UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Andrea Janković

OD VAVILONA DO SAVREMENE ALGEBRE: ISTORIJSKI RAZVOJ METODA REŠAVANJA JEDNAČINA

master rad

Novi Sad, 2026

Sadržaj

Uvod **1**

1 Počeci algebarskog mišljenja u drevnim civilizacijama **3**
1.1 Vavilonska matematika 3
1.1.1 Klinaste pločice 4
1.1.2 Rešavanje kvadratne jednačine metodom kompletiranja kvadrata 7
1.1.3 Geometrijska interpretacija algebarskog postupka 12
1.2 Egipatska matematika 13
1.2.1 Rindov papirus 14
1.2.2 Linearni problemi i „metoda lažne pretpostavke” 16

2 Grčka matematika i geometrijska algebra **18**
2.1 Pitagorejci i teorija proporcija 18
2.2 Euklid i geometrijsko rešavanje problema 20
2.2.1 Euklidovi *Elementi* 20
2.2.2 Geometrijska algebra 20
2.3 Diofant i „Aritmetika” 22

3 Indijska i kineska tradicija rešavanja jednačina **26**
3.1 Bramagupta 28
3.2 Bhaskara II 30
3.3 Kineska metoda za sisteme linearnih jednačina 31

4 Islamska matematika i nastanak algebre **34**
4.1 El Horezmi i knjiga „Al-jabr” 35
4.2 Klasifikacija jednačina 37
4.2.1 Kvadrati jednaki korenima 37
4.2.2 Kvadrati jednaki brojevima 38
4.2.3 Koreni jednaki brojevima 38
4.2.4 Kvadrati i koreni jednaki brojevima 39
4.2.5 Kvadrati jednaki korenima i brojevima 40
4.2.6 Kvadrati i broj jednaki korenima 41
4.3 Geometrijske metode rešavanja 42
4.3.1 Geometrijska interpretacija jednačine $x^2 + px = q$ 43
4.3.2 Geometrijska interpretacija jednačine $x^2 = px + q$ 44
4.3.3 Geometrijska interpretacija jednačine $x^2 + q = px$ 45

5 Renesansa i velika otkrića **47**
5.1 Del Fero i kubne jednačine 47
5.2 Tartalja i Kardano 48
5.3 Ferari i jednačine četvrtog stepena 52

6 Nastanak simboličke algebre **54**
6.1 Vijetova simbolika 55
6.1.1 Razvoj algebre kod Vijeta 56
6.2 Dekart i analitička geometrija 56
6.2.1 Nastanak analitičke geometrije 57
6.3 Razvoj teorije jednačina 58

7 Granice klasičnih metoda **60**
7.1 Abelova nemogućnost rešavanja opšte jednačine petog stepena radikalima 60
7.1.1 Pojava teorije grupa 62
7.2 Galoa i teorija grupa 62
7.2.1 Rešive grupe i rešavanje jednačina 64
7.3 Novi pogled na problem rešavanja jednačina 64

8 Savremena algebra i računarske metode **66**
8.1 Apstraktna algebra 66
8.2 Numeričke metode rešavanja jednačina 67
8.2.1 Metoda polovine intervala 67
8.2.2 Njutnova metoda 67
8.2.3 Sekantna metoda 68
8.2.4 Primena numeričkih metoda 68
8.3 Računarska algebra 68
8.4 Primene u nauci i tehnici 69
8.5 Primene u veštačkoj inteligenciji 70

9 Konkretan problem kroz razne epohe **72**

Zaključak **77**

Biografija **78**

Literatura **79**

Uvod

Istorija matematike predstavlja istoriju razvoja ideja koje su oblikovale način na koji čovek razume svet oko sebe. Među tim idejama javio se i problem rešavanja jednačina. Od najstarijih civilizacija do savremene matematike, potreba za određivanjem nepoznatih veličina javljala se u različitim oblastima života – prilikom merenja zemljišta, trgovine, graditeljstva, astronomskih posmatranja, ali i u kasnijem razvoju fizike, tehnike i drugih nauka. Zbog toga razvoj metoda rešavanja jednačina nije predstavljao samo napredak jedne matematičke discipline, već i jedan od pokretača razvoja matematike u celini.

Prvi postupci za rešavanje jednačina nastali su mnogo pre pojave simboličke algebre. Vavilonski pisari razvili su algoritme koji se danas mogu tumačiti kao metoda kompletiranja kvadrata, dok su egipatski matematičari primenjivali metodu lažne pretpostavke pri rešavanju linearnih problema. U antičkoj Grčkoj težište se pomera sa praktičnog računanja na logičko dokazivanje, pa Pitagorejci, Euklid i Diofant postavljaju temelje geometrijske algebre i teorijskog proučavanja jednačina. Napredak je ostvaren u Indiji i Kini radovima Brahmagupte, Bhaskare II i kineskih matematičara koji razvijaju postupke za rešavanje linearnih sistema i kvadratnih jednačina.

Nova etapa započinje u islamskoj matematici, gde El Horezmi sistematizuje metode rešavanja linearnih i kvadratnih jednačina i uvodi pristup koji će dati ime čitavoj oblasti matematike – algebri. Tokom renesanse italijanski matematičari Del Fero, Tartalja, Kardano i Ferari pronalaze metode za rešavanje kubnih i jednačina četvrtog stepena, čime se otvara pitanje da li se slični postupci mogu pronaći i za jednačine višeg stepena.

Prekretnicu u razvoju algebre predstavljaju radovi Fransoe Vijeta i Renea Dekarta. Vijet uvodi sistematičnu simboličku notaciju koja omogućava zapisivanje opštih jednačina i izvođenje opštih algebarskih postupaka, dok Dekart uspostavlja vezu između algebre i geometrije razvojem analitičke geometrije. Time jednačine postaju objekti koji se mogu proučavati i geometrijski, a ne samo računskim postupcima.

U XIX veku istraživanja dobijaju potpuno novi pravac. Nils Henrik Abel dokazuje da opšta jednačina petog stepena nije rešiva pomoću radikala, čime pokazuje da postoje prirodne granice klasičnih metoda. Na njegov rad nadovezuje se Evarist Galoa, koji problem rešavanja jednačina povezuje sa teorijom grupa i pokazuje da odgovor ne zavisi od pronalaženja novih formula, već od strukture simetrija korena jednačine. Ovim rezultatima započinje razvoj moderne apstraktne algebre.

Savremena matematika nastavlja ovaj razvoj kroz teoriju grupa, prstenova, polja i vektorskih prostora, kao i kroz razvoj numeričkih metoda i računarske algebre. Danas se rešavanje jednačina ne zasniva isključivo na pronalaženju zatvorenih formula, već i na primeni numeričkih algoritama i računarskih sistema, kao što su Mathematica, Maple, MATLAB, GeoGebra i SageMath, koji omogućavaju simboličko i numeričko rešavanje problema veoma velike složenosti.

Predmet ovog rada jeste istorijski razvoj metoda rešavanja jednačina, od prvih retoričkih postupaka u drevnim civilizacijama do savremenih algebarskih i računarskih metoda. Prikazana je promena načina razmišljanja o jednačinama – od konkretnih numeričkih problema, preko geometrijskih interpretacija i simboličkog zapisa, do apstraktnih struktura koje predstavljaju osnov savremene algebre.

Cilj rada jeste da prikaže kontinuitet razvoja matematičkih ideja i pokaže da savremene metode nisu nastale odjednom, već predstavljaju rezultat višemilenijumskog razvoja. Rad nastoji da ukaže na međusobnu povezanost različitih epoha, kao i na činjenicu da su mnogi savremeni postupci zasnovani na idejama koje su se postepeno oblikovale tokom istorije matematike.

Glava 1

Počeci algebarskog mišljenja u drevnim civilizacijama

1.1 Vavilonska matematika

Razvoj algebre nije bio rezultat jednog otkrića ili rada pojedinca, već dugotrajan proces koji je trajao više hiljada godina. Potreba za rešavanjem praktičnih problema, kao što su raspodela zemljišta, određivanje poreza, trgovina, izgradnja građevina i astronomska posmatranja, podstakla je nastanak prvih matematičkih postupaka koji su vremenom prerasli u razvijene metode rešavanja jednačina. Iako drevni narodi nisu raspolagali simboličkim zapisom karakterističnim za savremenu algebru, razvili su brojne algoritme koji su omogućavali rešavanje različitih matematičkih problema.

Slika 1.1: Mesopotamija

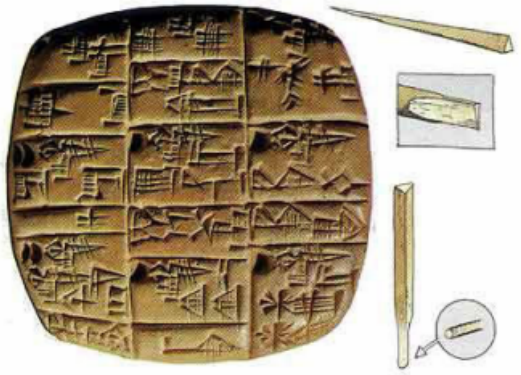
Među najbitnijim civilizacijama koje su dale doprinos razvoju algebarskog mišljenja posebno mesto zauzimaju Vavilonci. Njihovi matematički tekstovi predstavljaju najstarije sačuvane izvore u kojima se mogu pronaći postupci veoma slični današnjim metodama rešavanja kvadratnih jednačina. Posebnost ovih izvora predstavlja činjenica da oni svedoče o postojanju sistematskog pristupa rešavanju problema mnogo pre nastanka formalne algebre.

1.1.1 Klinaste pločice

Najstariji tragovi razvijene urbane i pismene kulture pronađeni su na prostoru Mesopotamije, u oblasti između reka Eufrata i Tigra. Naziv Mesopotamija potiče iz grčkog jezika i doslovno označava „zemlju između reka". Na ovom području su početkom četvrtog milenijuma pre nove ere nastala prva velika gradska naselja, zbog čega se Mesopotamija često označava kao jedna od kolevki ljudske civilizacije.

Razvoj poljoprivrede, trgovine, graditeljstva, sistema navodnjavanja i astronomskih posmatranja stvorio je potrebu za preciznijim računanjem i vođenjem evidencije. Matematička znanja stanovnika Mesopotamije zato nisu nastajala samo iz teorijskih interesovanja, već su bila neposredno povezana sa praktičnim potrebama svakodnevnog života. Bilo je potrebno meriti zemljište, obračunavati prinose, određivati poreze, deliti robu, računati zapremine i planirati izgradnju kanala, nasipa i drugih objekata.

Najznačajniji izvori za proučavanje mesopotamske matematike jesu glinene pločice ispisane klinastim pismom. Ovakav način pisanja razvili su Sumerci, koji su tokom trećeg milenijuma pre nove ere naseljavali južni deo Mesopotamije. Najstariji sačuvani sumerski tekstovi potiču približno iz perioda prve dinastije grada Ura. Sumerska kulturna dostignuća kasnije su preuzeli Akađani i Vavilonci, koji su nastavili da koriste klinasto pismo i unapređuju nasleđene matematičke postupke.



Slika 1.2: Glinena pločica

Glinene pločice izrađivane su od vlažne gline, u koju su pisari utiskivali znakove pomoću zašiljenog predmeta, najčešće izrađenog od trske. Različitim položajima i pritiscima pisaljke nastajali su otisci u obliku klina, po kojima je ovo pismo dobilo naziv. Nakon ispisivanja, pločice su sušene na suncu ili pečene, zahvaljujući čemu je veliki broj njih sačuvan do savremenog doba.

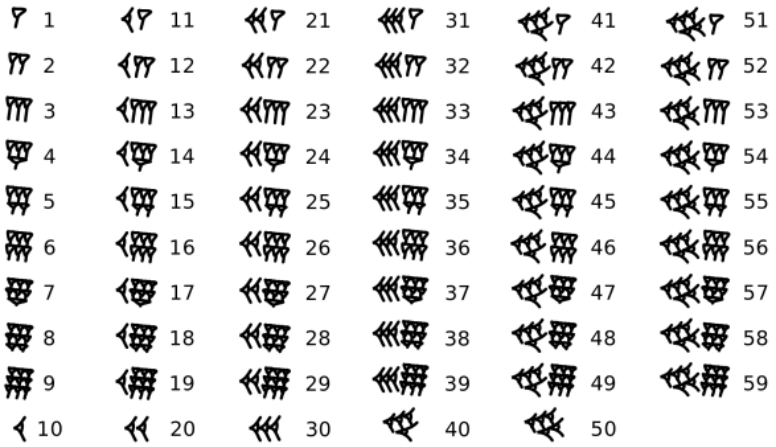
Među pronađenim pločicama nalaze se administrativni zapisi, ugovori, popisi robe, astronomske tablice, ali i matematički tekstovi. Matematičke pločice često sadrže tablice množenja, recipročne vrednosti brojeva, kvadrate i kvadratne korene, kao i konkretne zadatke praćene uputstvima za njihovo rešavanje. Tekstovi iz starovavilonskog perioda, koji su nastali između 2000. i 1600. godine pre nove ere, pokazuju visok nivo razvijenosti aritmetičkih i algebarskih postupaka.

Vavilonski matematički tekstovi uglavnom nisu sadržali teorijska obrazloženja u savremenom smislu. Umesto izvođenja opštih formula, u njima se navodio konkretan numerički problem, a

zatim niz računskih koraka koje je trebalo sprovesti. Uputstva su često bila izražena glagolima kao što su „uzmi”, „pomnoži”, „prepolovi”, „dodaj” ili „izvuci koren”. Uprkos odsustvu simboličke algebre, ponavljanje istih postupaka u različitim zadacima pokazuje da su vavilonski pisari poznavali opšte algoritme rešavanja određenih vrsta problema.

Vavilonska matematika razvijala se pomoću heksagezimalnog, odnosno šezdesetičnog brojevnog sistema. Vavilonci su ovaj sistem nasledili od Sumeraca. Za razliku od savremenog dekadnog sistema, čija je osnova broj 10, vavilonski sistem imao je osnovu 60. Izbor broja 60 bio je naročito pogodan za računanje, jer je taj broj deljiv velikim brojem manjih prirodnih brojeva: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Zbog toga su se mnogi razlomci mogli predstaviti konačnim heksagezimalnim zapisom. Tragovi ovog sistema sačuvani su i u savremenim jedinicama za merenje vremena i uglova: jedan čas ima 60 minuta, jedan minut 60 sekundi, a pun ugao 360 stepeni.

Vavilonci nisu koristili šezdeset različitih znakova za brojeve od 0 do 59. Brojeve su zapisivali kombinovanjem dva osnovna znaka: jednog znaka za jedinicu i drugog za deseticu. Brojevi od 1 do 59 obrazovani su njihovim ponavljanjem i kombinovanjem. Tako je, na primer, broj 35 bio predstavljen pomoću tri znaka za desetice i pet znakova za jedinice.



Slika 1.3: Brojevi od 1 do 59 ispisani klinastim pismom

Njihov brojevni sistem bio je pozicioni, što znači da vrednost pojedinog zapisa nije zavisila samo od upotrebljenih znakova, već i od mesta koje su oni zauzimali u broju. Na primer, zapis koji se savremenom transkripcijom označava kao $1,24$ predstavlja broj $1 \cdot 60 + 24 = 84$. Slično tome, zapis $1,57,46,40$ predstavlja $1 \cdot 60^3 + 57 \cdot 60^2 + 46 \cdot 60 + 40 = 424000$.

Slika 1.4: Klinastim pismom ispisan broj 424 000

Za razdvajanje celobrojnog i razlomljenog dela heksagezimalnog broja u savremenoj literaturi često se koristi tačka sa zapetom. Tako zapis $0;30$ označava

$$\frac{30}{60} = \frac{1}{2},$$

dok je

$$0;15 = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}.$$

Ovakva notacija nije postojala u izvornim vavilonskim tekstovima, već je uvedena radi jednostavnijeg savremenog tumačenja njihovih računskih postupaka.

Jedan od nedostataka ranog vavilonskog zapisa bilo je nepostojanje posebnog znaka za nulu. Zbog toga je značenje nekog broja često moralo da se određuje na osnovu konteksta. Isti niz znakova mogao je predstavljati različite vrednosti, u zavisnosti od toga na kom mestu se pretpostavljala prazna pozicija. Vavilonci su kasnije prazno mesto označavali većim razmakom između znakova, a u znatno kasnijem periodu uveden je i poseban znak koji je služio kao čuvar praznog mesta. Ipak, taj znak nije imao potpuno isto značenje kao nula u savremenoj matematici.

Slika 1.5: Poseban znak za nulu upotrebljen tek u 6. veku p.n.e.

Kako postupak deljenja nije bio razvijen u obliku u kojem ga danas koristimo, Vavilonci su deljenje brojem svodili na množenje njegovom recipročnom vrednošću. Na primer, umesto deljenja brojem 2 koristili su množenje brojem $0;30$, jer je $0;30 = \frac{1}{2}$. Zbog toga su tablice recipročnih vrednosti predstavljale jedno od osnovnih pomagala vavilonskih pisara. Najlakše su se određivale recipročne vrednosti brojeva čiji su prosti činioci bili 2, 3 i 5, odnosno brojeva koji su imali konačan zapis u heksagezimalnom sistemu.

Sačuvane klinaste pločice pokazuju da su vavilonski matematičari poznavali postupke rešavanja linearnih i kvadratnih jednačina, sistema sa dve nepoznate, kao i pojedinih problema koji se savremenim jezikom svode na kubne jednačine. Njihovi postupci bili su retorički i numerički: nije postojala simbolika poput x, y, znaka jednakosti ili algebarskih formula, već su nepoznate veličine najčešće opisivane kao dužina, širina, površina ili zapremina.

Zbog toga izraz „vavilonska algebra” treba razumeti u širem smislu. Vavilonci nisu posedovali algebru kao simboličku teoriju, ali su koristili sistematične algoritme koji se mogu izraziti savremenim algebarskim jezikom. Posebno su bili uspešni u rešavanju problema koji danas vode do kvadratnih jednačina. Njihove metode zasnivale su se na prepolovljavanju poznate veličine, kvadriranju, dodavanju ili oduzimanju površine i izračunavanju kvadratnog korena. Takav postupak suštinski odgovara metodi kompletiranja kvadrata, koja će biti razmotrena u narednom pododeljku.

1.1.2 Rešavanje kvadratne jednačine metodom kompletiranja kvadrata

Deo vavilonske matematike predstavljaju i postupci koji se savremenim matematičkim jezikom mogu protumačiti kao rešavanje kvadratnih jednačina. Iako Vavilonci nisu koristili slova za označavanje nepoznatih veličina, znak jednakosti niti opšte formule, iz sačuvanih klinastih tekstova vidi se da su raspolagali pouzdanim algoritmima za rešavanje velikog broja problema drugog stepena [8].

Njihovi zadaci najčešće su bili formulisani pomoću geometrijskih veličina, kao što su dužina, širina, površina i zapremina. Nepoznata veličina nije posmatrana kao apstraktan broj, već kao stranica pravougaonika, površina kvadrata ili druga pozitivna merljiva veličina. Zbog toga su i rešenja koja bi u savremenoj algebri bila negativna uglavnom bila isključena iz razmatranja. Takva rešenja nisu imala neposredno geometrijsko značenje, jer dužina ili površina nisu mogle biti negativne.

Jedan od osnovnih tipova problema koje su Vavilonci rešavali može se savremenim zapisom predstaviti jednačinom $x^2 + bx = c$, gde su b i c pozitivni brojevi. Postupak rešavanja sastojao se od prepolovljavanja koeficijenta uz nepoznatu, kvadriranja dobijene vrednosti, dodavanja tog kvadrata poznatoj veličini, izračunavanja kvadratnog korena i oduzimanja prethodno uzete polovine. Savremenim algebarskim jezikom ovaj postupak može se prikazati na sledeći način. Polazi se od jednačine $x^2 + bx = c$.
Obema stranama jednačine dodaje se kvadrat polovine koeficijenta b:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Leva strana tada postaje potpun kvadrat:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Izračunavanjem kvadratnog korena dobija se

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

odakle sledi

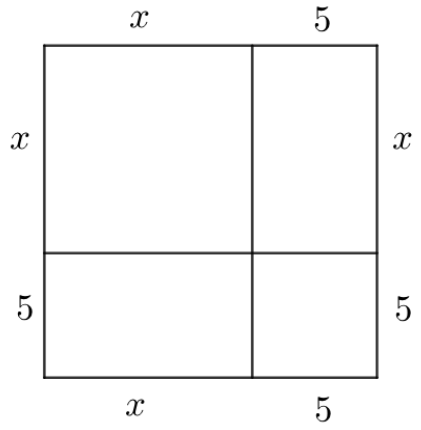
$$x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}.$$

U savremenom rešavanju kvadratne jednačine prilikom korenovanja razmatrale bi se i pozitivna i negativna vrednost kvadratnog korena. Vavilonci su, međutim, uzimali samo pozitivnu vrednost, jer je nepoznata veličina najčešće označavala dužinu.

Opisani postupak u osnovi odgovara metodi kompletiranja kvadrata. Njegova suština jeste da se izrazu koji nije potpun kvadrat doda odgovarajuća vrednost kako bi se dobio kvadrat binoma. Iako naziv „kompletiranje kvadrata” pripada mnogo kasnijoj matematičkoj terminologiji, računski koraci koje su koristili Vavilonci potpuno odgovaraju toj metodi.

Primer. Jedan jednostavan primer omogućava jasnije sagledavanje njihovog načina rada. Pretpostavimo da je postavljen problem koji se savremenim zapisom svodi na jednačinu $x^2+10x = 39$. Vavilonsko uputstvo moglo bi biti izraženo približno na sledeći način:

Uzmi polovinu od 10. *Dobijaš* 5. *Pomnoži* 5 *sa* 5 *i dobijaš* 25. *Dodaj* 25 *broju* 39 *i dobijaš* 64. *Izvuci kvadratni koren iz* 64. *Dobijaš* 8. *Oduzmi* 5 *od* 8. *Dobijaš* 3. *To je tražena veličina.*



Slika 1.6: Dopunjavanje površine $x^2 + 10x$ kvadratom površine 25

Prevedeno na savremeni matematički zapis, postupak izgleda ovako. Polovina od 10 je 5, pa se obema stranama dodaje $5^2 = 25$:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25.$$

Dobija se $(x + 5)^2 = 64$. Pošto se traži pozitivna dužina, $x + 5 = 8$, pa je $x = 3$.

Provera pokazuje da je $3^2 + 10 \cdot 3 = 9 + 30 = 39$.

Savremenim postupkom jednačina bi imala i drugo rešenje, $x = -13$, ali ono ne bi bilo uzeto u obzir u vavilonskom kontekstu, jer negativna dužina nije imala prihvatljivo značenje. □

Ovakvi primeri pokazuju da vavilonska metoda nije predstavljala puko nagađanje rešenja. Ona je bila zasnovana na tačno utvrđenom nizu računskih operacija koji se mogao ponavljati na različitim numeričkim primerima. Iako na glinenim pločicama nisu zapisivali opštu formulu, postojanost postupka ukazuje na to da su poznavali opšti algoritam.

Pored jednačina oblika $x^2 + bx = c$, Vavilonci su rešavali i probleme koji se mogu svesti na jednačinu $x^2 - bx = c$.

U tom slučaju postupak je bio sličan. Polazeći od jednačine $x^2 - bx = c$, dodaje se kvadrat polovine broja b:

$$x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Na taj način dobija se

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

pa je pozitivno rešenje

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Razlike između pojedinih oblika jednačina nisu bile izražavane pomoću pozitivnih i negativnih koeficijenata kao danas. Umesto toga, različiti tipovi problema opisivani su različitim rečeničnim formulacijama. Sabiranje nepoznate veličine, oduzimanje njene vrednosti i određivanje površine predstavljali su zasebne vrste zadataka. To je posledica činjenice da negativni brojevi nisu bili deo tadašnjeg brojevnog sistema.

Posebno zanimljiv tip vavilonskih zadataka odnosio se na određivanje dužine i širine pravougaonika kada su poznati njihov zbir ili razlika i površina. Savremenim jezikom, takav problem može se predstaviti sistemom

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ xy &= P. \end{aligned}$$

Vavilonci su ovaj sistem rešavali tako što su najpre uzimali polovinu zbira:

$$h = \frac{a}{2}.$$

Dužinu i širinu mogli su zatim posmatrati kao veličine jednako udaljene od srednje vrednosti:

$$x = h + \omega, \qquad y = h - \omega.$$

Njihov proizvod tada je

$$xy = (h + \omega)(h - \omega) = h^2 - \omega^2.$$

Pošto je $xy = P$, sledi $h^2 - \omega^2 = P$, odnosno $\omega^2 = h^2 - P$. Prema tome, $\omega = \sqrt{h^2 - P}$, pa su tražene veličine

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - P}, \\ y &= \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - P}. \end{aligned}$$

Ovaj postupak može se ilustrovati problemom u kojem je zbir dužine i širine pravougaonika jednak 27, dok je njegova površina 180. Savremenim zapisom dobija se sistem

$$\begin{aligned} x + y &= 27, \\ xy &= 180. \end{aligned}$$

Polovina zbira je $\frac{27}{2} = 13,5$. Kvadrat ove vrednosti iznosi $13,5^2 = 182,25$. Od dobijenog kvadrata oduzima se površina $182,25 - 180 = 2,25$. Kvadratni koren razlike je $\sqrt{2,25} = 1,5$. Dužina i širina tada su

$$\begin{aligned} x &= 13,5 + 1,5 = 15, \\ y &= 13,5 - 1,5 = 12. \end{aligned}$$

Provera pokazuje da je

$$\begin{aligned} 15 + 12 &= 27 \\ 15 \cdot 12 &= 180. \end{aligned}$$

U vavilonskom heksagezimalnom zapisu broj 180 bio bi zapisan kao $3,0$, jer važi

$$3,0 = 3 \cdot 60 + 0 = 180.$$

Na pojedinim pločicama javljaju se i složeniji problemi u kojima su poznati zbir dužine i širine i kombinacija njihove površine i razlike. Jedan takav problem može se savremenim jezikom zapisati sistemom

$$\begin{aligned} xy + x - y &= 183, \\ x + y &= 27. \end{aligned}$$

U originalnom postupku uvodi se izmenjena širina $y' = y + 2$. Tada je $xy' = x(y + 2) = xy + 2x$. Sabiranjem datih jednačina dobija se

$$xy + x - y + x + y = 183 + 27,$$

odnosno $xy + 2x = 210$. Prema tome, $x(y + 2) = 210$, pa sistem dobija jednostavniji oblik

$$\begin{aligned} xy' &= 210, \\ x + y' &= 29. \end{aligned}$$

Sada se može primeniti prethodno opisani postupak. Polovina zbira iznosi $\frac{29}{2} = 14,5$. Zatim se računa $14,5^2 = 210,25$. Od toga se oduzima proizvod:

$$210,25 - 210 = 0,25.$$

Kvadratni koren dobijene vrednosti je $\sqrt{0,25} = 0,5$. Prema tome,

$$\begin{aligned} x &= 14,5 + 0,5 = 15, \\ y' &= 14,5 - 0,5 = 14. \end{aligned}$$

Pošto je $y' = y + 2$, dobija se $y = 14 - 2 = 12$. Provera daje

$$\begin{aligned} 15 \cdot 12 + 15 - 12 &= 180 + 3 = 183 \\ 15 + 12 &= 27. \end{aligned}$$

Ovaj primer pokazuje da su Vavilonci umeli da transformišu početni problem u jednostavniji oblik uvođenjem pomoćne veličine. Takav korak može se uporediti sa savremenom smenom promenljive. Njihov postupak nije bio zasnovan na formalnim pravilima simboličke algebre, ali je pokazivao visok stepen matematičke organizovanosti i sposobnosti da se složen problem svede na već poznat tip.

Vavilonski tekstovi pokazuju i poznavanje identiteta koji se danas zapisuju u obliku

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Ovi identiteti nisu zapisivani simbolički, ali su korišćeni u računskim i geometrijskim postupcima. Bez poznavanja odnosa između kvadrata zbira, kvadrata razlike i odgovarajućih pravougaonih površina ne bi bilo moguće sprovesti metode koje se pojavljuju na sačuvanim pločicama.

Vavilonci su rešavali i jednačine koje se mogu predstaviti opštijim oblikom

$$ax^2 + bx = c.$$

Takva jednačina najpre se odgovarajućim množenjem ili deljenjem svodila na oblik pogodan za kompletiranje kvadrata. Na primer, za jednačinu $ax^2 + 2bx = c$ obe strane mogu se pomnožiti brojem a, čime se dobija $a^2x^2 + 2abx = ac$.
Dodavanjem b^2 obema stranama sledi

$$a^2x^2 + 2abx + b^2 = ac + b^2,$$

odnosno $(ax + b)^2 = ac + b^2$. Pozitivno rešenje tada je

$$x = \frac{\sqrt{ac + b^2} - b}{a}.$$

Upravo postupak koji odgovara ovoj formuli pojavljuje se u pojedinim vavilonskim problemima. Ipak, Vavilonci nisu zapisivali navedenu jednakost kao opštu formulu. Umesto toga, primenjivali su isti sled operacija na konkretnim brojevima: množili su odgovarajuće veličine, dodavali kvadrat poznate vrednosti, izračunavali koren i na kraju delili ili množili recipročnom vrednošću.

Važno je imati u vidu da se vavilonski način rešavanja kvadratnih problema razlikuje od savremenog ne samo po notaciji već i po shvatanju matematičkog problema. Savremena kvadratna jednačina $ax^2 + bx + c = 0$ posmatra se kao jedinstven oblik, pri čemu koeficijenti mogu imati pozitivne, negativne ili nulte vrednosti. Vavilonci nisu prebacivali sve članove na jednu stranu jednačine, jer nisu koristili negativne brojeve kao ravnopravne matematičke objekte. Zbog toga su različiti rasporedi veličina predstavljali različite tipove problema.

U savremenom zapisu jednačine

$$x^2 + bx = c,$$
$$x^2 = c + bx,$$
$$x^2 + c = bx$$

mogu se jednostavno svesti na opšti oblik kvadratne jednačine. U vavilonskoj tradiciji one su morale biti razmatrane odvojeno, pošto su sve veličine u zapisu bile pozitivne. Svaki tip zahtevao je posebno verbalno pravilo i odgovarajući redosled računskih operacija.

Uprkos ovim razlikama, vavilonski postupci sadrže osnovnu ideju koja se nalazi i u savremenom rešavanju kvadratnih jednačina. Dodavanjem odgovarajuće površine nepotpun geometrijski oblik pretvara se u kvadrat, nakon čega se nepoznata stranica određuje pomoću kvadratnog korena. Upravo zbog toga metoda kompletiranja kvadrata predstavlja jednu od najstarijih i najdugovečnijih metoda u istoriji algebre.

Sačuvani tekstovi potvrđuju da je u starovavilonskom periodu već postojao razvijen algoritamski pristup rešavanju jednačina drugog stepena. Vavilonci nisu raspolagali simboličkom algebrom, ali su posedovali postupke koji su bili opšti po svojoj primeni. Njihov doprinos ne ogleda se samo u tačnosti računanja, već i u prepoznavanju strukture problema, uvođenju pomoćnih veličina i svođenju složenijih zadataka na jednostavnije i ranije poznate oblike.

Da bi se u potpunosti razumela suština njihove metode, nije dovoljno posmatrati samo računske korake. Potrebno je razmotriti i geometrijsku osnovu postupka, jer su izrazi koje danas zapisujemo simbolima x^2, bx i $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$ za Vavilonce predstavljali konkretne površine kvadrata i pravougaonika. Geometrijska interpretacija kompletiranja kvadrata biće zato prikazana u narednom delu.

1.1.3 Geometrijska interpretacija algebarskog postupka

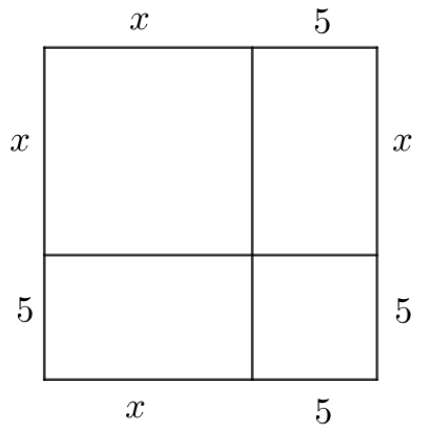
Iako se danas metoda kompletiranja kvadrata smatra algebarskim postupkom, njeni koreni su izrazito geometrijski. U starovavilonskoj matematici nepoznata veličina nije bila apstraktan broj, već dužina stranice, dok su proizvodi predstavljali površine pravougaonika ili kvadrata. Zbog toga su računske operacije bile neposredno povezane sa geometrijskim predstavama.

Osnovna ideja metode kompletiranja kvadrata sastoji se u tome da se od nepravilne geometrijske figure formira kvadrat. Ovakav način razmišljanja omogućavao je Vaviloncima da složen problem svedu na jednostavniji, pri čemu su svi koraci imali jasno geometrijsko značenje.

Razmotrimo jednačinu

$$x^2 + 10x = 39.$$

Izraz x^2 predstavlja kvadrat čija je stranica dužine x, dok izraz $10x$ predstavlja površinu pravougaonika čije su stranice x i 10. Da bi se dobio kvadrat, Vavilonci nisu posmatrali pravougaonik kao jednu celinu, već su ga zamišljeno podelili na dva jednaka pravougaonika dimenzija $x \times 5$.



Slika 1.7: Geometrijski prikaz metode kompletiranja kvadrata za jednačinu

Jedan od tih pravougaonika postavlja se uz desnu stranicu početnog kvadrata, a drugi uz njegovu donju stranicu. Na taj način dobija se figura koja gotovo ima oblik kvadrata, ali u njenom donjem desnom uglu ostaje mali nepokriveni kvadrat stranice 5. Površina tog kvadrata iznosi $5^2 = 25$. Dodavanjem ove površine dobija se veliki kvadrat stranice $x + 5$, čija je površina $(x + 5)^2$.

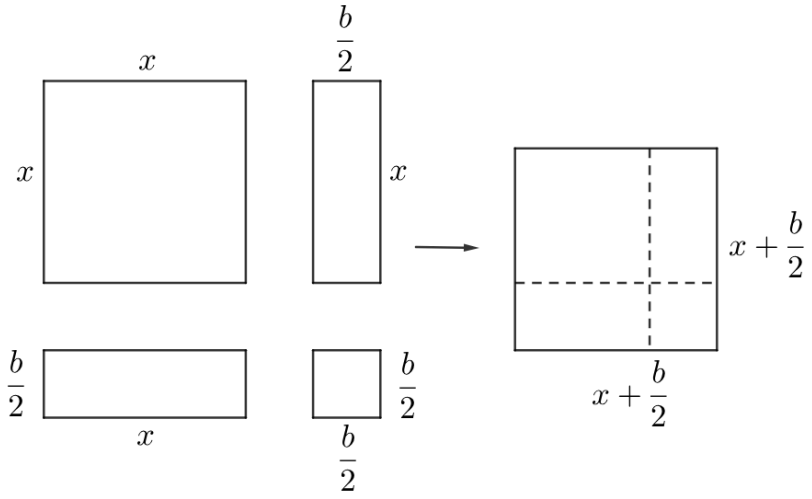
Pošto je početna površina iznosila 39, nakon dodavanja kvadrata površine 25 dobija se $39 + 25 = 64$. Dakle, $(x + 5)^2 = 64$. Odavde sledi $x + 5 = 8$, pa je $x = 3$.

Na slici prikazanoj u nastavku, slika 1.8, jasno se vidi da je postupak kompletiranja kvadrata zapravo geometrijsko dopunjavanje površine do pravilnog kvadrata. Ovakva interpretacija pokazuje da kvadrat polovine koeficijenta uz nepoznatu nije uveden proizvoljno, već predstavlja upravo površinu nedostajućeg kvadrata.

Savremena algebra ovaj postupak zapisuje simbolički:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2,$$

ali iza ove jednakosti krije se upravo geometrijska konstrukcija koju su Vavilonci intuitivno koristili gotovo dve hiljade godina pre nastanka simboličke algebre.



Slika 1.8: Geometrijski prikaz metode kompletiranja kvadrata

Zanimljivo je da se ista geometrijska interpretacija pojavljuje i mnogo kasnije u VII knjizi Euklidovih[1] *Elemenata Elemenata*, kao i u delima islamskih matematičara, posebno El Horezmija[2], koji je kvadratne jednačine takođe objašnjavao pomoću površina kvadrata i pravougaonika. To pokazuje da geometrijsko tumačenje kvadratnih jednačina predstavlja jednu od najdugovečnijih ideja u istoriji matematike.

Iz današnje perspektive može se zaključiti da su Vavilonci razvili algoritam koji je bio potpuno ispravan, iako nije bio zasnovan na simboličkom računu. Njihov način razmišljanja bio je usmeren ka vizuelnom predstavljanju problema i transformaciji geometrijskih figura. Upravo zbog toga metoda kompletiranja kvadrata predstavlja jednu od prvih poznatih veza između geometrije i algebre.

Ovakav pristup imao je veliki istorijski značaj. Kasniji razvoj algebre nije odbacio geometrijsko razmišljanje, već ga je postepeno zamenio simboličkim zapisom. Međutim, suština postupka ostala je nepromenjena. I danas se metoda kompletiranja kvadrata zasniva na istoj ideji - dodavanjem odgovarajuće površine nepotpun izraz pretvara se u potpun kvadrat, čime rešavanje jednačine postaje znatno jednostavnije.

1.2 Egipatska matematika

Razvoj matematike u starom Egiptu odvijao se gotovo uporedo sa razvojem vavilonske matematike, ali u drugačijem društvenom i kulturnom okruženju. Egipatska civilizacija razvila se u dolini reke Nil, gde su redovne poplave stvarale potrebu za ponovnim određivanjem granica zemljišnih parcela, obračunavanjem poreza, izgradnjom građevina i vođenjem administrativnih

[1] Eukleidēs (oko 325.p.n.e.-265.p.n.e.), Aleksandrija, helenski matematičar, poznat kao autor dela *Elementi*.

[2] Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (oko 780-oko 850), Horezm (današnji Uzbekistan), persijski matematičar, astronom i geograf; jedan od utemeljivača algebre.

poslova. Upravo su ove praktične potrebe predstavljale glavni podsticaj razvoju matematičkih znanja.

Za razliku od Vavilonaca, koji su razvili sistematske algoritme za rešavanje kvadratnih jednačina, egipatski matematičari najveću pažnju posvećivali su aritmetici, računanju sa razlomcima, određivanju površina i zapremina, kao i rešavanju linearnih problema. Njihova matematika bila je izrazito praktična i usmerena na rešavanje konkretnih zadataka iz svakodnevnog života.

Glavni izvori za proučavanje egipatske matematike jesu matematički papirusi, među kojima se posebno izdvajaju Rindov matematički papirus i Moskovski matematički papirus. Ovi dokumenti predstavljaju zbirke zadataka namenjenih obrazovanju pisara i pružaju dragocene podatke o matematičkim metodama koje su se koristile u drugom milenijumu pre nove ere.

Iako u egipatskim matematičkim tekstovima ne nalazimo razvijenu simboličku algebru niti opšte metode rešavanja kvadratnih jednačina kakve postoje u vavilonskoj tradiciji, pojedini postupci pokazuju početke algebarskog razmišljanja. Metoda lažne pretpostavke predstavlja jedan od prvih sistematskih postupaka za rešavanje linearnih problema i može se smatrati pretečom kasnijih algebarskih metoda.

1.2.1 Rindov papirus

Rindov matematički papirus predstavlja najznačajniji sačuvani izvor za proučavanje matematike starog Egipta i jedan od najvrednijih istorijskih dokumenata u razvoju matematičke nauke. Naziv je dobio po škotskom antikvaru Aleksandru Henriju Rindu[3], koji ga je kupio 1858. godine u Luksoru, nakon čega je papirus dospeo u Britanski muzej, gde se i danas čuva.

Slika 1.9: Rindov matematički papirus

Papirus je nastao oko 1650. godine pre nove ere, ali se smatra da nije originalno delo njegovog autora. Na samom početku dokumenta pisar Ahmes[4] navodi da je tekst prepisan sa znatno starijeg rukopisa koji potiče iz perioda Srednjeg kraljevstva, približno oko 1850. godine pre nove ere. Zbog toga se sadržaj Rindovog papirusa smatra odrazom još starije egipatske matematičke tradicije.

[3]Alexander Henry Rhind (1833-1863), Vik, Škotska, škotski arheolog, antikvar i egiptolog.

[4]Ahmes (oko XVII veka p.n.e.), stari egipatski pisar i matematičar, prepisivač Rindovog matematičkog papirusa.

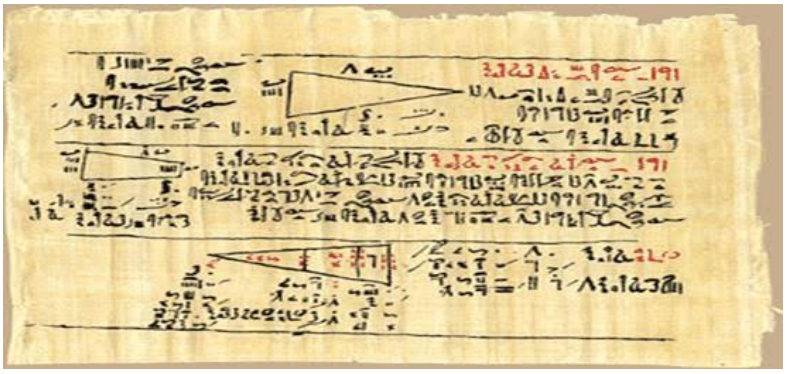
Dokument je ispisan hijeratskim pismom na papirusnoj traci dužine približno 5,5 metara i širine oko 33 centimetra. Hijeratsko pismo predstavljalo je pojednostavljenu, svakodnevnu verziju hijeroglifskog pisma, namenjenu administrativnim i naučnim zapisima. Zahvaljujući tome, matematički problemi mogli su se zapisivati znatno brže nego hijeroglifima.

Rindov papirus sadrži ukupno 84 matematička zadatka različite složenosti. Većina njih odnosi se na praktične probleme iz svakodnevnog života, poput raspodele hrane, obračuna nadnica, određivanja količine žita, računanja površina zemljišta, zapremina skladišta i građevinskih objekata, kao i rešavanja različitih proporcionalnih odnosa. Pored konkretnih zadataka, papirus sadrži i tablice razlomaka, pravila za računanje i brojne numeričke primere koji su služili za obuku budućih pisara.

Za razliku od savremene matematike, zadaci u Rindovom papirusu nisu organizovani kao sistem definicija, teorema i dokaza. Umesto toga, svaki problem sastoji se od opisa situacije, niza računskih koraka i konačnog rezultata. Ovakav način izlaganja pokazuje da je egipatska matematika bila prvenstveno algoritamska i praktična. Cilj nije bio izvođenje opštih pravila, već uspešno rešavanje konkretnih problema koji su se javljali u administraciji, trgovini ili poljoprivredi.

Posebno je zanimljivo da se u papirusu pojavljuju zadaci koji zahtevaju određivanje nepoznate veličine. Egipćani su tu nepoznatu nazivali terminom *aha*, što se najčešće prevodi kao „gomila” ili „količina”. Iako nisu koristili simboličku oznaku poput današnjeg x, način razmišljanja pokazuje da su bili svesni postojanja nepoznate veličine čija se vrednost određuje na osnovu poznatih uslova.

Najčešći postupak kojim su rešavali ovakve zadatke bila je metoda lažne pretpostavke. Suština ove metode sastojala se u tome da se najpre pretpostavi proizvoljna vrednost nepoznate veličine, izračuna odgovarajući rezultat, a zatim izvrši proporcionalna korekcija kako bi se dobilo tačno rešenje. Ova metoda predstavljala je efikasan algoritam za rešavanje linearnih problema i jedan od prvih sistematskih pristupa određivanju nepoznatih veličina u istoriji matematike.



Slika 1.10: Deo Rindovog papirusa sa matematičkim zapisima

Iako Rindov papirus ne sadrži razvijene metode rešavanja kvadratnih jednačina kakve nalazimo u starovavilonskim tekstovima, njegov značaj za istoriju matematike je veliki. On svedoči o visokom stepenu razvijenosti egipatske aritmetike, sistematičnosti računskih postupaka i organizovanom matematičkom obrazovanju. Istovremeno, ovaj dokument predstavlja važnu etapu u razvoju algebarskog mišljenja, jer pokazuje da su Egipćani razvili postupke za određivanje nepoznatih veličina mnogo pre nastanka simboličke algebre.

Danas se Rindov papirus smatra jednim od najvažnijih istorijskih izvora za proučavanje antičke matematike. Njegova vrednost ne ogleda se samo u očuvanju matematičkih znanja starog Egipta, već i u mogućnosti da se prati razvoj ideja koje će tokom narednih vekova biti dalje usavršavane u grčkoj, islamskoj i evropskoj matematičkoj tradiciji.

1.2.2 Linearni problemi i „metoda lažne pretpostavke"

Za razliku od vavilonskih matematičara, koji su razvili postupke za rešavanje kvadratnih jednačina, egipatski matematičari najveću pažnju posvećivali su linearnim problemima. U Rindovom matematičkom papirusu nalazi se veliki broj zadataka u kojima je potrebno odrediti nepoznatu veličinu na osnovu zadatih uslova. Takvi zadaci najčešće su rešavani postupkom koji se u savremenoj literaturi naziva *metoda lažne pretpostavke*.

Osnovna ideja ove metode sastoji se u tome da se za nepoznatu veličinu najpre pretpostavi proizvoljna vrednost. Dobijeni rezultat zatim se upoređuje sa traženom vrednošću, nakon čega se odgovarajućom proporcionalnom korekcijom određuje tačno rešenje. Metoda je naročito pogodna za linearne probleme, jer se kod linearnih zavisnosti promena ulazne veličine proporcionalno odražava na promenu rezultata.

Egipatski matematičari nisu koristili simboličke oznake za nepoznate veličine niti su zapisivali jednačine u današnjem obliku. Umesto toga, problem je bio opisan rečima, a postupak rešavanja prikazivan kroz niz računskih koraka. Ovakav način rada bio je jednostavan za primenu i omogućavao je rešavanje velikog broja praktičnih zadataka bez razvijene algebarske simbolike.

Jedan od najpoznatijih zadataka iz Rindovog papirusa glasi:
Primer. Količina i njena sedmina zajedno daju 19. Odredi količinu. Savremenim matematičkim zapisom ovaj problem može se predstaviti jednačinom

$$x + \frac{x}{7} = 19.$$

Egipatski pisar nije formirao ovu jednačinu, već je najpre pretpostavio pogodnu vrednost za nepoznatu količinu. Izabrao je broj 7, jer je sedmina broja 7 jednaka 1, pa je račun jednostavan. Dobija se $7 + \frac{7}{7} = 8$. Pošto je cilj bio dobiti rezultat 19, potrebno je odrediti koliko puta broj 8 treba uvećati da bi postao 19, što je $\frac{19}{8}$. Pretpostavljena vrednost zato se množi istim faktorom:

$$7 \cdot \frac{19}{8} = \frac{133}{8} = 16\frac{5}{8}.$$

Dakle, tražena količina iznosi $16\frac{5}{8}$. □

Savremenim algebarskim postupkom rešenje se dobija znatno kraće. Polazi se od jednačine $x + \frac{x}{7} = 19$. Sabiranjem sličnih članova dobija se $\frac{8}{7}x = 19$, odnosno

$$x = 19 \cdot \frac{7}{8} = \frac{133}{8} = 16\frac{5}{8}.$$

Dobijeno rešenje potpuno se poklapa sa egipatskim postupkom.

Na prvi pogled može izgledati da je metoda lažne pretpostavke zasnovana na nagađanju. Međutim, izbor početne vrednosti nije imao za cilj pronalaženje tačnog rešenja, već pojednostavljivanje računanja. Kod linearnih problema svaka promena nepoznate veličine izaziva proporcionalnu promenu rezultata, pa se zato početna pretpostavka može jednostavno korigovati odgovarajućim koeficijentom. Upravo ta proporcionalnost predstavlja matematičku osnovu ove metode.

Posmatrano iz savremene perspektive, metoda lažne pretpostavke može se tumačiti kao poseban oblik rešavanja linearne jednačine pomoću proporcionalnosti. Iako Egipćani nisu raspolagali simboličkom algebrom, njihov postupak pokazuje jasno razumevanje odnosa između poznatih i nepoznatih veličina. Na taj način oni uvode ideju određivanja nepoznate veličine koja će kasnije postati jedan od osnovnih zadataka algebre.

Metoda lažne pretpostavke zadržala se u matematičkoj tradiciji tokom više vekova. Koristili su je grčki, kineski, arapski i srednjovekovni evropski matematičari, a u pojedinim aritmetikama može se pronaći sve do XVIII veka. Njena dugotrajna primena potvrđuje da je predstavljala jednostavan, pouzdan i efikasan algoritam za rešavanje linearnih problema.

Iako egipatska matematika nije dostigla nivo razvoja kvadratnih jednačina karakterističan za Vavilon, značaj Rindovog papirusa ogleda se u tome što predstavlja jedan od prvih sačuvanih dokaza sistematskog rešavanja problema sa nepoznatom veličinom.

Korak	**Račun**
Pretpostavljena vrednost	$x = 7$
Provera	$7 + \frac{7}{7} = 8$
Traženi rezultat	19
Faktor korekcije	$\frac{19}{8}$
Konačno rešenje	$7 \cdot \frac{19}{8} = 16\frac{5}{8}$

Tabela 1.1: Primena metode lažne pretpostavke na zadatak iz Rindovog papirusa

Metoda lažne pretpostavke predstavlja jedan od najstarijih poznatih algoritama za rešavanje linearnih problema. Iako nije zasnovana na simboličkoj algebri, njen princip pokazuje izuzetno razvijeno matematičko razmišljanje i razumevanje proporcionalnosti. Zbog svoje jednostavnosti i efikasnosti zadržala se u matematičkoj praksi više od tri hiljade godina i predstavlja važnu etapu u istorijskom razvoju metoda rešavanja jednačina. Ovakav pristup predstavlja prirodnu vezu između praktične matematike starog Egipta i teorijskog razvoja algebre koji će svoj puni izraz dobiti u grčkoj matematici.

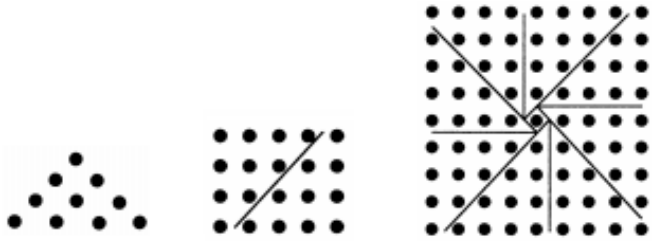
Glava 2

Grčka matematika i geometrijska algebra

2.1 Pitagorejci i teorija proporcija

Razvoj grčke matematike predstavlja jednu od važnih prekretnica u istoriji matematičke misli. Za razliku od prethodnih civilizacija, poput Vavilona i Egipta, u kojima je matematika prvenstveno bila usmerena na rešavanje praktičnih problema iz oblasti trgovine, građevinarstva i astronomije, grčki matematičari razvili su novi pristup zasnovan na logičkom zaključivanju i dokazivanju. Matematičke tvrdnje više nisu bile prihvatane samo zato što su davale tačne rezultate u praksi, već je bilo neophodno dokazati njihovu opštu važnost. Na taj način matematika postaje deduktivna nauka, zasnovana na aksiomima, definicijama i strogo izvedenim teoremama.

Početak ovakvog načina razmišljanja vezuje se za Pitagoru[5] sa ostrva Samos, koji je u VI veku pre nove ere osnovao filozofsko-matematičku školu u Krotonu, gradu u južnoj Italiji. Pitagorejska škola nije predstavljala samo mesto na kojem se proučavala matematika, već i filozofsku zajednicu čiji su članovi verovali da se priroda može objasniti pomoću brojeva i njihovih međusobnih odnosa. Njihovo poznato načelo „Sve je broj” izražava uverenje da su brojevi temelj univerzuma i da se zakoni prirode mogu opisati matematičkim odnosima.



Slika 2.1: Geometrijski prikaz trougaonog broja i kvadratnog broja

[5]Pythagóras ho Sámios (oko 570.p.n.e.-oko 495.p.n.e.), ostrvo Samos, antički grčki filozof i matematičar, osnivač pitagorejske škole.

Pitagorejci su proučavali osobine prirodnih brojeva, njihove delioce i međusobne odnose. Predstavljali su brojeve pomoću geometrijskih rasporeda tačaka. Na taj način nastali su pojmovi trougaonih, kvadratnih i mnogougaonih brojeva, koji su omogućili geometrijsko tumačenje brojnih aritmetičkih identiteta. Na slici 2.1 prikazani su primeri trougaonog i kvadratnog broja, kao i konstrukcija koja pokazuje da dva uzastopna trougaona broja obrazuju kvadrat. Ovakvo povezivanje aritmetike i geometrije predstavlja jedan od prvih koraka ka razvoju geometrijske algebre.

Pitagorejska škola doprinela je razvoju teorije proporcija. Posmatrajući odnose između dužina, površina i zapremina, pitagorejci su uočili da se mnogi geometrijski problemi mogu izraziti odnosima između veličina. Pojam proporcije imao je važnu ulogu u geometriji, jer je omogućavao poređenje različitih veličina bez njihovog neposrednog merenja. Upravo će teorija proporcija kasnije predstavljati osnovu velikog dela Euklidovih *Elemenata*, posebno Pete knjige, u kojoj je sistematski izložena teorija razmera.

Istoriji matematike doprinelo je otkriće nesamerljivih veličina. Prema predanju, pitagorejci su proučavajući kvadrat stranice jedinične dužine zaključili da njegova dijagonala ima dužinu $\sqrt{2}$. Pokazalo se da se ova dužina ne može predstaviti kao količnik dva cela broja, odnosno da ne postoji racionalan broj čiji je kvadrat jednak dva. Ovo otkriće predstavljalo je ozbiljan izazov za pitagorejsku filozofiju, koja je počivala na uverenju da se svi odnosi u prirodi mogu izraziti pomoću celih brojeva i njihovih razmera.

Savremenim matematičkim zapisom, pretpostavka da je $\sqrt{2}$ racionalan broj može se izraziti u obliku $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, gde su m i n uzajamno prosti celi brojevi. Kvadriranjem obe strane dobija se $m^2 = 2n^2$ iz čega sledi da je broj m paran. Tada se može zapisati $m = 2k$, pa zamenom u prethodnu jednakost dobijamo $4k^2 = 2n^2$, odnosno $n^2 = 2k^2$. Time se zaključuje da je i broj n paran, što je u suprotnosti sa početnom pretpostavkom da su m i n uzajamno prosti. Zbog toga broj $\sqrt{2}$ nije racionalan.

Iako se smatra da ovakav dokaz potiče iz kasnijeg perioda, njegovo poreklo se tradicionalno vezuje za pitagorejsku školu i predstavlja jedan od najpoznatijih primera dokaza svođenjem na protivurečnost. Otkriće iracionalnih brojeva označilo je prekretnicu u razvoju grčke matematike, jer je pokazalo da postoje veličine koje se ne mogu opisati isključivo racionalnim brojevima.

Za razvoj metoda rešavanja jednačina značaj pitagorejaca ne ogleda se u tome što su razvili nove algoritme za rešavanje algebarskih problema, već u tome što su postavili teorijske temelje na kojima će kasnije biti izgrađena geometrijska algebra. Njihovo proučavanje proporcija, odnosa među veličinama i geometrijskih konstrukcija omogućilo je razvoj deduktivnog pristupa matematici, koji će svoj puni izraz dobiti u Euklidovim *Elementima*. Upravo zbog toga pitagorejska škola predstavlja važnu etapu u istorijskom razvoju metoda rešavanja jednačina i prelaz od praktične aritmetike drevnih civilizacija ka teorijskoj matematici antičke Grčke [4].

2.2 Euklid i geometrijsko rešavanje problema

2.2.1 Euklidovi *Elementi*

Razvoj grčke matematike dostigao je svoj vrhunac oko 300. godine pre nove ere radom Euklida iz Aleksandrije. Iako se o njegovom životu zna veoma malo, njegovo delo *Elementi* predstavlja jedno od najuticajnijih matematičkih dela u istoriji. Tokom više od dve hiljade godina ono je bilo osnovni udžbenik geometrije i služilo je kao uzor za izlaganje matematičkih teorija zasnovanih na definicijama, aksiomama i dokazima.

Za razliku od vavilonskih i egipatskih matematičkih tekstova, u kojima su dominirali numerički primeri i postupci računanja, Euklid je matematiku izložio kao deduktivni sistem. Svaka tvrdnja izvedena je iz prethodno dokazanih rezultata, čime je uspostavljen način matematičkog zaključivanja koji će ostati karakterističan za matematiku sve do danas.

Elementi se sastoje od trinaest knjiga koje obuhvataju ravansku geometriju, teoriju proporcija, teoriju brojeva, iracionalne veličine i prostornu geometriju. Za razvoj metoda rešavanja jednačina najveći značaj imaju prve dve knjige, u kojima se nalaze brojni geometrijski identiteti koji se danas zapisuju algebarskim formulama.

U Euklidovo vreme algebra kao posebna matematička disciplina još nije postojala. Zbog toga su problemi koje danas rešavamo pomoću jednačina predstavljani geometrijskim konstrukcijama nad dužima, pravougaonicima i kvadratima. Množenje dve veličine odgovaralo je konstrukciji pravougaonika, kvadriranje konstrukciji kvadrata, dok je sabiranje veličina predstavljano nadovezivanjem duži. Na taj način geometrijske figure postale su sredstvo za izvođenje algebarskih identiteta.

Jedna od karakteristika Euklidovog pristupa jeste da se broj i geometrijska veličina ne poistovećuju. Dok savremena algebra brojeve i promenljive posmatra apstraktno, Euklid svaku veličinu predstavlja odgovarajućom geometrijskom figurom. Zbog toga se jednakosti koje danas zapisujemo simbolički u *Elementima* dokazuju poređenjem površina i dužina.

Ovakav način razmišljanja danas se naziva *geometrijska algebra*. Njime su mnoge algebarske formule dobile geometrijsku interpretaciju, što je omogućilo rešavanje problema koji odgovaraju linearnim i kvadratnim jednačinama mnogo pre nego što je razvijena simbolička algebra. Upravo zahvaljujući ovom pristupu grčka matematika predstavlja važnu etapu u istorijskom razvoju metoda rešavanja jednačina.

2.2.2 Geometrijska algebra

Jedna od karakteristika grčke matematike jeste povezivanje algebarskih odnosa sa geometrijskim konstrukcijama. U vreme Euklida nisu postojale simboličke oznake za promenljive, operacije niti jednačine u današnjem smislu, pa su se problemi izražavali pomoću duži, pravougaonika i kvadrata. Ovakav način predstavljanja matematičkih odnosa danas se naziva *geometrijska algebra*.

Osnovna ideja geometrijske algebre zasniva se na tome da se proizvod dve duži predstavlja površinom pravougaonika, dok se kvadrat duži predstavlja površinom kvadrata. Sabiranje veličina ostvaruje se nadovezivanjem duži, a razlika njihovim oduzimanjem. Na taj način brojni algebarski identiteti mogu se dokazati isključivo geometrijskim argumentima.

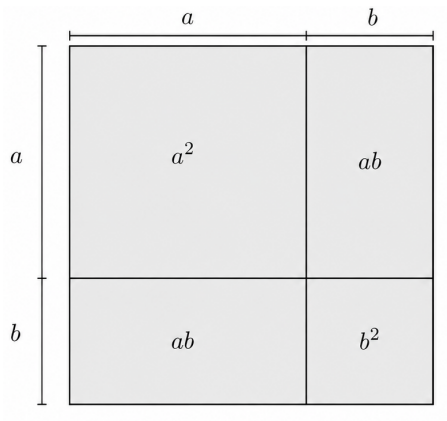
Takav pristup predstavlja značajnu razliku u odnosu na vavilonsku matematiku. Dok su Vavilonci koristili algoritme za rešavanje konkretnih numeričkih problema, Euklid je iste odnose

dokazivao polazeći od opštih geometrijskih konstrukcija. Time je praktičan postupak dobio teorijsko utemeljenje.

Jedan od najpoznatijih primera geometrijske algebre nalazi se u Drugoj knjizi *Elemenata*. U savremenom zapisu ovaj rezultat odgovara identitetu

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Euklid ovu jednakost ne zapisuje simbolički, već posmatra kvadrat čija je stranica jednaka zbiru duži a i b. Podelom tog kvadrata dobijaju se četiri oblasti: kvadrat stranice a, kvadrat stranice b i dva podudarna pravougaonika dimenzija $a \times b$. Površina velikog kvadrata jednaka je zbiru površina svih njegovih delova, čime se geometrijski dokazuje navedeni identitet.



Slika 2.2: Geometrijski prikaz identiteta $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Na isti način može se dokazati i jednakost

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

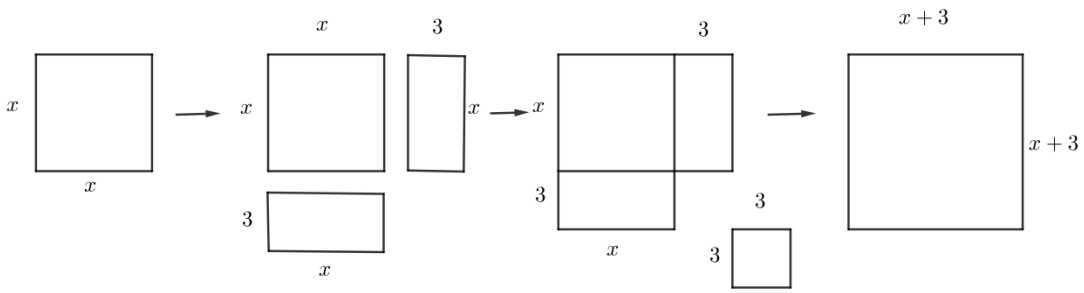
koja predstavlja osnovu brojnih geometrijskih konstrukcija u Drugoj knjizi *Elemenata*. Razlika površina dva kvadrata odgovara površini pravougaonika čije su stranice zbir i razlika odgovarajućih duži.

Geometrijska interpretacija ovih identiteta omogućila je rešavanje problema koji bi se danas zapisali kvadratnim jednačinama. Umesto simboličkog transformisanja izraza, Euklid je koristio konstrukcije nad dužima i poređenje površina kako bi pokazao da određena geometrijska figura zadovoljava zadate uslove. Na taj način geometrijski dokaz postaje sredstvo za rešavanje problema koji su po svojoj prirodi algebarski.

Ovakav pristup imao je veliki uticaj na kasniji razvoj matematike. Iako je simbolička algebra razvijena tek mnogo vekova kasnije, geometrijska algebra omogućila je da se brojni problemi rešavaju opštim metodama i predstavlja važan korak u razvoju teorije jednačina.

Primer. Rešiti jednačinu $x^2 + 6x = 16$. Dodavanjem broja $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ na obe strane dobija se $x^2 + 6x + 9 = 25$, odnosno $(x+3)^2 = 25$. Odavde sledi $x + 3 = 5$, pa je $x = 2$.

Iako Euklid nije zapisivao jednačine u simboličkom obliku, isti postupak mogao se predstaviti geometrijski. Kvadrat stranice x dopunjuje se sa dva pravougaonika dimenzija x i 3, a zatim se dodaje mali kvadrat stranice 3. Na taj način nastaje kvadrat stranice $x+3$, čija površina iznosi 25.



Slika 2.3: Euklidov postupak za izračunavanje

Slika ilustruje geometrijsku ideju koja se nalazi u Drugoj knjizi Elemenata i koja se u savremenoj algebri može primeniti pri rešavanju kvadratne jednačine metodom kompletiranja kvadrata. □

2.3 Diofant i „Aritmetika”

Među matematičarima antičke Grčke posebno mesto u razvoju algebre zauzima Diofant iz Aleksandrije, koji se obično smatra jednim od začetnika algebarskog načina razmišljanja. Za razliku od svojih prethodnika, koji su matematičke probleme uglavnom predstavljali geometrijski ili opisnim jezikom, Diofant je razvio način zapisivanja i rešavanja problema koji je bio bliži kasnijoj simboličkoj algebri. Njegovo najznačajnije delo, *Aritmetika*, *Αριθμητικα*, predstavlja zbirku zadataka i metoda za rešavanje jednačina, zbog čega je imalo veliki uticaj na razvoj matematike u narednim vekovima [4].

Slika 2.4: Naslovna strana izdanja Diofantove *Aritmetike* iz 1621. godine

O životu Diofanta sačuvano je veoma malo pouzdanih podataka. Smatra se da je živeo u

Aleksandriji tokom III veka nove ere, u vreme kada je ovaj grad bio jedno od najvažnijih naučnih središta antičkog sveta. Njegovo ime često se dovodi u vezu sa razvojem teorije brojeva i algebre, pre svega zahvaljujući delu *Aritmetika*, koje je vekovima predstavljalo jedan od najznačajnijih izvora znanja o antičkoj matematici.

Diofantu se pripisuje trinaest knjiga *Aritmetike*. Do danas je na grčkom jeziku sačuvano šest knjiga, dok su još četiri poznate zahvaljujući srednjovekovnim arapskim prevodima. Preostali delovi nisu sačuvani, pa se o njihovom sadržaju može zaključivati samo na osnovu kasnijih citata i komentara. Ukupno delo obuhvata približno 260 problema različite složenosti, pri čemu je svaki problem praćen postupkom rešavanja, dok su opšta pravila i teorijska razmatranja svedena na minimum.

Za razliku od Euklidovih Elemenata, koji predstavljaju sistematski izloženu matematičku teoriju zasnovanu na definicijama, aksiomama i dokazima, *Aritmetika* je organizovana kao zbirka pažljivo odabranih zadataka. Diofant nije težio izgradnji opšte teorije jednačina, već je prikazivao postupke kojima se dolazi do rešenja konkretnih problema. Uprkos tome, iz njegovih metoda mogu se uočiti opšti principi koji će kasnije postati sastavni deo algebarskog mišljenja.

Jedna od najvažnijih odlika Diofantove *Aritmetike* jeste uvođenje skraćenog načina zapisivanja matematičkih izraza. Dok su vavilonski i raniji grčki matematičari probleme gotovo u potpunosti zapisivali rečima, Diofant koristi posebne oznake za nepoznatu veličinu, njene stepene i pojedine računske operacije. Ovakav način zapisivanja danas se naziva *sinkopirana algebra*, jer predstavlja prelaz između retoričke algebre, u kojoj se svi izrazi iskazuju rečima, i simboličke algebre koja će se razviti tek u XVI i XVII veku.

Najvažnija novina bila je uvođenje posebnog znaka za nepoznatu veličinu, kao i skraćenih oznaka za njene stepene. Pored toga, Diofant koristi posebne simbole za recipročne vrednosti, jednakost i oduzimanje, čime se matematički zapis značajno skraćuje u odnosu na dotadašnji način pisanja. Iako se njegove oznake razlikuju od savremene algebarske simbolike, njihov cilj bio je isti - da složene računske postupke učine preglednijim i jednostavnijim za zapisivanje.

units	M^o	μονα(δε)ς
x	ς	ἀριθμός
x^2	Δ^Y	δύναμις
x^3	K^Y	κύβος
x^4	$\Delta^Y\Delta$	δυναμοδύναμις
x^5	ΔK^Y	δυναμόκυβος
x^6	K^YK	κυβόκυβος
x^7	—	—
x^8	ΔKK^Y ?	δυναμοκυβόκυβος?
x^9	K^YKK?	κυβοκυβόκυβος?
$\frac{1}{x}$	$\varsigma^{\times}$	ἀριθμοστόν
$\frac{1}{x^2}$	$\Delta^{Y\times}$	δυναμοστόν
...	...	...
square	$\square^{ος}$	τετράγωνος
=	ι^{σ}	ἴσος
−	⋔	(λείπειν)

Slika 2.5: Diofantove oznake korišćene u delu *Aritmetika*

Na slici 2.5 prikazane su najvažnije oznake koje se pojavljuju u *Aritmetici*. Diofant nije koristio jedan simbol za promenljivu, kao što je danas slučaj sa slovom x, već je svaki stepen nepoznate veličine imao svoju posebnu oznaku. Na primer, postojali su različiti simboli za x, x^2, x^3, pa sve do x^6, dok su se recipročne vrednosti označavale posebnim skraćenicama. Na sličan način zapisivani su i znaci za jednakost i oduzimanje.

Iako je Diofantova simbolika predstavljala značajan napredak u odnosu na retorički način zapisivanja, ona još uvek nije činila potpuno razvijen algebarski jezik. Množenje, sabiranje i mnogi drugi postupci često su ostajali zapisani opisno, a simboli su prvenstveno služili za označavanje nepoznate veličine i njenih stepena. Zbog toga se njegova algebra u istoriji matematike smatra prelaznom fazom između verbalnog i savremenog simboličkog načina zapisivanja.

Uprkos svojim ograničenjima, ovaj način zapisivanja omogućio je preglednije rešavanje jednačina i lakše izvođenje računskih postupaka. Zbog toga se Aritmetika smatra jednim od prvih dela u kojem se mogu prepoznati elementi algebarskog jezika koji će nekoliko vekova kasnije biti dalje razvijeni u radovima arapskih i evropskih matematičara.

Uvođenje skraćenog zapisa nije predstavljalo jedinu novinu u Diofantovom radu. Podjednako važan bio je i njegov način rešavanja jednačina, koji se zasnivao na sistematičnom transformisanju izraza i traženju pozitivnih racionalnih rešenja.

Za razliku od ranijih matematičara, koji su probleme rešavali uglavnom geometrijskim konstrukcijama ili aritmetičkim postupcima, Diofant razvija sistematičan način rešavanja algebarskih problema. U delu *Aritmetika* većina zadataka nije predstavljena kao opšta teorija, već kroz niz pažljivo odabranih primera. Ipak, analizom tih primera može se uočiti zajednički postupak koji Diofant primenjuje u rešavanju jednačina.

Polazna tačka jeste pažljivo formulisanje problema i određivanje uslova koje rešenje mora da zadovolji. Nakon toga nepoznate veličine izražavaju se pomoću jedne promenljive, čime se problem svodi na algebarsku jednačinu. Diofant zatim vrši niz transformacija kako bi jednačina dobila što jednostavniji oblik, najčešće tako da sadrži samo uzastopne stepene nepoznate. Time se postupak rešavanja znatno pojednostavljuje.

U uvodu svog dela Diofant opisuje dve osnovne operacije koje koristi prilikom sređivanja jednačina. Prva se sastoji u prebacivanju članova sa jedne strane jednačine na drugu kako bi svi pozitivni članovi bili na istoj strani. Druga operacija podrazumeva uklanjanje jednakih članova koji se pojavljuju na obe strane jednačine. Ove transformacije predstavljaju preteču današnjih pravila za sređivanje algebarskih jednačina.

Karakteristično je da Diofant nije težio pronalaženju svih mogućih rešenja. U većini zadataka bilo mu je dovoljno da pronađe jedno pozitivno racionalno rešenje koje zadovoljava postavljene uslove. Zbog toga se njegova metoda razlikuje od savremenog pristupa rešavanju jednačina, gde se nastoji odrediti skup svih rešenja.

Primer. *Podeliti dati kvadrat na dva kvadrata.* Podeliti broj 16 na dva kvadrata. Diofant najpre označava stranicu jednog kvadrata sa x. Za stranicu drugog kvadrata ne uvodi novu nepoznatu, već je izražava pomoću prve. U uvodu *Aritmetike* navodi da druga stranica treba da bude „neki broj puta x, umanjen za stranicu broja koji se deli". Budući da je u ovom zadatku broj koji se deli jednak 16, njegova stranica iznosi 4, pa Diofant bira izraz $2x - 4$. Time se početni problem svodi na jednačinu sa jednom nepoznatom. Tada površine kvadrata iznose x^2 i $(2x - 4)^2$.

Po uslovu zadatka njihov zbir treba da bude jednak 16, pa važi $x^2 + (2x-4)^2 = 16$. Razvijanjem kvadrata dobija se $5x^2 - 16x + 16 = 16$, odnosno $5x^2 - 16x = 0$. Odavde sledi $x(5x - 16) = 0$.

Kako se traži pozitivno rešenje, uzima se $x = \frac{16}{5}$. Druga stranica tada iznosi $2x - 4 = \frac{12}{5}$, pa su traženi kvadrati

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{256}{25}, \qquad \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{144}{25}.$$

Njihov zbir zaista iznosi $\frac{256}{25} + \frac{144}{25} = \frac{400}{25} = 16$. □

Posmatrani problem nije samo ilustracija Diofantove metode rešavanja jednačina, već pokazuje i jedno od važnih svojstava racionalnih rešenja. Naime, promenom koeficijenta uz promenljivu u izrazu kojim se predstavlja druga nepoznata mogu se dobiti različita racionalna rešenja istog problema. Savremenom terminologijom može se pokazati da svaki kvadrat može biti predstavljen kao zbir dva racionalna kvadrata na beskonačno mnogo načina, pa se Diofantovo rešenje može posmatrati kao jedan slučaj opštijeg postupka.

Problem koji razmatra Diofant usko je povezan sa Pitagorinom teoremom. Naime, jednakost

$$u^2 + v^2 = w^2$$

predstavlja jednačinu Pitagorinih trojki. Savremena teorija pokazuje da se sva racionalna rešenja ove jednačine mogu opisati odgovarajućom parametrizacijom, što potvrđuje da Diofantov postupak nije izolovan primer, već deo šire teorije racionalnih rešenja kvadratnih jednačina.

Ovaj problem stekao je dodatnu istorijsku važnost zahvaljujući Pjeru de Fermau[6]. Na marginama svog primerka Diofantove *Aritmetike* zapisao je čuvenu tvrdnju da jednačina

$$x^n + y^n = z^n, n \geqslant 3,$$

nema pozitivnih celobrojnih rešenja, uz napomenu da poseduje „zaista čudesan dokaz" za koji nije bilo dovoljno mesta na margini knjige. Ova tvrdnja, kasnije poznata kao Fermaova poslednja teorema, ostala je nerešena više od tri veka, sve dok je 1994. godine nije dokazao Endru Vajls[7] uz značajan doprinos Ričarda Tejlora[8].

Razvoj grčke matematike pokazuje postepen prelaz od geometrijskog ka algebarskom načinu razmišljanja. Pitagorejci su proučavali brojeve i njihove odnose, Euklid je geometrijskim dokazima dao teorijsku osnovu brojnim algebarskim identitetima, dok je Diofant uveo skraćenu simboliku i razvio metode koje omogućavaju sistematičnije rešavanje jednačina. Iako njegova algebra još nije bila potpuno simbolička, predstavljala je značajan korak ka kasnijem razvoju ove matematičke discipline. U narednim vekovima te ideje biće dalje razvijene u indijskoj i kineskoj matematici, gde će se pojaviti novi postupci rešavanja jednačina i prihvatanje negativnih brojeva.

[6]Pierre de Fermat (1607-1665), francuski matematičar i pravnik, jedan od osnivača moderne teorije brojeva i analitičke geometrije.

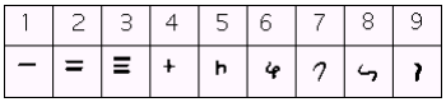
[7]Sir Andrew John Wiles (1953-), britanski matematičar, poznat po dokazu Fermatove poslednje teoreme.

[8]Richard Lawrence Taylor (1962-), britanski matematičar, profesor teorije brojeva i koautor završnog dela dokaza Fermatove poslednje teoreme.

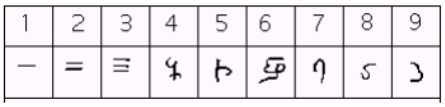
Glava 3

Indijska i kineska tradicija rešavanja jednačina

Indijska matematika razvijala se prvenstveno iz praktičnih potreba trgovine, astronomije i merenja, zbog čega je najveći akcenat bio na aritmetici i računanju. Sama reč *ganita*, koja označava matematiku, doslovno znači „nauka o računanju", što najbolje oslikava karakter tadašnje indijske matematike. Razvoj decimalnog sistema omogućio je značajan napredak u izvođenju računskih operacija, dok su razlomci i negativni brojevi postali sastavni deo matematičkih razmatranja. Starost indijske matematike ne može se tačno utvrditi jer nedostaju dovoljno stari pisani tekstovi. Najpoznatiji matematičari su bili *Ariabhata*[9] koji je živeo oko 500. godine i *Bramagupta*[10] koji je živeo oko 625. godine. U njihovim radovima su karakteristični njihovi algebarsko-aritmetički fragmenti. Takođe su se bavili merenjem i trigonometrijom. Najpoznatiji uspeh indijske matematike je naš savremeni desetični zapis brojeva. Naša numeracija potiče od sistema označavanja brojeva koji su stvorili Indijci. Sledeće slike pokazuju oblike cifara koje su Indijci koristili u različitim periodima i to počev od I veka nove ere pa do XXI veka nove ere.



Slika 3.1: Brahmi cifre iz 1.veka nove ere



Slika 3.2: Gupta cifre iz 4.veka nove ere

Razvoj oblika cifara tokom više vekova pokazuje postepeno formiranje decimalnog sistema, koji će kasnije, posredstvom arapskih matematičara, postati osnova savremene numeracije.

[9] Āryabhaṭa (476-550), indijski matematičar i astronom, jedan od utemeljivača klasične indijske matematike.

[10] Brahmagupta (598-oko 668), indijski matematičar i astronom, poznat po pravilima za računanje sa nulom i negativnim brojevima.

Slika 3.3: Nagari cifre iz 11.veka nove ere

Indijci su u okviru svog shvatanja unapredili i algebru. Uveli su skraćenice na sličan način kao Diofant. Dakle, upotrebljavali su skraćenice koje su sastavljene od prva dva slova reči. Tim skraćenicama su označavali stepene, nepoznate veličine i slobodne članove u jednačinama. Nepoznatu veličinu su nazivali *javat-tavat* (toliko-koliko). Ako je bilo više nepoznatih upotrebljavali su početna dva slova boja: *ka* (*kalaka* - crn), *ni* (*nilaka* - plav), *pi* (*pitaka* - žut), *pa* (*panda* - beo) itd. Stepeni se takođe javljaju u skraćenicama. Brojevi su ispisivani u određenim šemama koje određuju operacije s njima. Sabiranje se označavalo sa *ju* (*juta*-sabran), množenje sa *gu* (*gunita*-pomnožen), deljenje sa *bha* (*bhaga*-podeljen) i oduzimanje sa tačkom ili znakom + iznad broja kojeg oduzimamo.

Najstariji poznati rukopis potiče iz IV veka nove ere i po mestu pronalaska nazvan je Bakšali rukopis. Ovaj rukopis ima sedamdeset traka u brezovoj kori. Njegovo vreme nastanka i poreklo ne može se odrediti, tako da ga neki pripisuju III, a neki čak IX veku. On sadrži tradicionalnu indijsku matematiku o neodređenim i kvadratnim jednačinama. Isto tako sadrži i primere o aproksimacijama. U njemu se za nulu upotrebljava tačka. Bakšali rukopis je priručnik uputstava i pravila prikazanih zajedničkim primerima i njihovim rešenjima. Posvećen je aritmetici i algebri sa nekoliko problema iz geometrije i merenja. Upotrebljena notacija nije kao kod Ariabhata. Razlomci nisu pisani u današnjem obliku i razlomačka crta se ne pojavljuje. Sa znakom + posle broja označavao se negativan broj.

$$\begin{matrix} 3 & 1^{+} \\ 4 & 2 \end{matrix} \quad \text{znači} \quad \frac{3}{4} - \frac{1}{2}.$$

$$\begin{matrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \quad \textit{yu pha } 7 \text{ znači} \quad \frac{5}{1} + \frac{2}{1} = 7.$$

Sledeći primer je ilustracija neodređenog problema koji je prisutan u rukopisu, a svodi se na sistem linearnih jednačina koje nemaju jedinstveno rešenje.

Jedna osoba poseduje sedam *asava* konja, druga devet *haya* konja, i treća deset kamila. Svaka osoba da dve životinje, svako svakom. Tada oni imaju jednak broj. Nađi cenu svake životinje i ukupnu cenu životinja koju poseduje svaka osoba.

Ovaj problem može se razmotriti u modernoj notaciji. Treba odrediti celobrojna rešenja x_1, x_2 i x_3 i k, gde su x_1 cena *asava*, x_2 cena *haya* i x_3 cena kamila. Kada svaki da dve životinje onda je zadovoljena sledeća jednačina:

$$5x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + 7x_2 + x_3 = x_1 + x_2 + 8x_3 = k.$$

Odatle je: $4x_1 = 6x_2 = 7x_3 = k-(x_1+x_2+x_3)$. Celobrojna rešenja $k-(x_1+x_2+x_3)$ moraju biti zajednički sadržalac brojeva 4, 6 i 7. Ovo je neodređen problem i različiti zajednički sadržalac vodiće do različitih rešenja. U Bakšali rukopisu uzeto je $k - (x_1 + x_2 + x_3) = 168$ jer je ovde uzeto $4 \cdot 6 \cdot 7 = 168$. Tada je $x_1 = 42$, $x_2 = 28$, $x_3 = 24$. Onda je $k = 262$ i to je ukupna cena životinja koju poseduje svaka osoba. Ovo nije minimalno celobrojno rešenje, jer je to $k = 131$.

Drugi zanimljiv deo u Bakšali rukopisu je računanje kvadratnog korena u kom se nalazi sledeće pravilo:

U slučaju nekvadratnog broja, razdvoji najbliži kvadratni broj, podeli ostatak sa duplim ovim kvadratnim brojem; pola kvadrata ovoga je podeljeno sa sumom približnog korena i razlomka. Ovo je oduzeto i dobijen je koren.

Ako se upotrebi moderna notacija onda gornje pravilo prelazi u sledeću formulu:

$$\sqrt{Q} = \sqrt{A^2 + b} = A + \frac{b}{2A} - \frac{\left(\frac{b}{2A}\right)^2}{2\left(A + \frac{b}{2A}\right)}.$$

Koristeći Bakšali formulu dobija se rezultat koji daje tačnost do četiri decimale.
Primer. Računanje kvadratnog korena broja 41. Modernom notacijom i Bakšali formulom dobija se sledeći rezultat:

$$\sqrt{41} = \sqrt{6^2 + 5} = 6 + \frac{5}{12} - \frac{\left(\frac{5}{12}\right)^2}{2\left(6 + \frac{5}{12}\right)} = 6,403138528.$$

Ovaj rezultat je tačan do četvrte decimale. □

Formula predstavlja jednu od najpoznatijih aproksimacija kvadratnog korena u staroj indijskoj matematici i daje izuzetno precizne rezultate, čak i kada se koristi samo jedan korak izračunavanja.

3.1 Bramagupta

Bramagupta je bio indijski matematičar i astronom ranog srednjeg veka čiji su radovi imali veliki uticaj na razvoj algebre. Živeo je u gradu Binmalu, koji je u to vreme predstavljao jedan od važnih naučnih centara severozapadne Indije. Njegovo najpoznatije delo, *Brāhmasphuṭasiddhānta*, napisano 628. godine, obuhvata astronomske i matematičke sadržaje i predstavlja jednu od bitnih prekretnica u razvoju algebre. Za razliku od prethodnih matematičara, Bramagupta nije samo rešavao pojedinačne probleme, već je sistematizovao pravila računanja i proširio pojam broja. Njegov pristup predstavlja značajan prelaz sa rešavanja pojedinačnih numeričkih problema na formulisanje opštih algebarskih pravila.

Slika 3.4: Bramagupta

Jedan od njegovih najznačajnijih doprinosa jeste uvođenje pravila za računanje sa nulom i negativnim brojevima. Dok su u grčkoj matematici negativni brojevi uglavnom odbacivani

kao neprihvatljivi, Bramagupta ih prihvata kao ravnopravne matematičke objekte i formuliše pravila za njihovo sabiranje, oduzimanje i množenje. Kako bi ih učinio razumljivijim, pozitivne brojeve tumači kao **imovinu**, a negativne kao **dug**. Na taj način pravila računanja povezuje sa svakodnevnim životom. Time negativni brojevi postaju sastavni deo računskih postupaka, a ne samo pomoćna veličina bez praktičnog značenja.

Bramagupta navodi da zbir dve imovine predstavlja novu imovinu, zbir dva duga novi dug, dok zbir imovine i duga zavisi od njihove međusobne veličine. Takođe, ističe da je proizvod dve imovine ili dva duga pozitivan, dok proizvod imovine i duga daje negativan rezultat. Ova pravila u potpunosti odgovaraju savremenim pravilima računanja sa celim brojevima i predstavljaju prvi sistematski prikaz operacija sa negativnim brojevima.

Iako njegovo tumačenje deljenja nulom nije u potpunosti odgovaralo savremenom shvatanju, njegovi rezultati predstavljali su veliki korak u razvoju pojma nule kao broja i njenom uključivanju u računske postupke.

Značajan deo *Brāhmasphuṭasiddhānta* posvećen je rešavanju linearnih i kvadratnih jednačina. Bramagupta daje pravila za rešavanje kvadratnih jednačina koja su po suštini veoma bliska savremenim metodama. Kvadratne jednačine zapisivao je u retoričkom obliku, bez simboličke notacije, ali je postupak rešavanja suštinski odgovarao metodi koja se danas dobija dopunjavanjem do potpunog kvadrata. Na taj način nastavio je tradiciju započetu u Vavilonu, ali ju je proširio opštijim pravilima i prihvatanjem negativnih brojeva. Prihvata pozitivna rešenja, ali za razliku od grčkih matematičara ne odbacuje negativne brojeve kao besmislene, već ih uključuje u svoja razmatranja. Time je načinio važan korak ka razvoju opštijeg pojma rešenja jednačine.

Pored pravila za računanje sa pozitivnim i negativnim brojevima, Bramagupta je proučavao aritmetičke nizove, kvadratne jednačine sa realnim rešenjima, beskonačnost i probleme koji će kasnije postati poznati kao Pelove jednačine. Izveo je formule za zbir kvadrata i kubova prvih n prirodnih brojeva, a razvio je i postupak za približno određivanje kvadratnog korena. Ovaj postupak može se zapisati u obliku

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} + \frac{x-y}{2\sqrt{y}},$$

gde je y broj čiji je kvadrat blizak broju x. Savremena analiza pokazuje da je ovaj algoritam zasnovan na istoj ideji kao i Njutn–Rafsonova[11] iterativna metoda iterativna metoda, koja je razvijena gotovo hiljadu godina kasnije.

Brahmaguptin rad predstavlja prekretnicu u istoriji algebre. Njegova pravila za računanje sa nulom i negativnim brojevima, metode rešavanja jednačina i sistematičan pristup algebarskim problemima postavili su temelje na kojima su gradili kasniji indijski matematičari, pre svega Bhaskara, ali i arapski učenjaci koji su indijsku matematiku preneli u Evropu. Na taj način Bramagupta predstavlja jednu od ključnih spona između antičke i srednjovekovne algebre.

[11] Metoda je nazvana po Isaku Njutnu (Isaac Newton, 1643-1727), engleskom matematičaru, fizičaru i astronomu, i Džozefu Rafsonu (Joseph Raphson, oko 1648-1715), engleskom matematičaru, koji su nezavisno razvili ovaj iterativni postupak.

3.2 Bhaskara II

Bhaskara II (1114-1185), poznat i kao Bhaskaracharya, bio je indijski matematičar i astronom. Njegovi radovi objedinjeni su u delu *Siddhānta Śiromaṇi*, koje se sastoji iz četiri celine, među kojima su za razvoj algebre posebno značajne *Līlāvatī* i *Bījagaṇita*. Dok je *Līlāvatī* posvećena aritmetici, *Bījagaṇita* obrađuje algebru, rešavanje jednačina i neodređene probleme.

Slika 3.5: Statua Bhaskare II

U svojim radovima Bhaskara II nastavlja tradiciju Brahmagupte, ali veću pažnju posvećuje postupcima rešavanja jednačina. Linearne i kvadratne jednačine rešava algoritamski, pri čemu koristi algebarske transformacije kojima jednačinu svodi na pogodniji oblik. Umesto rešavanja svakog zadatka posebnim postupkom, nastoji da razvije opštije metode koje se mogu primeniti na čitavu grupu problema.

Za razliku od ranijih autora, Bhaskara II razmatra mogućnost da kvadratna jednačina ima dva rešenja. Međutim, u praktičnim problemima prihvata samo ona rešenja koja imaju smisla u datom kontekstu. Kada jedno od rešenja predstavlja negativnu veličinu, ono se odbacuje kao neprihvatljivo. Zbog toga se u njegovim primerima pojavljuju jednačine sa pozitivnim racionalnim rešenjima, dok se negativna i iracionalna rešenja uglavnom ne razmatraju, iako je poznavao postupke kojima se do njih može doći.
Primer. Bhaskara II razmatra jednačinu

$$x^4 - 2(x^2 + 200x) = 9999.$$

Najpre uočava da dodavanje izraza $400x + 1$ na obe strane dovodi do potpunog kvadrata na levoj strani, ali desna strana i dalje nije kvadrat. Zbog toga dodaje izraz $4x^2 + 400x + 1$, čime jednačina postaje

$$(x^2 + 1)^2 = [2(x + 50)]^2 .$$

Izvlačenjem kvadratnog korena dobija se

$$x^2 + 1 = 2x + 100,$$

odnosno $(x - 1)^2 = 100$. Rešenja su $x = 11$ i $x = -9$. Kako zadatak opisuje stvarnu veličinu, Bhaskara prihvata samo pozitivno rešenje $x = 11$. □

Bhaskara II nije se ograničio na kvadratne jednačine. U *Bījagaṇita* nalaze se i postupci za rešavanje pojedinih jednačina trećeg i četvrtog stepena, kao i problemi koji se danas svrstavaju

u neodređene jednačine. Njegova rešenja zasnivaju se na pažljivom izboru algebarskih transformacija kojima se složeniji problem svodi na oblik koji je moguće rešiti poznatim metodama. Nekoliko vekova kasnije matematičari Keralijske škole počinju da daju i formalna obrazloženja ovih postupaka, čime se u indijskoj matematici postepeno razvija i tradicija dokazivanja.

3.3 Kineska metoda za sisteme linearnih jednačina

Kineska matematička tradicija razvijala se u dolinama Žute reke i Jangcea, ali je datiranje najstarijih tekstova manje pouzdano nego u slučaju mesopotamske i egipatske matematike. Najstariji sačuvani matematički klasici nastajali su i menjali se tokom dužeg perioda, pa često nije moguće odrediti vreme nastanka njihovih prvobitnih verzija.

Delo *Jiuzhang Suanshu*, odnosno *Devet poglavlja o matematičkoj veštini*, oblikovano je kao zbirka praktičnih problema iz merenja zemljišta, trgovine, oporezivanja, raspodele dobara i građevinarstva. Danas poznata verzija dela zasnovana je na komentarima matematičara Liu Huija[12] iz 263. godine. Njegovi komentari sadrže dodatna objašnjenja, obrazloženja postupaka i pojedine dokaze, čime je prvobitna zbirka zadataka dobila širi matematički sadržaj.

Osma knjiga, poznata pod nazivom *Fangcheng*, sadrži osamnaest problema koji se svode na sisteme linearnih jednačina. Za njihovo rešavanje korišćeni su računski štapići raspoređeni na ravnoj tabli. Koeficijenti nisu zapisivani slovima, već je njihov položaj određivao kojoj nepoznatoj i kojoj jednačini pripadaju. Ovakav raspored po svojoj ulozi odgovara tabeli koeficijenata, iako kineski matematičari nisu raspolagali savremenim pojmom matrice.

Brojevi su predstavljani pomoću računskih štapića čiji se vertikalni i horizontalni položaj naizmenično menjao u zavisnosti od mesne vrednosti. Takav način zapisivanja odgovarao je decimalnom pozicionom sistemu. U početku nije postojao poseban znak za nulu, već je odgovarajuće mesto ostavljano prazno.

Tokom rešavanja sistema mogli su se pojaviti i negativni koeficijenti. Pozitivne i negativne vrednosti razlikovane su bojom štapića: za pozitivne brojeve korišćeni su crveni, a za negativne crni štapići. U kasnijem periodu negativna vrednost označavana je i precrtavanjem odgovarajućeg znaka. Na taj način negativni brojevi nisu služili samo kao konačni rezultati, već su ulazili u sam računski postupak.
Na primer, sistem

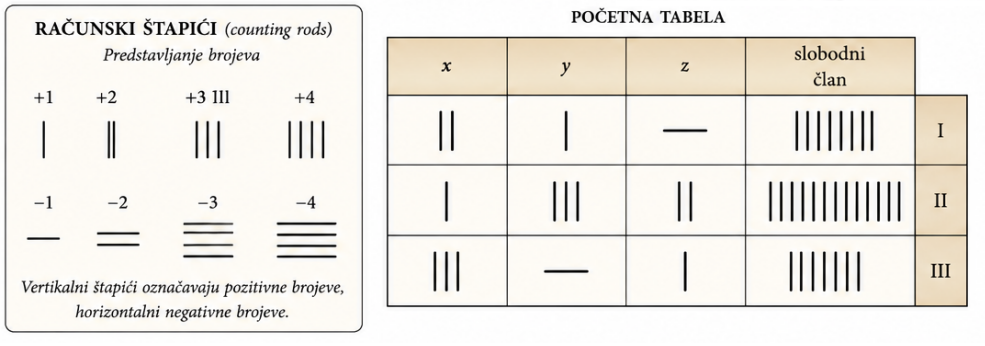
$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8, \\ x + 3y + 2z &= 13, \\ 3x - y + z &= 7 \end{aligned}$$

predstavljao bi se tabelom koeficijenata

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 13 \\ 3 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right].$$

Polazna tabela zatim se transformisala elementarnim računskim operacijama. Množenjem redova odgovarajućim brojevima i njihovim oduzimanjem postepeno su se eliminisali koeficijenti ispod glavne dijagonale. Nakon toga eliminisani su i koeficijenti iznad dijagonale, tako da je na kraju ostajala dijagonalna tabela iz koje su se neposredno očitavale vrednosti nepoznatih.

[12] Liú Huī (oko 225-295), kineski matematičar, autor komentara na delo *Devet poglavlja o matematičkoj veštini* i jedan od najznačajnijih predstavnika klasične kineske matematike.



Slika 3.6: Računski štapići i njihov raspored na tabli

Takav postupak odgovara savremenoj metodi eliminacije koja se danas naziva Gausova[13] eliminacija. Iako kineski matematičari nisu koristili matričnu notaciju niti su razvili teoriju matrica, njihov algoritam zasnivao se na istim računskim transformacijama koje se primenjuju i u savremenoj linearnoj algebri.

Primer. U osmoj knjizi dela *Devet poglavlja o matematičkoj veštini* razmatra se problem sa tri vrste žita. U savremenoj notaciji uslovi problema vode do sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39, \\ 2x + 3y + z &= 34, \\ x + 2y + 3z &= 26, \end{aligned}$$

gde x, y i z predstavljaju količine žita odgovarajućeg kvaliteta.

Kineski matematičari nisu zapisivali sistem u ovom obliku. Koeficijente su postavljali pomoću računskih štapića u kolone:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Prva kolona sleva odgovara jednačini $x + 2y + 3z = 26$, srednja jednačini $2x + 3y + z = 34$, a desna jednačini $3x + 2y + z = 39$.

Izvođenjem operacija nad kolonama početni raspored svodi se na

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

što savremenim zapisom odgovara trougaonom sistemu

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39, \\ 5y + z &= 24, \\ 36z &= 99. \end{aligned}$$

[13] Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855), nemački matematičar, astronom i fizičar.

Iz poslednje jednačine dobija se $z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4}$. Zamenom u drugoj jednačini sledi

$$5y + \frac{11}{4} = 24,$$

pa je $y = \frac{17}{4}$. Na kraju, iz prve jednačine dobijamo

$$3x + 2 \cdot \frac{17}{4} + \frac{11}{4} = 39,$$

odakle je $x = \frac{37}{4}$. Prema tome, rešenje sistema je

$$x = \frac{37}{4}, \qquad y = \frac{17}{4}, \qquad z = \frac{11}{4}.$$

□

Ako se jednačine zapisuju po redovima, isti sistem ima proširenu matricu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right].$$

Kineski raspored razlikuje se od ovog zapisa po tome što su jednačine predstavljene kolonama, ali su računske operacije imale isti cilj: postepeno uklanjanje nepoznatih i svođenje sistema na trougaoni oblik. Kineska metoda je bila potpuno algoritamska. Nije zahtevala geometrijsku interpretaciju niti posebno prilagođavanje svakom pojedinačnom problemu. Jednom uspostavljen postupak mogao se primeniti na različite sisteme linearnih jednačina, bez obzira na konkretne vrednosti koeficijenata.

U istom delu nalaze se i algoritmi za određivanje kvadratnih i kubnih korena postepenim nalaženjem cifara rezultata. Ovi postupci zasnivaju se na formulama za kvadrat i kub binoma i pokazuju da kineska matematika nije bila ograničena na linearne probleme. Ipak, metoda iz osme knjige izdvaja se po tome što pruža opšti računski postupak za sisteme sa više nepoznatih.

Kasniji kineski matematičari razvijali su i metode za numeričko rešavanje jednačina većeg stepena, kao i postupke povezane sa sistemima kongruencija.

Glava 4

Islamska matematika i nastanak algebre

Razvoj islamske matematike započinje u VII veku, nakon širenja arapske države na područja Sirije, Persije, Egipta i severne Afrike. Time su pod jednu kulturnu celinu dospele različite matematičke tradicije - grčka, vavilonska, indijska i persijska. Njihovo objedinjavanje i dalje razvijanje predstavljalo je jedan od najvažnijih događaja u istoriji matematike.

Godine 762. osnovan je Bagdad, koji ubrzo postaje politički, trgovački i naučni centar islamskog sveta. Tokom vladavine abasidskih kalifa, naročito Haruna el Rašida (786–809) i njegovog sina el Mamuna (813–833), osnovana je Kuća mudrosti (Bayt al-Hikma), ustanova u kojoj su prikupljana, prevođena i proučavana dela grčkih, indijskih i persijskih autora. U Bagdadu su na arapski jezik prevedena dela Euklida, Arhimeda[14], Apolonija[15], Diofanta i drugih antičkih matematičara. Ovi prevodi omogućili su ne samo očuvanje antičkog znanja, već i njegov dalji razvoj.

Slika 4.1: Kuća mudrosti u Bagdadu

U Bagdadu nisu samo prepisivana i prevedena postojeća dela. Znanja preuzeta iz grčke geometrije, indijske aritmetike i vavilonskih računskih postupaka objedinjena su u novu matematičku tradiciju. Na taj način nastala je sredina u kojoj su praktične metode računanja dobile teorijsku

[14] Archimēdēs (oko 287.p.n.e.-oko 212.p.n.e.), Sirakuza, antički grčki matematičar, fizičar i pronalazač.

[15] Apollōnios ho Pergaîos (oko 262.p.n.e.-oko 190.p.n.e.), Perga, antički grčki matematičar, poznat po delu *Konike*.

osnovu, a problemi koji su se ranije rešavali pojedinačno počeli su da se posmatraju kroz opštija pravila.

Poseban uticaj na razvoj islamske matematike imala je indijska tradicija. Od Indijaca je preuzet decimalni sistem i način zapisivanja brojeva koji će kasnije postati poznat kao arapski sistem cifara. Jednostavnije izvođenje računskih operacija omogućilo je širu primenu aritmetike u trgovini, astronomiji i svakodnevnoj praksi, što je doprinelo i razvoju algebarskih metoda.

Sa grčkom matematikom islamski naučnici preuzeli su i način dokazivanja zasnovan na definicijama, teoremama i logičkom zaključivanju. Dok su vavilonska i indijska matematika nudile uspešne računske postupke, grčka tradicija pružila je teorijski okvir u kome su se ti postupci mogli dokazivati i uopštavati. Upravo spoj praktičnih algoritama i deduktivne metode predstavlja jednu od odlika islamske matematike.

Na temeljima ovih različitih tradicija islamski matematičari razvili su sistematičan pristup rešavanju jednačina. U tom periodu nastaje i naziv *al-jabr*, izveden iz arapske reči koja označava jednu od osnovnih operacija pri transformaciji jednačina. Vremenom je ovaj naziv počeo da označava čitavu matematičku disciplinu posvećenu proučavanju jednačina i njihovih rešenja.

4.1 El Horezmi i knjiga „Al-jabr”

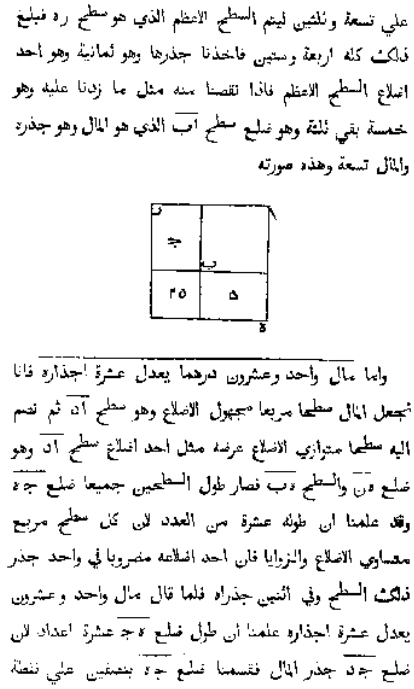
El Horezmi[16] je bio persijski matematičar, astronom i geograf koji je stvarao u Bagdadu za vreme vladavine abasidskog kalifa el Mamuna. Njegov naučni rad vezuje se za Kuću mudrosti (*Bayt al-Hikma*), gde su proučavana i prevođena dela grčkih, indijskih i persijskih autora. Pored algebre, bavio se aritmetikom, astronomijom, geografijom i izradom kalendara.

Slika 4.2: Poštanska marka u SSSR-u posvećena El Horezmiju

[16]Muhamed ibn Musa al-Hvarizmi oko 780–850, bio je persijski matematičar, astronom i geograf.

Najpoznatije El Horezmijevo delo nosi naslov *Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala* (*Kratka knjiga o računanju metodama al-jabr i al-muqabala*), napisano oko 820. godine. Ova knjiga predstavlja prvi sačuvani sistematski prikaz algebre kao posebne matematičke discipline. Za razliku od ranijih matematičkih tekstova, koji su sadržali pojedinačne zadatke i njihove postupke rešavanja, El Horezmi nastoji da razvije opšta pravila koja se mogu primeniti na čitavu klasu jednačina.

Naziv knjige potiče od dve osnovne operacije koje se koriste pri transformaciji jednačina. Reč *al-jabr* označava prebacivanje negativnog člana na drugu stranu jednačine kako bi svi članovi postali pozitivni, dok *al-muqābala* označava skraćivanje jednakih članova koji se nalaze sa obe strane jednačine. Ove dve operacije predstavljaju osnovu postupka sređivanja jednačina i koriste se i u savremenoj algebri, iako pod drugačijim nazivima.



Slika 4.3: Originalni arapski štampani rukopis Knjige o algebri

El Horezmijeva algebra napisana je retoričkim stilom. Matematički simboli nisu korišćeni, već su svi brojevi, operacije i postupci bili zapisivani rečima. Nepoznata veličina nazivana je *šej* (*shay'*, „stvar"), njen kvadrat *māl* („imovina" ili „kvadrat"), a treći stepen *ka'b* („kocka"). Viši stepeni izražavani su kombinacijama ovih naziva, bez posebne simboličke notacije. Takav način zapisivanja razlikuje se od Diofantovih skraćenica i indijskih oznaka, što pokazuje da islamski matematičari nisu preuzeli ranije simboličke sisteme, već su zadržali retorički način izlaganja.

Sam autor u uvodu navodi da je knjigu napisao kako bi prikazao „ono što je najjednostavnije i najkorisnije u računanju", odnosno postupke koji su bili potrebni pri podeli nasledstva, trgovini, merenju zemljišta, kopanju kanala i drugim praktičnim poslovima. Nakon uvodnog dela, knjiga izlaže pravila rešavanja linearnih i kvadratnih jednačina, a zatim ih primenjuje na veliki broj praktičnih problema iz svakodnevnog života.

4.2 Klasifikacija jednačina

U delu *Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala* El Horezmi razmatra linearne i kvadratne jednačine koje imaju pozitivna rešenja. Kako u njegovoj algebri nisu korišćeni negativni brojevi niti simbolički zapis, jednačine nisu mogle biti objedinjene u jedan opšti oblik. Umesto toga, razlikovao je šest osnovnih tipova, u zavisnosti od toga da li se u jednačini pojavljuju kvadrat, koren i broj [4].

U savremenoj notaciji ovih šest tipova mogu se zapisati kao

$$\begin{aligned} ax^2 &= bx, \\ ax^2 &= c, \\ bx &= c, \\ ax^2 + bx &= c, \\ ax^2 &= bx + c, \\ ax^2 + c &= bx, \end{aligned}$$

gde su a, b i c pozitivni brojevi.

Prva tri oblika rešavaju se neposrednim računskim postupcima, dok poslednja tri predstavljaju potpune kvadratne jednačine. Za njih El Horezmi daje numeričke primere, pravila rešavanja i geometrijska obrazloženja zasnovana na kompletiranju kvadrata.

4.2.1 Kvadrati jednaki korenima

Prvi tip jednačina ima oblik

$$ax^2 = bx.$$

Deljenjem obe strane jednačine koeficijentom uz x^2 dobija se

$$x^2 = \frac{b}{a}x,$$

odnosno

$$x\left(x - \frac{b}{a}\right) = 0.$$

Savremenim postupkom dobijaju se rešenja

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{b}{a}.$$

El Horezmi razmatra samo pozitivno nenulto rešenje

$$x = \frac{b}{a},$$

jer nula nije posmatrana kao prihvatljivo rešenje praktičnih problema.

4.2.2 Kvadrati jednaki brojevima

Drugi tip jednačina koji razmatra El Horezmi ima oblik

$$ax^2 = c,$$

gde su $a > 0$ i $c > 0$.

Rešavanje ove jednačine svodi se na određivanje broja čiji je kvadrat jednak zadatoj vrednosti. Deljenjem obe strane jednačine koeficijentom uz x^2 dobija se

$$x^2 = \frac{c}{a},$$

pa je

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Savremeno posmatrano, jednačina ima dva rešenja,

$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}},$$

ali El Horezmi prihvata samo pozitivno rešenje, jer je nepoznata predstavljala duž, površinu ili drugu fizičku veličinu koja nije mogla imati negativnu vrednost.

Primer. Rešiti jednačinu

$$5x^2 = 80.$$

Deljenjem obe strane brojem 5 dobija se

$$x^2 = 16.$$

Odavde sledi $x = 4$.

Savremenim zapisom dobija se i rešenje $x = -4$, ali se ono u El Horezmijevoj algebri ne razmatra. □

4.2.3 Koreni jednaki brojevima

Treći tip jednačina koji razmatra El Horezmi ima oblik

$$bx = c,$$

gde su $b > 0$ i $c > 0$.

Ovaj oblik predstavlja najjednostavniju linearnu jednačinu. Rešavanje se svodi na određivanje broja koji, pomnožen koeficijentom b, daje poznatu vrednost c. Deljenjem obe strane jednačine koeficijentom uz nepoznatu dobija se

$$x = \frac{c}{b}.$$

Kako su svi koeficijenti pozitivni, dobijeno rešenje je takođe pozitivno, pa nije potrebno razmatrati druge mogućnosti.

Primer. Rešiti jednačinu

$$8x = 56.$$

Deljenjem obe strane jednačine brojem 8 dobija se

$$x = \frac{56}{8} = 7.$$

Dakle, rešenje jednačine je $x = 7$. □

4.2.4 Kvadrati i koreni jednaki brojevima

Četvrti tip jednačina koji razmatra El Horezmi ima oblik

$$x^2 + px = q,$$

gde su $p > 0$ i $q > 0$.

Za razliku od prethodna tri tipa, ovaj oblik nije moguće rešiti neposrednim računskim operacijama. Zbog toga El Horezmi razvija poseban postupak koji se danas naziva metodom kompletiranja kvadrata. Ovaj postupak predstavlja jednu od osnovnih ideja u istoriji algebre i ostao je u upotrebi do savremenog doba.

El Horezmijevo pravilo može se opisati na sledeći način:

Prepolovi broj korena, zatim dobijeni broj pomnoži samim sobom. Dobijeni kvadrat dodaj broju. Izvuci kvadratni koren iz zbira, a zatim oduzmi polovinu broja korena. Dobijeni broj predstavlja traženi koren.

Savremenim zapisom postupak izgleda ovako.

Od jednačine

$$x^2 + px = q,$$

dodavanjem izraza $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ na obe strane dobija se

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Leva strana sada predstavlja potpun kvadrat,

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Izvlačenjem kvadratnog korena dobija se

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2},$$

odnosno

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}.$$

Pošto El Horezmi razmatra samo pozitivna rešenja, uzima se pozitivni kvadratni koren.

Primer. Rešiti jednačinu

$$x^2 + 10x = 39.$$

Prema El Horezmijevom pravilu, najpre se uzima polovina broja korena, odnosno $\frac{10}{2} = 5$. Zatim se ovaj broj kvadrira $5^2 = 25$, i dobijeni kvadrat dodaje se na obe strane jednačine:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25.$$

Leva strana postaje potpun kvadrat,

$$(x + 5)^2 = 64.$$

Izvlačenjem kvadratnog korena dobija se $x + 5 = 8$, odnosno $x = 3$.

Savremenim zapisom dobija se i $x + 5 = -8$, odakle sledi $x = -13$, ali El Horezmi razmatra samo pozitivno rešenje $x = 3$. □

Numerički primer pokazuje da geometrijska konstrukcija nije služila samo kao ilustracija, već kao dokaz ispravnosti postupka. Dodavanje kvadrata stranice $\frac{p}{2}$ odgovara dopunjavanju početne figure do većeg kvadrata, čime se kvadratna jednačina svodi na određivanje stranice poznate površine. Na taj način geometrijsko razmatranje i algebarski postupak predstavljaju dve interpretacije iste metode.

4.2.5 Kvadrati jednaki korenima i brojevima

Peti tip jednačina koji razmatra El Horezmi ima oblik

$$x^2 = px + q,$$

gde su $p > 0$ i $q > 0$.

Za razliku od prethodnog slučaja, kvadrat nepoznate jednak je zbiru linearnog člana i poznatog broja. I u ovom slučaju El Horezmi primenjuje metodu kompletiranja kvadrata, ali je prvi korak izdvajanje linearnog člana na način koji omogućava formiranje potpunog kvadrata. Savremenim zapisom jednačina se može preurediti u oblik

$$x^2 - px = q.$$

Dodavanjem izraza $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ na obe strane dobija se

$$x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

odnosno

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Izvlačenjem kvadratnog korena sledi

$$x - \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2},$$

pa je

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Pošto El Horezmi razmatra samo pozitivne veličine, uzima se pozitivni kvadratni koren.

Primer. Rešiti jednačinu $x^2 = 3x + 4$. Jednačina se najpre zapisuje u obliku $x^2 - 3x = 4$. Polovina koeficijenta uz nepoznatu iznosi $\frac{3}{2}$, a njen kvadrat je $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Dodavanjem ovog izraza na obe strane dobija se

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 4 + \frac{9}{4},$$

odnosno

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

Izvlačenjem kvadratnog korena dobija se $x - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, pa je $x = 4$.

Savremenim postupkom dobija se i $x - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$, odnosno $x = -1$, ali se negativno rešenje u El Horezmijevoj algebri ne razmatra. □

U ovom tipu jednačina geometrijska konstrukcija razlikuje se od prethodnog slučaja samo po rasporedu pravougaonika koji predstavljaju linearni član. Suština postupka ostaje ista: dodavanjem odgovarajućeg kvadrata početna figura dopunjuje se do potpunog kvadrata, čime se određivanje nepoznate svodi na nalaženje stranice kvadrata poznate površine.

4.2.6 Kvadrati i broj jednaki korenima

Poslednji tip kvadratnih jednačina kod El Horezmija ima oblik

$$x^2 + q = px,$$

gde su $p > 0$ i $q > 0$.

Za razliku od prethodna dva slučaja, ovde se poznati broj nalazi na istoj strani jednačine kao i kvadrat nepoznate. El Horezmi i ovu jednačinu rešava metodom kompletiranja kvadrata. Polovina koeficijenta uz nepoznatu iznosi $\frac{p}{2}$, a njen kvadrat $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ dodaje se na obe strane jednačine. Tako se dobija

$$x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$

odnosno

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Izvlačenjem kvadratnog korena sledi

$$x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

pa je

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Rešenje postoji samo ako važi $\left(\frac{p}{2}\right)^2 \geq q$, odnosno $p^2 \geq 4q$. U suprotnom bi se pojavio kvadratni koren negativnog broja, koji u El Horezmijevo vreme nije imao matematičko značenje.

Primer. Rešiti jednačinu $x^2 + 21 = 10x$.

Jednačina se najpre zapisuje u obliku $x^2 - 10x + 25 = 25 - 21$. Leva strana predstavlja potpun kvadrat, $(x - 5)^2 = 4$. Izvlačenjem kvadratnog korena dobija se $x - 5 = 2$, pa je $x = 7$. Savremenom metodom dobija se i

$$x - 5 = -2,$$

odnosno $x = 3$, ali El Horezmi ne razmatra oba rešenja kvadratne jednačine, već prihvata samo ono koje odgovara njegovom postupku i tumačenju nepoznate kao pozitivne veličine. □

Iz savremene perspektive poznato je da jednačina ovog tipa može imati dva pozitivna rešenja. Međutim, El Horezmi navodi samo jedno rešenje, jer njegov cilj nije bio potpuno ispitivanje svih mogućih korena, već opis postupka kojim se dolazi do jednog pozitivnog rezultata. Tek će kasniji matematičari, posebno Bhaskara II, početi da razmatraju mogućnost postojanja više rešenja iste kvadratne jednačine.

4.3 Geometrijske metode rešavanja

Za razliku od savremene algebre, u kojoj se jednačine rešavaju simboličkim transformacijama, El Horezmi svoje postupke opravdava geometrijskim razmatranjima. Nepoznata se tumači kao duž, njen kvadrat kao površina kvadrata, dok se linearni član predstavlja pravougaonikom čija je jedna stranica jednaka nepoznatoj. Na taj način algebarske operacije dobijaju odgovarajuću geometrijsku interpretaciju.

Osnovna ideja svih geometrijskih dokaza jeste dopunjavanje date figure do potpunog kvadrata. Dodavanjem odgovarajućih pravougaonika i manjih kvadrata dobija se nova figura čija je površina poznata, pa se dužina njene stranice može neposredno odrediti. Upravo iz ove geometrijske konstrukcije proizlazi postupak koji se danas naziva metodom kompletiranja kvadrata.

Geometrijsko obrazloženje El Horezmi daje samo za tri tipa kvadratnih jednačina:

$$x^2 + px = q,$$

$$x^2 = px + q,$$

$$x^2 + q = px.$$

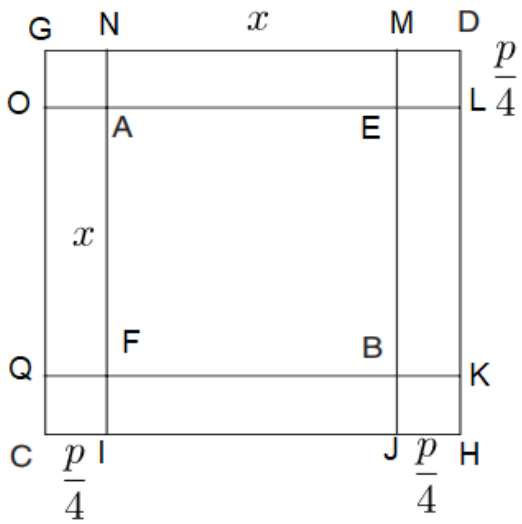
Prva tri tipa jednačina (linearne jednačine, jednačine oblika $x^2 = c$ i $px = c$) rešavaju se neposredno i ne zahtevaju geometrijsko opravdanje.

Slika 4.4: Stranice iz arapske kopije knjige iz 14. veka, koje prikazuju geometrijska rešenja dve kvadratne jednačine

4.3.1 Geometrijska interpretacija jednačine $x^2 + px = q$

Geometrijsko obrazloženje ovog tipa jednačine zasniva se na predstavljanju algebarskih članova odgovarajućim geometrijskim figurama. Neka kvadrat $AFBE$ ima stranicu x, pa je njegova površina jednaka

$$P(AFBE) = x^2.$$



Slika 4.5: Geometrijska interpretacija jednačine $x^2 + px = q$

Na svaku stranicu ovog kvadrata nadovezuje se po jedan pravougaonik čija je jedna stranica jednaka x, a druga $\frac{p}{4}$. Površina svakog od ova četiri pravougaonika iznosi $\frac{p}{4} \cdot x$, pa je njihova ukupna površina jednaka

$$4 \cdot \frac{p}{4} x = px.$$

Kako prema polaznoj jednačini važi $x^2 + px = q$, površina figure sastavljene od početnog kvadrata i četiri pravougaonika jednaka je q.
Nakon dodavanja pravougaonika u uglovima ostaju četiri mala kvadrata stranice $\frac{p}{4}$. Njihova ukupna površina iznosi

$$4\left(\frac{p}{4}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Dodavanjem ova četiri kvadrata dobija se novi kvadrat $CHDG$, čija je stranica

$$x + \frac{p}{2},$$

pa je njegova površina

$$P(CHDG) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

S druge strane, površina istog kvadrata jednaka je zbiru površine početne figure i četiri mala kvadrata, odnosno

$$P(CHDG) = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Iz jednakosti površina sledi

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

odakle se dobija

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2},$$

pa je

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}.$$

Na ovaj način El Horezmi geometrijski opravdava postupak kompletiranja kvadrata. Umesto simboličkih transformacija, do rešenja dolazi poređenjem površina kvadrata i pravougaonika koji predstavljaju pojedine članove jednačine.

4.3.2 Geometrijska interpretacija jednačine $x^2 = px + q$

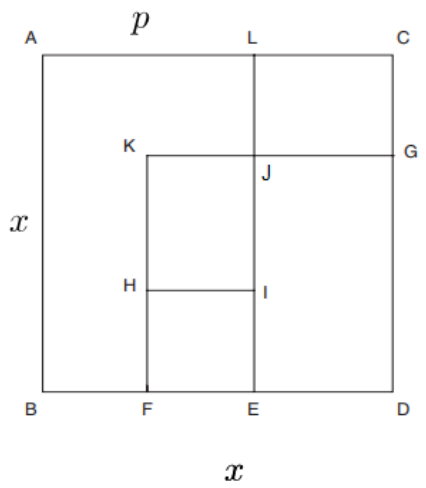
Posmatrajmo jednačinu

$$x^2 = px + q.$$

El Horezmi kvadrat nepoznate predstavlja kvadratom $ABDC$ stranice x, čija je površina jednaka x^2. Pravougaonik $ABEL$ ima širinu jednaku p, pa njegova površina iznosi px. Pošto je prema jednačini

$$x^2 = px + q,$$

preostali deo kvadrata, označen sa $EDCL$, ima površinu q.



Slika 4.6: Geometrijska interpretacija jednačine $x^2 = px + q$

Na sredini stranice BE pravougaonika $ABEL$ uzima se duž dužine $\frac{p}{2}$, pa se konstruše kvadrat $HFEI$ stranice $\frac{p}{2}$. Istovremeno se izdvojeni pravougaonik uklanja iz početnog kvadrata, tako da preostali kvadrat ima stranicu

$$x - \frac{p}{2}.$$

Njegova površina jednaka je zbiru površine kvadrata stranice $\frac{p}{2}$ i poznate površine q. Zbog toga važi

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.$$

Izvlačenjem kvadratnog korena dobija se

$$x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q},$$

odnosno

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}.$$

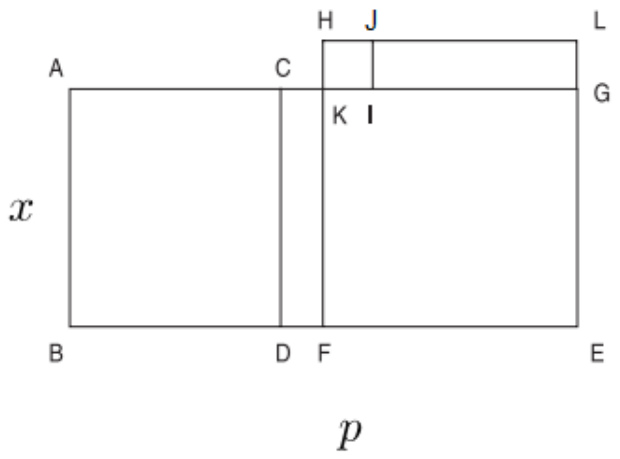
Geometrijska konstrukcija pokazuje da se i u ovom slučaju rešavanje jednačine svodi na kompletiranje kvadrata. Za razliku od prethodnog tipa, ovde se iz početnog kvadrata najpre izdvaja pravougaonik površine px, a zatim se preostala figura povezuje sa kvadratom stranice $x - \frac{p}{2}$.

4.3.3 Geometrijska interpretacija jednačine $x^2 + q = px$

Posmatrajmo jednačinu

$$x^2 + q = px.$$

El Horezmi kvadrat nepoznate predstavlja kvadratom stranice x, dok linearni član px predstavlja pravougaonik čija je jedna stranica jednaka x, a druga p. Poznata površina q zauzima deo pravougaonika, pa se preostala površina koristi za formiranje novog kvadrata.



Slika 4.7: Geometrijska interpretacija jednačine $x^2 + q = px$

Neka kvadrat $ABDC$ ima stranicu x, pa je njegova površina jednaka x^2. Pravougaonik $ABEG$ ima površinu px, pri čemu je $BE = p > 2x$. Pošto prema jednačini

$$x^2 + q = px,$$

deo pravougaonika koji ne pripada početnom kvadratu ima površinu q. Sredina duži BE označi se tačkom F, tako da je

$$BF = FE = \frac{p}{2}.$$

Konstruisanjem kvadrata $HFEL$ stranice $\frac{p}{2}$ dobija se površina $\left(\frac{p}{2}\right)^2$. Daljom konstrukcijom (Slika 4.7) dobija se kvadrat čija je stranica

$$KH = KI = \frac{p}{2} - x.$$

Kako je površina novog kvadrata jednaka razlici površina kvadrata stranice $\frac{p}{2}$ i oblasti površine q, važi

$$P = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Pošto je stranica kvadrata jednaka $HK = \frac{p}{2} - x$, sledi

$$\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

odnosno

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Da bi konstrukcija bila moguća, izraz ispod kvadratnog korena mora biti nenegativan, odnosno mora važiti

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 \geq q.$$

U suprotnom nije moguće konstruisati odgovarajući kvadrat, pa jednačina nema pozitivno realno rešenje. Ovaj uslov odgovara savremenom zahtevu da diskriminanta kvadratne jednačine bude nenegativna.

Geometrijske interpretacije koje daje El Horezmi pokazuju da algebra u IX veku još uvek nije bila odvojena od geometrije. Jednačine nisu rešavane simboličkim transformacijama, već pomoću površina kvadrata i pravougaonika. Metoda kompletiranja kvadrata, koja se u savremenoj matematici izvodi algebarski, kod El Horezmija dobija jasno geometrijsko obrazloženje. Ovakav pristup predstavlja spoj grčke geometrijske tradicije i praktičnih algebarskih metoda razvijenih u islamskoj matematici. Kasniji razvoj simboličke algebre omogućio je da se isti postupci zapisuju jednostavnije, ali je njihova matematička suština ostala nepromenjena.

Glava 5

Renesansa i velika otkrića

U XV i XVI veku evropska matematika ulazi u novo razdoblje razvoja. Nakon više vekova tokom kojih su dela antičkih i islamskih matematičara bila poznata uglavnom kroz latinske prevode, u renesansi dolazi do njihovog intenzivnog proučavanja i daljeg razvijanja. Širenje univerziteta, pronalazak štampe i sve veća razmena naučnih ideja omogućili su brže širenje matematičkog znanja.

Pažnju matematičara privlačile su jednačine trećeg i četvrtog stepena. Dok su linearne i kvadratne jednačine bile poznate još od antičkog doba, opšti postupci za rešavanje kubnih jednačina predstavljali su jedan od najvećih otvorenih problema tadašnje matematike. Njegovo rešavanje obeležilo je rad italijanskih matematičara prve polovine XVI veka.

Razvoj metoda za rešavanje kubnih jednačina nije bio samo matematički problem već i predmet ličnog prestiža. Matematičari su svoja otkrića često čuvali u tajnosti i koristili ih na javnim matematičkim nadmetanjima, na kojima su sticali ugled i mogućnost zaposlenja. Upravo zbog toga istorija rešavanja kubnih jednačina neraskidivo je povezana sa imenima Scipionea del Fera[17], Nikole Tartalje[18], Đerolama Kardana[19] i Ludovika Ferarija[20].

5.1 Del Fero i kubne jednačine

Bilo je poznato da se svaka kubna jednačina oblika

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

može svesti na jednostavniji oblik smenom

$$x = t - \frac{b}{3a},$$

pri čemu nestaje član sa drugim stepenom. Na taj način dobija se takozvana *depresovana kubna jednačina*

$$t^3 + pt = q,$$

[17]Scipione del Ferro (1465-1526), italijanski matematičar, profesor Univerziteta u Bolonji i prvi poznati autor opšte metode za rešavanje jedne klase kubnih jednačina.

[18]Niccolò Fontana, poznat kao Tartaglia (oko 1500-1557), italijanski matematičar, poznat po nezavisnom otkriću metode za rešavanje kubnih jednačina.

[19]Gerolamo Cardano (1501-1576), italijanski matematičar, lekar i filozof, autor dela *Ars Magna*, u kojem su prvi put objavljene opšte metode za rešavanje kubnih i jednačina četvrtog stepena.

[20]Lodovico Ferrari (1522-1565), italijanski matematičar, učenik Đerolama Kardana i pronalazač opšte metode za rešavanje jednačina četvrtog stepena.

ili jedan od njoj srodnih oblika $t^3 = pt + q$, $t^3 + q = pt$, gde su p i q pozitivni brojevi.

Prvi poznati postupak za rešavanje jednačine $t^3 + pt = q$ pokazao je oko 1510. godine italijanski matematičar Scipione del Fero, profesor Univerziteta u Bolonji. Svoje otkriće nije objavio, već ga je saopštio samo nekolicini učenika, među kojima je bio Antonio Marija Fior[21]. U to vreme matematičari su nove metode često čuvali kao tajnu, jer su im one donosile prednost na javnim matematičkim nadmetanjima i omogućavale sticanje ugleda i zaposlenja.

Iako Del Fero nije ostavio zapis o izvođenju svog postupka, smatra se da je polazio od identiteta

$$(u - v)^3 = u^3 - v^3 - 3uv(u - v),$$

koji se može zapisati i u obliku

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3.$$

Ako se uvede smena $t = u - v$, dobija se sistem

$$\begin{aligned} u^3 - v^3 &= q, \\ uv &= \frac{p}{3}, \end{aligned}$$

iz koga se određuju veličine u i v. Na taj način rešenje kubne jednačine može se zapisati formulom

$$t = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Iako Del Fero nije objavio svoje otkriće, njegova metoda predstavlja prvi poznati opšti postupak za rešavanje jedne klase kubnih jednačina. Nakon njegove smrti metod je nasledio Antonio Marija Fior, koji ga je iskoristio na matematičkom nadmetanju protiv Nikole Tartalje. Upravo će taj događaj dovesti do jednog od najpoznatijih sporova u istoriji matematike.

5.2 Tartalja i Kardano

Nakon smrti Scipionea del Fera, njegov postupak za rešavanje jednačine

$$x^3 + px = q, \qquad p, q > 0,$$

nasledio je njegov učenik Antonio Marija Fior. U prvoj polovini XVI veka matematička nadmetanja predstavljala su važan način sticanja ugleda među matematičarima. Učesnici su jedni drugima zadavali probleme koje je trebalo rešiti u unapred određenom roku, a uspeh na ovim takmičenjima donosio je priznanje, nove učenike i mogućnost zaposlenja. Zbog toga su matematičari svoja otkrića često čuvali u tajnosti.

[21] Antonio Maria Fior (oko 1506-1550), italijanski matematičar, učenik Scipionea del Fera i učesnik čuvenog matematičkog nadmetanja sa Nikolom Tartaljom 1535. godine.

Godine 1535. Fior je izazvao Tartalju[22] na matematičko nadmetanje. Većina zadataka koje je postavio svodila se na kubne jednačine oblika

$$x^3 + px = q.$$

Slika 5.1: Nikolo Tartalja

Samo nekoliko dana pre isteka roka Tartalja je uspeo da pronađe postupak za rešavanje ovog tipa jednačina. Pored toga, razvio je metode i za preostala dva oblika depresovane kubne jednačine,

$$x^3 = px + q, \ x^3 + q = px.$$

Pošto Fior nije poznavao ove postupke, Tartalja je odneo ubedljivu pobedu i stekao veliki ugled među italijanskim matematičarima.

Vest o njegovom uspehu stigla je i do Đerolama Kardana[23], lekara i matematičara iz Milana, koji je u to vreme pripremao svoje delo o algebri. Kardano je više puta pokušavao da od Tartalje sazna metod rešavanja kubnih jednačina, ali je Tartalja odbijao njegove molbe, plašeći se da će izgubiti prednost koju mu je novo otkriće donosilo na matematičkim nadmetanjima.

Slika 5.2: Đerolmo Kardano

[22]Niccolò Fontana (Tartaglia) (1500 – 1557), italijanski matematičar.
[23]Girolamo Cardano (1501 – 1576), italijanski matematičar i lekar.

Tek nakon ličnog susreta u Milanu 1539. godine Tartalja je pristao da Kardanu poveri svoj postupak, pošto mu je ovaj svečano obećao da ga neće objaviti. Kako bi dodatno zaštitio svoje otkriće, Tartalja je metodu zapisao u obliku pesme, odnosno stihova, koje je bilo moguće razumeti samo uz odgovarajuće matematičko tumačenje.

Tartaljina pesma	**Matematičko značenje**
I. Kada je kub zajedno sa nepoznatom jednak nekom broju Pronađi dva druga broja čija je razlika jednaka tom broju. Njihov proizvod neka bude jednak trećini kuba koeficijenta uz nepoznatu. Zatim od kubnog korena prvog oduzmi kubni koren drugog i dobićeš traženu nepoznatu.	$x^3 + px = q$ $u - v = q$ $uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$
II. Kada kub ostane sam Podeli dati broj na dva dela tako da njihov proizvod bude jednak trećini kuba koeficijenta uz nepoznatu. Zatim saberi njihove kubne korene i dobićeš traženu nepoznatu.	$x^3 = px + q$ $u + v = q$ $uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$
III. Treći slučaj Treći oblik rešava se na isti način kao drugi, jer su međusobno povezani.	$x^3 + q = px$ $x = -x_0,$ $x_0^3 = px_0 + q.$

Tabela 5.1: Tartaljina pesma i njeno matematičko značenje

Tartalja je do ove formule došao polazeći od pretpostavke da se nepoznata može zapisati kao razlika dva broja čiji se kubovi mogu odrediti iz jednostavnijeg sistema jednačina.

$$x^3 + px = q$$

traži u obliku

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v},$$

pri čemu veličine u i v zadovoljavaju uslove $u - v = q$, i $uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

Iz ovih uslova određuju se brojevi u i v, nakon čega se dobija rešenje kubne jednačine

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Primer. Razmotrimo jednačinu

$$x^3 + 6x = 20.$$

Tartaljin postupak polazi od pretpostavke da se rešenje može zapisati u obliku

$$x = u - v.$$

Zamenom u jednačinu dobija se

$$(u - v)^3 + 6(u - v) = 20.$$

Razvijanjem kuba binoma sledi

$$(u^3 - v^3) - (3uv - 6)(u - v) = 20.$$

Da bi izraz bio jednostavniji, bira se $u^3 - v^3 = 20$, i $3uv = 6$. Odavde se dobija sistem

$$u^3 - v^3 = 20,$$
$$u^3v^3 = 8,$$

iz kog sledi $u^3 = \sqrt{108} + 10$ i $v^3 = \sqrt{108} - 10$. Rešenje jednačine je

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

Iako izraz izgleda veoma složeno, lako se proverava da je $x = 2$. □

U ovom primeru jasno se vidi da formula može proizvesti veoma složen algebarski izraz, iako je konačno rešenje jednostavan ceo broj. Upravo zbog toga savremenici nisu odmah uočavali praktičnu vrednost nove metode. Upravo zbog toga matematičari XVI veka nisu uvek mogli lako da prepoznaju dobijeno rešenje.

Nekoliko godina kasnije Kardano je, zajedno sa svojim učenikom Ludovikom Ferarijem, proučavao rukopise Scipionea del Fera koji su se nalazili kod njegovog zeta u Bolonji. Pošto je ustanovio da je isti postupak bio poznat još pre Tartaljinog otkrića, smatrao je da više nije obavezan obećanjem o tajnosti. Zbog toga je 1545. godine objavio delo *Ars Magna*, u kojem su prvi put sistematski prikazane metode rešavanja kubnih i jednačina četvrtog stepena.

Iako je Kardano u knjizi jasno naveo da je Tartalja nezavisno pronašao postupak za rešavanje kubnih jednačina, objavljivanje metode bez njegove saglasnosti izazvalo je dugotrajan spor između dvojice matematičara. Tartalja je Kardana javno optuživao da je prekršio dato obećanje, dok je Kardano tvrdio da je metod prvobitno otkrio Del Fero i da zato nije bio vezan zakletvom. Ovaj spor ostao je jedan od najpoznatijih događaja u istoriji matematike.

Objavljivanjem *Ars Magna* po prvi put su široj naučnoj zajednici postali dostupni opšti postupci za rešavanje kubnih jednačina. Time je započela nova etapa u razvoju algebre, a formule koje se danas koriste za rešavanje depresovane kubne jednačine poznate su kao **Kardanove** ili **Kardano-Tartaljine formule**.

Kubne jednačine koje imaju tri realna rešenja bile su mnogo teže i izazovnije za rešavanje. U tim slučajevima Kardanova formula dovodi do izraza u kojima se pojavljuju kvadratni koreni negativnih brojeva, iako su sva konačna rešenja realna. Ovaj slučaj poznat je pod nazivom *casus irreducibilis* (nesvodljivi slučaj) i predstavlja jedan od razloga zbog kojih su matematičari počeli ozbiljnije da razmatraju kompleksne brojeve. Njihovo potpuno prihvatanje usledиće tek nekoliko decenija kasnije, zahvaljujući radovima Rafaela Bombelija[24].

[24] Rafael Bombelli (1526-1572), italijanski matematičar, autor dela *L'Algebra* i jedan od prvih matematičara koji je sistematski razvio račun sa kompleksnim brojevima.

5.3 Ferari i jednačine četvrtog stepena

Dok je rešavanje kubnih jednačina predstavljalo najveći problem prve polovine XVI veka, ubrzo se postavilo pitanje da li je moguće pronaći opšti postupak i za jednačine četvrtog stepena. Rešenje ovog problema pronašao je Ludoviko Ferari, učenik Đerolama Kardana.

Slika 5.3: Ludoviko Ferari

Ferari je do svog otkrića došao proučavajući problem koji je Đovani Koli[25] uputio Kardanu. Nakon odgovarajućih transformacija taj problem doveo je do jednačine četvrtog stepena

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x.$$

Za razliku od kubnih jednačina, kod kojih je bilo potrebno pronaći novu ideju, Ferari je iskoristio postupke razvijene prilikom rešavanja kvadratnih i kubnih jednačina. Njegova osnovna zamisao bila je da se jednačina četvrtog stepena dopuni tako da leva strana postane potpun kvadrat.

Polazeći od jednačine

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x,$$

leva strana može se zapisati u obliku $(x^2 + 6)^2$. Ferari zatim uvodi novi parametar y i na obe strane jednačine dodaje odgovarajući izraz kako bi i desna strana postala potpun kvadrat. Time jednačina dobija oblik

$$(x^2 + 6 + y)^2 = (2y + 6)x^2 + 60x + (12y + y^2).$$

Da bi desna strana zaista predstavljala kvadrat, parametar y mora zadovoljiti posebnu kubnu jednačinu

$$y^3 + 15y^2 + 36y = 450.$$

Uvođenjem smene

$$y = z - 5$$

[25] Giovanni Colla (XVI vek), italijanski matematičar poznat po problemu koji je podstakao Ludovika Ferarija da razvije opštu metodu za rešavanje jednačina četvrtog stepena.

dobija se depresovana kubna jednačina

$$z^3 - 39z - 380 = 0,$$

koja se rešava primenom Kardanove formule. Dobijena jednačina predstavlja razrešavajuću kubnu jednačinu, čije rešenje omogućava određivanje parametra y, a samim tim i rešavanje početne jednačine četvrtog stepena. Kada se odredi vrednost parametra y, prvobitna jednačina četvrtog stepena svodi se na dve kvadratne jednačine, koje se zatim rešavaju već poznatim postupcima.

Ferarijeva metoda pokazuje da se rešavanje jednačina četvrtog stepena može svesti na rešavanje jedne kubne i dve kvadratne jednačine. Time je problem četvrtog stepena postao rešiv primenom već razvijenih metoda za niže stepene.

Objavljivanjem Ferarijevog postupka u Kardanovom delu *Ars Magna* 1545. godine prvi put je dat opšti metod za rešavanje jednačina četvrtog stepena. Time je zaokružen razvoj algebarskih metoda za rešavanje jednačina do četvrtog stepena, dok će pitanje rešivosti jednačina petog i viših stepena ostati otvoreno još gotovo tri veka.

Otkrivanjem metoda za rešavanje kubnih i jednačina četvrtog stepena završeno je viševekovno traganje za opštim formulama za algebarske jednačine do četvrtog stepena. Ova otkrića predstavljala su vrhunac renesansne algebre i otvorila su nova pitanja o mogućnosti rešavanja jednačina viših stepena. Upravo će pokušaji rešavanja jednačina petog stepena dovesti do razvoja potpuno novih oblasti matematike, koje će kulminirati radovima Lagranža, Abela i Galoe u XVIII i XIX veku.

Glava 6

Nastanak simboličke algebre

Renesansa je donela opšte postupke za rešavanje jednačina trećeg i četvrtog stepena, ali način njihovog zapisivanja još uvek nije bio prilagođen složenijim matematičkim razmatranjima. Većina matematičara koristila je retoričku ili skraćenu retoričku algebru, pri čemu su se računski postupci opisivali rečima, bez jedinstvenog sistema oznaka. Takav način zapisivanja bio je dug i nepregledan, što je otežavalo razvoj novih metoda.

Tokom XVI i XVII veka dolazi do jedne od najznačajnijih promena u istoriji matematike - nastanka simboličke algebre. Umesto opisivanja postupaka rečima, matematičari uvode oznake za nepoznate veličine, koeficijente, stepene i računske operacije. Time algebra postaje univerzalan jezik matematike, nezavisan od govornog jezika i mnogo pogodniji za izvođenje opštih rezultata.

Najveći doprinos ovom razvoju dali su Fransoa Vijet[26], koji je prvi sistematski uveo slovne oznake za poznate i nepoznate veličine, i Rene Dekart, koji je uspostavio savremeni način označavanja promenljivih i povezao algebru sa geometrijom stvaranjem analitičke geometrije. Njihovi radovi predstavljali su temelj daljeg razvoja teorije jednačina i moderne algebre.

Slika 6.1: Fransoa Vijet

[26]François Viète (1540-1603), francuski matematičar i pravnik, utemeljivač simboličke algebre.

6.1 Vijetova simbolika

Do kraja XVI veka algebra je i dalje bila uglavnom retorička. Matematičari su jednačine zapisivali rečima ili uz ograničenu upotrebu skraćenica, zbog čega su računi bili dugi, nepregledni i teški za uopštavanje. Iako su italijanski matematičari razvili postupke za rešavanje kubnih i jednačina četvrtog stepena, njihovi dokazi i računi i dalje su bili zapisani gotovo isključivo opisnim jezikom.

Prekretnicu u razvoju algebre predstavlja rad francuskog matematičara Fransoa Vijeta. Njegovo najznačajnije delo, *In artem analyticem isagoge*, objavljeno 1591. godine, označilo je početak simboličke algebre. Vijet je prvi sistematski uveo oznake slovima za matematičke veličine, čime je omogućio da se jednačine i njihove osobine proučavaju u opštem obliku, nezavisno od konkretnih brojčanih vrednosti.

Za razliku od svojih prethodnika, koji su svaku jednačinu rešavali za određene brojeve, Vijet je posmatrao jednačine kao opšte matematičke objekte. Time je algebra postala nauka o odnosima među veličinama, a ne samo skup postupaka za rešavanje pojedinačnih problema.

Pre pojave simboličke algebre matematičari su koristili različite načine zapisivanja jednačina. Tokom više od hiljadu godina razvila su se tri osnovna oblika algebarskog zapisa: retorička algebra, sinkopirana algebra i simbolička algebra.

Razvoj algebre tokom renesanse doveo je do potrebe za univerzalnim matematičkim jezikom. Rešavanje kubnih i jednačina četvrtog stepena pokazalo je da opisni način zapisivanja postaje sve nepregledniji kako se povećava složenost problema. Zbog toga se javila potreba za sistemom oznaka koji bi omogućio zapisivanje opštih jednačina i izvođenje računskih postupaka bez oslanjanja na tekstualna objašnjenja.

Takav sistem razvio je Fransoa Vijet krajem XVI veka. Njegov rad predstavlja prelaz sa retoričke na simboličku algebru i označava početak savremenog načina zapisivanja matematičkih izraza. Uvođenjem slovnih oznaka za poznate i nepoznate veličine algebra je postala opšta teorija jednačina, a ne samo skup postupaka za rešavanje pojedinačnih numeričkih problema. Vijet je predložio da samoglasnici označavaju nepoznate veličine (A, E, I, O, U), dok se suglasnicima označavaju poznate veličine i koeficijenti. Na taj način prvi put je postalo moguće zapisivati jednačine u opštem obliku, nezavisno od konkretnih brojčanih vrednosti.

Na primer, kvadratna jednačina mogla se zapisati u obliku

$$BA^2 + CA + D = 0,$$

gde su B, C i D poznate veličine, a A nepoznata.

Iako je uveo slovne oznake, Vijet još uvek nije koristio savremeni zapis stepena. Umesto oznake A^2 pisao je *A quadratus*, dok je treći stepen označavao izrazom *A cubus*. Zbog toga njegova simbolika predstavlja prelaz između retoričke i savremene simboličke algebre.

Vijet je koristio tadašnje oznake za računske operacije, ali savremeni simboli za stepene i jednakost još uvek nisu bili potpuno usvojeni. Svoju metodu je nazivao analitičkom veštinom (*ars analytica*), smatrajući da rešavanje problema treba da se zasniva na analizi i sintezi. Upravo će Dekart nekoliko decenija kasnije ovu ideju povezati sa geometrijom i razviti analitičku geometriju.

6.1.1 Razvoj algebre kod Vijeta

Vijetov doprinos razvoju algebre nije se ogledao samo u uvođenju slovnih oznaka za poznate i nepoznate veličine. Njegova najveća novina bila je u tome što je algebru počeo da posmatra kao opštu metodu rešavanja matematičkih problema, nezavisnu od konkretnih brojčanih vrednosti. Time je pažnja matematičara prvi put usmerena sa pojedinačnih primera na opšta svojstva jednačina.

Pre Vijeta većina algebarskih postupaka bila je vezana za određene numeričke zadatke. Jednačine su se rešavale za unapred zadate koeficijente, pa je svaki novi problem zahtevao poseban račun. Uvođenjem slovnih oznaka postalo je moguće istovremeno proučavati čitavu klasu jednačina istog oblika. Na primer, umesto rešavanja jednačine $x^2+10x = 39$, mogla se razmatrati opšta kvadratna jednačina $Ax^2 + Bx + C = 0$, pri čemu su A, B i C predstavljali proizvoljne poznate veličine.

Na taj način algebra je dobila mogućnost da formuliše opšta pravila koja važe za sve jednačine istog tipa. Ovakav pristup predstavljao je značajan odmak od dotadašnje tradicije, u kojoj su matematičari uglavnom rešavali pojedinačne probleme bez pokušaja da izvedu opštije zakonitosti.

Vijet je posebnu pažnju posvetio odnosima između koeficijenata jednačine i njenih rešenja. Posmatrajući kvadratnu jednačinu sa dva korena, uočio je da zbir i proizvod korena mogu da se izraze pomoću koeficijenata jednačine. Ove relacije danas su poznate kao Vijetove formule i predstavljaju jedno od osnovnih svojstava polinoma. Posmatrajmo kvadratnu jednačinu

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

čiji su koreni x_1 i x_2. Tada važi

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{i} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ove formule omogućavaju određivanje zbira i proizvoda korena bez njihovog neposrednog izračunavanja, ali i formiranje jednačine kada su koreni unapred poznati. Time je uspostavljena čvrsta veza između koeficijenata polinoma i njegovih rešenja.

Vijetove ideje imale su veliki uticaj na dalji razvoj algebre. Njegov simbolički zapis prihvatili su brojni matematičari XVII veka, među kojima posebno mesto zauzima Rene Dekart. Zahvaljujući ovakvom načinu zapisivanja postalo je moguće razvijati opšte teorije polinoma, proučavati osobine jednačina različitih stepena i povezati algebru sa geometrijom, što će dovesti do nastanka analitičke geometrije.

6.2 Dekart i analitička geometrija

Rad Fransoa Vijeta omogućio je da algebra dobije opšti simbolički zapis, ali je tek Rene Dekart[27] pokazao koliko takav način zapisivanja može biti moćan. U svom delu *La Géométrie*, objavljenom 1637. godine kao dodatak raspravi *Discours de la méthode*, Dekart je povezao algebru i geometriju u jedinstvenu matematičku celinu. Time je postavio temelje analitičke geometrije i otvorio novi pravac u razvoju matematike.

Pre Dekarta algebra i geometrija razvijale su se uglavnom kao odvojene discipline. Geometrijski problemi rešavali su se konstrukcijama i dokazima, dok su algebarski problemi bili usmereni

[27] René Descartes (1596-1650), francuski matematičar, filozof i fizičar, utemeljivač analitičke geometrije.

na računanje i rešavanje jednačina. Dekart je pokazao da se geometrijske figure mogu opisati jednačinama, a da se algebarske jednačine mogu tumačiti geometrijski. Na taj način uspostavljena je veza između brojeva i tačaka u ravni, koja predstavlja osnovnu ideju analitičke geometrije.

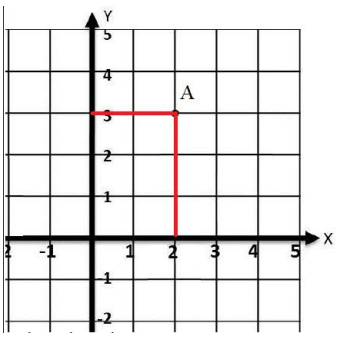
Slika 6.2: Rene Dekart

Pored povezivanja algebre i geometrije, Dekart je unapredio i matematičku notaciju. Učvrstio je praksu da se poslednja slova latinske azbuke (x, y, z) koriste za nepoznate veličine, dok se prva slova (a, b, c) koriste za poznate veličine i koeficijente. Takođe je popularizovao savremeni način zapisivanja stepena koji je ubrzo postao opšteprihvaćen u matematici, pa su izrazi poput x^2 i x^3 postali standardni matematički zapis. Zahvaljujući tome simbolička algebra dobila je oblik koji je, uz manje izmene, zadržan do danas.

6.2.1 Nastanak analitičke geometrije

Osnovna ideja analitičke geometrije sastoji se u tome da se položaj svake tačke u ravni određuje pomoću uređenog para brojeva. Uvođenjem dve međusobno normalne ose svakoj tački mogu se pridružiti njene koordinate, čime geometrijski problemi postaju algebarski, a algebarski problemi dobijaju geometrijsku interpretaciju.

Na ovaj način svakoj tački ravni pridružuje se uređeni par realnih brojeva (x, y). Prva koordinata određuje položaj tačke u horizontalnom, a druga u vertikalnom pravcu. Time je omogućeno da se geometrijske figure opisuju jednačinama koje povezuju koordinate njihovih tačaka.



Slika 6.3: Dekartov koordinatni sistem

Jedan od najjednostavnijih primera jeste prava. Umesto geometrijske konstrukcije, prava se može predstaviti jednačinom prvog stepena $ax + by + c = 0$, gde su a, b i c realni brojevi, pri čemu a i b nisu istovremeno jednaki nuli. Svaka tačka čije koordinate zadovoljavaju ovu jednačinu pripada datoj pravoj, dok tačke koje je ne zadovoljavaju leže izvan nje.

Na sličan način i druge geometrijske figure mogu se opisati algebarskim jednačinama. Na primer, kružnica sa centrom u tački (a, b) i poluprečnikom r određena je jednačinom

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

dok se parabola, elipsa i hiperbola predstavljaju odgovarajućim jednačinama drugog stepena.

Time je prvi put uspostavljena neposredna veza između geometrije i algebre. Umesto zasebnog proučavanja geometrijskih konstrukcija i algebarskih izraza, iste matematičke probleme bilo je moguće rešavati korišćenjem obe discipline. Ovakav pristup otvorio je put razvoju diferencijalnog i integralnog računa, teorije funkcija i brojnih drugih oblasti moderne matematike.

Dekartovo povezivanje algebre i geometrije predstavljalo je jednu od najvažnijih promena u razvoju matematike XVII veka. Zahvaljujući analitičkoj geometriji, jednačine više nisu posmatrane samo kao računski problemi čiji je cilj određivanje nepoznate veličine, već i kao geometrijski objekti čija se svojstva mogu proučavati pomoću krivih koje predstavljaju njihova rešenja.

Ovakav pristup omogućio je da se osobine jednačina analiziraju na potpuno nov način. Broj rešenja mogao se povezati sa brojem preseka odgovarajuće krive sa koordinatnim osama ili drugim geometrijskim figurama, dok su promene koeficijenata jednačine neposredno uticale na oblik i položaj krive u ravni. Time je proučavanje jednačina dobilo geometrijsku interpretaciju koja je često bila jednostavnija od čistog algebarskog računa.

Analitička geometrija imala je značajan uticaj i na razvoj drugih matematičkih oblasti. Na njenim temeljima Isak Njutn i Gotfrid Vilhelm Lajbnic[28] razvili su diferencijalni i integralni račun, dok su kasniji matematičari koristili Dekartove ideje u proučavanju funkcija, diferencijalnih jednačina i geometrije krivih. Istovremeno, simbolički zapis koji su razvili Vijet i Dekart postao je standard u matematici i zadržao se, uz manje izmene, do danas.

Na taj način algebra je tokom XVI i XVII veka prošla put od retoričkog opisivanja pojedinačnih problema do opšte simboličke teorije jednačina. Ovaj razvoj stvorio je osnovu za dalja istraživanja polinoma i njihovih korena, koja će tokom XVII i XVIII veka dovesti do nastanka savremene teorije jednačina.

6.3 Razvoj teorije jednačina

Tokom XVII veka pažnja matematičara postepeno se pomera sa pronalaženja formula za rešavanje pojedinih tipova jednačina na proučavanje njihovih opštih osobina. Nakon što su pronađeni postupci za rešavanje jednačina drugog, trećeg i četvrtog stepena, prirodno se postavilo pitanje koliko rešenja jednačina može imati, kako su ta rešenja povezana sa koeficijentima polinoma i da li postoje opšti postupci za rešavanje jednačina proizvoljnog stepena.

Razvoju teorije jednačina značajno je doprineo engleski matematičar Tomas Hariot[29]. On je među prvima dosledno zapisivao jednačine u obliku $P(x) = 0$, što je omogućilo jedinstven

[28] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), nemački matematičar, filozof i diplomata, nezavisno od Njutna razvio diferencijalni i integralni račun i uveo deo savremene matematičke notacije.

[29] Thomas Harriot (1560-1621), engleski matematičar, astronom i prirodnjak, jedan od prvih autora koji je sistematski proučavao polinome i njihove korene.

pristup proučavanju jednačina različitog stepena. Hariot je takođe uočio da se polinom može rastaviti na činioce koji odgovaraju njegovim korenima, pa je zapis

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

postao prirodan način predstavljanja polinoma. Ovakav zapis jasno pokazuje da su koreni polinoma upravo nule njegovih linearnih činilaca, što predstavlja osnovu savremene teorije polinoma.

Važan korak načinio je Albert Žirar[30], koji je prvi jasno izneo tvrdnju da jednačina stepena n ima tačno n korena, ukoliko se dozvole i kompleksni brojevi, pri čemu se višestruki koreni računaju odgovarajući broj puta. Iako u njegovo vreme još nije postojala stroga matematička teorija kompleksnih brojeva, ova ideja predstavljala je preteču Osnovne teoreme algebre, koja će biti potpuno dokazana tek početkom XIX veka.

Rene Dekart dao je još jedan značajan doprinos proučavanju jednačina formulisanjem pravila znakova. Posmatrajući raspored pozitivnih i negativnih koeficijenata polinoma, pokazao je da se može proceniti najveći mogući broj pozitivnih i negativnih realnih korena jednačine. Ovo pravilo, danas poznato kao Dekartovo pravilo znakova, omogućilo je kvalitativnu analizu jednačina i pre određivanja njihovih tačnih rešenja.

Krajem XVII veka Isak Njutn razvio je numerički postupak za približno određivanje korena jednačina. Za razliku od prethodnih matematičara, koji su tragali za tačnim formulama, Njutn je pokazao da se koreni mogu veoma precizno aproksimirati ponavljanjem jednostavnog algoritma. Njegova metoda zasniva se na iterativnom postupku

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

koji se i danas koristi u numeričkoj matematici.

Tokom XVII veka teorija jednačina tako je dobila sasvim novi karakter. Umesto traganja za pojedinačnim formulama, matematičari su počeli da proučavaju opšte osobine polinoma, raspored njihovih korena i veze između korena i koeficijenata. Time je proučavanje jednačina prešlo sa traženja pojedinačnih formula na istraživanje njihove unutrašnje strukture. Upravo će taj novi način razmišljanja omogućiti Lagranžu, a zatim i Abelu i Galoi, da pokažu zbog čega opšta jednačina petog stepena nije rešiva pomoću radikala.

[30] Albert Girard (1595-1632), francusko-holandski matematičar.

Glava 7

Granice klasičnih metoda

Razvoj algebre tokom XVI i XVII veka doveo je do otkrića opštih formula za rešavanje jednačina trećeg i četvrtog stepena. Ovi postupci zasnivali su se na primeni osnovnih računskih operacija i izvlačenju korena različitog stepena. Takav način rešavanja naziva se *rešavanje radikalima*.

Pod radikalima se podrazumevaju izrazi koji, pored sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja, sadrže i operacije izvlačenja kvadratnog, kubnog ili korena višeg reda. Na primer,

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

predstavlja rešenje kvadratne jednačine izraženo pomoću radikala, dok su i Kardanove formule za kubne jednačine zasnovane na istom principu, jer sadrže kvadratne i kubne korene.

Prirodno se postavilo pitanje da li je moguće pronaći sličnu formulu za jednačine petog i viših stepena. Matematičari su više od dva veka pokušavali da dođu do takvog rešenja, verujući da je dovoljno pronaći odgovarajuću transformaciju jednačine. Međutim, tokom XIX veka pokazalo se da problem nije u nedostatku odgovarajuće formule, već u tome što ona u opštem slučaju ne može da postoji. Ovo saznanje predstavljalo je jednu od najvećih prekretnica u istoriji algebre i otvorilo je put razvoju moderne matematičke teorije jednačina.

7.1 Abelova nemogućnost rešavanja opšte jednačine petog stepena radikalima

Prekretnicu u istoriji algebre predstavlja rad norveškog matematičara Nilsa Henrika Abela[31]. Abel je bio jedan od najznačajnijih matematičara XIX veka. Pored rezultata iz teorije jednačina, ostvario je značajne doprinose teoriji eliptičkih funkcija i matematičkoj analizi. Njegovo ime danas nose brojni matematički pojmovi, među kojima su Abelove grupe, Abelove funkcije i prestižna Abelova nagrada.

Godine 1824. Abel je o sopstvenom trošku objavio rad na francuskom jeziku u kojem je izneo dokaz da opšta jednačina petog stepena nije rešiva radikalima. Dve godine kasnije objavio je proširenu i potpuniju verziju dokaza u časopisu *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Krelov časopis).

[31] Niels Henrik Abel (1802-1829), norveški matematičar.

Slika 7.1: Nils Abel

Za razliku od svojih prethodnika, koji su pokušavali da pronađu novu formulu za rešavanje jednačina petog stepena, Abel je postavio sasvim drugačije pitanje: da li takva formula uopšte može da postoji? Njegov pristup predstavljao je potpuno novu ideju u matematici. Umesto traganja za postupkom rešavanja, on je dokazivao nemogućnost postojanja univerzalnog postupka. Polazeći od opšte jednačine petog stepena

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

Abel je pretpostavio da se njena rešenja mogu izraziti pomoću konačnog broja računskih operacija i uzastopnog izvlačenja korena, odnosno radikala. Analizirajući strukturu takvih izraza pokazao je da ova pretpostavka vodi do protivrečnosti. Iz toga je zaključio da ne postoji opšta formula koja bi, slično kvadratnoj, Kardanovoj ili Ferarijevoj formuli, rešavala svaku jednačinu petog stepena.

Važno je naglasiti da Abel nije dokazao da se nijedna jednačina petog stepena ne može rešiti radikalima. Naprotiv, postoje mnoge pojedinačne jednačine petog i viših stepena koje imaju takva rešenja. Njegov rezultat odnosi se isključivo na opštu jednačinu petog stepena, odnosno na činjenicu da ne postoji jedinstvena formula koja bi važila za sve moguće koeficijente.

Abel je neposredno pred kraj života proučavao i posebne klase jednačina koje ipak jesu rešive radikalima. Pokazao je da se određene jednačine mogu rešiti kada između njihovih korena postoje posebni simetrični odnosi. Ovi rezultati predstavljali su važan korak ka novoj teoriji koju će nekoliko godina kasnije razviti Evarist Galoa.

Abelov dokaz označio je kraj viševekovne potrage za formulom za rešavanje opšte jednačine petog stepena. Istovremeno, otvorio je potpuno novo poglavlje u istoriji matematike. Umesto traženja novih formula, matematičari su počeli da istražuju pod kojim uslovima jednačina može biti rešiva, čime je postavljen temelj moderne teorije jednačina i kasnije Galoine teorije.

7.1.1 Pojava teorije grupa

Nakon Abelovog dokaza postalo je jasno da problem rešavanja jednačina ne može biti prevaziđen pronalaženjem novih formula. Pažnja matematičara usmerena je ka proučavanju strukture samih jednačina i odnosa između njihovih korena. Pokazalo se da je za razumevanje rešavanja jednačina potrebno proučiti simetrije koje postoje među njihovim rešenjima.

Ideja simetrije u matematici pojavila se mnogo pre XIX veka, naročito u geometriji, gde su proučavana preslikavanja koja ostavljaju geometrijske figure nepromenjenim. Međutim, tek u istraživanjima algebarskih jednačina simetrije dobijaju potpuno novo značenje. Posmatrane su permutacije korena koje ne menjaju algebarske odnose između njih. Upravo ovakvi skupovi permutacija postali su osnova za razvoj teorije grupa.

Grupa predstavlja skup elemenata zajedno sa jednom binarnom operacijom koja zadovoljava četiri osnovna aksioma: zatvorenost, asocijativnost, postojanje neutralnog elementa i postojanje inverznog elementa za svaki element grupe. Iako će formalna aksiomatska definicija biti uvedena tek krajem XIX veka, njeni temelji nastaju upravo u proučavanju permutacija korena algebarskih jednačina.

Definicija 7.1 *Neka je G neprazan skup sa binarnom operacijom $*$. Par $(G, *)$ naziva se* grupa *ako važe sledeći uslovi:*

1. *za svaka $a, b \in G$ važi $a * b \in G$;*
2. *za svaka $a, b, c \in G$ važi $(a * b) * c = a * (b * c)$;*
3. *postoji element $e \in G$ takav da je $a * e = e * a = a$, $\forall a \in G$;*
4. *za svako $a \in G$ postoji element $a^{-1} \in G$ za koji $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.*

Kod algebarskih jednačina elementi grupe nisu brojevi, već permutacije korena jednačine. Ako se koreni međusobno zamene na način koji ne menja algebarske odnose između njih, dobija se nova permutacija. Skup svih takvih permutacija zajedno sa operacijom kompozicije čini grupu, koja se danas naziva Galoina grupa jednačine.

Pokazalo se da upravo osobine ove grupe određuju da li se jednačina može rešiti pomoću radikala. Na taj način problem rešavanja jednačina, koji je vekovima bio čisto algebarski, postao je problem proučavanja grupa i njihovih svojstava.

7.2 Galoa i teorija grupa

Nakon Abelovog dokaza da opšta jednačina petog stepena nije rešiva radikalima, ostalo je otvoreno pitanje zbog čega je to tako. Odgovor na ovo pitanje dao je francuski matematičar Evarist Galoa[32], čiji je rad postavio temelje savremene teorije grupa i potpuno promenio način posmatranja algebarskih jednačina.

Galoa je još kao veoma mlad počeo da proučava problem rešivosti jednačina. Već 1829. godine Akademiji nauka u Parizu predao je rukopis u kome je izložio svoje rezultate, ali je on izgubljen. Slična sudbina zadesila je i narednu verziju rada. Tek treći rukopis dospeo je pred komisiju Akademije, ali je ocenjen kao previše sažet i težak za razumevanje, pa nije bio objavljen. Galoa nije dočekao priznanje za svoje ideje – poginuo je 1832. godine u dvoboju, u dvadeset prvoj godini života.

[32] Évariste Galois (1811-1832), francuski matematičar.

Noć uoči dvoboja proveo je zapisajući svoje najvažnije matematičke rezultate u pismu prijatelju Ogistu Ševaljeu. U tom pismu izložio je osnovne ideje nove teorije i zamolio da se njegovi radovi sačuvaju i proslede vodećim matematičarima toga doba. Tek 1846. godine Žozef Liuvil objavio je Galoine rukopise, nakon čega je postalo jasno koliki značaj imaju njegova otkrića.

Slika 7.2: Evarist Galoa

Za razliku od svojih prethodnika, Galoa nije pokušavao da pronađe novu formulu za rešavanje jednačina. Umesto toga, proučavao je odnose između njihovih korena. Primetio je da se koreni mogu međusobno permutovati, odnosno zamenjivati, pri čemu određene permutacije ne menjaju algebarske relacije koje između njih postoje. Skup svih takvih permutacija poseduje posebnu algebarsku strukturu, koja danas nosi naziv Galoina grupa jednačina.

Na taj način problem rešavanja jednačina pretvoren je u problem proučavanja osobina odgovarajuće grupe. Galoa je pokazao da mogućnost rešavanja jednačine radikalima ne zavisi od njenog stepena, već od strukture Galoine grupe koja joj odgovara.

Njegov najznačajniji rezultat može se formulisati na sledeći način.

Teorema 7.2 *Algebarska jednačina rešiva je radikalima ako i samo ako je njena Galoina grupa rešiva.*

Ovim rezultatom konačno je objašnjeno zbog čega postoje formule za rešavanje jednačina drugog, trećeg i četvrtog stepena, dok opšta jednačina petog stepena nema rešenje izraženo pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija i vađenja korena. Problem koji je vekovima bio posmatran kao pitanje pronalaženja novih formula dobio je potpuno novo objašnjenje kroz osobine grupa permutacija korena.

Galoina teorija označila je početak moderne apstraktne algebre. Iz nje su se razvile teorija grupa, teorija polja i savremena algebra, koje danas imaju značajnu primenu ne samo u matematici već i u fizici, informatici, teoriji kodiranja i kriptografiji.

7.2.1 Rešive grupe i rešavanje jednačina

Galoa je pokazao da se pitanje rešavanja algebarske jednačine može prevesti na proučavanje osobina grupe permutacija njenih korena. Na taj način problem, koji se vekovima svodio na traženje novih formula, dobio je potpuno drugačije objašnjenje.

Ključni pojam u ovoj teoriji jeste rešiva grupa. Intuitivno posmatrano, rešiva grupa je grupa koja se može rastaviti na niz sve jednostavnijih podgrupa, pri čemu je svaki naredni korak dovoljno jednostavan da odgovara uvođenju jednog radikala (korena) u procesu rešavanja jednačine.

Preciznije, grupa G naziva se rešivom ako postoji niz podgrupa

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_n = \{e\}$$

pri čemu je svaka podgrupa G_{i+1} normalna u G_i, a količnička grupa G_i/G_{i+1} komutativna (abelova).

Ovakav niz omogućava da se složena grupa postepeno razlaže na jednostavnije delove. Svaki korak u ovoj razgradnji odgovara jednom koraku u procesu rešavanja jednačine pomoću radikala. Zbog toga je rešivost grupe neposredno povezana sa mogućnošću da se odgovarajuća jednačina reši uzastopnim vađenjem korena.

Kod opšte jednačine petog stepena situacija je drugačija. Njena Galoina grupa jeste simetrična grupa S_5, odnosno grupa svih permutacija pet korena jednačine, koja nije rešiva. Zbog toga ne postoji postupak kojim bi se koreni ove jednačine mogli izraziti pomoću konačnog broja sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i vađenja korena.

Nasuprot tome, Galoine grupe opštih jednačina drugog, trećeg i četvrtog stepena jesu rešive, što objašnjava zašto postoje formule za njihovo rešavanje. Time je konačno razjašnjena razlika između jednačina četvrtog i petog stepena, koja je više od tri veka predstavljala jedno od najvažnijih pitanja algebre.

Galoina teorija nije samo rešila problem jednačina višeg stepena, već je označila početak moderne apstraktne algebre. Pojmovi grupa, polja i njihovih međusobnih veza postali su osnovni alati savremene matematike, a njihova primena danas obuhvata oblasti kao što su teorija brojeva, geometrija, kriptografija, teorija kodiranja i kvantna fizika.

7.3 Novi pogled na problem rešavanja jednačina

Posledica Galoine teorije bila je promena načina na koji se posmatraju algebarske jednačine. Do tada su matematičari nastojali da pronađu postupak kojim bi se izračunale vrednosti svih korena jednačine. Galoa je pokazao da se mnogo više može saznati proučavanjem odnosa između korena nego njihovim neposrednim određivanjem.

Posmatrajmo polinom

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6,$$

čiji su koreni brojevi 1, 2 i 3. Bez obzira na redosled u kome ih posmatramo, oni zadovoljavaju iste relacije određene koeficijentima polinoma. Na primer,

$$1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 11, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Promenom redosleda korena ove jednakosti ostaju nepromenjene. Upravo ovakve permutacije korena, koje čuvaju njihove algebarske odnose, predstavljaju osnovni predmet Galoine teorije.

Umesto da se proučavaju pojedinačni koreni, posmatra se skup svih njihovih dozvoljenih permutacija i način na koji su one međusobno povezane.

Na taj način rešavanje jednačina postalo je povezano sa proučavanjem simetrija. Pitanje „Kako odrediti korene?" zamenjeno je pitanjem „Kakvu strukturu imaju njihove međusobne transformacije?". Pokazalo se da upravo osobine ove strukture određuju da li se koreni mogu izraziti pomoću radikala ili ne.

Ovakav pristup predstavljao je potpuno novu ideju u matematici. Umesto računanja konkretnih vrednosti, pažnja se usmerava na proučavanje algebarskih struktura koje opisuju ponašanje jednačina. Time su postavljeni temelji modernog strukturnog pristupa matematici, u kome se različiti matematički objekti proučavaju preko njihovih unutrašnjih osobina i međusobnih veza, a ne samo preko numeričkih rezultata koje daju.

Tokom druge polovine XIX veka i početkom XX veka razvijaju se teorija grupa, teorija prstenova i teorija polja, koje zajedno čine osnovu savremene apstraktne algebre. U ovim oblastima jednačine više nisu predstavljale samo računarske probleme, već su postale sredstvo za proučavanje opštih matematičkih struktura i njihovih svojstava.

Istovremeno, razvijale su se i druge grane matematike koje su bile povezane sa teorijom jednačina. Napredak u linearnoj algebri omogućio je sistematsko proučavanje sistema linearnih jednačina, dok su algebarska geometrija i teorija brojeva uspostavile duboke veze između polinoma, geometrijskih objekata i aritmetičkih osobina brojeva. Na taj način jednačine su postale zajednička osnova brojnih matematičkih disciplina.

Ovakav razvoj doveo je do promene u samom cilju matematičkih istraživanja. Umesto traganja za eksplicitnim formulama, sve veći značaj dobijaju pitanja klasifikacije matematičkih objekata, proučavanje njihovih simetrija, kao i razumevanje uslova pod kojima određeni problemi imaju rešenje. Ovakav strukturni pristup predstavlja jednu od osnovnih odlika moderne matematike.

Dalji razvoj računarske tehnike i numeričkih metoda dodatno je proširio mogućnosti rešavanja jednačina. Iako opšta formula za jednačine petog i višeg stepena ne postoji, savremeni algoritmi omogućavaju njihovo efikasno rešavanje numeričkim i simboličkim postupcima. Time se proučavanje jednačina prenelo iz okvira klasične algebre u širi kontekst savremene matematike i računarstva.

Na taj način završena je jedna velika etapa u istoriji algebre. Od prvih numeričkih postupaka drevnih civilizacija, preko geometrijskih konstrukcija i razvoja simboličke algebre, matematika je došla do apstraktnog proučavanja struktura koje određuju ponašanje jednačina. Upravo na tim temeljima razvila se savremena algebra, čiji će osnovni pojmovi i metode biti predstavljeni u narednom poglavlju.

Glava 8

Savremena algebra i računarske metode

Nakon radova Abela i Galoa algebra više nije bila usmerena isključivo na rešavanje jednačina. Tokom druge polovine XIX i početkom XX veka razvijene su nove matematičke discipline koje proučavaju opšte algebarske strukture, njihove osobine i međusobne veze. Na taj način nastala je savremena apstraktna algebra, koja danas predstavlja jednu od osnovnih oblasti moderne matematike.

Istovremeno, razvoj računarske tehnike omogućio je primenu novih numeričkih i simboličkih metoda za rešavanje jednačina. Problemi koji su nekada zahtevali dugotrajna ručna računanja danas se rešavaju pomoću specijalizovanih računarskih sistema za simboličke i numeričke proračune. Savremena algebra zato predstavlja spoj teorijskih rezultata i računarskih metoda, sa primenama u gotovo svim oblastima nauke i tehnike.

8.1 Apstraktna algebra

Apstraktna algebra predstavlja oblast matematike koja proučava opšte algebarske strukture i njihove osobine. Za razliku od elementarne algebre, koja se bavi konkretnim brojevima i jednačinama, apstraktna algebra istražuje skupove elemenata zajedno sa operacijama definisanim na njima. Takav pristup omogućava da se jedinstvenim metodama proučavaju različiti matematički objekti.

Najznačajnije strukture savremene algebre jesu grupe, prstenovi, polja i vektorski prostori. Iako su nastale iz proučavanja različitih matematičkih problema, danas predstavljaju zajednički jezik gotovo svih oblasti matematike. Grupe predstavljaju najjednostavnije apstraktne algebarske strukture. One opisuju simetrije i transformacije objekata i važne su u teoriji jednačina, geometriji, teoriji brojeva i fizici. Danas se grupe koriste u proučavanju simetrija kristala, kvantne mehanike, kriptografije i teorije kodiranja.

Prsten predstavlja algebarsku strukturu u kojoj su definisane dve operacije, sabiranje i množenje. Skup celih brojeva predstavlja jedan od najpoznatijih primera prstena. Teorija prstenova razvila se iz proučavanja polinoma i teorije brojeva, a danas ima značajnu primenu u algebarskoj geometriji, teoriji kodova i računarskoj algebri.

Polja predstavljaju algebarske strukture u kojima su, osim sabiranja i množenja, moguće i operacije oduzimanja i deljenja (izuzev deljenja nulom). Skup racionalnih, realnih i kompleksnih

brojeva jesu primeri polja. Upravo su proširenja polja jedan od osnovnih pojmova Galoine teorije, jer omogućavaju proučavanje korena polinoma i njihovih međusobnih odnosa.

Vektorski prostori predstavljaju osnovni pojam linearne algebre. U njima se proučavaju vektori, linearne transformacije i sistemi linearnih jednačina. Ove strukture imaju izuzetno široku primenu u matematici, fizici, elektrotehnici, mašinstvu, obradi slike, mašinskom učenju i analizi podataka.

Iako su grupe, prstenovi, polja i vektorski prostori nastali iz različitih matematičkih problema, danas čine osnovu savremene algebre. Njihovo proučavanje omogućava jedinstveno razumevanje brojnih matematičkih pojava i predstavlja temelj mnogih savremenih naučnih disciplina.

8.2 Numeričke metode rešavanja jednačina

Tokom više hiljada godina razvoja algebre matematičari su nastojali da pronađu formule kojima bi se mogla rešiti svaka jednačina. Takav pristup bio je uspešan za jednačine prvog, drugog, trećeg i četvrtog stepena, dok su Abel i Galoa pokazali da za opštu jednačinu petog stepena takva formula ne postoji.

Međutim, u praktičnim problemima često nije potrebno odrediti tačno simboličko rešenje. Dovoljno je pronaći njegovu približnu vrednost sa željenom tačnošću. Razvojem računara numeričke metode postale su osnovni alat za rešavanje jednačina koje nije moguće rešiti elementarnim formulama ili čije bi simboličko rešenje bilo suviše složeno za praktičnu primenu.

Za razliku od klasičnih algebarskih metoda, numeričke metode ne daju tačan izraz za rešenje, već niz uzastopnih aproksimacija koje se sve više približavaju stvarnom korenu jednačine. Danas su ove metode sastavni deo gotovo svih naučnih i inženjerskih proračuna.

8.2.1 Metoda polovine intervala

Metoda polovine intervala (engl. *Bisection Method*) predstavlja jednu od najjednostavnijih i najpouzdanijih numeričkih metoda za određivanje realnog korena jednačine $f(x) = 0$, gde je f neprekidna funkcija. Pretpostavlja se da funkcija menja znak na intervalu $[a, b]$, odnosno da važi $f(a) \cdot f(b) < 0$. Prema teoremi o srednjoj vrednosti tada postoji najmanje jedno rešenje na tom intervalu.

U svakom koraku određuje se sredina intervala $c = \frac{a+b}{2}$, nakon čega se proverava u kom delu intervala funkcija menja znak. Novi interval postaje ili $[a, c]$ ili $[c, b]$. Ponavljanjem ovog postupka interval koji sadrži rešenje postaje sve manji, pa se dobija proizvoljno tačna aproksimacija korena.

Prednost ove metode jeste njena jednostavnost i sigurna konvergencija, dok je glavni nedostatak relativno spor dolazak do željene tačnosti.

8.2.2 Njutnova metoda

Njutnova metoda (Njutn-Rafsonova metoda) jedna je od najpoznatijih numeričkih metoda za rešavanje jednačina. Za razliku od metode polovine intervala, koristi izvod funkcije kako bi se odredila sve bolja aproksimacija rešenja.

Polazeći od početne pretpostavke x_0, naredna aproksimacija određuje se formulom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Geometrijski posmatrano, u svakoj iteraciji konstruiše se tangenta na graf funkcije u tački $(x_n, f(x_n))$, a njen presek sa x-osom uzima se kao nova aproksimacija rešenja.

Kada je početna aproksimacija dovoljno blizu korena, metoda veoma brzo konvergira i zato predstavlja jednu od najčešće korišćenih numeričkih metoda. Nedostatak metode jeste što zahteva poznavanje izvoda funkcije i što pri lošem izboru početne vrednosti može da ne konvergira.

8.2.3 Sekantna metoda

Sekantna metoda predstavlja modifikaciju Njutnove metode kod koje nije potrebno računati izvod funkcije. Umesto tangente koristi se sekanta određena pomoću dve prethodne aproksimacije.

Ako su poznate dve uzastopne aproksimacije x_{n-1} i x_n, naredna se određuje formulom

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Metoda obično konvergira nešto sporije od Njutnove metode, ali je pogodna kada je izvod funkcije teško izračunati ili nije poznat.

8.2.4 Primena numeričkih metoda

Numeričke metode danas predstavljaju standardni način rešavanja jednačina u nauci i tehnici. One se primenjuju kada ne postoji zatvorena formula za rešenje ili kada je simbolički izraz previše složen za praktičnu upotrebu. Na primer, jednačina $x = \cos x$ nema elementarno zatvoreno rešenje. Ipak, primenom numeričkih metoda lako se dobija približna vrednost $x \approx 0.739085$.

Razvoj računara omogućio je izvođenje miliona iteracija u veoma kratkom vremenu, zbog čega su numeričke metode postale nezaobilazan deo savremene matematike. One predstavljaju prirodan nastavak istorijskog razvoja rešavanja jednačina: umesto traganja za opštom formulom, savremena matematika prihvata približno rešenje koje se može dobiti proizvoljno velikom tačnošću.

8.3 Računarska algebra

Razvoj računara tokom druge polovine XX veka značajno je promenio način rešavanja matematičkih problema. Dok su se ranije složeni algebarski proračuni izvodili ručno, danas se veliki broj simboličkih i numeričkih postupaka obavlja pomoću specijalizovanih računarskih programa. Na taj način nastala je oblast poznata kao *računarska algebra* (engl. *Computer Algebra*).

Za razliku od numeričkih programa koji daju približne vrednosti rešenja, sistemi računarske algebre mogu da izvode simboličke transformacije izraza. Oni faktorišu polinome, rešavaju jednačine i sisteme jednačina, diferenciraju i integrale funkcije, pojednostavljuju algebarske izraze i rade sa matricama, vektorima i drugim matematičkim objektima. Time omogućavaju rešavanje problema koji bi ručnim računanjem bili veoma složeni ili vremenski zahtevni.

Programi namenjeni simboličkim matematičkim proračunima nazivaju se sistemi računarske algebre (engl. *Computer Algebra Systems* – CAS). Njihova osnovna karakteristika jeste mogućnost rada sa simbolima umesto isključivo sa numeričkim vrednostima. Tako, na primer, jednačina može biti rešena u opštem obliku, bez zadavanja konkretnih vrednosti koeficijenata.

Savremeni CAS sistemi omogućavaju rešavanje linearnih i nelinearnih jednačina, simboličko izvođenje i integraciju, faktorizaciju polinoma, rad sa matricama, diferencijalnim jednačinama i

mnogim drugim matematičkim objektima. Zbog toga predstavljaju važan alat u nastavi, naučnim istraživanjima i inženjerskoj praksi. Najpoznatiji sistemi računarske algebre su Mathematica, MATLAB i GeoGebra.

Jedna od najvažnijih mogućnosti sistema računarske algebre jeste simboličko rešavanje jednačina. Za razliku od numeričkih metoda, koje daju približne vrednosti korena, simbolički algoritmi nastoje da pronađu tačno rešenje u analitičkom obliku kada ono postoji. Na primer, kvadratna jednačina može biti rešena primenom poznate formule, dok sistemi računarske algebre za kubne i jednačine četvrtog stepena koriste Kardanove i Ferarijeve metode ili njihove savremene modifikacije. Za jednačine višeg stepena primenjuju se algoritmi za faktorizaciju polinoma, određivanje racionalnih korena, kao i numeričke metode kada zatvoreno rešenje nije moguće dobiti.

Savremeni CAS sistemi često kombinuju simboličke i numeričke metode. Najpre pokušavaju da pronađu tačno rešenje, a ukoliko ono ne postoji ili je previše složeno, automatski prelaze na numeričke algoritme. Ovakav pristup omogućava brzo i pouzdano rešavanje veoma složenih matematičkih problema.

Računarska algebra predstavlja spoj viševekovnog razvoja algebre i savremenih računarskih tehnologija. Metode koje su razvijali El Horezmi, Tartalja, Kardano, Ferari, Abel i Galoa danas su ugrađene u algoritme koji omogućavaju da se složeni matematički problemi rešavaju za nekoliko sekundi. Time je istorijski razvoj rešavanja jednačina dobio svoju savremenu računarsku dimenziju.

8.4 Primene u nauci i tehnici

Razvoj algebre tokom više od četiri hiljade godina nije doveo samo do novih metoda za rešavanje jednačina, već je stvorio matematički jezik kojim se danas opisuju gotovo sve oblasti prirodnih i tehničkih nauka. Pojmovi kao što su polinomi, matrice, vektori, grupe i polja postali su nezaobilazni alati u modelovanju stvarnih procesa, analizi podataka i razvoju savremenih tehnologija. Zahvaljujući razvoju računara, složeni algebarski modeli danas se mogu primenjivati na probleme koji bi još pre nekoliko decenija bili praktično nerešivi.

Primene u fizici

U fizici algebra predstavlja osnovni alat za formulisanje matematičkih modela prirodnih pojava. Kretanje tela, oscilacije, elektromagnetna polja i kvantni sistemi opisuju se jednačinama čije rešavanje zahteva primenu linearne algebre, diferencijalnih jednačina i numeričkih metoda. Matrice i vektorski prostori koriste se u kvantnoj mehanici, dok se sistemi linearnih jednačina koriste u analizi mehaničkih i električnih sistema.

Primene u elektrotehnici i mašinstvu

Elektrotehnika se u velikoj meri oslanja na algebarske metode. Analiza električnih kola zasniva se na rešavanju sistema linearnih jednačina koji nastaju primenom Kirhofovih zakona. Projektovanje energetskih mreža, upravljanje električnim mašinama, obrada digitalnih signala i telekomunikacioni sistemi koriste matrice, kompleksne brojeve i numeričke algoritme. Razvoj računarske tehnike omogućio je da se ovakvi sistemi rešavaju veoma brzo čak i kada sadrže hiljade nepoznatih.

U mašinstvu algebra se koristi u modelovanju konstrukcija, mehanizama i procesa prenosa sila. Numeričke metode koriste se pri analizi napona i deformacija, simulaciji rada motora, optimizaciji konstrukcija i projektovanju mašinskih elemenata. Posebno značajno mesto imaju metode konačnih elemenata, koje se zasnivaju na rešavanju veoma velikih sistema jednačina.

Primene u ekonomiji

Matematički modeli u ekonomiji predstavljaju vezu između algebre i društvenih nauka. Sistemi jednačina koriste se za analizu tržišta, određivanje ravnoteže ponude i tražnje, planiranje proizvodnje i optimizaciju poslovanja. Linearno programiranje omogućava pronalaženje optimalnih rešenja u problemima raspodele resursa, transporta i investicionog planiranja, dok se matrice koriste u analizama međuzavisnosti ekonomskih sektora.

Primene u kriptografiji

Jedna od savremenih primena apstraktne algebre nalazi se u kriptografiji. Bezbednost elektronske komunikacije, internet bankarstva i digitalnog potpisa zasniva se na osobinama modularne aritmetike, teorije brojeva i konačnih polja. Mnogi savremeni kriptografski algoritmi koriste algebarske strukture čije proučavanje vodi poreklo od Galoine teorije polja i grupa.

8.5 Primene u veštačkoj inteligenciji

Razvoj veštačke inteligencije poslednjih godina otvorio je nove mogućnosti u rešavanju matematičkih problema. Za razliku od klasičnih računarskih programa, kod kojih je postupak rešavanja unapred određen algoritmom, savremeni sistemi veštačke inteligencije mogu da prepoznaju obrasce u velikom broju podataka, pretražuju veliki prostor mogućih rešenja i predlažu nove postupke za rešavanje problema. Na taj način veštačka inteligencija ne zamenjuje klasične algebarske i numeričke metode, već ih dopunjuje novim načinima pretraživanja i otkrivanja matematičkih struktura.

Posebno značajnu vezu između veštačke inteligencije i jednačina predstavlja *simbolička regresija*. Kod uobičajenog problema rešavanja jednačina poznata je jednačina, dok je potrebno odrediti vrednost jedne ili više nepoznatih. Kod simboličke regresije problem je postavljen na drugačiji način: poznati su podaci, a potrebno je pronaći matematički izraz koji opisuje vezu između njih. Zbog toga se simbolička regresija može posmatrati kao postupak automatskog otkrivanja matematičkih zakonitosti.

Na primer, pretpostavimo da su poznati podaci $(1, 3)$, $(2, 8)$, $(3, 15)$, $(4, 24)$. Na osnovu njih može se uočiti pravilo $y = x^2 + 2x$. Dok čovek ovu vezu može pronaći analizom malog broja podataka, sistemi simboličke regresije pretražuju veliki broj mogućih izraza i pokušavaju da pronađu izraz koji istovremeno dobro opisuje podatke i ima relativno jednostavan matematički oblik. Savremeni pristupi simboličkoj regresiji koriste metode genetskog programiranja, neuronske mreže, duboko učenje i njihove kombinacije. Njihova značajna osobina jeste to što, za razliku od mnogih modela mašinskog učenja koji funkcionišu kao takozvane "crne kutije", mogu kao rezultat dati eksplicitnu i čoveku razumljivu matematičku formulu [10].

Primena veštačke inteligencije nije ograničena samo na pronalaženje jednačina iz podataka. Ona se koristi i za otkrivanje efikasnijih algoritama za izvođenje algebarskih operacija. Jedan od značajnih primera predstavlja sistem *AlphaTensor*, razvijen primenom dubokog podržanog učenja. Ovaj sistem je problem množenja matrica predstavio kao problem pretraživanja prostora mogućih algoritama. Rezultat istraživanja bio je pronalazak novih algoritama za množenje matrica koji su za određene dimenzije zahtevali manji broj skalarnih množenja od prethodno poznatih postupaka [1].

Posebno je zanimljiv rezultat za matrice dimenzije 4×4 nad poljem $\mathbb{Z}_2$. Dvostrukom primenom Strasenovog algoritma potrebno je $7^2 = 49$ skalarnih množenja, dok je AlphaTensor pronašao postupak koji isti problem rešava korišćenjem 47 množenja. Pored toga, pronađeni su

poboljšani algoritmi i za druge dimenzije matrica. Ovaj rezultat je značajan jer pokazuje da veštačka inteligencija može da pronađe matematičke algoritme koji prethodno nisu bili poznati. Matrične operacije imaju neposrednu primenu u rešavanju sistema linearnih jednačina, pa ovakva poboljšanja mogu imati značaj i za razvoj efikasnijih računarskih postupaka u linearnoj algebri.

Još jedan značajan korak u ovom pravcu predstavlja sistem *AlphaEvolve*. Za razliku od sistema koji samo primenjuju unapred poznate matematičke algoritme, AlphaEvolve kombinuje velike jezičke modele sa evolutivnim pretraživanjem i automatskim ocenjivanjem dobijenih rešenja. Sistem generiše programske postupke, proverava njihove rezultate, zadržava uspešnije varijante i na osnovu njih stvara nove. Na taj način moguće je sistematski istraživati veoma veliki broj potencijalnih rešenja matematičkog problema.

Ovakav pristup primenjen je i na otvorene matematičke probleme. Rezultati pokazuju da sistemi veštačke inteligencije u pojedinim slučajevima mogu ponovo da pronađu najbolje poznate konstrukcije, a u nekim slučajevima i da ih poboljšaju. Istraživanja sistema AlphaEvolve obuhvatila su probleme iz kombinatorike, geometrije, teorije brojeva i matematičke analize. To, međutim, ne znači da je veštačka inteligencija samostalno rešila sve ove otvorene probleme. U velikom broju slučajeva njen doprinos sastoji se u pronalaženju boljih granica, novih konstrukcija ili efikasnijih algoritama, što predstavlja napredak u istraživanju problema, ali ne nužno i njegovo konačno rešenje.

U novijim istraživanjima AlphaEvolve je primenjen na širi skup otvorenih matematičkih problema. Sistem je uspevao da ponovo pronađe neke od najboljih ranije poznatih rezultata, ali i da za pojedine probleme pronađe poboljšane konstrukcije. Posebno je značajno što su u pojedinim slučajevima rezultati dobijeni za konačan broj vrednosti omogućili formulisanje opštijih matematičkih zakonitosti. Takvi rezultati ukazuju na mogućnost da veštačka inteligencija postane pomoćno sredstvo ne samo za računanje, već i za formulisanje novih matematičkih pretpostavki i usmeravanje daljih istraživanja.

Veštačka inteligencija sve veću primenu nalazi i u automatskom matematičkom rezonovanju i dokazivanju teorema. U ovim sistemima neuronske mreže mogu da predlažu naredne korake u rešavanju problema, dok se simboličkim i formalnim metodama proverava njihova matematička ispravnost. Time se kombinuju dve različite prednosti: sposobnost modela veštačke inteligencije da prepoznaje obrasce i sposobnost formalnih sistema da strogo proveravaju matematičke zaključke.

Ipak, savremene sisteme veštačke inteligencije ne treba posmatrati kao zamenu za matematičara. Njihovi rezultati mogu zavisiti od načina na koji je problem formulisan, dostupnih podataka, prostora koji sistem pretražuje i kriterijuma prema kojima se potencijalna rešenja ocenjuju. Pored toga, rezultat koji predloži model veštačke inteligencije mora biti matematički proveren pre nego što se može prihvatiti kao ispravan. Zbog toga se kao posebno značajan pravac razvoja izdvaja povezivanje veštačke inteligencije sa simboličkim računanjem, formalnim dokazivanjem i ljudskim matematičkim zaključivanjem.

Posmatrano iz istorijske perspektive, primena veštačke inteligencije predstavlja najnoviju etapu u razvoju metoda rešavanja matematičkih problema. Put koji je započeo konkretnim računskim postupcima Vavilonaca, nastavio se geometrijskim metodama starih Grka, razvojem simboličke algebre, formulama za rešavanje jednačina trećeg i četvrtog stepena, Abelovim i Galoinim rezultatima, a zatim numeričkim metodama i računarskom algebrom, danas se nastavlja razvojem sistema koji mogu da pretražuju velike prostore mogućih rešenja i učestvuju u otkrivanju novih matematičkih postupaka. Veštačka inteligencija time ne menja osnovnu prirodu matematičkog dokaza, ali značajno proširuje skup alata kojima matematičari mogu da istražuju jednačine i druge složene matematičke probleme.

Glava 9

Konkretan problem kroz razne epohe

U prethodnim poglavljima prikazan je istorijski razvoj metoda za rešavanje jednačina, od prvih aritmetičkih postupaka u drevnim civilizacijama do savremenih simboličkih i računarskih metoda. Svaka epoha donela je novi način razmišljanja i nove matematičke alate, ali je osnovni cilj ostao isti - pronaći nepoznatu veličinu koja zadovoljava zadate uslove.

Kako bi se jasnije uočile razlike između pojedinih pristupa, u ovom poglavlju biće razmotrena ista kvadratna jednačina

$$x^2 + 8x = 20,$$

koja će biti rešena metodama karakterističnim za različite istorijske epohe. Počev od vavilonskog aritmetičkog postupka, preko geometrijskog tumačenja i retoričke algebre El Horezmija, pa sve do simboličke algebre, Dekartove analitičke geometrije i savremenih računarskih sistema, biće prikazano kako se tokom istorije menjao način rešavanja istog matematičkog problema.

Na ovaj način moguće je neposredno uporediti razvoj matematičkih ideja i uočiti kako su nove metode nastajale nadograđivanjem prethodnih, pri čemu je matematička suština problema ostala nepromenjena.

Rešavanje matematičkog problema u drevnim civilizacijama

Pronađi broj čijem se kvadratu, kada se doda njegov osmostruki iznos, dobija dvadeset.

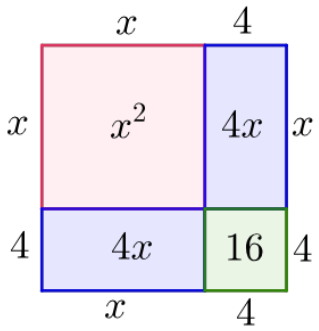
Vavilonski matematičar bi postupio na sledeći način: Uzmi polovinu od osam. Dobija se četiri. Pomnoži četiri sa četiri. Dobija se šesnaest. Dodaj šesnaest broju dvadeset. Dobija se trideset šest. Odredi kvadratni koren broja trideset šest. Dobija se šest. Od dobijenog broja oduzmi četiri. Dobija se broj dva. Dakle, traženi broj je 2.

Ovakav način rešavanja predstavlja tipičan primer vavilonske aritmetičke metode. Postupak je opisan isključivo rečima i računskim operacijama, bez upotrebe simbola, opštih formula ili oznaka za nepoznatu.

Grčka geometrijska interpretacija

Grčki matematičari nisu rešavali jednačine simboličkim postupcima, već su ih tumačili pomoću geometrijskih konstrukcija. Nepoznata veličina predstavljana je duži, kvadrat nepoznate površinom kvadrata, dok su proizvodi predstavljani površinama odgovarajućih pravougaonika. Na taj način rešavanje jednačine svodilo se na konstruisanje figura jednakih površina.

Kvadrat stranice x predstavlja član x^2, dok se član $8x$ prikazuje pomoću dva pravougaonika dimenzija $x \times 4$, postavljena uz dve susedne stranice kvadrata (Slika 9.1).



Slika 9.1: Geometrijsko kompletiranje kvadrata

Nakon dodavanja pravougaonika ostaje nepopunjen ugao u obliku kvadrata stranice 4, čija je površina $4^2 = 16$. Dodavanjem ovog kvadrata formira se novi kvadrat stranice $x + 4$, čija je ukupna površina jednaka $20 + 16 = 36$. Pošto kvadrat površine 36 ima stranicu 6, dobija se $x + 4 = 6$, odakle sledi $x = 2$.

Ovaj postupak predstavlja geometrijsku verziju metode kompletiranja kvadrata. Za grčke matematičare rešavanje jednačine nije bilo manipulisanje simbolima, već konstruisanje geometrijskih figura čije su površine međusobno jednake.

Indijska algebra: Bramagupta i Bhaskara II

Indijski matematičari razvili su algebru znatno dalje od svojih prethodnika. Za razliku od grčkih matematičara, koji su jednačine tumačili geometrijski, Bramagupta i Bhaskara II rešavali su ih algebarskim postupcima. Iako nisu koristili savremenu simboliku, njihovi algoritmi veoma su bliski današnjoj metodi kompletiranja kvadrata.

Bramagupta i Bhaskara II postupili bi na sledeći način. Najpre bi prepolovili broj koji se nalazi uz nepoznatu. Polovina broja osam jeste četiri. Zatim bi taj broj pomnožili samim sobom i dobili šesnaest. Dobijeni broj dodali bi desnoj strani jednačine, pa bi dobili $20 + 16 = 36$. Nakon toga odredili bi kvadratni koren broja trideset šest, koji iznosi šest. Na kraju bi od dobijene vrednosti oduzeli polovinu koeficijenta uz nepoznatu, odnosno četiri, pa bi dobili $6 - 4 = 2$. Dakle, rešenje jednačine jeste $x = 2$.

Za razliku od grčkih matematičara, koji su isti postupak obrazlagali geometrijskim konstrukcijama, indijski matematičari rešavali su jednačine pomoću opštih računskih pravila.

El Horezmijev postupak

Njegov postupak mogao bi se opisati sledećim rečima:

Prepolovi broj korena. Dobija se četiri. Pomnoži četiri samim sobom. Dobija se šesnaest. Dodaj šesnaest broju dvadeset. Dobija se trideset šest. Odredi kvadratni koren broja trideset šest. Dobija se šest. Od dobijenog broja oduzmi četiri. Ostaje dva, što predstavlja traženi broj. Dakle, rešenje jednačine jeste $x = 2$.

El Horezmi je ovaj postupak obrazlagao geometrijski, predstavljajući kvadrat nepoznate površinom kvadrata, a linearni član odgovarajućim pravougaonicima. Dodavanjem manjeg kvadrata kompletirala se figura u veći kvadrat, čime je opravdano pravilo koje je prethodno dato rečima. Na taj način algebra i geometrija činile su jedinstvenu celinu, što predstavlja jedno od najznačajnijih obeležja El Horezmijevog rada.

Simboličko rešavanje jednačine

Tokom renesanse rešavanje jednačina dobija potpuno novi oblik. Razvojem simboličke algebre matematički problemi više se ne opisuju isključivo rečima ili geometrijskim konstrukcijama, već se zapisuju pomoću simbola. Time je omogućeno izvođenje opštih formula za rešavanje jednačina. Prebacivanjem svih članova na jednu stranu dobija se $x^2 + 8x - 20 = 0$. Primenom formule za rešavanje kvadratne jednačine dobija se

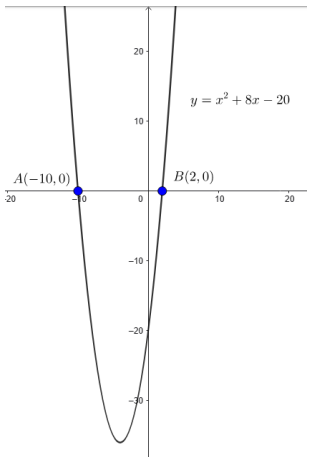
$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2},$$

odnosno $x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-8 \pm 12}{2}$. Dakle, $x_1 = 2,\ x_2 = -10$.

Za razliku od ranijih epoha, u kojima se razmatralo isključivo pozitivno rešenje, simbolička algebra omogućila je da se istovremeno dobiju oba rešenja jednačine. Time se pojam rešenja značajno proširio i postao nezavisan od geometrijskog ili praktičnog značenja nepoznate veličine.

Dekartov koordinatni sistem

Razvojem analitičke geometrije u XVII veku dolazi do povezivanja algebre i geometrije. Rene Dekart pokazao je da se svaka algebarska jednačina može predstaviti odgovarajućom krivom u koordinatnom sistemu, čime su geometrijski problemi mogli biti rešavani algebarskim metodama, a algebarske jednačine tumačene geometrijski.



Slika 9.2: Graf funkcije $y = x^2 + 8x - 20$ u programu GeoGebra

Prebacivanjem svih članova na levu stranu dobija se $x^2 + 8x - 20 = 0$. Sada se posmatra funkcija $y = x^2 + 8x - 20$. Rešenja jednačine odgovaraju vrednostima promenljive x za koje je $y = 0$, odnosno tačkama u kojima graf funkcije seče x-osu.

Sa Slike 9.2 vidi se da parabola seče x-osu u tačkama $A(-10, 0)$ i $B(2, 0)$. Prema tome, rešenja posmatrane jednačine jesu $x_1 = -10,\ x_2 = 2$.

Za razliku od prethodnih epoha, gde su se rešenja dobijala aritmetičkim ili geometrijskim konstrukcijama, Dekartov pristup omogućava da se ona neposredno uoče sa grafa funkcije. Ovakav način predstavljanja jednačina danas je jedan od osnovnih alata u nastavi matematike, a savremeni programi, poput GeoGebre, omogućavaju brzo i precizno grafičko prikazivanje funkcija i njihovih karakterističnih tačaka.

Savremena računarska algebra

Savremeni sistemi za računarsku algebru (Computer Algebra Systems – CAS) omogućavaju simboličko rešavanje jednačina primenom razvijenih algebarskih algoritama. Za razliku od ranijih epoha, kada je svaki korak rešavanja morao biti izveden ručno, danas je dovoljno zadati jednačinu računarskom programu, koji automatski pronalazi njena rešenja i po potrebi vrši dalje simboličke transformacije.

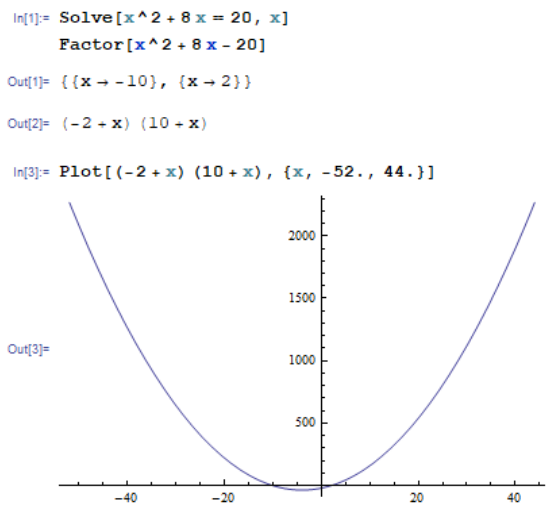
U programu *Wolfram Mathematica* polazna jednačina se rešava naredbom

```
Solve[x^2 + 8x == 20, x]
```

Program vraća rešenja $x = -10,\ x = 2$. Pored određivanja rešenja, Mathematica može izvršiti i faktorizaciju polinoma korišćenjem naredbe

```
Factor[x^2 + 8x - 20]
```

pri čemu se dobija rezultat $(x - 2)(x + 10)$. Na osnovu faktorizacije neposredno se uočavaju oba korena jednačine.



Slika 9.3: Rešavanje jednačine u programu Wolfram Mathematica

Program omogućava i grafički prikaz funkcije odgovarajuće jednačini, čime se potvrđuje da parabola seče x-osu upravo u tačkama koje odgovaraju dobijenim rešenjima. Na taj način simbolički, faktorisani i grafički prikaz međusobno potvrđuju ispravnost rezultata.

Upoređivanjem postupaka prikazanih u ovom poglavlju može se jasno uočiti razvoj metoda rešavanja jednačina. Od aritmetičkih pravila vavilonskih matematičara, preko geometrijskih konstrukcija starih Grka i El Horezmija, simboličke algebre renesanse i Dekartovog koordinatnog sistema, do savremenih računarskih sistema, matematički problem ostao je isti, dok su se način njegovog predstavljanja i metode njegovog rešavanja neprestano razvijali.

Tabela 9.1 daje pregled metoda karakterističnih za pojedine istorijske epohe.

Epoha	**Metoda rešavanja**	**Rešenje**
Vavilon	Aritmetičko kompletiranje kvadrata	$x = 2$
Grčka	Geometrijska algebra	$x = 2$
Indija	Algoritamsko pravilo	$x = 2$
El Horezmi	Retorička algebra	$x = 2$
Renesansa	Simbolička algebra	$x_1 = 2,\ x_2 = -10$
Dekart	Analitička geometrija	$x_1 = 2,\ x_2 = -10$
Savremeni CAS sistemi	Simboličko i numeričko rešavanje	$x_1 = 2,\ x_2 = -10$

Tabela 9.1: Razvoj metoda rešavanja jednačine $x^2 + 8x = 20$ kroz istoriju

Zaključak

Razvoj metoda rešavanja jednačina predstavlja jedan od najznačajnijih procesa u istoriji matematike. Od prvih retoričkih postupaka u Vavilonu i Egiptu, preko geometrijskih interpretacija grčkih matematičara i sistematizacije algebre u islamskom svetu, pa sve do simboličke algebre, teorije grupa i savremenih računarskih metoda, svaka epoha dala je značajan doprinos razumevanju jednačina i njihovih rešenja.

Posebno važnu prekretnicu predstavljali su uvođenje simboličke notacije i razvoj analitičke geometrije, koji su omogućili da se jednačine proučavaju na opštiji i sistematičniji način. Kasnije su Abel i Galoa pokazali da problem rešavanja jednačina nije pitanje pronalaženja sve složenijih formula, već razumevanja njihove unutrašnje strukture. Time je otvoren put razvoju moderne apstraktne algebre.

Savremena matematika danas raspolaže moćnim numeričkim algoritmima i računarskim sistemima koji omogućavaju rešavanje veoma složenih problema, ali se u njihovoj osnovi i dalje nalaze ideje nastajale tokom više hiljada godina. Zbog toga istorijski razvoj metoda rešavanja jednačina ne predstavlja samo pregled prošlosti matematike, već i put kojim se može pratiti razvoj matematičkog mišljenja – od konkretnih praktičnih problema do apstraktnih teorija koje čine temelj savremene nauke.

Analiza iste kvadratne jednačine kroz različite istorijske epohe pokazala je da su se menjali način zapisivanja, metode rešavanja i matematički jezik, dok je suština problema ostala ista. Upravo taj kontinuitet ideja potvrđuje da je razvoj matematike rezultat postepenog nadograđivanja znanja, u kojem svaka generacija matematičara nastavlja rad svojih prethodnika i otvara nove pravce istraživanja.

Biografija

Andrea Janković (devojačko Tomić) rođena je 26. novembra 1989. godine u Valjevu. Osnovnu školu „Milovan Glišić" završila je 2004. godine, a Valjevsku gimnaziju 2008. godine u rodnom gradu.

Iste godine upisala je Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, smer Profesor matematike i računarstva. Školske 2015/2016. godine nastavlja studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, na Departmanu za matematiku i informatiku, na studijskom programu Diplomirani profesor matematike, a školske 2022/2023. godine prelazi na smer Integrisane akademske studije master profesor matematike (M5).

Pored akademskog usavršavanja, Andrea posvećeno gradi karijeru u prosveti. Od 2016. godine radila je kao nastavnik matematike u OŠ „Ilija Birčanin" u Stavama, dok od septembra 2025. godine do danas nastavni rad nastavlja u OŠ „Sestre Ilić" u Valjevu, čime ostvaruje 10 godina radnog staža u osnovnom obrazovanju.

u Novom Sadu, 2026. Andrea Janković

Literatura

[1] A. Fawzi, M. Balog, A. Huang, T. Hubert, B. Romera-Paredes, M. Barekatain, A. Novikov, F. J. R. Ruiz, J. Schrittwieser, G. Swirszcz, D. Silver, D. Hassabis, P. Kohli, *Discovering Faster Matrix Multiplication Algorithms with Reinforcement Learning*, Nature, Vol. 610, pp. 47–53, 2022.

[2] A. Novikov, N. Vu, M. Eisenberger, E. Dupont, P.-S. Huang, A. Z. Wagner et al., *AlphaEvolve: A Coding Agent for Scientific and Algorithmic Discovery*, arXiv preprint arXiv:2506.13131, 2025.

[3] B. Georgiev, J. Gómez-Serrano, T. Tao, A. Z. Wagner, *Mathematical Exploration and Discovery at Scale*, arXiv preprint arXiv:2511.02864, 2025.

[4] B. L. van der Waerden, *A History of Algebra: From al-Khwārizmī to Emmy Noether*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.

[5] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Algebra 2, teorija i zadaci*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2011.

[6] C. B. Boyer, U. C. Merzbach, *A History of Mathematics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, Hoboken, 2011.

[7] D. Derbiši r, *U potrazi za nepoznatom: Istorija algebre*, Laguna, Beograd, 2014.

[8] J. Sesiano, *An Introduction to the History of Algebra: Solving Equations from Mesopotamian Times to the Renaissance*, Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 2009.

[9] J. Stillwell, *Mathematics and Its History*, 3rd ed., Springer, New York, 2010.

[10] N. Makke, S. Chawla, *Interpretable Scientific Discovery with Symbolic Regression: A Review*, Artificial Intelligence Review, Vol. 57, 2024.

[11] S. Milić, *Elementi algebre*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 1984.

[12] V. Jevremović, *Sistemi linearnih jednačina*, Prirodno-matematički fakultet, publikacije, Novi Sad, 2008.

[13] V. J. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, 3rd ed., Addison-Wesley, Boston, 2009.

[14] W. Dunham, *Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics*, Penguin Books, 1991.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

RBR	*Redni broj:*	
IBR	*Identifikacioni broj:*	
TD	*Tip dokumentacije:*	Monografska dokumentacija
TZ	*Tip zapisa:*	Tekstualni štampani materijal
VR	*Vrsta rada:*	Master rad
AU	*Autor:*	Andrea Janković
MN	*Mentor:*	dr Nikola Sarajlija, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
NR	*Naslov rada:*	Od Vavilona do savremene algebre: Istorijski razvoj metoda rešavanja jednačina
JP	*Jezik publikacije:*	srpski (latinica)
JI	*Jezik izvoda:*	srpski / engleski
ZP	*Zemlja publikovanja:*	Republika Srbija
UGP	*Uže geografsko područje:*	Vojvodina
GO	*Godina:*	2026.
IZ	*Izdavač:*	Autorski reprint
MA	*Mesto i adresa:*	Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad
FO	*Fizički opis rada:*	broj poglavlja / broj strana / broj citata / broj tabela / broj slika / broj grafika / broj priloga 9 / 83 / 6 / 3 / 39 / 0 / 0
NO	*Naučna oblast:*	Matematika
ND	*Naučna disciplina:*	Metodika nastave matematike
PO	*Predmetna odrednica / ključne reči:*	istorija matematike, algebra, jednačine, kvadratne jednačine, kubne jednačine, Galoina teorija, računarska algebra
UDK	*UDK:*	
ČU	*Čuva se:*	Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
VN	*Važna napomena:*	nema
IZ	*Izvod:*	U radu je prikazan istorijski razvoj metoda rešavanja jednačina, od prvih aritmetičkih postupaka u drevnim civilizacijama, preko geometrijskih i simboličkih metoda, do savremene apstraktne algebre i računarskih sistema. Analiziran je razvoj rešavanja kvadratnih, kubnih i jednačina četvrtog stepena, Abelov rezultat o nemogućnosti rešavanja opšte jednačine petog stepena radikalima, Galoine teorije i savremene numeričke i simboličke metode.
DP	*Datum prihvatanja teme od strane NN veća:*	23.6.2026.

DO	*Datum odbrane:*	.....
KO	*Članovi komisije:*	
	Predsednik:	dr Rozalija Madaras-Silađi, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
	Član:	dr Petar Đapić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
	Član, mentor:	dr Nikola Sarajlija, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

ACC	*Accession number:*	
ANO	*Identification number:*	
DT	*Document type:*	Monographic publication
TR	*Type of record:*	Printed text
CT	*Contents code:*	Master's thesis
AU	*Author:*	Andrea Janković
MN	*Mentor:*	Dr Nikola Sarajlija, Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
TI	*Title:*	From Babylon to Modern Algebra: The Historical Development of Methods for Solving Equations
LI	*Language of text:*	Serbian (Latin script)
LA	*Language of abstract:*	Serbian / English
CC	*Country of publication:*	Republic of Serbia
RC	*Locality of publication:*	Vojvodina
PY	*Publication year:*	2026
PU	*Publisher:*	Author's reprint
PL	*Publication place:*	Faculty of Sciences, Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad
PD	*Physical description:*	Number of chapters / pages / references / tables / figures / graphs / appendices 9 / 83 / 6 / 3 / 39 / 0 / 0
FI	*Scientific field:*	Mathematics
SD	*Scientific discipline:*	Methodology of Mathematics Teaching
KW	*Key words:*	history of mathematics, algebra, equations, quadratic equations, cubic equations, Galois theory, computer algebra
UDC	*UDC:*	
HD	*Holding data:*	Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
NT	*Note:*	None
AB	*Abstract:*	This thesis presents the historical development of methods for solving equations, from the earliest arithmetic procedures in ancient civilizations, through geometric and symbolic methods, to modern abstract algebra and computer algebra systems. Particular attention is devoted to the development of methods for solving quadratic, cubic, and quartic equations, Abel's proof of the impossibility of solving the general quintic equation by radicals, Galois theory, and contemporary numerical and symbolic methods for solving equations. The thesis also illustrates the evolution of algebraic thinking by solving the same quadratic equation using methods characteristic of different historical periods, thereby highlighting the continuity and development of mathematical ideas from antiquity to the present day.
AD	*Date accepted by the Scientific Board:*	23.6.2026.

DD	*Defence date:*	.....
CB	*Members of the Examination Board:*	
	Chair:	Dr Rozalija Madaras-Silađi, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
	Member:	Dr Petar Đapić, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
	Member, Mentor:	Dr Nikola Sarajlija, Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad