



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i
informatiku



Naja Stanisavljević

Poređenje slabe konvergencije i konvergencije u Wasserstein-ovoj metrici na prostoru mera

- Master rad -

Mentor: dr Marko Nedeljkov

Novi Sad 2026.

Predgovor

Pojam slabe konvergencije potiče iz funkcionalne analize, gde se javlja kao opšta ideja *slabe-** *topologije*, konstrukcije koja se primenjuje na dual proizvoljnog Banahovog prostora: umesto da se bliskost dva elementa dualnog prostora meri direktno, preko norme, testira se njihovo dejstvo na elemente polaznog (Banahovog) prostora. Ovaj pristup, primenjen na prostor mera, dovodi upravo do pojma slabe konvergencije mera (slaba konvergencija predstavlja upravo slabu-*** konvergenciju, termin „slaba konvergencija” se često javlja u literaturi teorije verovatnoće, pa se i u ovom radu koristi umesto termina „slaba-*** konvergencija”), koji je usko povezan sa Riesz-ovom teoremom reprezentacije. Ovaj pojam je prirodno zaživeo i u teoriji verovatnoće, gde se konvergencija raspodela slučajnih promenljivih takođe izražava preko integrala ograničenih neprekidnih funkcija. Iako ovako uvedena topologija po definiciji nije data preko neke unapred zadate metrike, pokazaće se da je i ona metrizabilna, Prohorovljevim rastojanjem.

Sa druge strane, 1781. godine Gaspard Monž postavio je problem optimalnog premeštanja mase: data je neka raspodela mase i ciljna raspodela iste ukupne mase, traži se preslikavanje koje svaku tačku šalje u novu tačku tako da ukupan rad premeštanja bude minimalan. Ovako postavljen problem, međutim, ima ozbiljne tehničke nedostatke. Rešenje je 1942. godine predložio Leonid Kantorovič tako što je, umesto preslikavanja koje svakoj tački dodeljuje tačno jedno odredište, dozvolio da se masa iz jedne tačke razdeli i pošalje na više odredišta. Ovakva raspodela mase formalizuje se merom na proizvodu prostora, tzv. transportnim planom, čime problem postaje linearan i pogodan za primenu teorije mere. Ovaj, na prvi pogled potpuno drugačiji, geometrijski problem takođe indukuje rastojanje na prostoru verovatnosnih mera, Wasserstein-ovu metriku, koje eksplicitno odražava geometriju osnovnog prostora (rastojanje između dve mere definiše se preko minimalnog rada transporta potrebnog da se masa raspoređena po jednoj raspodeli premesti tako da odgovara drugoj raspodeli) za razliku od apstraktnije slabe konvergencije, koja geometriju prostora X ne vidi direktno. Kako je Wasserstein-ovo rastojanje metrika, ono na prostoru verovatnosnih mera prirodno indukuje i svoju konvergenciju.

Cilj ovog rada je da se ova dva, istorijski nezavisno razvijena, pojma konvergencije na prostoru verovatnosnih mera precizno definišu u istom teorijskom okviru, i da se zatim međusobno uporede: pokazuje se da su blisko povezani, ali da se, u opštem slučaju, ne poklapaju.

Rad se sastoji od šest glava.

U prvom poglavlju uvode se oznake koje će biti korišćene u nastavku rada, kao i podsetnik na osnovne pojmove opšte topologije, teorije metričkih i normiranih prostora (topološki i metrički prostori, kompaktnost, kompletnost, separabilnost, normirani i Banahovi prostori, dual prostora), neophodne za razumevanje ostalih poglavlja.

U drugom poglavlju izlažu se osnovi teorije mere: pojam mere i μ -merljivog skupa, σ -algebre i Borelova σ -algebra, π - i λ -sistemi, regularnost mera i aproksimacija otvorenim i kompaktnim skupovima, merljive funkcije, kao i integral i klasične granične teoreme (Fatuova lema, teorema o monotonij i teorema o dominantnoj konvergenciji).

Treće poglavlje povezuje prethodna dva: uvode se prostori $C_0(X)$ i $C_c(X)$, predznačene mere i prostor $\mathcal{M}(X)$, i dokazuje se Riesz-ova teorema reprezentacije, koja dual prostora $C_0(X)$ poistovećuje sa prostorom Radonovih predznačenih mera. Na osnovu ovog poistovećenja uvodi se slaba-* topologija na prostoru mera, odnosno njena restrikcija na prostor verovatnosnih mera $\mathcal{P}(X)$.

U četvrtom poglavlju definiše se slaba konvergencija niza verovatnosnih mera i pokazuje se njena jedinstvenost. Izlaže se Portmanto teorema, pojam zategnutosti familije mera, Prohorovljeva teorema koja zategnutost povezuje sa relativnom kompaktnošću, Prohorovljevo rastojanje koje metrizuje topologiju slabe konvergencije, i teorema o neprekidnom preslikavanju.

Peto poglavlje posvećeno je Wasserstein-ovoj metrici. Polazi se od Monžovog problema optimalnog transporta, prelazi se na Kantorovičev predlog rešenja preko transportnih planova, pokazuje se egzistencija optimalnog transportnog plana, definiše se Wasserstein-ovo rastojanje W_p i dokazuju se njegova osnovna svojstva, uključujući kompletnost i separabilnost prostora $(\mathcal{P}_p(X), W_p)$.

Šesto poglavlje donosi poređenje dve konvergencije: pokazuje se da je topologija indukovana Wasserstein-ovom metrikom finija od topologije slabe konvergencije, poredi se W_p sa ograničeno-Lipšicovim rastojanjem i totalnom varijacijom, razmatra se (polu)neprekidnost Wasserstein-ovog rastojanja u odnosu na slabu konvergenciju, pokazuje se poklapanje dve konvergencije na ograničenim skupovima, i na kraju se daje primer u kome se dve konvergencije ne slažu, usled bekstva mase u beskonačnost.

Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Marku Nedeljkovu, na savetima, strpljenju i prijatnoj saradnji tokom izrade ovog rada, kao i na prenetom znanju tokom studija. Zahvaljujem se i članovima komisije za odbranu, dr Ivani Vojnović i dr Milošu Kuriliću, takođe na stečenom znanju, pažljivom čitanju rada i komentarima.

Neizmerno sam zahvalna svojim roditeljima, sestri Nini, užoj familiji i Lazaru, na безусловnoj podršci, strpljenju i pomoći tokom svih ovih godina studiranja. Takođe veliko hvala i mojim dragim prijateljima.

Sadržaj

Predgovor	2
1 Uvodni pojmovi i oznake	6
1.1 Oznake i osnovni pojmovi	6
1.2 Topološki prostori	8
1.3 Metrički prostori	10
1.4 Vektorski i normirani prostori	13
1.5 Kompletni separabilni metrički prostori	16
2 Osnovi teorije mere	19
2.1 Mere i njihova osnovna svojstva	19
2.2 Sistemi skupova	21
2.3 Regularnost mera i aproksimacija otvorenim i kompaktnim skupovima . . .	25
2.4 Merljive funkcije	27
2.5 Integral i granične teoreme	29
3 Riesz-ova teorema reprezentacije i topologija na prostorima mera	33
3.1 Prostori $C_0(X)$ i $C_c(X)$	33
3.2 Predznačene mere i prostor $\mathcal{M}(X)$	35
3.3 Riesz-ova teorema reprezentacije	38
3.4 Slaba-* topologija na $\mathcal{M}(X)$ i topologija na $\mathcal{P}(X)$	43
3.4.1 Prostor verovatnosnih mera $\mathcal{P}(X)$	45
3.4.2 Slučaj proizvoljnog kompletnog separabilnog metričkog prostora . .	45
4 Slaba konvergencija mera	47
4.1 Slaba konvergencija i njena jedinstvenost	47
4.2 Portmanto teorema	48
4.3 Zategnutost i relativna kompaktnost	50
4.4 Prohorovljeva teorema	51
4.5 Prohorovljevo rastojanje	54
4.6 Slika mere i teorema o neprekidnom preslikavanju	55

5	Wasserstein-ova metrika	57
5.1	Monžov problem optimalnog transporta	57
5.2	Kantorovičev problem i transportni planovi	58
5.3	Definicija Wasserstein-ove metrike	61
5.4	Osnovna svojstva Wasserstein-ovog prostora	62
5.5	Kompletnost i separabilnost prostora $(\mathcal{P}_p(X), W_p)$	65
5.6	Kompaktnost u prostoru $(\mathcal{P}_p(X), W_p)$	65
6	Poređenje slabe konvergencije i konvergencije indukovane Wasserstein-ovom metrikom	67
6.1	Odnos dve konvergencije	67
6.2	Poklapanje konvergencija na ograničenim skupovima	69
6.3	Primer neslaganja: bekstvo mase u beskonačnost	69
	Zaključak	71
	Literatura	73

Glava 1

Uvodni pojmovi i oznake

Ovo poglavlje ima za cilj uvođenje oznaka koje će biti korišćene u radu, kao i podsetnik na osnovne pojmove iz opšte topologije, teorije metričkih i normiranih prostora koji su neophodni za razumevanje ostalih poglavlja. Topologija slabe konvergencije mera i topologija indukovana Wasserstein-ovom metrikom definišu se na prostorima verovatnosnih mera nad nekim osnovnim (metričkim, topološkim) prostorom, zbog toga je važno da na samom početku bude reči o tome šta se podrazumeva pod topološkim, metričkim, normiranim, kompletnim i separabilnim prostorom. Takođe, kako će se u Poglavlju 3 mere poistovetiti sa neprekidnim linearnim funkcionalima na prostoru neprekidnih funkcija, uvešće se i osnovni pojmovi vezani za vektorske i normirane prostore, linearne funkcionalne i dual prostora. Tvrdjenja u ovom poglavlju biće navedena bez dokaza, jer se radi o standardnim rezultatima opšte topologije i funkcionalne analize koji se mogu naći u svakom udžbeniku iz ovih oblasti, a zainteresovan čitalac dokaze može pronaći u navedenoj literaturi uz svaki odeljak.

1.1 Oznake i osnovni pojmovi

Pretpostavlja se da je čitalac upoznat sa osnovnim pojmovima naivne teorije skupova (skup, relacija, funkcija), te će ovde biti samo navedene oznake koje će biti korišćene u nastavku rada.

Ako su X i Y skupovi, oznaka $X \subset Y$ znači da je X podskup skupa Y , pri čemu je dozvoljena i jednakost $X = Y$. Ukoliko želimo da naglasimo da je X *pravi* podskup skupa Y (tj. $X \subset Y$ i $X \neq Y$), pišaćemo $X \subsetneq Y$. Skup svih podskupova skupa X (partitivni skup) obeležavamo sa $\mathcal{P}(X)$, a prazan skup sa $\emptyset$.

Za skupove X i Y i preslikavanje $f: X \rightarrow Y$, za $A \subset X$ skup

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\}$$

nazivamo *direktnom slikom* skupa A , a za $B \subset Y$ skup

$$f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

inverznom slikom skupa B . Ako je $A \subset X$, preslikavanje $g: A \rightarrow Y$ dato sa $g(x) = f(x)$ za sve $x \in A$ nazivamo *restrikcijom* preslikavanja f na skup A i obeležavamo ga sa $f|_A$. Preslikavanje $f: X \rightarrow Y$ je:

- *injektivno* (ili „1–1”) ako iz $f(x_1) = f(x_2)$ sledi $x_1 = x_2$, za sve $x_1, x_2 \in X$;
- *sirjektivno* (ili preslikavanje „na”) ako je $f[X] = Y$;
- *bijektivno* ako je i injektivno i sirjektivno.

Kardinalni broj skupa A obeležavamo sa $|A|$. Skup A je *prebrojiv* ako je konačan ili ako postoji bijekcija $f: \mathbb{N} \rightarrow A$, u suprotnom je *neprebrojiv*. Uniju najviše prebrojivo mnogo skupova nazivamo *prebrojivom unijom*, a presek najviše prebrojivo mnogo skupova *prebrojivim presekom*.

Skupove prirodnih, celih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva redom obeležavamo sa $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, i pretpostavlja se da je čitalac upoznat sa njihovim algebarskim strukturama i uređenjem. Dodatno, koristimo oznaku $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, kao i

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

za n -dimenzioni Euklidski prostor, snabdeven standardnom Euklidskom normom

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

i pripadajućom Euklidskom metrikom $d(x, y) = \|x - y\|$. Za $x \in \mathbb{R}$, sa $|x|$ obeležavamo apsolutnu vrednost broja x , a $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ obeležava prošireni skup realnih brojeva.

Niz u skupu X je svako preslikavanje $x: \mathbb{N} \rightarrow X$, umesto $x(n)$ pišemo x_n , a sam niz obeležavamo sa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ili kraće $(x_n)_n$, odnosno (x_n) . Ako je $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ strogo rastući niz prirodnih brojeva, niz $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ nazivamo *podnizom* niza $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Za funkciju $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, gde je X neprazan skup, uvodimo i *indikatorsku (karakterističnu) funkciju* skupa $A \subset X$,

$$\mathbf{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

koju ćemo koristiti u kasnijim poglavljima prilikom definisanja integrala i pri radu sa Dirakovim merama.

Za $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, pišaćemo $a \vee b := \max\{a, b\}$ i $a \wedge b := \min\{a, b\}$. Za funkcije $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $(f \vee g)(x) := f(x) \vee g(x)$ i $(f \wedge g)(x) := f(x) \wedge g(x)$.

Konačno, kad god bude pisalo $:=$ ili $=:$, podrazumevaće se da se radi o *definicionalnoj jednakosti*, odnosno da se izraz sa strane dvotačke uvodi kao oznaka za izraz sa druge strane znaka jednakosti.

1.2 Topološki prostori

Ovde se navode osnovne definicije i tvrđenja iz opšte topologije koja će biti potrebna u nastavku rada. Dokazi tvrđenja se izostavljaju, jer se radi o standardnim rezultatima, a zainteresovani čitalac ih može pronaći u bilo kom udžbeniku opšte topologije, na primer u [1].

Definicija 1.1. Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ je *topologija* na skupu X ako važi:

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$;

(O2) ako $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$, onda $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$;

(O3) za svaku kolekciju $\{O_i : i \in I\} \subset \mathcal{O}$ važi $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

Uređeni par $(X, \mathcal{O})$ nazivamo *topološkim prostorom*, elemente skupa X *tačkama*, a elemente kolekcije $\mathcal{O}$ *otvorenim skupovima*. Skup $F \subset X$ je *zatvoren* ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren. Kada je jasno o kojoj se topologiji radi, umesto $(X, \mathcal{O})$ pišaćemo kraće X .

Napomena 1.2. Iz (O2) indukcijom sledi da je i presek konačno mnogo otvorenih skupova otvoren skup. Dualno, $\mathcal{F}$ je kolekcija zatvorenih skupova ako su prazan skup i sam X zatvoreni skupovi, unija dva, pa i konačno mnogo, zatvorena skupova je zatvoren skup, a presek proizvoljno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Definicija 1.3. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $x \in X$. Skup $U \subset X$ je *okolina* tačke x ako postoji $O \in \mathcal{O}$ tako da je $x \in O \subset U$. Kolekciju svih okolina tačke x obeležavamo sa $\mathcal{U}(x)$.

Definicija 1.4. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$.

- *Unutrašnjost* skupa A , u oznaci A° (ili $\text{int } A$), je unija svih otvorenih skupova sadržanih u A , tj. najveći otvoren skup sadržan u A .
- *Zatvorenje* skupa A , u oznaci $\overline{A}$ (ili $\text{cl } A$), je presek svih zatvorenih skupova koji sadrže A , tj. najmanji zatvoren nadskup skupa A .
- *Rub* skupa A je skup $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.

Teorema 1.5. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A, B \subset X$. Tada važi:

1. A je otvoren skup ako i samo ako je $A = A^\circ$, A je zatvoren skup ako i samo ako je $A = \overline{A}$;
2. ako je $A \subset B$, onda je $A^\circ \subset B^\circ$ i $\overline{A} \subset \overline{B}$;
3. $x \in \overline{A}$ ako i samo ako svaka okolina tačke x ima neprazan presek sa A .

Definicija 1.6. Skup $D \subset X$ je *gust* u topološkom prostoru $(X, \mathcal{O})$ ako je $\overline{D} = X$. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je *separabilan* ako sadrži prebrojiv gust podskup.

Separabilnost će biti od posebnog značaja u poglavljima o slaboj konvergenciji mera i o Wasserstein-ovoj metrici, jer će se prostori verovatnosnih mera posmatrati upravo nad separabilnim prostorima.

Definicija 1.7. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Familija $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ je *baza* topologije $\mathcal{O}$ ako se svaki skup $O \in \mathcal{O}$ može predstaviti kao unija neke potfamilije familije $\mathcal{B}$.

Familija $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ je *baza okolina* tačke x ako za svaku okolinu $U \in \mathcal{U}(x)$ postoji $B \in \mathcal{B}(x)$ tako da je $B \subset U$.

Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava *prvu aksiomu prebrojivosti* ako svaka tačka $x \in X$ ima prebrojivu bazu okolina, a *drugu aksiomu prebrojivosti* ako topologija $\mathcal{O}$ ima prebrojivu bazu.

Teorema 1.8. Ako topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, onda je on separabilan i zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.

Definicija 1.9. Neka je $(X_n, \mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prebrojiva familija topoloških prostora. Topologija *proizvoda* na $X := \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ je topologija čiju bazu čine skupovi oblika $\prod_{n=1}^{\infty} B_n$, gde je $B_n \in \mathcal{O}_n$ za svako n , i $B_n = X_n$ za sve osim konačno mnogo indeksa n .

Definicija 1.10 (Granica niza). Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tačka $a \in X$ je *granica* (ili *limes*) niza $(x_n)_n \subset X$ ako i samo ako za svaku okolinu U tačke a postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $x_n \in U$. Ako niz $(x_n)_n$ ima granicu, kažemo da je *konvergentan*. Ako je granica jedinstvena, pišemo $x_n \rightarrow a$ ili $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Definicija 1.11. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je *Hauzdorfov* ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoje disjunktne okoline $U \in \mathcal{U}(x)$ i $V \in \mathcal{U}(y)$.

Teorema 1.12. U Hauzdorfovom topološkom prostoru svaki niz ima najviše jednu granicu.

Definicija 1.13 (Neprekidnost). Neka su $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topološki prostori. Funkcija $f: X \rightarrow Y$ je *neprekidna* u tački $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaku okolinu V tačke $f(x_0)$ postoji okolina U tačke x_0 tako da je $f[U] \subset V$. Funkcija f je *neprekidna* ako je neprekidna u svakoj tački $x \in X$.

Teorema 1.14. *Funkcija $f: X \rightarrow Y$ je neprekidna ako i samo ako je $f^{-1}[O]$ otvoren skup u X za svaki otvoren skup O u Y , ekvivalentno, ako i samo ako je $f^{-1}[F]$ zatvoren skup u X za svaki zatvoren skup F u Y .*

Neprekidne funkcije igraju ključnu ulogu u definiciji slabe konvergencije mera (Poglavlje 4), u kome će se posmatrati integrali ograničenih neprekidnih funkcija u odnosu na niz mera koji konvergira.

Definicija 1.15. Bijekcija $f: X \rightarrow Y$ između topoloških prostora $(X, \mathcal{O}_X)$ i $(Y, \mathcal{O}_Y)$ je *homeomorfizam* ako su i f i f^{-1} neprekidne funkcije. Ako takva bijekcija postoji, kažemo da su prostori X i Y *homeomorfni*.

Definicija 1.16 (Kompaktnost). Familija $\{O_i : i \in I\} \subset \mathcal{O}$ je *otvoreni pokrivač* skupa $A \subset X$ ako je $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. Potkolekcija pokrivača koja je i sama pokrivač naziva se *potpokrivač*. Skup $K \subset X$ je *kompaktan* ako svaki otvoreni pokrivač skupa K sadrži konačan potpokrivač. Skup $A \subset X$ je *relativno kompaktan* ako je $\bar{A}$ kompaktan skup.

Teorema 1.17. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada važi:*

1. *ako je $K \subset X$ kompaktan i $F \subset K$ zatvoren (u X), onda je F kompaktan;*
2. *ako je X Hausdorfov prostor i $K \subset X$ kompaktan, onda je K zatvoren skup;*
3. *neprekidna slika kompaktnog skupa je kompaktan skup.*

Definicija 1.18. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je *lokalno kompaktan* ako svaka tačka $x \in X$ ima okolinu čije je zatvorenje kompaktan skup.

Primer 1.19. Prostor $\mathbb{R}^n$ je lokalno kompaktan jer svaka tačka ima zatvorenu loptu konačnog poluprečnika kao kompaktnu okolinu.

Pojam kompaktnosti, a posebno pojam *relativne kompaktnosti* familije mera, biće od centralnog značaja u Poglavlju 4, gde će se, preko Prohorovljeve teoreme, kompaktnost familije mera povezati sa pojmom *zategnutosti* (tzv. *tightness*) i sa egzistencijom slabo konvergentnog podniza.

1.3 Metrički prostori

Metrički prostori predstavljaju poseban, ali za ovaj rad najvažniji slučaj topoloških prostora, budući da su i osnovi teorije mere (Poglavljje 2), Riesz-ova teorema reprezentacije (Poglavljje 3), slaba konvergencija mera (Poglavljje 4) i Wasserstein-ova metrika (Poglavljje 5) najprirodnije formulisani upravo na metričkim prostorima. Dokazi tvrđenji i ovog odeljka biće izostavljeni, čitalac ih može pronaći u [1].

Definicija 1.20. Neka je $X \neq \emptyset$. Funkcija $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ je *metrika* na skupu X ako za sve $x, y, z \in X$ važi:

(M1) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$;

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (nejednakost trougla).

Par (X, d) nazivamo *metričkim prostorom*. Broj $d(x, y)$ nazivamo *rastojanjem* tačaka x i y . Za $x \in X$ i $r > 0$, skup

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

nazivamo *otvorenom loptom* sa centrom u x poluprečnika r .

Teorema 1.21. Neka je (X, d) metrički prostor. Familija svih otvorenih lopti

$$\mathcal{B}_d = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$$

je baza neke topologije $\mathcal{O}_d$ na skupu X . Za ovu topologiju kažemo da je *indukovana metrikom* d .

Napomena 1.22. Svaki metrički prostor (X, d) posmatra se dalje kao topološki prostor $(X, \mathcal{O}_d)$, pa za njega važe svi pojmovi i tvrđenja uvedeni u prethodnom odeljku (okolina, zatvorenje, gustina, kompaktnost, neprekidnost, itd.). Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je *metrizabilan* ako postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$.

Teorema 1.23. Svaki metrički prostor je Hausdorfov i zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti. Familija $\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ je prebrojiva baza okolina tačke x .

Kako je u prethodnom odeljku rečeno da svaki niz u Hausdorfovom prostoru ima najviše jednu granicu, u metričkom prostoru granica niza je, kad postoji, jedinstvena, pa možemo bez dvosmislenosti pisati $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Naredno tvrđenje daje uobičajenu karakterizaciju konvergencije u metričkom prostoru, koju ćemo koristiti umesto opštije definicije preko okolina.

Teorema 1.24. Neka je (X, d) metrički prostor, $(x_n)_n \subset X$ i $x \in X$. Tada $x_n \rightarrow x$ ako i samo ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) (n \geq n_0 \implies d(x_n, x) < \varepsilon).$$

Definicija 1.25. Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$. Skup A je *ograničen* ako postoje $x \in X$ i $r > 0$ tako da je $A \subset B(x, r)$. Ekvivalentno, ako je

$$\text{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y) < \infty.$$

Broj $\text{diam}(A)$ nazivamo *dijametrom* skupa A . Niz $(x_n)_n \subset X$ je *ograničen* ako je skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ograničen.

Teorema 1.26. *Svaki konvergentan niz u metričkom prostoru je ograničen.*

Definicija 1.27. Neka je (X, d) metrički prostor. Niz $(x_n)_n \subset X$ je *Košijev* ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) (m, n \geq n_0 \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon).$$

Teorema 1.28. *U svakom metričkom prostoru svaki konvergentan niz je Košijev niz. Obrat ne mora da važi.*

Definicija 1.29 (Kompletnost). Metrički prostor (X, d) je *kompletan* ako i samo ako je svaki Košijev niz u X konvergentan.

Teorema 1.30. *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $A \subset X$ zatvoren skup. Tada je i metrički prostor $(A, d|_{A \times A})$ kompletan.*

Definicija 1.31. Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $A \subset X$ je *totalno ograničen* ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo tačaka $x_1, \dots, x_n \in X$ tako da je $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ (tzv. *konačna ε -mreža*).

Teorema 1.32. *Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. $\overline{A}$ je kompaktan skup;
2. Svaki niz u A ima konvergentan podniz (čija granica ne mora da pripada A);
3. $\overline{A}$ je kompletan i A je totalno ograničen skup.

Napomena 1.33. Ekvivalencija (2) $\Leftrightarrow$ (3) iz Teoreme 1.32 biće od suštinske važnosti u Poglavlju 4: relativna kompaktnost familije verovatnosnih mera (u topologiji slabe konvergencije) karakterisaće se preko pojma *zategnutosti* familije mera, u čemu se prepoznaje upravo ideja totalne ograničenosti.

Definicija 1.34. Metrički prostori (X, d_X) i (Y, d_Y) su *izometrični*, u oznaci $X \cong_i Y$, ako postoji bijekcija $f: X \rightarrow Y$ (tzv. *izometrija*) takva da za sve $x_1, x_2 \in X$ važi

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)).$$

Definicija 1.35 (Neprekidnost u metričkom prostoru). Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i $f: X \rightarrow Y$ funkcija. Tada je f neprekidna u tački $x_0 \in X$ ako i samo ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X) (d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

Napomena 1.36. Definicija neprekidnosti preko ε - δ uslova je ekvivalentna opštoj definiciji neprekidnosti iz Odeljka 1.2 (Definicija 1.13), primenjenoj na topologiju $\mathcal{O}_{d_X}$, odnosno $\mathcal{O}_{d_Y}$, indukovanu metrikama d_X , d_Y . Zaista, dovoljno je u opštoj definiciji za okoline tačaka x_0 i $f(x_0)$ uzeti otvorene lopte $B(x_0, \delta)$ i $B(f(x_0), \varepsilon)$, koje čine bazu okolina u metričkom prostoru. Iz ove karakterizacije baze okolina, ε - δ uslov sledi neposredno.

Definicija 1.37. Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Funkcija $f: X \rightarrow Y$ je *uniformno neprekidna* ako i samo ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in X) (d_X(x_1, x_2) < \delta \implies d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon).$$

Teorema 1.38. Ako je (X, d_X) kompaktan metrički prostor, (Y, d_Y) metrički prostor i $f: X \rightarrow Y$ neprekidna funkcija, onda je f uniformno neprekidna.

1.4 Vektorski i normirani prostori

Na redu je uvođenje pojmova vektorskog i normiranog prostora, linearnog funkcionala i duala prostora, koji će biti neophodni u Poglavlju 3 prilikom formulisanja Riesz-ove teoreme reprezentacije. Kako će dokazi tvrdjenja biti i ovde izostavljeni čitalac ih može pronaći u [1].

Definicija 1.39. Neka je $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Neprazan skup V je *vektorski prostor* nad poljem $\mathbb{K}$ ako su definisane operacije sabiranja $+: V \times V \rightarrow V$ i množenja skalarom $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ tako da je $(V, +)$ komutativna grupa i da za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$ važi:

$$(V1) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y;$$

$$(V2) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

$$(V3) \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x);$$

$$(V4) \quad 1 \cdot x = x.$$

Elemente skupa V nazivamo *vektorima*. Neprazan podskup $W \subset V$ koji je i sam vektorski prostor u odnosu na operacije nasleđene iz V nazivamo *potprostorom* prostora V .

U ovom radu će skoro uvek biti potreban slučaj $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, budući da se posmatraju prostori realnih (verovatnosnih) mera i realnih funkcija, kad god ne bude drugačije naglašeno, podrazumeva se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definicija 1.40. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{K}$. Funkcija $\|\cdot\|: V \rightarrow [0, \infty)$ je *norma* na V ako za sve $x, y \in V$ i $\alpha \in \mathbb{K}$ važi:

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \text{ ako i samo ako je } x = 0;$$

$$(N2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|;$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{nejednakost trougla}).$$

Par $(V, \|\cdot\|)$ nazivamo *normiranim prostorom*.

Teorema 1.41. *Neka je $(V, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Funkcija $d: V \times V \rightarrow [0, \infty)$, data sa*

$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad x, y \in V,$$

je metrika na V (tzv. metrika indukovana normom). Svaki normiran prostor je, dakle, na prirodan način i metrički.

Definicija 1.42. Normiran prostor $(V, \|\cdot\|)$ je *Banahov prostor* ako je kompletan u metrici indukovanoj normom, tj. ako je svaki Košijev niz u $(V, \|\cdot\|)$ konvergentan.

Definicija 1.43. Neka je (X, d) metrički prostor i $C_b(X)$ skup svih ograničenih neprekidnih funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Na skupu $C_b(X)$ definišemo *supremum normu*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad f \in C_b(X).$$

Napomena 1.44. Oznaka $\|\cdot\|_\infty$ ovde označava supremum normu na $C_b(X)$ (i njegovim potprostorima $C_0(X)$, $C_c(X)$, Odeljak 3.1), definisanu preko supremuma po svakoj tački $x \in X$. Ovo treba razlikovati od L^∞ -norme, koja se definiše preko mere „skoro svuda” umesto u svakoj tački.

Napomena 1.45. Prostor $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ je Banahov prostor (kompletan normiran prostor), i on će igrati ključnu ulogu u Poglavlju 4, jer slaba konvergencija niza mera $(\mu_n)_n$ ka meri μ definišaće se upravo preko konvergencije $\int_X f d\mu_n \rightarrow \int_X f d\mu$ za svako $f \in C_b(X)$.

Primer 1.46. 1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, sa Euklidskom normom, je Banahov prostor za svako $n \in \mathbb{N}$.

2. Ako je X kompaktan metrički prostor, skup $C(X)$ svih neprekidnih funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ poklapa se sa $C_b(X)$ (jer je svaka neprekidna funkcija na kompaktu ograničena), pa je i $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ Banahov prostor.

Napomena 1.47. U Poglavlju 3 biće uveden i prostor $C_0(X)$, neprekidne funkcije koje „iščezavaju u beskonačnosti”, kao i prostor $C_c(X)$, neprekidne funkcije sa kompaktnim nosačem. Za sada se samo napominje da važi

$$C_c(X) \subset C_0(X) \subset C_b(X),$$

i da je $C_0(X)$, snabdeven supremum normom, zatvoren potprostor Banahovog prostora $C_b(X)$, pa je i sam Banahov prostor.

Definicija 1.48. Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{K}$. Preslikavanje $L: V \rightarrow W$ je *linearno* (ili *linearni operator*) ako za sve $x, y \in V$ i $\alpha \in \mathbb{K}$ važi

$$L(x + y) = L(x) + L(y), \quad L(\alpha x) = \alpha L(x).$$

Ako je $W = \mathbb{K}$ (posmatrano kao jednodimenzioni vektorski prostor nad samim sobom), linearno preslikavanje $L: V \rightarrow \mathbb{K}$ nazivamo *linearnim funkcionalom* na V .

Definicija 1.49. Neka su $(V, \|\cdot\|_V)$ i $(W, \|\cdot\|_W)$ normirani prostori. Linearan operator $L: V \rightarrow W$ je *ograničen* ako postoji konstanta $C \geq 0$ tako da je

$$\|L(x)\|_W \leq C\|x\|_V \quad \text{za sve } x \in V.$$

Najmanju takvu konstantu C nazivamo *normom operatora* L i obeležavamo je sa

$$\|L\| := \sup_{x \in V, x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{x \in V, \|x\|_V \leq 1} \|L(x)\|_W.$$

Teorema 1.50. Neka su $(V, \|\cdot\|_V)$ i $(W, \|\cdot\|_W)$ normirani prostori i $L: V \rightarrow W$ linearan operator. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

1. L je ograničen;
2. L je neprekidan (u smislu Definicije o neprekidnosti iz Odeljka 1.2, primenjene na topologije indukovane normama);
3. L je neprekidan u tački $x_0 \in V$.

Napomena 1.51. Za razliku od opšte definicije neprekidnosti iz Odeljka 1.2, koja zahteva proveru u *svakoj* tački prostora, Teorema 1.50 pokazuje da je za linearne operatore dovoljno proveriti neprekidnost u *samo jednoj*, proizvoljno izabranoj tački $x_0 \in V$, ako je uslov ispunjen u toj jednoj tački, automatski važi svuda. U primenama je najpogodnije uzeti baš $x_0 = 0$: s jedne strane, nula je uvek dostupna tačka (nijedan vektorski prostor nije prazan), a s druge strane, linearnost operatora daje $L(0) = 0$, pa je provera neprekidnosti u nuli formalno najjednostavnija, svodi se na uslov

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in V) (\|x\|_V < \delta \implies \|L(x)\|_W < \varepsilon),$$

bez potrebe da se prati razlika $x - x_0$ kao u opštem slučaju. Dakle, uslov (3) Teoreme 1.50 skoro uvek proveravamo upravo za $x_0 = 0$, što je i pristup koji ćemo koristiti u Poglavlju 3 pri proveri neprekidnosti linearnih funkcionala na $C_0(X)$.

Definicija 1.52. Neka je $(V, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Skup svih ograničenih (ekvivalentno, neprekidnih) linearnih funkcionala $L: V \rightarrow \mathbb{R}$ nazivamo *dualnim prostorom* (ili *dualom*)

prostora V , u oznaci V^* . Prostor V^* , snabdeven normom operatora iz prethodne definicije, je uvek Banahov prostor, bez obzira na to da li je V kompletan.

Napomena 1.53. Definicija 1.52 je jedna od centralnih ideja funkcionalne analize koja će se koristiti u ovom radu, umesto da se mere posmatraju kao apstraktne skupovne funkcije, Riesz-ova teorema reprezentacije (Poglavlje 3) pokazaće da se (Radonove, odnosno konačne Borelove) mere na X mogu poistovetiti sa neprekidnim linearnim funkcionalima iz duala prostora $C_0(X)$, tj. sa elementima prostora $(C_0(X))^*$.

1.5 Kompletne separabilne metričke prostori

U prethodna dva odeljka uvedeni su, nezavisno jedan od drugog, pojmovi *kompletnosti* i *separabilnosti* metričkog prostora. U ovom, poslednjem odeljku uvodnog poglavlja, izdvaja se klasa metričkih prostora koji poseduju obe ove osobine istovremeno, ispituje se kako se ta klasa ponaša u odnosu na standardne topološke konstrukcije (podprostor, prebrojiv proizvod, neprekidna slika), i navodi se strukturna teorema koja objašnjava zašto se ova klasa prostora smatra „najprirodnijim” okvirom za teoriju verovatnoće. Takvi prostori biće osnovni okvir u kome će se posmatrati verovatnosne mere u Poglavljima 4, 5 i 6. Definicije i teoreme iz ovog poglavlja zasnivaju se na prethodnim poglavljima i [1].

Definicija 1.54. Metrički prostor (X, d) je *kompletan separabilan metrički prostor* ako je:

1. *kompletan*, tj. svaki Košijev niz u X konvergira ka nekom elementu skupa X , i
2. *separabilan*, tj. postoji prebrojiv skup $D \subset X$ takav da je $\overline{D} = X$.

Napomena 1.55. U literaturi na engleskom jeziku za prostore iz Definicije 1.54 često se koristi i naziv *poljski prostor*¹ (engl. *Polish space*). U ovom radu koristiće se isključivo naziv *kompletan separabilan metrički prostor*.

Napomena 1.56. Vredi istaći da su kompletnost i separabilnost, iako se često javljaju zajedno, dve suštinski različite osobine metričkog prostora: separabilnost je, kao što smo videli u Odeljku 1.2, *topološka* osobina i zavisi samo od topologije $\mathcal{O}_d$ koju metrika d indukuje na skupu X , ne i od same metrike. Kompletnost je, nasuprot tome, *metrička* osobina i zavisi od konkretno izabrane metrike d .

Teorema 1.57. *Svaki totalno ograničen metrički prostor je separabilan.*

¹Engl. *Polish space*. Naziv ne opisuje neku matematičku osobinu prostora, već potiče od poljskih matematičara, Sjerpinjskog (W. Sierpiński), Kuratovskog (K. Kuratowski) i drugih, koji su tridesetih godina XX veka prvi sistematski proučavali ovu klasu prostora, u kontekstu razvoja deskriptivne teorije skupova.

Napomena 1.58. Iz Teoreme 1.57 i karakterizacije kompaktnosti date Teoremom 1.32 sledi da je svaki kompaktan metrički prostor separabilan. Dakle, kompaktan prostor je, prema Teoremi 1.32, kompletan i totalno ograničen, a totalna ograničenost, prema Teoremi 1.57, povlači separabilnost.

Primer 1.59. Sledeći prostori su kompletni i separabilni:

1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, za svako $n \in \mathbb{N}$, sa Euklidskom metrikom;
2. svaki kompaktan metrički prostor (kompaktnost povlači i kompletnost i separabilnost, videti Napomenu 1.58);
3. svaki zatvoren podskup kompletnog separabilnog metričkog prostora, sa restrikcijom metrike (videti Teoremu 1.61 ispod).

Nasuprot tome, prostor $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ je separabilan (sam skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv i gust u sebi), ali nije kompletan.

Naredne teoreme pokazuju da je klasa kompletnih separabilnih metričkih prostora stabilna u odnosu na prelazak na zatvoren podprostor i na prebrojiv proizvod.

Teorema 1.60. *Svaki podskup separabilnog metričkog prostora je i sam separabilan (u odnosu na restrikciju metrike).*

Teorema 1.61. *Neka je (X, d) kompletan separabilan metrički prostor i $A \subset X$ zatvoren skup. Tada je metrički prostor $(A, d|_{A \times A})$ takođe kompletan i separabilan.*

Napomena 1.62. Kompletnost prostora $(A, d|_{A \times A})$ sledi direktno iz ranije spomenutog tvrđenja da je zatvoren podskup kompletnog metričkog prostora sam kompletan. Separabilnost sledi iz Teoreme 1.60, primenjene na skup $A \subset X$.

Teorema 1.63. *Neka je $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prebrojiva familija kompletnih separabilnih metričkih prostora. Tada je proizvod $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, snabdeven metrikom*

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}, \quad x = (x_n)_n, \ y = (y_n)_n \in X,$$

takođe kompletan separabilan metrički prostor, pri čemu se topologija indukovana metrikom d na X poklapa sa topologijom proizvoda na X .

Teorema 1.64. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, X separabilan i $f: X \rightarrow Y$ neprekidna surjekcija. Tada je i (Y, d_Y) separabilan.*

Ovo poglavlje zaključuje se uvođenjem oznake za skup verovatnosnih mera, od Poglavlja 4 pa nadalje on će se posmatrati upravo kao kompletan separabilan metrički prostor.

Definicija 1.65. Neka je (X, d) kompletan separabilan metrički prostor. Sa $\mathcal{P}(X)$ obeležavamo skup svih verovatnosnih (Borelovih) mera na X .

Napomena 1.66. Pojam (Borelove, verovatnosne) mere biće formalno definisan u Poglavlju 2, ovde se oznaka $\mathcal{P}(X)$ uvodi unapred kako bi se naglasilo da je to drugačija upotreba oznake $\mathcal{P}$ od one uvedene u Odeljku 1.1, gde smo sa $\mathcal{P}(X)$ obeležavali partitivni skup skupa X . Iz konteksta će uvek biti jasno na koje se od ova dva značenja misli. U poglavljima koja slede posle formalnog uvođenja pojma mere (Poglavlje 2), oznaka $\mathcal{P}(X)$ odnosiće se isključivo na skup verovatnosnih mera na X , a do tada dovoljno je intuitivno razumevanje verovatnosne mere kao raspodele „jedinične mase” po prostoru X .

Pretpostavka da je osnovni prostor X kompletan i separabilan metrički prostor je standardna i najopštija pretpostavka pod kojom se u literaturi formulišu i dokazuju centralni rezultati ovog rada. Kompletanost obezbeđuje da granice Košijevih nizova, a time, kako će biti prikazano, i granice slabo konvergentnih nizova mera, zaista postoje unutar posmatranog prostora. Separabilnost, s druge strane, obezbeđuje da se svaka verovatnosna mera na X može aproksimirati merama sa konačnim (ili prebrojivim) nosačem, na primer konačnim konveksnim kombinacijama Dirakovih mera δ_x , $x \in X$, što je ključno kako za dokaz Prohorovljeve teoreme (Poglavlje 4), tako i za dokaz da je prostor $(\mathcal{P}(X), W_p)$, snabdeven Wasserstein-ovom metrikom, sam kompletan i separabilan (Poglavlje 5). Ukoliko drugačije ne bude naglašeno, u ostatku rada će se pretpostavka da je X kompletan separabilan metrički prostor podrazumevati bez posebnog isticanja.

Glava 2

Osnovi teorije mere

Cilj ovog poglavlja je uvođenje pojma mere, klase skupova na kojima se mere posmatraju (σ -algebre, kao i pomoćne strukture π - i λ -sistemi), pitanje aproksimacije mera otvorenim i kompaktnim skupovima (regularnost), merljive funkcije, kao i integral i klasične granične teoreme (Fatnova lema, teorema o monotonij i teorema o dominantnoj konvergenciji). Sve to je neophodno za sva naredna poglavlja, jer u Poglavlju 3 mere će se poistovetiti sa neprekidnim linearnim funkcionalima na prostoru $C_0(X)$ (Riesz-ova teorema reprezentacije), u Poglavlju 4 biće definisana slaba konvergencija niza mera upravo preko konvergencije integrala $\int_X f d\mu_n \rightarrow \int_X f d\mu$, a u Poglavlju 5 će pojam verovatnosne mere i njenih momenata (integrala funkcije $d(x, x_0)^p$) biti polazna tačka za definiciju Wasserstein-ove metrike.

Izlaganje u ovom poglavlju prati pristup teoriji mere kakav je izložen u [2]. Važno je napomenuti da se, u većini slučajeva, preslikavanje μ naziva „spoljašnja mera”, dok se naziv „mera” koristi za restrikciju μ na kolekciju μ -merljivih podskupova od X , a videće se i prednosti u tome da je moguće „meriti” i skupove koji nisu merljivi.

2.1 Mere i njihova osnovna svojstva

Definicija 2.1. Neka je $X \neq \emptyset$ skup i $\mathcal{P}(X)$ njegov partitivni skup. Preslikavanje

$$\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

nazivamo *merom* na X ako važi:

(m1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(m2) ako je $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, onda je

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

(prebrojiva subaditivnost).

Definicija 2.2. Neka je μ mera na X i $C \subset X$. Restrikcija mere μ na C , u oznaci $\mu \upharpoonright C$, je mera definisana sa

$$(\mu \upharpoonright C)(A) := \mu(A \cap C), \quad A \subset X.$$

Sledeći pojam je važan za čitavu teoriju, on izdvaja klasu skupova na kojima se mera μ ponaša „dobro”, u smislu da aditivno deli svaki skup $B \subset X$.

Definicija 2.3. Neka je μ mera na X . Skup $A \subset X$ je μ -merljiv ako za svaki skup $B \subset X$ važi

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

Napomena 2.4. Kako je μ subaditivna, nejednakost $\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$ važi automatski za svaki skup A . Sadržaj Definicije 2.3 je u obrnutoj nejednakosti $\mu(B) \geq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$.

Teorema 2.5 (Elementarna svojstva mera). *Neka je μ mera na X . Tada važi:*

1. ako je $A \subseteq B \subseteq X$, onda je $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonost);
2. skup A je μ -merljiv ako i samo ako je $X \setminus A$ μ -merljiv;
3. $\emptyset$ i X su μ -merljivi skupovi. Opštije, ako je $\mu(A) = 0$, onda je A μ -merljiv;
4. ako je $C \subset X$ proizvoljan, onda je svaki μ -merljiv skup i $(\mu \upharpoonright C)$ -merljiv.

Dokaz. Korak 1: Tvrdjenje (1) sledi neposredno iz definicije. Da bismo pokazali (2), pretpostavimo da je A μ -merljiv i $B \subset X$. Tada

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B \setminus (X \setminus A)) + \mu(B \cap (X \setminus A)),$$

dakle $X \setminus A$ je μ -merljiv.

Korak 2: Pretpostavimo sada da je $\mu(A) = 0$, $B \subset X$. Tada je $\mu(B \cap A) = 0$, pa je stoga

$$\mu(B) \geq \mu(B \setminus A) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

Suprotna nejednakost sledi direktno iz subaditivnosti.

Korak 3: Neka je A μ -merljiv, $C \subset X$. Tada za svako $B \subset X$

$$\begin{aligned} (\mu \upharpoonright C)(B) &= \mu(B \cap C) \\ &= \mu((B \cap C) \cap A) + \mu((B \cap C) \setminus A) \\ &= \mu((B \cap A) \cap C) + \mu((B \setminus A) \cap C) \\ &= (\mu \upharpoonright C)(B \cap A) + (\mu \upharpoonright C)(B \setminus A). \end{aligned}$$

Dakle A je $(\mu \upharpoonright C)$ -merljiv. □

Primer 2.6. Neka je X proizvoljan neprazan skup i $x_0 \in X$ fiksirana tačka. Preslikavanje $\delta_{x_0}: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ definisano sa

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A, \\ 0, & x_0 \notin A, \end{cases}$$

je mera na X (lako se proverava da važe (m1) i (m2)), koju nazivamo *Dirakovom merom* skoncentrisanom u tački x_0 . Svaki podskup od X je δ_{x_0} -merljiv.

Definicija 2.7. Neka je μ mera na X i ν mera na Y . Definišemo meru $\mu \times \nu: \mathcal{P}(X \times Y) \rightarrow [0, \infty]$ sa

$$(\mu \times \nu)(S) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \nu(B_i) \right\},$$

gde se infimum uzima po svim kolekcijama μ -merljivih skupova $A_i \subset X$ i ν -merljivih skupova $B_i \subset Y$ ($i = 1, 2, \dots$) takvim da je $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i)$. Meru $\mu \times \nu$ nazivamo *proizvodom mera* μ i ν .

2.2 Sistemi skupova

Mera μ iz Definicije 2.1 je definisana na čitavom $\mathcal{P}(X)$. U ovom odeljku formalno se uvodi pojam σ -algebre, kako bi bilo moguće precizno opisati njen „pravi” domen: klasu μ -merljivih skupova, za koju će se odmah pokazati (Teorema 2.11) da čini upravo ovakvu strukturu, na kojoj je μ zaista prebrojivo aditivna. Uvode se i pojmovi π - i λ -sistema, koji će poslužiti, kako u ovom, tako i u narednim poglavljima.

Definicija 2.8. Kolekcija $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je σ -algebra na X ako:

- (a1) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
- (a2) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$;
- (a3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Par $(X, \mathcal{A})$ nazivamo *merljivim prostorom*, a elemente $\mathcal{A}$ *merljivim skupovima*.

Napomena 2.9. Iz De Morganovih zakona, $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus A_k)$, sledi da (a3) zajedno sa (a2) povlači i zatvorenost $\mathcal{A}$ u odnosu na prebrojive preseke.

Naredna teorema pokazuje da je klasa μ -merljivih skupova zatvorena za prebrojive unije i preseke proizvoljnih (ne nužno disjunktih) nizova, da je mera μ na *disjunktним* μ -merljivim skupovima prebrojivo aditivna, i kako se μ ponaša pri graničnom prelazu na rastuće, odnosno opadajuće nizove μ -merljivih skupova.

Teorema 2.10. Neka je μ mera na X i neka su $A_1, A_2, \dots \subset X$ μ -merljivi skupovi. Tada:

1. skupovi $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ i $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ su μ -merljivi;
2. ako su, dodatno, skupovi A_k međusobno disjunktne, onda je

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k);$$

3. ako je $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, onda je $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$;

4. ako je $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ i $\mu(A_1) < \infty$, onda je $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)$.

Dokaz. Korak 1: Kako subaditivnost daje $\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$ za sve $A, B \subset X$, dovoljno je pokazati suprotnu nejednakost da bismo dokazali da je skup A μ -merljiv.

Za svaki skup $B \subset X$,

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(B \cap A_1) + \mu(B \setminus A_1) \\ &= \mu(B \cap A_1) + \mu((B \setminus A_1) \cap A_2) + \mu((B \setminus A_1) \setminus A_2) \\ &\geq \mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2)), \end{aligned}$$

pa je $A_1 \cup A_2$ μ -merljiv. Indukcijom, unija konačno mnogo μ -merljivih skupova je μ -merljiva.

Korak 2: Kako je

$$X \setminus (A_1 \cap A_2) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2),$$

preseka dva, pa i konačno mnogo, μ -merljivih skupova je μ -merljiv.

Korak 3: Pretpostavimo sada da su skupovi $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ disjunktne, i stavimo

$$B_j := \bigcup_{k=1}^j A_k \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Tada

$$\mu(B_{j+1}) = \mu(B_{j+1} \cap A_{j+1}) + \mu(B_{j+1} \setminus A_{j+1}) = \mu(A_{j+1}) + \mu(B_j) \quad (j = 1, \dots),$$

odakle

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^j A_k\right) = \sum_{k=1}^j \mu(A_k) \quad (j = 1, \dots).$$

Oдавde sledi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

iz čega sledi tvrđenje (2).

Korak 4: Da bismo dokazali (3), primetimo, na osnovu (2), da je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu(A_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{k+1} \setminus A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Tvrđenje (4) sledi iz (3), jer je

$$\mu(A_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_k)\right) \geq \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Korak 5: Podsetimo se da je, ako je B proizvoljan podskup od X , svaki μ -merljiv skup i $(\mu \upharpoonright B)$ -merljiv. Kako je $B_j := \bigcup_{k=1}^j A_k$ μ -merljiv po *Koraku 1*, za svako $B \subset X$ sa $\mu(B) < \infty$ imamo

$$\begin{aligned} \mu\left(B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mu\left(B \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= (\mu \upharpoonright B)\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) + (\mu \upharpoonright B)\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (X \setminus B_k)\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu \upharpoonright B)(B_k) + \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu \upharpoonright B)(X \setminus B_k) \\ &= \mu(B). \end{aligned}$$

Dakle $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ je μ -merljiv, kao i $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, jer je

$$X \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus A_k).$$

Ovim je dokazano (1). □

Teorema 2.11. *Ako je μ mera na nepraznom skupu X , onda kolekcija $\mathcal{M}$ svih μ -merljivih podskupova od X čini σ -algebru na X .*

Dokaz. Ovo neposredno sledi iz Teoreme 2.5 i Teoreme 2.10. □

Kako je presek proizvoljne kolekcije σ -algebri na X ponovo σ -algebra na X , ima smisla sledeća definicija.

Definicija 2.12. Neka je $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ neprazna kolekcija podskupova od X . σ -algebra generisana kolekcijom $\mathcal{C}$, u oznaci $\sigma(\mathcal{C})$, je najmanja σ -algebra koja sadrži $\mathcal{C}$ (tj. presek svih σ -algebri koje sadrže $\mathcal{C}$).

Definicija 2.13. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Borelova σ -algebra prostora X , u oznaci $\mathcal{B}(X)$, je σ -algebra generisana kolekcijom svih otvorenih podskupova od X , tj. $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O})$. Elemente $\mathcal{B}(X)$ nazivamo *Borelovim skupovima*. Meru μ na X nazivamo *Borelovom* ako je svaki Borelov skup μ -merljiv.

Napomena 2.14. Kako je svaki zatvoren skup komplement otvorenog, i kako je $\mathcal{B}(X)$ zatvorena u odnosu na komplemente, svaki zatvoren skup je Borelov. Isto tako, kako je $\mathcal{B}(X)$ zatvorena u odnosu na prebrojive unije i preseke, svaki F_σ (prebrojiva unija zatvorenih) i svaki G_δ skup (prebrojiv presek otvorenih skupova) je takođe Borelov.

Definicija 2.15 (Verovatnosna mera). Neka je $(X, \mathcal{B}(X))$ merljiv prostor u smislu Definicije 2.13. Borelovu meru μ na X (Definicija 2.13) nazivamo *verovatnosnom merom* ako je

$$\mu(X) = 1.$$

Za direktnu proveru da je neka kolekcija skupova σ -algebra ponekad je zgodnije proveriti da je ona istovremeno π -sistem (zatvorena za konačne preseke) i λ -sistem (zatvorena za neke specifične operacije), jer su ovi uslovi slabiji i lakši za proveru.

Definicija 2.16. Neprazna kolekcija $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$ je π -sistem ako $A, B \in \mathcal{P} \implies A \cap B \in \mathcal{P}$.

Definicija 2.17. Kolekcija $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(X)$ je λ -sistem ako:

$$(11) \quad X \in \mathcal{L};$$

$$(12) \quad A, B \in \mathcal{L} \text{ i } B \subseteq A \implies A \setminus B \in \mathcal{L};$$

$$(13) \quad \text{ako je } A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots, \subseteq A_k \in \mathcal{L}, \text{ onda je } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{L}.$$

Teorema 2.18 (π - λ teorema). Ako je $\mathcal{P}$ π -sistem, $\mathcal{L}$ λ -sistem, i $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$, onda je $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$.

Dokaz. Korak 1: Definišimo

$$\mathcal{S} := \bigcap_{\mathcal{L}' \supset \mathcal{P}} \mathcal{L}',$$

preseka svih λ -sistema $\mathcal{L}'$ koji sadrže $\mathcal{P}$ (ovaj presek je neprazna kolekcija λ -sistema, jer je npr. $\mathcal{L}$ jedan takav). Očigledno je $\mathcal{P} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$, i lako se proverava da je $\mathcal{S}$ sam λ -sistem.

Korak 2 (Tvrdnja 1: $\mathcal{S}$ je π -sistem): Izaberimo proizvoljne $A, B \in \mathcal{S}$. Treba pokazati $A \cap B \in \mathcal{S}$. Definišimo

$$\mathcal{A} := \{C \subset X : A \cap C \in \mathcal{S}\}.$$

Kako je $\mathcal{S}$ λ -sistem, sledi da je i $\mathcal{A}$ λ -sistem. Dakle $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$. Kako je $B \in \mathcal{S}$, odavde sledi $A \cap B \in \mathcal{S}$.

Korak 3 (Tvrdnja 2: $\mathcal{S}$ je σ -algebra): Ovo sledi otud što je $\mathcal{S}$ istovremeno λ -sistem i π -sistem. Kako $X \in \mathcal{S}$ (uslov (11)), sledi $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{S}$ (uslov (12)). Iz $A \in \mathcal{S}$ direktno sledi $X \setminus A \in \mathcal{S}$ (opet (12), primenjeno na $A \subset X$). Kako je $\mathcal{S}$ zatvorena i za komplemente i za konačne preseke (*Korak 2*), zatvorena je i za konačne unije. Dakle, ako su $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$, onda je $B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{S}$ za svako n . Kako je $(B_n)_n$ rastući niz iz $\mathcal{S}$, a $\mathcal{S}$ je λ -sistem, uslov (13) daje $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{S}$. Dakle $\mathcal{S}$ je σ -algebra.

Korak 4: Kako je $\mathcal{S} \supset \mathcal{P}$ σ -algebra, sledi

$$\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}. \quad \square$$

Napomena 2.19. π - λ teorema je izuzetno koristan tehnički alat baš zato što se, za razliku od σ -algebre, zatvorenost neke konkretne kolekcije skupova u odnosu na uslove π - ili λ -sistema često proverava skoro trivijalno. Tipična primena ilustruje se sledećom teoremom, koja pokazuje da su dve konačne Borelove mere na X jednake čim se poklapaju na jednom π -sistemu koji generiše $\mathcal{B}(X)$. Ovaj tip argumenta koristiće se ponovo u Poglavlju 4 pri diskusiji jedinstvenosti granice slabo konvergentnog niza mera.

Teorema 2.20. *Neka su μ i ν dve konačne Borelove mere na metričkom prostoru X i neka je $\mathcal{P}$ π -sistem takav da je $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(X)$ i $\mu(X) = \nu(X) < \infty$. Ako je $\mu(P) = \nu(P)$ za sve $P \in \mathcal{P}$, onda je $\mu(B) = \nu(B)$ za sve $B \in \mathcal{B}(X)$.*

Dokaz. Primenjujemo π - λ teoremu sa

$$\mathcal{L} := \{B \subset X : B \text{ Borelov, } \mu(B) = \nu(B)\}.$$

Tada je $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ (po pretpostavci), $\mathcal{P}$ je, po pretpostavci, π -sistem, a proveravamo da je $\mathcal{L}$ λ -sistem: $X \in \mathcal{L}$, jer je $\mu(X) = \nu(X) < \infty$ po pretpostavci. Ako $B \subset A$, $A, B \in \mathcal{L}$, onda iz konačne aditivnosti i konačnosti mera sledi $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) = \nu(A) - \nu(B) = \nu(A \setminus B)$, dakle $A \setminus B \in \mathcal{L}$. Ako je $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ niz iz $\mathcal{L}$, onda po Teoremi 2.10(3), primenjenoj na μ i na ν ,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(A_k) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

pa $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{L}$. Prema tome, π - λ teorema daje $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$. Ali $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(X)$, po pretpostavci. $\square$

2.3 Regularnost mera i aproksimacija otvorenim i kompaktnim skupovima

Ovaj odeljak rezervisan je za uvođenje pojma *regularne* mere, kojim se formalizuje ideja da se mera proizvoljnog skupa može dobro aproksimirati merom nekog otvorenog nadskupa, odnosno nekog kompaktnog podskupa.

Definicija 2.21. 1. Mera μ na X je *regularna* ako za svaki skup $A \subseteq X$ postoji μ -merljiv skup B takav da je $A \subseteq B$ i $\mu(A) = \mu(B)$.

2. Ako je X topološki prostor, Borelova mera μ na X je *Borel-regularna* ako za svaki $A \subseteq X$ postoji Borelov skup B takav da je $A \subseteq B$ i $\mu(A) = \mu(B)$.
3. *Radonova mera* na X je Borel-regularna mera μ takva da je $\mu(K) < \infty$ za svaki kompaktan skup $K \subset X$.

Teorema 2.22 (Rastući skupovi). *Neka je μ regularna mera na X i $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ (ne nužno merljivi skupovi). Tada*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Dokaz. Kako je μ regularna, postoje μ -merljivi skupovi $(C_k)_{k=1}^{\infty}$, sa $A_k \subset C_k$ i $\mu(A_k) = \mu(C_k)$ za svako k . Stavimo $B_k := \bigcap_{j \geq k} C_j$. Tada je $A_k \subset B_k$, svaki B_k je μ -merljiv, i $\mu(A_k) = \mu(B_k)$. Prema tome,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Ali $A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, pa je i

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

□

Naredna teorema pokazuje da se, ako je μ Radonova mera na $\mathbb{R}^n$ (ili, opštije, na lokalno kompaktnom separabilnom metričkom prostoru), mera proizvoljnog skupa može aproksimirati merom otvorenog nadskupa, a mera merljivog skupa merom kompaktnog podskupa. Dokaz je tehnički zahtevan pa ovde neće biti naveden. Zainteresovani čitalac ga može naći u [2, Teorema 1.8].

Teorema 2.23 (Aproksimacija otvorenim i kompaktnim skupovima). *Neka je μ Radonova mera na $\mathbb{R}^n$. Tada:*

1. *za svaki skup $A \subset \mathbb{R}^n$ važi*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ otvoren}\};$$

2. *za svaki μ -merljiv skup $A \subset \mathbb{R}^n$ važi*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ kompaktan}\}.$$

Iako je Teorema 2.23 formulisana za $\mathbb{R}^n$, analogno važi i na opštijim prostorima.

Teorema 2.24 (Regularnost konačnih Borelovih mera na metričkom prostoru). *Svaka konačna Borelova mera μ na metričkom prostoru (X, d) je regularna u sledećem (jačem) smislu: za svaki Borelov skup $B \subset X$ i svako $\varepsilon > 0$ postoje zatvoren skup F i otvoren skup U takvi da je*

$$F \subset B \subset U, \quad \mu(U \setminus F) < \varepsilon.$$

Ideja dokaza. Posmatra se kolekcija $\mathcal{L}$ svih Borelovih skupova koji dopuštaju ovakvu aproksimaciju. Pokazuje se da je $\mathcal{L}$ σ -algebra (zatvorena za komplemente i prebrojive unije, preko $\varepsilon/2^n$ argumenta) koja sadrži sve zatvorene skupove (za zatvoren F , skupovi $U_k := \{x : d(x, F) < 1/k\}$ opadaju ka F , pa važi $\mu(U_k) \rightarrow \mu(F)$), odakle sledi $\mathcal{L} = \mathcal{B}(X)$. Potpun dokaz videti u [1, Propozicija E.16]. $\square$

Napomena 2.25. Teorema 2.24 pokazuje da su *sve* konačne (pa i sve verovatnosne) Borelove mere na metričkom prostoru automatski regularne u ovom smislu. Pretpostavka lokalne kompaktnosti prostora X , koja je bila neophodna u Teoremi 2.23, ovde se ne zahteva. Ovo je razlog zašto će u Poglavljima 4 i 5 moći da se radi sa proizvoljnim kompletnim separabilnim metričkim prostorom X (Definicija 1.54), a ne samo sa $\mathbb{R}^n$.

Za kraj ovog odeljka, navodi se jedan praktičan kriterijum (bez dokaza, videti [2, Teorema 1.9]) koji nam omogućava da proverimo da je neka mera na $\mathbb{R}^n$ Borelova, bez direktnog ispitivanja μ -merljivosti svakog Borelovog skupa.

Teorema 2.26 (Caratheodory-jev kriterijum). *Neka je μ mera na $\mathbb{R}^n$. Ako za sve skupove $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ takve da je $\text{dist}(A, B) > 0$ važi*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

onda je μ Borelova mera.

2.4 Merljive funkcije

Sada se proširuje pojam merljivosti sa skupova na funkcije, umesto inverznih slika otvorenih skupova koji moraju biti otvoreni, ovde tražimo da inverzne slike otvorenih skupova budu μ -merljive.

Definicija 2.27. Neka je μ mera na X i Y topološki prostor.

1. Funkcija $f: X \rightarrow Y$ je μ -merljiva ako je $f^{-1}(U)$ μ -merljiv skup za svaki otvoren $U \subset Y$.
2. Funkcija $f: X \rightarrow Y$ je Borel merljiva ako je $f^{-1}(U)$ Borelov skup za svaki otvoren $U \subset Y$.

Primer 2.28. Ako je X topološki prostor i $f: X \rightarrow Y$ neprekidna funkcija, onda je f Borel merljiva. Zaista, za otvoren $U \subset Y$ skup $f^{-1}(U)$ je otvoren po neprekidnosti, dakle Borelov. Ova činjenica je važna jer će se u Poglavlju 4 integraliti funkcije $f \in C_b(X)$ po merama iz $\mathcal{P}(X)$, a gornji primer garantuje da su svi ti integrali dobro definisani.

Teorema 2.29 (Inverzne slike). *Neka je μ mera na X i Y topološki prostor. Tada:*

1. *ako je $f: X \rightarrow Y$ μ -merljiva, onda je $f^{-1}(B)$ μ -merljiv za svaki Borelov skup $B \subseteq Y$;*
2. *funkcija $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je μ -merljiva ako i samo ako je skup $f^{-1}([-\infty, a))$ μ -merljiv za svako $a \in \mathbb{R}$;*
3. *ako su $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $g: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ μ -merljive, onda je $i(f, g): X \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ μ -merljiva.*

Dokaz. Korak 1: Proveravamo da je

$$\mathcal{A}_f := \{A \subset Y : f^{-1}(A) \text{ je } \mu\text{-merljiv}\}$$

σ -algebra koja sadrži otvorene skupove. Po pretpostavci merljivosti f , $\mathcal{A}_f$ zaista sadrži sve otvorene podskupove od Y . Kako je $\mathcal{B}(Y)$, po Definiciji 2.13, *najmanja* σ -algebra koja sadrži otvorene skupove, sledi $\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{A}_f$, tj. $f^{-1}(B)$ je μ -merljiv za svaki Borelov B .

Korak 2: Slično, kolekcija

$$\mathcal{A} := \{A \subset [-\infty, \infty] : f^{-1}(A) \text{ je } \mu\text{-merljiv}\}$$

je σ -algebra bez obzira na merljivost f . Smer ($\Rightarrow$) sledi direktno iz *Koraka 1*. Za smer ($\Leftarrow$): ako $\mathcal{A}$ sadrži sve skupove $[-\infty, a)$, onda, kako je σ -algebra, sadrži i sve njihove komplemente i prebrojive preseke, dakle i sve intervale oblika (a, b) i $(a, \infty]$ (koji se iz $[-\infty, a)$ dobijaju upravo tim operacijama). Kako je svaki otvoren podskup od $\overline{\mathbb{R}}$ prebrojiva unija ovakvih intervala, $\mathcal{A}$ sadrži sve otvorene skupove, pa je f merljiva po Definiciji 2.27(1).

Korak 3: Neka je $h := (f, g)$. Tada je

$$\mathcal{A}_h := \{A \subset \mathbb{R}^{n+m} : h^{-1}(A) \text{ je } \mu\text{-merljiv}\}$$

σ -algebra koja sadrži sve otvorene skupove oblika $U \times V$, gde su $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ otvoreni (jer je $h^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$, presek dva μ -merljiva skupa, dakle μ -merljiv, po *Koraku 2* dokaza Teoreme 2.10). Kako je svaki otvoren podskup od $\mathbb{R}^{n+m}$ prebrojiva unija ovakvih „kutija”, $\mathcal{A}_h$ sadrži sve otvorene skupove, pa je h μ -merljiva. $\square$

Napomena 2.30. Tvrdjenje (3) Teoreme 2.29 biće posebno korisno. Da bi se proverilo da je preslikavanje $(x, y) \mapsto d(x, y)$ merljivo na proizvodu $X \times X$ (što je potrebno kad god se

integrali rastojanje po nekoj meri na $X \times X$, na primer u definiciji Wasserstein-ove metrike u Poglavlju 5), dovoljno je znati da su koordinatne projekcije merljive (što sledi iz njihove neprekidnosti) i primeniti (3), zajedno sa činjenicom da je funkcija d neprekidna, pa i Borel merljiva, na $X \times X$.

2.5 Integral i granične teoreme

Poslednji odeljak poglavlja o teoriji mere definiše integral μ -merljive funkcije i navodi tri klasične granične teoreme: Fatuova lema, teorema o monotonij konvergenciji i teorema o dominantnoj konvergenciji. Ove teoreme, kako ističu i sami Evans i Gariepy u naslovu odgovarajućeg odeljka svoje knjige [2], spadaju među najvažnija tvrđenja čitave analize. Ovde će se koristiti prvenstveno u Poglavlju 4, gde je sama definicija slabe konvergencije mera izražena preko konvergencije integrala $\int_X f d\mu_k \rightarrow \int_X f d\mu$, kao i u Poglavlju 5, prilikom definisanja Wasserstein-ove metrike preko $\int_{X \times X} d(x, y)^p d\gamma(x, y)$.

Definicija 2.31. Neka je μ mera na X . *Nenegativna prosta funkcija* je funkcija oblika

$$g = \sum_{j=1}^m a_j \mathbf{I}_{A_j},$$

gde su $a_j \geq 0$, a $A_1, \dots, A_m \subset X$ međusobno disjunktni μ -merljivi skupovi. Za takvu funkciju definišemo integral

$$\int_X g d\mu := \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j).$$

Definicija 2.32. Neka je $f: X \rightarrow [0, \infty]$ μ -merljiva funkcija. Definišemo

$$\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X g d\mu : g \text{ nenegativna prosta funkcija, } g \leq f \right\}.$$

Ako je $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ μ -merljiva, pišemo $f = f^+ - f^-$, gde su $f^+ := \max\{f, 0\}$ i $f^- := \max\{-f, 0\}$ nenegativne merljive funkcije, i kažemo da je f μ -integrabilna ako bar jedan od integrala $\int_X f^+ d\mu$, $\int_X f^- d\mu$ nije $+\infty$, u kom slučaju stavljamo

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Funkciju f nazivamo μ -sumabilnom ako je μ -integrabilna i $\int_X |f| d\mu < \infty$, a skup svih μ -sumabilnih funkcija obeležavamo sa $L^1(X, \mu)$.

Napomena 2.33. Važno je napomenuti (prateći [2]) da se pojam „integrabilnosti” razlikuje od uobičajenog: ovde je funkcija integrabilna čim ima integral, makar taj integral bio $+\infty$ ili $-\infty$. Tek „sumabilnost” zahteva konačnost integrala apsolutne vrednosti. Za funkciju

$f \in L^1(X, \mu)$, integral $\int_X f d\mu$ je, po Definiciji 2.32, konačan. Slično, za *svaku* Borelovu funkciju $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ koja je ograničena i neprekidna, izraz $\int_X \varphi d\mu$ (koji će se koristiti u definiciji slabe konvergencije, Poglavlje 4) uvek ima smisla, jer je φ ograničena, a μ (kad je verovatnosna) konačna mera.

Iz same Definicije 2.32 lako se izvode standardna svojstva integrala: linearnost (za ne-negativne skalare, i, na $L^1(X, \mu)$, za sve realne skalare) i monotonost ($f \leq g$ svuda povlači $\int f d\mu \leq \int g d\mu$). Ova svojstva se podrazumevaju u nastavku bez posebnog dokazivanja.

Definicija 2.34 (σ -konačnost). 1. Skup $A \subset X$ je σ -konačan u odnosu na μ ako se može predstaviti kao prebrojiva unija μ -merljivih skupova konačne mere, tj. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, sa B_k μ -merljivim i $\mu(B_k) < \infty$ za svako k .

2. Funkcija $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je σ -konačna u odnosu na μ ako je μ -merljiva i ako je skup $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ σ -konačan u odnosu na μ , u smislu tačke (1).

Teorema 2.35 (Fubinijeva teorema). *Neka je μ mera na X i ν mera na Y . Tada:*

1. $\mu \times \nu$ je regularna mera na $X \times Y$, čak i kada μ i ν nisu regularne;
2. ako je $A \subset X$ μ -merljiv i $B \subset Y$ ν -merljiv, onda je $A \times B$ $(\mu \times \nu)$ -merljiv i $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$;
3. ako je f $(\mu \times \nu)$ -integrabilna i σ -konačna u odnosu na $\mu \times \nu$ (posebno, ako je $(\mu \times \nu)$ -sumabilna), onda je preslikavanje

$$y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

ν -integrabilno, preslikavanje $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ je μ -integrabilno, i

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

Naredna tri tvrđenja predstavljaju granične teoreme za Lebegov integral. Svako sledeće tvrđenje se izvodi iz prethodnog.

Teorema 2.36 (Fatuova lema). *Neka su $f_k: X \rightarrow [0, \infty]$, $k = 1, 2, \dots$, μ -merljive funkcije. Tada*

$$\int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu.$$

Dokaz. Neka je $g := \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mathbf{I}_{A_j}$ nenegativna prosta funkcija, manja ili jednaka $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$. Pretpostavimo da su μ -merljivi skupovi $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ disjunktni i $a_j > 0$ za $j = 1, \dots$.

Fiksirajmo $0 < t < 1$. Tada

$$A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{j,k},$$

gde je

$$B_{j,k} := A_j \cap \{x : f_l(x) > t a_j \text{ za sve } l \geq k\}.$$

Primetimo da je

$$A_j \supset B_{j,k+1} \supset B_{j,k} \quad (k = 1, \dots).$$

Prema tome,

$$\int_X f_k d\mu \geq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f_k d\mu \geq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_{j,k}} f_k d\mu \geq t \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu(B_{j,k})$$

i stoga

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu \geq t \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu(A_j) = t \int_X g d\mu.$$

Ova nejednakost važi za svako $0 < t < 1$ i za svaku prostu funkciju g manju ili jednaku $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$. Prema tome,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu \geq \int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu. \quad \square$$

Teorema 2.37 (Teorema o monotonij konvergenciji). *Neka su $f_k : X \rightarrow [0, \infty]$, $k = 1, 2, \dots$, μ -merljive funkcije, takve da je*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \dots$$

Tada

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu.$$

Dokaz. Jasno je da

$$\int_X f_j d\mu \leq \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \quad (j = 1, \dots),$$

pa je stoga

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu \leq \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu.$$

Suprotna nejednakost sledi iz Fatuove leme. $\square$

Teorema 2.38 (Teorema o dominantnoj konvergenciji). *Neka je $g \geq 0$ μ -sumabilna funkcija, i neka su $f, f_1, f_2, \dots : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ μ -merljive funkcije takve da:*

- $f_k \rightarrow f$ μ -skoro svuda kad $k \rightarrow \infty$;
- $|f_k| \leq g$ za sve k .

Tada je f μ -sumabilna, i

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\mu = 0, \quad \text{pa i} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu.$$

Dokaz. Po Fatuovoj lemi,

$$\int_X 2g \, d\mu = \int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} (2g - |f - f_k|) \, d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X (2g - |f - f_k|) \, d\mu,$$

odakle

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_X |f - f_k| \, d\mu \leq 0.$$

□

Ovde se završava poglavlje o osnovama teorije mere koje će biti od značaja u nastavku rada. U Poglavlju 3 pojam (Radonove) mere povezaće se sa pojmom neprekidnih linearnih funkcionala na prostoru $C_0(X)$. Ovo povezivanje koje se dešava u Riesz-ovoj teoremi reprezentacije je upravo ono što omogućava se da na skupu $\mathcal{P}(X)$ uvede topologija, za koju će se pokazati u Poglavlju 4 da se poklapa sa topologijom slabe konvergencije mera.

Glava 3

Riesz-ova teorema reprezentacije i topologija na prostorima mera

Cilj ovog poglavlja je povezivanje osnova teorije mere, izloženih u Poglavlju 2, sa pojmovima funkcionalne analize uvedenim u Odeljcima 1.2–1.4 (topologija, normirani prostori, dual prostora). Centralni rezultat je *Rieszova teorema reprezentacije*, koja (na kompaktnom metričkom prostoru X) povezuje dual $(C(X))^*$ prostora neprekidnih funkcija sa prostorom konačnih predznačenih Borelovih mera na X . Ovo povezivanje omogućava da na prostoru mera $\mathcal{P}(X)$ uvedemo topologiju *nasledenu iz duala*, onu koja će se, u Poglavlju 4, pokazati kao topologija slabe konvergencije mera.

Izlaganje u prva tri odeljka prati, uz prilagođavanje oznaka, pristup dat u [3], [1] i [2], dok se u četvrtom odeljku oslanja na [4] i [5].

3.1 Prostori $C_0(X)$ i $C_c(X)$

Ranije su već najavljeni prostori $C_c(X)$ i $C_0(X)$. Ovde se formalno uvode i ispituje se njihov odnos prema Banahovom prostoru $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$.

Definicija 3.1. Neka je X topološki prostor i $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. *Nosač* funkcije f , u oznaci $\text{supp}(f)$, je skup

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Sa $C_c(X)$ obeležavamo skup svih neprekidnih funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ čiji je nosač kompaktan skup.

Napomena 3.2. Direktno se proverava da je $C_c(X)$ vektorski potprostor prostora svih neprekidnih funkcija na X : ako $f, g \in C_c(X)$, tada je $\text{supp}(f + g) \subset \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$, a konačna unija kompaktnih skupova je kompaktan, pa je i $\text{supp}(f + g)$ sadržan u kompaktnom skupu, dakle zatvoren podskup kompaktnog skupa, pa je i sam kompaktan. Analogno se proverava zatvorenost za množenje skalarom.

Definicija 3.3. Neka je (X, d) lokalno kompaktan metrički prostor (Definicija 1.18). Za funkciju $f \in C_b(X)$ kažemo da *iščezava u beskonačnosti* ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan skup $K \subset X$ tako da je $|f(x)| < \varepsilon$ za sve $x \in X \setminus K$. Skup svih neprekidnih funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ koje iščezavaju u beskonačnosti obeležavamo sa $C_0(X)$.

Napomena 3.4. Iz Definicije 3.3 sledi $C_c(X) \subset C_0(X)$: ako je $f \in C_c(X)$, van kompaktnog skupa $\text{supp}(f)$ funkcija f je identički jednaka nuli, pa uslov iz Definicije 3.3 trivijalno važi za svako $\varepsilon > 0$, sa $K = \text{supp}(f)$. Ako je X kompaktan, onda je $C_c(X) = C_0(X) = C_b(X) = C(X)$.

Teorema 3.5. Neka je (X, d) lokalno kompaktan metrički prostor. Tada je $C_c(X) \subset C_0(X) \subset C_b(X)$, i $C_0(X)$ je zatvoren potprostor Banahovog prostora $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$. Posebno, $(C_0(X), \|\cdot\|_\infty)$ je i sam Banahov prostor.

Napomena 3.6. Kako je, po Teoremi 3.5, $(C_0(X), \|\cdot\|_\infty)$ Banahov prostor, na njega se primenjuje Definicija 1.52 iz Poglavlja 1: dual $(C_0(X))^*$ je dobro definisan Banahov prostor, sastavljen od svih ograničenih (ekvivalentno, neprekidnih) linearnih funkcionala $\varphi: C_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$.

Napomena 3.7. Oznaka L iz Odeljka 1.4 korišćena je za proizvoljan linearan funkcional u opštem, apstraktnom kontekstu. Od ovog poglavlja pa nadalje, za konkretne elemente duala $(C_0(X))^*$, odnosno $(C_b(X))^*$ ili $(C_c(X))^*$, koristiće se oznaka φ (uz pisanje $\langle f, \varphi \rangle$ umesto $\varphi(f)$ kad je to preglednije), prateći literaturu o Riesz-ovoj teoremi reprezentacije ([1]). Ovo je isključivo notaciono pravilo, φ je i dalje samo linearan funkcional u smislu Definicije 1.52.

Propozicija 3.8 (Urysohn-ova lema). Neka je X lokalno kompaktan Hausdorfov prostor, $V \subset X$ otvoren skup i $K \subset V$ kompaktan skup. Tada postoji $f \in C_c(X)$ tako da je $\text{supp}(f) \subset V$, $0 \leq f \leq 1$ na X i $f \equiv 1$ na K .

Napomena 3.9. Kako je svaki metrički prostor Hausdorfov, Propozicija 3.8 primenjiva je na svaki lokalno kompaktan metrički prostor. Dokaz se ovde izostavlja videti [3, Teorema 2.12].

Napomena 3.10. Neka je X lokalno kompaktan metrički prostor. Tada je $C_c(X)$ gust u prostoru $(C_0(X), \|\cdot\|_\infty)$. Zaista, neka je $f \in C_0(X)$ i $\varepsilon > 0$, po Definiciji 3.3 postoji kompaktan skup $K \subset X$ tako da je $|f(x)| < \varepsilon$ za $x \notin K$. Po Propoziciji 3.8 (primenjenoj na $K \subset X$) postoji funkcija $g \in C_c(X)$ sa $0 \leq g \leq 1$ i $g \equiv 1$ na K . Funkcija $h := fg$ pripada skupu $C_c(X)$ (kao proizvod neprekidne funkcije i funkcije sa kompaktnim nosačem, $\text{supp}(h) \subset \text{supp}(g)$), i za $x \in K$ je $h(x) = f(x)$, dok je za $x \notin K$

$$|f(x) - h(x)| = |f(x)| |1 - g(x)| \leq |f(x)| < \varepsilon.$$

Dakle $\|f-h\|_\infty \leq \varepsilon$, tj. $h \in B(f, \varepsilon) \cap C_c(X)$, gde je $B(f, \varepsilon)$ otvorena lopta u $(C_0(X), \|\cdot\|_\infty)$. Kako su otvorene lopte baza topologije indukovane metrikom, a $f \in C_0(X)$ i $\varepsilon > 0$ su bili proizvoljni, pokazano je: svaka okolina svake tačke $f \in C_0(X)$ ima neprazan presek sa $C_c(X)$. Po karakterizaciji zatvorenja: $x \in \overline{A}$ ako i samo ako svaka okolina tačke x ima neprazan presek sa A , sledi $C_0(X) \subset \overline{C_c(X)}$. Obrnuta inkluzija $\overline{C_c(X)} \subset C_0(X)$ sledi iz $C_c(X) \subset C_0(X)$ i zatvorenosti $C_0(X)$ u $C_b(X)$. Prema tome $\overline{C_c(X)} = C_0(X)$, tj. $C_c(X)$ je gust u $C_0(X)$.

3.2 Predznačene mere i prostor $\mathcal{M}(X)$

Mere uvedene u Poglavlju 2 (Definicija 2.1) uzimaju vrednosti u $[0, \infty]$. Da bi moglo da se govori o *dualu* prostora $C_b(X)$ (odnosno $C_0(X)$), potreban je opštiji pojam mere koja može uzimati i negativne (ali konačne, realne) vrednosti. Ovakve mere nazivamo *predznačenim*, i uvode se direktno na σ -algebri $\mathcal{B}(X)$ Borelovih skupova, umesto na celom $\mathcal{P}(X)$ kao u Definiciji 2.1.

Definicija 3.11. Neka je $(X, \mathcal{B}(X))$ merljiv prostor. *Predznačena (realna) mera* na X je preslikavanje $\nu: \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ koje je *prebrojivo aditivno*: za svaku disjunktну prebrojivu familiju $\{A_k\}_k \subset \mathcal{B}(X)$ važi

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k),$$

pri čemu red na desnoj strani konvergira (apsolutno, jer suma ne zavisi od poretka skupova A_k) za svaku takvu familiju.

Napomena 3.12. Predznačena mera ν uzima i negativne vrednosti, ali, za razliku od mere iz Definicije 2.1 (koja dozvoljava vrednost $+\infty$), ν je po definiciji *konačna* (uzima vrednosti u $\mathbb{R}$, a ne u $\overline{\mathbb{R}}$ ili $[0, \infty]$). Ova konačnost je posledica same definicije prebrojive aditivnosti.

Sledeća teorema pokazuje da predznačene mere dozvoljavaju razlaganje na pozitivne i negativne delove.

Teorema 3.13 (Han–Žordanova dekompozicija). *Neka je ν predznačena mera na X . Tada su*

$$\nu^+(A) := \sup\{\nu(B) : B \in \mathcal{B}(X), B \subset A\}, \quad \nu^-(A) := -\inf\{\nu(B) : B \in \mathcal{B}(X), B \subset A\}$$

konačne (nenegativne) Borelove mere na X , i važi

$$\nu = \nu^+ - \nu^-.$$

Štaviše, mere ν^+ i ν^- su uzajamno singularne: postoji particija $X = P \cup N$, $P \cap N = \emptyset$,

$P, N \in \mathcal{B}(X)$, tako da je

$$\nu^+(A) = \nu(A \cap P), \quad \nu^-(A) = -\nu(A \cap N), \quad A \in \mathcal{B}(X).$$

Ako je $\nu = \lambda_1 - \lambda_2$ za neke konačne (nenegativne) mere λ_1, λ_2 , onda je $\lambda_1 \geq \nu^+$ i $\lambda_2 \geq \nu^-$ (tj. ν^+, ν^- su „najmanja“ takva dekompozicija).

Napomena o dokazu. Dokaz je konstruktivan i tehnički zahtevan, pa se ovde izostavlja, videti [1, Teorema 2.45], ili u drugačijoj prezentaciji [3, Teorema 6.14]. $\square$

Definicija 3.14. Neka je ν predznačena mera na X , sa Žordanovom dekompozicijom $\nu = \nu^+ - \nu^-$ iz Teoreme 3.13. *Totalna varijacija* mere ν je (nenegativna, konačna) mera

$$|\nu| := \nu^+ + \nu^-.$$

Broj $\|\nu\| := |\nu|(X)$ nazivamo *normom varijacije* mere ν .

Napomena 3.15. Direktno iz definicije, $|\nu(A)| \leq |\nu|(A)$ za svaki Borelov skup A , sa jednakosti ako je $A \subset P$ ili $A \subset N$. Ekvivalentna (i često korišćena) karakterizacija totalne varijacije je

$$|\nu|(A) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\nu(A_k)| : A = \bigcup_{k=1}^n A_k, A_k \in \mathcal{B}(X) \text{ međusobno disjunktni, } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definicija 3.16. Skup svih predznačenih mera na X obeležavamo sa $\mathcal{M}(X)$. Na $\mathcal{M}(X)$ definišemo operacije sabiranja i množenja skalarom na uobičajen način za $A \in \mathcal{B}(X)$, $c \in \mathbb{R}$:

- $(\nu_1 + \nu_2)(A) := \nu_1(A) + \nu_2(A)$,
- $(c\nu)(A) := c\nu(A)$.

Napomena 3.17. Direktno se proverava da su $\nu_1 + \nu_2$ i $c\nu$ ponovo predznačene mere (prebrojiva aditivnost se nasleđuje), pa je $\mathcal{M}(X)$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, sa normom $\|\cdot\|$ iz Definicije 3.14 (da je $\|\cdot\|$ zaista norma proverava se direktno iz definicije, videti [1]).

Teorema 3.18. *Prostor $(\mathcal{M}(X), \|\cdot\|)$ je Banahov prostor.*

Skica dokaza. Neka je $(\nu_n)_n$ Košijev niz u $\mathcal{M}(X)$. Kako je za svaki $A \in \mathcal{B}(X)$

$$|\nu_n(A) - \nu_m(A)| \leq |\nu_n - \nu_m|(A) \leq \|\nu_n - \nu_m\|,$$

niz brojeva $(\nu_n(A))_n$ je Košijev u $\mathbb{R}$, pa konvergira. Definišemo $\nu(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(A)$. Pokazuje se da je ovako definisano ν prebrojivo aditivno, dakle $\nu \in \mathcal{M}(X)$, i da $\|\nu_n - \nu\| \rightarrow 0$. Tehnički detalji ovog dokaza dati su u [1, Teorema 2.44]. $\square$

Naredni korak je da svaku meru $\nu \in \mathcal{M}(X)$ poistovetimo sa jednim (ograničenim, linearnim) funkcionalom na $C_b(X)$.

Definicija 3.19. Neka je $\nu \in \mathcal{M}(X)$, sa Žordanovom dekompozicijom $\nu = \nu^+ - \nu^-$, i neka je $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, ν^+ - i ν^- -sumabilna funkcija (Definicija 2.32). *Integral funkcije f po predznačenoj meri ν* definišemo sa

$$\int_X f d\nu := \int_X f d\nu^+ - \int_X f d\nu^-.$$

Napomena 3.20. Ako je $f \in C_b(X)$, integral $\int_X f d\nu$ je uvek dobro definisan: ν^+, ν^- su konačne mere (Teorema 3.13), pa je svaka ograničena Borel merljiva funkcija $\nu^\pm$ -sumabilna.

Propozicija 3.21. *Neka je $\nu \in \mathcal{M}(X)$ i $f \in C_b(X)$. Tada*

$$\left| \int_X f d\nu \right| \leq \int_X |f| d|\nu| \leq \|f\|_\infty \|\nu\|.$$

Dokaz. Neka je najpre $f = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{I}_{A_k}$ prosta funkcija, sa disjunktним $A_k \in \mathcal{B}(X)$. Tada je, koristeći nejednakost trougla i Napomenu 3.15 ($|\nu(A_k)| \leq |\nu|(A_k)$),

$$\left| \int_X f d\nu \right| = \left| \sum_{k=1}^n c_k \nu(A_k) \right| \leq \sum_{k=1}^n |c_k| |\nu(A_k)| \leq \sum_{k=1}^n |c_k| |\nu|(A_k) = \int_X |f| d|\nu|.$$

Opšti slučaj sledi iz ovoga, primećujući da su proste funkcije guste u $L^1(X, |\nu|)$ (skup $|\nu|$ -sumabilnih funkcija, Definicija 2.32, primenjena na meru $|\nu|$), i da $f_k \rightarrow f$ u $L^1(X, |\nu|)$ povlači $\int_X |f_k - f| d\lambda \rightarrow 0$ za svaku od mera $\lambda \in \{\nu^+, \nu^-\}$. Druga nejednakost je direktna posledica $|f| \leq \|f\|_\infty$ svuda, pa je $\int_X |f| d|\nu| \leq \|f\|_\infty \cdot |\nu|(X) = \|f\|_\infty \|\nu\|$. $\square$

Napomena 3.22. Propozicija 3.21 pokazuje da svaka predznačena mera $\nu \in \mathcal{M}(X)$ definiše, preko $f \mapsto \int_X f d\nu$, ograničen linearan funkcional na $C_b(X)$ (Odeljak 1.4), sa normom $\|\varphi_\nu\| \leq \|\nu\|$. U Odeljku 3.3 (Riesz-ova teorema reprezentacije) pokazaćemo da, za meru $\nu \in \mathcal{M}_R(X)$ i funkcional na $C_0(X)$ (a ne na celom $C_b(X)$), ovde dobijena nejednakost je zapravo *jednakost*, $\|\varphi_\nu\| = \|\nu\|$, što će odmah dati i jedinstvenost mere koja predstavlja dati funkcional.

Napomena 3.23. Predznačena mera $\nu \in \mathcal{M}(X)$ je *Radonova* ako je njena totalna varijacija $|\nu|$ Borel-regularna (Definicija 2.21(2)). Uslov konačnosti na kompaktnim skupovima iz Definicije 2.21(3) je ovde automatski ispunjen: kako je ν (pa i $|\nu|$) po definiciji konačna mera, $|\nu|(K) \leq |\nu|(X) < \infty$ za svaki $K \subset X$, pa je Borel-regularnost jedini netrivialni uslov. Skup svih Radonovih predznačenih mera na X obeležavamo sa $\mathcal{M}_R(X) \subset \mathcal{M}(X)$. Direktno iz definicije sledi da je $\mathcal{M}_R(X)$ vektorski potprostor od $\mathcal{M}(X)$. Može se pokazati (videti [1]) da je $\mathcal{M}_R(X)$ i *zatvoren* potprostor, pa je, po Teoremi 3.18 i tvrđenju o zatvorenim podskupovima kompletnih prostora, i $(\mathcal{M}_R(X), \|\cdot\|)$ sam Banahov prostor.

Upravo je prostor $\mathcal{M}_R(X)$ onaj koji se, prema Riesz-ovoj teoremi reprezentacije (Teorema 3.24), poistovećuje sa dualom $(C_0(X))^*$.

3.3 Riesz-ova teorema reprezentacije

U ovom odeljku dokazaće se centralni rezultat poglavlja: da se, za lokalno kompaktan Hauzдорfov prostor X , dual $(C_0(X))^*$ poistovećuje sa prostorom $\mathcal{M}_R(X)$ Radonovih predznačenih mera uvedenim u Napomeni 3.23.

Podsetimo, svaka mera $\nu \in \mathcal{M}(X)$ određuje, preko $\varphi_\nu(f) := \int_X f d\nu$, ograničen linearan funkcional na $C_b(X)$ (Napomena 3.22), sa $\|\varphi_\nu\| \leq \|\nu\|$.

Teorema 3.24 (Rieszova teorema reprezentacije). *Neka je X lokalno kompaktan Hauzдорfov prostor. Za svaki ograničen linearan funkcional φ na $(C_0(X))^*$ postoji jedinstvena Radonova mera $\nu \in \mathcal{M}_R(X)$ takva da je $\varphi = \varphi_\nu$, tj.*

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_X f d\nu, \quad f \in C_0(X).$$

Ova mera zadovoljava $\|\nu\| = \|\varphi\|$. Preslikavanje $\varphi \leftrightarrow \nu$ uspostavlja izometrijski izomorfizam

$$(C_0(X))^* \cong \mathcal{M}_R(X).$$

Mera ν koja predstavlja φ je nenegativna ako i samo ako je φ pozitivan funkcional (Definicija 3.25 ispod).

U specijalnom slučaju kompaktnog metričkog prostora X važi $\mathcal{M}_R(X) = \mathcal{M}(X)$ (svaka konačna Borelova mera na kompaktu je automatski Radonova), pa dobijamo izometrijski izomorfizam $(C_0(X))^* \cong \mathcal{M}(X)$.

Definicija 3.25. Linearan funkcional φ na $(C_0(X))^*$ (ili na $(C_c(X))^*$) je pozitivan ako je $\langle f, \varphi \rangle \geq 0$ za svako $f \geq 0$.

Za dokaz Teoreme 3.24 je, pored Urysohn-ove leme (Propozicija 3.8), potrebna i sledeća propozicija koja se navodi bez dokaza (videti [1, Teorema C.12]).

Napomena 3.26. Neka je X lokalno kompaktan Hauzдорfov prostor, $U \subset X$ otvoren skup i $f \in C_c(X)$. Pišemo

$$f \prec U$$

ako je $0 \leq f \leq 1$ na X i nosač funkcije f je kompaktan skup sadržan u U .

Propozicija 3.27 (Particija jedinice). *Neka su $U_1, \dots, U_k$ otvoreni podskupovi lokalno kompaktnog Hauzдорfovog prostora X i $K \subset X$ kompaktan skup sa $K \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$. Tada postoje funkcije $g_1, \dots, g_k \in C_c(X)$, sa $g_j \prec U_j$, tako da je $\sum_{j=1}^k g_j \equiv 1$ na K .*

Dokaz Teoreme 3.24. Jedinstvenost je neposredna posledica jednakosti normi $\|\varphi\| = \|\nu\|$, koja važi za svaku reprezentujuću meru $\nu \in \mathcal{M}_R(X)$, a ovo sledi iz argumenta u *Koraku* 4. Dokaz egzistencije daje se u četiri koraka.

Korak 1: Počinjemo slučajem pozitivnih funkcionala φ . U ovom koraku dokazujemo egzistenciju nenegativne reprezentujuće mere $\nu \in \mathcal{M}(X)$ za takve funkcionale. U *Koraku* 2 pokazaćemo da je mera ν Radonova.

Neka $\mathcal{U}$ označava kolekciju otvorenih podskupova od X . Definišemo

$$\nu(U) := \sup\{\langle f, \varphi \rangle : f \in C_c(X), f \prec U\}, \quad \nu(\emptyset) := 0.$$

Primetimo da je $0 \leq \nu(U) \leq \nu(X) = \sup\{\langle f, \varphi \rangle : 0 \leq f \leq 1, f \in C_c(X)\} \leq \|\varphi\|$.

Pokažimo da je ν prebrojivo subaditivna na $\mathcal{U}$. Pretpostavimo da je $f \prec \bigcup_{j \geq 1} U_j$ za $U_j \in \mathcal{U}$. Kako je $\text{supp}(f)$ kompaktan, sadržan je u nekoj konačnoj uniji $\bigcup_{j=1}^k U_j$. Za svako x u kompaktnom nosaču f biramo otvoren skup V_x sa kompaktnim zatvorenjem takav da je $x \in V_x$ (postoji po lokalnoj kompaktnosti X , Definicija 1.18). Familija $\{V_x\}_{x \in \text{supp}(f)}$ je otvoren pokrivač kompaktnog skupa $\text{supp}(f)$, pa po samoj definiciji kompaktnosti (svaki otvoreni pokrivač kompaktnog skupa sadrži konačan potpokrivač) postoje tačke $x_1, \dots, x_N \in \text{supp}(f)$ takve da je $\text{supp}(f) \subset V := \bigcup_{n=1}^N V_{x_n}$. Za $j = 1, \dots, k$ stavimo $V_j := U_j \cap V$, tada $\text{supp}(f) \subset \bigcup_{j=1}^k V_j$, sa kompaktnim zatvorenjem, pa Propozicija 3.27 daje particiju jedinice $(g_j)_{j=1}^k$ podređenu skupovima V_j , sa $\sum_{j=1}^k g_j \equiv 1$ na $\text{supp}(f)$. $g_j \prec V_j \subset U_j$, pa i $f g_j \prec U_j$. Odatle

$$\langle f, \varphi \rangle = \left\langle f \sum_{j=1}^k g_j, \varphi \right\rangle = \sum_{j=1}^k \langle f g_j, \varphi \rangle \leq \sum_{j=1}^k \nu(U_j) \leq \sum_{j \geq 1} \nu(U_j).$$

Kako ovo važi za svako $0 \leq f \in C_c(X)$ sa $f \prec \bigcup_{j \geq 1} U_j$, sledi $\nu(\bigcup_{j \geq 1} U_j) \leq \sum_{j \geq 1} \nu(U_j)$, što je i trebalo pokazati.

Neka je $\bar{\nu}(A) := \inf\{\nu(U) : A \subset U, U \in \mathcal{U}\}$, $A \subset X$, spoljašnja mera pridružena ν . Jasno je $\bar{\nu}(A) \geq 0$, i $\bar{\nu}(U) = \nu(U)$ za sve $U \in \mathcal{U}$, tj. $\bar{\nu}$ proširuje ν na $\mathcal{P}(X)$, ova činjenica se koristi u nastavku.

Tvrdimo da je $\mathcal{U}$ sadržana u skupu svih $\bar{\nu}$ -merljivih skupova (Definicija 2.3). Neka je $U \in \mathcal{U}$. Iz subaditivnosti spoljašnje mere imamo $\bar{\nu}(Q) \leq \bar{\nu}(Q \cap U) + \bar{\nu}(Q \setminus U)$ za svako $Q \subset X$. Suprotna nejednakost trivijalno važi ako je $\bar{\nu}(Q) = \infty$, pa je dovoljno proveriti slučaj $\bar{\nu}(Q) < \infty$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i otvoren $V \supset Q$ sa $\nu(V) < \bar{\nu}(Q) + \varepsilon$. Neka $f, g \in C_c(X)$ zadovoljavaju

$$f \prec U \cap V, \quad \nu(U \cap V) < \langle f, \varphi \rangle + \varepsilon,$$

$$g \prec V \setminus \text{supp}(f), \quad \nu(V \setminus \text{supp}(f)) < \langle g, \varphi \rangle + \varepsilon$$

(takve funkcije postoje po definiciji ν). Tada, koristeći linearnost φ , $f + g \prec V$ (jer f, g imaju disjunktne nosače u V) i $Q \setminus U \subset V \setminus \text{supp}(f)$,

$$\begin{aligned}\bar{\nu}(Q \cap U) + \bar{\nu}(Q \setminus U) &\leq \nu(U \cap V) + \nu(V \setminus \text{supp}(f)) \\ &\leq \langle f + g, \varphi \rangle + 2\varepsilon \\ &\leq \nu(V) + 2\varepsilon \\ &\leq \bar{\nu}(Q) + 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, tvrđenje je dokazano.

Po Teoremi 2.11, skup $\bar{\nu}$ -merljivih skupova čini σ -algebru na kojoj $\bar{\nu}$ postaje mera. Kako je $\mathcal{U}$ u njoj sadržana, sadržana je i $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{U})$. Restrikciju $\bar{\nu}$ na $\mathcal{B}(X)$ ponovo obeležavamo sa ν . Ocena $\nu(X) \leq \|\varphi\|$ pokazuje da je ν konačna mera.

Sada proveravamo da ν predstavlja funkcional φ . Tvrđimo najpre da, ako $A, B \in \mathcal{B}(X)$ i $g \in C_0(X)$ zadovoljavaju $\mathbf{I}_A \leq g \leq \mathbf{I}_B$, onda

$$\nu(A) \leq \langle g, \varphi \rangle \leq \nu(B). \quad (*)$$

(Uslov $\mathbf{I}_A \leq g \leq \mathbf{I}_B$ ne mora biti ispunjen za proizvoljne $A, B \in \mathcal{B}(X)$, naprotiv, on automatski povlači $A \subset B$: ako $x \in A$, onda je $\mathbf{I}_A(x) = 1 \leq g(x)$, a kako je i $g(x) \leq \mathbf{I}_B(x) \leq 1$, sledi $g(x) = 1$, tj. $x \in B$. Za parove A, B sa $A \not\subset B$ ovakvo g ne postoji, pa se tvrđenje (*) na njih jednostavno ne primenjuje. Tvrđenje (*) koristimo isključivo za konkretne skupove A, B i funkciju g koje sami konstruišemo u nastavku dokaza, za koje se uslov $\mathbf{I}_A \leq g \leq \mathbf{I}_B$ direktno proverava.)

Zaista, kako je $A \subset \{g > 1 - \delta\}$ za sve $\delta \in (0, 1)$, imamo, za $0 < \delta < 1$,

$$\begin{aligned}\nu(A) &\leq \nu(\{g > 1 - \delta\}) = \sup\{\langle f, \varphi \rangle : f \in C_c(X), f \prec \{g > 1 - \delta\}\} \\ &\leq \left\langle \frac{g}{1 - \delta}, \varphi \right\rangle = \frac{1}{1 - \delta} \langle g, \varphi \rangle,\end{aligned}$$

koristeći pozitivnost φ i činjenicu da je na skupu $\{g > 1 - \delta\}$ tačkasto $f \leq g/(1 - \delta)$. Kako je $\delta \in (0, 1)$ proizvoljno, sledi $\nu(A) \leq \langle g, \varphi \rangle$. Na isti način, za svako $\delta > 0$ imamo

$$\begin{aligned}\nu(B) &\geq \sup\{\langle f, \varphi \rangle : f \in C_c(X), f \prec \{g > 0\}\} \\ &\geq \langle (g - \delta)^+, \varphi \rangle,\end{aligned}$$

koristeći da $(g - \delta)^+ \in C_c(X)$ zadovoljava $(g - \delta)^+ \prec \{g > 0\}$. Kako $(g - \delta)^+ \rightarrow g$ u $C_0(X)$ kad $\delta \downarrow 0$, sledi $\nu(B) \geq \langle g, \varphi \rangle$. Ovim je (*) dokazano.

Neka je $0 \leq f \in C_0(X)$, fiksirajmo $\varepsilon > 0$, i za $\delta \geq 0$ pišimo $f_\delta := f \wedge \delta$ (tj. $f_\delta(\xi) := \min\{f(\xi), \delta\}$). Tada je

$$f = \sum_{k \geq 0} (f_{(k+1)\varepsilon} - f_{k\varepsilon})$$

(nema problema sa konvergencijom, jer je f ograničena, pa je u ovoj sumi samo konačno mnogo sabiraka različito od nule). Iz nejednakosti

$$\varepsilon \mathbf{I}_{\{f \geq (k+1)\varepsilon\}} \leq f_{(k+1)\varepsilon} - f_{k\varepsilon} \leq \varepsilon \mathbf{I}_{\{f \geq k\varepsilon\}}$$

dobijamo

$$\varepsilon \nu\{f \geq (k+1)\varepsilon\} \leq \int_X (f_{(k+1)\varepsilon} - f_{k\varepsilon}) d\nu \leq \varepsilon \nu\{f \geq k\varepsilon\},$$

dok kombinovanjem sa (*) sledi

$$\varepsilon \nu\{f \geq (k+1)\varepsilon\} \leq \langle f_{(k+1)\varepsilon} - f_{k\varepsilon}, \varphi \rangle \leq \varepsilon \nu\{f \geq k\varepsilon\}.$$

Odavde

$$\left| \int_X (f_{(k+1)\varepsilon} - f_{k\varepsilon}) d\nu - \langle f_{(k+1)\varepsilon} - f_{k\varepsilon}, \varphi \rangle \right| \leq \varepsilon \nu\{k\varepsilon \leq f < (k+1)\varepsilon\},$$

pa sabiranjem po $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\nu - \langle f, \varphi \rangle \right| &\leq \varepsilon \sum_{k \geq 0} \nu\{k\varepsilon \leq f < (k+1)\varepsilon\} \\ &\leq \varepsilon \nu(X). \end{aligned}$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, sledi $\int_X f d\nu = \langle f, \varphi \rangle$ za sve $0 \leq f \in C_0(X)$, a odatle (razlaganjem $f = f^+ - f^-$) i za sve $f \in C_0(X)$.

Korak 2: Spoljašnja regularnost je jasna iz konstrukcije. Unutrašnja regularnost preko kompaktnih skupova pokazuje se u dva podkoraka.

(i): Neka je U otvoren. Izaberimo $f \in C_c(X)$ sa $f \prec U$ i $\int_X f d\nu > \nu(U) - \varepsilon$, i neka je $K := \text{supp}(f)$. Tada $K \subset U$ i $\nu(K) \geq \int_X f d\nu > \nu(U) - \varepsilon$ (jer $0 \leq f \leq \mathbf{I}_K$), pa $\nu(U \setminus K) < \varepsilon$.

(ii): Neka je B Borelov skup. Po spoljašnjoj regularnosti postoji otvoren $V \supset B$ sa $\nu(V \setminus B) < \varepsilon$. Po (i), postoji kompaktan $L \subset V$ sa $\nu(V \setminus L) < \varepsilon$. Ponovnom spoljašnjom regularnošću, izaberimo otvoren $W \supset V \setminus B$ sa $\nu(W) < \varepsilon$. Neka je $K := L \setminus W$. Tada je K kompaktan, $K \subset B$, i

$$\nu(K) = \nu(L) - \nu(L \cap W) > (\nu(V) - \varepsilon) - \nu(W) > (\nu(B) - \varepsilon) - \nu(W) > \nu(B) - 2\varepsilon,$$

pa $\nu(B \setminus K) < 2\varepsilon$.

Ovim je dokaz za pozitivne funkcionalne kompletan, osim jednakosti normi $\|\nu\| = \|\varphi\|$, koja će biti dokazana, za opšte funkcionalne, u *Koraku 4*.

Korak 3: Za proizvoljan (realan) $\varphi \in (C_0(X))^*$, po analogiji sa pozitivnim i negativnim

delom realne mere, definišemo, za $0 \leq f \in C_0(X)$,

$$\varphi^+(f) := \sup\{\langle g, \varphi \rangle : g \in C_0(X), 0 \leq g \leq f\}.$$

Jasno je $|\varphi^+(f)| \leq \|f\| \|\varphi\|$, $\varphi^+(0) = 0 \leq \varphi^+(f)$, $\varphi^+(cf) = c\varphi^+(f)$ za $c \geq 0$. Ako $0 \leq g_1 \leq f_1$, $0 \leq g_2 \leq f_2$, onda $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$, pa $\varphi^+(f_1 + f_2) \geq \varphi(g_1) + \varphi(g_2)$. Uzimajući supremum, $\varphi^+(f_1 + f_2) \geq \varphi^+(f_1) + \varphi^+(f_2)$. Za obrnutu nejednakost, neka $0 \leq g \leq f_1 + f_2$. Stavimo $g_1 := f_1 \wedge g$, $g_2 := g - g_1$. Tada $0 \leq g_1 \leq f_1$, $0 \leq g_2 \leq f_2$, pa $\varphi(g) = \varphi(g_1) + \varphi(g_2) \leq \varphi^+(f_1) + \varphi^+(f_2)$, odakle $\varphi^+(f_1 + f_2) \leq \varphi^+(f_1) + \varphi^+(f_2)$. Ovim je dokazana aditivnost φ^+ na konusu nenegativnih funkcija.

Za $f \in C_0(X; \mathbb{R})$ stavljamo $\varphi^+(f) := \varphi^+(f^+) - \varphi^+(f^-)$. Rutinski se proverava realna linearnost, i $|\varphi^+(f)| \leq \|\varphi\| \|f\|$. Funkcional $\varphi^- := \varphi^+ - \varphi$ je realno-linearan, ograničen, i pozitivan (iz definicije φ^+). Ovim dobijamo razlaganje $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, $\varphi^\pm$ pozitivni. Kako su linearne kombinacije Radonovih mera Radonove, primenom *Koraka 1-2* na φ^+, φ^- dobijamo Radonovu meru $\nu \in \mathcal{M}_R(X)$ koja predstavlja φ .

Korak 4: Preostaje $\|\nu\| = \|\varphi\|$ za proizvoljnu reprezentujuću Radonovu meru ν . Koristimo sledeću teoremu (bez dokaza, jer prevazilazi okvire ovog rada):

Radon–Nikodimova teorema ([1, Teorema 2.46]). *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ σ -konačan prostor mere. Ako je mera $\nu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ apsolutno neprekidna u odnosu na μ (tj. $\mu(F) = 0$ povlači $\nu(F) = 0$), onda postoji jedinstvena $g \in L^1(\Omega, \mu)$ tako da je $\nu(F) = \int_F g d\mu$ za sve $F \in \mathcal{F}$.*

Primenjujemo ovu teoremu na ν , $\mu := |\nu|$. Kako je $|\nu(F)| \leq |\nu|(F)$ za svaki Borelov F (Napomena 3.15), ν je apsolutno neprekidna u odnosu na $|\nu|$, pa Radon–Nikodimova teorema daje funkciju $h \in L^1(X, |\nu|)$ takvu da je

$$\nu(B) = \int_B h d|\nu|, \quad B \subset X \text{ Borelov.}$$

Primenjujući isti argument na $|\nu|$, pokazuje se dodatno da je $|h| = 1$ $|\nu|$ -skoro svuda (videti [1, Primer 2.48]). Odavde, uobičajenim argumentima (prvo za proste funkcije, pa graničnim prelazom preko Teoreme 2.38), sledi $\int_X f d\nu = \int_X fh d|\nu|$ za $f \in C_c(X)$. Po Napomeni 3.10, $C_c(X)$ je gusto u $C_0(X)$, pa je i normirajuće za $L^1(X, |\nu|)$. Kolekcija $C_c(X)$ je *normirajuća* za $L^1(X, |\nu|)$ ako se L^1 -norma svake $h \in L^1(X, |\nu|)$ može dobiti kao supremum $|\int_X fh d|\nu||$ po probnim funkcijama $f \in C_c(X)$, $\|f\|_\infty \leq 1$, dakle da ograničavanje na $C_c(X)$ (umesto na sve ograničene merljive funkcije) ne umanjuje taj supremum. Ovo sledi iz gustine $C_c(X)$ u $C_0(X)$ (Napomena 3.10). Kombinujući ova zapažanja:

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= \sup_{\substack{f \in C_c(X) \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, \varphi \rangle| = \sup_{\substack{f \in C_c(X) \\ \|f\| \leq 1}} \left| \int_X f d\nu \right| = \sup_{\substack{f \in C_c(X) \\ \|f\| \leq 1}} \left| \int_X fh d|\nu| \right| = \|h\|_{L^1(X, |\nu|)} \\ &= |\nu|(X) = \|\nu\|, \end{aligned}$$

čime je dokaz kompletan. $\square$

Posledica 3.28 (Rieszova teorema za nenegativne funkcionalne na $\mathbb{R}^n$). *Neka je $\varphi: C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ linearan funkcional gde je $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ skup svih beskonačno diferencijabilnih (glatkih) funkcija $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sa kompaktnim nosačem, takav da je $\varphi(f) \geq 0$ za sve $f \geq 0$. Tada postoji Radonova mera ν na $\mathbb{R}^n$ tako da je*

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu, \quad f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Dokaz. Za razliku od Teoreme 3.24, koja predstavlja funkcionalne na celom $C_0(X)$, ova posledica radi isključivo sa funkcijama kompaktnog nosača. $\mathbb{R}^n$ je lokalno kompaktan metrički prostor (Primer uz Definiciju 1.18), a funkcional φ , iako definisan samo na $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, produžava se do pozitivnog funkcionala na $C_c(\mathbb{R}^n)$, zato se u dokazu koristi samo *Korak 1* dokaza Teoreme 3.24, koji je sam po sebi formulisao preko probnih funkcija $f \in C_c(X)$ i ne zahteva ni proširenje na $C_0(X)$, ni *Korake 2-4*. Evans i Gariepy ([2, Teorema 1.39]) daju direktan, samostalan dokaz ovog specijalnog slučaja, izveden iz njihove verzije Riesz-ove teoreme ([2, Teorema 1.38]). $\square$

3.4 Slaba-* topologija na $\mathcal{M}(X)$ i topologija na $\mathcal{P}(X)$

Ovde će se uvesti slaba-* topologija preko standardne konstrukcije funkcionalne analize, a zatim će se ta konstrukcija, oslanjajući se na Riesz-ovu teoremu reprezentacije (Teorema 3.24), primeniti na dual Banahovog prostora $C_0(X)$, tj. na $\mathcal{M}_R(X)$. U poslednjem delu odeljka ista konstrukcija primenjuje se direktno na par $(C_b(X), \mathcal{P}(X))$.

Polazimo od opšte konstrukcije: ako je Z proizvoljan skup i $(\varphi_i)_{i \in I}$ familija preslikavanja $\varphi_i: Z \rightarrow \mathbb{R}$, postoji najgrublja topologija na Z za koju su sva preslikavanja φ_i neprekidna i naziva se *inicijalna topologija* pridružena familiji $(\varphi_i)_{i \in I}$, a njenu bazu okolina tačke $z_0 \in Z$ čine skupovi oblika $\bigcap_{i \in J} \varphi_i^{-1}(V_i)$, gde je $J \subset I$ konačan skup, a V_i okolina tačke $\varphi_i(z_0)$ u $\mathbb{R}$.

Propozicija 3.29. *Neka je Z snabdeven inicijalnom topologijom pridruženom familiji $(\varphi_i)_{i \in I}$, i neka je $(z_n)_n \subset Z$, $z \in Z$. Tada $z_n \rightarrow z$ ako i samo ako $\varphi_i(z_n) \rightarrow \varphi_i(z)$ za svako $i \in I$.*

Dokaz. Ako $z_n \rightarrow z$, onda $\varphi_i(z_n) \rightarrow \varphi_i(z)$ za svako i , jer je svako φ_i neprekidno. Obrnuto, neka je U okolina tačke z . Po opisu baze okolina, možemo pretpostaviti $U = \bigcap_{i \in J} \varphi_i^{-1}(V_i)$ za konačan $J \subset I$. Za svako $i \in J$ postoji N_i tako da $\varphi_i(z_n) \in V_i$ za $n \geq N_i$. Sledi $z_n \in U$ za $n \geq N := \max_{i \in J} N_i$. $\square$

Primenjujemo ovu konstrukciju sa $Z := \mathcal{M}_R(X)$, $I := C_0(X)$, i $\varphi_f(\nu) := \int_X f d\nu$ za $f \in C_0(X)$.

Definicija 3.30. *Slaba-* topologija* na $\mathcal{M}_R(X)$, u oznaci $\sigma(\mathcal{M}_R(X), C_0(X))$, je inicijalna topologija pridružena familiji preslikavanja $(\nu \mapsto \int_X f d\nu)_{f \in C_0(X)}$.

Propozicija 3.31 (Baza okolina). *Neka je $\nu_0 \in \mathcal{M}_R(X)$, za konačan skup $\{f_1, \dots, f_k\} \subset C_0(X)$ i $\varepsilon > 0$ stavimo*

$$V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon) := \left\{ \nu \in \mathcal{M}_R(X) : \left| \int_X f_i d(\nu - \nu_0) \right| < \varepsilon, \ i = 1, \dots, k \right\}.$$

Tada je $V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon)$ okolina tačke ν_0 za topologiju $\sigma(\mathcal{M}_R(X), C_0(X))$, a familija svih ovakvih skupova (kad $\varepsilon, k, f_1, \dots, f_k$ variraju) je baza okolina tačke ν_0 .

Dokaz. Neka je $a_i := \int_X f_i d\nu_0$. Tada je $V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^k \varphi_{f_i}^{-1}((a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon))$ otvoren skup (konačan presek inverznih slika otvorenih skupova pod neprekidnim preslikavanjima φ_{f_i}) koji sadrži ν_0 .

Obrnuto, neka je U okolina tačke ν_0 . Po konstrukciji inicijalne topologije, postoji otvoren skup W , $\nu_0 \in W \subset U$, oblika $W = \bigcap_{i=1}^k \varphi_{f_i}^{-1}(\omega_i)$, gde je ω_i okolina tačke a_i u $\mathbb{R}$. Postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) \subset \omega_i$ za sve i . Odatle $\nu_0 \in V(f_1, \dots, f_k; \varepsilon) \subset W \subset U$. $\square$

Definicija 3.32 (Slaba-* konvergencija niza mera). Ako niz $(\nu_n)_n \subset \mathcal{M}_R(X)$ konvergira ka $\nu \in \mathcal{M}_R(X)$ u topologiji $\sigma(\mathcal{M}_R(X), C_0(X))$, pišemo $\nu_n \xrightarrow{*} \nu$.

Propozicija 3.33. *Neka je $(\nu_n)_n \subset \mathcal{M}_R(X)$, $\nu \in \mathcal{M}_R(X)$. Tada*

$$\nu_n \xrightarrow{*} \nu \iff \int_X f d\nu_n \rightarrow \int_X f d\nu \text{ za sve } f \in C_0(X).$$

Dokaz. Direktna posledica Propozicije 3.29, primenjene na $\varphi_f(\nu) = \int_X f d\nu$, $f \in C_0(X)$. $\square$

Teorema 3.34. $(\mathcal{M}_R(X), \sigma(\mathcal{M}_R(X), C_0(X)))$ je Hausdorfov topološki prostor.

Dokaz. Neka su $\nu_1 \neq \nu_2 \in \mathcal{M}_R(X)$. Po jedinstvenosti u Teoremi 3.24, postoji $f_0 \in C_0(X)$ takvo da je $\int_X f_0 d(\nu_1 - \nu_2) \neq 0$ (u suprotnom bi funkcionali $\varphi_{\nu_1}, \varphi_{\nu_2}$ bili jednaki, pa bi po jedinstvenosti bilo $\nu_1 = \nu_2$). Pretpostavimo $\int_X f_0 d\nu_1 < \int_X f_0 d\nu_2$ i izaberimo α tako da

$$\int_X f_0 d\nu_1 < \alpha < \int_X f_0 d\nu_2.$$

Skupovi

$$O_1 := \left\{ \nu \in \mathcal{M}_R(X) : \int_X f_0 d\nu < \alpha \right\}, \quad O_2 := \left\{ \nu \in \mathcal{M}_R(X) : \int_X f_0 d\nu > \alpha \right\}$$

su otvoreni za $\sigma(\mathcal{M}_R(X), C_0(X))$ (inverzne slike otvorenih intervala pod φ_{f_0}), disjunktni su, i $\nu_1 \in O_1$, $\nu_2 \in O_2$. $\square$

3.4.1 Prostor verovatnosnih mera $\mathcal{P}(X)$

Definicija 3.35. Kako je $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{M}_R(X)$, na $\mathcal{P}(X)$ posmatramo relativnu topologiju od $\sigma(\mathcal{M}_R(X), C_0(X))$, koju i dalje obeležavamo sa $\sigma(\mathcal{P}(X), C_0(X))$.

Propozicija 3.36. $(\mathcal{P}(X), \sigma(\mathcal{P}(X), C_0(X)))$ je Hausdorfov topološki prostor.

Dokaz. Neposredna posledica Teorema 3.34: ako su U_1, U_2 disjunktne okoline tačaka $\mu_1 \neq \mu_2$ u $\mathcal{M}_R(X)$, onda su $U_1 \cap \mathcal{P}(X), U_2 \cap \mathcal{P}(X)$ disjunktne okoline istih tačaka u $\mathcal{P}(X)$. $\square$

3.4.2 Slučaj proizvoljnog kompletnog separabilnog metričkog prostora

Konstrukcija iz prethodnog dela oslanja se na Riesz-ovu teoremu reprezentacije (Teorema 3.24), pa zahteva da je X lokalno kompaktan. Za opšti kompletno separabilan metrički prostor X (koji ne mora biti lokalno kompaktan), ova konstrukcija nije direktno dostupna, štaviše, dual $(C_b(X))^*$ je, u opštem slučaju, strogo veći od $\mathcal{M}_R(X)$:

Napomena 3.37 (Zašto $\mathcal{M}(X) \not\cong (C_b(X))^*$ u opštem slučaju). Han-Banahova teorema garantuje postojanje ograničenih linearnih funkcionala na $C_b(X)$ koji „vide” samo ponašanje funkcije $f \in C_b(X)$ „u beskonačnosti”, i takvi funkcionali se ne mogu predstaviti integralom ni po jednoj meri iz $\mathcal{M}_R(X)$. Prema tome, pristup preko duala Banahovog prostora, korišćen u prethodnom delu ovog odeljka, ne prenosi se direktno na $C_b(X)$.

Rešenje je primena iste opšte konstrukcije sa kojom smo započeli ovaj odeljak (inicijalna topologija pridružena familiji preslikavanja), ali sada direktno na $\mathcal{P}(X)$ i familiju $(\mu \mapsto \int_X f d\mu)_{f \in C_b(X)}$, bez ikakvog pozivanja na to da je $\mathcal{P}(X)$ dual nekog prostora.

Definicija 3.38. Neka je X proizvoljan kompletno separabilan metrički prostor. *Slaba-** topologija na $\mathcal{P}(X)$, u oznaci $\sigma(\mathcal{P}(X), C_b(X))$, je inicijalna topologija pridružena familiji preslikavanja $(\mu \mapsto \int_X f d\mu)_{f \in C_b(X)}$.

Napomena 3.39. U literaturi teorije verovatnoće, topologija $\sigma(\mathcal{P}(X), C_b(X))$ često se naziva jednostavno *slaba topologija* ili *topologija slabe konvergenije*, izostavljajući zvezdicu.

Napomena 3.40. Kako topologija iz Definicije 3.38 zavisi samo od opšte konstrukcije iz uvoda ovog odeljka, primenjene sa $I = C_b(X)$ umesto $I = C_0(X)$, sva tvrđenja dokazana za $\sigma(\mathcal{P}(X), C_0(X))$ (Propozicija 3.31, Propozicija 3.33, Teorema 3.34) važe, uz identičan dokaz, i za $\sigma(\mathcal{P}(X), C_b(X))$. Jedina razlika je u tome što je ovaj prostor Hausdorfov jedino ako $C_b(X)$ razdvaja tačke $\mathcal{P}(X)$. Kada je X kompaktan, važi $C_0(X) = C_b(X)$ (Napomena uz Definiciju 3.3), pa se Definicija 3.38 poklapa sa Definicijom 3.35. Metrizabilnost topologije $\sigma(\mathcal{P}(X), C_b(X))$ za proizvoljan X biće pokazana u Poglavlju 4, eksplicitnom konstrukcijom Prohorovljeve metrike.

Dakle, u ovom poglavlju predstavljena je Riesz-ova teorema reprezentacije, a na kraju je i uvedena slaba-* topologija. U narednom poglavlju pokazaće se da se konvergencija niza mera u ovde uvedenoj topologiji poklapa sa definicijom *slabe konvergenције* niza verovatnosnih mera. Ovim se Poglavlje 3 završava.

Glava 4

Slaba konvergencija mera

Cilj ovog poglavlja je uvođenje i detaljno proučavanje pojma *slabe konvergencije* niza verovatnosnih mera, pojma koji je, kako je viđeno u Odeljku 3.4, tesno povezan sa slabom topologijom $\sigma(\mathcal{P}(X), C_b(X))$ uvedenom u Poglavlju 3. Izlaže se Portmanto teorema (ekvivalentne karakterizacije slabe konvergencije preko otvorenih i zatvorenih skupova), pojam *zategnutosti* familije mera, Prohorovljeva teorema (koja zategnutost povezuje sa relativnom kompaktnošću u topologiji slabe konvergencije), Prohorovljevo rastojanje (koje tu topologiju metrizuje) i teoremu o neprekidnom preslikavanju. Izlaganje prati [6] i [1].

4.1 Slaba konvergencija i njena jedinstvenost

Definicija 4.1 (Slaba konvergencija). Neka je X metrički prostor i neka su μ_n , $n \geq 1$, i μ Borelove verovatnosne mere na X . Kažemo da niz $(\mu_n)_n$ *slabo konvergira* ka μ , u oznaci $\mu_n \rightharpoonup \mu$, ako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu \quad \text{za sve } f \in C_b(X).$$

Napomena 4.2. Posmatrajući Borelove verovatnosne mere na X kao funkcionalne u dualnom prostoru $(C_b(X))^*$, slaba konvergencija u smislu Definicije 4.1 predstavlja upravo slabu- $*$ konvergenciju u smislu Odeljka 3.4. Termin „slaba konvergencija” je, međutim, ustaljen u literaturi teorije verovatnoće, pa ćemo ga i mi u nastavku koristiti umesto termina „slaba- $*$ konvergencija”, a zvezdicu iz oznake $\xrightarrow{*}$ izostavljamo jer za opšti kompletan separabilan X (koji ne mora biti lokalno kompaktan) $\mathcal{P}(X)$ nije formalno dual nijednog Banahovog prostora (Napomena 3.37).

Pokazujemo da je granica slabo konvergentnog niza, kad postoji, jedinstvena, što opravdava pisanje $\mu_n \rightharpoonup \mu$ bez dvosmislenosti.

Propozicija 4.3 (Jedinstvenost granice). *Niz Borelovih verovatnosnih mera $(\mu_n)_n$ na metričkom prostoru X ne može slabo konvergirati ka dve različite mere.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da, ako je $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ i $\int_X f d\mu = \int_X f d\nu$ za svaku ograničenu, uniformno neprekidnu funkciju $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, onda je $\mu = \nu$.

Za zatvoren skup $F \subset X$ i $\varepsilon > 0$ definišimo ograničenu, uniformno neprekidnu funkciju

$$g_\varepsilon(x) := \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \text{dist}(x, F)\right) \vee 0, \quad x \in X.$$

Odavde

$$\mu(F) \leq \int_X g_\varepsilon d\mu = \int_X g_\varepsilon d\nu \leq \nu(F^\varepsilon).$$

gde je $F^\varepsilon := \{x : \text{dist}(x, F) < \varepsilon\}$. Puštajući $\varepsilon \rightarrow 0$ dobijamo $\mu(F) \leq \nu(F)$. Po simetriji (zamenom uloga μ i ν) dobijamo i $\nu(F) \leq \mu(F)$, pa je $\mu(F) = \nu(F)$ za svaki zatvoren skup F . Odavde sledi i $\mu(G) = \nu(G)$ za svaki otvoren skup G .

Ostaje da iskoristimo regularnost proizvoljne verovatnosne mere: ako je $A \subset X$ Borelov i $\varepsilon > 0$, postoje zatvoren skup F i otvoren skup G takvi da je $F \subset A \subset G$ i $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Označimo sa $\mathcal{G}_\mu$ klasu svih Borelovih skupova A sa ovim svojstvom. Svaki zatvoren skup pripada $\mathcal{G}_\mu$ (uzimajući $F = A$ i $G = A^\delta$ za dovoljno malo δ). Pokazujemo da je $\mathcal{G}_\mu$ zatvorena za komplemente (očigledno, zamenom uloga F i G) i za prebrojive unije: ako su $A_n \in \mathcal{G}_\mu$, sa odgovarajućim $F_n \subset A_n \subset G_n$, $\mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon \cdot 2^{-n-1}$, i ako je $G := \bigcup_n G_n$, $F := \bigcup_{n \leq n_0} F_n$ za n_0 dovoljno veliko da je $\mu(\bigcup_n F_n \setminus F) < \varepsilon/2$, tada $F \subset \bigcup_n A_n \subset G$ i $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Dakle $\mathcal{G}_\mu$ je σ -algebra koja sadrži sve zatvorene skupove, pa je $\mathcal{G}_\mu = \mathcal{B}(X)$. $\square$

4.2 Portmanto teorema

Sledeća teorema daje nekoliko ekvivalentnih karakterizacija slabe konvergencije, pri čemu neke od njih, za razliku od Definicije 4.1, ne zahtevaju testiranje na svim funkcijama iz $C_b(X)$, već samo na otvorenim, odnosno zatvorenim podskupovima od X .

Propozicija 4.4 (Portmanto teorema). *Neka su μ_n , $n \geq 1$, i μ Borelove verovatnosne mere na metričkom prostoru X . Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

1. $\mu_n \rightharpoonup \mu$;
2. za svaki otvoren skup $U \subset X$ važi $\mu(U) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U)$;
3. za svaki zatvoren skup $F \subset X$ važi $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2). Neka je $U \subset X$ otvoren. Za $k \geq 1$ definišemo

$$U^{(k)} := \left\{x \in U : \text{dist}(x, X \setminus U) > \frac{1}{k}\right\}.$$

Kako je U otvoren, $U = \bigcup_{k \geq 1} U^{(k)}$, pa je $\mu(U) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(U^{(k)})$.

Funkcije $f_k(x) := \min\{1, k \cdot \text{dist}(x, X \setminus U)\}$ pripadaju $C_b(X)$ i zadovoljavaju $0 \leq f_k \leq 1$, $f_k = 0$ na $X \setminus U$, i $f_k = 1$ na $U^{(k)}$. Za svako $k \geq 1$,

$$\mu(U^{(k)}) \leq \int_X f_k d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U).$$

Puštajući $k \rightarrow \infty$ dobijamo (2).

Ekvivalencija (2) $\Leftrightarrow$ (3): neka je $F \subset X$ zatvoren i $U := X \setminus F$ otvoren. Kako su μ_n, μ verovatnosne mere, $\mu_n(F) = 1 - \mu_n(U)$ i $\mu(F) = 1 - \mu(U)$. Uslov (2) primenjen na U glasi $\mu(U) \leq \liminf_n \mu_n(U)$, tj. $1 - \mu(F) \leq \liminf_n (1 - \mu_n(F)) = 1 - \limsup_n \mu_n(F)$, što je ekvivalentno sa $\limsup_n \mu_n(F) \leq \mu(F)$, a to je uslov (3). Obratno je analogno, primenjeno na $F := X \setminus U$ umesto $U := X \setminus F$.

Preostaje da pokažemo da (2) i (3) zajedno povlače (1). Neka su $U_1, \dots, U_k$ otvoreni skupovi u X i posmatrajmo funkciju oblika $g = \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{I}_{U_j}$, $c_j \geq 0$. Koristeći (2),

$$\int_X g d\mu = \sum_{j=1}^k c_j \mu(U_j) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k c_j \mu_n(U_j) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X g d\mu_n.$$

Slično, za $g = \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{I}_{U_j}$ (istog oblika), koristeći (3) na zatvorenim skupovima $X \setminus U_j$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X g d\mu_n \leq \sum_{j=1}^k c_j \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U_j) \leq \sum_{j=1}^k c_j \mu(U_j) = \int_X g d\mu.$$

Neka je sada $f \in C_b(X)$ realna funkcija i izaberimo $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $a < f(x) < b$ za sve $x \in X$. Postoji najviše prebrojivo mnogo $r \in (a, b)$ takvih da skup $\{x \in X : f(x) = r\}$ ima pozitivnu μ -meru: skupovi $\{f = r\}$, za različite vrednosti r , su međusobno disjunktni, pa, kako je $\mu(X) = 1$, za svako $m \in \mathbb{N}$ najviše m njih može imati meru $\geq 1/m$ (inače bi zbir njihovih mera premašio 1), prebrojiva unija (po m) ovakvih konačnih skupova je prebrojiva. Obeležimo skup svih takvih r sa R . Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i izaberimo particiju $\pi = \{t_0, \dots, t_k\}$ intervala $[a, b]$, sa $\max_i (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$, $t_0 = a$, $t_k = b$, $t_j \notin R$ za $j = 1, \dots, k-1$. Stavimo $U_j := \{x \in X : f(x) \in (t_{j-1}, t_j)\}$, $j = 1, \dots, k$, i

$$g := \sum_{j=1}^k t_{j-1} \mathbf{I}_{U_j}, \quad h := \sum_{j=1}^k t_j \mathbf{I}_{U_j}.$$

Tada je $g(x) \leq f(x) \leq \varepsilon + g(x)$ i $f(x) \leq h(x) \leq \varepsilon + f(x)$ kad god je $f(x) \neq t_j$ za $j = 1, \dots, k-1$. Kako je $\mu\{x \in X : f(x) = t_j\} = 0$ za $j = 1, \dots, k-1$,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_n &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X h d\mu_n \leq \int_X h d\mu \leq \varepsilon + \int_X f d\mu \leq 2\varepsilon + \int_X g d\mu \\ &\leq 2\varepsilon + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X g d\mu_n \leq 2\varepsilon + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_n. \end{aligned}$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, ovim je dokaz završen za realne funkcije f . $\square$

Posledica 4.5 (Konvergencija na skupovima neprekidnosti). *Borelov skup $A \subset X$ nazivamo μ -skupom neprekidnosti ako je $\mu(\partial A) = 0$. Ako je $\mu_n \rightarrow \mu$, onda za svaki μ -skup neprekidnosti A važi $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$.*

Dokaz. Ako je $\mu(\partial A) = 0$, onda se leva i desna verovatnoća poklapaju:

$$\mu(\bar{A}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\bar{A}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A^\circ) \geq \mu(A^\circ).$$

Kako je $\mu(\bar{A}) = \mu(A^\circ)$ (jer je $\mu(\partial A) = \mu(\bar{A}) - \mu(A^\circ) = 0$), svi izrazi u lancu su jednaki, pa $\lim_n \mu_n(A) = \mu(A)$. $\square$

4.3 Zategnutost i relativna kompaktnost

Definicija 4.6 (Zategnutost). Kolekcija $\mathcal{P}_0$ Borelovih mera na topološkom prostoru X je *uniformno zategnuta* ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan skup $K \subset X$ takav da je

$$\mu(X \setminus K) < \varepsilon \quad \text{za sve } \mu \in \mathcal{P}_0.$$

Primer 4.7. Neka je $X = \mathbb{R}$ i, za $n \geq 1$,

$$\mu_n(A) := \left(1 - \frac{1}{n}\right) \delta_0(A) + \frac{1}{n} \delta_{n^2}(A), \quad A \subset \mathbb{R} \text{ Borelov.}$$

Iako niz prvih momenata divergira ($\int_{\mathbb{R}} x d\mu_n(x) = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n \rightarrow \infty$), familija $(\mu_n)_n$ jeste uniformno zategnuta. Zaista, neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i izaberimo $N \in \mathbb{N}$ tako da je $N > 1/\varepsilon$. Stavimo $K := [-N^2, N^2]$, kompaktan skup. Za $n \leq N$ je $n^2 \leq N^2$, pa $n^2 \in K$, i kako je i $0 \in K$, sledi $\mu_n(K) = 1$. Za $n > N$ je $n^2 > N^2$, pa je jedino $0 \in K$ (dok $n^2 \notin K$), odakle

$$\mu_n(\mathbb{R} \setminus K) = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Dakle $\mu_n(\mathbb{R} \setminus K) < \varepsilon$ za sve $n \geq 1$ (jednako 0 za $n \leq N$, manje od ε za $n > N$), uz jedan te isti kompaktan skup K . Kako je $\varepsilon > 0$ bilo proizvoljno, familija $(\mu_n)_n$ zadovoljava Definiciju 4.6, tj. uniformno je zategnuta.

Definicija 4.8 (Relativna kompaktnost familije mera). Neka je X metrički prostor. Familija Γ Borelovih verovatnosnih mera na X je *relativno kompaktna* ako svaki niz elemenata iz Γ sadrži podniz koji slabo konvergira. Granična mera pritom ne mora pripadati Γ .

4.4 Prohorovljeva teorema

Prohorovljeva teorema je centralni rezultat ovog poglavlja: ona pokazuje da je uniformna zategnutost familije mera dovoljna za postojanje slabo konvergentnog podniza, a da je, na kompletnom separabilnom metričkom prostoru, i obrnuto, svaka slabo konvergentna familija je uniformno zategnuta.

Propozicija 4.9 (Kriterijum preko podnizova). *Potreban i dovoljan uslov da $\mu_n \rightharpoonup \mu$ jeste da svaki podniz $\mu_{n'}$ sadrži dalji podniz $\mu_{n''}$ koji slabo konvergira ka μ .*

Dokaz. Dokažimo najpre da je uslov potreban: ako $\mu_n \rightharpoonup \mu$, onda svaki podniz, pa i svaki njegov dalji podniz, takođe slabo konvergira ka μ .

Dokažimo sada da je uslov dovoljan: ako $\mu_n \not\rightharpoonup \mu$, onda za neku ograničenu, neprekidnu f ne važi $\int_X f d\mu_n \rightarrow \int_X f d\mu$. Ali tada, za neko $\varepsilon > 0$ i neki podniz $\mu_{n'}$,

$$\left| \int_X f(x) \mu_{n'}(dx) - \int_X f(x) \mu(dx) \right| \geq \varepsilon \quad \text{za sve } n',$$

i nijedan dalji podniz ne može slabo konvergirati ka μ . □

Teorema 4.10 (Prohorovljeva teorema, direktan deo). *Neka je X metrički prostor. Ako je familija verovatnosnih mera Γ na $(X, \mathcal{B}(X))$ uniformno zategnuta, onda je relativno kompaktna.*

Teorema 4.11 (Prohorovljeva teorema, obrnut deo). *Neka je X kompletan separabilan metrički prostor. Ako je Γ relativno kompaktna, onda je uniformno zategnuta.*

Dokaz. Posmatrajmo otvorene skupove $G_n \nearrow X$. Za svako ε postoji n tako da je $\mu(G_n) > 1 - \varepsilon$ za sve $\mu \in \Gamma$. Da bismo ovo pokazali, pretpostavimo suprotno: $\mu_n(G_n) \leq 1 - \varepsilon$ za neko $\mu_n \in \Gamma$. Po pretpostavljenoj relativnoj kompaktnosti, $\mu_{n'} \rightharpoonup Q$ za neki podniz i neku verovatnosnu meru Q . Tada

$$Q(G_n) \leq \liminf_{n'} \mu_{n'}(G_n) \leq \liminf_{n'} \mu_{n'}(G_{n'}) \leq 1 - \varepsilon,$$

što je nemoguće jer $G_n \nearrow X$.

Neka je $A_{k,i}$ niz otvorenih lopti poluprečnika $1/k$ koje pokrivaju X (separabilnost), tako da je $X = \bigcup_i A_{k,i}$ za svako k . Iz prethodnog koraka sledi da postoji n_k tako da je $\mu(\bigcup_{i \leq n_k} A_{k,i}) > 1 - \varepsilon 2^{-k}$ za sve $\mu \in \Gamma$. Neka je K zatvorenje totalno ograničenog skupa $\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{i \leq n_k} A_{k,i}$, tada je K kompaktan (kompletnost) i $\mu(K) > 1 - \varepsilon$ za sve $\mu \in \Gamma$. □

Dokaz direktnog dela. Neka je $(\mu_n)_n$ niz iz uniformno zategnute familije Γ . Treba naći podniz $(\mu_{n'})$ takav da $\mu_{n'} \rightharpoonup \mu$ za neku verovatnosnu meru μ . Konstrukcija mere μ oslanjaće se na dijagonalni argument.

Izaberimo kompaktne skupove $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ takve da je $\mu_n(K_i) > 1 - i^{-1}$ za sve n i i . Skup $K_\infty = \bigcup_i K_i$ je separabilan: kompaktnost svakog K_i znači da svaki otvoreni pokrivač ima konačan potpokrivač, separabilnost znači da svaki otvoreni pokrivač ima prebrojiv potpokrivač. Otuda sledi da postoji prebrojiva klasa $\mathcal{A}$ otvorenih skupova sa sledećim svojstvom: ako je G otvoren i $x \in G \cap K_\infty$, onda $x \in A \subset \bar{A} \subset G$ za neko $A \in \mathcal{A}$. Neka $\mathcal{H}$ sadrži $\emptyset$ i konačne unije oblika $\bar{A} \cap K_i$, $A \in \mathcal{A}$, $i \geq 1$.

Posmatrajmo prebrojiv skup $\mathcal{H} = (H_j)$. Za (μ_n) postoji podniz (μ_{n_1}) takav da $\mu_{n_1}(H_1)$ konvergira kad $n_1 \rightarrow \infty$. Za (μ_{n_1}) postoji dalji podniz (μ_{n_2}) koji konvergira kad $n_2 \rightarrow \infty$. Nastavljajući na ovaj način, dobijamo kolekciju indeksa $(n_{1k}) \supset (n_{2k}) \supset \dots$ takvu da $\mu_{n_{jk}}(H_j)$ konvergira kad $k \rightarrow \infty$, za svako $j \geq 1$. Stavljajući $n'_j = n_{jj}$, dobijamo podniz $(\mu_{n'})$ za koji granica

$$\alpha(H) = \lim_{n'} \mu_{n'}(H)$$

postoji za $H \in \mathcal{H}$.

Dalje, za otvorene skupove $G \subset X$ i proizvoljne skupove $M \subset X$ definišemo

$$\beta(G) = \sup_{H \subset G} \alpha(H), \quad \gamma(M) = \inf_{G \supset M} \beta(G).$$

Naš cilj je da konstruišemo na $(X, \mathcal{B}(X))$ verovatnosnu meru μ takvu da je $\mu(G) = \beta(G)$ za sve otvorene skupove G . Ako takva μ zaista postoji, dokaz je time završen: ako je $H \subset G$, onda

$$\alpha(H) = \lim_{n'} \mu_{n'}(H) \leq \liminf_{n'} \mu_{n'}(G),$$

odakle $\mu(G) \leq \liminf_{n'} \mu_{n'}(G)$, i stoga $\mu_{n'} \rightarrow \mu$. Konstrukcija verovatnosne mere μ podeljena je u sedam koraka.

Korak 1: Ako je $F \subset G$, sa F zatvoren i G otvoren, onda postoji $H_0 \in \mathcal{H}$ tako da je $F \subset H_0 \subset G$.

Kako je $F \subset K_{i_0}$ za neko i_0 , zatvoren skup F je kompaktan. Za svako $x \in F$ izaberimo $A_x \in \mathcal{A}$ tako da je $x \in A_x \subset \bar{A}_x \subset G$. Skupovi A_x pokrivaju kompaktan F , i postoji konačan potpokrivač $A_{x_1}, \dots, A_{x_k}$. Možemo uzeti $H_0 = \bigcup_{j=1}^k (\bar{A}_{x_j} \cap K_{i_0})$.

Korak 2: β je konačno subaditivna na otvorenim skupovima.

Pretpostavimo da je $H \subset G_1 \cup G_2$, gde je $H \in \mathcal{H}$ i G_1, G_2 otvoreni. Definišimo

$$F_1 = \{x \in H : \text{dist}(x, G_1^c) \geq \text{dist}(x, G_2^c)\}, \quad F_2 = \{x \in H : \text{dist}(x, G_2^c) \geq \text{dist}(x, G_1^c)\},$$

tako da je $H = F_1 \cup F_2$, sa $F_1 \subset G_1$ i $F_2 \subset G_2$. Po *Koraku 1*, kako je $F_i \subset H$, sledi $F_i \subset H_i$ za neko $H_i \in \mathcal{H}$.

Funkcija $\alpha(H)$ ima ova tri svojstva:

$$\alpha(H_1) \leq \alpha(H_2) \quad \text{ako } H_1 \subset H_2,$$

$$\alpha(H_1 \cup H_2) = \alpha(H_1) + \alpha(H_2) \quad \text{ako } H_1 \cap H_2 = \emptyset,$$

$$\alpha(H_1 \cup H_2) \leq \alpha(H_1) + \alpha(H_2).$$

Oдавde prvo sledi

$$\alpha(H) \leq \alpha(H_1 \cup H_2) \leq \alpha(H_1) + \alpha(H_2) \leq \beta(G_1) + \beta(G_2),$$

a zatim

$$\beta(G_1 \cup G_2) = \sup_{H \subset G_1 \cup G_2} \alpha(H) \leq \beta(G_1) + \beta(G_2).$$

Korak 3: β je prebrojivo subaditivna na otvorenim skupovima.

Ako je $H \subset \bigcup_n G_n$, onda, kako je H kompaktan, $H \subset \bigcup_{n \leq n_0} G_n$ za neko n_0 , pa konačna subaditivnost daje

$$\alpha(H) \leq \sum_{n \leq n_0} \beta(G_n) \leq \sum_n \beta(G_n).$$

Uzimajući supremum po H sadržanom u $\bigcup_n G_n$, dobijamo $\beta(\bigcup_n G_n) \leq \sum_n \beta(G_n)$.

Korak 4: γ je spoljašnja mera.

Kako je γ očigledno monotona i zadovoljava $\gamma(\emptyset) = 0$, ostaje samo da pokažemo da je prebrojivo subaditivna. Za dato $\varepsilon > 0$ i proizvoljne $M_n \subset X$, izaberimo otvorene skupove G_n tako da je $M_n \subset G_n$ i $\beta(G_n) < \gamma(M_n) + \varepsilon/2^n$. Primenom *Koraka 3*,

$$\gamma\left(\bigcup_n M_n\right) \leq \beta\left(\bigcup_n G_n\right) \leq \sum_n \beta(G_n) \leq \sum_n \gamma(M_n) + \varepsilon,$$

i puštajući $\varepsilon \rightarrow 0$, dobijamo $\gamma(\bigcup_n M_n) \leq \sum_n \gamma(M_n)$.

Korak 5: $\beta(G) \geq \gamma(F \cap G) + \gamma(F^c \cap G) - \varepsilon$ za F zatvoren i G otvoren.

Izaberimo $H_3, H_4 \in \mathcal{H}$ za koje

$$H_3 \subset F^c \cap G \quad \text{i} \quad \alpha(H_3) > \beta(F^c \cap G) - \varepsilon,$$

$$H_4 \subset H_3^c \cap G \quad \text{i} \quad \alpha(H_4) > \beta(H_3^c \cap G) - \varepsilon.$$

Kako su H_3 i H_4 disjunktni i sadržani u G , iz svojstava funkcija α, β, γ sledi

$$\begin{aligned} \beta(G) &\geq \alpha(H_3 \cup H_4) = \alpha(H_3) + \alpha(H_4) \\ &> \beta(F^c \cap G) + \beta(H_3^c \cap G) - 2\varepsilon \\ &\geq \gamma(F^c \cap G) + \gamma(F \cap G) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Sada ostaje da pustimo $\varepsilon \rightarrow 0$.

Korak 6: Ako je $F \subset X$ zatvoren, onda je F u klasi $\mathcal{M}$ γ -merljivih skupova.

Po *Koraku 5*, $\beta(G) \geq \gamma(F \cap L) + \gamma(F^c \cap L)$ ako je F zatvoren, G otvoren, i $G \supset L$.

Uzimajući infimum po ovakvim G , dobijamo $\gamma(L) \geq \gamma(F \cap L) + \gamma(F^c \cap L)$, čime je potvrđeno da je F γ -merljiv.

Korak 7: $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}$, i restrikcija μ mere γ na $\mathcal{B}(X)$ je verovatnosna mera koja zadovoljava $\mu(G) = \gamma(G) = \beta(G)$ za sve otvorene skupove $G \subset X$.

Kako svaki zatvoren skup leži u $\mathcal{M}$, a $\mathcal{M}$ je σ -algebra, imamo $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}$. Da bismo videli da je μ verovatnosna mera, primetimo da svaki K_i ima konačan pokrivač $\mathcal{A}$ -skupovima, pa je stoga $K_i \in \mathcal{H}$. Dakle

$$1 \geq \mu(X) = \beta(X) \geq \sup_i \alpha(K_i) \geq \sup_i (1 - i^{-1}) = 1.$$

□

4.5 Prohorovljevo rastojanje

Ovde će biti pokazano da se slaba topologija Borelovih verovatnosnih mera na kompletnom separabilnom metričkom prostoru može metrizovati eksplicitnim rastojanjem, tzv. *Prohorovljevim rastojanjem*.

Definicija 4.12 (Prohorovljevo rastojanje). Neka je $\mathcal{P}(X)$ skup Borelovih verovatnosnih mera na metričkom prostoru (X, d) . Za $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$, *Prohorovljevo rastojanje* $\pi(\mu, \nu)$ definiše se kao infimum svih $\varepsilon > 0$ za koje važi

$$\mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon, \quad \nu(A) \leq \mu(A^\varepsilon) + \varepsilon,$$

za sve Borelove $A \subset X$, gde je $A^\varepsilon := \{x \in X : \text{dist}(x, A) < \varepsilon\}$.

Propozicija 4.13. *Prohorovljevo rastojanje π je metrika na $\mathcal{P}(X)$.*

Dokaz. Simetrija $\pi(\mu, \nu) = \pi(\nu, \mu)$ i $\pi(\mu, \mu) = 0$ su očigledne direktno iz definicije.

Pretpostavimo $\pi(\mu, \nu) = 0$. Za proizvoljan zatvoren skup $F \subset X$ i svako $\varepsilon > 0$ imamo $\mu(F) \leq \nu(F^\varepsilon) + \varepsilon$. Puštajući $\varepsilon \rightarrow 0$, dobijamo $\mu(F) \leq \nu(F)$. Po simetriji imamo $\mu(F) = \nu(F)$ za svaki zatvoren skup F , a ovo povlači $\mu = \nu$.

Za nejednakost trougla, pretpostavimo $\pi(\mu, \nu) < \varepsilon_1$ i $\pi(\nu, \rho) < \varepsilon_2$. Za proizvoljan Borelov $A \subset X$,

$$\mu(A) \leq \nu(A^{\varepsilon_1}) + \varepsilon_1 \leq \rho((A^{\varepsilon_1})^{\varepsilon_2}) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \rho(A^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

gde poslednja nejednakost sledi iz $(A^{\varepsilon_1})^{\varepsilon_2} \subset A^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ (nejednakost trougla za d). Po simetričnom argumentu, $\rho(A) \leq \mu(A^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Kako ovo važi za svaki Borelov A , sledi $\pi(\mu, \rho) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Odatle dobijamo $\pi(\mu, \rho) \leq \pi(\mu, \nu) + \pi(\nu, \rho)$. □

Teorema 4.14. *Neka je (X, d) kompletan separabilan metrički prostor. Tada:*

1. slaba konvergencija niza Borelovih verovatnosnih mera na X ekvivalentna je konvergenciji u Prohorovljevom rastojanju π ;
2. $(\mathcal{P}(X), \pi)$ je kompletan i separabilan metrički prostor;
3. familija $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ je relativno kompaktna (Definicija 4.8) ako i samo ako je njeno π -zatvorenje π -kompaktno.

Napomena 4.15. Teorema 4.14(1) pokazuje da je topologija slabe konvergencije na $\mathcal{P}(X)$, uvedena preko slabe-* topologije $\sigma(\mathcal{P}(X), C_b(X))$ u Odeljku 3.4 (Definicija 3.38), metri-zabilna Prohorovljevim rastojanjem π kad god je X kompletan i separabilan. Ovim se potvrđuje najava data u Napomeni 3.40.

4.6 Slika mere i teorema o neprekidnom preslikavanju

Za kraj ovog poglavlja pokazujemo kako se slaba konvergencija ponaša u odnosu na neprekidna preslikavanja između metričkih prostora.

Definicija 4.16 (Slika mere). Neka su X, X' separabilni metrički prostori, μ Borelova verovatnosna mera na X i $h: X \rightarrow X'$ Borel merljivo preslikavanje. *Slika mere* μ pri h je verovatnosna mera $h_{\#}\mu$ na X' data sa

$$(h_{\#}\mu)(B) := \mu(h^{-1}(B)), \quad B \subset X' \text{ Borelov.}$$

Za svaku Borel merljivu funkciju $g: X' \rightarrow \mathbb{R}$ takvu da je $g \circ h$ μ -sumabilna, važi

$$\int_{X'} g d(h_{\#}\mu) = \int_X (g \circ h) d\mu.$$

Definicija 4.17 (Nosač mere). Neka je μ Borelova mera na separabilnom metričkom prostoru X . *Nosač mere* μ , u oznaci $\text{supp } \mu$, je najmanji zatvoren skup na kome je μ koncentrisana:

$$\text{supp } \mu := \bigcap \{A \subset X : A \text{ zatvoren, } \mu(X \setminus A) = 0\}.$$

Presek se, zahvaljujući separabilnosti X , može uzeti prebrojiv, pa je $\text{supp } \mu$ dobro definisan zatvoren skup sa $\mu(X \setminus \text{supp } \mu) = 0$. Ekvivalentno, $\text{supp } \mu = \{x \in X : \mu(B(x, r)) > 0 \text{ za svako } r > 0\}$.

Napomena 4.18. Presek u Definiciji 4.17 se zaista može uzeti prebrojiv: neka je $D = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ prebrojiv gust podskup od X (postoji po separabilnosti). Za svaki zatvoren skup A sa $\mu(X \setminus A) = 0$ i svaki $x \notin A$, kako je $X \setminus A$ otvoren, postoji lopta $B(x_i, q)$ sa racionalnim q i $x_i \in D$ takva da $x \in B(x_i, q) \subset X \setminus A$. Prebrojiva familija zatvorenih skupova $X \setminus B(x_i, q)$ (po $x_i \in D, q \in \mathbb{Q}^+$) sa $\mu(X \setminus (X \setminus B(x_i, q))) = 0$ tada ima isti presek kao čitava (neprebrojiva) familija iz definicije.

Teorema 4.19 (Teorema o neprekidnom preslikavanju). *Neka su X, X' separabilni metrički prostori, $h: X \rightarrow X'$ neprekidno preslikavanje, i neka su μ_n, μ Borelove verovatnosne mere na X sa $\mu_n \rightarrow \mu$ i μ separabilnog nosača. Tada*

$$\mu_n h^{-1} \rightarrow \mu h^{-1} \quad \text{na } X',$$

gde je $\mu h^{-1}(B) := \mu(h^{-1}(B))$, $B \subset X'$ Borelov, slika mere μ pri h .

Napomena o dokazu. Dokaz se ovde ne navodi, zainteresovani čitalac može pogledati [6, Corollary 3.12]. $\square$

Napomena 4.20. Kako je nosač $\text{supp } \mu$ podskup separabilnog prostora X , on je i sam separabilan (svaki podskup separabilnog metričkog prostora je separabilan, videti Poglavlje 1). Uslov „ μ separabilnog nosača” je prema tome automatski ispunjen za svaku Borelovu meru na (podrazumevano separabilnom) prostoru X .

Ovim se zaključuje Poglavlje 4. Definisali smo slabu konvergenciju niza verovatnosnih mera i pokazali da je granica slabo konvergentnog niza, ako postoji, jedinstvena. Oka-
rakterisana je preko otvorenih i zatvorenih skupova (Portmanto teorema), povezana je sa
pojmom zategnutosti i relativne kompaktnosti (Prohorovljeva teorema), pokazano je da
je metrizabilna Prohorovljevim rastojanjem π , i navedeno da se dobro ponaša u odnosu
na neprekidna preslikavanja. U Poglavlju 5 uvodi se Wasserstein-ova metrika, druga me-
trika na $\mathcal{P}(X)$ koja takođe indukuje topologiju slabe konvergencije, ali koja ima bogatu
geometrijsku interpretaciju preko teorije optimalnog transporta.

Glava 5

Wasserstein-ova metrika

U prethodnom poglavlju konstruisana je Prohorovljeva metrika π i pokazano je da ona metrize topologiju $\sigma(\mathcal{P}(X), C_b(X))$ slabe konvergencije mera (koja će se, radi kraćeg zapisa, u ovom poglavlju obeležavati i sa $\tau_w := \sigma(\mathcal{P}(X), C_b(X))$). Prohorovljeva metrika je, međutim, apstraktne prirode i ne odražava geometriju prostora X na kome su mere definisane, ne govori ništa o tome *koliko je „teško”* transformisati jednu masu raspoređenu po μ u masu raspoređenu po ν . U ovom poglavlju biće uvedena Wasserstein-ova metrika, koja potiče iz teorije optimalnog transporta i koja tu geometrijsku informaciju nosi eksplicitno u sebi. U literaturi se koriste i nazivi *Kantorovičeva* ili *Monž–Kantorovičeva* metrika, budući da je Wasserstein imao znatno manju ulogu u njenom uvođenju nego što naziv sugeriše. U ovom radu koristićemo ustaljeni naziv „Wasserstein-ova metrika”.

Osnovna ideja je sledeća: ako meru $\mu \in \mathcal{P}(X)$ zamislimo kao raspodelu neke „mase” (na primer, gomilu peska) po prostoru X , a $\nu \in \mathcal{P}(X)$ kao drugu raspodelu iste ukupne mase, prirodno je pitati se koliki je *minimalni rad transporta* potreban da se masa iz μ premesti u ν , ako je cena premeštanja jedinice mase sa mesta x na mesto y jednaka $d(x, y)^p$ (dobro definisano jer je $d(x, y) \geq 0$) za neko $p \geq 1$. Ovaj minimalni rad transporta, posle korenovanja stepenom p , definiše rastojanje $W_p(\mu, \nu)$, tzv. *p-Wasserstein-ovo rastojanje*. Formalizacija ove intuitivne ideje zahteva prelazak sa Monžovog (jednostavnijeg, ali teško rešivog) problema na Kantorovičovo rešenje, koje se prirodno oslanja na teoriju mere i slabu konvergenciju izgrađene u Poglavljima 2 i 4.

Kroz čitavo poglavlje (X, d) označava kompletan separabilan metrički prostor. Izlaganje u ovom poglavlju oslanja se na sledeću literaturu: [7], [8], [10] kao i na Poglavlja 2–4 ovog rada.

5.1 Monžov problem optimalnog transporta

Problem koji je 1781. godine postavio Gaspard Monž sastoji se, kao što je već rečeno u uvodnom delu ovog poglavlja, u sledećem: data je raspodela mase μ (npr. gomila peska koju treba premestiti) i ciljna raspodela ν iste ukupne mase. Treba naći preslikavanje koje

svaku tačku x šalje u tačku $T(x)$, tako da ukupan „rad“ transporta bude minimalan.

Definicija 5.1 (Monžov problem). Neka su $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ i neka je $c: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ Borel merljiva funkcija (*funkcija cene*). *Monžov problem* optimalnog transporta sastoji se u nalaženju

$$\inf \left\{ \int_X c(x, T(x)) d\mu(x) : T: X \rightarrow X \text{ Borel merljivo, } T_{\#}\mu = \nu \right\},$$

gde je $T_{\#}\mu$ slika mere μ pri preslikavanju T , u smislu Definicije 4.16. Preslikavanje T koje zadovoljava $T_{\#}\mu = \nu$ naziva se *transportno preslikavanje* između μ i ν , a ono koje pritom dostiže infimum naziva se *optimalno transportno preslikavanje*.

Napomena 5.2. Monžov problem ima dva ozbiljna tehnička nedostatka.

1. **Skup dopustivih T može biti prazan.** Ako je $\mu = \delta_{x_0}$, tada za svako Borel merljivo T važi $T_{\#}\delta_{x_0} = \delta_{T(x_0)}$, dakle slika Dirakove mere je uvek Dirakova mera. Ako ν nije Dirakova mera, ne postoji nijedno T sa $T_{\#}\delta_{x_0} = \nu$. Ovaj primer takođe pokazuje da mere sa atomima (mere μ za koje postoji tačka $x_0 \in X$ sa $\mu(\{x_0\}) > 0$) ne mogu biti poslate preko transportnog preslikavanja na mere bez atoma (mere kod kojih je $\mu(\{x\}) = 0$ za svako $x \in X$), jer je slika atoma uvek atom.
2. **Nelinearnost i nekonveksnost.** Uslov $T_{\#}\mu = \nu$ nije linearan u T : ako T_1, T_2 oba zadovoljavaju $T_{\#}\mu = \nu$, njihova sredina $\frac{T_1+T_2}{2}$ to, u opštem slučaju, ne zadovoljava. Ovo onemogućava direktnu primenu standardnih metoda (poluneprekidnost, kompaktnost) iz varijacionog računa.

5.2 Kantorovičev problem i transportni planovi

Rešenje problema navedenih u Napomeni 5.2, koje je predložio Kantorovič 1942. godine, sastoji se u tome da se, umesto preslikavanja T koje svakoj tački x dodeljuje *jedinstveno* odredište, dozvoli da se masa iz x „razdeli” i pošalje na više odredišta, formalizovano preko mere na $X \times X$.

Definicija 5.3 (Transportni plan). Neka su $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$. *Transportni plan* između μ i ν je mera $\gamma \in \mathcal{P}(X \times X)$ takva da su njene marginale jednake μ i ν , tj.

$$(\pi_1)_{\#}\gamma = \mu, \quad (\pi_2)_{\#}\gamma = \nu,$$

gde su π_1, π_2 projekcije $X \times X \rightarrow X$ na prvu, odnosno drugu koordinatu. Skup svih transportnih planova između μ i ν obeležavamo sa $\Pi(\mu, \nu)$.

Napomena 5.4. Za razliku od skupa transportnih preslikavanja u Monžovom problemu, skup $\Pi(\mu, \nu)$ je **uvek neprazan**: proizvod mera $\mu \times \nu$ (Definicija 2.7) zadovoljava

$(\pi_1)_\#(\mu \times \nu) = \mu$, $(\pi_2)_\#(\mu \times \nu) = \nu$, dakle $\mu \times \nu \in \Pi(\mu, \nu)$. Intuitivno, $\mu \times \nu$ predstavlja „potpuno haotično” premeštanje mase, bez korelacije između polazišta i odredišta.

Definicija 5.5 (Kantorovičev problem). Neka su $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ i $c: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ Borel merljiva. Za $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$ stavljamo

$$K(\gamma) := \int_{X \times X} c \, d\gamma,$$

i *Kantorovičev problem* sastoji se u nalaženju

$$T_c(\mu, \nu) := \inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} K(\gamma).$$

Minimizeri, kada postoje, nazivaju se *optimalni transportni planovi*.

Propozicija 5.6. *Ako je $T: X \rightarrow X$ transportno preslikavanje za Monžov problem ($T_\# \mu = \nu$), tada je $\gamma_T := (\text{id}, T)_\# \mu \in \Pi(\mu, \nu)$ i*

$$K(\gamma_T) = \int_X c(x, T(x)) \, d\mu(x).$$

Posledično, $T_c(\mu, \nu) \leq \inf \{ \int_X c(x, T(x)) \, d\mu(x) : T_\# \mu = \nu \}$, tj. Kantorovičev problem je relaksacija Monžovog problema. Ovo se lako proverava direktno iz definicije slike mere (Definicija 4.16).

Za dokaz nejednakosti trougla za Wasserstein-ovu metriku (Odeljak 5.3) potrebna je tehnika koja od dva transportna plana konstruiše treći, sa zajedničkom „unutrašnjom” marginalom. Ova konstrukcija („lema o lepljenju”) oslanja se na pojam *dezintegracije mere*.

Definicija 5.7 (Dezintegracija mere). Neka je μ Borelova mera na X , Y topološki prostor i $f: X \rightarrow Y$ Borel merljivo preslikavanje. Familija $(\mu_y)_{y \in Y}$ je *dezintegracija mere* μ u odnosu na f ako je svaka μ_y verovatnosna mera koncentrisana na $f^{-1}(\{y\})$, i ako za svaku funkciju $\varphi \in C_b(X)$ preslikavanje $y \mapsto \int_X \varphi \, d\mu_y$ jeste $(f_\# \mu)$ -merljivo i važi

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \left(\int_X \varphi \, d\mu_y \right) d(f_\# \mu)(y).$$

Teorema 5.8 (Teorema o dezintegraciji). *Neka su $X, \bar{X}$ Radonovi separabilni metrički prostori (svojstvo koje ispunjava svaki kompletan separabilan metrički prostor), $\mu \in \mathcal{P}(X)$, neka je $f: X \rightarrow \bar{X}$ Borel merljivo preslikavanje i $\nu := f_\# \mu \in \mathcal{P}(\bar{X})$. Tada postoji ν -skoro svuda jedinstveno određena familija $(\mu_y)_{y \in \bar{X}}$ iz Definicije 5.7, tj. dezintegracija mere μ u odnosu na f postoji i jedinstvena je za ν -skoro sve $y \in \bar{X}$.*

Lema 5.9 (Lema o lepljenju). *Neka su X_1, X_2, X_3 kompletni separabilni metrički prostori, μ_1, μ_2, μ_3 verovatnosne mere na njima, $\gamma_1 \in \Pi(\mu_1, \mu_2)$ i $\gamma_2 \in \Pi(\mu_2, \mu_3)$. Tada postoji $\sigma \in \mathcal{P}(X_1 \times X_2 \times X_3)$ takva da je*

$$(\pi_{1,2})_{\#}\sigma = \gamma_1, \quad (\pi_{2,3})_{\#}\sigma = \gamma_2,$$

gde su $\pi_{1,2}, \pi_{2,3}$ projekcije na odgovarajuće parove koordinata.

Skica dokaza. Neka je $\pi_2^{(1)}: X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$ projekcija na drugu koordinatu, i neka je $((\gamma_1)_y)_{y \in X_2}$ dezintegracija mere γ_1 u odnosu na $\pi_2^{(1)}$ (Teorema 5.8, sa $f = \pi_2^{(1)}$, $f_{\#}\gamma_1 = \mu_2$), tako da za svaku $\varphi \in C_b(X_1 \times X_2)$ važi

$$\int_{X_1 \times X_2} \varphi d\gamma_1 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} \varphi(x_1, y) d(\gamma_1)_y(x_1) \right) d\mu_2(y).$$

Analogno, neka je $\pi_1^{(2)}: X_2 \times X_3 \rightarrow X_2$ projekcija na prvu koordinatu, i neka je $((\gamma_2)_y)_{y \in X_2}$ dezintegracija mere γ_2 u odnosu na $\pi_1^{(2)}$. Definišemo meru σ na $X_1 \times X_2 \times X_3$ preko njenog dejstva na test funkcije $\varphi(x_1, x_2, x_3)$:

$$\int \varphi d\sigma := \int_{X_2} \left(\int_{X_1} \int_{X_3} \varphi(x_1, y, x_3) d(\gamma_1)_y(x_1) d(\gamma_2)_y(x_3) \right) d\mu_2(y).$$

Uzimajući $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi_{1,2}(x_1, x_2)$ (nezavisno od x_3), desna strana se svodi tačno na $\int \varphi_{1,2} d\gamma_1$, čime se dobija $(\pi_{1,2})_{\#}\sigma = \gamma_1$, analogno se za $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi_{2,3}(x_2, x_3)$ dobija $(\pi_{2,3})_{\#}\sigma = \gamma_2$. (videti detaljnije u [7, Lema 5.5]) $\square$

Egzistencija optimalnog transporta. Sada smo spremni da pokažemo da Kantorovičev problem ima rešenje kada je c neprekidna i nenegativna, a X kompletan separabilan metrički prostor. Neka je $(\gamma_n)_n$ niz minimizacije za K . Tada, po regularnosti mera na metričkom prostoru (Teorema 2.24) i karakterizaciji kompaktnosti (Teorema 1.32), μ i ν moraju biti zategnute. Ako su K_1 i K_2 kompaktni sa $\mu(K_1), \nu(K_2) > 1 - \varepsilon$, onda je $K_1 \times K_2$ kompaktan i za sve $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$, $\gamma(K_1 \times K_2) > 1 - 2\varepsilon$. Odavde sledi da je čitava kolekcija $\Pi(\mu, \nu)$ zategnuta, i po Prohorovljevoj teoremi (Teorema 4.10) $(\gamma_n)_n$ ima slabu granicu γ nakon izdvajanja podniza. Za svaki prirodan broj m , $c_m(x, y) = \min(c(x, y), m)$ je neprekidna ograničena funkcija, i

$$K(\gamma_n) = \int_{X \times X} c d\gamma_n \geq \int_{X \times X} c_m d\gamma_n \rightarrow \int_{X \times X} c_m d\gamma, \quad n \rightarrow \infty.$$

Po Teoremi o monotonij konvergenciji (Teorema 2.37),

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} K(\gamma_n) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{X \times X} c_m d\gamma = K(\gamma), \quad \text{ako } \gamma_n \rightharpoonup \gamma.$$

Kako je $(\gamma_n)_n$ izabran kao niz minimizacije za K , γ mora biti minimizer, i egzistencija je pokazana.

5.3 Definicija Wasserstein-ove metrike

Wasserstein-ovu metriku dobijamo primenom Kantorovičevog problema na funkciju cene $c(x, y) = d(x, y)^p$, $p \geq 1$.

Lema 5.10. *Neka je $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $p \geq 1$. Ako je $\int_X d(x, x_0)^p d\mu(x) < \infty$ za neko $x_0 \in X$, onda je ova veličina konačna za svako $x_1 \in X$ umesto x_0 .*

Napomena o dokazu. Tvrdjenje se lako proverava direktno iz nejednakosti trougla $d(x, x_1) \leq d(x, x_0) + d(x_0, x_1)$ i konveksnosti funkcije $t \mapsto t^p$ ($p \geq 1$), zato se navodi bez dokaza. U literaturi se ovo podrazumeva kao jasna tvrdnja i ne dokazuje se. $\square$

Definicija 5.11 (Prostor $\mathcal{P}_p(X)$). Za $p \geq 1$ definišemo Wasserstein-ov prostor

$$\mathcal{P}_p(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) : \int_X d(x, x_0)^p d\mu(x) < \infty \text{ za neko (svako) } x_0 \in X \right\}.$$

Definicija 5.12 (Wasserstein-ova metrika). Za $p \geq 1$ i $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(X)$, p -Wasserstein-ovo rastojanje definišemo kao

$$W_p(\mu, \nu) := \left(T_{d^p}(\mu, \nu) \right)^{1/p} = \left(\inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times X} d(x, y)^p d\gamma(x, y) \right)^{1/p}.$$

Napominjemo da je infimum u Definiciji 5.5 ovde zaista dostignut („min”), po Egzistenciji optimalnog transporta (Odeljak 5.2), primenjenoj na $c = d^p$.

Konačnost W_p na $\mathcal{P}_p(X)$ garantovana je uzimanjem konkretnog plana $\mu \times \nu$. Kako je $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$,

$$d(x, y)^p \leq 2^{p-1}(d(x, x_0)^p + d(x_0, y)^p), \quad x, y \in X,$$

pa je, primenom Fubinijeve teoreme (Teorema 2.35) na (verovatnosnu) meru $\mu \times \nu$,

$$\begin{aligned} W_p(\mu, \nu)^p &\leq \int_{X \times X} d(x, y)^p d(\mu \times \nu)(x, y) \\ &\leq 2^{p-1} \left(\int_X d(x, x_0)^p d\mu(x) + \int_X d(y, x_0)^p d\nu(y) \right) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Teorema 5.13 (W_p je metrika). Za svako $p \geq 1$, W_p je metrika na $\mathcal{P}_p(X)$.

Dokaz. Nenegativnost je trivijalna.

$W_p(\mu, \nu) = 0 \Rightarrow \mu = \nu$: Po egzistenciji optimalnog transporta (Odeljak 5.2, za $c = d^p$, neprekidnu i nenegativnu), infimum se dostiže na nekom $\gamma^* \in \Pi(\mu, \nu)$ sa $\int_{X \times X} d(x, y)^p d\gamma^* = 0$. Ovo znači da je γ^* koncentrisan na dijagonali $\{(x, y) \in X \times X : x = y\}$. Za proizvoljnu funkciju $\varphi \in C_b(X)$, kako je $\varphi(x) = \varphi(y)$ za $\gamma^*(x, y)$,

$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times X} \varphi(x) d\gamma^*(x, y) = \int_{X \times X} \varphi(y) d\gamma^*(x, y) = \int_X \varphi d\nu,$$

pa $\mu = \nu$.

Simetrija: Preslikavanje $s(x, y) = (y, x)$ uspostavlja bijekciju $\Pi(\mu, \nu) \leftrightarrow \Pi(\nu, \mu)$ koja čuva vrednost $\int d(x, y)^p d\gamma$ (jer je d simetrična), pa je $W_p(\mu, \nu) = W_p(\nu, \mu)$.

Nejednakost trougla: Neka su $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathcal{P}_p(X)$ i neka su $\gamma_1 \in \Pi(\mu_1, \mu_2)$, $\gamma_2 \in \Pi(\mu_2, \mu_3)$ optimalni planovi (egzistencija optimalnog transporta, Odeljak 5.2), sa $K(\gamma_1) = W_p(\mu_1, \mu_2)^p$, $K(\gamma_2) = W_p(\mu_2, \mu_3)^p$. Po Lemi o lepljenju 5.9 postoji $\sigma \in \mathcal{P}(X \times X \times X)$ sa $(\pi_{1,2})_\# \sigma = \gamma_1$, $(\pi_{2,3})_\# \sigma = \gamma_2$. Tada je $(\pi_{1,3})_\# \sigma \in \Pi(\mu_1, \mu_3)$ (jer je $(\pi_1)_\# \sigma = \mu_1$, $(\pi_3)_\# \sigma = \mu_3$), pa, obeležavajući koordinate na $X \times X \times X$ sa (x_1, x_2, x_3) ,

$$\begin{aligned} W_p(\mu_1, \mu_3) &\leq \left(\int_{X \times X} d(x_1, x_3)^p d(\pi_{1,3})_\# \sigma \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{X \times X \times X} d(x_1, x_3)^p d\sigma \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{X \times X \times X} (d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3))^p d\sigma \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{X \times X \times X} d(x_1, x_2)^p d\sigma \right)^{1/p} + \left(\int_{X \times X \times X} d(x_2, x_3)^p d\sigma \right)^{1/p} \\ &= W_p(\mu_1, \mu_2) + W_p(\mu_2, \mu_3), \end{aligned}$$

gde smo u trećem koraku koristili Minkowski-jevu nejednakost (videti npr. [3, Teorema 3.9, str. 66.]) za L^p prostore (u odnosu na meru σ). $\square$

5.4 Osnovna svojstva Wasserstein-ovog prostora

Propozicija 5.14 (Monotonost po p). *Ako je $1 \leq p \leq q$, tada je $\mathcal{P}_q(X) \subset \mathcal{P}_p(X)$ i za $\mu, \nu \in \mathcal{P}_q(X)$ važi*

$$W_p(\mu, \nu) \leq W_q(\mu, \nu).$$

Ako je pritom X ograničen, važi i obrnuta ocena $W_q(\mu, \nu) \leq \text{diam}(X)^{(q-1)/q} \cdot W_1(\mu, \nu)^{1/q}$.

Dokaz. Za verovatnosnu meru $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$, Jensenova nejednakost za $p \leq q$ daje

$$\left(\int_{X \times X} d(x, y)^p d\gamma \right)^{1/p} \leq \left(\int_{X \times X} d(x, y)^q d\gamma \right)^{1/q}.$$

Primenjeno na optimalan plan za W_q , ovo daje $W_p(\mu, \nu) \leq W_q(\mu, \nu)$. Za obrnutu ocenu,

na ograničenom X imamo

$$\left(\int_{X \times X} d(x, y)^q d\gamma \right)^{1/q} \leq \text{diam}(X)^{(q-1)/q} \left(\int_{X \times X} d(x, y) d\gamma \right)^{1/q},$$

odakle tražena nejednakost sledi primenom na optimalan plan za W_1 . $\square$

Lema 5.15. Za $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ i $p \geq 1$ važi $a^p + b^p \leq (a + b)^p$.

Dokaz. Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo $a \geq b$. Tada možemo pisati $(a + b)^p = a^p + p\zeta^{p-1}b$ za neko $\zeta \in [a, a+b]$. Koristeći $p \geq 1$ i $\zeta \geq a \geq b$, dobijamo $(a+b)^p \geq a^p + b^p$. $\square$

Definicija 5.16 (Lipšicova funkcija). Za funkciju $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, *Lipšicova konstanta* funkcije φ je

$$K_\varphi := \sup \left\{ \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\} \in [0, \infty].$$

Funkciju φ nazivamo *Lipšicovom* ako je $K_\varphi < \infty$, i *1-Lipšicovom* ako je $K_\varphi \leq 1$. Skup svih 1-Lipšicovih funkcija $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ obeležavamo sa $\text{Lip}_1(X)$.

Teorema 5.17 (Karakterizacija W_p -konvergencije). Neka je $X = \mathbb{R}^d$ (sa Euklidskom metrikom), za neko $d \in \mathbb{N}$, i neka su $(\mu_n) \subset \mathcal{P}_p(X)$, $\mu \in \mathcal{P}_p(X)$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

1. $W_p(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$;
2. $\mu_n \rightharpoonup \mu$ i $\int_X d(x, x_0)^p d\mu_n(x) \rightarrow \int_X d(x, x_0)^p d\mu(x)$ za neko (svako) $x_0 \in X$.

Dokaz. Posmatrajmo prvo niz $(\mu_n)_n \subset \mathcal{P}_p(X)$ koji konvergira ka μ u W_p rastojanju. Tada i dalje važi da

$$\sup \left\{ \int_X \varphi d(\mu_n - \mu) : \varphi \in \text{Lip}_1(X) \right\} \rightarrow 0,$$

što daje testiranje slabe konvergencije u odnosu na proizvoljne Lipšicove funkcije. Primećimo da su Lipšicove funkcije guste (u uniformnoj konvergenciji) u prostoru $C_0(X)$ (dok to nije nužno slučaj za $C_b(X)$) i da je to dovoljno da se dokaže $\mu_n \rightharpoonup \mu$.

Da bismo dobili i drugu veličinu, naime $\int_X d(x, x_0)^p d\mu_n(x) \rightarrow \int_X d(x, x_0)^p d\mu(x)$ (što nije posledica same slabe konvergencije, jer $d(\cdot, x_0)^p$ nije ograničena funkcija), dovoljno je primetiti da

$$\int_X d(x, x_0)^p d\mu_n(x) = W_p^p(\mu_n, \delta_{x_0}) \rightarrow W_p^p(\mu, \delta_{x_0}) = \int_X d(x, x_0)^p d\mu(x).$$

Sada treba dokazati i obrnutu implikaciju. Posmatrajmo niz $\mu_n \rightharpoonup \mu$ koji zadovoljava i $\int_X d(x, x_0)^p d\mu_n(x) \rightarrow \int_X d(x, x_0)^p d\mu(x)$. Fiksirajmo $R > 0$ i posmatrajmo funkciju

$\varphi(x) := (d(x, x_0) \wedge R)^p$, koja je neprekidna i ograničena. Imamo

$$\begin{aligned} \int_X (d(x, x_0)^p - \varphi(x)) d\mu_n &= \int_X d(x, x_0)^p d\mu_n - \int_X \varphi d\mu_n \\ &\rightarrow \int_X d(x, x_0)^p d\mu - \int_X \varphi d\mu = \int_X (d(x, x_0)^p - \varphi(x)) d\mu. \end{aligned}$$

Kako je $\int_X (d(x, x_0)^p - \varphi(x)) d\mu \leq \int_{X \setminus B(x_0, R)} d(x, x_0)^p d\mu$, moguće je izabrati R tako da

$$\int_X (d(x, x_0)^p - \varphi(x)) d\mu < \varepsilon/2,$$

pa se time takođe može garantovati $\int_X (d(x, x_0)^p - \varphi(x)) d\mu_n < \varepsilon$ za sve n dovoljno velike.

Koristimo sada nejednakost $(d(x, x_0) - R)^p \leq d(x, x_0)^p - (d(x, x_0) \wedge R)^p$, koja važi za $d(x, x_0) \geq R$ (Lema 5.15), da bismo dobili

$$\int_X (d(x, x_0) - R)^p d\mu_n < \varepsilon \text{ za } n \text{ dovoljno veliko, i } \int_X (d(x, x_0) - R)^p d\mu < \varepsilon.$$

Posmatrajmo sada $\pi_R: X \rightarrow \overline{B(x_0, R)}$ definisano kao projekciju na $\overline{B(x_0, R)}$. Ovo preslikavanje je dobro definisano i neprekidno, i jednako je identitetu na $\overline{B(x_0, R)}$. Štaviše, za svako $x \notin \overline{B(x_0, R)}$ imamo $d(x, \pi_R(x)) = d(x, x_0) - R$. Oдавde možemo zaključiti

$$\begin{aligned} W_p(\mu, (\pi_R)_\# \mu) &\leq \left(\int_X (d(x, x_0) - R)^p d\mu \right)^{1/p} \leq \varepsilon^{1/p}, \\ W_p(\mu_n, (\pi_R)_\# \mu_n) &\leq \left(\int_X (d(x, x_0) - R)^p d\mu_n \right)^{1/p} \leq \varepsilon^{1/p}. \end{aligned}$$

Primetimo takođe da, usled uobičajene kompozicije slabe konvergencije sa neprekidnim funkcijama, iz $\mu_n \rightharpoonup \mu$ takođe zaključujemo $(\pi_R)_\# \mu_n \rightharpoonup (\pi_R)_\# \mu$. Ipak, ove mere su sve koncentrisane na kompaktnom skupu $\overline{B(x_0, R)}$, i ovde možemo koristiti ekvivalenciju slabe konvergencije i W_p -konvergencije (ekvivalencija slabe konvergencije i W_p -konvergencije na kompaktnom skupu dobija se istim argumentom kao u prvom delu ovog dokaza, deo (1) $\Rightarrow$ (2), primenjenim na kompaktni potprostor $\overline{B(x_0, R)}$). Oдавde dobijamo

$$\begin{aligned} \limsup_n W_p(\mu_n, \mu) &\leq \limsup_n \left(W_p(\mu_n, (\pi_R)_\# \mu_n) + W_p((\pi_R)_\# \mu_n, (\pi_R)_\# \mu) + W_p(\mu, (\pi_R)_\# \mu) \right) \\ &\leq 2\varepsilon^{1/p} + \lim_n W_p((\pi_R)_\# \mu_n, (\pi_R)_\# \mu) \\ &= 2\varepsilon^{1/p}. \end{aligned}$$

Parametar $\varepsilon > 0$ je bio proizvoljan, pa dobijamo $\limsup_n W_p(\mu_n, \mu) = 0$, čime je dokaz završen. $\square$

Napomena 5.18. Smer (1) $\Rightarrow$ (2) dokaza prenosi se na proizvoljan kompletan separabilan

metrički prostor X , uz odgovarajuću (tehnički zahtevniju) zamenu za gustinu Lipšicovih funkcija u $C_b(X)$, u $\mathbb{R}^d$ ova gustina se dobija konvolucijom, alatom koji nije dostupan na opštim prostorima. Smer (2) $\Rightarrow$ (1) je, međutim, specifičan za $\mathbb{R}^d$: ključna tačka dokaza je postojanje neprekidne retrakcije π_R sa čitavog prostora na kompaktan podskup (loptu $\overline{B(x_0, R)}$), sa kontrolisanim rastojanjem $d(x, \pi_R(x)) = d(x, x_0) - R$. Ovakva retrakcija oslanja se na linearnu strukturu $\mathbb{R}^d$ i ne mora postojati na opštem kompletnom separabilnom metričkom prostoru. Dokaz se može prilagoditi opštijim prostorima uz dodatne pretpostavke, zainteresovani čitalac se upućuje na [10, Propozicija 7.1.5] za opšti slučaj.

5.5 Kompletnost i separabilnost prostora $(\mathcal{P}_p(X), W_p)$

Teorema 5.19. *Ako je (X, d) kompletan separabilan metrički prostor, tada je za svako $p \geq 1$ i $(\mathcal{P}_p(X), W_p)$ kompletan separabilan metrički prostor.*

Dokaz. Dokaz je zahtevan i prevazilazi granice ovog rada, zainteresovan čitalac ga može pronaći u [10, Propozicija 7.1.5]. $\square$

Napomena 5.20. Može se pokazati da, ako X nije kompaktan, prostor $\mathcal{P}_p(X)$ nije lokalno kompaktan, čak ni u slučaju kada je $X = \mathbb{R}^n$ konačne dimenzije. Ova činjenica ograničava metode koje se mogu koristiti za dublju analizu geometrije $(\mathcal{P}_p(X), W_p)$, ali ne utiče na rezultate ovog poglavlja.

Napomena 5.21 (Gausov slučaj). U specijalnom slučaju $X = \mathbb{R}^n$, $p = 2$, kada su $\mu = N(m_1, A)$ i $\nu = N(m_2, B)$ Gausove (normalne) verovatnosne mere sa (mogućno singularnim) kovarijacionim matricama A, B , 2-Wasserstein-ovo rastojanje ima eksplicitnu, zatvorenu formu:

$$W_2(\mu, \nu)^2 = \|m_1 - m_2\|^2 + \text{tr}[A + B - 2(A^{1/2}BA^{1/2})^{1/2}].$$

Optimalni transport između dve Gausove mere je pritom uvek linearno preslikavanje, čija matrica zadovoljava tzv. Rikatiјevu jednačinu $TAT = B$. Ovaj rezultat ovde navodimo bez dokaza, videti [8, 1.6.3 The Gaussian Case].

5.6 Kompaktnost u prostoru $(\mathcal{P}_p(X), W_p)$

Definicija 5.22 (Uniformna integrabilnost p -tog momenta). Familija $\Gamma \subset \mathcal{P}_p(X)$ ima *uniformno integrabilan p -ti moment* (u odnosu na fiksiranu tačku $x_0 \in X$) ako

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\mu \in \Gamma} \int_{\{x : d(x, x_0) > R\}} d(x, x_0)^p d\mu(x) = 0.$$

Propozicija 5.23 (Kompaktni skupovi u W_p). *Uniformno zategnuta (Definicija 4.6) familija $\Gamma \subset \mathcal{P}_p(X)$ ima kompaktno zatvorenje u $(\mathcal{P}_p(X), W_p)$ ako i samo ako ima uniformno integrabilan p -ti moment (Definicija 5.22).*

Poglavlje 5 je ovim završeno. Uvedeno je Kantorovićevo rešenje Monžovog problema (Odeljci 5.1–5.2), pokazana je egzistencija optimalnog transportnog plana koristeći aparat iz Poglavlja 4, definisana je Wasserstein-ova metrika i dokazana su njena osnovna svojstva. U Poglavlju 6 direktno će biti upoređene konvergencija indukovana sa W_p i slaba konvergencija uz konkretne primere.

Glava 6

Poređenje slabe konvergencije i konvergencije indukovane Wasserstein-ovom metrikom

U Poglavlju 4 uvedena je slaba konvergencija na $\mathcal{P}(X)$, a u Poglavlju 5 Wasserstein-ova metrika W_p na $\mathcal{P}_p(X)$. Teorema 5.17 već je pokazala vezu između ove dve konvergencije preko uslova o konvergenciji p -tih momenata. U ovom poglavlju ta veza se dalje razmatra: pokazuje se da je topologija indukovana Wasserstein-ovom metrikom finija od topologije slabe konvergencije, poredi se Wasserstein-ova metrika sa drugim standardnim rastojanjima na $\mathcal{P}(X)$, razmatra se (polu)neprekidnost Wasserstein-ovog rastojanja u odnosu na slabu konvergenciju, pokazuje se poklapanje dve konvergencije na skupovima na kojima je masa mera koncentrisana, i navodi se primer u kome se dve konvergencije ne slažu. Izlaganje u ovom poglavlju prati [8], [7] i [9].

6.1 Odnos dve konvergencije

Propozicija 6.1 (Wasserstein-ova topologija je finija). *Topologija τ_{W_p} , indukovana metrikom W_p na $\mathcal{P}_p(X)$, finija je od topologije slabe konvergencije τ_w indukovane na $\mathcal{P}_p(X)$ od strane $\mathcal{P}(X)$.*

Dokaz. Neka je $A \subset \mathcal{P}_p(X)$ skup koji je zatvoren u topologiji τ_w . Neka $(\mu_n)_n \subset A$ konvergira ka μ u metrici W_p . Po Teoremi 5.17, smer (1) $\Rightarrow$ (2), tada $\mu_n \rightharpoonup \mu$. Kako je A zatvoren u τ_w , sledi $\mu \in A$. Ovim je pokazano da je A zatvoren i u topologiji τ_{W_p} , tj. topologija τ_{W_p} ima više zatvorenih skupova od topologije τ_w , drugim rečima τ_{W_p} je finija od τ_w . $\square$

Wasserstein-ova metrika nije jedina metrika koja metrizesuje topologiju τ_w . Primer 6.4 poredi je sa još jednim standardnim rastojanjem koje takođe metrizesuje τ_w , ograničeno-

Lipšicovim rastojanjem, kao i sa totalnom varijacijom, rastojanjem koje τ_w **ne** metrizable, radi ilustracije razlike.

Najpre je za razumevanje potrebna sledeća definicija.

Definicija 6.2 (BL norma funkcije). Neka je $\varphi \in C_b(X)$ Lipšicova funkcija sa Lipšicovom konstantom K_φ (Definicija 5.16). Kažemo da je φ *globalno Lipšicova* ako je $K_\varphi < \infty$. *Norma ograničene Lipšicove funkcije* (u oznaci $\|\cdot\|_{BL}$, skraćeno *BL norma*) ovakve funkcije definiše se kao

$$\|\varphi\|_{BL} := \|\varphi\|_{L^\infty} + K_\varphi.$$

Skup svih funkcija φ sa konačnom BL normom, tj. sa $\|\varphi\|_{BL} < \infty$, snabdeven normom $\|\cdot\|_{BL}$ iz Definicije 6.2, jeste Banahov prostor.

Ista oznaka $\|\cdot\|_{BL}$ se u nastavku koristi i na prostoru mera $\mathcal{P}(X)$, gde $\|\mu - \nu\|_{BL}$ obeležava rastojanje između dve mere, definisano ispod preko BL norme iz Definicije 6.2.

Definicija 6.3 (Ograničeno-Lipšicovo rastojanje i totalna varijacija). Za $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ definišemo

$$\|\mu - \nu\|_{BL} := \sup_{\|\varphi\|_{BL} \leq 1} \left| \int_X \varphi d\mu - \int_X \varphi d\nu \right|, \quad \|\mu - \nu\|_{TV} := \sup_A |\mu(A) - \nu(A)|,$$

gde se u prvoj formuli supremum uzima po funkcijama φ BL norme (Definicija 6.2) najviše 1, a u drugoj po Borelovim skupovima $A \subset X$. Rastojanje $\|\cdot\|_{BL}$ metrizable topologiju τ_w , dok rastojanje $\|\cdot\|_{TV}$ tu topologiju **ne** metrizable, ono indukuje strogo finiju topologiju od τ_w .

Primer 6.4. Za $x, y \in X$, $x \neq y$, direktnim računom se dobija

$$\|\delta_x - \delta_y\|_{BL} = \min(1, d(x, y)), \quad \|\delta_x - \delta_y\|_{TV} = 1,$$

dok je, s druge strane, $W_p(\delta_x, \delta_y) = d(x, y)$ za sve $p \geq 1$.

Napomena 6.5. Primer 6.4 pokazuje suštinsku razliku između ova tri rastojanja: totalna varijacija „ne vidi” geometriju prostora X , vrednost $\|\delta_x - \delta_y\|_{TV}$ jednaka je 1 bez obzira na to koliko su tačke x i y međusobno blizu (ovo je i razlog zašto $\|\cdot\|_{TV}$ ne metrizable τ_w : ona ne opada ni kad $y \rightarrow x$). Ograničeno-Lipšicovo rastojanje ovo ispravlja za mala rastojanja (za $d(x, y) < 1$ vrednost $\|\delta_x - \delta_y\|_{BL}$ opada zajedno sa $d(x, y)$), ali ne i za velika (vrednost je uvek ograničena sa 1). Wasserstein-ova metrika, nasuprot tome, u potpunosti prenosi geometriju osnovnog prostora X : $W_p(\delta_x, \delta_y)$ jednako je tačno rastojanju $d(x, y)$, bez obzira na to koliko je ono veliko ili malo.

Teorema 6.6 (Neprekidnost i poluneprekidnost $W_p(\cdot, \nu)$ u odnosu na slabu konvergenciju). Neka je $\nu \in \mathcal{P}_p(X)$ fiksirana mera.

1. Ako je X kompaktan, preslikavanje $\mu \mapsto W_p(\mu, \nu)$ je neprekidno u odnosu na τ_w .
2. Ako X nije nužno kompaktan, ali $(\mu_n)_n, \mu \in \mathcal{P}_p(X)$ i $\mu_n \rightharpoonup \mu$, tada je preslikavanje $\mu \mapsto W_p(\mu, \nu)$ poluneprekidno odozdo:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} W_p(\mu_n, \nu) \geq W_p(\mu, \nu).$$

Dokaz. Deo (1): Kako, na kompaktnom X , konvergencija u metrici W_p tačno metrizable topologiju τ_w , a svaka metrika je neprekidna u odnosu na samu sebe (kao posledica nejednakosti trougla), preslikavanje $\mu \mapsto W_p(\mu, \nu)$ je neprekidno.

Bez dokaza za deo (2): Dokaz opšteg (ne nužno kompaktnog) slučaja oslanja se na zategnutost niza optimalnih transportnih planova $\gamma_n \in \Pi(\mu_n, \nu)$ i izdvajanje slabo konvergentnog podniza, videti [7, Propozicija 7.4]. $\square$

6.2 Poklapanje konvergencija na ograničenim skupovima

Posledica 6.7. Neka je $K \subset X$ ograničen skup i neka je $\mu_n(K) = 1$ za sve $n \geq 1$. Tada $W_p(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$ ako i samo ako $\mu_n \rightharpoonup \mu$.

Dokaz. Ovo neposredno sledi iz uslova iz Definicije 5.22. $\square$

Primer 6.8 (Bikel–Fridmanov primer). Neka je μ Borelova verovatnosna mera na $\mathbb{R}$ takva da je $\int_{\mathbb{R}} x d\mu(x) = 0$ i $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu(x) = 1$. Za $n \geq 1$ neka je $S_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ preslikavanje $S_n(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n x_i$, i neka je

$$\mu_n := (S_n)_\# \left(\underbrace{\mu \times \cdots \times \mu}_n \right)$$

slika (Definicija 4.16) n -tog proizvoda mere μ sa samom sobom (Definicija 2.7) pri preslikavanju S_n . Po centralnoj graničnoj teoremi, $\mu_n \rightharpoonup \nu$, gde je ν standardna normalna (Gausova) mera na $\mathbb{R}$. Kako je $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu_n(x) = 1 = \int_{\mathbb{R}} x^2 d\nu(x)$ za sve n (konvergencija drugog momenta je ovde trivijalna, jer je moment konstantan), Teorema 5.17 daje $W_2(\mu_n, \nu) \rightarrow 0$.

6.3 Primer neslaganja: bekstvo mase u beskonačnost

Primer 6.9 (Bekstvo mase u beskonačnost). Neka je $X = \mathbb{R}$ i, za $n \geq 2$,

$$\mu_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right) \delta_0 + \frac{1}{n} \delta_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Niz $(\mu_n)_n$ slabo konvergira ka δ_0 , ali

$$W_2(\mu_n, \delta_0) = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot n^2} = \sqrt{n} \longrightarrow \infty.$$

Dakle $\mu_n \rightharpoonup \delta_0$, ali $\mu_n \not\rightarrow \delta_0$ u metrici W_2 : slaba konvergencija ovde ne kontroliše „rep” raspodele, pošto funkcija $x \mapsto x^2$ nije ograničena, dok Wasserstein-ova konvergencija dodatno zahteva da masa ne „pobegne” u beskonačnost.

Napomena 6.10. Primer 6.9 pokazuje da uslov konvergencije p -tog momenta iz Teoreme 5.17, smer (2) $\Rightarrow$ (1), nije suvišan: iako $\mu_n \rightharpoonup \delta_0$, drugi moment mere μ_n ne konvergira ka drugom momentu mere δ_0 (koji je 0), pa ovaj uslov nije ispunjen, i W_2 -konvergencija izostaje.

Napomena 6.11 (Uopštenje na proizvoljno $p \geq 1$). Isti račun kao u Primeru 6.9 sprovodi se za svako $p \geq 1$. Kako je druga marginala transportnog plana $\mu_n \times \delta_0 \in \Pi(\mu_n, \delta_0)$ (Definicija 5.3) Dirakova mera u 0, sva masa transportnog plana koncentrisana je na $\mathbb{R} \times \{0\}$, pa je $\mu_n \times \delta_0$ jedini element skupa $\Pi(\mu_n, \delta_0)$, i po Definiciji 5.12:

$$W_p(\mu_n, \delta_0)^p = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} d(x, y)^p d(\mu_n \times \delta_0)(x, y) = \int_{\mathbb{R}} d(x, 0)^p d\mu_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 0^p + \frac{1}{n} \cdot n^p = n^{p-1}.$$

Dakle $W_p(\mu_n, \delta_0) = n^{(p-1)/p}$: za $p = 1$ ovo je konstantno 1 (ne teži nuli), a za $p > 1$ ova vrednost teži $+\infty$. Slaba konvergencija $\mu_n \rightharpoonup \delta_0$ dakle ne povlači W_p -konvergenciju ni za jedno $p \geq 1$.

U Poglavlju 6 pokazano je da je topologija τ_{W_p} finija od topologije slabe konvergencije τ_w , upoređena je Wasserstein-ova metrika sa ograničeno-Lipšicovim rastojanjem i totalnom varijacijom, pokazana je neprekidnost, odnosno poluneprekidnost odozdo Wasserstein-ovog rastojanja u odnosu na slabu konvergenciju, pokazano je poklapanje dve konvergencije na skupovima na kojima je masa mera koncentrisana, i naveden je primer u kome se dve konvergencije ne slažu usled bekstva mase u beskonačnost, uz njegovo uopštenje na proizvoljno $p \geq 1$. Sa svim navedenim rezultatima ovo poglavlje je kompletno i završeno.

Zaključak

U radu je pokazano da slaba konvergencija mera (koja dolazi iz teorije verovatnoće i funkcionalne analize) i konvergencija indukovana Wasserstein-ovom metrikom (poreklom iz geometrijskog problema optimalnog transporta), iako potiču iz sasvim različitih izvora, nisu nezavisne pojave.

Pokazano je da se obe konvergencije mogu posmatrati kao konvergencije u odnosu na neku topologiju na prostoru verovatnosnih mera $\mathcal{P}(X)$ nad kompletnim separabilnim metričkim prostorom X , i da su obe metrizable (Prohorovljevim rastojanjem π , odnosno Wasserstein-ovim rastojanjem W_p).

Pokazano je da je topologija τ_{W_p} finija od topologije slabe konvergencije τ_w , odnosno svaki niz koji konvergira u W_p metriki, konvergira i slabo, dok obrat ne mora da važi. Preciznu vezu između ove dve konvergencije daje uslov o konvergenciji p -tih momenata: niz $\mu_n \in \mathcal{P}_p(X)$ konvergira ka μ u W_p ako i samo ako $\mu_n \rightharpoonup \mu$ i pri tome p -ti momenti mera μ_n konvergiraju ka p -tom momentu mere μ . Ovaj dodatni uslov nije samo tehnička stvar, već upravo ono što slaboj konvergenciji nedostaje da bi se izjednačila sa W_p -konvergencijom, tj. slaba konvergencija „vidi” samo ponašanje mera na ograničenim skupovima, preko neprekidnih i ograničenih funkcija, dok Wasserstein-ova metrika dodatno prati i da li deo mase „beži” ka beskonačnosti. Ovo je ilustrovano primerom u kome $\mu_n \rightharpoonup \delta_0$ slabo, ali $W_p(\mu_n, \delta_0) \rightarrow \infty$ za svako $p \geq 1$, masa mera μ_n beži u beskonačnost, pa slaba konvergencija to „ne primećuje”, dok Wasserstein-ovo rastojanje raste neograničeno.

Poređenjem Wasserstein-ove metrike sa drugim rastojanjima na $\mathcal{P}(X)$, totalnom varijacijom i ograničeno-Lipšicovim rastojanjem, pokazano je da je upravo osetljivost na geometriju osnovnog prostora X ono što Wasserstein-ovu metriku razlikuje od ostalih rastojanja koja metrize istu topologiju τ_w : dve mere mogu biti proizvoljno bliske u smislu totalne varijacije, a proizvoljno udaljene u W_p prostoru, i obrnuto.

Kroz rad je takođe pokazana i suštinska zavisnost između slabe konvergencije i Wasserstein-ove metrike: pojam zategnutosti familije mera i Prohorovljeva teorema, uvedeni u Poglavlju 4 u okviru izučavanja slabe konvergencije, direktno su iskorišćeni u Poglavlju 5 da bi se pokazalo da Kantorovičev problem uopšte ima rešenje, odnosno da postoji optimalan transportni plan. Drugim rečima, sama Wasserstein-ova metrika ne bi mogla ni da bude dobro definisana bez rezultata iz teorije slabe konvergencije, što pokazuje da su ove dve teme, iako naizgled nezavisne, zapravo itekako povezane.

Rezultati predstavljeni u ovom radu ograničeni su na slučaj kompletnih separabilnih metričkih prostora i na mere sa konačnim p -tim momentom. Van ovog okvira, na primer kada osnovni prostor X nije separabilan ili kada mere nemaju konačan p -ti momenat, mnogi od izloženih rezultata (Prohorovljeva teorema, kompletnost i separabilnost prostora $(\mathcal{P}_p(X), W_p)$) više ne moraju da važe, pa bi njihovo proučavanje zahtevalo drugačiji pristup.

Literatura

- [1] J. van Neerven, *Functional Analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2022.
- [2] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Revised Edition, CRC Press, Boca Raton, 2015.
- [3] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1987.
- [4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.
- [5] L. Hong, *Weak convergence of probability measures: a topological vector space point of view*, arXiv:1310.1607, 2013.
- [6] S. Sagitov, *Weak Convergence of Probability Measures* (predavanja), Chalmers University of Technology and University of Gothenburg, 2020.
- [7] F. Santambrogio, *Optimal Transport for Applied Mathematicians – Calculus of Variations, PDEs and Modelling*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, 2015.
- [8] V. M. Panaretos, Y. Zemel, *An Invitation to Statistics in Wasserstein Space*, Springer, 2020.
- [9] Y. Yao, W. Zhang, *The Geometry Behind Diffusion and Flow Matching: Gradient Flows and Geodesics in Wasserstein Space*, arXiv:2606.24157, 2026.
- [10] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré, *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

Biografija



Naja Stanisavljević rođena 26.11.2002. godine, osnovnu školu „Dušan Radović” u Boru završila je 2017. godine, nakon čega je upisala Gimnaziju „Bora Stanković” takođe u Boru, koju je završila 2021. godine. Iste godine upisala je integrisane akademske studije na smeru Master profesor matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, koje trenutno privodi kraju.

Akadske 2023/2024. godine bila je dobitnik stipendije Fonda za stipendiranje i podsticanje napredovanja darovitih studenata i mladih naučnih radnika i umetnika, a 2025/2026. godine dobitnik je Dositejeve stipendije Fonda za mlade talente.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Završni rad

VR

Autor: Naja Stanisavljević

AU

Mentor: dr Marko Nedeljkov

MN

Naslov rada: Poređenje slabe konvergencije i konvergencije u Wasserstein-ovoj metrici na prostoru mera

NR

Jezik publikacije: srpski

JP

Jezik izvoda: srpski

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2026

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA

Fizički opis rada: 6/73/10/0/0/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Funkcionalna analiza

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: slaba konvergencija mera, Wasserstein-ova metrika, teorija optimalnog transporta, Riesz-ova teorema reprezentacije, Prohorovljeva teorema, kompletni separabilni metrički prostori, prostor verovatnosnih mera

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: U radu se upoređuju dve konvergencije na prostoru verovatnosnih mera: slaba konvergencija, poreklom iz funkcionalne analize i teorije verovatnoće, i konvergencija u Wasserstein-ovoj metrici, poreklom iz teorije optimalnog transporta. Najpre se izlažu osnovni topološko-metrički pojmovi i osnovi teorije mere, a zatim se, preko Riesz-ove teoreme reprezentacije, na prostoru mera uvodi slaba-* topologija. Detaljno se proučava slaba konvergencija niza mera (Portmanto teorema, zategnutost, Prohorovljeva teorema i Prohorovljevo rastojanje), kao i Wasserstein-ova metrika, polazeći od Monžovog problema optimalnog transporta i Kantorovičevog rešenja preko transportnih planova, uz osnovna svojstva dobijenog Wasserstein-ovog prostora. Na kraju se pokazuje da je topologija indukovana Wasserstein-ovom metrikom finija od topologije slabe konvergencije, da se ove dve konvergencije poklapaju na ograničenim skupovima mera, i navode se primeri njihovog slaganja i neslaganja.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 21.08.2026.

DP

Datum Odbrane:

DO

Članovi komisije:

Predsednik: dr Miloš Kurilić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Ivana Vojnović, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član, mentor: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

KO

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY DOCUMENTARY INFORMATION**

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph publication

DT

Type of record: Textual printed material

TR

Content code: Final paper

CC

Author: Naja Stanisavljević

AU

Mentor: Marko Nedeljkov, Ph.D.

MN

Title: Comparison of weak convergence and convergence in the Wasserstein metric on the space of measures

TI

Language of the text: Serbian

LT

Language of the abstract: Serbian

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2026

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Faculty of Sciences, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP

Physical description: 6/73/10/0/0/0/0
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Functional Analysis
SD

Subject / Keywords: weak convergence of measures, Wasserstein metric, optimal transport theory, Riesz representation theorem, Prokhorov's theorem, complete separable metric spaces, space of probability measures
SKW

UC:

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: Abstract: This thesis compares two convergences on the space of probability measures: weak convergence, originating in functional analysis and probability theory, and convergence in the Wasserstein metric, originating in the theory of optimal transport. Basic topological and metric notions, together with the foundations of measure theory, are first presented, after which the weak-* topology on the space of measures is introduced by means of the Riesz representation theorem. Weak convergence of a sequence of measures is studied in detail (the Portmanteau theorem, tightness, Prokhorov's theorem, and the Prokhorov metric), as is the Wasserstein metric, starting from the Monge problem of optimal transport and Kantorovich's solution via transport plans, together with the basic properties of the resulting Wasserstein space. Finally, it is shown that the topology induced by the Wasserstein metric is finer than the topology of weak convergence, that the two convergences coincide on bounded sets of measures, and examples of their agreement and disagreement are given.

AB

Accepted by Scientific Board on: 21.08.2026.
DP

Defended:

DE

Thesis defend board:

President: Miloš Kurilić, Ph.D., Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Ivana Vojnović, Ph.D., Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member, mentor: Marko Nedeljkov, Ph.D., Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

DB