1\}$$

na sledeći način:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots. \quad (18)$$

naziva se Rimanova zeta-funkcija.

3.1 Uvodni pojmovi

Red u prethodnoj formuli konvergira za svako $s \in D$. Zaista, ako je

$$s = \sigma + it, \quad \sigma > 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

onda za svako n važi

$$|n^s| = |e^{s \log n}| = |e^{\sigma \log n + it \log n}| = |e^{\sigma \log n}| = n^\sigma,$$

a red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$$

konvergira na osnovu Primera 6.

Pri tome koristimo glavnu granu logaritamske funkcije, kao i činjenicu da za svako $x \in \mathbb{R}$ važi

$$|e^{ix}| = 1.$$

Pošto je za $s = \sigma + it \in D$ ispunjeno $\sigma > 1$, dobijamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \infty. \quad (19)$$

Dakle, red kojim je definisana Rimanova zeta-funkcija apsolutno konvergira, pa samim tim i konvergira za svako $s \in D$.

Pošto je

$$\pi(x) = \sum_{n \leq x} \mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n),$$

gde je

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n \text{ prost broj,} \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

moglo bi se pomisliti da je za dokaz teoreme o raspodeli prostih brojeva dovoljno razmatrati Dirihleov red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(n)}{n^s}.$$

Međutim, ovaj Dirihleov red nije pogodan za direktnu primenu Viner–Ikeharine teoreme, jer nema odgovarajuće ponašanje na graničnoj pravoj $\operatorname{Re}(s) = 1$ koje

3.1 Uvodni pojmovi

zahteva ova teorema. Zbog toga ćemo umesto karakteristične funkcije prostih brojeva koristiti fon Mangoltovu funkciju $\Lambda(n)$.

3.1.2 Fon Mangoltova funkcija i Čebiševljeve funkcije

Definicija 43. *Fon Mangoltova funkcija je preslikavanje $\Lambda : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ definirano sa*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{ako je } n = p^k, \text{ } p \text{ prost broj, } k \geq 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (20)$$

Primer 17. *Posmatrajmo nekoliko vrednosti fon Mangoltove funkcije $\Lambda(n)$ i neka po definiciji važi (20).*

Na primer,

$$\Lambda(2) = \log 2, \quad \Lambda(4) = \log 2, \quad \Lambda(8) = \log 2,$$

jer je

$$2 = 2^1, \quad 4 = 2^2, \quad 8 = 2^3.$$

Takođe,

$$\Lambda(9) = \log 3,$$

jer je $9 = 3^2$. Sa druge strane,

$$\Lambda(6) = 0,$$

jer 6 nije stepen jednog prostog broja.

U nastavku uvodimo dve Čebiševljeve funkcije koje imaju značajnu ulogu u analitičkoj teoriji brojeva.

Definicija 44. *Čebiševljeve funkcije $\theta(x)$ i $\psi(x)$ definišu se izrazima*

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p, \quad (21)$$

i

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n), \quad (22)$$

gde je $\Lambda(n)$ fon Mangoltova funkcija.

3.1 Uvodni pojmovi

Neposredno iz definicija sledi da važi

$$\theta(x) \leq \psi(x).$$

Primer 18. *Neka je $x = 10$. Prosti brojevi koji nisu veći od 10 su*

$$2, 3, 5, 7,$$

pa je

$$\theta(10) = \log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 7.$$

Sa druge strane, pored prostih brojeva, funkcija $\psi(x)$ uzima u obzir i njihove stepene. Kako su

$$4 = 2^2, \quad 8 = 2^3, \quad 9 = 3^2,$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \psi(10) &= \Lambda(2) + \Lambda(3) + \Lambda(4) + \Lambda(5) + \Lambda(7) + \Lambda(8) + \Lambda(9) \\ &= 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 5 + \log 7. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\psi(10) = \theta(10) + 2 \log 2 + \log 3 > \theta(10),$$

što ilustruje opštu nejednakost

$$\theta(x) \leq \psi(x).$$

3.2 Teorema o raspodeli prostih brojeva

3.2 Teorema o raspodeli prostih brojeva

Da bismo dokazali Teoremu o raspodeli prostih brojeva, koja predstavlja jednu od najznačajnijih primena Tauberovih teorema, najpre ćemo formulisati nekoliko pomoćnih tvrđenja čiji se dokazi mogu naći u [13].

Veza između Rimanove zeta-funkcije i prostih brojeva data je Ojlerovim proizvodom.

Lema 3. *Neka je $\mathbb{P}$ skup prostih brojeva. Za $\operatorname{Re}(z) > 1$ važi*

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-z}}.$$

Propozicija 1. *Definišimo*

$$H(z) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k p^{kz}}.$$

Tada važi:

(i) *Red*

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k p^{kz}}$$

konvergira apsolutno za $\operatorname{Re}(z) > 1$ i definiše analitičku funkciju na toj otvorenoj poluravni.

(ii) *Za realno $z > 1$ funkcija $H(z)$ predstavlja realni logaritam funkcije $\zeta(z)$, odnosno*

$$H(z) = \log \zeta(z).$$

(iii) *Za svako z takvo da je $\operatorname{Re}(z) > 1$ važi*

$$\zeta(z) = e^{H(z)},$$

pa je, posebno,

$$\zeta(z) \neq 0.$$

Naredni primer ilustruje propoziciju.

3.2 Teorema o raspodeli prostih brojeva

Primer 19. Posmatrajmo slučaj $z = 2$. Tada je

$$H(2) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{2k}}.$$

Koristeći razvoj

$$-\log(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad |x| < 1,$$

za $x = p^{-2}$ dobijamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{2k}} = -\log(1-p^{-2}).$$

Prema tome,

$$H(2) = -\sum_{p \in \mathbb{P}} \log(1-p^{-2}) = \log \prod_{p \in \mathbb{P}} (1-p^{-2})^{-1}.$$

Na osnovu Ojlerove formule proizvoda sledi

$$H(2) = \log \zeta(2).$$

Kako je na osnovu Primera 6

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

dobijamo

$$H(2) = \log \left(\frac{\pi^2}{6} \right).$$

Otuda je

$$\zeta(2) = e^{H(2)} = e^{\log(\pi^2/6)} = \frac{\pi^2}{6} \neq 0.$$

Ovaj primer ilustruje jednakosti

$$H(z) = \log \zeta(z) \quad i \quad \zeta(z) = e^{H(z)},$$

kao i činjenicu da $\zeta(z) \neq 0$ u poluravni $\operatorname{Re}(z) > 1$.

Lema 4. Neka je fon Mangoltova funkcija definisana sa (20) i neka je Čebiševljeva funkcija ψ definisana sa (22).

Tada za $\operatorname{Re}(z) > 1$ važi

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z} = z \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi(e^x) dx. \quad (23)$$

3.2 Teorema o raspodeli prostih brojeva

Lema 5. *Postoji funkcija klase C^1*

$$g : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

takva da za $\operatorname{Re}(z) > 1$ važi

$$\zeta(z) = g(z) + \frac{1}{z-1}.$$

Prema tome, ζ ima C^1 -produženje, koje ćemo takođe označavati sa ζ , na skup

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\} \setminus \{1\}.$$

Propozicija 2. *Za svako z takvo da je*

$$\operatorname{Re}(z) \geq 1, \quad z \neq 1,$$

važi

$$\zeta(z) \neq 0.$$

Posledica 1. *Funkcija*

$$z \longmapsto -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - \frac{1}{z-1}, \quad \operatorname{Re}(z) > 1,$$

ima neprekidno produženje na poluravan

$$\operatorname{Re}(z) \geq 1.$$

Teorema 29 (Teorema o prostim brojevima). *Važi:*

(i)

$$\psi(x) \sim x, \quad x \rightarrow \infty.$$

(ii) *Ako je*

$$\pi(x) = \#(\mathbb{P} \cap [1, x]),$$

tada

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

(iii) *Ako je p_n n -ti prost broj, tada*

$$p_n \sim n \log n, \quad n \rightarrow \infty.$$

3.2 Teorema o raspodeli prostih brojeva

Dokaz. (i) Na osnovu Leme 4, integral

$$\int_0^{\infty} e^{-zx} \psi(e^x) dx$$

konvergira za $\operatorname{Re}(z) > 1$ i važi

$$\int_0^{\infty} e^{-zx} \psi(e^x) dx = -\frac{\zeta'(z)}{z\zeta(z)}.$$

Prema Posledici 1, funkcija

$$z \mapsto -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - \frac{1}{z-1}$$

ima neprekidno produženje na poluravan

$$\operatorname{Re}(z) \geq 1.$$

Otuda i funkcija

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(z)}{z\zeta(z)} - \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z} \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - \frac{z}{z-1} \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} - 1 - \frac{1}{z-1} \right) \end{aligned}$$

ima neprekidno produženje na

$$\operatorname{Re}(z) \geq 1.$$

Pošto je $\Lambda(n) \geq 0$, funkcija

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

je neopadajuća.

Dakle, ispunjene su pretpostavke Viner-Ikehara Tauberove teoreme. Njenom primenom, za

$$f(x) = \psi(e^x), \quad a = 1, \quad c = 1,$$

dobijamo

$$\psi(e^x) \sim e^x, \quad x \rightarrow \infty.$$

3.2 Teorema o raspodeli prostih brojeva

Zamenom e^x sa x sledi

$$\psi(x) \sim x.$$

(ii) Iz definicije fon Mangoltove funkcije imamo

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \\ &= \sum_{p^k \leq x} \log p \\ &= \sum_{p \leq x} \log p \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \\ &\leq \pi(x) \log x.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \log x}{x}. \quad (24)$$

S druge strane, ako je

$$1 < y < x,$$

onda

$$\begin{aligned}\pi(x) - \pi(y) &= \sum_{y < p \leq x} 1 \\ &\leq \sum_{y < p \leq x} \frac{\log p}{\log y} \\ &\leq \frac{\psi(x)}{\log y}.\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\pi(x) \leq \pi(y) + \frac{\psi(x)}{\log y}.$$

Kako je $\pi(y) \leq y$, dobijamo

$$\pi(x) \leq y + \frac{\psi(x)}{\log y}.$$

Izaberimo

$$y = \frac{x}{(\log x)^2}.$$

3.2 Teorema o raspodeli prostih brojeva

Tada

$$\pi(x) \leq \frac{x}{(\log x)^2} + \frac{\psi(x)}{\log(x/(\log x)^2)}.$$

Množenjem sa $\log x/x$ dobijamo

$$\frac{\pi(x) \log x}{x} \leq \frac{1}{\log x} + \frac{\psi(x)}{x} \frac{\log x}{\log(x/(\log x)^2)}.$$

Zajedno sa (24), sledi

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \log x}{x} \leq \frac{\psi(x)}{x} \frac{\log x}{\log(x/(\log x)^2)} + \frac{1}{\log x}.$$

Pošto je, prema delu (i),

$$\frac{\psi(x)}{x} \longrightarrow 1,$$

i

$$\frac{\log x}{\log(x/(\log x)^2)} = \frac{\log x}{\log x - 2 \log \log x} \longrightarrow 1,$$

dobijamo

$$\frac{\pi(x) \log x}{x} \longrightarrow 1.$$

Dakle,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

(iii) Na osnovu dela (ii) imamo

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Stavimo sada $x = p_n$. Pošto je p_n n -ti prost broj, važi

$$\pi(p_n) = n.$$

Prema tome,

$$n = \pi(p_n) \sim \frac{p_n}{\log p_n},$$

odnosno

$$p_n \sim n \log p_n.$$

3.2 Teorema o raspodeli prostih brojeva

Iz relacije

$$p_n \sim n \log p_n$$

sledi

$$\frac{p_n}{n \log p_n} \longrightarrow 1.$$

Logaritmovanjem dobijamo

$$\log p_n - \log n - \log \log p_n \longrightarrow 0,$$

odnosno

$$\log p_n = \log n + \log \log p_n + o(1).$$

Kako je

$$\log \log p_n = o(\log p_n),$$

sledi

$$\frac{\log n}{\log p_n} \longrightarrow 1,$$

odnosno

$$\log p_n \sim \log n.$$

Konačno, iz

$$p_n \sim n \log p_n$$

i

$$\log p_n \sim \log n$$

dobijamo

$$p_n \sim n \log n, \quad n \rightarrow \infty.$$

□

Zaključak

U ovom radu prikazani su osnovni pojmovi i rezultati Tauberove teorije, sa posebnim osvrtom na njihovu vezu sa metodama sumabilnosti i primenu u analitičkoj teoriji brojeva.

Polazeći od osnovnih svojstava brojnih i stepenih redova, uvedene su metode sumabilnosti i Abelova teorema, koja predstavlja prirodnu polaznu tačku za razvoj Tauberovih rezultata. Zatim su predstavljene Tauberova, Hardijeva, Litl-vudova i Hardy-Litlvudova teorema, čime je prikazan razvoj uslova pod kojima se iz određenog oblika sumabilnosti može zaključiti uobičajena konvergencija.

Dalje su razmatrani rezultati povezani sa Laplasovom transformacijom. Nakon uvođenja potrebnih pojmova predstavljene su Abelova teorema za Laplasovu transformaciju i Njumanova teorema, a zatim Viner-Ikeharina Tauberova teorema.

U završnom delu rada prikazana je primena Viner-Ikeharine teoreme u doka-zu Teoreme o raspodeli prostih brojeva. Korišćenjem svojstava Rimanove zeta-funkcije i Čebiševljeve funkcije najpre je dobijena relacija

$$\psi(x) \sim x, \quad x \rightarrow \infty,$$

a zatim i

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Time je pokazano kako Tauberova teorija omogućava da se iz analitičkih svojstava odgovarajućih funkcija izvedu značajni rezultati o asimptotskoj raspodeli prostih brojeva.

Literatura

Literatura

- [1] Chandrasekharan K., *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, 1968.
- [2] Gajić Lj., *Predavanja iz Analize I*, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Novi Sad, 2006.
- [3] Gajić Lj., *Predavanja iz Uvoda u analizu*, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Novi Sad, 2013.
- [4] Hardy H. G., *Divergent Series*, Oxford University Press, Oxford, 1949.
- [5] Korevaar J., *Tauberian Theory: A Century of Developments*, Springer, Berlin, 2004.
- [6] Stefanović L., *Teorija nizova za studente tehničkih fakulteta*, SKC Niš, 2010.
- [7] Stefanović L., Randelović B., Matejić M., *Teorija redova za studente tehničkih fakulteta*, SKC Niš, 2013.
- [8] Malkowsky E., Rakočević V., *Summability methods and applications*, Matematički institut SANU, Beograd, 2020.
- [9] Žigić M., *Kompleksna analiza - beleške sa predavanja*, Novi Sad, 2023.
- [10] Bell J., *Tauber's theorem and Karamata's proof of the Hardy-Littlewood tauberian theorem*, dostupno na: <https://jordanbell.info/LaTeX/mathematics/karamata/karamata.pdf>, pristupljeno 05. 08. 2026.
- [11] French J., *The Wiener-Ikehara Theorem*, dostupno na: <https://simonrs.com/eulercircle/complexanalysis/justin-wiener-ikehara.pdf>, pristupljeno 15. 08. 2026.
- [12] Ješić S., *Kompleksne funkcije*, dostupno na: <https://emineter.wordpress.com/wp-content/uploads/2020/05/s-jesic-m3.pdf>, pristupljeno 07. 08. 2026.

LITERATURA

- [13] Muger M., *(Almost) Real Proof of the Prime Number Theorem*, dostupno na: https://www.math.ru.nl/~mueger/PDF/PNT_via_Ikehara.pdf, pristupljeno 21. 08. 2026.
- [14] Shapiro H. J., *The Prime-Number Theorem*, dostupno na: https://www.joelshapiro.org/Pubvit/Downloads/joel_PNT.pdf, pristupljeno 23. 08. 2026.
- [15] *Tauberian Theorems*, American Mathematical Society, dostupno na: <https://www.ams.org/bookstore/pspdf/amstext-17-prev.pdf>, pristupljeno 17. 07. 2026.
- [16] *Tauberian theorems*, Leiden University, dostupno na: <https://pub.math.leidenuniv.nl/~evertsejh/ant20-5.pdf>, pristupljeno 12. 07. 2026.

Biografija

Anđela Bojičić je rođena 27. oktobra 2001. godine u Šapcu. Pohađala je osnovnu školu „Stojan Novaković“ u Šapcu koju je završila 2016. godine. Iste godine upisuje Šabačku gimnaziju, prirodno-matematički smer. Integrisane akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu upisuje 2020. godine, na studijskom programu Master profesor matematike (M5). Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom integrisanih studija u maju 2026. godine i time stekla pravo na odbranu master rada.



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Anđela Bojičić

AU

Mentor: dr Nenad Teofanov

ME

Naslov rada: Tauberove teoreme

NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski / engleski

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2026.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (3/92/16/0/1/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Matematička analiza
NO

Ključne reči: Tauberove teoreme, metode sumabilnosti, Abelova teorema, Laplasova transformacija, Viner–Ikeharina teorema, Rimanova zeta-funkcija, Čebiševljeve funkcije, teorema o raspodeli prostih brojeva.
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom radu razmatraju se Tauberove teoreme i njihova uloga u matematičkoj analizi i analitičkoj teoriji brojeva. Najpre se uvode osnovni pojmovi vezani za brojne, funkcionalne i stepene redove, kao i različite metode sumabilnosti, sa posebnim osvrtom na Abelovu metodu. Zatim se izlažu klasični Tauberovi rezultati, uključujući Tauberovu, Hardijevu, Litlvudovu i Hardi–Litlvudovu teoremu. U nastavku se razmatra Laplasova transformacija i odgovarajuće Tauberove teore-

me, među kojima su Abelova, Njumanova i Viner–Ikeharina teorema. Završni deo rada posvećen je primeni Tauberovih metoda u analitičkoj teoriji brojeva. Uvode se Rimanova zeta-funkcija, fon Mangoltova i Čebiševljeve funkcije, a zatim se primenom Viner–Ikeharine teoreme izvodi asimptotska relacija za Čebiševljevu funkciju i dokazuje teorema o raspodeli prostih brojeva.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 01. septembar 2026.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

ČK

Predsednik: dr Ivana Vojnović, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: dr Nenad Teofanov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Milica Žigić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Anđela Bojičić

AU

Mentor: Nenad Teofanov, PhD

MN

Title: Tauberian Theorems

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: serbian / english

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2026.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (3/92/16/0/1/0/0) (chapters/pages/quotations/tables/pictures/graphics/enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Mathematical Analysis
SD

Subject/Key words: Tauberian theorems, summability methods, Abel's theorem, Laplace transform, Wiener-Ikehara theorem, Riemann zeta function, Chebyshev functions, Prime Number Theorem.
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This thesis considers Tauberian theorems and their role in mathematical analysis and analytic number theory. First, the basic concepts related to numerical, functional and power series are introduced, together with various summability methods, with particular emphasis on Abel's method. Classical Tauberian results are then presented, including Tauber's, Hardy's, Littlewood's and Hardy–Littlewood's theorems. The Laplace transform and the corresponding Tauberian theorems, including Abel's, Newman's and the Wiener–Ikehara theorem,

are considered next. The final part of the thesis is devoted to the application of Tauberian methods in analytic number theory. The Riemann zeta function, the von Mangoldt function and Chebyshev functions are introduced, after which the Wiener–Ikehara theorem is applied to derive an asymptotic relation for the Chebyshev function and to prove the Prime Number Theorem.

AB

Accepted by the Scientific Board on: September 1, 2026.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Ivana Vojnović, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: Nenad Teofanov, PhD, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Milica Žigić, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad