



Универзитет у Новом Саду
Природно-математички
факултет
Департман за математику и
информатику



О неким особинама дводимензионалних бинарних речи

-мастер рад-

Ментор:
др Кристина Аго

Кандидат:
Александар Тркуља
274/21

Нови Сад, 2026

Садржај

1	УВОД	5
2	Максималне дводимензионалне бинарне речи са ограниченим степеном	16
2.1	Доказ теореме за $d = 4$	18
2.2	Доказ теореме за $d = 0$	18
2.3	Доказ теореме за $d = 1$	19
2.4	Доказ теореме за $d = 3$	21
2.5	Доказ теореме за $d = 2$	23
2.5.1	Подслучај $w = 2$	26
2.5.2	Преостали базни случајеви	27
2.5.3	Подслучај $w > 6$	28
3	Дводимензионални бинарни палиндроми	33
3.1	Горње ограничење броја различитих дводимензионалних палиндромских фактора у дводимензионалној бинарној речи	33
3.2	Доње ограничење броја различитих дводимензионалних палиндромских фактора у дводимензионалној бинарној речи	39
4	Факторска сложеност дводимензионалних бинарних речи	44
4.1	Факторска сложеност једнодимензионалних бинарних речи	44
4.2	Факторска сложеност дводимензионалних бинарних речи	46
5	Занимљивости	49
5.1	Шах	49
5.2	Потапање подморница	51
5.3	Миноловац (енг. Minesweeper)	52
6	Закључак	54
	Литература	55
	Биографија	57

ПРЕДГОВОР

Овај мастер рад бави се дводимензионалним бинарним речима и неким њиховим комбинаторним особинама. Ови објекти представљају природну генерализацију једнодимензионалних речи. Циљ рада је да се обједине и систематизују резултати из неколико новијих и класичних радова који на различите начине описују регуларност и сложеност оваквих објеката, кроз појмове максималности у односу на ограниченост степена, палиндромичности, факторске сложености и слично.

У првом делу рада уводе се основни појмови и нотација који се користе у наставку. Дају се дефиниције дводимензионалних речи, њихових фактора и основних комбинаторних особина, као и преглед стандардних приступа који се користе у њиховом проучавању.

Други део посвећен је максималним дводимензионалним бинарним речима са ограниченим степеном. Описујемо ово у наставку. Нека $d \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и нека је W дводимензионална реч формата $h \times w$ над бинарним алфабетом $\{0, 1\}$, где ћемо у првом делу рада 0 поистоветити са $\square$, а 1 са $\blacksquare$. Претпоставимо да је свака појава слова 1 у речи W суседна са највише d појављивања истог слова 1, и нека је $|W|_1$ број појављивања слова 1 у W . У раду се даје егзактна формула за максималну вредност $|W|_1$ за фиксне димензије (h, w) у зависности од параметра d . Овај резултат се може посматрати и као резултат о избегавању образаца, при чему се дводимензионалне речи које се разматрају могу интерпретирати као речи које избегавају одређене 3×3 правоугаонике.

Трећи део рада бави се дводимензионалним бинарним палиндромима. Појам дводимензионалних палиндрома је уведен са циљем карактеризације дводимензионалних Штурмових речи, који имају примену рецимо у компресији података, препознавању лица и препознавању образаца. У овом мастер раду дајемо границу колико највише палиндромских фактора могу имати одређене дводимензионалне бинарне речи. Такође, представљаћемо и неке доње границе за палиндромске факторе и то у зависности да ли је посматрана реч периодична или аperiodична. Дајемо и неке примере који показују да наведене границе се не могу побољшати.

На крају се дају и додатни резултати и напомене везане за факторску сложеност дводимензионалних речи у вези са познатом Ниватовом хипотезом, која тврди да су дводимензионалне речи са малом правоугаоном сложеностју периодичне. У вези овога разматра се шири преглед познатих парцијалних резултата и различитих приступа који су развијени у литератури.

Непосредно пре закључка, даћемо занимљивости у виду шаха, потапања подморнице и миноловца и на тај начин повезати мастер рад са примерима из живота.

Неизмерно сам захвалан мом ментору, др Кристини Аго, на стрпљењу,

саветима, помоћи, доброти, људскости, невероватној ажурности и доступности за мастер рад као и саветовању за моје будуће докторске студије на Природно-математичком факултету у Новом Саду.

Такође, неизмерно сам захвалан и председнику комисије, др Бојану Башићу, на безброј корисних савета што се тиче мастер рада и математике, као и члану комисије, др Борису Шоботу, на томе што су прихватили да ме оцењују и да присуствују мени најзначајнијем догађају током студија, а то је одбрана мастер рада.

За крај, желим да се захвалим својим родитељима Драгани и Николи, млађем брату Стефану и остатку родбине, на огромној подршци током студија и што су ме на крају подржали да упишем и завршим математику са високим просеком, иако су били прво за то да упишем програмирање. Желим да искажем и захвалност неколицини пријатеља са смера, као и свим пријатељима из студентског дома, у ком живим читав свој студентски живот.

Нови Сад, 2026. године

Александар Тркуља

1 УВОД

Да бисмо прешли у срж мастер рада, потребно је најпре да уведемо терминологију, дефиниције појмова везаних за бинарне дводимензионалне речи (радимо и са коначним речима и са речима које су бесконачне надесно и/или надоле) и да дамо конкретне примере тих појмова, да бисмо са сигурношћу могли касније да разумемо сва тврђења која ћемо прелазити.

За $a, b \in \mathbb{N}$ дефинишемо $[[a, b]] = \{n \in \mathbb{N} \mid a \leq n \leq b\}$.

1.1 Дефиниција. *Коначни алфабет је коначан непразан скуп елемената, које називамо словима. Бинарни алфабет је алфабет који се састоји од два слова. Реч је коначан или бесконачан низ слова над алфабетом.*

Кроз рад ћемо за бинарни алфабет користити: $\{\square, \blacksquare\}$, $\{0, 1\}$ или $\{a, b\}$.

1.2 Дефиниција. *Нека је A бинарни алфабет. Са $\mathcal{W}^*(A)$ означавамо скуп једnodимензионалних речи над A . Празну реч обележавамо са E . $|W|$ представља дужину једnodимензионалних речи W . Скуп непразних једnodимензионалних речи над A је дефинисан са $\mathcal{W}^+(A) = \mathcal{W}^*(A) \setminus \{E\}$.*

1.3 Дефиниција. *Конкатенација једnodимензионалних речи $U = u_1u_2\dots u_{w_1}$ и $V = v_1v_2\dots v_{w_2}$ је реч $UV = u_1u_2\dots u_{w_1}v_1v_2\dots v_{w_2}$, за коју важи $|UV| = |U| + |V|$. Реч U мора да буде коначна, док V не мора бити коначна.*

1.4 Дефиниција. *Реч W називамо фактором од речи V ако постоје речи X, Y тако да $V = XWY$. Реч W називамо префиксом од речи V ако постоји реч Y тако да $V = WY$. Реч W називамо суфиксом од речи V ако постоји реч X тако да $V = XW$.*

1.5 Дефиниција. *Нека је W произвољна бинарна реч. Тада уводимо следеће ознаке:*

- $F(W)$ - скуп свих фактора речи W ;
- $F_w(W)$ - скуп свих фактора речи W дужине w .

1.6 Дефиниција. *Нека је A бинарни алфабет. Бесконачна једnodимензионална бинарна реч $\overline{W}$ над алфабетом A је:*

- периодична ако и само ако је $\overline{W} = W^\infty$ за неко $W \in \mathcal{W}^*(A)$;
- евентуално периодична ако и само ако је $\overline{W} = UW^\infty$ за неке $U, W \in \mathcal{W}^*(A)$;
- аперодична ако и само ако није евентуално периодична.

1.7 Примери.

1. Реч $\overline{W} = 011011011 \dots$ је периодична, јер је $\overline{W} = (011)^\infty$.
2. Реч $\overline{W} = 0011011011 \dots$ је евентуално периодична, јер је $\overline{W} = 0(011)^\infty$.
3. Реч $\overline{W} = 101001000100001000001 \dots$ је апериодична, јер није евентуално периодична. Реч је дефинисана тако да се између изолованих јединица налазе блокови нула чија се дужина сваког наредног блока повећава за један.

1.8 Дефиниција. Нека је W бесконачна реч. Кажемо да је W Штурмова реч ако и само ако за све $w \geq 0$ важи

$$|F_w(W)| = w + 1,$$

где $|F_w(W)|$ представља кардиналност скупа дефинисаног у дефиницији 1.5.

За $w = 0$ добијамо да W садржи један фактор дужине 0, јасно то је празна реч E . За $w = 1$ добијамо $|F_1(W)| = 2$, па можемо закључити да Штурмове речи садрже тачно 2 различита слова, то јест оне су бинарне.

1.9 Дефиниција. За коначну једнодимензионалну реч $W = a_1a_2\dots a_w$ прекретање је реч $W^R = a_wa_{w-1}\dots a_1$. $\text{Alph}(W)$ је скуп слова која се појављују у речи W . W је палиндром ако је $W = W^R$. $\text{PAL}(W)$ је скуп свих различитих непразних палиндромских фактора у једнодимензионалној речи W . Уводимо ознаку $P(W) = |\text{PAL}(W)|$.

1.10 Примери. Речи из српског језика које су бинарни једнодимензионални палиндроми: $W_1 = \text{bob}$, $W_2 = \text{ara}$, $W_3 = \text{sos}$ и $W_4 = \text{dud}$.

Произвољне речи над алфабетом $\{a, b\}$ које су бинарни једнодимензионални палиндроми: $W_5 = \text{aabababaa}$, $W_6 = \text{baabbbbaab}$ и $W_7 = \text{babbab}$.

1.11 Дефиниција. Нека је A коначни алфабет и $h, w \in \mathbb{N}$. Дводимензионална реч W димензије $h \times w$ над A је матрица са h врста и w колона чији су елементи управо слова из коначног алфабета A . Скуп свих речи димензија $h \times w$ над A обележавамо са $\mathcal{W}_{h \times w}(A)$.

1.12 Дефиниција. Фактор дводимензионалне коначне речи $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$ је дводимензионална реч $\hat{W} \in \mathcal{W}_{s \times t}(A)$, где је $1 \leq s \leq h$, $1 \leq t \leq w$, која се добија издвајањем потправоугаоника речи W . Са $F_{s,t}(W)$ означавамо скуп свих фактора димензије $(s \times t)$ речи $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$, док $|F_{s,t}(W)|$ представља кардиналност тог скупа. Колоне дводимензионалне речи W у $\mathcal{W}_{h \times w}(A)$ су фактори од W у $\mathcal{W}_{h \times 1}(A)$. Врсте (редови) дводимензионалне речи W у $\mathcal{W}_{h \times w}(A)$ су фактори од W у $\mathcal{W}_{1 \times w}(A)$. E је празна дводимензионална реч (иста ознака као и за једнодимензионалну празну реч).

Кроз читав мастер рад бавићемо се, као што сам назив каже, само дво-
димензионалним речима над бинарним алфабетом. У поглављу „Максималне
дводимензионалне бинарне речи са ограниченим степеном“ за бинарни алфабет
узећемо $A = \{\square, \blacksquare\}$ (објашњено у предговору), док касније ћемо углавном
узимати $A = \{a, b\}$ или $A = \{0, 1\}$.

1.13 Пример. Нека је $A = \{\square, \blacksquare\}$. Дводимензионална реч W над A , која
има димензије 4×5 , то јест $W \in \mathcal{W}_{4 \times 5}(A)$, је приказана испод.

$$W = \begin{array}{ccccc} \blacksquare & \square & \blacksquare & \square & \blacksquare \\ \square & \square & \blacksquare & \square & \square \\ \blacksquare & \square & \blacksquare & \square & \blacksquare \\ \square & \blacksquare & \square & \blacksquare & \square \end{array}$$

1.14 Дефиниција. За $W \in \mathcal{W}_{h \times w}(A)$ и слово $a \in A$, где је A бинарни
алфабет, са $|W|_a$ обележавамо број појављивања слова a у речи W . За $i \in$
 $[[1, h]]$ и $j \in [[1, w]]$ пресек i -те врсте и j -те колоне представља позицију
слова a у речи W и обележавамо је са $W[i, j]$.

1.15 Пример. Нека је $A = \{\square, \blacksquare\}$.

$$\text{За реч } W = \begin{array}{ccccc} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \square & \square & \square \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \square & \square & \blacksquare \end{array} \text{ важи } |W|_{\blacksquare} = 7 \text{ и } |W|_{\square} = 5.$$

Позиција црног квадратића у доњем десном углу речи W је $W[2, 6]$, јер се
налази у 2. врсти и 6. колони.

1.16 Дефиниција. Хоризонтална конкатенација од коначне речи $U \in$
 $\mathcal{W}_{h \times w_1}(A)$ и речи $V \in \mathcal{W}_{h \times w_2}(A)$, која не мора бити коначна, је реч $U \oplus V \in$
 $\mathcal{W}_{h \times (w_1 + w_2)}(A)$ дефинисана са

$$(U \oplus V)[i, j] = \begin{cases} U[i, j], & j \leq w_1, \\ V[i, j - w_1], & j > w_1. \end{cases}$$

Вертикална конкатенација од коначне речи $U \in \mathcal{W}_{h_1 \times w}(A)$ и речи $V \in$
 $\mathcal{W}_{h_2 \times w}(A)$, која не мора бити коначна, је реч $U \ominus V \in \mathcal{W}_{(h_1 + h_2) \times w}(A)$ дефинисана
са

$$(U \ominus V)[i, j] = \begin{cases} U[i, j], & i \leq h_1, \\ V[i - h_1, j], & i > h_1. \end{cases}$$

1.17 Пример. Хоризонтална конкатенација

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{cc} \blacksquare & \square \\ \square & \blacksquare \\ \square & \blacksquare \end{array} & \oplus & \begin{array}{cccccc} \blacksquare & \square & \square & \square & \blacksquare & \square \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \square & \blacksquare & \square & \square & \blacksquare & \square \end{array} \\
 & & = & \begin{array}{cccccc} \blacksquare & \square & \blacksquare & \square & \square & \square & \blacksquare & \square \\ \square & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \square & \blacksquare & \square & \blacksquare & \square & \square & \blacksquare & \square \end{array}
 \end{array}$$

Вертикална конкатенација

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{cccc} \blacksquare & \square & \blacksquare & \square \end{array} & \ominus & \begin{array}{cccc} \square & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \square & \blacksquare & \blacksquare \end{array} \\
 & & = & \begin{array}{cccc} \blacksquare & \square & \blacksquare & \square \\ \square & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \square & \blacksquare & \blacksquare \end{array}
 \end{array}$$

1.18 Дефиниција. Дата је реч $W \in \mathcal{W}_{h \times w}(A)$ и $m, n \in \mathbb{Q}$ такви да $mh, nw \in \mathbb{Z}$. (m, n) -ти степен речи W је реч $W^{m \times n} \in \mathcal{W}_{mh \times nw}(A)$ тако да

$$W^{m \times n}[i, j] = W[(i-1 \bmod h) + 1, (j-1 \bmod w) + 1].$$

1.19 Пример.

$$\text{Ако је } W = \begin{array}{cccc} \blacksquare & \blacksquare & \square & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{array}, \text{ онда је } W^{3 \times 7/4} = \begin{array}{ccccccccc} \blacksquare & \blacksquare & \square & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \square \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \square & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \square \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{array}.$$

1.20 Дефиниција. Префикс дводимензионалне речи W дефинише се као потправоугаона реч добијена издвајањем потправоугаоника речи W , који садржи њен горњи леви угао W . Слично, суфикс дводимензионалне речи W дефинише се као потправоугаона реч добијена издвајањем потправоугаоника речи W , који садржи њен доњи десни угао. За V, W је префикс (ознака $W \leq_p V$) ако постоје речи X, Y тако да $V = (W \ominus X) \oplus Y$ или $V = (W \oplus X) \ominus Y$. За V, W је суфикс (ознака $W \leq_s V$) ако постоје речи X, Y тако да $V = Y \oplus (X \ominus W)$ или $V = Y \ominus (X \oplus W)$.

1.21 Дефиниција.

Околина позиције $W[i, j]$, коју обележавамо са $N_W(i, j)$, је дефинисана као

$$N_W(i, j) = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\} \cap ([1, h] \times [1, w]).$$

Другим речима, суседи од позиције $W[i, j]$ су позиције $W[i - 1, j]$, $W[i + 1, j]$, $W[i, j - 1]$, $W[i, j + 1]$, ако постоје.

1.22 Пример.

$W = \begin{array}{cccc} \square & \square & \textcolor{red}{\square} & \square \\ \square & \textcolor{red}{\square} & \blacksquare & \textcolor{red}{\square} \\ \square & \square & \textcolor{red}{\square} & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array}$
 Розом бојом је маркирана околина од $W[2, 3]$.

$W = \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \textcolor{red}{\square} & \square \\ \square & \textcolor{red}{\square} & \blacksquare & \textcolor{red}{\square} \end{array}$
 Розом бојом је маркирана околина од $W[4, 3]$.

$W = \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \textcolor{red}{\square} & \square & \square & \square \\ \blacksquare & \textcolor{red}{\square} & \square & \square \end{array}$
 Розом бојом је маркирана околина од $W[4, 1]$.

1.23 Напомена. Са $W[i]$ обележавамо i -ту врсту речи W . $W[[i, i']]$ представља све врсте од i -те до i' -те, укључујући и њих саме.

	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
1	■	□	■	□	□	□	1	■	□	■	□	□	□
2	■	■	■	■	■	■	2	■	■	■	■	■	■
3	□	□	□	■	■	□	3	□	□	□	■	■	□
4	□	■	□	□	■	■	4	□	■	□	□	■	■
5	□	□	■	■	□	□	5	□	□	■	■	□	□

$W[2] = \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare$

$W[[1, 2]] = \begin{array}{cccccc} \blacksquare & \square & \blacksquare & \square & \square & \square \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{array}$

1.24 Дефиниција. За слово $a \in A$, степен слова a од позиције $W[i, j]$ је дат са:

$$\deg_{a,W}(i, j) = \begin{cases} \sum_{(i', j') \in N_W(i, j)} \mathbb{I}(W[i', j'] = a), & W[i, j] = a, \\ 0, & W[i, j] \neq a. \end{cases}$$

Другим речима, ако се на позицији $W[i, j]$ не налази $a \in A$ онда јој додељујемо вредност 0, а ако се на позицији $W[i, j]$ налази $a \in A$ онда јој додељујемо број суседа од a на којима се налази $a \in A$. Индикаторска функција $\mathbb{I}$ из претходне дефиниције додељује суми 1 ако је $W[i', j'] = a$, а 0 ако је $W[i', j'] \neq a$, за $(i', j') \in N_W(i, j)$.

1.25 Напомена. На српском језику реч степен уобичајено се користи и за појам из дефиниције 1.18, а и за појам из претходне дефиниције, па је таква терминологија задржана и у овом раду. Верујемо да ће контекст увек бити такав да не оставља могућност забуне код читаоца.

1.26 Пример.

$$\text{За } W = \begin{array}{cccc} \square & \blacksquare & \square & \blacksquare \\ \blacksquare & \square & \blacksquare & \square \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \square & \blacksquare & \square \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \square & \square & \blacksquare & \square \end{array} \text{ имамо } \deg_{\blacksquare, W}(i, j) = \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}.$$

1.27 Дефиниција. Нека је дато $d \in [[0, 4]]$, $h, w \in \mathbb{N}$. Скуп свих дводимензионалних речи димензије $h \times w$ са $\blacksquare$ -пољима степена ограниченог одозго са d обележавамо са $\mathcal{W}_{h \times w}^{\leq d}$:

$$\mathcal{W}_{h \times w}^{\leq d} = \{W \in \mathcal{W}_{h \times w} \mid \deg_{\blacksquare, W}(i, j) \leq d, \text{ за све } (i, j) \in [[1, h]] \times [[1, w]]\}.$$

Другим речима, то је скуп свих речи из $\mathcal{W}_{h \times w}$ где нема позиције степена већег од d , у односу на $\blacksquare$.

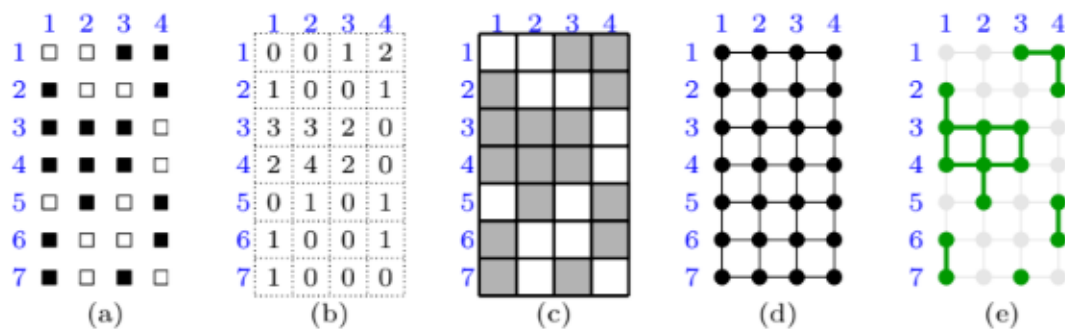
$$\max_{\leq d}(h, w) = \max \left\{ |W|_{\blacksquare} : W \in \mathcal{W}_{h \times w}^{\leq d} \right\}$$

представља максималан број $\blacksquare$ у речи $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$ за коју је степен сваке позиције, у односу на $\blacksquare$, највише d . Такође, важи симетричност $\max_{\leq d}(h, w) = \max_{\leq d}(w, h)$.

1.28 Дефиниција. Нека је $G = (V, E)$ прост граф и нека је $U \subset V$. Тада се скуп U назива доминантним скупом графа G ако за свако теме $v \in V \setminus U$ постоји $u \in U$ такво да $\{u, v\} \in E$, то јест ако v има бар једног суседа у скупу U . Кажемо за доминантни скуп S да је минималан ако не постоји доминантни скуп кардиналности мање него S . Доминациони број графа G , у ознаци $\gamma(G)$, јесте минимална кардиналност доминантног скупа графа G . Мрежним графом $G_{h \times w}$ придруженим речи $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$ називамо граф чији

чворови одговарају ћелијама речи W , при чему су два чвора повезана граном ако одговарајуће ћелије деле заједничку страну. Подграф одређен црним квадратима речи W добија се издвајањем чворова који одговарају црним квадратима, заједно са свим гранама које их повезују.

1.29 Пример.



Под (а) је приказана 7×4 реч W над алфабетом $\{\square, \blacksquare\}$. Под (b) је приказан степен сваке позиције речи W у односу на $\blacksquare$. Под (c) је приказана геометријска презентација од W у виду правоугаоника димензије $h \times w$. Под (d) је приказан мрежни граф $G_{7,4}$. Под (e) је приказан подграф зелене боје од $G_{7,4}$ индукован речју W .

1.30 Дефиниција. Нека је дата дводимензионална реч W . Низ $(|W[1]|_{\blacksquare}, |W[2]|_{\blacksquare}, \dots, |W[h]|_{\blacksquare})$, који даје број $\blacksquare$ у свакој врсти $W[i]$ речи W , назива се *расподела врста*.

1.31 Пример.

$$W = \begin{array}{cccc} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \square \\ \blacksquare & \blacksquare & \square & \square \\ \blacksquare & \square & \square & \square \end{array}$$

$$(|W[1]|_{\blacksquare}, |W[2]|_{\blacksquare}, |W[3]|_{\blacksquare}, |W[4]|_{\blacksquare}, |W[5]|_{\blacksquare}) = (4, 4, 3, 2, 1)$$

$$W^T = \begin{array}{ccccc} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \square \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \square & \square \\ \blacksquare & \blacksquare & \square & \square & \square \end{array}$$

1.32 Напомена. Са W^T означавамо транспоновану матрицу матрице W тако да $W^T[j]$ представља j -ту колону од W . У следећој дефиницији ћемо дефинисати транспоновану реч.

1.33 Дефиниција. За дводимензионалну реч $W = [W_{i,j}]_{1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq w} \in \mathcal{W}_{h \times w}(A)$

$$W = \begin{pmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} & \cdots & W_{1,w} \\ W_{2,1} & W_{2,2} & \cdots & W_{2,w} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{h,1} & W_{h,2} & \cdots & W_{h,w} \end{pmatrix}$$

W^R је преокретање

$$W^R = \begin{pmatrix} W_{h,w} & W_{h,w-1} & \cdots & W_{h,1} \\ W_{h-1,w} & W_{h-1,w-1} & \cdots & W_{h-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{1,w} & W_{1,w-1} & \cdots & W_{1,1} \end{pmatrix},$$

док је W^T транспонована реч

$$W^T = \begin{pmatrix} W_{1,1} & W_{2,1} & \cdots & W_{h,1} \\ W_{1,2} & W_{2,2} & \cdots & W_{h,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{1,w} & W_{2,w} & \cdots & W_{h,w} \end{pmatrix}.$$

За дводимензионалну реч $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$ ако је $W = W^R$ називамо је $h \times w$ дводимензионалним палиндромом. $PAL_{2d}(W)$ је скуп свих различитих непразних палиндромских фактора дводимензионалне речи W . Уводимо ознаку $P_{2d}(W) = |PAL_{2d}(W)|$.

1.34 Напомена. Ако је X скуп дводимензионалних бесконачних речи онда је

$$\text{Min } P_{2d}(X) = \min\{P_{2d}(W) | W \in X\}.$$

1.35 Примери. Неки бинарни дводимензионални палиндроми:

$$W_1 = \begin{pmatrix} b & b & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & b & b \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} b & b & a & b \\ b & a & a & b \\ b & a & b & b \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad W_3 = \begin{pmatrix} a & b & a & a & b & b \\ b & b & b & b & b & b \\ a & a & a & a & a & a \\ a & b & a & a & b & b \\ b & b & a & a & b & a \\ a & a & a & a & a & a \\ b & b & b & b & b & b \\ b & b & a & a & b & a \end{pmatrix}.$$

W_1, W_2 и W_3 су $4 \times 4, 3 \times 4$ и 8×6 палиндроми, редом.

1.36 Дефиниција. Нека је $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$. Хоризонтални палиндроми од W су $1 \times i$ палиндромски фактори од W , где $1 \leq i \leq w$. Вертикални палиндроми од W су $j \times 1$ палиндромски фактори од W , где $1 \leq j \leq h$.

У следећа два примера неће бити приказане бинарне дводимензионалне речи, већ дводимензионалне речи над коначним алфабетом веће кардиналности.

1.37 Примери. Нека је A енглески алфабет.

$$\begin{array}{cccccc}
 & k & a & p & a & k \\
 & k & a & j & a & k \\
 W_1 = r & o & t & o & r & \\
 & k & a & j & a & k \\
 & k & a & p & a & k
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccccc}
 & r & a & t & a & r & s & t & v & o \\
 W_2 = v & o & c & a & r & s & t & v & o \\
 & r & u & d & a & r & s & t & v & o
 \end{array}$$

W_1 је дводимензионални палиндром са свим врстама које су саме по себи хоризонтални палиндроми. Њени хоризонтални палиндроми су: *карак*, *ара*, *ка-јак*, *аја*, *rotor*, *oto*, *k*, *a*, *p*, *j*, *r*, *o*, *t*. Њени вертикални палиндроми су: *krk*, *kk*, *kk-rkk*, *aa*, *aoa*, *aoaaa*, *pjtjp*, *jtj*, *k*, *a*, *p*, *j*, *r*, *o*, *t*. W_2 није дводимензионални палиндром, али има хоризонталне и вертикалне палиндроме. Њени хоризонтални палиндроми су: *ratar*, *ata*, *r*, *a*, *t*, *s*, *v*, *o*, *c*, *d*, *u*. Њени вертикални палиндроми су: *rvr*, *aa*, *aaa*, *rr*, *rrr*, *tt*, *ttt*, *vv*, *vvv*, *sss*, *ss*, *oo*, *ooo*, *r*, *a*, *t*, *s*, *v*, *o*, *c*, *d*, *u*.

1.38 Дефиниција. За дводимензионалну реч $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$ над алфабетом A , тако да $W = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_w$, где је C_j j -та колона од W , алфабет колона је скуп $U = \{C_1, C_2, \dots, C_w\}$ различитих колона од W . У том случају, дводимензионална реч може се посматрати као једнодимензионална реч над алфабетом колона U .

Следећа дефиниција је једнодимензионална верзија дефиниције 1.18 у којој k не мора бити цео број. U^w представља конкатенацију w копија речи U .

1.39 Дефиниција. Нека је $k \in \mathbb{Q}$ и $w \in \mathbb{N}$ тако да $w \geq k$. k -ти степен од једнодимензионалне речи U је најкраћи префикс U' од U^w тако да $|U'| \geq k|U|$.

1.40 Пример.

Нека је $U_1 = aba$, тада је $\frac{5}{3}$ -ти степен речи U_1 заправо $aba^{\frac{5}{3}} = abaab$, а $\frac{7}{3}$ -ти степен речи U_1 је $aba^{\frac{7}{3}} = abaaba$. Нека је $U_2 = ror$, тада је $\frac{11}{3}$ -ти степен речи U_2 $ror^{\frac{11}{3}} = rorrro$, док је 2. степен речи U_2 $rorror$.

1.41 Дефиниција. Нека је U бинарна реч над алфабетом $\{0, 1\}$. Њој комплементарна реч, ознаке U^c , јесте реч у којој се пресликава 0 у 1 и 1 у 0.

1.42 Пример. Нека је $U = 100101$, тада је $U^c = 011010$.

1.43 Дефиниција.

1. Дводимензионална реч $\widetilde{W}$ је примитивна ако за неку дводимензионалну реч W једначина $\widetilde{W} = W^{p \times q}$ за неко $p, q > 0$ имплицира да $p = q = 1$ и $\widetilde{W} = W$.
2. Дводимензионална реч $\widetilde{W}$ је периодична ако може да се напише као $\widetilde{W} = W^{p \times q}$ где или $p \geq 2$ или $q \geq 2$ за неку дводимензионалну реч W .

1.44 Лема. Нека је W дводимензионална реч. Тада постоји јединствена примитивна дводимензионална реч Y и позитивни цели бројеви i, j тако да $W = Y^{i \times j}$. Ако је Y димензија $h \times w$, тада се $(h \times w)$ назива периодом речи W .

1.45 Пример. Реч $W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ је примитивна, а $W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ нису примитивне, јер су једнаке са $0^{2 \times 2}$ и $10^{2 \times 1}$, редом. Дводимензионалне речи W_1, W_2 и W_3 имају периоде $(2 \times 2), (1 \times 1)$ и (1×2) , редом.

1.46 Примери. Реч $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ је периодична реч периода (1×3) за степена $(3, 1)$, јер је једнака са $100^{3 \times 1}$.

Реч $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ је периодична реч периода (1×4) за степена $(7, 1)$, јер је једнака са $1101^{7 \times 1}$.

Реч $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ је примитивна реч периода (3×3) за степена $(1, 1)$.

Реч $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ је периодична реч периода (3×3) за степена $(1, 3)$.

1.47 Дефиниција. Две коначне/бесконачне речи су изоморфне ако су једнаке до на преименовање слова.

1.48 Пример. $W = abba$ и $Y = cddc$ су изоморфне речи, јер се a преименује изоморфизмом у c , док се b преименује изоморфизмом у d . $[W]$ је скуп речи које су изоморфне са W или W^R и све имају исти период као W .

1.49 Дефиниција. За једнодимензионалну коначну реч $W = w_1 \dots w_w$ k -циклични померај речи W је реч $w_{k+1} \dots w_w w_1 \dots w_k$. Ако је реч бесконачна онда је k -циклични померај речи W реч $w_{k+1} w_{k+2} \dots$

1.50 Дефиниција. Реч W је t -полубесконачна, за $t \geq 2$, ако је број врста (или колона) t и број колона (или врста) бесконачан.

1.51 Дефиниција. Нека је W дводимензионална реч димензије $h \times w$ тако да

$$W = V_1 \ominus V_2 \ominus \dots \ominus V_h = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_w.$$

Тада:

1.

$$V_i \ominus V_{i+1} \ominus \dots \ominus V_h \ominus V_1 \ominus \dots \ominus V_{i-1}$$

за $1 \leq i \leq h$ је врста-конјугат од W .

2.

$$U_j \oplus U_{j+1} \oplus \dots \oplus U_w \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_{j-1}$$

за $1 \leq j \leq w$ је колона-конјугат од W .

1.52 Пример. Нека је $W = \begin{smallmatrix} a & a & b \\ b & b & b \\ a & b & a \end{smallmatrix}$. Тада је један од врста-конјугата реч

$W_1 = \begin{smallmatrix} b & b & b \\ a & b & a \\ a & a & b \end{smallmatrix}$. Један од примера колона-конјугата речи W је реч $W_2 = \begin{smallmatrix} a & b & a \\ b & b & b \\ b & a & a \end{smallmatrix}$.

2 Максималне дводимензионалне бинарне речи са ограниченим степеном

Ово поглавље је посвећено максималним дводимензионалним бинарним речима са ограниченим степеном. Дајемо сада формулацију главне теореме за ово поглавље. Све у вези овог поглавља можемо погледати у [1].

2.1 Теорема. *Нека је $d \in [[0, 4]]$, $h, w \in \mathbb{N}$, $h \geq w$ и $m_{\leq d}(h, w)$ дефинисано са:*

$$\begin{aligned}
 m_{\leq 0}(h, w) &= \lceil hw/2 \rceil, \\
 m_{\leq 1}(h, w) &= \begin{cases} hw/2, & \text{ако } h, w \equiv_2 0; \\ (h-1)w/2 + \lceil 2w/3 \rceil, & \text{ако } h \equiv_2 1 \text{ и } w \equiv_2 0; \\ h(w-1)/2 + \lceil 2h/3 \rceil, & \text{иначе,} \end{cases} \\
 m_{\leq 2}(h, w) &= \begin{cases} hw, & \text{ако } w = 1 \text{ или } h = w = 2; \\ (3h+1)/2, & \text{ако } h \equiv_2 1, h \geq 3 \text{ и } w = 2; \\ 3h/2, & \text{ако } h \equiv_2 0, h \geq 4 \text{ и } w = 2; \\ 2hw/3 + 2, & \text{ако } w = 3 \text{ или } h \equiv_3 w \equiv_3 0; \\ 2hw/3 + 4/3, & \text{ако } w \geq 4 \text{ и } h \equiv_3 w \not\equiv_3 0; \\ 2hw/3 + 1, & \text{ако } w \geq 4, hw \equiv_3 0 \text{ и } h \not\equiv_3 w; \\ 2hw/3 + 2/3, & \text{иначе,} \end{cases} \\
 m_{\leq 3}(h, w) &= \begin{cases} hw, & \text{ако } 1 \leq w \leq 2 \text{ или } 1 \leq h \leq 2; \\ hw - \gamma(G_{h-2, w-2}), & \text{иначе,} \end{cases} \\
 m_{\leq 4}(h, w) &= hw.
 \end{aligned}$$

Тада је $\max_{\leq d}(h, w) = m_{\leq d}(h, w)$.

Циљ нам је да нађемо вредност $\max_{\leq d}(h, w)$ за све могуће тројке (d, h, w) .

Овај проблем се може посматрати и као проблем о избегавању образаца, при чему се дводимензионалне речи које се разматрају могу интерпретирати као речи које избегавају одређене правоугаонике.

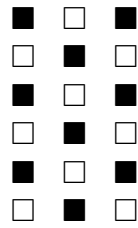
$$\begin{aligned}
d = 0 &: \{ \begin{array}{|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} \}. \\
d = 1 &: \{ \begin{array}{|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array}, \dots \}. \\
d = 2 &: \{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array}, \dots \}. \\
d = 3 &: \{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} \}. \\
d = 4 &: \emptyset.
\end{aligned}$$

Слика 1: Ситуације са ове слике за свако $d \in [[0, 4]]$ треба да избегавамо.

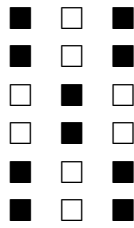
Пре него што почнемо са доказивањем теореме 2.1, даћемо неке дефиниције везане за ово поглавље.

2.2 Дефиниција. Дводимензионална реч $W \in \mathcal{W}_{h \times w}^{\leq d}$ се назива d -пуном ако $|W|_{\blacksquare} = \max_{\leq d}(h, w)$. Скуп свих d -пуних речи степена не већег од d обележавамо са $\mathcal{MW}_{h \times w}^{\leq d}$.

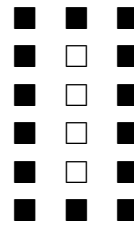
2.3 Пример. Илустрација d -пуних речи димензија 6×3 , за $d \in [[0, 4]]$:



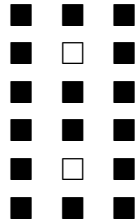
a) $d = 0$



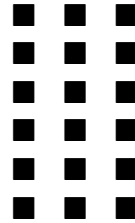
b) $d = 1$



c) $d = 2$



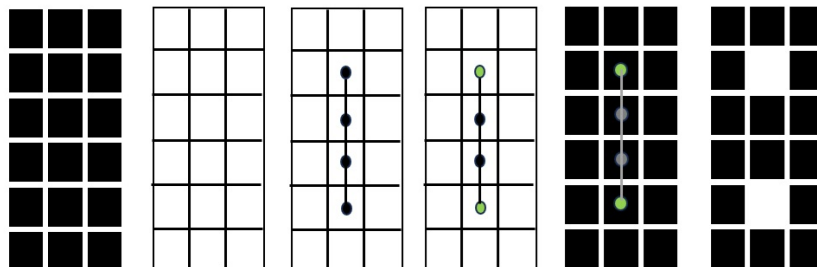
d) $d = 3$



e) $d = 4$

У примеру 2.3 под c) можемо видети реч налик змијици максималне величине за случај теореме 2.1 кад је $d = 2$. У примеру 2.3 под a) за случај теореме 2.1 кад је $d = 0$, можемо видети да је у питању реч налик на шаховску таблу. За под b) видимо дисјунктне домине (на пример за 7×4 нису присутне

само дисјунктне домине). Под е) је тривијално. Под d) је добијено решење на следећи начин, који ће бити објашњен на 22. страни:



Слика 2: Конструкција 3-пуне речи димензије 6×3 .

Сада прелазимо на главну ствар, а то је да докажемо ту теорему низом лема, пропозиција, последица и тврђења. Доказиваћемо теорему по случајевима у зависности од вредности параметра d . Но, прођимо прво кроз проверу да ли је у реду формулација теореме у складу са примером 2.3.

- Провера: а) $d = 0$ $\max_{\leq 0}(6, 3) = \lceil 6 \cdot 3/2 \rceil = 9$;
 б) $d = 1$ $\max_{\leq 1}(6, 3) = 6 \cdot (3 - 1)/2 + \lceil 2 \cdot 6/3 \rceil = 6 + 4 = 10$;
 в) $d = 2$ $\max_{\leq 2}(6, 3) = 2 \cdot 6 \cdot 3/3 + 2 = 14$;
 д) $d = 3$ $\max_{\leq 3}(6, 3) = 18 - \gamma(G_{4,1}) = 18 - 2 = 16$;
 е) $d = 4$ $\max_{\leq 4}(6, 3) = 18$.

2.1 Доказ теореме за $d = 4$

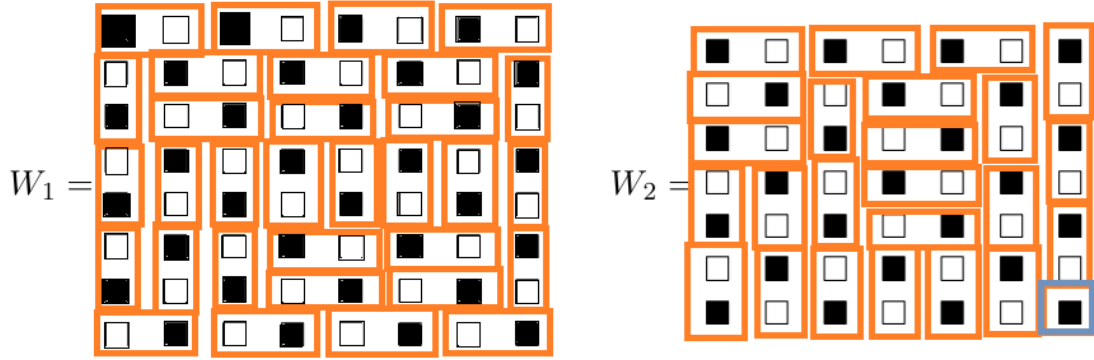
2.4 Пропозиција. *Теорема 2.1 је тачна за $d = 4$.*

Доказ. Тривијално, зато што све ћелије у $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$ могу бити црни квадратићи, а више их не може бити, јер реч $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$ има hw ћелија, па је стога $\max_{\leq 4}(h, w) = hw$. ■

2.2 Доказ теореме за $d = 0$

2.5 Пропозиција. *Теорема 2.1 је тачна за $d = 0$.*

На слици 3. су приказане речи $W_i = \begin{bmatrix} \blacksquare & \square \\ \square & \blacksquare \end{bmatrix}$, где $i = 1, 2$, које су произвољно поплочане са доминама или мономинима. W_1 је реч димензија 8×8 , а реч W_2 је димензија 7×7 . W_1 је поплочана са 32 домине, док је W_2 поплочана са 24 домине и 1 мономином.



Слика 3: Речи облика $\begin{bmatrix} \blacksquare & \square \\ \square & \blacksquare \end{bmatrix}$ поплочане доминама или мономинима.

Доказ. Нека је $W = \begin{bmatrix} \blacksquare & \square \\ \square & \blacksquare \end{bmatrix}^{h/2 \times w/2} \in \mathcal{W}^{h \times w}$. Тада је сваки $\blacksquare$ од W окружен са $\square$ квадратићима, што значи да је $\deg_{\blacksquare, W}(i, j) = 0$ за свако $(i, j) \in [[1, h]] \times [[1, w]]$ што имплицира да $W \in \mathcal{W}_{h \times w}^{\leq 0}$. Тада је $|W|_{\blacksquare} = \lceil hw/2 \rceil$ и имамо онда да је $\max_{\leq 0}(h, w) \geq \lceil hw/2 \rceil$ и обележимо ту неједнакост са $\spadesuit$. Сада ћемо показати да важи и $\max_{\leq 0}(h, w) \leq \lceil hw/2 \rceil$ и то означимо са $\clubsuit$. Помоћу Дирихлеовог принципа и $\spadesuit$ и $\clubsuit$ имаћемо да важи $\max_{\leq 0}(h, w) = \lceil hw/2 \rceil$. Нека је $W \in \mathcal{W}_{h \times w}^{\leq 0}$. Тада се W може поплочати са $\lfloor hw/2 \rfloor$ домина и $hw \bmod 2$ мономина. Пошто се у свакој домини може попунити највише један квадратић и пошто момино садржи највише један попуњен квадратић $\blacksquare$, у W може бити највише

$$\lfloor hw/2 \rfloor + hw \bmod 2 = \lceil hw/2 \rceil,$$

то јест,

$$\max_{\leq 0}(h, w) \leq \lceil hw/2 \rceil.$$

(Пошто се у сваки од $\lfloor hw/2 \rfloor$ домина и евентуални момино може сместити највише један $\blacksquare$, по Дирихлеовом принципу следи да укупан број $\blacksquare$ не може премашити $\lceil hw/2 \rceil$). Дакле, из $\spadesuit$ и $\clubsuit$ следи да важи

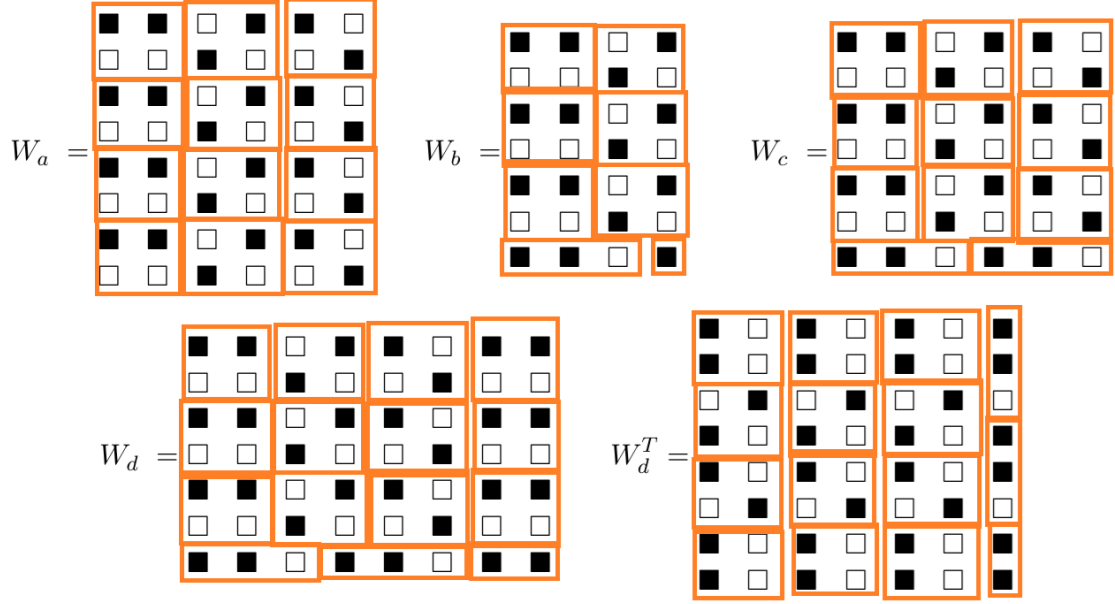
$$\max_{\leq 0}(h, w) = \lceil hw/2 \rceil.$$

Тиме смо доказали пропозицију. ■

2.3 Доказ теореме за $d = 1$

Доказ ће ићи поплочавањем правоугаоника 2×2 , 1×3 и евентуално $1 \times w \bmod 3$.

2.6 Пропозиција. Теорема 2.1 је тачна за $d = 1$.



Слика 4: Неке 1-пуне речи.

Реч W_a је димензије 8×6 . Реч W_b је димензије 7×4 . Реч W_c је димензије 7×6 . Реч W_d је димензије 7×8 . Реч W_d^T је димензије 8×7 .

Доказ. Доказ иде у четири случаја.

1. $(h, w) \equiv_2 (0, 0)$
2. $(h, w) \equiv_2 (1, 0)$
3. $(h, w) \equiv_2 (0, 1)$
4. $(h, w) \equiv_2 (1, 1)$.

1. Нека је $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$ дефинисано са

$$W = \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \square & \blacksquare & \blacksquare & \square \\ \square & \square & \blacksquare & \square & \square & \blacksquare \end{bmatrix}^{h/2 \times w/6} \quad (\star)$$

као што је пример под а. С једне стране $|W|_{\blacksquare} = hw/2$, $\deg_{\blacksquare, w}(i, j) \leq 1$ и $\deg_{\square, w}(i, j) \leq 1$ за свако $(i, j) \in [[1, h]] \times [[1, w]]$. Стога је $\max_{\leq 1}(h, w) \geq hw/2$. С друге стране, узмимо $W \in \mathcal{W}_{h \times w}^{\leq 1}$. Тада W можемо поделити на $hw/4$ плочице 2×2 као у речи W_a . Из чињенице да свака плочица сме да садржи највише

два ■ имамо $|W|_{\blacksquare} \leq 2 \cdot hw/4 = hw/2$, што имплицира да $\max_{\leq 1}(h, w) \leq hw/2$. Коначно, $\max_{\leq 1}(h, w) = hw/2$.

2. Нека је $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$ дефинисана са (★). (То је случај као за речи W_b, W_c и W_d .) Тада $|W|_{\blacksquare} = (h-1)w/2 + \lceil 2w/3 \rceil$, Штавише, $\deg_{\blacksquare, w}(i, j) \leq 1$ и $\deg_{\square, w}(i, j) \leq 1$ за свако $(i, j) \in [[1, h]] \times [[1, w]]$, што имплицира $W \in \mathcal{W}_{h \times w}^{\leq 1}$ и показује да $\max_{\leq 1}(h, w) \geq (h-1)w/2 + \lceil 2w/3 \rceil$. Претпоставимо сада да је $W \in \mathcal{W}_{h \times w}^{\leq 1}$. Тада W можемо поделити на $h(w-1)/4$ плочица 2×2 , $\lfloor w/3 \rfloor$ плочица 1×3 и $\mathbb{I}(h \bmod 3 \neq 0) \in \{0, 1\}$ плочица $1 \times h \bmod 3$ са највише 2, 2 и $h \bmod 3$ ■. Ово имплицира

$$|W|_{\blacksquare} \leq 2 \cdot h(w-1)/4 + 2 \cdot \lfloor w/3 \rfloor + w \bmod 3 = (h-1)w/2 + \lceil 2w/3 \rceil,$$

тако да је $\max_{\leq 1}(h, w) \leq (h-1)w/2 + \lceil 2w/3 \rceil$. Коначно имамо да је $\max_{\leq 1}(h, w) = (h-1)w/2 + \lceil 2w/3 \rceil$.

3. Следи доказ из чињенице да важи $\max_{\leq 1}(h, w) = \max_{\leq 1}(w, h)$.

4. Нека је W дефинисана са (★). Тада $|W|_{\blacksquare} = h(w-1)/2 + \lceil 2h/3 \rceil$, што имплицира $\max_{\leq 1}(h, w) \geq h(w-1)/2 + \lceil 2h/3 \rceil$. Преостаје да се покаже да је $\max_{\leq 1}(h, w) \leq h(w-1)/2 + \lceil 2h/3 \rceil$. Претпоставимо супротно да постоји реч W минималних димензија тако да $|W|_{\blacksquare} > \max_{\leq 1}(h, w)$. Пишимо $W = L \oplus R$, где је R са $w = 2$. Тада, $|R|_{\blacksquare} \leq 2(h-1)/2 + 2 = h+1$: R можемо поделити на $(h-1)/2$ плочица димензије 2×2 и једну плочицу димензије 1×2 са највише 2 ■. Али ако $|R| \leq h$, онда

$$|L|_{\blacksquare} = |W|_{\blacksquare} - |R|_{\blacksquare} > \max_{\leq 1}(h, w) - h = \max_{\leq 1}(h, w-2),$$

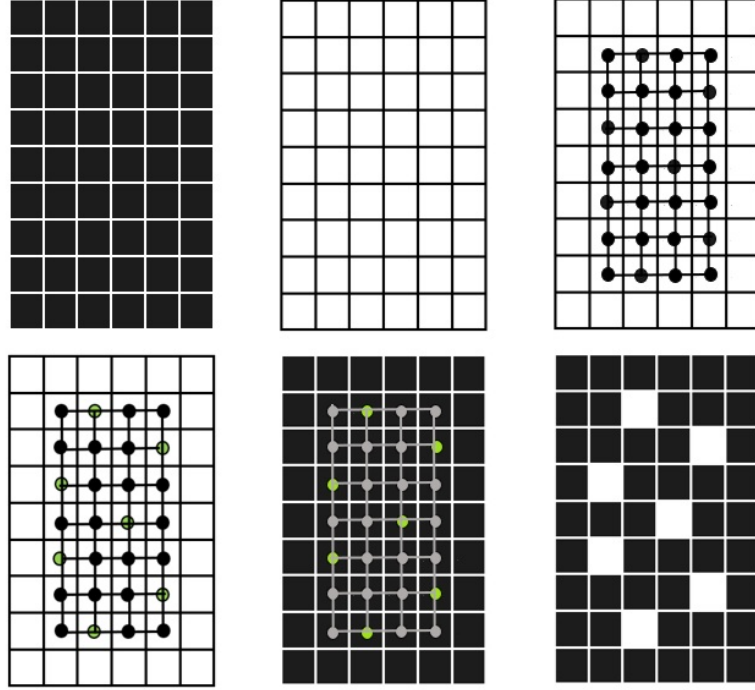
а то је у контрадикцији са претпоставком о минималношћу речи W . Стога је $|R|_{\blacksquare} = h+1$. Сада пишемо $W = U \ominus D$, где је D са $h = 2$. Сличним аргументовањем се добија да је $|D|_{\blacksquare} = w+1$. Ово све имплицира да је кроз у доњем десном углу речи W плочица 2×2 са три ■, а то се доводи у контрадикцију са претпоставком да има највише 2 ■ у плочицама. Зато нам то све заједно имплицира да важи

$$\max_{\leq 1}(h, w) = h(w-1)/2 + \lceil 2h/3 \rceil.$$

■

2.4 Доказ теореме за $d = 3$

Најпре се подсетимо примера 2.3, јер нам је то неопходно за конструисање 3-пуних речи. Једну од конструкција 3-пуне речи димензије 9×6 ћемо дати у следећем примеру.



Слика 5: Конструкција 3-пуне речи димензије 9×6 .

2.7 Пример.

Као што видимо горе на слици, 3-пуна реч се конструише тако што се у графу, унутар пуног правоугаоника, димензије $(h - 2) \times (w - 2)$ означи доминантни скуп и онда се поља са чворовима који припадају доминантном скупу претварају у празна поља.

2.8 Пропозиција. *Теорема 2.1 је тачна за $d = 3$.*

Доказ. Ако је $1 \leq h \leq 2$ или $1 \leq w \leq 2$ тада $W[i, j] = \blacksquare$ за свако $(i, j) \in [[1, h]] \times [[1, w]]$, то јест $\max_{\leq 3}(h, w) = hw$. Сада претпоставимо да је $h, w \geq 3$. Прво треба да покажемо да постоје 3-пуне речи $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$ такве да $W[i, j] = \blacksquare$ за све позиције на рубу речи (на ивицама матрице). Претпоставимо супротно да не постоје такве речи. Нека је W реч 3-пуна са $\square$ на левој ивици речи W , то јест постоји $i \in [[h]]$ такво да $W[i, 1] = \square$. Очигледно је да $\square$ не може бити у ћошку речи W , то јест $i \neq 1, h$: Ако би то био случај тада би реч W' настала од речи W тако што би вредност са $(i, 1)$ заменили са $\blacksquare$ које би задовољавало да $W' \in \mathcal{W}_{h \times w}^{\leq 3}$ и $|W'|_{\blacksquare} = |W|_{\blacksquare} + 1$, што је у контрадикцији са претпоставком да је W 3-пуна реч. Коначно, $i \neq 1, h$. Штавише, мора да важи $W[i, 2] = \blacksquare$. Ако то није случај онда се добија реч W'' од W тако што се вредност са $(i, 2)$ замени са $\blacksquare$ и задовољавало би да $W'' \in \mathcal{W}_{h \times w}^{\leq 3}$ и $|W''|_{\blacksquare} =$

$|W|_{\blacksquare} + 1$, што је у контрадикцији са тим да је W 3-пуна реч. Коначно, реч W''' добијена од W тако што се вредност са $(i, 1)$ замени са $\blacksquare$ и $(i, 2)$ са $\square$ задовољавало би да $W''' \in \mathcal{W}_{h \times w}^{\leq 3}$, $|W'''|_{\blacksquare} = |W|_{\blacksquare}$ и има један $\square$ мање од W на рубу, што је у контрадикцији са тим да W има најмањи број $\square$ на рубу од свих речи. То значи да постоје 3-пуне речи $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$ са рубом који садржи само $\blacksquare$. За крај, нека је $G_{h-2, w-2}$ мрежни подграф са скупом чворова $[[2, h-1]] \times [[2, w-1]]$ и нека је $U = \{(i, j) \in [[1, h]] \times [[1, w]] \mid W[i, j] = \square\}$. Уочавамо да $W \in \mathcal{W}_{h \times w}^{\leq 3}(\{\square, \blacksquare\})$ само ако је U доминантни скуп од $G_{h-2, w-2}$. Стога, W је 3-пуна реч ако и само ако је U минимални доминантни скуп од $G_{h-2, w-2}$. $\blacksquare$

2.5 Доказ теореме за $d = 2$

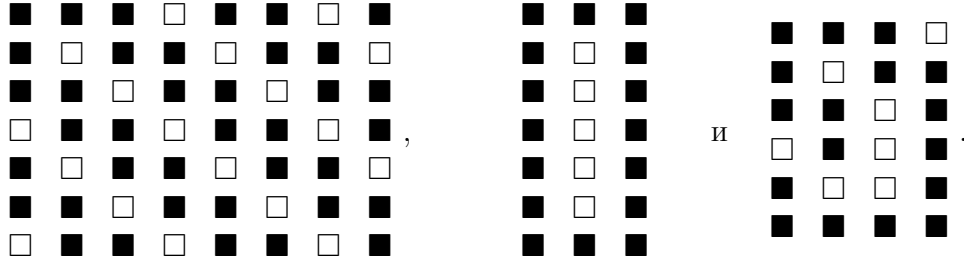
2.9 Пропозиција. *Теорема 2.1 је тачна за $d = 2$.*

Најпре ћемо да истакнемо табелу са вредностима $\max_{\leq 2}(h, w)$ за $h \in [[1, 9]]$, $w \in [[1, 9]]$ које следе на основу претходне пропозиције.

$h \backslash w$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	5	6	8	9	11	12	14
3	3	5	8	10	12	14	16	18	20
4	4	6	10	12	14	17	20	22	25
5	5	8	12	14	18	21	24	28	31
6	6	9	14	17	21	26	29	33	38
7	7	11	16	20	24	29	34	38	43
8	8	12	18	22	28	33	38	44	49
9	9	14	20	25	31	38	43	49	56

Табела 1: Табела вредности $\max_{\leq 2}(h, w)$ за $h \in [[1, 9]]$, $w \in [[1, 9]]$.

2.10 Примери. Речи димензија 8×8 , 7×3 , 6×4 , респективно:



Видимо да реч димензије 8×8 има 44 ■, реч димензије 7×3 има 16 ■, док реч димензије 6×4 има 17 ■. Гледајући у табелу 1, видимо да се све подудара.

Да бисмо доказали пропозицију 2.9 доказаћемо њој еквивалентну теорему преко вишка речи. Но, најпре морамо прво дефинисати појам вишка речи (енг. excess of a word).

2.11 Дефиниција. Нека је $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$. Вишак (енг. the excess) од речи W , ознаке $e(W)$, је дефинисан са $e(W) = |W|_{\blacksquare} - 2hw/3$. Максималан вишак се означава са $e_{\max}(h, w)$ и дефинисан је са $e_{\max}(h, w) = \max\{e(W) : W \in \mathcal{W}_{h \times w}^{\leq 2}\}$.

2.12 Напомена. Другим речима, вишак речи W је изражен као број ■ који W има у односу на случај када је попуњено две трећине површине њеног ограничавајућег правоугаоника. Максималан вишак који нека реч може имати, ако је садржана у правоугаонику димензија $h \times w$, означава се са $e_{\max}(h, w)$. Ако је R ограничавајући правоугаоник речи W , понекад пишемо $e(R)$ уместо $e(W)$.

2.13 Пропозиција. Нека су $W_1 \in \mathcal{W}_{h \times w_1}$, $W_2 \in \mathcal{W}_{h \times w_2}$ две речи димензија $h \times w_1$ и $h \times w_2$, редом. Слично, нека су две речи димензија $W_3 \in \mathcal{W}_{h_1 \times w}$ и $W_4 \in \mathcal{W}_{h_2 \times w}$ димензија $h_1 \times w$ и $h_2 \times w$, редом. Тада важи следеће:

$$\begin{aligned} e(W_1 \ominus W_2) &= e(W_1) + e(W_2) \\ e(W_3 \oplus W_4) &= e(W_3) + e(W_4). \end{aligned}$$

Сада када знамо дефиницију вишка и његову особину адитивности у односу на конкатенацију, можемо случај $d = 2$ теореме 2.1 преформулисати у следећу теорему која ће бити корисна.

2.14 Теорема. Нека је $h, w \in \mathbb{N}$ са $h \geq w$. Тада

$$e_{\max}(h, w) = \begin{cases} hw/3, & \text{ако } w = 1 \text{ или } h = w = 2; \\ h/6 + 1/2, & \text{ако } h \equiv_2 1, h \geq 3 \text{ и } w = 2; \\ h/6, & \text{ако } h \equiv_2 0, h \geq 4 \text{ и } w = 2; \\ 2, & \text{ако } w = 3 \text{ или } h \equiv_3 w \equiv_3 0; \\ 4/3, & \text{ако } w \geq 4 \text{ и } h \equiv_3 w \not\equiv_3 0; \\ 1, & \text{ако } w \geq 4, hw \equiv_3 0 \text{ и } h \not\equiv_3 w; \\ 2/3, & \text{иначе.} \end{cases}$$

За $h, w \in \mathbb{N}$, $\hat{e}_{\max}(h, w) = m_{\leq 2}(h, w) - 2wh/3$, тада важи $\hat{e}_{\max}(h, w) = e_{\max}(h, w)$.

У следећој табели биће приказ вредности од $e_{\max}(h, w)$ за $h \in [[1, 9]]$, $w \in [[1, 9]]$. Видимо да је присутна периодичност од шест случајева до на симетрију.

$h \backslash w$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1/3	2/3	1	4/3	5/3	2	7/3	8/3	3
2	2/3	4/3	1	2/3	4/3	1	5/3	4/3	2
3	1	1	2	2	2	2	2	2	2
4	4/3	2/3	2	4/3	2/3	1	4/3	2/3	1
5	5/3	4/3	2	2/3	4/3	1	2/3	4/3	1
6	2	1	2	1	1	2	1	1	2
7	7/3	5/3	2	4/3	2/3	1	4/3	2/3	1
8	8/3	4/3	2	2/3	4/3	1	2/3	4/3	1
9	3	2	2	1	1	2	1	1	2

Табела 2: Вредности вишка $e_{\max}(h, w)$ за $h \in [[1, 9]]$, $w \in [[1, 9]]$.

Прелазимо на доказ еквивалентне теореме. За базне случајеве доказивања теореме подразумевамо да $(h, w) \in (\mathbb{N} \times [[1, 6]]) \cup \{(7, 7)\}$.

2.15 Лема. Нека су $h, w \in \mathbb{N}$ и нека је $h \geq w$. Ако је $w = 1$ или $h = w = 2$, тада је $m_{\leq 2}(h, w) = hw$, то јест $e_{\max}(h, w) = hw/3$.

Доказ. Очигледно је, као на речима са наредне стране, да све ћелије могу бити црни квадратићи којих има hw . С друге стране, не може их бити

више од hw , јер их толико ни нема у речи. Следи да је $m_{\leq 2}(h, w) = hw$. Пошто је $m_{\leq 2}(h, w) = hw$, по дефиницији вишка речи следи да

$$\begin{aligned} e_{\max}(h, w) &= m_{\leq 2}(h, w) - 2hw/3 \\ &= hw - 2hw/3 \\ &= 3hw/3 - 2hw/3 \\ &= hw/3. \end{aligned}$$

$$W_{9 \times 1} = \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \quad W_{2 \times 2} = \begin{array}{cc} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{array} \quad W_{1 \times 1} = \blacksquare$$

Прва реч је случај кад је $w = 1$, друга реч је случај кад је $h = w = 2$, док је трећа реч случај кад је $h = w = 1$. ■

2.5.1 Подслучај $w = 2$

2.16 Пропозиција. Нека је $h, w \in \mathbb{N}, h \geq w$ тада важи

$$e_{\max}(h, 2) = \begin{cases} h/6 + 1/2, & \text{ако } h \equiv_2 1, h \geq 3 \text{ и } w = 2; \\ h/6, & \text{ако } h \equiv_2 0, h \geq 4 \text{ и } w = 2, \end{cases}$$

што је еквивалентно са

$$\max_{\leq 2}(h, 2) = \begin{cases} \frac{3h+1}{2}, & \text{ако } h \equiv_2 1, h \geq 3 \text{ и } w = 2; \\ \frac{3h}{2}, & \text{ако } h \equiv_2 0, h \geq 4 \text{ и } w = 2, \end{cases}$$

Доказ. Уочимо да је лако конструисати речи $W \in \mathcal{W}_{h \times 2}^{\leq 2}$ такве да $|W|_{\blacksquare} =$

$\left\lceil \frac{3 \cdot 2h}{4} \right\rceil$ као што је приказано на речима доле, тако да је $\max_{\leq 2}(h, 2) \geq \left\lceil \frac{3 \cdot 2h}{4} \right\rceil$.

$$W_{5 \times 2} = \begin{array}{cc} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \square \\ \blacksquare & \blacksquare \\ \square & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{array} \quad W_{6 \times 2} = \begin{array}{cc} \blacksquare & \blacksquare \\ \square & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \square \\ \square & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{array}$$

Претпоставимо да је h минимално тако да постоје речи $W \in \mathcal{W}_{h \times 2}^{\leq 2}$ са $|W|_{\blacksquare} = \left\lceil \frac{3 \cdot 2h}{4} \right\rceil + 1$. Према Дирихлеовом принципу постоји попуњени 2×2 фактор $W[[i, i+1]]$ од W . Ако је $W[[i, i+1]]$ у унутрашњости W тада су $W[i-1]$, $W[i+2]$ празне врсте. Фактор W је вертикална конкатенација три фактора, то јест $W = W_G \ominus W[[i-1, i+2]] \ominus W_D$, где је W_G горњи, а W_D доњи фактор. Тада

$$|W_G|_{\blacksquare} + |W_D|_{\blacksquare} = \left\lceil \frac{3 \cdot 2h}{4} \right\rceil + 1 - 4 = \left\lceil \frac{3 \cdot 2(h-4)}{4} \right\rceil + 3 \quad (1)$$

Али са претпоставком о минималности имамо $|W_G|_{\blacksquare} \leq \left\lceil \frac{3 \cdot 2h(W_G)}{4} \right\rceil$ и $|W_D|_{\blacksquare} \leq \left\lceil \frac{3 \cdot 2h(W_D)}{4} \right\rceil$, а то имплицира

$$|W_G|_{\blacksquare} + |W_D|_{\blacksquare} < \left\lceil \frac{3 \cdot 2(h-4)}{4} \right\rceil + 3,$$

што је у контрадикцији са (1). Тако да следи да $W[[i, i+1]]$ није у унутрашњости од W . Ако је $i = 1$ и $W[[i, i+1]]$ на врху W тада је $W[i+2]$ празна врста и користећи поново претпоставке минималности имамо

$$|W[[i+3, h]]|_{\blacksquare} \leq \left\lceil \frac{3 \cdot 2(h-3)}{4} \right\rceil < \left\lceil \frac{3 \cdot 2(h)}{4} \right\rceil + 1 - 4,$$

а то је у контрадикцији са тим да је $|W|_{\blacksquare} = \left\lceil \frac{3 \cdot 2h}{4} \right\rceil + 1$. Тако да $W[[i, i+1]]$ не може бити на врху W и W не постоји. $\blacksquare$

2.5.2 Преостали базни случајеви

Пре него што пређемо на општи случај, наводимо преостале базне случајеве. Њихови докази су знатно дужи и техничкији од случаја у којем је $w = 2$, а за даљи ток овог мастер рада потребне су нам пре свега њихове формулације. Зато доказе нећемо наводити; детаљи се могу наћи у [1], у одељку 3.1 и Додатку 4.2.

2.17 Пропозиција. Нека је h цео број. Ако је $h \geq 3$, онда важи

$$\max_{\leq 2}(h, 3) = \max_s(h, 3) = 2h + 2,$$

па је $e_{\max}(h, 3) = 2$.

2.18 Пропозиција. Нека су h и w природни бројеви, при чему је $h \geq w$ и $w \in \{4, 5, 6\}$. Тада је

$$e_{\max}(h, w) = \hat{e}_{\max}(h, w).$$

Другим речима, у свим овим случајевима вредности су управо оне дате у претходној теорему.

2.19 Пропозиција. За речи димензије 7×7 важи

$$e_{\max}(7, 7) = \hat{e}_{\max}(7, 7) = \frac{4}{3}.$$

Претходне пропозиције, заједно са већ размотреним случајевима у којима је $w = 1$ или $w = 2$, покривају све базне димензије које ће нам бити потребне у доказу општег случаја.

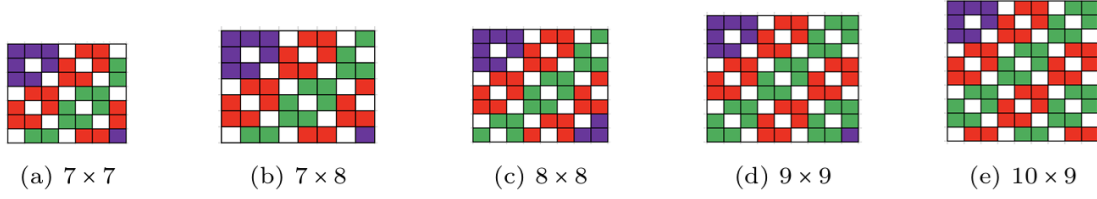
2.5.3 Подслучај $w > 6$

Сада прелазимо на општи случај. Најпре показујемо да се вредност $\hat{e}_{\max}(h, w)$ може достићи конструкцијом.

2.20 Лема. Нека је $W \in \mathcal{MW}_{h \times w}^{\leq 2}$ тако да $h, w > 6$. Тада $e(W) \geq \hat{e}_{\max}(h, w)$.

Доказ. Нека су i и j цели бројеви за које важи $0 \leq i, j \leq 2$, и нека су $h = 3k_1 + j$ и $w = 3k_2 + i$. Доказаћемо да постоји реч $W \in \mathcal{W}_{h \times w}^{\leq 2}$ за коју је $e(W) = \hat{e}_{\max}(h, w)$. У правоугаоник R димензија $h \times w$ најпре убацујемо облик Q вишка 1 у горњи леви угао (љубичасте ћелије на слици 6(a)). Затим се овај Q -облик надовезује обликом Q из ког је уклоњена ћелија у горњем левом углу, а поступак се понавља периодично. На овај начин попуњавамо R осим доњих j редова и десних i колона. Преостале доње редове попуњавамо по узору на редове $R[3 + j']$, где је j' цео број и $1 \leq j' \leq j$, а преостале десне колоне по узору на колоне $R^T[3 + i']$, где је i' цео број и $1 \leq i' \leq i$. На крају се доњи десни правоугаоник димензија $j \times i$ допуни са 0, 1 или 3 ћелије, у зависности од остатака (љубичасте ћелије на сликама 6(a)-6(d)). Тако добијамо реч $W \in \mathcal{W}_{h \times w}^{\leq 2}$ за коју је $e(W) = \hat{e}_{\max}(h, w)$. ■

За доказ горње границе потребна су нам још три структурна резултата о 2-пуним речима малих ширина. Њихови докази захтевају детаљну анализу речи ширина 3, 4 и 5 и уводе појмове који се касније не користе, па их овде не наводимо. Комплетни докази налазе се у [1, Додатак 4.3].



Слика 6: Неке 2-пуне речи.

2.21 Последица. Нека је $k \geq 2$ и $W \in \mathcal{W}_{(3k+1) \times 5}^{\leq 2}$ тако да је $W^T[[1, 4]] \in \mathcal{MW}_{4 \times (3k+1)}^{\leq 2}$. Тада је $e(W^T[5]) \leq -5/3$.

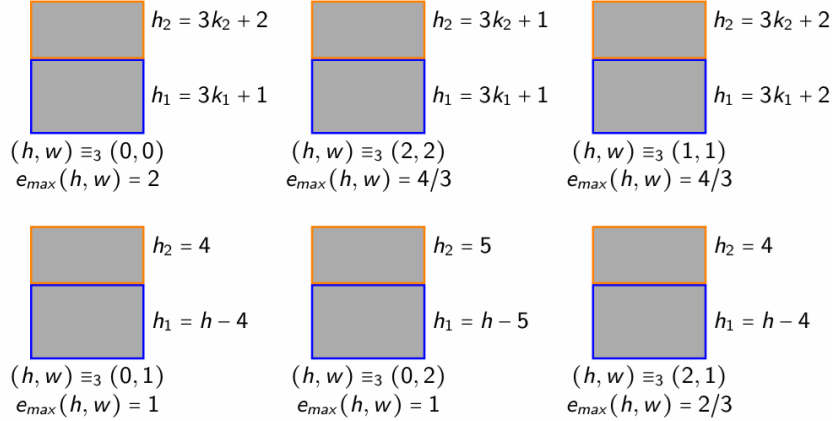
2.22 Последица. Нека је $k \geq 1$ и $W \in \mathcal{W}_{(3k+2) \times 6}^{\leq 2}$ тако да $W^T[[1, 5]] \in \mathcal{MW}_{5 \times (3k+2)}^{\leq 2}$. Тада је $e(W^T[6]) \leq -4/3$.

2.23 Последица. Нека је $W \in \mathcal{W}_{h \times 4}^{\leq 2}$ тако да $W^T[[1, 3]] \in \mathcal{MW}_{3 \times h}^{\leq 2}$. Тада:

- (i) $|W^T[4]|_{\square} \geq \lfloor (h-2)/3 \rfloor + 3$;
- (ii) Ако $h \equiv_3 1$, онда $|W^T[4]|_{\square} \geq \lfloor (h-2)/3 \rfloor + 4$;
- (iii) Ако $h \equiv_3 2$, онда $|W^T[4]|_{\square} \geq \lfloor (h-2)/3 \rfloor + 5$.

2.24 Лема. Нека је $W \in \mathcal{MW}_{h \times w}^{\leq 2}$ тако да $h, w > 6$. Тада $e(W) \leq \hat{e}_{\max}(h, w)$.

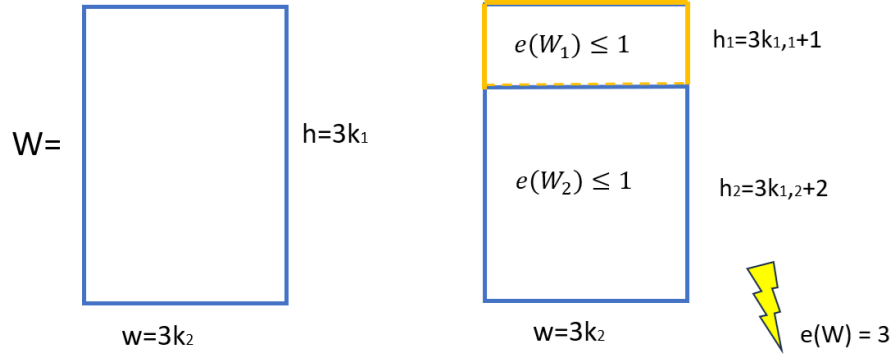
Доказ. Претпоставимо супротно. Међу свим контрапримерима $W \in \mathcal{W}_{h \times w}^{\leq 2}$



Слика 7: 6 случајева.

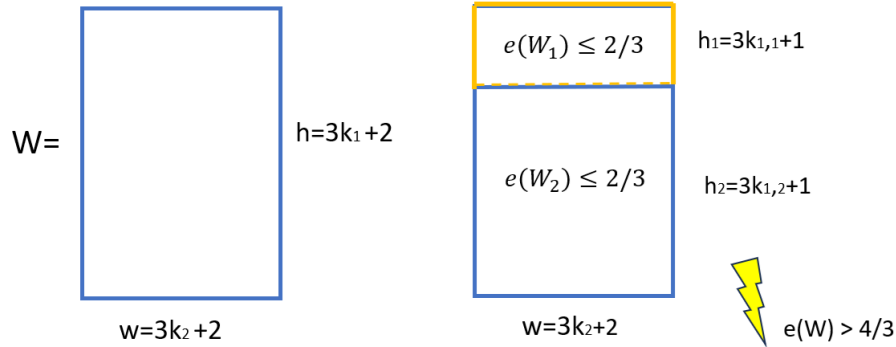
за које важи $e(W) > \hat{e}_{\max}(h, w)$, посматрајмо онај са минималним бројем поља. Доказ спроводимо у 6 случајева, до на симетрију.

Случај 1. $((3k_1) \times (3k_2))$, то јест $(h, w) \equiv_3 (0, 0)$. Нека је $h = 3k_1$, $w = 3k_2$. Претпоставимо да је $e(W) = 3$. Долажење до контракције можемо у наставку погледати на слици 8, где користимо оцене из случајева 4 и 5.



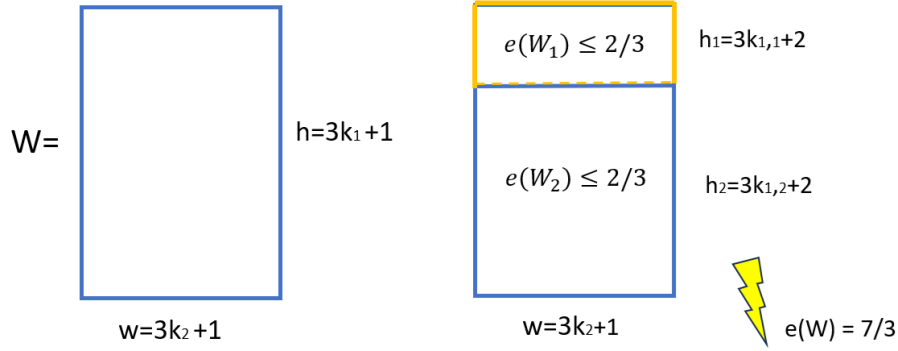
Слика 8: Случај 1. леме 2.24.

Случај 2. $((3k_1 + 2) \times (3k_2 + 2))$, то јест $(h, w) \equiv_3 (2, 2)$. Нека је $h = 3k_1 + 2$, $w = 3k_2 + 2$. Претпоставимо да је $e(W) = 7/3$. Погледати контрадикцију испод, где користимо оцenu из случаја 6.



Слика 9: Случај 2. леме 2.24.

Случај 3. $((3k_1 + 1) \times (3k_2 + 1))$, то јест $(h, w) \equiv_3 (1, 1)$. Нека је $h = 3k_1 + 1$, $w = 3k_2 + 1$. Претпоставимо да је $e(W) = 7/3$. Контрадикцију погледати у наставку на слици 10, где користимо оцenu из случаја 6.



Слика 10: Случај 3. леме 2.24.

Случај 4. $((3k_1 + 1) \times (3k_2))$, то јест $(h, w) \equiv_3 (1, 0)$. Нека је $W \in \mathcal{W}_{(3k_1+1) \times 3k_2}^{\leq 2}$ са $k_1 \geq 2, k_2 \geq 3$. Имамо $\hat{e}_{max}(3k_1 + 1, 3k_2) = 1$ тако да претпоставимо да је $e(W) = 2$. Нека је $W^T = W^T[[1, 4]] \ominus W^T[[5, 3k_2]]$, па из минималности следи $e(W^T[[1, 4]]) = 4/3$ и $e(W^T[[5, 3k_2]]) \leq 2/3$ (по случају 6), што имплицира $e(W^T[[1, 4]]) = 4/3$ и $e(W^T[[5, 3k_2]]) = 2/3$. Али према последици 2.21 једнакост $e(W^T[[1, 4]]) = 4/3$ имплицира $e(W^T[5]) \leq -5/3$. Стога $e(W^T[[1, 5]]) \leq -1/3$, тако да је $e(W^T[[6, 3k_2]]) \geq 7/3$, што је у контрадикцији са минималношћу (случај 3).

Случај 5. $((3k_1) \times (3k_2 + 2))$, то јест $(h, w) \equiv_3 (0, 2)$. Нека је $W \in \mathcal{W}_{3k_1 \times (3k_2+2)}^{\leq 2}$ са $k_1 \geq 3, k_2 \geq 2$. Имамо $\hat{e}_{max}(3k_1, 3k_2 + 2) = 1$ тако да претпоставимо да је $e(W) = 2$. Нека је $W = W[[1, 5]] \ominus W[[6, 3k_1]]$. По минималној претпоставци имамо $e(W[[1, 5]]) \leq 4/3$ и $e(W[[6, 3k_1]]) \leq \hat{e}_{max}(3(k_1 - 2), 3k_2 + 2) = 2/3$ (случај 6). Ово имплицира $e(W) = e(W[[1, 5]]) + e(W[[6, 3k_1]]) \leq 4/3 + 2/3 = 2$. $W[[1, 5]]$ и $W[[6, 3k_1]]$ су 2-пуне. Пошто је $W[[1, 5]]$ 2-пуна, из последице 2.22 следи да је $e(W[6]) \leq -4/3$. Како је $e(W[[6, 3k_1]]) = 2/3$, следи да мора бити $e(W[[7, 3k_1]]) \geq 2$. Ако је $k_1 > 3$, тада $\hat{e}_{max}(3(k_1 - 2), 3k_2 + 2) = 1$ (случај 5), што значи да $e(W[[7, 3k_1]]) \geq 2 > 1 = \hat{e}_{max}(3(k_1 - 2), 3k_2 + 2)$, што је у контрадикцији са минималношћу. Ако је $k_1 = 3$, тада $W[[7, 3k_1]] = W[[7, 9]]$ и мора да буду 2-пуне са $e(W[[7, 9]]) = 2$, што намеће да је $e(W[6]) = -4/3$. Међутим последица 2.23 (iii) налаже да ако је $W[[7, 9]]$ 2-пуна, тада $W[6]$ садржи најмање $\left\lfloor \frac{(3k_2 + 2) - 2}{3} \right\rfloor + 5 = k_2 + 5$ белих квадратића. Ово значи да је $e(W[6]) \leq -13/3$, што је у контрадикцији.

Случај 6. $((3k_1 + 2) \times (3k_2 + 1))$, то јест $(h, w) \equiv_3 (2, 1)$. Нека је $W \in \mathcal{W}_{(3k_1+2) \times (3k_2+1)}^{\leq 2}$, $k_1, k_2 \geq 2$. Имамо да је $\hat{e}_{max}(3k_1 + 2, 3k_2 + 1) = 2/3$ тако да претпоставимо $e(W) = 5/3$. Нека је $W = W[[1, 4]] \ominus W[[5, 3k_1 + 2]]$. Према минималности W имамо $e(W[[1, 4]]), e(W[[5, 3k_1 + 2]]) \leq 4/3$ (случај 3). Постоје два случаја која треба размотрити: или је $e(W[[1, 4]]) = 4/3$ и $e(W[[5, 3k_1 + 2]]) = 1/3$ или је $e(W[[1, 4]]) = 1/3$ и $e(W[[5, 3k_1 + 2]]) = 4/3$.

$2]] = 1/3$ или $e(W[[1, 4]]) = 1/3$ и $e(W[[5, 3k_1 + 2]]) = 4/3$. Детаљан доказ да оба случаја доводе до контрадикције може се наћи у [1, Додатак 4.4]. ■

Овине смо завршили наш главни задатак, а то је да покажемо да важи главна теорема 2.1.

3 Дводимензионални бинарни палиндроми

Као што је већ речено у предговору, ово поглавље мастер рада се бави дводимензионалним бинарним палиндромима. Појам дводимензионалних палиндрома је уведен са циљем карактеризације дводимензионалних Штурмових речи, који имају примену рецимо у компресији података, препознавању лица и препознавању образаца. У овом поглављу дајемо границу колико највише различитих палиндромских фактора могу имати одређене дводимензионалне бинарне речи. Такође, представљаћемо и неке доње границе за палиндромске факторе и то у зависности да ли је посматрана реч периодична или аperiодична. Дајемо и неке примере који показују да наведене границе се не могу побољшати. Детаљнији преглед ових резултата налази се у [9] и [10].

3.1 Горње ограничење броја различитих дводимензионалних палиндромских фактора у дводимензионалној бинарној речи

Подразумевамо да је двочлани алфабет $A = \{0, 1\}$ или $A = \{a, b\}$. У овом одељку дајемо колико највише различитих палиндромских фактора могу имати одређене дводимензионалне бинарне речи. На крају ове секције износимо две хипотезе. С обзиром на ограничење обима овог рада, презентоваћемо доказ само главне теореме. За њега је потребан низ помоћних лема и пропозиција, које формулишемо без доказа, а докази се могу пронаћи у [9]. Надаље, са π_w означавамо вредност $2w + \lfloor \frac{w}{2} \rfloor - 1$.

3.1 Лема. *Постоји најмање 8 дводимензионалних речи са π_w палиндрома у $\mathcal{W}_{2 \times w}$, за $w \geq 3$.*

Доказ. Нека је w парно, тј. $w = 2k$ и $X = (01)^{\frac{k}{2}} \in \mathcal{W}^+$. Имамо сада два случаја:

1. За k парно, посматрамо скуповете

$$A_{2k} = \{(01)^{\frac{w}{2}} \ominus XX^R, (01)^{\frac{w}{2}} \ominus X^RX, (10)^{\frac{w}{2}} \ominus XX^R, (10)^{\frac{w}{2}} \ominus X^RX\},$$

$$B_{2k} = \{W^R : W \in A_{2k}\};$$

2. За k непарно, посматрамо скуповете

$$A_{2k} = \{(01)^{\frac{w}{2}} \ominus XX^R, (10)^{\frac{w}{2}} \ominus XX^R, XX^R \ominus (01)^{\frac{w}{2}}, XX^R \ominus (10)^{\frac{w}{2}}\},$$

$$B_{2k} = \{W^c : W \in A_{2k}\}.$$

Нека је $S_{2k} = \{W : W \in A_{2k} \cup B_{2k}\}$. Ако је $X \neq X^R$ онда за све $W_1, W_2 \in S_{2k}$, $W_1 \neq W_2$. Свих 8 тражених речи из поставке леме припадају скупу S_{2k} . Слично за w непарно, с тим што S_{2k-1} дефинишемо као $S_{2k-1} = \{W : W \text{ је } 2 \times (2k - 1) \text{ префикс речи у } S_{2k}\}$. ■

3.2 Напомена. Уочавамо да ако је $W = W_1 \ominus W_2 \in \mathcal{W}_{2 \times w}$ палиндром, онда важи $W_2 = W_1^R$.

3.3 Лема. Ако је $W \in \mathcal{W}_{2 \times w}$, $w \geq 2$, дводимензионални палиндром, онда

$$P_{2d}(W) \leq 2w.$$

3.4 Пропозиција. Нека је T_w , за које је $w \geq 4$ и w парно, скуп свих дводимензионалних речи $W \in \mathcal{W}_{2 \times w}$ које задовољавају следеће:

1. $P_{2d}(W) = \pi_w$;
2. У речи W постоји $1 \times w$ палиндромски фактор;
3. Ако из речи W уклонимо префикс и суфикс димензије $2 \times k$, за свако k такво да је $2k < w$, добијамо дводимензионалну реч из $\mathcal{W}_{2 \times (w-2k)}$ која садржи π_{w-2k} палиндрома.

Тада важи $T_w = S_w$, где S_w је скуп дефинисан у леми 3.1.

3.5 Пропозиција. Нека је T_w , за које је $w \geq 7$ и w непарно, скуп свих дводимензионалних речи $W \in \mathcal{W}_{2 \times w}$ које задовољавају следеће:

1. $P_{2d}(W) = \pi_w$;
2. У речи W постоји $1 \times w$ палиндромски фактор;
3. Рекурзивним уклањањем суфикса димензије $2 \times k$ и префикса димензије $2 \times k$ из речи W , уклања се редом $3k$, односно $2k$ палиндрома из W , све док се не добије дводимензионална реч из $\mathcal{W}_{2 \times 2}$. У свакој фази тако добијена дводимензионална реч у $\mathcal{W}_{2 \times l}$ садржи π_l палиндрома.

Тада је $T_w = \emptyset$.

3.6 Лема. Нека је $W \in S_w$. Тада конкатенација колоне $C \in \mathcal{W}_{2 \times 1}$ ($W \oplus C$ или $C \oplus W$) не може створити 3 нова палиндрома.

3.7 Лема. Нека је $W \in \mathcal{W}_{2 \times w}$ таква да $W = C \oplus W_1$ или $W = W_1 \oplus C$, где $P_{2d}(W) = \pi_w$ и $P_{2d}(W_1) \leq \pi_{w-1}$ за $C \in \mathcal{W}_{2 \times 1}$ и $W_1 \in \mathcal{W}_{2 \times (w-1)}$.

- Ако је w парно, тада $P_{2d}(W_1) = \pi_{w-1}$ и конкатенацијом колоне C се формирају тачно 3 палиндрома.
- Ако је w непарно, тада $P_{2d}(W_1) = \pi_{w-1}$ (односно $\pi_{w-1} - 1$) и конкатенацијом C формирају се тачно 2 (односно 3) палиндрома.

Наредне две леме наводимо не само за бинарни случај. Нама ће бити од интереса само бинарна верзија, али пошто леме важе и општије, тако их и формулишемо.

3.8 Лема. Нека је $W \in \mathcal{W}_{2 \times w}$, за $w \geq 1$. Тада, дводимензионална реч $W \oplus (A_1 \ominus A_2)$ и $(A_1 \ominus A_2) \oplus W$, где $A_1, A_2 \in \mathcal{W}^*$, стварају највише 3 нова палиндрома, тј. највише 2 хоризонтална палиндрома и највише 1 палиндром димензије $2 \times t$ за $t \geq 1$.

3.9 Лема. За дводимензионалну реч W такву да $W = W_1 \ominus W_2 \in \mathcal{W}_{2 \times w}$, за $w \geq 1$,

- ако је $|Alph(W_1)| = 1$ или $|Alph(W_2)| = 1$, онда $P_{2d}(W) \leq 2w$;
- ако је $|Alph(W_1) \cap Alph(W_2)| \leq 1$, онда $P_{2d}(W) \leq 2w$.

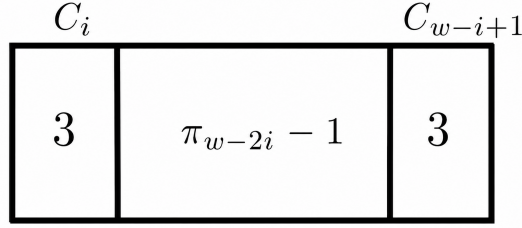
Сада прелазимо на битну теорему у овом потпоглављу.

3.10 Теорема. Нека је $W \in \mathcal{W}_{2 \times w}$, где $w \geq 2$. Тада

$$P_{2d}(W) \leq 2w + \left\lfloor \frac{w}{2} \right\rfloor - 1.$$

Доказ. Доказујемо потпуном математичком индукцијом по w . Што се тиче базе индукције довољно је погледати у табели 3. за $2 \leq w \leq 10$. Ова табела је добијена директним рачуном помоћу компјутера. Претпоставимо да важи $P_{2d}(W) \leq \pi_k$ за $W \in \mathcal{W}_{2 \times k}$, где $k \leq w$. Онда у индукцијском кораку треба да покажемо да важи $P_{2d}(W) \leq \pi_{w+1}$ за $W \in \mathcal{W}_{2 \times (w+1)}$. Нека је $W = C_1 \oplus \dots \oplus C_{w+1}$ и $W[i : j] = C_i \oplus \dots \oplus C_j$ (ову нотацију користимо и надаље у овом поглављу). Обележимо са $y_{i,j}$ (односно $z_{i,j}$) број палиндрома који нестају из фактора $W[i : j]$ када се уклони C_i колона (односно C_j). Према леми 3.8 имамо да се може највише створити 3 палиндрома конкатенацијом колоне. Онда имамо следеће случајеве:

1. $P_{2d}(W[1 : w]) < \pi_w$. Онда, $P_{2d}(W) \leq \pi_{w+1}$;
2. $P_{2d}(W[1 : w]) = \pi_w$, за w непарно. Тада, $P_{2d}(W) \leq \pi_w + 3 = \pi_{w+1}$;



Слика 11: Случај 1.

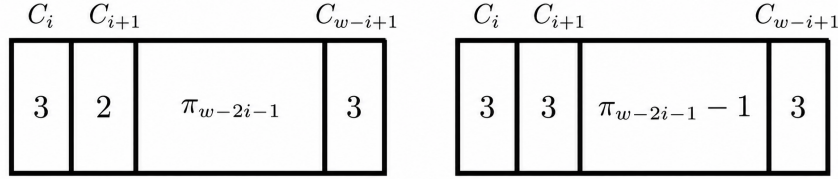
3. $P_{2d}(W[1 : w]) = \pi_w$ и $z_{1,w+1} \leq 2$ за w парно. Тада, $P_{2d}(W) \leq \pi_w + 2 = \pi_{w+1}$;
4. $P_{2d}(W[1 : w]) = \pi_w$ и $z_{1,w+1} = 3$ за w парно.

Показаћемо да за 4. не постоје такве речи које га задовољавају. Посматрамо реч $W \in \mathcal{W}_{2 \times (w+1)}$, где је w парно, такво да важи $P_{2d}(W[1 : w]) = \pi_w$ и $z_{1,w+1} = 3$. Контрапозицијом леме 3.3 (имајући у виду неједнакост $\pi_w > 2w$) добија се да $W[1 : w]$ није палиндром. Случајеве разликујемо у зависности од појављивања палиндрома димензије $1 \times w$ у $W[1 : w]$.

Случај 1: Претпоставимо да у $W[1 : w]$ постоји палиндром димензије $1 \times w$. Тада важе услови 1 и 2 из пропозиције 3.4 за $W[1 : w]$. Ако та реч $W[1 : w]$ задовољава и 3. услов из пропозиције 3.4 онда мора припадати скупу S_w , што је већ немогуће због леме 3.6. Зато мора постојати први ниво рекурзивног скраћивања на коме се изгуби „превише“ палиндрома. Под рекурзивним скраћивањем подразумевамо узастопно уклањање леве и десне крајње колоне речи у сваком кораку рекурзије. Међутим, пошто се уклањањем леве или десне крајње колоне (на слици изнад C_i и C_{w-i+1}) може изгубити највише 3 палиндрома, једини начин да се можда избегне контрадикција јесте да унутрашњи фактор има тачно $\pi_{w-2i} - 1$ палиндрома (видети слику изнад) и да се уклањањем сваке од две крајње колоне изгубе тачно по 3 палиндрома. То веома сужава могућу структуру речи и зато прелазимо сада на анализу подслучајева 1(a) и 1(b), као на слици 12.

Прво посматрајмо подслучај 1(b), па ћемо се онда осврнути на подслучај 1(a).

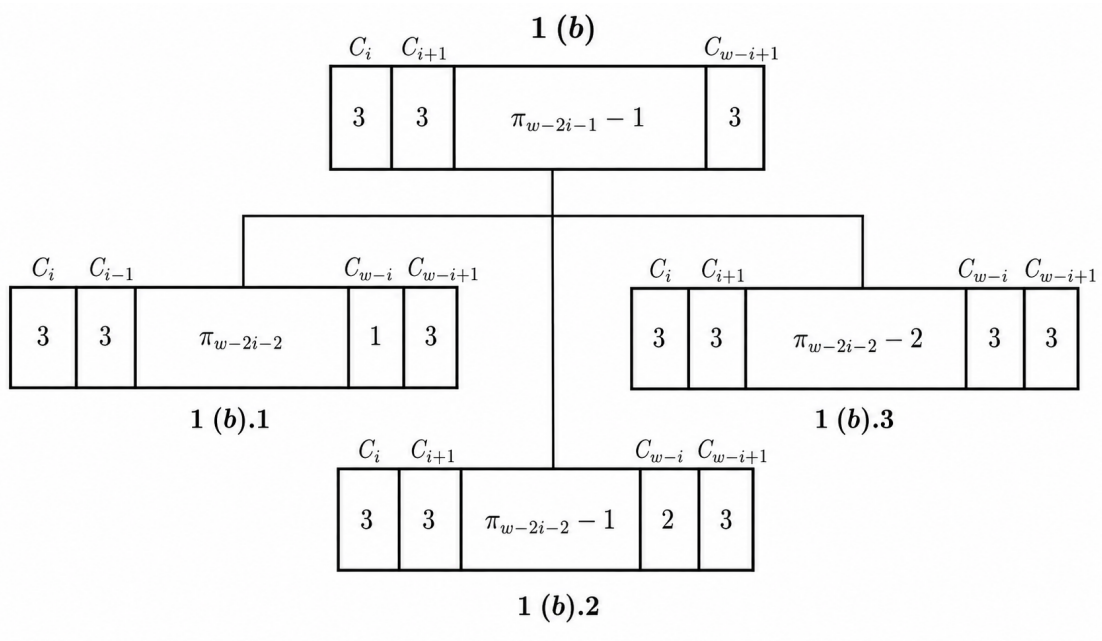
Подслучај 1(b): Ако важи $P_{2d}(W[i : w - i + 1]) = \pi_{w-2i+2}$ и $P_{2d}(W[i - 1 : w - i + 2]) = \pi_{w-2i+4}$, конкатенацијом колона C_{i-1} и C_{w-i+2} додаје се тачно 5 палиндрома у реч $W[i : w - i + 1]$. Зато бар једна од нових колона (C_{i-1} или C_{w-i+2}) мора да допринесе са 3 палиндрома. Због структуре речи и леме 3.9, ти палиндроми не могу настати произвољно, јер би то приморало да једна врста буде облика a^{w-2i} за неко $a \in A$, што је немогуће. Зато су могуће само одређене конфигурације крајњих колона, па се анализа своди на 3 нова подслучаја 1(b).1, 1(b).2, 1(b).3 као на слици 13.



Слика 12: Подслучајеви 1(a) и 1(b).

- Подслучај 1(b).1: У овом случају реч $W[i+2 : w-i-1]$ има паран број колона, па је реч слична речи са слике 11, па стога доказ следи.
- Подслучај 1(b).2: Ако C_{i-1} додаје 3 палиндрома речи $W[i : w-i-1]$, тада је број палиндромских фактора у речи $W[i-1 : w-i-1]$ заправо $\pi_{w-2i-2}-1+3+3+3 = \pi_{w-2i+1}+1$, што је у контрадикцији са индукцијском претпоставком. Ако C_{w-i+2} додаје 3 палиндрома речи $W[i+2 : w-i+1]$, тада реч $W[i+2 : w-i+2]$ има π_{w-2i+1} палиндрома. Приметимо да реч $W[i+1 : w-i+1]$ има π_{w-2i+1} са непарним бројем колона и да је реч $W[i+1 : w-i+2]$ слична речи $W[i+2 : w-i+1]$ која описује случај 1(a) (о њему ћемо касније), стога доказ следи.
- Подслучај 1(b).3: Овај случај је сличан случају 1(b).2, а завршавамо речју сличном речи $W[i+2 : w-i+1]$ описаној у случају 1(a). Дакле, рекурзивним уклањањем колона у овом случају или се долази до речи из случаја 1(a) или се долази до речи димензије 2×8 . Међутим, ниједна од речи из S_8 не задовољава услове из случаја 1(b), па се добија контрадикција.

Подслучај 1(a): Даћемо скицу доказа, јер је техника слична као у претходном подслучају 1(b). Овде посматрамо још мањи фактор $W[i+2 : w-i]$ и показујемо да он не може бити дводимензионални палиндром ни да садржи једнодимензионални палиндром пуне дужине. Због тога три палиндрома која се губе уклањањем колоне C_{w-i+1} морају потицати из већег фактора $W[i+2 : w-i+1]$. Отуда следи да $W[i+2 : w-i+1]$ има максималан број палиндрома, то јест $P_{2d}(W[i+2 : w-i+1]) = \pi_{w-2i}$. Затим, уколико овај фактор задовољава услове пропозиције 3.4, долазимо до контрадикторности са ранијим резултатима, па таква структура не може постојати. Мање подслучајеве за овај подслучај нећемо дати, јер је технички слично као и за 1(b).



Слика 13: Подслучајеви 1(b).1, 1(b).2 и 1(b).3.

Случај 2: Претпоставимо да нема $1 \times w$ палиндрома у $W[1 : w]$, тада посматрамо фактор $W[1 : w-1]$. По индукцијској претпоставци имамо $P_{2d}(W[1 : w-1]) \leq \pi_{w-1}$. Ако важи $P_{2d}(W[1 : w-1]) < \pi_{w-1}$ онда $P_{2d}(W[1 : w+1]) \leq \pi_{w+1}$ и ту је крај. Ако важи $P_{2d}(W[1 : w-1]) = \pi_{w-1}$ онда помоћу пропозиције 3.5 и доказа из случаја 1(a) долазимо до контрадикције. ■

$h \times w$	Укупан број 2D речи	$\text{Max}(P_{2d})$	Број 2D речи које достижу $\text{Max}(P_{2d})$
2×2	16	4	14
2×3	64	6	56
2×4	256	9	12
2×5	1024	11	100
2×6	4096	14	24
2×7	16384	16	204
2×8	65536	19	8
2×9	262144	21	164
2×10	1048576	24	32

Табела 3: Палиндромы у $2 \times w$ бинарним речима.

У табели 3. приказани су резултати претходне теореме. У првој колони су дате димензије речи. У другој колони је дат број укупних дводимензионалних

бинарних речи. У трећој колони је дат максималан број палиндромских фактора, док је у последњој колони дат број дводимензионалних речи које достижу максималан број палиндромских фактора.

3.11 Последица. *Нека је $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$, где $h, w \geq 2$, тада*

$$P_{2d}(W) \leq \frac{h}{2} \left(h(w-1) + \left\lfloor \frac{w}{2} \right\rfloor + 1 \right) + (h-2) + \frac{1}{2} \left\lceil \frac{w}{2} \right\rceil.$$

3.12 Напомена. У оригиналном раду недостаје сабирак $\frac{1}{2} \left\lceil \frac{w}{2} \right\rceil$. Без њега, последица се лако изводи у случају када је h паран број, али за непарну вредност граница без тог сабирка делује као превид аутора.

Даћемо сада теорему за дводимензионалне периодичне речи (објаснили смо раније у уводу шта су периодичне речи) над алфабетом произвољне кардиналности, па ћемо њу и теорему за дводимензионалне бинарне речи $2 \times w$ повезати у нову теорему која нас интересује. Доказ следеће теореме нећемо навести, јер је теорема везана за произвољни алфабет, а не искључиво за бинарни алфабет.

3.13 Теорема. *Нека је W дводимензионална периодична реч у $\mathcal{W}_{2 \times w}$, где $w \geq 2$, онда један од следећа 2 услова задовољава:*

1. *Ако је период речи W $1 \times l$ за $l \geq 1$, 2×1 или 2×2 , онда $P_{2d}(W) \leq 2w$;*
2. *Ако је период речи W $2 \times l$ за $l \geq 3$, онда $P_{2d}(W) \leq 2w + l - 3$.*

На крају овог потпоглавља поставићемо две хипотезе са краја рада [9].

3.14 Хипотеза. *За дводимензионалну бинарну реч $W \in \mathcal{W}_{h \times w}$, где $h, w \geq 3$, важи*

$$P_{2d}(W) \leq hw + (h-1) \left\lfloor \frac{w}{2} \right\rfloor$$

3.15 Хипотеза. *За речи задатих димензија $h \times w$, где $h \geq 2, w \geq 4$, оне које достижу максималан број палиндрома морају бити бинарне.*

3.2 Доње ограничење броја различитих дводимензионалних палиндромских фактора у дводимензионалној бинарној речи

У овом потпоглављу представимо неке доње границе за различите палиндромске факторе у дводимензионалној бинарној речи и то у зависности да ли је посматрана реч периодична или непериодична. Даћемо и неке примере који показују да се наведене границе не могу побољшати. Даћемо само неке доказе тврђења, док преостале доказе можете погледати детаљније у [10].

3.16 Лема. Нека је W дводимензионална бинарна реч димензије $2 \times w$, где $w \geq 3$, у којој се појављују само слова a и b . Тада су следеће тврдње тачне:

1. W нема палиндром димензије $2 \times t$, за $t \geq 1$ ако и само ако је облика $a^w \ominus b^w$ или њеног врста-конјугата;
2. W има тачно један палиндром димензије $2 \times t$, за $t \geq 1$ ако и само ако је једног од следећих облика:

$$\begin{array}{cc} a^{w-1}b & ab^{w-1} \\ b^{w-1}a & ba^{w-1} \end{array}, \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^{1 \times i_1} a \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^{1 \times i_2} a \cdots \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^{1 \times i_k}$$

где $1 \leq k \leq \left\lceil \frac{w}{2} \right\rceil$, $i_j > 0$ за $2 \leq j \leq k-1$ и $i_1, i_k \geq 0$ или је облика њених врста-конјугата.

3. Свака друга дводимензионална реч W има најмање 2 палиндрома димензије $2 \times t$, за $t \geq 1$.

3.17 Пропозиција. Бинарне 2-полубесконачне речи имају најмање 10 палиндромских фактора.

3.18 Лема. Нека је W h -полубесконачна бинарна реч таква да W има највише један палиндром димензије $h \times t$, $t \geq 1$ за $h = 3, 4$. Тада W има бесконачно много хоризонталних палиндрома.

3.19 Напомена. Нека је W h -полубесконачна реч за $h = 3, 4, 5$ тако да све врсте W_h имају тачно 8 палиндромских фактора. Таквих речи има 12^h . Може се проверити да важи $P_{2d}(W_3) \geq 14$, $P_{2d}(W_4) \geq 16$ и $P_{2d}(W_5) \geq 20$.

3.20 Пропозиција. Бинарне 3-полубесконачне речи имају најмање 14 палиндромских фактора.

Доказ. Посматрамо бинарну 3-полубесконачну реч W . Имамо следећа 3 случаја.

1. случај: Ако све врсте речи W имају тачно 8 палиндромских фактора, онда, по претходној напомени, следи да има најмање 14 палиндромских фактора.
2. случај: Ако најмање једна од врсти речи W има најмање 11 палиндромских фактора и W има коначан број палиндромских фактора, онда према леми 3.16 има најмање 2 палиндрома димензије $2 \times t$, где $t \geq 1$ и према претходној леми следи да мора да има најмање 2 палиндрома димензије $3 \times t$, где $t \geq 1$. Стога W има најмање 15 палиндрома.

3. случај: У овом случају дајемо само резултат без доказа. Ако постоји врста речи W са више од 8 палиндрома такве да све врсте речи W имају мање или једнако од 10 палиндрома, тада реч W има најмање 16 палиндрома.

Дакле, можемо закључити да је најмањи број палиндромских фактора у бинарној 3-полубесконачној речи заправо 14. ■

3.21 Пропозиција. *Бинарне 4-полубесконачне речи имају најмање 16 палиндромских фактора.*

Дајемо сада пример који показује да се границе из пропозиција 3.17, 3.20 и 3.21 не могу побољшати.

3.22 Пример. Нека су $X = aababb$ и $Y = abbaab$ једнодимензионалне бинарне речи и нека је W_h , где $2 \leq h \leq 4$, h -полубесконачна бинарна реч тако да:

1. $W_2 = (X \ominus Y)^{1 \times \infty / 6}$;
2. $W_3 = (X \ominus Y \ominus X)^{1 \times \infty / 6}$;
3. $W_4 = (X \ominus Y \ominus X \ominus Y)^{1 \times \infty / 6}$.

Напомена: Горе смо искористили дефиницију 1.18, тако што смо пустили да n из дефиниције тежи у бесконачност. Имамо

$$W_2 = \begin{matrix} aababbaababb \dots \\ abbaababbaab \dots \end{matrix}, \quad W_3 = \begin{matrix} aababbaababb \dots \\ abbaababbaab \dots \\ aababbaababb \dots \end{matrix} \quad \text{и} \quad W_4 = \begin{matrix} aababbaababb \dots \\ abbaababbaab \dots \\ aababbaababb \dots \\ abbaababbaab \dots \end{matrix}.$$

Видимо да је

$$PAL_{2d}((X \ominus Y)^{1 \times 12 / 6}) = \{a, b, aa, bb, a \ominus a, b \ominus b, aba, bab, abba, baab\}.$$

У $(X \ominus Y \ominus X)^{1 \times 12 / 6}$ се додатно појављује следећи скуп палиндромских фактора:

$$\{a \ominus a \ominus a, b \ominus b \ominus b, a \ominus b \ominus a, b \ominus a \ominus b\}.$$

Док се у $(X \ominus Y \ominus X \ominus Y)^{1 \times 12 / 6}$ додатно јавља следећи скуп палиндромских фактора:

$$\{a \ominus a \ominus a \ominus a, b \ominus b \ominus b \ominus b\}.$$

Приметимо да је X 3-циклични померај речи Y . Посматрајући овај пример очигледно је да важи $P_{2d}(W_2) = 10$, $P_{2d}(W_3) = 14$ и $P_{2d}(W_4) = 16$. Тиме смо показали да се доње границе не могу побољшати.

Пропозиција која следи нам служи за доказивање теореме о најмањем броју различитих палиндромских фактора у бесконачној бинарној дводимензионалној речи.

3.23 Пропозиција. *Најмањи број палиндромских фактора у бинарној 5-полубесконачној речи, у којој све врсте имају мање или једнако од 10 палиндрома, је 20.*

3.24 Теорема. *Бесконачна бинарна дводимензионална реч има најмање 20 палиндромских фактора.*

Доказ. Нека су P_1 и P_2 префикси димензија $(5, \infty)$ и $(\infty, 5)$ речи W , редом. Ако постоји једна врста и једна колона у W са по 11 палиндрома, тада важи $P_{2d}(W) \geq 11 + 11 - 2 = 20$, јер заједнички тада могу бити само тривијални палиндроми. Ако све врсте префикса P_1 или све колоне префикса P_2 , или оба имају мање од 11 палиндрома, тада према претходној пропозицији префикс P_1 и/или префикс P_2 имају најмање 20 палиндрома. Тиме смо доказали теорему. ■

3.25 Пример. Нека је $V = ababba \oplus babbaa \oplus abbaab \oplus bbaaba \oplus baabab \oplus aababb$. Управо бесконачна реч $W = (V)^{\infty/6 \times \infty/6}$ има 20 различитих палиндромских фактора. Остављамо читаоцу да пронађе свих 20 палиндромских фактора и да погледа детаљније у [10]. Реч W заправо изгледа овако:

$$W = \begin{array}{cccccccccccccccc} a & b & a & b & b & a & a & b & a & b & b & a & \dots \\ b & a & b & b & a & a & b & a & b & b & a & a & \dots \\ a & b & b & a & a & b & a & b & b & a & a & b & \dots \\ b & b & a & a & b & a & b & b & a & a & b & a & \dots \\ b & a & a & b & a & b & b & a & a & b & a & b & \dots \\ a & a & b & a & b & b & a & a & b & a & b & b & \dots \\ a & b & a & b & b & a & a & b & a & b & b & a & \dots \\ b & a & b & b & a & a & b & a & b & b & a & a & \dots \\ a & b & b & a & a & b & a & b & b & a & a & b & \dots \\ b & b & a & a & b & a & b & b & a & a & b & a & \dots \\ b & a & a & b & a & b & b & a & a & b & a & b & \dots \\ a & a & b & a & b & b & a & a & b & a & b & b & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

3.26 Лема. *Не постоји апериодична 2-полубесконачна бинарна реч са 12 палиндрома.*

$$W = \begin{array}{l} aabbabaaabbabaabbabaaabbabaaab \dots \\ babaaabbabaabbabaaabbabaaabbab \dots \end{array}$$
$$PAL_{2d}(W) = \{a, b, aa, bb, aaa, aba, bab, abba, baab, baaab, a \ominus a, b \ominus b, ba \ominus ab\}.$$

3.28 Пропозиција. *Апериодична 2-полубесконачна бинарна реч има најмање 13 палиндромских фактора.*

3.30 Пропозиција. Најмањи број палиндромских фактора у апериодичној 4-полубесконечној бинарној речи је већи или једнак са 17.

1. $MinP_{2d}(X_{ap}^{[2]}) = 13$;
2. $15 \leq MinP_{2d}(X_{ap}^{[3]}) \leq 24$;
3. $17 \leq MinP_{2d}(X_{ap}^{[4]}) \leq 27$;
4. $20 \leq MinP_{2d}(X_{ap}^{[h]}) \leq 28, h \rightarrow \infty$.

43

4 Факторска сложеност дводимензионалних бинарних речи

У овом поглављу говорићемо о факторској сложености дводимензионалних бинарних речи. Прво треба да објаснимо шта се то тачно подразумева под факторском сложеностју једнодимензионалних бинарних речи, па онда ту причу проширујемо на дводимензионалне бинарне речи.

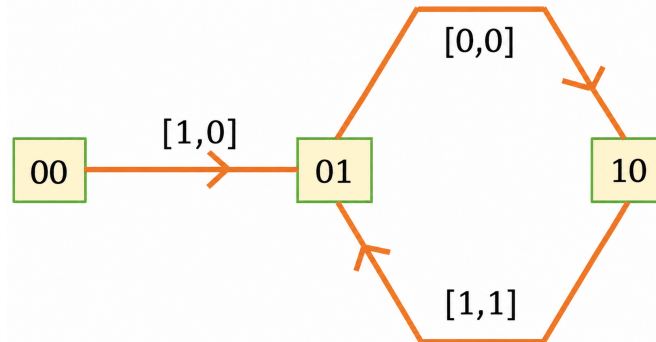
4.1 Факторска сложеност једнодимензионалних бинарних речи

У овом делу показате једну занимљиву теорему у вези факторске сложености једнодимензионалних бинарних речи. Но, да бисмо били у могућности да је докажемо, морамо да дефинишемо појам фактор-графа неке речи.

Факторска сложеност заправо представља комплексност речи у зависности од фактора које реч садржи.

4.1 Дефиниција. Нека је W бесконачна реч. Фактор-граф реда w речи W , у ознаци $G_w(W)$, је оријентисан граф чији су чворови елементи скупа $F_w(W)$, дефинисаног на првој страници мастер рада, а из чвора U у чвор V постоји грана ако и само ако постоје слова a и b таква да су Ua и bV фактори речи W и важи $Ua = bV$.

4.2 Пример.



Слика 14: Фактор-граф реда 2 речи $0(01)^\infty$

Дајемо сада формулацију теореме и њен доказ.

4.3 Теорема. Нека је W једнодимензионална бинарна бесконачна реч. Тада је реч W евентуално периодична ако и само ако за неки природан број w важи $|F_w(W)| \leq w$.

Доказ. Доказујемо прво смер слева надесно. Нека је W евентуално периодична реч. Дакле, она је облика $W = UV^\infty$, за неке коначне речи U и V . Лако је видети да за свако w важи $|F_w(W)| \leq |UV|$. Узмимо баш да је $w = |UV|$. Тиме је доказ ове импликације завршен.

Докажимо сад други смер. У овом доказу, прво ћемо доказати један међукорак, па помоћу њега ћемо извршити доказ овог смера теореме. Најпре, доказујемо да из $|F_w(W)| \leq w$ следи да за неко $w \in \mathbb{N}$ важи $|F_w(W)| = |F_{w+1}(W)|$. Претпоставка да је $|F_w(W)| \leq w$ је исто што и $|F_w(W)| < w + 1$. Претпоставимо супротно, тј. да за све $w \in \mathbb{N}$ важи $|F_w(W)| < |F_{w+1}(W)|$. Тада можемо да запишемо да је $|F_{w+1}(W)| = |F_w(W)| + \mu(w)$, где је $\mu(w)$ функција за коју важи $\mu(w) \geq 1$ за све природне бројеве w . Сада имамо

$$|F_w(W)| = |F_1(W)| + \sum_{i=1}^{w-1} \mu(i) \geq w + 2 - 1 = w + 1.$$

Горе смо у неједнакости, у међуосталом, користили и податак да је W бинарна реч. Добили смо контрадикцију са почетном претпоставком.

Сада треба да докажемо да из чињенице да за неко $w \in \mathbb{N}$ важи $|F_w(W)| = |F_{w+1}(W)|$ следи да је W евентуално периодична реч. Нека постоји w такво да је $|F_w(W)| = |F_{w+1}(W)|$. Посматрајмо сада фактор-граф реда w ове речи. Како је сваки фактор реда w префикс неког фактора реда $w + 1$, следи да из сваког чвора излази бар једна грана. Услов $|F_w(x)| = |F_{w+1}(x)|$ значи да сваки фактор дужине w може бити продужен на јединствен начин, па све заједно имамо да из сваког чвора излази тачно једна грана. Путања коју бесконачна реч описује је јединствено одређена, и (евентуално после неколико корака) кружиће по контури. Ово управо значи да је реч W евентуално периодична, чиме је готов доказ. ■

Претходна теорема заправо представља гранични случај, пошто већ за $|F_w(W)| = w + 1$ важи да је W аперидична реч. Знамо из дефиниције 1.8 да то важи за Штурмове речи, па самим тим су Штурмове речи аперидичне. Тај доказ нећемо дати у овом мастер раду, већ је значајно да напоменемо то.

Подсетимо се примера Фибоначијеве речи F са стране 43. Она је заправо Штурмова реч и тај доказ нећемо дати. Имамо код Фибоначијеве речи следеће:

- $F_0(F) = \{E\}$, следи $|F_0(F)| = 1$;
- $F_1(F) = \{a, b\}$ следи $|F_1(F)| = 2$;

- $F_2(F) = \{ab, aa, ba\}$ следи $|F_2(F)| = 3$;
- $F_3(F) = \{aba, baa, aab, bab\}$ следи $|F_3(F)| = 4$;
- $F_4(F) = \{abaa, baab, aaba, abab, baba\}$ следи $|F_4(F)| = 5$...

Сада прелазимо на причу о факторској сложености, али дводимензионалних бинарних речи.

4.2 Факторска сложеност дводимензионалних бинарних речи

Након постављених резултата о факторској сложености једнодимензионалних бинарних речи, природно је да се питамо шта се дешава са факторском сложеностју дводимензионалних бинарних речи. Ниват је поставио хипотезу која тврди да су дводимензионалне речи са малом правоугаоном сложеностју периодичне. Она је управо аналогон теореме 4.3, али у две димензије. Под правоугаоном сложеностју подразумева се, у нашем раду, факторска сложеност дводимензионалних бинарних речи, чији скуп смо дали у дефиницији 1.12. У овом одељку појам периода односи се на вектор периода бесконачне конфигурације у $\mathbb{Z}^2$, и не треба га мешати са периодом коначне дводимензионалне речи из леме 1.44. Такође да напоменемо да сви резултати у овој секцији важе за произвољни коначни алфавет, али пошто се ми бавимо бинарним писањем свуда да је алфавет бинаран. Сада дајемо формулацију Ниватове хипотезе која и даље није доказана.

4.4 Хипотеза. *Нека је W дводимензионална бинарна реч и $F_{h,w}(W)$ скуп свих фактора димензије $(h \times w)$ речи W . Ако постоји пар природних бројева (h_0, w_0) такав да $|F_{h_0, w_0}| \leq h_0 w_0$, тада реч W допушта ненула вектор периода, тј. постоји $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ тако да важи за сваки пар $(h, w) \in \mathbb{Z}^2$, $W_{h+x, w+y} = W_{h, w}$.*

4.5 Напомена. Иако је негде природно да у претходној хипотези уместо $\mathbb{Z}^2$ иде $\mathbb{N}^2$, математичари претпостављају да је ипак боље да се у дводимензионалним бинарним речима индекси гледају над $\mathbb{Z}^2$.

Као што смо већ рекли, Ниватова хипотеза је и даље отворено питање. Многи математичари су покушали да је докажу, стога ћемо дати у овој секцији неке резултате који су од значаја за доказивање Ниватове хипотезе.

Као први корак ка Ниватовој хипотези, Зандер и Тајдеман су у [13] показали следеће:

4.6 Теорема. *Нека је W дводимензионална бинарна реч. Ако постоји неко $h \in \mathbb{N}$ такво да је $|F_{h,2}(W)| \leq 2h$ (или ако постоји неко $w \in \mathbb{N}$ такво да је $|F_{2,w}(W)| \leq 2w$) тада је W периодична.*

Убрзо након тога, Елифанио, Коскас и Мигнози су у [6] доказали верзију Ниватове хипотезе:

4.7 Теорема. *Нека је W дводимензионална бинарна реч. Ако претпоставимо да постоје два природна броја h, w таква да $|F_{h,w}(W)| < \frac{hw}{144}$, тада је W периодична.*

Затим су Квас и Замбони додатно још побољшали резултат истраживања, који можете погледати детаљније у [11]:

4.8 Теорема. *Нека је W дводимензионална бинарна реч. Ако претпоставимо да важи $|F_{h,w}(W)| < \frac{hw}{16}$, тада је W периодична.*

Насупрот томе, Зандери и Тајдеман су у [12, пример 5] пронашли контра-примере за аналогон Ниватове хипотезе у већим димензијама.

Затим су Ван Сир и Брина Кра дали побољшање теореме Кваса и Замбонија у научном раду [5]:

4.9 Теорема. *Нека је W дводимензионална бинарна реч. Ако претпоставимо да постоје два природна броја h, w таква да $|F_{h,w}(W)| \leq \frac{hw}{2}$, тада је W периодична.*

Доказ претходне теореме је динамичке природе: дводимензионалној речи W се придружује $\mathbb{Z}^2$ -динамички систем и проучава се његова субдинамика, како би се могла доказати периодичност за W .

У [4] можемо пронаћи доказ Ниватове хипотезе за $w \leq 3$. Метод укључује превођење комбинаторног проблема на питање о неекспанзивним потпросторима одређеног $\mathbb{Z}^2$ -динамичког система, а затим анализу добијеног система.

У референци [7], Кари и Сабадош су доказали да се дводимензионалне речи мале сложености могу разложити на суму периодичних речи, док је у [14] Сабадош показао да ако постоји таквих највише две компоненте, да онда следи да важи Ниватова хипотеза.

И за крај, најновији резултат можемо погледати у [3], а овде ћемо вам изнети тај главни резултат:

4.10 Теорема. *Нека је W дводимензионална бинарна реч. Ако постоји неко $w \in \mathbb{N}$ такво да је $|F_{4,w}(W)| \leq 4w$ тада је W периодична.*

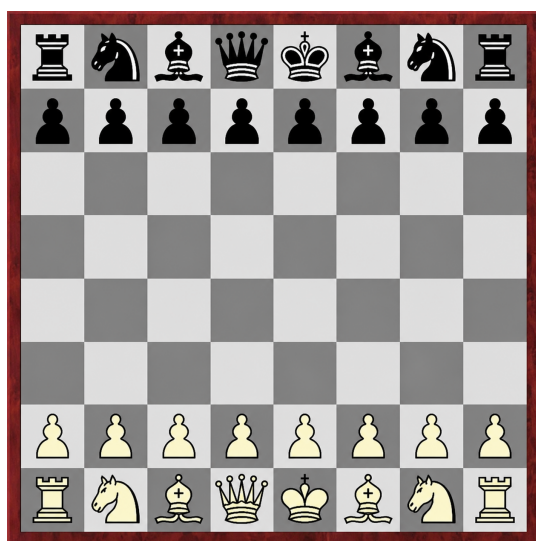
Између осталог, уколико би важила Ниватова хипотеза, онда би требало да гранични случај буде $|F_{h,w}(W)| = hw + 1$, тј. да за $|F_{h,w}(W)| \geq hw + 1$ реч W буде апериодична. У [2] су проучаване дводимензионалне речи факторске сложености $hw + 1$. Они су кроз пропозицију у [2] дали да ако дводимензионална бинарна реч W има факторску сложеност $hw + 1$ онда не може имати ненула вектор периода. Такође, испоставило се да у дводимензионалним бинарним речима, врсте или колоне нису прави Штурмови низови, тј. једнодимензионалне Штурмове речи.

5 Занимљивости

У овом одељку дајемо занимљивости у виду шаха, потапања подморница и миноловца.

5.1 Шах

Шах је стратешка игра за два играча, која се одвија на црно-белој табли формата 8×8 .



a8	b8	c8	d8	e8	f8	g8	h8
a7	b7	c7	d7	e7	f7	g7	h7
a6	b6	c6	d6	e6	f6	g6	h6
a5	b5	c5	d5	e5	f5	g5	h5
a4	b4	c4	d4	e4	f4	g4	h4
a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3	h3
a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2	h2
a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1	h1

Слика 15: Изглед шаховске табле на почетку партије.

Слика 16: Изглед шаховске табле са нотацијом поља.

На слици лево приказан је распоред шаховских фигура пре почетка партије, а на слици десно обележене су позиције на шаховској табли. Колоне су обележене словима a, b, c, d, e, f, g, h слева надесно, док су врсте обележене бројевима $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ одоздо нагоре. Видимо малу разлику између нотације позиција на шаховској табли и у дводимензионалној речи. У дводимензионалним речима и врсте и колоне нумеришу се бројевима од 1 до 8, при чему се врсте нумеришу одозго надоле.

Успоставимо бијекцију $\phi : \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ такву да важи $\phi(a) = 1, \phi(b) = 2, \phi(c) = 3, \phi(d) = 4, \phi(e) = 5, \phi(f) = 6, \phi(g) = 7, \phi(h) = 8$.

Тада шаховском пољу j_i , где је $j \in \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ и $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, одговара позиција

$$W[9 - i, \phi(j)]$$

у дводимензионалној речи. На пример, шаховском пољу g_6 одговара позиција $W[3, 7]$.

Околину позиције у дводимензионалној речи повезаћемо са скупом свих могућих поља на која краљ може доспети једним потезом. Краљ се креће за тачно једно поље у било ком праволинијском или дијагоналном смеру. Нека је, на пример, бели краљ на пољу e_4 , као на слици испод. Скуп свих поља на која он може доспети једним потезом је

$$P = \{d_3, e_3, f_3, f_4, f_5, e_5, d_5, d_4\}.$$

Са друге стране, ако посматрамо околину која је дефинисана за дводимензионалне речи, добијамо само поља која са посматраним пољем имају заједничку страницу:

$$N = \{e_3, f_4, e_5, d_4\}.$$

Према томе,

$$P = N \cup \{d_3, f_3, f_5, d_5\}.$$

Ово можемо записати и у координатама дводимензионалне речи. Нека шаховском пољу j_i одговара позиција $W[r, k]$, где је

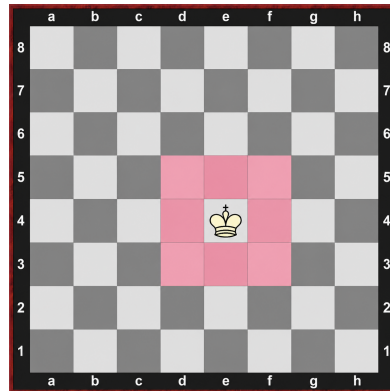
$$r = 9 - i, \quad k = \phi(j).$$

Тада је околина те позиције у смислу дводимензионалних речи

$$N_W(r, k) = \{(r - 1, k), (r + 1, k), (r, k - 1), (r, k + 1)\} \cap ([1, 8] \times [1, 8]).$$

Скуп позиција на које би краљ могао да пређе једним потезом је

$$P_W(r, k) = N_W(r, k) \cup \{(r - 1, k - 1), (r - 1, k + 1), \\ (r + 1, k - 1), (r + 1, k + 1)\} \cap ([1, 8] \times [1, 8]).$$



Слика 17: Краљ и розом бојом обојена поља на која он може доспети након једног потеза.

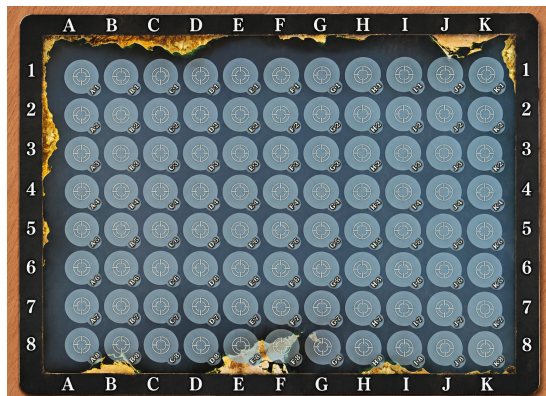
5.1 Напомена. Стандардно црно-бело бојење шаховске табле, ако једну боју поистоветимо са ■, представља пример 0-пуне дводимензионалне бинарне речи димензија 8×8 .

5.2 Потапање подморница

Потапање подморница је друштвена игра на таблама формата, на пример 8×11 , где је циљ да играч потопи противничке подморнице тако што погађа на којим пољима се оне налазе. Прво се подморнице поставе плавим пијунима, док се погођени делови подморница означавају црвеним пијунима. У варијанти игре коју овде посматрамо, подморнице се постављају вертикално или хоризонтално, а две различите подморнице не смеју да се додирују, чак ни дијагонално.

На почетку игре табла се може посматрати као дводимензионална бинарна реч, јер је алфабет сачињен од два слова: празног поља и поља са плавим пијуном. У току игре табла прелази у тернарну реч, чији је трословни алфабет сачињен од празног поља, поља са плавим пијуном и поља са црвеним пијуном. На крају игре, када су све противничке подморнице потопљене, табла губитника се поново може посматрати као бинарна реч сачињена од празних поља и поља са црвеним пијунима.

На слици испод налази се лево табла са нотацијом поља, док се десно налази табла са постављеним подморницама пре партије.



Слика 18: Изглед табле за потапање подморница.



Слика 19: Изглед табле као бинарне речи.

Успоставимо бијекцију између нотације колоне у потапању подморница и нотације колоне у дводимензионалној речи. Нека је

$$\psi : \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

дефинисана тако да важи

$$\psi(A) = 1, \psi(B) = 2, \dots, \psi(K) = 11.$$

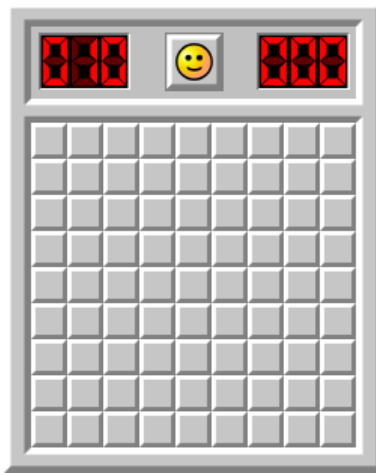
Тада позицији j_i у потапању подморница, где је $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ и $j \in \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$, одговара позиција

$$W[i, \psi(j)]$$

у дводимензионалној речи.

5.3 Миноловац (енг. Minesweeper)

Миноловац је компјутерска игра која се одвија на матрици. Димензије матрице зависе од нивоа тежине игре који играч бира пре почетка играња. Циљ игре је да играч отвори сва поља матрице без детонирања скривених мина. Свако поље или садржи мину или је без мине, а након отварања поља без мине приказује се број суседних мина.



Слика 20: Матрица Миноловца.

Матрица нема нумерацију у самој игри, па ћемо њене врсте и колоне нумерисати као што то чинимо у дводимензионалним речима. Посматраћемо матрицу за почетнички ниво формата 9×9 , у којој се налази 10 скривених мина.

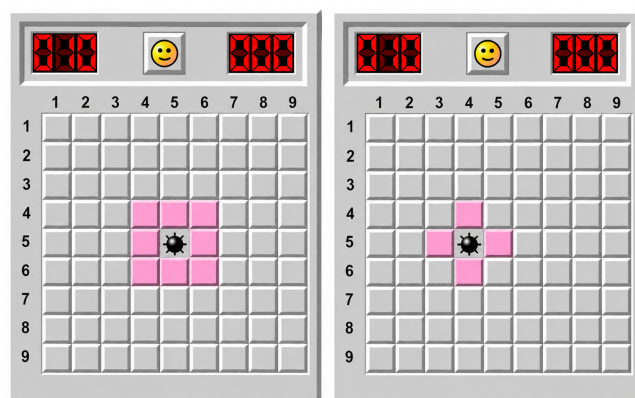
Нека је алфабет

$$A = \{e, m\},$$

где e представља празно поље, а m представља поље са мином. Најпре дефинишемо функцију степена користећи појам суседства из теорије дводимензионалних речи:

$$\deg_{m,W}(i, j) = \begin{cases} \text{број суседних поља са мином,} & \text{ако } W[i, j] = m, \\ 0, & \text{ако } W[i, j] \neq m. \end{cases}$$

5.2 Напомена. Појам суседства, односно околине, у Миноловцу разликује се од појма околине који користимо за дводимензионалне речи.



Слика 21: Лево је приказана околина поља у Миноловцу, а десно околина поља у смислу теорије дводимензионалних речи.

У дводимензионалној речи суседна су само она поља која са посматраним пољем имају заједничку страницу. У Миноловцу се, поред њих, суседним сматрају и дијагонално постављена поља, као што је приказано на претходној слици.

Дефинишимо сада функцију која описује вредност поља у завршеној табли Миноловца:

$$\deg_{m,W}^{\text{minolovac}}(i, j) = \begin{cases} m, & \text{ако } W[i, j] = m, \\ \text{број суседних мина у смислу Миноловца,} & \text{ако } W[i, j] \neq m. \end{cases}$$

Упоредимо ову функцију са функцијом степена из теорије дводимензионалних речи. Код функције $\deg_{m,W}$ степен се рачуна само за поља која садрже мину, и то користећи суседство преко заједничке странице; осталим пољима додељује се вредност 0. Са друге стране, функција $\deg_{m,W}^{\text{minolovac}}$ пољу са мином задржава ознаку m , док сваком пољу без мине додељује број суседних мина, при чему се у Миноловцу рачунају и дијагонални суседи.

Ово поређење природно наводи на једно могуће проширење појма степена који је коришћен у другом поглављу. Уместо да се суседним сматрају само две ћелије које имају заједничку страницу, можемо посматрати ширу околину у којој су суседне и дијагонално постављене ћелије. Тада једна унутрашња ћелија има највише осам суседа.

У таквом моделу степен попуњене ћелије могао би се дефинисати као број попуњених ћелија у овој проширеној околини. Након тога природно се поставља аналоган екстремални проблем: за фиксиране димензије правоугаоника и дати број d , одредити највећи могући број попуњених ћелија ако свака попуњена ћелија има највише d попуњених суседа. Било би занимљиво одредити одговарајуће d -пуне речи и упоредити њихову структуру са d -пуним речима из другог поглавља. На тај начин би се могло испитати у којој мери избор појма суседства утиче на максималну густину и на структуру максималних дводимензионалних бинарних речи.

6 Закључак

Да сумирамо, у овом мастер раду смо обрадили максималне дводимензионалне бинарне речи са ограниченим степеном, дводимензионалне бинарне палиндроме и факторску сложеност дводимензионалних бинарних речи. На крају смо дали неке занимљивости које се тичу дводимензионалних бинарних речи.

За максималне дводимензионалне бинарне речи са ограниченим степеном дали смо важну теорему 2.1. Што се тиче дводимензионалних бинарних палиндрома, дали смо најмањи и највећи број различитих палиндромских фактора које дводимензионална бинарна реч може да садржи. За крај, у вези факторске сложености доказали смо да су једнодимензионалне бинарне речи мале сложености периодичне, док за дводимензионалне бинарне речи нисмо могли доказати, већ смо навели Ниватову хипотезу, као и њене покушаје доказивања. Ниватова хипотеза је и даље отворено питање и на томе раде многи математичари.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Blondin Massé, A. Goupil, R. L’Heureux, L. Marin, Maximal 2-dimensional binary words of bounded degree, In: Gamard, G., Leroy, J. (eds.) *WORDS 2025. LNCS*, vol. **15729**, Springer, Cham (2025), 37–48.
- [2] J. Cassaigne, Double sequences with complexity $mn+1$, *Journal of Automata, Languages and Combinatorics* **4** (1999), 153–170.
- [3] C. F. Colle and E. Garibaldi, A modular Structure Theorem for Minimal Periodic Decompositions and Periodicity of Configurations with $P_\eta(4, n) \leq 4n$, *arXiv preprint arXiv: 2606.10193*, 2026.
- [4] V. Cyr and B. Kra, Complexity of short rectangles and periodicity, *European Journal of Combinatorics* **52** (2016), 146–173.
- [5] V. Cyr and B. Kra, Nonexpansive $\mathbb{Z}^2$ -subdynamics and Nivat’s conjecture, *Transactions of the American Mathematical Society*, **367** (9): 6487–6537, 2015.
- [6] C. Epifanio, M. Koskas, F. Mignosi, On a conjecture on bidimensional words, *Theoretical Computer Science* **299** (2003), 123–150.
- [7] J. Kari and M. Szabados, An Algebraic Geometric Approach to Nivat’s Conjecture, *Information and Computation* **271** (2020), 104481.
- [8] M. Lothaire, *Combinatorics in Words*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [9] K. Mahalingam, P. Pandoh, Enumeration of two dimensional palindromes, *Information and Computation* **286** (2022), Article No. 104781.
- [10] K. Mahalingam, P. Pandoh, K. Krithivasan, On the least number of palindromes in two-dimensional words, *Theoretical Computer Science* **807** (2020), 245–256.
- [11] A. Quas and L. Zamboni, Periodicity and local complexity, *Theoretical Computer Science* **319** (2004), 229–240.
- [12] J. Sander and R. Tijdeman, The complexity of functions on lattices, *Theoretical Computer Science* **246** (2000), 195–225.
- [13] J. Sander and R. Tijdeman, The rectangle complexity of function on two-dimensional lattices. *Theoretical Computer Science* **270** (2002), 857–863.

- [14] M. Szabados, Nivat’s conjecture holds for sums of two periodic configurations, *In SOFSEM 2018: Theory and Practice of Computer Science: 44th International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science, Krems, Austria, January 29–February 2, 2018*, Proceedings **44**, pages 539–551, Springer, 2018.

Биографија

Александар Тркуља је рођен 28.2.2003. у Београду. Завршио је Основну школу „Доситеј Обрадовић“ у Путинцима као вуковац и ђак генерације. Био је у осмом разреду првак општине Рума из математике. Затим је у Руми завршио Гимназију „Стеван Пузић“, општи тип, као вуковац и ђак генерације. Троструки је првак општине Рума из математике. Био је првак Срема из математике у четвртом разреду гимназије и тиме постигао пласман на републички ниво такмичења.

Академске 2021/22. године је уписао интегрисане мастер академске студије – Мастер професор математике. Децембра 2024, учествовао је у STEM пројекту са студентима Универзитета у Кингстону, из Канаде. Био је учесник летње школе математике у Љубљани, јула 2025. године. У јулу 2026. је положио последњи испит и тиме стекао услов за одбрану мастер рада. Интегрисане мастер академске студије је завршио просеком 9,83.

Академске 2021/22. године је био добитник стипендије општине Рума. Академске 2022/23. и 2023/24. године је био добитник државне стипендије. Академске 2024/25. је био добитник стипендије за изузетно надарене студенте Републике Србије, док је текуће 2025/26. добитник стипендије „Доситеја“.



Александар на апсолвентској вечери, мај 2026.

**UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA**

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Elektronski materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Aleksandar Trkulja

AU

Mentor: dr Kristina Ago

MN

Naslov rada: O nekim osobinama dvodimenzionalnih binarnih reči

NR

Jezik publikacije: srpski (ćirilica)

JP

Jezik izvoda: srpski

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2026.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Trg
Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

MA

Fizički opis rada: 6/61/14/3/21/0/0

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Kombinatorika na rečima

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: binarne reči, dvodimenzionalne reči, dvodimenzionalne binarne reči, faktor reči, stepen reči, maksimalne dvodimenzionalne binarne reči sa ograničenim stepenom, dvodimenzionalni binarni palindromi, periodična reč, aperiodična reč, faktorska složenost dvodimenzionalnih binarnih reči

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: U ovom master radu proučavamo neke osobine dvodimenzionalnih binarnih reči. Bavimo se maksimalnim dvodimenzionalnim binarnim rečima sa ograničenim stepenom, dvodimenzionalnim binarnim palindromima i faktorskom složenošću dvodimenzionalnih binarnih reči. Na kraju, teoriju iz rada povezujemo sa igrama iz stvarnog života, i postavljamo analogan ekstremalni problem, problemu iz master rada, u kom je uključen pojam susedstva ćelija iz igre Minolovac.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 23.6.2026.

DP

Datum Odbrane:

DO

Članovi komisije:

Predsednik: dr Bojan Bašić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Boris Šobot, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član, mentor: dr Kristina Ago, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

KO

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY DOCUMENTARY INFORMATION**

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph publication

DT

Type of record: Electronic material

TR

Content code: Master's thesis

CC

Author: Aleksandar Trkulja

AU

Mentor: Kristina Ago, Ph.D.

MN

Title: On some properties of two-dimensional binary words

TI

Language of the text: Serbian (Cyrillic)

LT

Language of the abstract: Serbian

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2026.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: University of Novi Sad, Faculty of Sciences, Trg Dositeja
Obradovića 4, Novi Sad

PP

Physical description: 6/61/14/3/21/0/0

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Combinatorics on words

SD

Subject/Keywords: binary words, two-dimensional words, two-dimensional binary words, factor of a word, degree of a word, maximal two-dimensional binary words with bounded degree, two-dimensional binary palindromes, periodic word, aperiodic word, factor complexity of two-dimensional binary words

SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: In this master's thesis, we study some properties of two-dimensional binary words. We consider maximal two-dimensional binary words with bounded degree, two-dimensional binary palindromes, and the factor complexity of two-dimensional binary words. Finally, we connect the theory developed in the thesis with real-life games and formulate an analogous extremal problem to the one considered in the thesis, involving the notion of the neighborhood of cells in the game Minesweeper.

AB

Accepted by Scientific Board on: 23.6.2026.

DP

Defended:

DE

Thesis defend board:

President: Bojan Bašić, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Boris Šobot, Ph.D., Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member, mentor: Kristina Ago, Ph.D., Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

DB