



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU



Marija Tadić

Razumevanje koncepta skupa kod učenika osnovne škole

- master rad -

Mentor: dr Zorana Lužanin

Novi Sad, 2026.

Sadržaj

Uvod.....	3
I Pojam skupa i njegovo razumevanje.....	4
II Skup u nastavi matematike.....	7
III Pojam skupa u udžbenicima matematike za osnovnu školu.....	11
IV Istraživanja o razumevanju pojma skupa.....	20
V Empirijsko istraživanje.....	25
Metodologija.....	25
Rezultati	27
Diskusija.....	41
Zaključak.....	45
Literatura.....	47
Prilog A.....	48
Biografija.....	50

Uvod

Bilo da je reč o podeli na voće i povrće ili na domaće i divlje životinje, deci je još u najranijem uzrastu sasvim prirodno da razvrstavaju, klasifikuju i grupišu. Tokom odrastanja objekti sa kojima se radi se menjaju, ali princip ostaje isti i čini odličnu bazu za susret sa skupovnim načinom razmišljanja u prvom razredu osnovne škole. Vremenom, pojam skupa i skupovni način mišljenja postaju sve zastupljeniji. Uporedo, razvijaju se i određene zablude, kako kod mlađih, tako i kod starijih osnovaca. Ovaj rad baviće se stepenom i načinom zastupljenosti skupa u nastavi matematike, ali i teškoćama sa kojima se učenici susreću.

Prvi deo posvećen je pojmu skupa i njegovom razumevanju. Posebno su sagledani osnovni pojmovi i svojstva skupova, kao što su element, pripadnost, podskup, prazan skup, jednakost skupova i kardinalnost. Takođe se ukazuje na značaj različitih reprezentacija skupova. Izdvajaju se najčešće teškoće učenika u razumevanju pojma skupa, čime se postavljaju osnove za dalju analizu.

U drugom delu urađen je osvrt na zastupljenost skupa u nastavi matematike, dok su u trećem delu analizirani udžbenici matematike od prvog do osmog razreda osnovne škole u cilju sagledavanja načina na koji se pojam skupa uvodi, razvija i primenjuje tokom osnovnog obrazovanja.

Nalazi publikovanih istraživanja kojima se bavi četvrti deo rada ukazuju da teškoće u razumevanju pojma skupa mogu opstajati i nakon njegovog formalnog uvođenja. Zastupljenost pojma skupa u nastavnim sadržajima uz publikovana istraživanja o razumevanju pojma skupa, povod su za empirijsko istraživanje sprovedeno u petom delu. Istraživanje je sprovedeno u školskoj 2025/26. godini među učenicima osnovne škole u Beogradu. Cilj je bio ispitati razumevanje kardinalnosti, praznog i beskonačnog skupa, ponavljanja elemenata i primene pojma skupa u različitim reprezentacijama i matematičkim kontekstima.

Na osnovu svega, u završnom delu rada izvedeni su zaključci i date su preporuke koje mogu biti od koristi kod prevazilaženja učenih poteškoća.

I Pojam skupa i njegovo razumevanje

Pojam skupa predstavlja jedan od osnovnih pojmova savremene matematike i ima značajnu ulogu u organizovanju i povezivanju različitih matematičkih sadržaja. Skupovni jezik omogućava opisivanje, klasifikovanje i proučavanje matematičkih objekata i njihovih odnosa, zbog čega se primenjuje u gotovo svim oblastima matematike. Skupovi se pojavljuju pri razmatranju skupova brojeva, rešavanju jednačina i nejednačina, opisivanju geometrijskih objekata i njihovih odnosa, kao i pri uvođenju funkcija i drugih matematičkih struktura. Stoga značaj pojma skupa prevazilazi sadržaje koji se neposredno odnose na elementarnu teoriju skupova, budući da skupovni način mišljenja predstavlja jednu od osnova za razumevanje brojnih matematičkih pojmova.

U elementarnom pristupu pojam skupa intuitivno se uvodi kao kolekcija određenih objekata, koji se nazivaju njegovim elementima. Odnos između elementa i skupa izražava se pripadnošću. Skup se može zadati navođenjem njegovih elemenata ili opisivanjem svojstva koje njegovi elementi zadovoljavaju. Pri tome redosled navođenja elemenata nije značajan, a višestruko navođenje istog elementa ne menja skup. Dva skupa jednaka su ako imaju iste elemente, odnosno ako je svaki element jednog skupa istovremeno element drugog skupa i obrnuto.

Sa pojmom skupa neposredno su povezani pojmovi podskupa i praznog skupa. Skup A je podskup skupa B ako svaki element skupa A pripada skupu B . Prazan skup je skup koji nema elemenata i predstavlja podskup svakog skupa. Vrlo je važno razlikovati odnos pripadnosti elementa skupu od odnosa između skupa i njegovog podskupa. Uočavanje ove razlike posebno je značajno sa stanovišta učenja, jer intuitivno shvatanje skupa kao grupe ili kolekcije konkretnih objekata može otežati razumevanje praznog skupa, kao i situacija u kojima su elementi nekog skupa i sami skupovi.

Jedno od osnovnih svojstava skupa jeste njegova kardinalnost. Kod konačnih skupova kardinalnost se određuje prebrojavanjem različitih elemenata skupa. Ponavljanje istog elementa u zapisu ne utiče na kardinalnost skupa, dok prazan skup

ima kardinalnost nula. Razvoj razumevanja kardinalnosti ne završava se na neposrednom prebrojavanju. Učenici se kasnije susreću i sa beskonačnim skupovima, posebno kroz skupove brojeva i skupove rešenja. Prelazak sa konačnih skupova, čiji se elementi mogu u potpunosti nabrojati, na beskonačne skupove zahteva i prelazak sa neposrednog prebrojavanja na apstraktnije razumevanje skupa.

Međutim, poznavanje navedenih definicija i svojstava samo po sebi ne znači da je učenik razvio razumevanje pojma skupa. Konceptualno razumevanje podrazumeva da učenik može da prepozna i primeni osnovna svojstva skupa u različitim situacijama, da razlikuje međusobno povezane pojmove i odnose i da isti matematički sadržaj sagleda kroz različite načine predstavljanja. Učenik, na primer, ne treba samo da zna da se isti element skupa navodi jednom, već treba da primeni to svojstvo i kada formira skup slova određene reči ili procenjuje jednakost dva skupa. Slično tome, razumevanje praznog skupa ne svodi se na poznavanje njegovog naziva i oznake, već podrazumeva: razumevanje činjenice da je reč o skupu koji nema elemenata i razlikovanje praznog skupa od skupa čiji je prazan skup element.

Razumevanje pojma skupa podrazumeva i mogućnost njegovog povezivanja sa drugim matematičkim sadržajima. Skupovi se ne pojavljuju samo kao zaseban sadržaj teorije skupova, već predstavljaju osnovu za opisivanje brojnih matematičkih objekata i odnosa. Skup rešenja jednačine ili nejednačine, različiti skupovi brojeva i njihovi međusobni odnosi predstavljaju primere neposredne primene skupovnog načina mišljenja. I geometrijski objekti mogu se posmatrati kao skupovi tačaka, što zahteva povezivanje geometrijskog značenja objekta sa skupovnim načinom njegovog opisivanja.

Poseban značaj u razvoju konceptualnog razumevanja ima sposobnost povezivanja različitih reprezentacija skupa. Skup i odnosi među skupovima mogu biti predstavljeni verbalnim opisom, nabrojanjem elemenata, opisivanjem zajedničkog svojstva elemenata, simboličkim zapisom ili odgovarajućim grafičkim prikazom. Razumevanje se ne ogleda samo u pravilnom tumačenju pojedinačne reprezentacije već i u sposobnosti prepoznavanja istog matematičkog značenja kada se promeni način predstavljanja. Upravo u takvim situacijama mogu postati vidljive razlike između formalnog poznavanja određenog pravila i njegovog stvarnog razumevanja.

Dosadašnja istraživanja ukazuju na to da teškoće u razumevanju pojma skupa mogu opstajati i nakon njegovog formalnog uvođenja. Učenici, a u određenim slučajevima i studenti, mogu uspešno reprodukovati definicije i koristiti simbole, a ipak ih nepravilno primenjivati u složenijim ili nestandardnim situacijama. Među teškoćama koje su uočene u prethodnim istraživanjima izdvajaju se intuitivno shvatanje skupa kao kolekcije¹, nerazlikovanje elementa i podskupa², nerazumevanje praznog skupa³, teškoće pri određivanju kardinalnosti⁴ i problemi povezani sa različitim reprezentacijama matematičkog sadržaja⁵.

Zbog toga se razumevanje pojma skupa u ovom radu ne posmatra samo kao poznavanje odgovarajućih termina, definicija i simboličkih zapisa. Ono obuhvata sposobnost učenika da pravilno određuju elemente skupa, primenjuju osnovna svojstva jednakosti skupova, određuju kardinalnost konačnih, praznih i beskonačnih skupova i povezuju skupovni način mišljenja sa drugim matematičkim sadržajima. Ovakvo određenje predstavlja osnovu za analizu prisutnosti pojma skupa u nastavi matematike, načina na koji se pojam skupa razvija kroz udžbenike matematike za osnovnu školu, kao i za kasnije ispitivanje njegovog razumevanja kod učenika.

¹ Efraim Fischbein and Madlen Baltsan ([I])

² Bagni, G. T.([II]), Rina Zazkis and Chris Gunn ([III])

³ Efraim Fischbein and Madlen Baltsan ([I]), Bagni, G. T.([II])

⁴ Efraim Fischbein and Madlen Baltsan ([I]), Rina Zazkis and Chris Gunn ([III])

⁵ Bagni, G. T.([II]), Sharif-Rasslan, A., Saleh, F., & Abboud, E. ([IV])

II Skup u nastavi matematike

Skup se u nastavi matematike kao posebna nastavna tema obrađuje samo jednom - u prvom polugodištu petog razreda. Realizaciji teme posveti se u proseku 10 časova⁶. Od učenika se očekuje da usvoje: pojam skupa i elementa skupa, pojam praznog skupa, predstavljanje skupa opisivanjem elemenata, nabrojanjem i Ojler-Venovim dijagramom, pojam podskupa i jednakih skupova, skupovne operacije (unija, presek, razlika), upotrebu reči: “(ne)pripada”, “(ne)sadrži”, “i”. “ili”, “svaki” i “neki” u matematičko logičkom smislu. U nekim udžbenicima mogu se pronaći i pojmovi: pravi podskup, nadskup, komplement skupa i disjunktne skupovi.

Planovi nastave matematike pokazuju da se veći deo časova posvećuje skupovnim operacijama. Broj elemenata skupa uvodi se kroz primere, a za skupove $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_0$ naglašava se da su beskonačni. U najvećem broju slučajeva skup je obuhvaćen samo jednom proverom znanja - prvim pismenim zadatkom.

Važnost skupa i njegove primene daleko prevazilaze granice ove teme. U nastavku biće navedeni nastavni sadržaji kroz koje se učenici susreću sa pojmom skupa.

Brojevi i operacije sa njima

Najočiglednija primena skupa je u klasifikaciji brojeva. U četvrtom razredu učenici prvi put čuju pojmove skup prirodnih brojeva - $\mathbb{N}$ i skup prirodnih brojeva sa nulom - $\mathbb{N}_0$. Uče da se elementi skupa $\mathbb{N}_0$ mogu predstaviti na brojevnoj polupravoj. U šestom razredu znanje proširuju na skup celih brojeva $\mathbb{Z}$ i uvode brojevnju pravu. Iste školske godine uče i skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Učenici sedmog razreda slušaju lekcije o skupu iracionalnih brojeva $\mathbb{I}$ i skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$. Posebna pažnja posvećuje se međusobnim odnosima ovih skupova.

U petom razredu đaci u obliku skupa navode delioce i sadržaoce jednog ili

⁶ Podaci o realizaciji nastavne teme preuzeti su iz izvora: Službeni Glasnik republike Srbije, Prosvetni Glasnik, Beograd, 26.02.26., str.285-287

više brojeva. Ovde bi trebalo da vide jasnu razliku između konačnog skupa delilaca i beskonačnog skupa sadržalaca nekog broja. Takođe, upoznaju i pojam prostog i složenog broja koje opet nabrajaju u obliku skupova. Kada nauče razlomke, izdvajaju se skup pravih i skup nepravih razlomaka. Mogu se posmatrati skup decimalnih brojeva sa konačnim i skup decimalnih brojeva sa beskonačnim brojem decimala itd.

Algebra i funkcije

Učenici u drugom razredu nauče da pronađu nepoznat sabirak, umanjenik, umanjilac, činilac, deljenik i delilac. Dobijeni broj nazivaju rešenjem jednačine. U trećem razredu nauče da odrede skup rešenja nejednačine u skupu $\mathbb{N}_0$. Kod nejednačina oblika $a + 15 < 20$ nabrajaju sva rešenja: $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Kod nejednačina oblika $x + 10 > 20$, uz objašnjenje *“Skup rešenja ove nejednačine su svi brojevi veći od 10”*, skup rešenja zapisuju na sledeći način: $x \in \{11, 12, 13, \dots\}$. Moguće je uočiti da se navedeni skupovi rešenja razlikuju (po broju elemenata), ali te razlike se ne ističu.

U petom razredu skup rešenja nejednačine predstavlja se na brojevnoj polupravoj, a od šestog razreda na brojevnoj pravoj. Skup rešenja nejednačina oblika $x + 10 > 20$ i $y + 10 \leq 20$ uče da zapišu i u obliku intervala: $x \in (10, +\infty)$ i $y \in (-\infty, 10]$.

Učenici šestog razreda navode skupove vrednosti zavisno promenljivih veličina, dok učenici sedmog razreda crtaju grafik funkcije direktne proporcionalnosti koji je zapravo skup tačaka. U višim razredima đacima se daju primeri jednačina koje nemaju rešenja u skupu u kom se jednačina rešava i primeri jednačina čiji je skup rešenja ceo skup u kom se jednačina rešava. U osmom razredu obrađuje se pojam linearne funkcije gde se definišu skup koji predstavlja oblast definisanosti funkcije - domen i skup vrednosti funkcije - kodomen. Takođe, grafik linearne funkcije je prava, tj. skup tačaka koje zadovoljavaju određenu jednakost. Iste školske godine učenici usvajaju metode za pronalaženje skupa rešenja sistema linearnih jednačina sa dve nepoznate.

Geometrija

Svako izučavanje geometrije jeste jedan oblik izučavanja skupa, ali se ta povezanost nedovoljno ističe. Prave i ravni su skupovi tačaka. Duž AB je skup svih tačaka između A i B zajedno sa A i B . Deo (podskup) prave p , koji sadrži tačku O prave p i sve tačke prave p sa jedne strane tačke O , je poluprava Op . Kružnica je skup tačaka u ravni koje su podjednako udaljene od jedne fiksne tačke. Krug je skup svih tačaka čije je rastojanje od centra manje ili jednako poluprečniku. Pojam podskupa prisutan je u analizi odnosa geometrijskih objekata. Svaka duž i svaka poluprava su podskupovi odgovarajuće prave, dok su geometrijske figure podskupovi ravni. U geometriji se često koristi pojam pripadanja. Posmatra se da li tačka pripada pravoj, duži, polupravoj, kružnici ili nekoj drugoj geometrijskoj figuri, kao i da li prava ili geometrijska figura pripadaju ravni.

Skupovne operacije takođe imaju svoju primenu u geometriji. Da bi se odredio međusobni položaj dve prave posmatra se njihov presek koji može biti prazan skup, jedna tačka ili skup tačaka tj. cela prava. Na isti način određuje se da li su međusobni položaj kružnice i prave ili međusobni položaj dve kružnice prazan skup, jedna tačka ili dve tačke. Složene geometrijske figure mogu se posmatrati kao unija više jednostavnijih geometrijskih figura što može olakšati računanje obima ili površine.

U petom razredu pojam skupa javlja se i kroz zadatke u kojima se određuje skup svih tačaka koje ispunjavaju određeni geometrijski uslov. Tako je simetrala duži AB skup svih tačaka u ravni jednako udaljenih od krajeva A i B , dok je simetrala ugla skup svih tačaka u ravni jednako udaljenih od krakova ugla.

U koordinatnom sistemu geometrijske figure posmatraju se kao skupovi tačaka koje su određene svojim koordinatama.

Merenje

Deca su još u predškolskom uzrastu svesna da postoje veličine koje se mere i upoređuju: visina, vreme, udaljenost, temperatura. U nižim razredima uče merne jedinice i različite kategorije kojima one pripadaju. Iako se skup kao pojam ne ističe

tokom obrade ovih lekcija, ipak se mogu formirati skupovi jedinica za dužinu, masu, zapreminu, površinu, vreme, temperaturu i druge merne veličine. Svaka merna veličina ima odgovarajući skup jedinica koje se međusobno razlikuju po količini, ali pripadaju istoj kategoriji, što doprinosi razumevanju njihove međusobne povezanosti i pravilnoj primeni u različitim situacijama. U procesu merenja i rešavanja tekstualnih zadataka često se vrši razvrstavanje i poređenje izmerenih vrednosti. Dobijeni rezultati mogu se posmatrati kao elementi skupa mernih podataka, koji se zatim uređuju po veličini, upoređuju ili grupišu prema određenim kriterijumima.

Obrada podataka

Od prvog razreda osnovne škole učenici prikupljaju podatke o predmetima, pojavama ili događajima iz neposrednog okruženja koje zatim razvrstavaju po unapred utvrđenim kriterijumima. Na taj način elemente grupišu u skupove i podskupove mnogo pre nego što se pojam skupa zvanično uvede. Kod tabelarnog prikaza podataka svaki red ili kolona može se posmatrati kao skup podataka koji imaju zajedničko obeležje, dok celokupna tabela predstavlja uređenu organizaciju svih prikupljenih elemenata. Stubičasti dijagrami, piktogrami i drugi grafički prikazi omogućavaju vizuelno sagledavanje odnosa između različitih skupova podataka, njihovo poređenje i analizu. U rešavanju zadataka iz ove oblasti učenici često upoređuju broj elemenata u pojedinim skupovima i izvode zaključke na osnovu dobijenih rezultata. Obrada podataka podrazumeva i izdvajanje podskupova prema zadatom kriterijumu. Učenici mogu izdvajati sve elemente koji imaju određenu osobinu ili upoređivati više grupa podataka koje pripadaju istoj celini.

Zastupljenost skupova i skupovnog načina mišljenja u nastavi matematike je neosporno na visokom nivou. Posebno je zanimljiv način na koji se u navedenim nastavnim oblastima skup (ne)pojavljuje u udžbenicima matematike.

III Pojam skupa u udžbenicima matematike za osnovnu školu

U cilju sagledavanja načina na koji se pojam skupa uvodi, razvija i primenjuje tokom osnovnog obrazovanja, analizirani su udžbenici matematike od prvog do osmog razreda osnovne škole. Analizom je praćeno kada i na koji način se pojam skupa pojavljuje, koji se osnovni pojmovi i simbolički zapisi uvode, kao i na koji način se skupovni jezik i način mišljenja kasnije koriste u drugim matematičkim sadržajima. Posebna pažnja posvećena je prelasku od intuitivnog grupisanja i razvrstavanja objekata u mlađim razredima ka formalnijem razumevanju pojma skupa i njegovoj primeni u različitim oblastima matematike.

Rezultati analize sažeto su prikazani u Tabeli 1, dok je u nastavku detaljnije razmotren razvoj pojma skupa kroz pojedine razrede i matematičke sadržaje.

Razred	Kako se pojavljuje pojam skupa	Ključni pojmovi i zapisi	Povezivanje sa drugim sadržajima
I	Intuitivno grupisanje, izdvajanje i razvrstavanje objekata prema zajedničkim osobinama; u pojedinim udžbenicima pojam skupa uvodi se i eksplicitno.	skup, element skupa, pripadnost, broj elemenata	brojanje, poređenje, grupisanje i razvrstavanje
II	Skup nije posebna nastavna tema, ali se koriste pojmovi “pripada” i “sadrži” bez znakovnog zapisa.	pripada, sadrži	prava, poluprava, duž
III	Skup se koristi za predstavljanja rešenja.	skup rešenja, $\in$, vitičaste zagrade, “...”	jednačine i nejednačine; geometrija
IV	Formalno se uvode skupovi brojeva.	$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\in$, zapis beskonačnog skupa	prirodni brojevi; brojevena poluprava; jednačine i nejednačine
V	Skup postaje zaseban i sistematski obrađen matematički sadržaj.	$\in$, $\notin$, jednakost skupova, podskup, prazan skup, konačan i beskonačan skup, skupovne operacije, Venov dijagram	prirodni brojevi; brojevena poluprava; jednačine i nejednačine; geometrija

VI	U različitim matematičkim oblastima primenjuju se osobine skupa i skupovni jezik.	$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \in, \notin, \subset, \cup, \cap$	celi i racionalni brojevi; brojeva prava; jednačine i nejednačine; koordinatni sistem, zavisno promenljive veličine; geometrija
VII		$\mathbb{I}, \mathbb{R}, \in, \notin, \subset, \cup, \cap$	iracionalni i realni brojevi; brojeva prava; geometrija
VIII		$\mathbb{R}, \in, \notin, \subset, \cup, \cap$	jednačine, nejednačine i sistemi jednačina; linearna funkcija; geometrija; obrada podataka

Tabela 1: Razvoj pojma skupa kroz razrede

Analiza udžbenika pokazuje da se pojam skupa tokom prvih pet razreda osnovne škole razvija postepeno, od intuitivnog grupisanja objekata do njegovog eksplicitnog i formalnijeg matematičkog određenja. Već u prvom razredu učenici se susreću sa grupisanjem i razvrstavanjem objekata prema obliku, boji, veličini ili nekom drugom svojstvu, kao i sa određivanjem broja objekata u određenoj grupi (Slika 1). Pristupi analiziranih udžbenika nisu ujednačeni: u jednom se pojam skupa ne uvodi eksplicitno, dok se u drugom koriste termini skup i element skupa, razmatra pripadnost elementa skupu, broj elemenata i jednostavne skupovne operacije. Ipak, oba pristupa već na početku školovanja stvaraju intuitivne osnove za kasnije formalnije razumevanje ovog pojma.

РАЗГОВАРАЈ, ПИШИ, ЦРТАЈ

1. Нацртај: јагоду, ананас, јабуку, крушку, лимун, поморанцу, шљиву, малину, купину. Линијом одвој црвено воће.
2. Нацртај три круга и четири квадрата. Неке кругове обој плавом, а неке кругове обој црвеном бојом. Неке квадрате обој плавом, а неке квадрате обој црвеном бојом. Линијом издвој плаве фигуре. Поред линије запиши СКУП ПЛАВИХ ФИГУРА.

Поред једне плаве фигуре напиши ЧЛАН.
3. Шта је приказано на слици?
Шта је одвојено црвеном линијом? Које својство је заједничко за све чланове скупа одређеног црвеном линијом?
Шта је одвојено плавом линијом? Које својство је заједничко за све чланове скупа одређеног плавом линијом?
Шта припада и једном и другом скупу?

Slika 1: Poređenje, grupisanje i razvrstavanje objekata u udžbeniku za prvi razred (str.57, [V])

Istovremeno se skupovni način razmišljanja postepeno pojavljuje i u drugim matematičkim oblastima, iako nije uvek eksplicitno povezan sa pojmom skupa. U drugom razredu, prilikom uvođenja prave, poluprave i duži, koriste se termini „pripada“ i „sadrži“, ali bez odgovarajućeg simboličkog zapisa i bez povezivanja sa teorijom skupova. Slična situacija javlja se u trećem razredu pri obradi kruga i kružnice, kada se razmatra pripadnost tačaka ovim geometrijskim objektima, ali se ni tada ne koristi skupovna simbolika.

Važan korak u razvoju pojma predstavlja korišćenje skupova za predstavljanje matematičkih rešenja i skupova brojeva. U trećem razredu skup se koristi pri predstavljanju rešenja nejednačina, dok se u četvrtom razredu uvode skup prirodnih brojeva i skup prirodnih brojeva sa nulom (Slika 2). Učenici se na taj način susreću i sa zapisom pomoću vitičastih zagrada i tri tačke, čime se postepeno priprema razumevanje beskonačnih skupova, iako se termin „beskonačan skup“ u tom kontekstu još ne koristi.

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ..., 99, 100, 101, 102, 103, ..., 999, 1000, 1001, 1002, 1003, ..., 999 999, 1 000 000, 1 000 001, ... називамо низ природних бројева.



Најмањи природни број је 1.

А који је највећи природни број?



- Низ природних бројева нема крај, увек можемо да га настављамо, не постоји највећи природни број.

Скуп природних бројева садржи све природне бројеве. Овај скуп се означава великим латиничним словом **N** .

N – Скуп природних бројева
 $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Нула није природан број и не припада скупу природних бројева. Скуп **N_0** је скуп који се добија када скупу природних бројева **N** додамо 0.

N_0 – Скуп природних бројева и нуле
 $N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

У скупу природних бројева било која два различита броја се могу упоредити. Зато је скуп природних бројева **уређен скуп**.

Slika 2: Skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_0$ u udžbeniku za četvrti razred (str.32, [VI])

Do značajnije formalizacije dolazi u petom razredu, kada skup postaje poseban matematički sadržaj i sistematski se obrađuju pripadnost elementa skupu (Slika 3), načini zadavanja skupova (Slika 4), jednakost skupova (Slika 5), podskupovi, prazan, konačan i beskonačan skup i skupovne operacije.

► Скуп и његови елементи

Скуп је један од основних појмова математике. Овај појам је заснован на идеји окупљања некаквих објеката у целину. Те целине називамо **скуповима**. Сваки од објеката који чине неки скуп називамо **елементом** или **чланом** тог скупа. У једноставним случајевима, скупове задајемо навођењем свих његових елемената између витчастих заграда $\{ \}$, одвајајући елементе запетама (уколико скуп има више од једног елемента). Скупове означавамо великим словима латинице (A, B, C и тако даље), а припадање елемента скупу знаком $\in$.

Слика 3: Увођење скупа у петом разреду (стр.16, [VII])

Пример 2.

Опис на српском језику

A је скуп свих једноцифрених непарних бројева.

- 1 је једноцифрен непаран број;
- 5 је једноцифрен непаран број;
- 6 није једноцифрен непаран број;
- 11 није једноцифрен непаран број; итд.

Математички запис

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\begin{aligned} 1 &\in A \\ 5 &\in A \\ 6 &\notin A \\ 11 &\notin A \end{aligned}$$

Графички приказ скупа A (Венов дијаграм)



Слика 4: Пример различитог задavanja скупа (стр.17, [VII])



Сваки скуп је потпуно одређен својим елементима, што значи да су два скупа једнака ако имају исте елементе.

Ако скуп задајемо навођењем елемената, није важан редослед којим елементе наводимо. Штавише, један исти елемент можемо наводити више пута унутар витчастих заграда. Ово последње значи да је, на пример, $\{0, 1, 2\} = \{2, 2, 0, 1\}$.



Слика 5: Redosled navođenja elemenata i ponavljanje istog elementa (стр.17, [VII])

Istovremeno, učenik počinje da razume da skup nije ograničen samo na kolekcije konkretnih objekata. Elementi sкупа mogu biti brojevi ili geometrijski objekti, dok sam skup može služiti za organizovanje i klasifikovanje različitih sadržaja. Na primer, u oblasti deljivosti, delioci i sadržaoci prirodnog broja posmatraju se kao skupovi (Слика 6). Na taj način skup više nije samo zaseban sadržaj već postaje i sredstvo za organizovanje i predstavljanje drugih matematičkih pojmova.

Скуп свих делилаца броја n означавамо D_n . На пример,

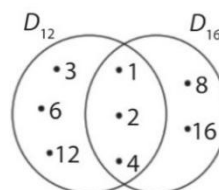
$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \text{ и } D_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}.$$

Заједнички делиоци бројева 12 и 16 су 1, 2 и 4:

$$D_{12} \cap D_{16} = \{1, 2, 4\}.$$

Најмањи заједнички дилац бројева 12 и 16 јесте број 1.

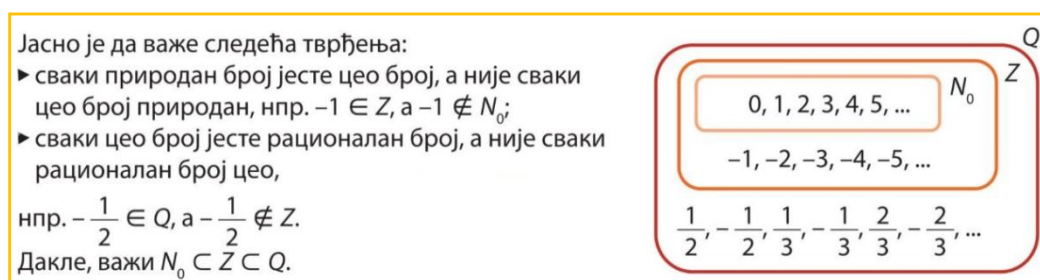
Највећи заједнички дилац бројева 12 и 16 јесте број 4.



Слика 6: Највећи заједнички делилац бројева 12 и 16 (стр.50, [VII])

Od šestog razreda dolazi do značajne promene u načinu prisustva pojma skupa. Nakon eksplicitne obrade u petom razredu, skup se više ne pojavljuje kao posebna nastavna oblast, već se njegove osobine koriste kao već usvojeno znanje. Ovakav pristup podrazumeva da učenik više ne treba iznova da uči šta je skup, element ili podskup, već da je sposoban da te ideje primeni u novim matematičkim situacijama. Time se uloga skupa menja od objekta učenja ka sredstvu matematičkog mišljenja.

Ranije usvojeni skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_0$ sada postaju deo skupa celih brojeva $\mathbb{Z}$, skup $\mathbb{Z}$ postaje deo skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ (Slika 7), dok se u sedmom razredu uvode i skup iracionalnih brojeva $\mathbb{I}$ i realnih brojeva $\mathbb{R}$. Iako se u konkretnim zadacima ne mora uvek eksplicitno koristiti skupovna terminologija, sama organizacija sadržaja počiva na ideji da određeni brojevi pripadaju određenoj brojevnoj strukturi i da se jedna brojevná struktura može posmatrati u odnosu na drugu. Ovaj aspekt je naročito važan jer se u višim razredima sve češće radi sa apstraktnim matematičkim objektima. Učenik više ne klasifikuje samo konkretne predmete, već brojeve prema njihovim svojstvima. Na primer, prirodni, celi i racionalni brojevi predstavljaju različite skupove brojeva, pri čemu se mogu posmatrati njihovi međusobni odnosi. Time se ranije uvedeni pojam podskupa može razumeti kroz šire okruženje, čak i onda kada termin „podskup“ nije neposredno u centru nastavne aktivnosti.



Slika 7: Odnos između skupova $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ (str.86, [VIII])

Skupovni način mišljenja posebno je vidljiv u radu sa skupovima rešenja. Jednačina ili nejednačina ne predstavlja samo postupak računanja nepoznate veličine, već uslov kojim se određuje koji brojevi imaju određeno svojstvo. Rezultat rešavanja može se posmatrati kao skup svih brojeva koji zadovoljavaju dati uslov. Skup rešenja može sadržati jedan element, više elemenata ili beskonačno mnogo elemenata (Slika 8). Ova činjenica predstavlja neposrednu vezu između sadržaja iz petog razreda gde

su uvedeni konačni i beskonačni skupovi. Kod nejednačina skup rešenja može biti interval ili unija intervala. Time se skup povezuje sa algebarskim zapisom i geometrijskim prikazom na brojevnoj pravoj.

1° Ако је $a \neq 0$ решење једначине $ax = b$ је $x = \frac{b}{a}$. Једначина има **тачно једно решење** јер је могуће поделити b са a .

2° Ако је $a = 0$ и $b = 0$, имамо једначину $0 \cdot x = 0$ која је **задовољена за сваки реални број x** . Једначина има бесконачно много решења јер је $0 \cdot x$ за свако реално x једнако 0.

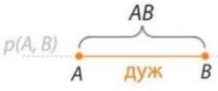
3° Ако је $a = 0$ и $b \neq 0$, онда је једначина $0 \cdot x = b$ **немогућа**, нема решења, јер не постоји реалан број x такав да је производ $0 \cdot x = b \neq 0$.

Према томе, линеарна једначина може да има **једно решење** (један реалан број), **бесконачно много решења** (сви реални бројеви) или **нема решења** (скуп решења је празан, $\emptyset$).

Слика 8: Skup rešenja jednačine (str.65, [X])

Dok se geometrijski objekti uglavnom i dalje ne definišu eksplicitno kao skupovi tačaka (Slika 9, Slika 10, Slika 11), često se koristi odgovarajuća skupovna simbolika. Geometrijske figure se klasifikuju prema određenim svojstvima, a učenici ispituju odnose među njima. Trouglovi, četvorouglovi i drugi geometrijski objekti razvrstavaju se prema stranicama, uglovima i drugim karakteristikama. Podudarnost i sličnost takode se mogu posmatrati kao kriterijumi na osnovu kojih se izdvajaju određene klase objekata. Iako se takve klase u udžbenicima uglavnom ne označavaju formalno kao skupovi, njihova organizacija ima skupovnu strukturu. Kod geometrijskih konstrukcija i analize međusobnih položaja tačaka, pravih, figura i ravni koriste se pojmovi “припада” и “сadrži”, иако се не повезују увек са теоријом скупова. Процес рачунања обима и површине слођених фигура врло често подразумева посматрање figure као уније једноставнијих фигура чји се обим и површина лако рачунају.

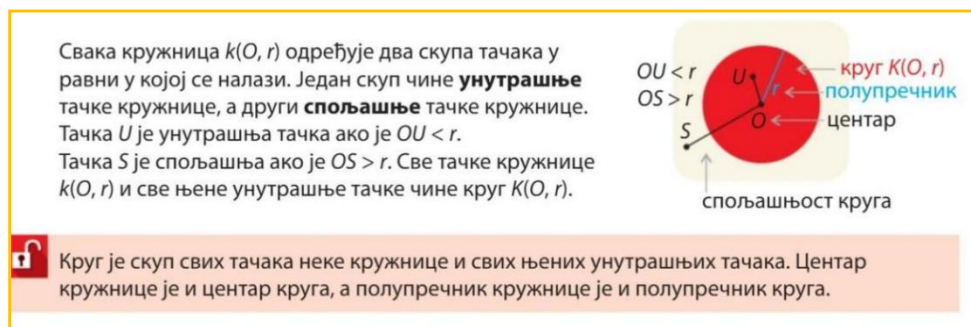
 Две различите тачке A и B заједно са свим тачкама које се налазе између њих (то јест са свим тачкама X таквим да је $A - X - B$) образују **дуж**, која се обележава AB или BA . Тачке A и B називају се **крајеви** дужи AB .



Слика 9: Duž (str.61, [VII])

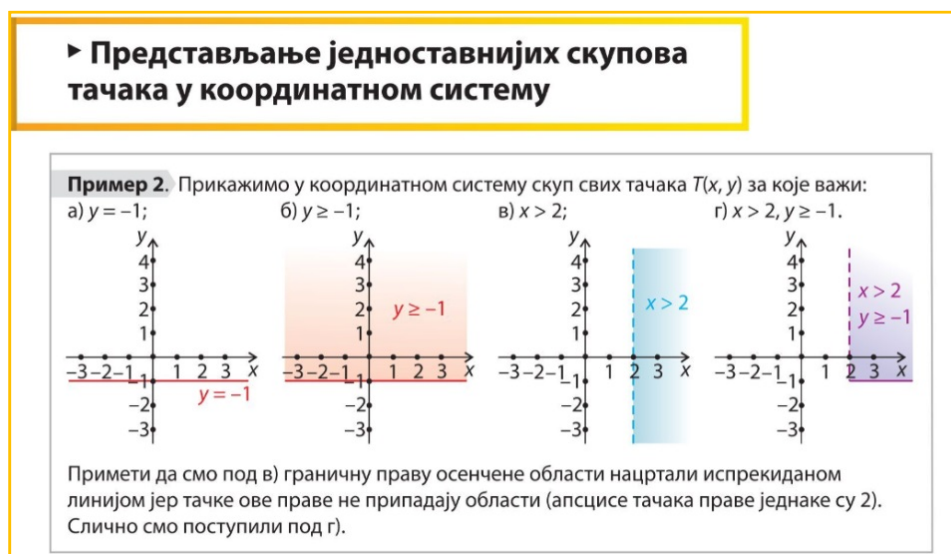
Затворена линија у равни чије су све тачке једнако удаљене од једне тачке те равни је **кружница** или **кружна линија**.

Слика 10: Kružnica (str.160, [IX])



Слика 11: Круг (стр.75, [VII])

У шестом и седмом разреду додатно се развија и способност да се математички објекти повезују на основу релација. Увођење координатног система представља пример у коме се тачке равни једнозначно описују уређеним паровима бројева (Слика 12). Иако се овде појам скупа не мора експлицитно истичати, присутна је идеја повезивања елемената различитих математичких структура. Time се стварају основе за касније разумевање функција као посебне врсте односа између скупова.



Слика 12: Представљање једноставнијих скупова тачака у координатном систему (стр.127, [VIII])

Појам скупа у осмом разреду остаје у позадини, али његова примена постaje још разноврснија. У области функција, једначина, неједначина и система једначина групни начин мишљења користи се за одређивање и тумачење скупова решења, док се у области бројева наставља рад са различитим skupovima.

Функција се може разумети као пресликавање између два скупа, односно као правило којим се елементима једног скупа придружују елементи другог скупа. У основној школи ова дефиниција најчешће није предмет формалне теоријске обраде, али

skupovna struktura funkcije predstavlja važnu pozadinu za razumevanje domena, skupa vrednosti i zavisnosti između veličina (Slika 13).

Скуп вредности аргумента за које је функција дефинисана назива се **област дефинисаности функције** или **домен** аргумента. Скуп одговарајућих вредности функције, за све вредности аргумента, назива се **кододомен** функције.

Slika 13: Domen i kodomen linearne funkcije (str.131, [X])

Grafik funkcije može se posmatrati kao skup tačaka čije koordinate zadovoljavaju određeni uslov (Slika 14). Učenik možda neće ovu činjenicu formalno izražavati skupovnim jezikom, ali pri povezivanju jednačine, tabele vrednosti i grafika zapravo radi sa skupom uređenih parova. Ovaj primer pokazuje da se skupovna struktura u višim razredima često nalazi na dubljem, konceptualnom nivou, bez potrebe da bude eksplicitno imenovana.

Скуп решења једначине $2x + y = 4$ представљају координате свих тачака праве, графика одговарајуће линеарне функције: $y = -2x + 4$. Изведени закључци важе за било коју линеарну једначину с две непознате. Дакле:

Скуп решења линеарне једначине с две непознате, $ax + by = c$, јесте **скуп свих тачака праве**, графика одговарајуће линеарне функције.

Slika 14: Skup rešenja linearne jednačine sa dve nepoznate (str.148, [X])

Rešavanje sistema linearnih jednačina podrazumeva pronalaženje zajedničkih rešenja, pa se rezultat može razumeti kao presek skupova rešenja pojedinačnih jednačina. Ako sistem ima jedno rešenje, ono se svodi na skup sa jednim elementom. Ako sistem nema rešenja, dobija se prazan skup, a u određenim slučajevima skup rešenja može biti beskonačan. Ovaj primer pokazuje kako se pojmovi uvedeni u petom razredu – prazan, konačan i beskonačan skup, kao i skupovne operacije mogu kasnije pojaviti u drugačijem matematičkom kontekstu.

Skup ima svoje mesto i u oblasti obrada podataka i statistika. Kada se podaci grupišu, klasifikuju i predstavljaju prema određenim karakteristikama, učenici implicitno koriste skupovni princip.

Posmatrano kroz svih osam razreda, može se uočiti da se pojam skupa razvija kroz najmanje tri međusobno povezane faze. Prvu fazu čini intuitivno i pretežno implicitno grupisanje objekata u nižim razredima. U drugoj fazi, koja kulminira u

petom razredu, skup postaje eksplicitni matematički pojam i učenici usvajaju skupovni jezik i simboliku. Treću fazu karakteriše postupna integracija skupovnog načina razmišljanja u druge matematičke sadržaje, pri čemu se sam pojam više ne izdvaja nužno kao poseban predmet učenja.

Važna razvojna karakteristika jeste postepeni prelazak od konkretnih ka apstraktnim elementima skupova. U početku su elementi skupova konkretni objekti koje učenik može neposredno da uoči. Kasnije to postaju brojevi, geometrijski objekti i rešenja matematičkih problema, a u višim razredima i apstraktniji pojmovi, poput uređenih parova. Istovremeno se menja i kriterijum formiranja skupa: od jednostavnog zajedničkog svojstva konkretnog objekta prelazi se na svojstva definisana matematičkim odnosima, jednačinama i funkcijama.

Još jedna značajna razvojna linija odnosi se na odnos između eksplicitne i implicitne upotrebe pojma. Eksplicitna obrada najizraženija je u petom razredu, kada se učenici neposredno upoznaju sa terminologijom i simbolikom teorije skupova. Pre i nakon tog perioda mnogo češće je prisutna implicitna upotreba. Međutim, implicitno prisustvo nije manje značajno. Činjenica da učenik može da razume skup rešenja, klasifikaciju brojeva ili međusobni odnos nekih objekata bez ponovnog eksplicitnog definisanja skupa pokazuje da se ovaj pojam postepeno ugrađuje u širi sistem matematičkog znanja.

Uloga skupa nije ograničena na jednu nastavnu oblast niti na jedan razred. On povezuje aritmetiku i algebru kroz skupove brojeva i skupove rešenja, geometriju kroz klasifikaciju i odnose pripadnosti, funkcije kroz domen, skup vrednosti i skup uređenih parova, a statistiku kroz grupisanje podataka. Pri tome se intenzitet eksplicitnog korišćenja skupovne terminologije smanjuje, dok se konceptualni značaj skupovnog načina mišljenja povećava.

Ovakva analiza pokazuje kako je pojam skupa zastupljen i kako se njegova uloga menja tokom osnovne škole, ali sama zastupljenost određenih sadržaja ne govori o tome kako ih učenici razumeju. Zbog toga je važno razmotriti rezultate istraživanja koja su ispitivala teškoće i zablude povezane sa razumevanjem pojma skupa.

IV Istraživanja o razumevanju pojma skupa

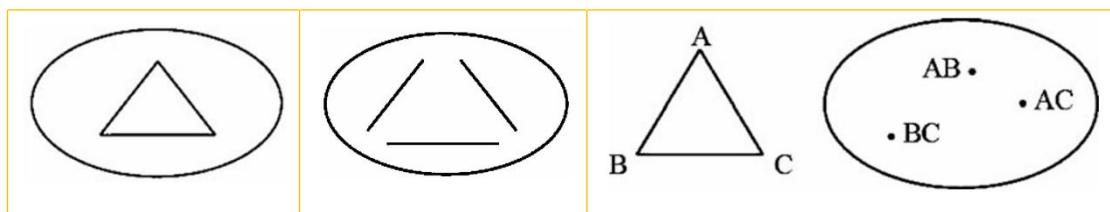
Analiza četiri istraživanja koja su se bavila razumevanjem pojma skupa pokazuje da teškoće u učenju teorije skupova nisu ograničene samo na početne faze školovanja, već se zadržavaju i kod starijih učenika i budućih nastavnika matematike. Posebno su značajni nalazi koji pokazuju da učenici i studenti mogu formalno poznavati određene definicije i simbole, a da ih ipak ne primenjuju pravilno kada se suoče sa složenijim ili nestandardnim primerima. Ako se rezultati ovih istraživanja posmatraju zajedno, može se izdvojiti pet međusobno povezanih problema:

- 1) intuitivna predstava o skupu kao o kolekciji
- 2) nemogućnost razlikovanja elementa skupa od podskupa
- 3) nerazumevanje pojma praznog skupa
- 4) teškoće sa određivanjem kardinalnosti složenih skupova
- 5) reprezentovanje matematičkog sadržaja i razumevanje matematičkog jezika.

U istraživanju koje je sproveo Giorgia T. Bagni ([II]) učestvovali su učenici različitih uzrasta. Prvi eksperiment obuhvatio je 16 jedanaestogodišnjaka, a drugi 25 petnaestogodišnjaka. Istraživanje je sprovedeno u okviru redovne nastave matematike, a analizirani su audio-snimci interakcija učenika i nastavnika. Iako je reč o kvalitativnom istraživanju i relativno malim uzorcima, njegovi nalazi veoma jasno pokazuju da je ispitanicima teško da razlikuju pripadnost elementa skupu i inkluziju skupova.

Prvi eksperiment bavio se relativno jednostavnim zadatkom: trebalo je slikom predstaviti skup stranica trougla. Učenica je najpre nacrtala ceo trougao. Nastavnik je ukazao da njen crtež nije nužno pogrešan, ali da se iz njega može zaključiti da skup ima samo jedan element, ceo trougao, umesto tri stranice. Učenica je odgovorila da je nacrtala tri stranice, dok je drugi učenik primetio da i on u crtežu pre svega vidi trougao, a ne tri odvojene stranice. Učenica je zatim pokušala da „razbije“ trougao i nacrtala tri duži. Međutim, ni takva reprezentacija nije u potpunosti zadovoljila zahtev zadatka, jer se izgubila informacija da su duži upravo stranice jednog trougla. Nastavnik je potom predložio korišćenje Ojler–Venovog dijagrama i uveo označavanje elemenata pomoću slova (Slika 15). Ovaj potez nije rešio problem.

Naprotiv, učenici su imali teškoće da prihvate da se konkretne stranice trougla mogu predstaviti tačkama ili simbolima unutar skupa. Rezultat pokazuje da vizuelna reprezentacija može biti korisna, ali da sama po sebi ne obezbeđuje razumevanje matematičkog značenja.



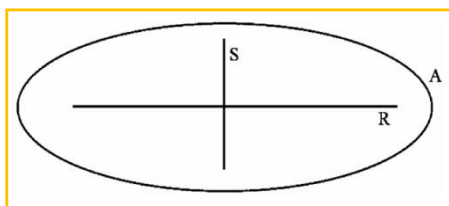
Slika 15: Različiti pokušaji rešavanja problema (str.265, 266, [II])

U drugom eksperimentu učenici su trebali da odgovore na pitanje da li skup A pripada skupu svih podskupova skupa I , odnosno da li važi $A \in \wp(I)$ ako je:

- I – skup svih tačaka ravni;
- R – skup tačaka jedne prave;
- S – skup tačaka druge prave koja je normalna na R ;
- A – skup čiji su elementi R i S .

Jedna učenica nacrtala je dve međusobno normalne prave i obeležila ih sa R i S . Zatim je oko slike nacrtala eliptičnu liniju i označila je sa A (Slika 16). Zaključila je da $A \in \wp(I)$ koristeći argumentaciju: partitivni skup od I sadrži sve podskupove od I , figure su sastavljene od tačaka ravni, A sadrži dve prave zbog čega je figura u ravni.

Učenica je skupove R i S posmatrala kao podskupove skupa A , a ne kao elemente skupa A . $A = \{R, S\}$ pa bi u slučaju da $A \in \wp(I)$ važilo da $\{R, S\} \in \wp(I)$. Dalje bi bilo $\{R, S\} \subseteq I$ i važilo bi $R \in I, S \in I$, što nije tačno. Greška je proizašla iz mešanja odnosa pripadnosti i podskupa, što pokazuje da osnovni intuitivni modeli mogu ostati prisutni i u starijem uzrastu ukoliko tokom nastave nisu dovoljno jasno povezani sa formalnim matematičkim značenjem. Zato problem nije samo u tome da učenici ne znaju simbol " $\in$ " ili " $\subset$ ", već u tome što ne razumeju koja vrsta odnosa se tim simbolima predstavlja.



Slika 16: Pokušaj rešavanja problema

U istraživanju koje su sproveli Rina Zazkis i Chris Gunn ([III]) učestvovalo je 46 budućih učitelja, koji su već imali nastavu iz osnova matematike i teorije skupova. Podaci su prikupljeni iz tri izvora: pisane provere znanja, rad studenata u okviru računarski zasnovanog ISETL projekta i intervjui.

U jednom od zadataka posmatran je skup $A = \{5, 7, \{5\}, \{5, 7, \{7\}\}\}$. Na pitanje da li je broj 5 element skupa A , tačno je odgovorilo 46 od 46 studenata (100%). Međutim, kada su se kao elementi pojavili drugi skupovi, uspešnost je opala. Da je $\{5\}$ element skupa A tačno je zaključilo 39 studenata (85%), dok je samo 28 studenata (60%) pravilno zaključilo da $\{7\}$ nije element skupa A . Studenti su imali još više poteškoća sa određivanjem kardinalnosti skupa. Samo 23 studenta (50%) tačno su odredila da skup A ima četiri elementa, čak 7 studenata nije dalo odgovor, dok su ostali navodili različite brojeve – 2, 3, 5, 6 ili 8. Ovi odgovori pokazuju da studenti nisu uvek pravilno identifikovali šta se u datoj strukturi smatra elementom skupa.

Posebno je upečatljiv nalaz koji se odnosi na podskupove. Iako je 44 od 46 studenata (96%) tačno odgovorilo da je $\{5\}$ podskup skupa A , detaljna analiza njihovih obrazloženja pokazala je da je približno trećina tačan odgovor dala iz pogrešnog razloga. Kod skupa $\{7\}$ uspešnost je pala na 63%, kod $\{\{5\}\}$ na 54%, dok je samo 7 od 46 studenata (15%) pravilno zaključilo da skup $\{5, 7, \{7\}\}$ nije podskup skupa A .

Ovi podaci veoma jasno ukazuju na jedan od centralnih problema u nastavi: učenici i studenti često usvajaju podskup kao „skup koji se nalazi unutar drugog skupa“, umesto da ga razumeju preko formalnog uslova koji zahteva da svaki element podskupa pripada datom skupu. Potrebno je mnogo češće koristiti primere u kojima se razlikuju odnosi $x \in A$ i $A \subset B$, uključujući situacije u kojima je sam skup element drugog skupa.

Rezultati istraživanja Fischbeina i Baltsan ([I]) pokazuju da se intuitivna predstava skupa kao „kolekcije“ zadržava i nakon formalnog uvođenja pojma skupa. Najviše problema uočeno je kod praznog skupa, jednočlanih skupova, zapisa u kome se ponavljaju isti elemenati i odnosa između kardinalnosti i jednakosti skupova. Kod

zadataka koji su zahtevali razumevanje praznog skupa, uspešnost je bila naročito niska. Kod učenika osmog razreda pravilno korišćenje koncepta praznog skupa bilo je približno 30%, dok je kod učenika desetog razreda iznosilo oko 20%. Ovaj nalaz pokazuje da pogrešna intuitivna predstava može ostati stabilna ukoliko se eksplicitno ne dovodi u pitanje kroz nastavu.

Slične zaključke u vezi sa praznim skupom izveli su i Zazkis i Gunn ([III]). Od 46 studenata, 42 (91%) tačno je prepoznalo da $\emptyset$ nije element skupa $A = \{5, 7, \{5\}, \{5, 7, \{7\}\}\}$. Međutim, kada je trebalo utvrditi da li je $\emptyset$ podskup tog skupa, tačan odgovor dalo je samo 20 studenata (43%). Razlika između $\emptyset$ i $\{\emptyset\}$ pokazala se kao poseban izvor nedoumica. Ovi rezultati pokazuju da studenti mogu poznavati određeno pravilo, ali ne moraju razumeti njegovu matematičku osnovu.

Istraživanje Sharif-Rasslan, Saleh i Abboud ([IV]) obuhvatilo je 120 budućih učitelja matematike, koji su rešavali zadatke predstavljene u različitim oblicima. Ispitanici su radili sa verbalnom, verbalno-logičkom i formalno-simboličkom reprezentacijom odnosa među skupovima, a zatim su te odnose predstavljali Venovim dijagramima. Rezultati pokazuju jasnu razliku u uspešnosti u zavisnosti od načina predstavljanja zadatka. Kod verbalne reprezentacije prosečan broj tačnih odgovora bio je 2.54 od 3, kod verbalno-logičke 2.03, dok je kod formalno-simboličke reprezentacije iznosio samo 1.30 od 3. Posebno je značajno da je kod jednog formalno-simboličkog zadatka tačan odgovor dalo samo 21.67% ispitanika, dok je kod jednog verbalnog zadatka uspešnost dostigla 97%. To znači da veliku ulogu u uspešnosti rešavanja zadatka igra način na koji je on predstavljen.

Zanimljiv deo istraživanja predstavlja zadatak koji je prvobitno pokrenuo interesovanje autora. U zadatku su definisana tri skupa:

- skup A – osobe koje čitaju novine svakog dana;
- skup B – osobe koje čitaju iste novine dva puta nedeljno;
- skup C – osobe koje čitaju novine petkom i nedeljom.

Od ispitanika se tražilo da odrede i pomoću Venovog dijagrama predstave odnos između skupova A , B i C . Matematički odnos između ovih skupova proizlazi iz značenja njihovih definicija. Ako osoba pripada skupu A , znači da novine čita svakog dana, pa ih, između ostalog, čita i petkom i nedeljom. Zbog toga svaki element skupa

A pripada i skupu C , odnosno $A \subseteq C$. Sa druge strane, svaka osoba koja pripada skupu C čita novine petkom i nedeljom, dakle čita ih dva puta nedeljno, zbog čega pripada i skupu B . Prema tome, važi: $A \subseteq C \subseteq B$. Pogrešan odgovor dalo je 119 od 120 studenata. Autori su utvrdili da su studenti pogrešno identifikovali predmet problema. Zadatak je bio formulisan tako da se skupovi odnose na ljude koji čitaju novine, ali su ispitanici u svojim odgovorima govorili o danima u nedelji tokom kojih se novine čitaju. Ovaj rezultat je posebno važan sa stanovišta nastave jer pokazuje da teškoća može nastati pre samog matematičkog zaključivanja – u fazi razumevanja teksta i identifikovanja skupova i njihovih elemenata.

Nalazi prethodnih istraživanja ukazuju da teškoće u razumevanju pojma skupa mogu opstajati i nakon njegovog formalnog uvođenja. Posebno se izdvajaju razumevanje kardinalnosti, praznog i beskonačnog skupa, ponavljanja elemenata i primene pojma skupa u različitim reprezentacijama i matematičkim kontekstima. Polazeći od ovih nalaza, u empirijskom delu rada ispitano je u kojoj meri su slične teškoće prisutne kod učenika šestog i osmog razreda osnovne škole.

IV Empirijsko istraživanje

Metodologija

Cilj istraživanja

Istraživanje je imalo za cilj ispitivanje razumevanja osnovnih pojmova teorije skupova kod učenika osnovne škole. Posebna pažnja usmerena je na identifikovanje tipičnih zabluda koje učenici ispoljavaju prilikom određivanja skupova, razumevanja jednakosti skupova, određivanja broja elemenata skupa i razumevanja geometrijskog pojma duži kao skupa tačaka. Istovremeno je analizirano da li se uspešnost učenika razlikuje u zavisnosti od razreda i školskog postignuća iz matematike.

Istraživačka pitanja

Istraživanje je bilo usmereno na sledeća pitanja:

1. U kojoj meri učenici šestog i osmog razreda razumeju osnovne pojmove teorije skupova?
2. Koje se konceptualne zablude najčešće javljaju prilikom rešavanja pojedinih zadataka?
3. Da li postoje razlike u uspešnosti između učenika šestog i osmog razreda?
4. Da li je uspešnost učenika povezana sa ocenom iz matematike?

Dizajn istraživanja

Istraživanje je sprovedeno primenom kvantitativnog, neeksperimentalnog istraživačkog dizajna preseka. Podaci su prikupljeni primenom pisanog testa namenjenog proceni razumevanja osnovnih pojmova teorije skupova. Analiza je obuhvatila i kvantitativne pokazatelje uspešnosti i kvalitativnu analizu karakterističnih odgovora učenika.

Uzorak

U istraživanju je učestvovalo ukupno 90 učenika, od čega 46 učenika šestog razreda i 44 učenika osmog razreda osnovne škole. Prosečna zaključna ocena iz

matematike na kraju prvog polugodišta iznosila je 4.44 ($SD = 0.72$) kod učenika šestog razreda i 4.16 ($SD = 0.88$) kod učenika osmog razreda. Razlika između razreda nije bila statistički značajna ($p = 0.413$), što ukazuje na međusobnu uporedivost posmatranih grupa u pogledu školskog uspeha iz matematike.

Instrument

Podaci su prikupljeni pomoću testa konstruisanog za potrebe ovog istraživanja, koji se sastoji od šest zadataka različitog tipa (Tabela 2). Test je osmišljen tako da obuhvati više aspekata razumevanja pojma skupa.

Zadatak	Naziv	Ispitivani aspekt
1	Zadavanje skupova	zadavanje nabranjem i zajedničkim svojstvom
2	Određivanje skupova	formiranje skupa na osnovu zadatog svojstva
3	Jednakost skupova	razumevanje jednakosti skupova
4	Kardinalnost skupova	broj elemenata, prazan i beskonačan skup
5	Skupovi u geometriji	razumevanje duži kao skupa tačaka
6	Primena pojma skupa	upotreba pojma „skup“ u sopstvenoj rečenici

Tabela 2: Opis zadataka

Prvi zadatak, *Zadavanje skupova*, ispituje sposobnost predstavljanja skupova pomoću zajedničkog svojstva i nabiranja elemenata. Drugi zadatak, *Određivanje skupova*, odnosi se na formiranje skupova na osnovu različitih kriterijuma i obuhvata konačne i beskonačne skupove, skupove delilaca i sadržalaca brojeva. Treći zadatak, *Jednakost skupova*, ispituje razumevanje jednakosti skupova kroz karakteristične primere u kojima se razlikuju redosled elemenata, sadržaj skupa, beskonačnost i ponavljanje elemenata. Četvrti zadatak, *Kardinalnost skupova*, procenjuje razumevanje kardinalnosti skupova, uključujući konačne, prazan i beskonačan skup. Peti zadatak, *Skupovi u geometriji*, predstavlja otvoreno pitanje kojim se ispituje razumevanje pojma duži kao geometrijskog objekta, pri čemu je posebna pažnja posvećena analizi tipičnih konceptualnih zabluda. Šesti zadatak zahteva od učenika da upotrebe pojam *skup* u sopstvenoj rečenici, čime se procenjuje sposobnost primene pojma u svakodnevnom ili matematičkom kontekstu. Na kraju testa učenici su procenjivali sopstvenu uspešnost rešavanja zadataka. Izgled testa dat je u prilogu A.

Procedura

Istraživanje je sprovedeno tokom redovne nastave matematike. Učenici su test rešavali individualno u papirnom obliku. Pre početka rada dobili su kratko uputstvo za rešavanje zadataka, uz naglasak da nije cilj ocenjivanje već ispitivanje načina razmišljanja i razumevanja osnovnih matematičkih pojmova. Vreme rešavanja nije bilo strogo ograničeno.

Obrada podataka

Podaci su obrađeni primenom deskriptivne i inferencijalne statistike. Za svaki zadatak izračunati su frekvencije, procenti tačnih odgovora i karakterističnih tipova grešaka. Razlike u uspešnosti između učenika šestog i osmog razreda analizirane su primenom z-testa za poređenje dve proporcije. Povezanost uspešnosti sa školskom ocenom iz matematike ispitivana je primenom Pearsonovog χ^2 testa nezavisnosti. Kod otvorenih pitanja sprovedena je kvalitativna analiza sadržaja odgovora, pri čemu su odgovori razvrstani u kategorije razvijene na osnovu analize odgovora učenika koje opisuju nivo razumevanja pojma i najčešće konceptualne zablude.

Rezultati

U Tabeli 3 prikazana je distribucija tačnih, netačnih i izostavljenih odgovora učenika na podzadatke u okviru prva četiri zadatka instrumenta, dok Grafik 1 prikazuje procenat tačnih odgovora na svakom podzadatku. Rezultati ukazuju na velike razlike u uspešnosti u zavisnosti od sadržaja i zahteva pojedinih podzadataka.

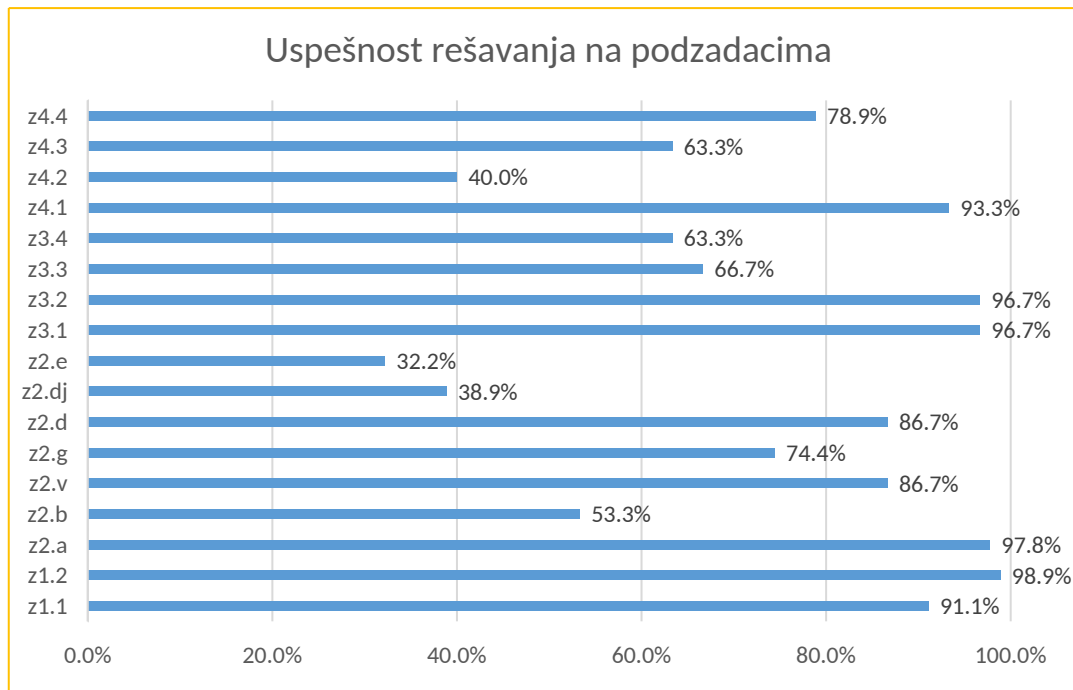
Najviši procenat tačnih odgovora ostvaren je u podzadacima 1.2 (zadavanje jednostavnog skupa), 2.a (određivanje skupa slova jedne reči), 3.1 i 3.2 (procenjivanje jednakosti skupova u jednostavnijim primerima), u kojima je tačan odgovor dalo više od 95% učenika. Nasuprot tome, najmanja uspešnost zabeležena je pri određivanju skupa sadržalaca broja 5 (32.2%), skupa delilaca broja 12 (38.9%) i broja elemenata praznog skupa (40.0%).

Uočeni raspon rezultata pokazuje da uspešnost nije zavisila samo od pripadnosti podzadatka određenoj oblasti, već i od njegovog konkretnog sadržaja. Tako su, na primer, u okviru određivanja skupova rezultati varirali od 32.2% do

97.8% tačnih odgovora, dok su se u okviru kardinalnosti skupova kretali od 40.0% do 93.3%. U nastavku su rezultati detaljnije analizirani prema pojedinim zadacima, uključujući razlike između razreda i povezanost uspešnosti sa ocenom iz matematike.

Zadatak	Podzadatak	Tačan odgovor, n (%)	Netačan odgovor, n (%)	Bez odgovora, n (%)
Zadavanje skupova	1.1	82 (91.1)	4 (4.4)	4 (4.4)
	1.2	89 (98.9)	0 (0.0)	1 (1.1)
Određivanje skupova	2.a	88 (97.8)	1 (1.1)	1 (1.1)
	2.b	48 (53.3)	41 (45.6)	1 (1.1)
	2.v	78 (86.7)	12 (13.3)	0 (0.0)
	2.g	67 (74.4)	23 (25.6)	0 (0.0)
	2.d	78 (86.7)	10 (11.1)	2 (2.2)
	2.đ	35 (38.9)	51 (56.7)	4 (4.4)
	2.e	29 (32.2)	48 (53.3)	13 (14.4)
Jednakost skupova	3.1	87 (96.7)	2 (2.2)	1 (1.1)
	3.2	87 (96.7)	2 (2.2)	1 (1.1)
	3.3	60 (66.7)	30 (33.3)	0 (0.0)
	3.4	57 (63.3)	30 (33.3)	3 (3.3)
Kardinalnost skupova	4.1	84 (93.3)	5 (5.6)	1 (1.1)
	4.2	36 (40.0)	34 (37.8)	20 (22.2)
	4.3	57 (63.3)	32 (35.6)	1 (1.1)
	4.4	71 (78.9)	16 (17.8)	3 (3.3)

Tabela 3: Distribucija odgovora na prva četiri zadatka



Grafik 1: Uspešnost rešavanja na podzadacima

Sledi i detaljna analiza pojedinih aspekata razumevanja pojma skupa, sa posebnim osvrtom na tipične greške i konceptualne zablude koje su učenici ispoljavali pri rešavanju zadataka.

Zadatak - Zadavanje skupova

Prvi zadatak ispitivao je razumevanje zadavanja skupova u jednostavnim i učenicima bliskim kontekstima (Slika 17).

1. Skup je zadat na dva načina. Popuni prazna polja u tabeli:

Заједничко својство	Набрајање елемената
Скуп свих самогласника.	{ а, е, и, о, у }
Скуп свих боја на семафору.	
	{ пролеће, лето, јесен, зима }

Slika 17: Zadatak - Zadavanje skupova

Posmatrano na nivou celog uzorka (Tabela 3), učenici su bili statistički značajno uspešniji u podzadatku 1.2 nego u podzadatku 1.1 (z -vrednost = 2.4, p = 0.02). U podzadatku 1.2 gotovo svi učenici (98.9%) tačno su naveli godišnja doba, dok je podzadatak 1.1 tačno rešilo 91.1% učenika.

Kod podzadatka 1.1 zabeležena su četiri netačna odgovora. Jedan učenik umesto elemenata skupa naveo je broj 3, odnosno broj boja na semaforu. Jedan učenik kao elemente skupa naveo je slova reči „semafor“, dok su dva učenika navela i boje koje se ne nalaze na semaforu. Ove greške ukazuju da mali broj učenika nije razlikovao pojam skupa od njegovog opisa ili nije dovoljno pažljivo analizirao uslov zadatka.

Poređenje učenika VI i VIII razreda (Tabela 4) nije pokazalo statistički značajne razlike u uspešnosti rešavanja ni u podzadatku 1.1 ($z=0.0659$, $p = 0.947$), ni u podzadatku 1.2 ($z=0.9835$, $p = 0.325$).

razred	<i>n</i>	tačno	pogrešno	bez odgovora	% tačnih	p-vrednost
zadatak 1.1						
VI	46	42	1	3	91.30%	0.947
VIII	44	40	3	1	90.91%	
zadatak 1.2						
VI	46	45	0	1	97.83%	0.325
VIII	44	44	0	0	100.00%	

Tabela 4: Uspešnost rešavanja prvog zadatka po razredima

Povezanost između ocene iz matematike i uspešnosti rešavanja bila je veoma slaba ($r = 0.09$ za podzadatak 1.1 i $r = 0.06$ za podzadatak 1.2) i nije bila statistički značajna. Ovakav nalaz verovatno je posledica veoma visokog procenta tačnih odgovora, zbog čega zadatak nije dovoljno razlikovao učenike prema nivou matematičkog postignuća.

Zadatak - Određivanje skupova

Drugi zadatak ispitivao je sposobnost učenika da odrede skup nabiranjem njegovih elemenata na osnovu zadatog svojstva. Zadatak je obuhvatao sedam podzadataka različitog sadržaja: određivanje skupa slova date reči, skupova prirodnih brojeva koji zadovoljavaju određeni uslov, kao i skupova delilaca i sadržalaca datog broja (Slika 18).

Rezultati prikazani u Tabeli 3 pokazuju znatne razlike u uspešnosti rešavanja pojedinih podzadataka, ($\chi^2 = 161.8$, $p < 0.001$). Prosečna uspešnost na svih sedam podzadataka iznosila je 67.1%. Statistički značajno veću uspešnost od prosečne učenici su ostvarili u podzadacima 2.a, 2.v i 2.d, dok je uspešnost u podzadacima 2.b,

2.đ i 2.e bila statistički značajno niža od prosečne. U podzadatku 2.g uspešnost je iznosila 74.4% i nije se statistički značajno razlikovala od prosečne uspešnosti.

2. a) Одреди скуп А који чине сва слова речи САН.

A={_____}

б) Одреди скуп В који чине сва слова речи АНАНАС.

B={_____}

в) Одреди скуп С који садржи све природне бројеве мање од 5.

C={_____}

г) Одреди скуп D који садржи све природне бројеве веће од 5.

D={_____}

д) Одреди скуп E који садржи све природне бројеве мање од 13 дељиве са 2.

E={_____}

ђ) Одреди скуп F који садржи све делиоце броја 12.

F={_____}

е) Одреди скуп G који садржи све садржаоце броја 5.

G={_____}

Slika 18: Zadatak - Određivanje skupova

Najveći procenat tačnih odgovora zabeležen je u podzadatku 2.a, u kojem je trebalo odrediti skup slova reči san (97.8%). Visoka uspešnost ostvarena je i pri određivanju skupa prirodnih brojeva manjih od 5 i skupa parnih prirodnih brojeva manjih od 13, sa po 86.7% tačnih odgovora. Nasuprot tome, učenici su najmanje bili uspešni pri određivanju skupa sadržalaca broja 5 (32.2%) i skupa delilaca broja 12 (38.9%). Relativno niska uspešnost ostvarena je i u podzadatku 2.b, u kojem je trebalo odrediti skup slova reči ananas (53.3%).

Analiza netačnih odgovora pokazala je nekoliko karakterističnih teškoća u određivanju elemenata skupa. Najčešća greška u podzadatku 2.b bila je navođenje skupa u obliku $B = \{a,n,a,n,a,s\}$, pri čemu su učenici ponavljali slova onoliko puta koliko se pojavljuju u reči. To pokazuje da deo učenika nije primenio svojstvo prema kojem se isti element u skupu navodi samo jednom.

U podzadatku 2.v, u kojem je trebalo odrediti skup prirodnih brojeva manjih od 5, pojedini učenici uključivali su i broj 5, dok su drugi u skup unosili nulu ili negativne cele brojeve. Kod dela učenika uočeno je i nerazlikovanje uslova „manje od

5“ od drugih svojstava brojeva, kao što su parnost ili neparnost.

U podzadatku 2.g, koji se odnosio na prirodne brojeve veće od 5, najčešća greška bila je navođenje samo konačnog broja elemenata, na primer $\{6,7,8,9,10\}$, bez oznake da se niz nastavlja. Pojedini učenici uključili su i broj 5, čime nisu pravilno primenili strogu nejednakost, dok su neki umesto nabiranja elemenata koristili zapis nejednakosti ili intervala. Zabeleženi su i odgovori koji su pokazivali da učenici prepoznaju da je reč o beskonačnom skupu, ali nisu koristili matematički ispravan zapis njegovih elemenata.

U podzadatku 2.d, u kojem je trebalo odrediti skup parnih prirodnih brojeva manjih od 13, najčešće su izostavljeni jedan ili više elemenata. Rede greške odnosile su se na uključivanje broja 1, navođenje svih prirodnih brojeva manjih od 13 ili formiranje beskonačnog skupa parnih brojeva, bez uvažavanja gornje granice zadate uslovom.

Najizraženije teškoće u određivanju konačnih skupova uočene su pri određivanju skupa delilaca broja 12. Među netačnim odgovorima dominirali su nepotpuni skupovi delilaca. Najčešće je izostavljen broj 1, broj 12 ili oba ova elementa, a kod dela učenika izostavljeni su i drugi delioci. Ovakvi odgovori pokazuju da učenici često prepoznaju samo „očigledne“ delioce, ali ne proveravaju sistematski sve brojeve koji dele 12 bez ostatka.

Kod manjeg broja učenika uočeno je mešanje pojmova delilac i sadržalac. Umesto delilaca broja 12, oni su navodili njegove sadržaoce, kao što su 24, 36 i 48, ili su navodili parne brojeve do 12. Zabeleženi su i odgovori u kojima su navedeni svi prirodni brojevi od 1 do 12, što ukazuje na razumevanje izraza „delioci broja 12“ kao brojeva koji su manji od ili jednaki broju 12, bez provere uslova deljivosti.

Najveće teškoće učenici su imali pri određivanju skupa sadržalaca broja 5. U netačnim odgovorima uočeno je nekoliko različitih obrazaca. Jedna grupa učenika poistovetila je sadržaoce broja 5 sa brojevima čija je cifra jedinica 5, navodeći, na primer, 5, 15, 25 i 35. Druga grupa navodila je sve prirodne brojeve manje od ili jednake broju 5, dok su pojedini učenici naveli samo broj 5 ili brojeve 1 i 5. Kod dela učenika došlo je do zamene sadržalaca broja 5 aritmetičkim nizom sa razlikom 5 koji

Samo 10 učenika, odnosno 11.1% uzorka, tačno je rešilo svih sedam podzadataka. Prosečan broj tačno rešenih podzadataka iznosio je 4.70 od mogućih sedam ($SD = 1.46$). Ovi rezultati ukazuju na to da određivanje elemenata skupa nije predstavljalo jedinstvenu i podjednako savladanu sposobnost, već je uspešnost u velikoj meri zavisila od svojstva na osnovu kojeg je skup trebalo odrediti.

Učenici VI razreda ostvarili su nešto višu uspešnost u podzadacima 2.v i 2.g, dok su učenici VIII razreda bili uspešniji u podzadacima 2.đ i 2.e, ali ove razlike nisu bile statistički značajne. U podzadacima 2.a i 2.d rezultati učenika dva razreda bili su gotovo jednaki.

razred	<i>n</i>	tačno	pogrešno	bez odgovora	%tačnih	p-vrednost
zadatak 2.a						
VI	46	45	0	1	97.83%	0.974
VIII	44	43	1	0	97.73%	
zadatak 2.b						
VI	46	19	26	1	41.30%	0.019
VIII	44	29	15	0	65.91%	
zadatak 2.v						
VI	46	41	5	0	89.13%	0.482
VIII	44	37	7	0	84.09%	
zadatak 2.g						
VI	46	38	8	0	82.61%	0.069
VIII	44	29	15	0	65.91%	
zadatak 2.d						

VI	46	40	5	1	86.96%	0.933
VIII	44	38	5	1	86.36%	
zadatak 2.đ						
VI	46	14	29	3	30.43%	0.092
VIII	44	21	22	1	47.73%	
zadatak 2.e						
VI	46	12	27	7	26.09%	0.203
VIII	44	17	21	6	38.64%	

Tabela 5: Uspešnost rešavanja drugog zadatka po razredima

Povezanost između ocene iz matematike i uspešnosti rešavanja bila je pozitivna u svih sedam podzadataka, što ukazuje na tendenciju da učenici sa višom ocenom iz matematike češće daju tačne odgovore. Povezanost nije bila statistički značajna u podzadacima 2.a ($p = 0.07$) i 2.đ ($p = 0.19$). Statistički značajna, ali slaba pozitivna povezanost utvrđena je u podzadacima 2.b ($p = 0.29$), 2.v ($p = 0.23$), 2.d ($p = 0.21$) i 2.e ($p = 0.28$). Najizraženija povezanost utvrđena je u podzadatku 2.g ($p = 0.41$), što predstavlja pozitivnu povezanost umerenog intenziteta.

Zadatak - Jednakost skupova

Treći zadatak ispitivao je razumevanje jednakosti skupova kroz četiri binarna pitanja (tačno/netačno) u kojima su učenici procenjivali da li su dati parovi skupova jednaki (Slika 19). Podzadaci su obuhvatali četiri osnovne situacije: promenu redosleda elemenata, promenu jednog elementa, poređenje konačnog i beskonačnog skupa, kao i uticaj ponavljanja elemenata na jednakost skupova.

3. У табели су дати скупови А и В. Ако су скупови А и В једнаки заокружи Т, ако нису заокружи Н.

$A=\{1, 2, 3, 4\}$ и $B=\{2, 1, 3, 4\}$	Т	Н
$A=\{2, 3, 4, 5\}$ и $B=\{2, 3, 4, 6\}$	Т	Н
$A=\{1, 2, 3, 4\}$ и $B=\{1, 2, 3, 4, \dots\}$	Т	Н
$A=\{1, 2\}$ и $B=\{1, 2, 1, 2, 1, 2\}$	Т	Н

Slika 19: Zadatak - Jednakost skupova

Rezultati prikazani u Tabeli 3 pokazuju da je uspešnost učenika značajno zavisila od vrste primera jednakosti skupova ($\chi^2 = 58.75$, $p = 0.001$). Prosečna

uspešnost na sva četiri podzadatka iznosila je 80.9%. Statistički značajno iznad proseka rešeni su podzadaci 3.1 i 3.2, dok je uspešnost u podzadacima 3.3 i 3.4 bila statistički značajno niža od prosečne. Gotovo svi učenici pravilno su procenili jednakost skupova u podzadacima 3.1 i 3.2 (96.7%), dok je uspešnost u podzadacima 3.3 i 3.4 opala na 66.7% i 63.3%. Pri tumačenju rezultata treba imati u vidu da su podzadaci bili binarnog tipa (tačno/netačno), što omogućava određeni uticaj slučajnog pogađanja.

razred	<i>n</i>	tačno	pogrešno	bez odgovora	%tačnih	p-vrednost
zadatak 3.1						
VI	46	43	2	1	93.48%	0.085
VIII	44	44	0	0	100.00%	
zadatak 3.2						
VI	46	43	2	1	93.48%	0.085
VIII	44	44	0	0	100.00%	
zadatak 3.3						
VI	46	27	19	0	58.70%	0.101
VIII	44	33	11	0	75.00%	
zadatak 3.4						
VI	46	21	24	1	45.65%	< 0.001
VIII	44	36	6	2	81.82%	

Tabela 6: Uspešnost rešavanja trećeg zadatka po razredima

Rezultati prikazani u Tabeli 6 pokazuju da između učenika VI i VIII razreda nije bilo statistički značajnih razlika u podzadacima 3.1, 3.2 i 3.3. Statistički značajna razlika utvrđena je jedino u podzadatku 3.4 ($p < 0.001$), u kojem su učenici VIII razreda bili znatno uspešniji od učenika VI razreda (81.8% prema 45.7%).

Posebno je zanimljivo da je uspešnost u podzadatku 3.4 bila značajno povezana sa uspešnošću u podzadatku 2.b ($\chi^2 = 11.1$, $p < 0.001$). Ovakav nalaz je očekivan, budući da oba podzadatka zahtevaju razumevanje da se isti element u skupu navodi samo jednom, nezavisno od broja njegovih pojavljivanja.

Povezanost između ocene iz matematike i uspešnosti rešavanja bila je veoma slaba ($\rho = 0.02$; $\rho = -0.08$; $\rho = 0.07$; i $\rho = 0.09$) i nije bila statistički značajna.

Zadatak - Kardinalnost skupova

Četvrti zadatak ispitivao je razumevanje kardinalnosti skupova. Učenici su određivali broj elemenata četiri različita tipa skupova: konačnog skupa sa eksplicitno navedenim elementima, praznog skupa, konačnog skupa zadatog pomoću tri tačke i beskonačnog skupa prirodnih brojeva (Slika 20).

4. Попуни табелу:

Скуп	Број елемената скупа
{ 1, 2, 3 }	3
{ 1, 10, 100, 1000 }	
{ }	
{ 3, 4, 5 ... 15 }	
{ 1, 2, 3, 4, 5, ... }	

Slika 20: Zadatak - Kardinalnost skupova

Rezultati prikazani u Tabeli 3 pokazuju da je uspešnost učenika značajno zavisila od vrste skupa čiju je kardinalnost trebalo odrediti ($\chi^2 = 65.57$, $p < 0.001$). Prosečna uspešnost na četiri podzadatka iznosila je 68.9%. Statistički značajno iznad proseka rešen je podzadatak 4.1, dok je uspešnost u podzadatku 4.2 bila statistički značajno ispod proseka. Uspešnost u podzadacima 4.3 i 4.4 nije se statistički značajno razlikovala od prosečne.

Podzadatak 4.1 gotovo svi učenici rešili su tačno (93.3%). Zabeleženo je svega pet netačnih odgovora. Pojedini učenici umesto broja elemenata nastavili su niz dodavanjem novog elementa (10000), dok su neki kao odgovor naveli poslednji element skupa. Kod jednog učenika uočeno je da je u svim podzadacima sabirao elemente skupa, što ukazuje na potpuno pogrešno razumevanje zahteva zadatka.

Najveće teškoće učenici su imali u određivanju kardinalnosti praznog skupa. Iako je tačan odgovor bio 0, čak 28 učenika dopisalo je elemente u prazan skup, a zatim navelo njihov broj. Ovakvi odgovori pokazuju da deo učenika nije razumeo značenje oznake praznog skupa, već ju je doživljavao kao prazno mesto koje treba popuniti.

Kod određivanja broja elemenata skupa $\{3,4,5,\dots,15\}$ najčešća greška bila je odgovor 12, koji je dalo 18 učenika. Ovakav odgovor ukazuje da su učenici broj elemenata određivali oduzimanjem krajnjih vrednosti ($15-3 = 12$), zanemarujući činjenicu da su oba granična elementa sastavni deo skupa. Šest učenika potpuno je zanemarilo oznaku "...", navodeći da skup ima četiri elementa, dok je manji broj učenika umesto broja elemenata navodio same elemente skupa.

Kod beskonačnog skupa prirodnih brojeva najveći broj pogrešnih odgovora nastao je zanemarivanjem oznake "...". Učenici su navodili da skup ima pet elemenata, računajući samo eksplicitno zapisane brojeve. Ovakvi odgovori ukazuju da deo učenika nije uočio da se niz prirodnih brojeva nastavlja beskonačno.

razred		tačno	pogrešno	bez odgovora	%tačnih	p-vrednost
zadatak 4.1						
VI	46	43	2	1	93.48%	0.954
VIII	44	41	3	0	93.18%	
zadatak 4.2						
VI	46	17	20	9	36.96%	0.547
VIII	44	19	14	11	43.18%	
zadatak 4.3						
VI	46	30	15	1	65.22%	0.704
VIII	44	27	17	0	61.36%	
zadatak 4.4						
VI	46	35	8	3	76.09%	0.505
VIII	44	36	8	0	81.82%	

Tabela 7: Uspešnost rešavanja četvrtog zadatka po razredima

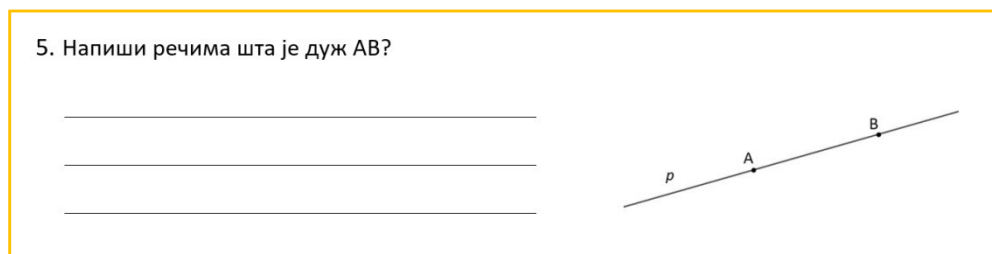
Rezultati prikazani u Tabeli 7 pokazuju da ni u jednom podzadatku nije utvrđena statistički značajna razlika između učenika VI i VIII razreda. To ukazuje da su uočene teškoće u razumevanju kardinalnosti skupova podjednako prisutne kod učenika oba razreda.

Povezanost između ocene iz matematike i uspešnosti rešavanja bila je pozitivna u svim podzadacima. Statistički značajna, ali slaba korelacija utvrđena je u podzadacima 4.1 ($\rho = 0.16$; $p = 0.048$) i 4.4 ($\rho = 0.23$; $p = 0.014$), dok u podzadacima 4.2 i 4.3 nije uočena statistički značajna povezanost. Ovakvi rezultati ukazuju da su učenici sa višom ocenom iz matematike bili nešto uspešniji u

određivanju kardinalnosti skupova, ali da školski uspeh nije bio značajan činilac u rešavanju svih tipova zadataka.

Zadatak - Skupovi u geometriji

Peti zadatak imao je za cilj da ispita u kojoj meri učenici koncept skupa primenjuju na geometrijske objekte. Od učenika je traženo da svojim rečima odgovore na pitanje „Šta je duž AB ?“, pri čemu je uz pitanje dat grafički prikaz prave p sa označenim tačkama A i B (Slika 21). Za razliku od prethodnih zadataka, ovaj zadatak nije zahtevao izbor ili dopunjavanje odgovora, već je omogućio učenicima da slobodno iskažu svoje razumevanje pojma duži.



Slika 21: Zadatak - Skupovi u geometriji

Odgovori učenika grupisani su u pet kategorija prema stepenu razumevanja pojma duži (Tabela 8). Samo devet učenika (10.0%) dalo je potpuno tačan odgovor. Od toga su dva učenika (2.2%) definisala duž kao skup svih tačaka između krajnjih tačaka, dok je sedam učenika (7.8%) navelo ispravnu geometrijsku definiciju duži kao dela prave ograničenog dvema tačkama.

Kod	Kategorija	Tačnost	n (%)
1	Formalno skupovno razumevanje (skup svih tačaka...)	potpuno tačno	2 (2.2)
2	Ispravna geometrijska definicija (deo prave,...)	potpuno tačno	7 (7.8)
3	Delimično razumevanje: intuitivno razumevanje (linija, spoj tačaka, prava sa početkom i krajem...), nepotpun ("Duž AB se nalazi na pravoj p ") ili samo opisni odgovor	delimično tačno	41 (45.6)
4	Konceptualna zabluda (rastojanje, dužina, prava AB , ostale pogrešne definicije)	netačno	29 (32.2)
5	Bez odgovora / nerazumljiv odgovor	bez odgovora	11 (12.2)

Tabela 8: Razumevanje pojma duži po kategorijama

Najbrojniju grupu činili su učenici čiji su odgovori svrstani u kategoriju delimičnog razumevanja (45.6%). Ovi učenici prepoznavali su duž kao geometrijski objekat, ali su davali nepotpune ili opisne odgovore, poput „linija“, „spoj dve tačke“, „prava sa početkom i krajem“ ili su samo opisivali položaj duži na prikazanoj pravoj. Takvi odgovori ukazuju da učenici imaju intuitivnu predstavu o pojmu duži, ali je njihovo razumevanje nedovoljno precizno.

Konceptualne zablude uočene su kod 29 učenika (32.2%). Najčešće su duž poistovećivali sa njenom dužinom ili rastojanjem između dve tačke, dok su pojedini odgovori ukazivali na poistovećivanje duži sa pravom ili drugim geometrijskim pojmovima. Ovakvi odgovori pokazuju da značajan broj učenika ne razlikuje geometrijski objekat od njegove mere ili pojedinih njegovih svojstava.

Distribucija odgovora bila je gotovo identična kod učenika VI i VIII razreda. Jedina dva odgovora koja su predstavljala formalno skupovno definisanje duži dali su učenici VIII razreda, ali zbog njihovog veoma malog broja nije moguće govoriti o razlici između razreda.

Zadatak - Primena pojma skup

Šesti zadatak imao je za cilj da ispita na koji način će učenici, nakon rešenog testa, upotrebiti reč *skup* u sopstvenoj rečenici (Prilog A). Odgovori učenika grupisani su u pet kategorija (Tabela 9).

Najbrojniju grupu (36.7%) činili su učenici koji su u odgovorima koristili reč *skup* kao matematički pojam. Odgovori su bili raznoliki. Odnosili su se skupove brojeva, najčešće skup prirodnih brojeva ili na skupove zadate u samoj rečenici. Određene rečenice su potpuno matematički korektne, čak deluju kao tekst koji bi se mogao naći u udžbenicima matematike. U pojedinim odgovorima uočen je nepravilan matematički zapis.

U 28.9% odgovora pojam *skup* povezan je sa grupom živih bića, dok se u 18.9% odgovora *skup* odnosi na grupu predmeta, objekata, stvari itd. Interesantno je da su učenici u svojim odgovorima uspeli da povežu traženi pojam sa predmetima: srpski jezik, biologija i hemija.

Kod	Kategorija	Primeri odgovora	n (%)
1	Skup živih bića	-Moje odeljenje je skup neke dece šestog razreda. -Aleksa, Mihajlo i Sergej spadaju u skup učenika. -Zoološki vrt čini skup različitih vrsta životinja. -Školu čini skup osoblja, nastavnika i đaka. -Skup stanovnika u selu je 123. -Danas će se održati skup odeljenskog veća.	26 (28.9)
2	Skup stvari, pojmova, objekata	-Skup svih samoglasnika je a,e,i,o,u. -Ja sam skup ćelija koje me grade. -U kutiji "čep za hendikep" se nalazi skup čepova. -Duga je skup boja. -Skup svih predmeta viših razreda je: {srpski, matematika,...} -Skup svih elemenata je periodni sistem.	17 (18.9)
3	Skup kao matematički pojam	-Skup A različit je od skupa B. -Skup A ima 40 elemenata. -Unija skupova A i B gde su $A=\{2,3\}$ $B=\{3,4\}$. Unija je 2,3,4. -Skup A,B,C,D je jednak skupu D,C,B,A. -Skup prirodnih brojeva je beskonačan. -Skup može da bude krug sa nekim elementima unutar njega. -U matematici razlikujemo skup prirodnih brojeva i skup celih brojeva. -Koliko elemenata ima u ovom skupu $A=\{1,2,3,4,5\}$? -Odredi skup brojeva većih od 10 a manjih od 25. -Skup brojeva od 1 do 10 je: (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10).	33 (36.7)
4	Skup kao skupocen	-Ova majica je poskupela. -Ovaj sako je baš skupocen.	2 (2.2)
5	Bez odgovora / nerazumljiv odgovor	bez odgovora	12 (13.3)

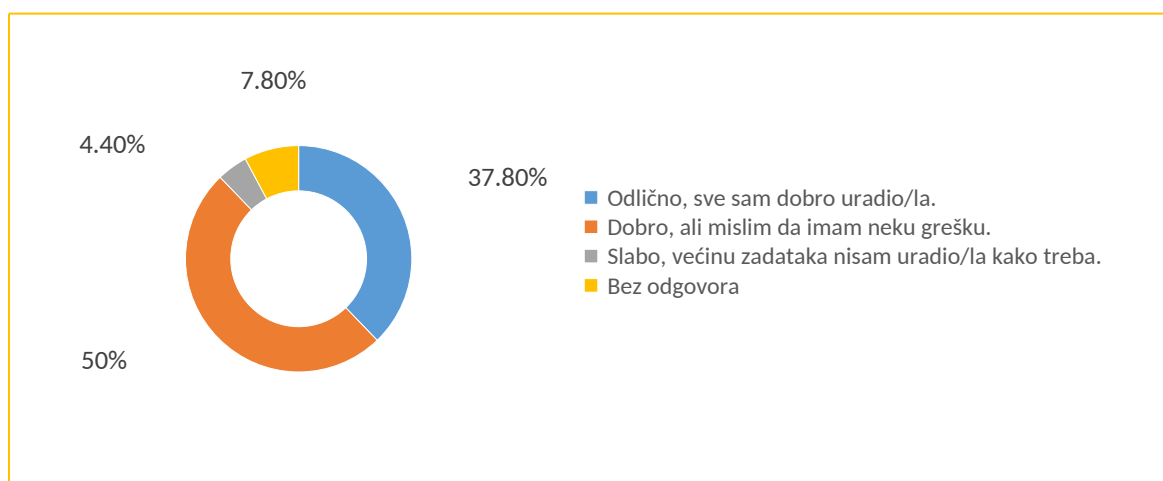
Tabela 9: Upotreba reči skup u sopstvenoj rečenici po kategorijama

Samo dva učenika (2.2%) pojam *skup* doživela su kao reč *skupocen*, dok je 12 učenika (13.3%) pitanje ostavilo bez odgovora ili dalo nerazuman odgovor (npr. kao

odgovor data je sama reč *skup*). Ukupno 76 učenika (84.4%) uspešno je iskoristilo reč *skup* u sopstvenoj rečenici.

Zadatak - Samoprocena

Na kraju testa učenici su procenjivali sopstvenu uspešnost u rešavanju testa (Prilog A). Procentualnu raspodelu odgovora po kategorijama prikazuje Grafik 2. Polovina učenika opisala je svoju uspešnost rečima “Dobro, ali mislim da imam neku grešku”, dok su 34 učenika odabrala odgovor “Odlično, sve sam dobro uradio/la”. Samo 4 učenika procenila su rezultat kao slab, dok 7 učenika nije dalo odgovor.



Grafik 2: Procena sopstvene uspešnosti u rešavanju zadataka

Diskusija

Cilj ovog istraživanja bio je da se: ispita razumevanje osnovnih pojmova teorije skupova kod učenika osnovne škole, identifikuju tipične konceptualne zablude i utvrdi njihova povezanost sa razredom i školskim uspehom iz matematike. Dobijeni rezultati pokazuju da učenici uglavnom uspešno rešavaju zadatke koji zahtevaju prepoznavanje ili reprodukciju jednostavnih primera, ali da imaju znatno više teškoća kada je potrebno primeniti osnovna svojstva skupa u novim ili složenijim situacijama. Ovakav nalaz potvrđuje da visoka uspešnost na pojedinim zadacima ne mora nužno da odražava razvijeno konceptualno razumevanje pojma skupa.

Jedan od najvažnijih nalaza istraživanja jeste da razumevanje pojma skupa nije jedinstvena sposobnost. Uspešnost učenika značajno je varirala između različitih

aspekata pojma skupa. Dok su gotovo svi učenici uspešno rešavali jednostavne zadatke zadavanja skupova ili prepoznavanja jednakosti skupova u očiglednim primerima, znatno manje uspešni bili su u zadacima koji su zahtevali razumevanje beskonačnih skupova, kardinalnosti, delilaca i sadržalaca brojeva ili primenu teorije skupova u geometrijskom kontekstu. Ovakvi rezultati ukazuju da učenici pojedina svojstva skupa usvajaju izolovano, bez njihovog međusobnog povezivanja u jedinstven konceptualni sistem.

Ovakav nalaz u skladu je sa rezultatima prethodnih istraživanja, koja pokazuju da formalno poznavanje definicija i simbola ne podrazumeva nužno i njihovu pravilnu primenu u složenijim ili nestandardnim situacijama. Bagni ([II]), Zazkis i Gunn ([III]), Fischbein i Baltsan ([I]), kao i Sharif-Rasslan i saradnici ([IV]), u različitim uzorcima i kontekstima identifikovali su teškoće povezane sa razlikovanjem elemenata i podskupova, razumevanjem praznog skupa i kardinalnosti, kao i povezivanjem različitih reprezentacija skupova. Zajednički nalazi ovih istraživanja ukazuju da pojedina formalno usvojena znanja mogu ostati nedovoljno povezana u celovit sistem konceptualnog znanja.

Posebno značajan rezultat istraživanja jeste činjenica da se iste konceptualne zablude pojavljuju u više različitih zadataka. Najizraženiji primer predstavlja nerazumevanje da se isti element u skupu navodi samo jednom. Ova zablude uočena je već u zadatku određivanja skupa slova reči *ananas*, gde su učenici ponavljali slovo *a* i *n* onoliko puta koliko se pojavljuju u reči. Ista ideja ponovo se javlja u zadatku jednakosti skupova, gde značajan broj učenika smatra da skupovi $\{1,2\}$ i $\{1,2,1,2,1,2\}$ nisu jednaki. Pojavljivanje iste greške u dva sadržajno različita zadatka ukazuje da nije reč o slučajnoj grešci ili nepažnji, već o stabilnoj konceptualnoj zabludi u razumevanju jednog od osnovnih svojstava skupa.

Slične teškoće utvrdili su Fischbein i Baltsan ([I]), u čijem su se istraživanju problemi javljali upravo u zadacima sa ponovljenim elementima. Njihovi nalazi pokazuju da intuitivna predstava skupa kao kolekcije može ostati prisutna i nakon formalnog uvođenja pojma skupa.

Sličan obrazac uočen je i kod razumevanja praznog i beskonačnog skupa. Učenici često beskonačne skupove predstavljaju kao konačne ili zanemaruju značenje

oznake „...“, što se pojavljuje i prilikom određivanja elemenata skupa i prilikom određivanja njegove kardinalnosti. Posebno je značajno da je samo 40% učenika pravilno odredilo broj elemenata praznog skupa. Teškoće u razumevanju praznog skupa zabeležene su i u prethodnim istraživanjima. Fischbein i Baltsan ([I]) utvrdili su nisku uspešnost učenika u zadacima koji su zahtevali razumevanje ovog pojma, dok su Zazkis i Gunn ([III]) pokazali da čak i ispitanici koji pravilno prepoznaju da prazan skup nije element određenog skupa mogu imati teškoće pri određivanju da li je on njegov podskup.

Posebno zanimljiv nalaz predstavlja otvoreni zadatak u kome su učenici opisivali šta je duž. Samo mali broj učenika spontano je definisao duž kao skup tačaka, dok je veliki broj učenika poistovetio duž sa njenom dužinom ili rastojanjem između dve tačke. Ovakvi odgovori pokazuju da učenici geometrijske objekte uglavnom posmatraju intuitivno ili operativno, bez povezivanja sa teorijom skupova na kojoj se savremena geometrija formalno zasniva. Ovo može ukazivati da se teorija skupova u nastavi doživljava kao izdvojena tema, a ne kao konceptualna osnova drugih matematičkih oblasti.

Ovaj nalaz može se povezati sa Bagnijevim istraživanjem ([II]), u kojem su učenici imali teškoće da stranice trougla istovremeno posmatraju kao geometrijske objekte i kao elemente skupa. Ni uvođenje Ojler–Venovog dijagrama samo po sebi nije dovelo do prevazilaženja ove teškoće. Sličnost sa rezultatima ovog istraživanja ukazuje da povezivanje skupovnog i geometrijskog značenja nije spontano i da zahteva eksplicitnije povezivanje ovih sadržaja u nastavi.

Na značaj konteksta i načina predstavljanja matematičkog sadržaja ukazuju i rezultati Sharif-Rasslan i saradnika ([IV]). U njihovom istraživanju uspešnost se znatno razlikovala u zavisnosti od toga da li su odnosi među skupovima predstavljeni verbalno, verbalno-logički ili formalno-simbolički, a posebno su izražene bile teškoće kada je bilo potrebno pravilno identifikovati skupove i njihove elemente u verbalnom kontekstu. Posmatrano zajedno sa rezultatima ovog istraživanja, to dodatno pokazuje da uspešnost učenika ne zavisi samo od poznavanja pojma skupa, već i od sposobnosti da njegovo značenje prepoznaju i primene u različitim matematičkim situacijama.

Rezultati istraživanja pokazali su da između učenika VI i VIII razreda

uglavnom nije bilo statistički značajnih razlika. Značajne razlike utvrđene su samo u malom broju podzadataka. Ovakav nalaz može ukazivati da se uočene konceptualne zablude ne prevazilaze spontano tokom školovanja. Drugim rečima, dodatne dve godine nastave matematike nisu bile dovoljne da značajno unaprede razumevanje osnovnih svojstava pojma skupa. To upućuje na potrebu da se ovim pojmovima posveti pažnja i nakon njihovog formalnog uvođenja u nastavu.

Iako su učenici sa višom ocenom iz matematike u većini zadataka postizali bolje rezultate, povezanost između ocene i uspešnosti uglavnom je bila slaba. Ovakav nalaz sugerise da školska ocena iz matematike nije pouzdan pokazatelj razvijenosti konceptualnog razumevanja teorije skupova. Moguće je da tradicionalni načini vrednovanja u većoj meri procenjuju proceduralna znanja i uspešnost u rešavanju rutinskih zadataka nego dubinsko razumevanje osnovnih matematičkih pojmova.

Dobijeni rezultati ukazuju da bi u nastavi teorije skupova veći naglasak trebalo staviti na razumevanje osnovnih svojstava skupa, a manje na reprodukciju definicija i rutinsko rešavanje zadataka. Posebno bi bilo korisna upotreba zadataka koji izazivaju tipične konceptualne zablude i podstiču učenike da obrazlažu svoje odgovore. Takav pristup mogao bi doprineti razvoju stabilnijeg konceptualnog razumevanja, ali i boljem povezivanju teorije skupova sa drugim oblastima matematike, naročito geometrijom.

Zaključak

Iako skup predstavlja jedan od osnovnih pojmova savremene matematike sa značajnom ulogom u organizovanju i povezivanju različitih matematičkih sadržaja njegovoj prisutnosti, upotrebi i značaju u udžbenicima matematike posvećuje se malo pažnje. Primena skupova i skupovnog načina mišljenja neosporna je u brojnim nastavnim temama. Ipak, skup se formalno uvodi i obrađuje samo u petom razredu. Nakon petog razreda njegova primena postaje šira, ali manje vidljiva. Učenik se sve češće susreće sa situacijama u kojima određuje skup svih brojeva koji imaju određeno svojstvo, skup rešenja jednačine, nejednačine ili sistema, skup vrednosti funkcije, skup mogućih ishoda ili određenu klasu geometrijskih objekata. U tim situacijama skup predstavlja organizacioni okvir matematičkog sadržaja, čak i kada se ne koristi eksplicitna skupovna terminologija.

Zbog toga se razvoj pojma skupa kroz osnovnu školu ne može adekvatno opisati samo praćenjem mesta na kojima se pojavljuje termin „skup“. Potrebno je razlikovati eksplicitne od implicitnih oblika njegove upotrebe. Eksplicitno, pojam se uvodi, definiše i simbolički predstavlja u petom razredu. Implicitno, on predstavlja način organizovanja i tumačenja brojnih, algebarskih, geometrijskih i statističkih sadržaja. Upravo ova razlika omogućava potpunije sagledavanje njegovog mesta u osnovnom obrazovanju.

Publikovana istraživanja, zajedno sa empirijskim delom rada, bave se teškoćama u razumevanju pripadnosti elementa skupu i podskupa, kardinalnosti, praznog i beskonačnog skupa, ponavljanja elemenata i primene pojma skupa u različitim reprezentacijama i matematičkim kontekstima.

Rezultati ukazuju da bi unapređenje nastave trebalo usmeriti ka konceptualnom, a ne samo proceduralnom učenju. Učenicima treba omogućiti da jedan matematički pojam sagledavaju kroz različite reprezentacije i da objašnjavaju veze među njima. Nije dovoljno da učenik zna da je " $\in$ " oznaka za pripadnost, a " $\subset$ " oznaka za podskup; potrebno je da ume da objasni šta tačno svaki od tih odnosa znači i da ih prepozna u verbalnom, simboličkom i vizuelnom obliku. Nastava treba da sadrži primere sa praznim skupom, jednočlanim skupovima, ponovljenim elementima,

skupovima čiji su elementi drugi skupovi, kao i primere u kojima dva skupa imaju isti broj elemenata, ali nisu jednaka. Takođe je potrebno uvesti praksu da učenici pre rešavanja zadatka identifikuju skupove i njihove elemente. Kod složenijih zadataka korisno je zahtevati da učenik najpre napiše šta predstavlja svaki skup, koji su njegovi elementi i šta se tačno ispituje. Nakon svakog Venovog dijagrama trebalo bi zahtevati verbalizaciju i simbolički zapis odnosa koji je prikazan. Time se sprečava da učenici inkluziju shvate samo kao prostorni odnos „unutar“. Ako učenik kaže da skup ima šest elemenata umesto četiri, da je $\{7\}$ element određenog skupa zato što se „nalazi unutra“, ili da prazan skup nije podskup zato što „nema elemente“, takav odgovor predstavlja dragocen podatak o njegovom načinu mišljenja.

Učenici mogu naučiti definicije i simbole, ali će ih u složenijim situacijama tumačiti kroz svoje intuitivne modele. Zato je potrebno nastavu pojma skupa organizovati tako da učenici kontinuirano povezuju intuiciju, jezik, konkretne primere, vizuelne reprezentacije, simboličke zapise i formalne definicije. Posebnu pažnju treba posvetiti upravo onim primerima koji su kontraintuitivni i koji najjasnije otkrivaju granice početnog razumevanja. Na taj način pojam skupa ne bi bio samo još jedna nastavna jedinica, već bi postao sredstvo za razvijanje preciznog matematičkog jezika, logičkog zaključivanja, klasifikovanja i razumevanja odnosa među matematičkim objektima.

Literatura

- [I] Efraim Fischbein and Madlen Baltsan, The mathematical concept of set and the 'collection' model, School of Education, Tel Aviv University, Tel Aviv 69978, Israel, 1999.
- [II] Bagni, G. T. (2006). Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory, Educational Studies in Mathematics, 62, 259–280.
- [III] Rina Zazkis and Chris Gunn, Sets, subsets, and the empty set: Students' constructions and mathematical conventions, Simon Fraser University Faculty of Education Burnaby, British Columbia, Canada V5A 1S6, 1997.
- [IV] Sharif-Rasslan, A., Saleh, F., & Abboud, E. (2014). Connectivity between various representations of sets and their relations among teachers-training students. Journal of Mathematical Sciences, 1, 6–13.
- [V] Matematika 1, Udžbenik za prvi razred osnovne škole - prvi deo, Prvo izdanje (Nebojša Ikodinović, Sandra Pajić; Izdavač: Klett d.o.o, Beograd; Godina izdavanja: 2023.)
- [VI] Matematika 4, Udžbenik za četvrti razred osnovne škole - 1.deo, Prvo izdanje (Autori: Jasmina Stojković, Ivica Županjac, Zorica Vukajlović, Katarina Radosavljević; Izdavač: ArhiKnjiga d.o.o, Beograd; Godina izdavanja: 2026.)
- [VII] Matematika 5, Udžbenik za peti razred osnovne škole, Šesto izmenjeno izdanje (Autori: dr Nebojša Ikodinović, dr Slađana Dimitrijević; Izdavač: Klett d.o.o, Beograd; Godina izdavanja: 2022.)
- [VIII] Matematika 6, Udžbenik za šesti razred osnovne škole, Šesto izmenjeno izdanje (Autori: dr Nebojša Ikodinović, dr Slađana Dimitrijević; Izdavač: Klett d.o.o, Beograd; Godina izdavanja: 2023.)
- [IX] Matematika 7, Udžbenik za sedmi razred osnovne škole (Autor: Vladimir Stojanović, Izdavač: Matematiskop, Beograd, Godina izdavanja: 2023.)
- [X] Matematika 8, Udžbenik za osmi razred osnovne škole (Autor: Vladimir Stojanović, Izdavač: Matematiskop, Beograd, Godina izdavanja: 2023.)

Prilog A

Разред: _____ Оцена из математике на полугодишту: _____

Пред тобом је неколико кратких задатака о скуповима.

Потруди се и напиши онако како ти размишљаш - то је најважније.

1. Скуп је задат на два начина. Попуни празна поља у табели:

Заједничко својство	Набрајање елемената
Скуп свих самогласника.	{ а, е, и, о, у }
Скуп свих боја на семафору.	
	{ пролеће, лето, јесен, зима }

2. а) Одреди скуп А који чине сва слова речи САН.

_____ $A = \{$ _____

б) Одреди скуп В који чине сва слова речи АНАНАС.

_____ $B = \{$ _____

в) Одреди скуп С који садржи све природне бројеве мање од 5.

_____ $C = \{$ _____

г) Одреди скуп D који садржи све природне бројеве веће од 5.

_____ $D = \{$ _____

д) Одреди скуп Е који садржи све природне бројеве мање од 13 дељиве са 2.

_____ $E = \{$ _____

ђ) Одреди скуп F који садржи све делиоце броја 12.

_____ $F = \{$ _____

е) Одреди скуп G који садржи све садржаоце броја 5.

_____ $G = \{$ _____

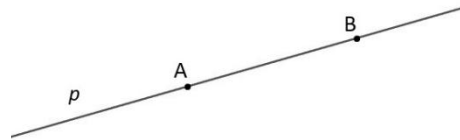
3. У табели су дати скупови А и В. Ако су скупови А и В једнаки заокружи Т, ако нису заокружи Н.

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ и $B = \{ 2, 1, 3, 4 \}$	Т	Н
$A = \{ 2, 3, 4, 5 \}$ и $B = \{ 2, 3, 4, 6 \}$	Т	Н
$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ и $B = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$	Т	Н
$A = \{ 1, 2 \}$ и $B = \{ 1, 2, 1, 2, 1, 2 \}$	Т	Н

4. Попуни табелу:

Скуп	Број елемената скупа
$\{1, 2, 3\}$	3
$\{1, 10, 100, 1000\}$	
$\{ \}$	
$\{3, 4, 5 \dots 15\}$	
$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$	

5. Напиши речима шта је дуж АВ?



6. Напиши реченицу у којој ћеш употребити реч “скуп”.

За крај: процени како си урадио/ла овај тест. Означи један од одговора.

- ☐ Одлично, све сам добро урадио/ла.
- ☐ Добро, али мислим да имам неку грешку.
- ☐ Слабо, већину задатака нисам урадио/ла како треба.

Хвала ти на труду и урађеном тесту.

Biografija

Marija Tadić je rođena 26. maja 1994. u Loznici. Godine 2008. završava OŠ “Miloš Gajić”, a godine 2012. opšti smer gimnazije u Malom Zvorniku. Iste godine upisuje Matematički fakultet u Beogradu, smer Profesor matematike i računarstva gde polaže 40 ispita. Nakon pauze usled poslovnih i porodičnih obaveza, uz ostvarenih 8 godina radnog staža u osnovnoj školi, obrazovanje nastavlja u Novom Sadu na smeru Master profesor matematike gde polaže još 10 ispita i u julu 2026. stiče uslov za odbranu master rada.

Novi Sad, 2026.

Marija Tadić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Marija Tadić

AU

Mentor: dr Zorana Lužanin

MN

Naslov rada: Razumevanje koncepta skupa kod učenika osnovne škole

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski/engleski

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2026.

GO

Izdavac: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovica 4, 21000 Novi Sad

MA

Fizički opis rada: 5/50/10/9/21/2/1

(broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Metodika matematike

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: skup, nastava matematike, osnovna škola, udžbenik matematike

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Tema ovog master rada je razumevanje koncepta skupa kod učenika osnovne škole. U prvom delu sagledani su osnovni pojmovi i svojstva skupova. Drugi deo posvećen je zastupljenosti skupa u nastavi matematike, a treći analizi udžbenika matematike od prvog do osmog razreda. Četvrti deo rada prikazuje ključne nalaze publikovanih istraživanja koja su se bavila teškoćama i zabudama u vezi razumevanja pojma skupa i njegovih osobina. Peti deo posvećen je empirijskom istraživanju sprovedenom u školskoj 2025/26 među učenicima osnovne škole u Beogradu.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veka: 23.06.2026.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Goran Radojev, vanredni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor: dr Zorana Lužanin, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Petar Đapić, vanredni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION**

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Marija Tadić

AU

Mentor: Zorana Lužanin, Ph.D.

MN

Title: Understanding the concept of sets among elementary school students

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: Serbian/ English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2026

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad

PP

Physical description: 5/50/10/9/21/2/1

(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Teaching of mathematics

SD

Subject/Key words: set, teaching mathematics, elementary school, textbook for the subject of mathematics

SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: The topic of this master's thesis is understanding the concept of a set among elementary school students. The first part looks at the basic concepts and properties of sets. The second part is dedicated to the presence of sets in math teaching, and the third analyzes math textbooks from first to eighth grade. The fourth part of the work presents key findings from published research that dealt with difficulties and misconceptions regarding the understanding of the concept of a set and its properties. The fifth part is devoted to empirical research conducted in the 2025/26 school year among elementary school students in Belgrade.

Accepted by the Scientific Board on: 23.06.2026.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President:	Goran Radojev, Ph.D, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor:	Zorana Lužanin, Ph.D., Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Petar Đapić, Ph.D, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad