



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ
И ИНФОРМАТИКУ



Ерна Имеровић

Контрактивна пресликавања на метричким просторима

Мастер рад

Ментор:

проф. др Ненад Теофанов

Нови Сад, 2026.

Садржај

Предговор	2
1 Основни појмови и дефиниције	4
2 Банахов принцип контракције	12
3 Примене Банаховог принципа контракције	25
3.1 Њутнов поступак за проналажење нуле функције	25
3.2 Системи линеарних алгебарских једначина	27
3.3 Диференцијалне једначине	31
3.4 Интегралне једначине	33
3.4.1 Фредхолмова интегрална једначина	34
3.4.2 Волтерине интегралне једначине	36
3.5 Централна гранична теорема	38
3.6 Проблем три симетрале углова	40
4 Пресликавања контрактивног типа	45
4.1 Резултати Еделштајна	45
4.2 Резултати Ракоча	47
4.3 Нелинеарне контракције Бојда и Вонга	51
4.4 Меир–Килерова теорема	57
4.5 Кананова, Чатерџијева и Замфирескуова пресликавања	61
4.6 Ћирићева генерализована контракција	68
4.7 Каристијева теорема	73
Закључак	79
Литература	81
Биографија	83
Кључна документација информација	84

Предговор

Растојање је један од основних појмова којима описујемо простор и положај објеката у њему. Увођењем метрике удаљеност се може одредити и између објеката попут низова и функција. Метрички простори тако пружају заједнички оквир за уопштавање основних појмова и метода класичне анализе и омогућавају да се различити проблеми решавају применом истих општих принципа.

Један такав приступ пружа теорија фиксне тачке. Многи проблеми, попут решавања диференцијалних и интегралних једначина, одређивање равнотежних стања у економији и теорији игара, решавање оптимизационих проблема, се могу свести на тражење тачке коју погодно пресликавање оставља непромењеном. Теорија фиксне тачке испитује услове под којима таква тачка постоји, када је јединствена и на који начин се може одредити или апроксимирати. Посебно место у тој теорији заузимају контрактивна пресликавања, којима се бави овај рад.

Рад се састоји од четири поглавља. У првом поглављу дајемо преглед основних појмова и резултата о метричким просторима које ћемо користити у наставку рада.

Друго поглавље посвећено је Банаховом принципу контракције. Најпре уводимо појам фиксне тачке и контракције и дајемо два уводна примера. Затим формулишемо Банахову теорему о фиксној тачки и представљамо четири различита доказа исте. Описујемо Пикаров итеративни поступак и изводимо оцене грешке сукцесивних апроксимација. У наставку разматрамо последице теореме, као и њену примену на пресликавања чији је нека итерација контракција. На крају поглавља дајемо локални облик Банаховог принципа контракције.

Треће поглавље посвећено је применама Банаховог принципа контракције. Најпре представљамо поједностављени Њутнов поступак за налажење нуле функције и дајемо довољне услове за његову конвергенцију. Затим разматрамо системе линеарних алгебарских једначина и изводимо услове за примену Банаховог принципа. У наставку доказујемо Пикарову теорему о постојању и јединствености локалног решења почетног проблема за диференцијалну једначину и разматрамо Фредхолмове и Волтерине интегралне једначине друге врсте. Представљамо и основну идеју примене Банаховог принципа у доказу централне граничне теореме. На крају поглавља бавимо се постојањем и јединственошћу троугла коме су задате дужине симетрала унутрашњих углова и поступком приближног одређивања његових страница.

У четвртном поглављу дефинишемо нека пресликавања контрактивног типа и разматрамо како се класични Банахов услов може ослабити или заменити другим претпоставкама које и даље обезбеђују постојање јединствене фиксне тачке. Најпре представљамо Еделштајнове и Ракочеве резултате, а затим нелинеарне контракције Бојда и Вонга. Доказујемо Меир–Килерову теорему и из ње изводимо Банахов принцип контракције и Еделштајнову теорему за

компактне метричке просторе. У наставку представљамо Кананова и Чатерџијева пресликавања, примерима илуструјемо независност Банаховог и Канановог услова и доказујемо Замфирескуову теорему која обједињује ова три резултата. Потом уводимо Ћирићеве генерализоване контракције и појам орбиталне комплетности. Доказујемо Ћирићеву теорему о фиксној тачки, њен локални облик и резултат за пресликавања чији је нека итерација генерализована контракција. Поглавље завршавамо Каристијевом теоремом и доказом њене еквиваленције са наведеним обликом Екеландовог варијационог принципа.

* * *

Посебну захвалност дугујем свом ментору, др Ненаду Теофанову, на помоћи при избору теме, корисним саветима током израде овог рада и знању које ми је пренео током студија. Такође, захваљујем се и чланицама комисије, др Ивани Војновић и др Милици Жигић на корисним сугестијама којима су унапредиле овај рад.

До важних резултата не стиже се једним великим кораком, већ низом малих приближавања. На том путу, Ти и моји најмилији делили сте са мном тежину и радост сваког корака.

Сву захвалност дугујем Теби и њима.

Поглавље 1

Основни појмови и дефиниције

Француски математичар М. Фреше¹ увео је 1906. године појам метричког простора. Метрички простор је скуп на коме је дефинисано растојање између било које две тачке. У наставку наводимо основне тополошке појмове и особине метричких простора које ћемо користити у даљем раду. Основна литература за ово поглавље је [24, 15]

Дефиниција 1.1. Пар (X, d) је метрички простор ако је X непразан скуп и $d : X^2 \rightarrow [0, \infty)$ функција таква да за све $x, y, z \in X$ важи

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \text{ ако и само ако је } x = y,$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Тада, d је метрика на скупу X , $d(x, y)$ је растојање тачака x и y , а за $x \in X$ и $r > 0$ скуп

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

је отворена лопта са центром у тачки x и полупречником r .

Топологија $\mathcal{O}_d$ одређена метриком d на скупу X задата је базом

$$\mathcal{B}_d := \{B(x, r) : x \in X \wedge r > 0\}.$$

Зато,

- скуп $O \subset X$ је отворен ако је унија неке фамилије отворених лопти ако за сваку тачку $x \in O$ постоји $r > 0$ да је $B(x, r) \subset O$;
- скуп $U \subset X$ је околина тачке $x \in X$ ако постоји отворена лопта $B(x, r) \subset U$.

Дефиниција 1.2. Нека је (X, d) метрички простор, $x_0 \in X$ и $r > 0$. Затворена лопта са центром у тачки x_0 и полупречником r је скуп

$$\overline{B(x_0, r)} := \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}.$$

Дефиниција 1.3. Нека је (X, d) метрички простор. Скуп $A \subset X$ је затворен ако је његов комплемент $X \setminus A$ отворен скуп.

¹франц. *Maurice René Fréchet*.

Дефиниција 1.4. Нека је (X, d) метрички простор и $A \subseteq X$ непразан скуп. Дијаметар скупа A дефинише се са

$$\rho(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Скуп A је ограничен акко је $\rho(A) < \infty$, то јест, акко постоји $M \geq 0$ тако да за све $x, y \in A$ важи $d(x, y) \leq M$.

Дефиниција 1.5. У метричком простору (X, d) кажемо да низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у X конвергира ка $a \in X$, што означавамо са $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, ако је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a) = 0.$$

Уместо ознаке $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ употребљава се и ознака $a_n \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty$.

Дефиниција 1.6. Нека су (X, d_X) и (Y, d_Y) метрички простори и нека је $f : X \rightarrow Y$. Пресликавање f је непрекидно у тачки $x_0 \in X$ акко

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

Пресликавање f је непрекидно акко је непрекидно у свакој тачки скупа X .

Дефиниција 1.7. Нека су (X, d_X) и (Y, d_Y) метрички простори. Пресликавање $f : X \rightarrow Y$ је *Липшиц-непрекидно* ако постоји константа $L \geq 0$ таква да за све $x, y \in X$ важи

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y).$$

Број L назива се Липшицова константа пресликавања f .

Теорема 1.8. Свако Липшиц-непрекидно пресликавање је униформно непрекидно.

Дефиниција 1.9. Нека је (X, d) метрички простор и $A \subseteq X$. Скуп A је *компактан* ако из сваке фамилије отворених скупова $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ за које важи

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} O_\alpha,$$

може да се издвоји коначна фамилија скупова $O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \dots, O_{\alpha_s}$ таква да

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^s O_{\alpha_i}.$$

Ако је $A = X$, кажемо да је (X, d) *компактан метрички простор*.

Теорема 1.10. Нека је (X, d) метрички простор. Следећи услови су еквивалентни:

1. Простор (X, d) је компактан.
2. Сваки низ у X има подниз који конвергира ка некој тачки скупа X .
3. Сваки бесконачан подскуп скупа X има тачку нагомилавања у X .

Теорема 1.11. За произвољан метрички простор (X, d) важи:

(a) у простору (X, d) граница низа је јединствена;

- (б) (X, d) је компактан ако је низовно компактан ако је пребројиво компактан;
 (в) ако је $A \subset X$ компактан скуп, онда је затворен и ограничен.

Теорема 1.12. Неке појаве у метричким просторима изражене преко низова:

- (а) x је адхерентна тачка скупа A ако је граница неког низа тачака скупа A ;
 (б) скуп A је затворен ако садржи границу сваког конвергентног низа тачака скупа A ;
 (в) пресликавање f метричког простора X у произвољан тополошки простор је непрекидно (у тачки $x \in X$) ако је секвенцијално непрекидно (у тачки x), тј.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x),$$

за сваки низ (x_n) у X .

На истом скупу могу се задати различите метрике, па се природно поставља питање када оне одређују исту топологију. У ту сврху уводимо појмове тополошке и униформне еквиваленције метрика, а затим наводимо стандардне еквивалентне метрике на простору $\mathbb{R}^n$.

Дефиниција 1.13. Нека је X непразан скуп и $\mathcal{D}_X$ скуп свих метрика на скупу X , тј.

$$\mathcal{D}_X := \{d : X^2 \rightarrow [0, \infty) \mid d \text{ је метрика на скупу } X\}.$$

За метрике $d_1, d_2 \in \mathcal{D}_X$ кажемо да су

- тополошки еквивалентне, у ознаци $d_1 \overset{t}{\sim} d_2$, ако је

$$\mathcal{O}_{d_1} = \mathcal{O}_{d_2},$$

- униформно еквивалентне, у ознаци $d_1 \sim d_2$, ако постоје бројеви $k, h > 0$ такви да за све $x, y \in X$ важи

$$d_1(x, y) \leq k d_2(x, y) \quad \text{и} \quad d_2(x, y) \leq h d_1(x, y).$$

Теорема 1.14. Нека је X произвољан непразан скуп. Тада важи:

- (а) релације $\overset{t}{\sim}$ и $\sim$ су релације еквиваленције на скупу $\mathcal{D}_X$;
 (б) ако је $d_1 \leq k d_2$, онда је

$$B_{d_2}(x, r) \subset B_{d_1}(x, kr),$$

за све $x \in X$ и $r > 0$, и важи $\mathcal{O}_{d_1} \subset \mathcal{O}_{d_2}$;

- (в) униформно еквивалентне метрике су тополошки еквивалентне.

Метрике на $\mathbb{R}^n$ дате са

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\},$$

где је $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, су еквивалентне јер важи

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \quad \text{и} \quad d_2(x, y) \leq \sqrt{n} d_\infty(x, y),$$

$$d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \quad \text{и} \quad d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y).$$

Лема 1.15. Нека је (X, d) метрички простор. Тада:

(а) за свако $a, b, c \in X$ важи

$$|d(a, b) - d(b, c)| \leq d(a, c);$$

(б) метрика $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ је непрекидна функција.

Дефиниција 1.16. Метрички простор (X, d) је метрички конвексан ако за сваке две различите тачке $x, y \in X$ постоји тачка $z \in X \setminus \{x, y\}$ таква да је

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y).$$

Лема 1.17. Нека је (X, d) комплетан метрички конвексан простор. Тада за сваке две различите тачке $x, y \in X$ и за свако $\alpha \in (0, 1)$ постоји тачка $z \in X \setminus \{x, y\}$ таква да је

$$d(x, z) = \alpha d(x, y)$$

и

$$d(z, y) = (1 - \alpha) d(x, y).$$

Једна од важнијих особина метричких простора у теорији фиксне тачке јесте комплетност. Она обезбеђује да сваки Кошијев низ има границу у том простору, што је кључно за конвергенцију итеративних поступака које ћемо касније разматрати. Зато најпре уводимо појам Кошијевог низа, а затим и појам комплетног метричког простора.

Дефиниција 1.18. Нека је (X, d) метрички простор. За низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у простору X кажемо да је Кошијев низ ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0) \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Еквивалентно, низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је Кошијев ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N}) \quad d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon.$$

Теорема 1.19. У произвољном метричком простору (X, d) важи:

(a) Сваки конвергентан низ је Кошијев;

(b) Сваки Кошијев низ је ограничен.

Лема 1.20. Ако је (X, d) метрички простор, $A \subset X$, $(a_n : n \in \mathbb{N})$ низ у скупу A и $a \in A$, онда важи:

(a) (a_n) је Кошијев низ у простору (X, d) ако је (a_n) Кошијев низ у простору (A, d_A) ;

(б) $(a_n) \rightarrow_X a$ ако $(a_n) \rightarrow_A a$.

Дефиниција 1.21. Метрички простор (X, d) је комплетан ако је сваки Кошијев низ у X конвергентан.

Скуп $A \subset X$ је комплетан скуп ако и само ако је потпростор (A, d_A) комплетан метрички простор.

Теорема 1.22 (Кантор). Метрички простор (X, d) је комплетан ако и само ако сваки опадајући низ $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ непразних, затворених и ограничених скупова, такав да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(F_n) = 0,$$

има непразан пресек.

Теорема 1.23. Нека је (X, d) метрички простор и $A \subset X$. Тада

$$A \text{ је комплетан} \implies A \text{ је затворен скуп.}$$

Теорема 1.24. Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $A \subset X$. Тада

$$A \text{ је комплетан} \iff A \text{ је затворен скуп.}$$

Наводимо неке примере комплетних метричких простора.

1. Простор реалних бројева $\mathbb{R}$ са уобичајеном метриком

$$d(x, y) = |x - y|$$

је комплетан метрички простор.

2. Простор $\mathbb{R}^n$ је комплетан у односу на сваку од следећих метрика:

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|,$$

где су $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$.

3. Простор

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ је непрекидна функција}\}$$

са супремум метриком

$$d_{\infty}(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

је комплетан метрички простор.

4. Ако је (X, d) метрички простор, онда је простор

$$BC(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ је ограничена и непрекидна}\}$$

са супремум метриком

$$d_{\infty}(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

комплетан метрички простор.

Важну класу метричких простора чине простори чија је метрика индукована нормом. Зато се подсећамо појмова норме, нормираног векторског простора и Банаховог простора.

Дефиниција 1.25. Ако је $(X, +, \cdot, \mathbb{R})$ реални векторски простор, за свако пресликавање $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$, такво да за све $x, y \in X$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ важи:

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \text{ ако и само ако је } x = 0,$$

$$(N2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

кажемо да је норма на X , а за уређени пар $(X, \|\cdot\|)$ кажемо да је нормиран векторски простор (н.в.п.).

Теорема 1.26. Ако је $(X, \|\cdot\|)$ н.в.п., онда је

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

метрика на скупу X (па је (X, d) метрички простор).

Дефиниција 1.27. Нормиран векторски простор $(X, \|\cdot\|)$ је Банахов акко је комплетан, то јест, акко у метричком простору (X, d) , где је

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

сваки Кошијев низ има границу.

У формулацијама неких уопштења Банаховог принципа контракције јављају се различити облици полунепрекидности, које наводимо у наставку.

Дефиниција 1.28. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A$ и $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Тада важи:

1. Функција f је одозго полунепрекидна у тачки a ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta(\varepsilon) > 0$ тако да је

$$f(x) < f(a) + \varepsilon, \text{ за свако } x \in (a - \delta(\varepsilon), a + \delta(\varepsilon)) \cap A.$$

За функцију f кажемо да је одозго полунепрекидна ако је одозго полунепрекидна у свакој тачки скупа A .

2. Функција f је одозго полунепрекидна са десне стране у тачки a ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta(\varepsilon) > 0$ тако да је

$$f(x) < f(a) + \varepsilon, \text{ за свако } x \in (a, a + \delta(\varepsilon)) \cap A.$$

За функцију f кажемо да је одозго полунепрекидна са десне стране ако је одозго полунепрекидна са десне стране у свакој тачки скупа A .

3. Функција f је одоздо полунепрекидна у тачки a ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta(\varepsilon) > 0$ тако да је

$$f(x) > f(a) - \varepsilon, \text{ за свако } x \in (a - \delta(\varepsilon), a + \delta(\varepsilon)) \cap A.$$

За функцију f кажемо да је одоздо полунепрекидна ако је одоздо полунепрекидна у свакој тачки скупа A .

Теорема 1.29. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A$ и $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Тада:

1. Функција f је одозго полунепрекидна у тачки a ако и само ако за сваки низ $(a_n) \subseteq A$ такав да $a_n \rightarrow a$, $n \rightarrow \infty$, важи

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq f(a).$$

2. Функција f је одозго полунепрекидна са десне стране у тачки a ако и само ако за сваки низ $(a_n) \subseteq A$ такав да $a_n \rightarrow a$, када $n \rightarrow \infty$ и $a_n \geq a$, за све $n \in \mathbb{N}$, важи

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq f(a).$$

3. Функција f је одоздо полунепрекидна у тачки a ако и само ако за сваки низ $(a_n) \subseteq A$ такав да $a_n \rightarrow a$ када $n \rightarrow \infty$, важи

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \geq f(a).$$

На крају поглавља издвајамо још неколико класичних резултата који су потребни у каснијим доказима и применама.

Теорема 1.30 (Теорема о средњој вредности). Нека су $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, и нека је функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна на интервалу $[a, b]$ и диференцијабилна на интервалу (a, b) . Тада постоји тачка $\xi \in (a, b)$ таква да је

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Теорема 1.31. *Сваки монотон и ограничен низ реалних бројева је конвергентан. Ограничен растући низ конвергира ка свом супремуму, а ограничен опадајући низ конвергира ка свом инфимуму.*

Теорема 1.32 (Централна гранична теорема). *Нека су $X_1, X_2, \dots$ међусобно независне случајне променљиве са истом расподелом, математичким очекивањем μ и дисперзијом σ^2 , где је $0 < \sigma^2 < \infty$. Ако је $S_n = X_1 + \dots + X_n$, тада низ случајних променљивих*

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

конвергира у расподели ка случајној променљивој Z која има стандардну нормалну расподелу, односно

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Еквивалентно, за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Лема 1.33 (Неједнакост Коши–Шварца). *За произвољно $n \in \mathbb{N}$ и произвољне реалне бројеве $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ важи*

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Поглавље 2

Банахов принцип контракције

Теорија фиксне тачке представља значајну област нелинеарне анализе која проучава услове под којима одређена пресликавања поседују тачке које остају непромењене под њиховим дејством. Њен значај огледа се у чињеници да се бројни проблеми постојања и јединствености решења могу свести на проналажење фиксне тачке одговарајућег оператора.

Дефиниција 2.1. Нека је X непразан скуп и нека је $f : X \rightarrow X$. Тачка $x \in X$ назива се *фиксна (непокретна) тачка* пресликавања f ако важи

$$f(x) = x.$$

Скуп свих фиксних тачака пресликавања f означава се са $\text{Fix } f$ или F_f .

Дефиниција 2.2. Нека је (X, d) метрички простор. Пресликавање $f : X \rightarrow X$ назива се *контракција* ако постоји $q \in [0, 1)$ тако да је

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y), \quad \text{за све } x, y \in X. \quad (2.1)$$

За контракцију ћемо такође користити термин *q-контракција*.

Геометријски, то значи да су слике $f(x)$ и $f(y)$ међусобно ближе него тачке x и y . Приметимо да је свака контракција непрекидно пресликавање.

Пре него што формулишемо Банахову¹ теорему о фиксној тачки, посматрајмо неколико наизглед неповезаних проблема. Саме претпоставке теореме можете погледати у формулацији Теореме 2.5.

Пример 2.3. Шта ће се догодити ако на калкулатору изаберемо произвољан реалан број, а затим довољно пута притиснемо тастер $\cos$?

Претпоставимо да је калкулатор подешен на радијане. Ако почнемо од произвољног броја $x_0 \in \mathbb{R}$ и сваки наредни број добијемо применом функције косинус на претходни, добијамо итеративни низ

$$x_{n+1} = \cos x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Посматрајмо две различите почетне вредности, на пример $x_0 = 10$ и $x_0 = -100$. Одговарајуће вредности итерација приказане су у Табели 2.3.

¹пољ. *Stefan Banach* (1892–1945), пољски математичар.

n	x_n за $x_0 = 10$	x_n за $x_0 = -100$
0	10.000000000	-100.000000000
1	-0.839071529	0.862318872
2	0.668153918	0.650678375
3	0.784966721	0.795673072
4	0.707411791	0.699804126
5	0.760046416	0.764968358
10	0.736156149	0.735462389
20	0.739028847	0.739015531
30	0.739084051	0.739083794
40	0.739085112	0.739085107
50	0.739085133	0.739085133

Table 2.1: Чланови низа x_n за $x_0 = 10$ и $x_0 = -100$

Из Табеле 2.3 се види да оба низа конвергирају ка истом броју

$$x^* \approx 0.739085133 \dots$$

Банахов принцип контракције нам даје објашњење ове појаве.

Дефинишимо пресликавање

$$f(x) = \cos x.$$

Функција f није контракција на целом скупу $x_0 \in \mathbb{R}$, али без обзира на избор почетне вредности, већ после прве итерације чланови низа остају у интервалу $[-1, 1]$. Зато посматрамо метрички простор $X = [-1, 1]$ са уобичајеном метриком

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{за } x, y \in \mathbb{R}$$

Покажимо да су све претпоставке Банаховог принципа контракције испуњене.

1. *Комплетност простора.*

Интервал $[-1, 1]$ је затворен подскуп комплетног метричког простора $\mathbb{R}$. Зато је метрички простор $(X, d) = ([-1, 1], |\cdot|)$ комплетан.

2. *Пресликавање f је контракција.*

Јасно је да $f : X \rightarrow X$. Нека су $x, y \in [-1, 1]$, при чему је $x \neq y$. На основу теореме о средњој вредности постоји број ξ између x и y такав да је

$$\cos x - \cos y = -\sin \xi (x - y).$$

Како је $|\xi| \leq 1$ и функција синус је растућа на интервалу $[0, 1]$, па следи $|\sin \xi| = \sin |\xi| \leq \sin 1$ и зато је f је контракција са коефицијентом $q = \sin 1 \approx 0.841470985$, то јест

$$|\cos x - \cos y| \leq \sin 1 |x - y|.$$

Према томе, пресликавање f има јединствену фиксну тачку $x^* \in [-1, 1]$ и за сваку почетну вредност из $[-1, 1]$ низ итерација конвергира ка тој тачки. Јасно је да ово важи и за свако $x_0 \in \mathbb{R}$ јер од прве итерације надаље низ остаје у интервалу $[-1, 1]$ и конвергира ка x^* .

Пример 2.4. Зашто се све три тежишне дужи троугла секу у једној тачки?

Нека је дат троугао ABC . Означимо са A_1 , B_1 и C_1 средине страница BC , CA и AB , редом. Дужи AA_1 , BB_1 и CC_1 су тежишне дужи троугла. Показаћемо, применом Банаховог принципа контракције, да се оне секу у једној тачки и да та тачка сваку тежишну дуж дели у односу 2 : 1.

Изаберимо координатни почетак O у равни. Свакој тачки P придружимо њен вектор положаја $p = \overrightarrow{OP}$. Нека су

$$a = \overrightarrow{OA}, \quad b = \overrightarrow{OB}, \quad c = \overrightarrow{OC}$$

вектори положаја темена A , B и C .

Посматрајмо пресликавање које шаље свако теме троугла у средиште њему наспрамне странице, то јест дефинишимо $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ са

$$f(x) = \frac{a + b + c - x}{2}.$$

Покажимо да су све претпоставке Банаховог принципа контракције испуњене.

1. *Комплетност простора.*

Посматрајмо простор $\mathbb{R}^2$ са еуклидском метриком

$$d(x, y) = \|x - y\|_2.$$

Простор $(\mathbb{R}^2, d)$ је комплетан метрички простор.

2. *Пресликавање f је контракција.* За произвољне $x, y \in \mathbb{R}^2$ важи

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \left\| \frac{a + b + c - x}{2} - \frac{a + b + c - y}{2} \right\|_2 \\ &= \left\| \frac{y - x}{2} \right\|_2 \\ &= \frac{1}{2} \|x - y\|_2 \\ &= \frac{1}{2} d(x, y). \end{aligned}$$

Према томе, f је контракција са коефицијентом $q = \frac{1}{2}$.

На основу Банаховог принципа контракције, f има јединствену фиксну тачку $g \in \mathbb{R}^2$.

Одредимо слике темена троугла:

$$f(a) = \frac{b + c}{2} = a_1, \quad f(b) = \frac{c + a}{2} = b_1, \quad f(c) = \frac{a + b}{2} = c_1.$$

Дакле, свако теме се пресликава у средиште њему наспрамне странице, а пошто је f трансформација сличности сваком новом применом пресликавања f добијамо медијални троугао претходног троугла. Ако су $a_n = f^n(a)$, $b_n = f^n(b)$, $c_n = f^n(c)$ вектори положаја темена тог троугла, онда важи

$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2}, \quad c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Банахов принцип гарантује да се сва три низа приближавају истој фиксној тачки, то јест, добијени медијални троуглови се сажимају ка тој тачки. Из једнакости $f(g) = g$ добијамо

$$g = \frac{a + b + c}{3}.$$

Нека је G тачка чији је вектор положаја g . Како је $a_1 = (b + c)/2$, важи

$$g = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a_1.$$

Према томе, G припада тежишној дужи AA_1 и дели је у односу $AG : GA_1 = 2 : 1$. На исти начин показујемо да G припада и тежишним дужима BB_1 и CC_1 . Дакле, све три тежишне дужи секу се у тачки G , која је тежиште троугла.

Претходни примери представљају конкретне примене Банахове теореме о фиксној тачки, познате и као Банахов принцип контракције.

Овај принцип који је формулисан 1922. године у [3], означава почетак теорије фиксне тачке у метричким просторима и представља један од њених темељних резултата. Поред тога што гарантује постојање и јединственост фиксне тачке произвољне контракције на комплетном метричком простору, ова теорема даје и поступак којим се формира низ који конвергира ка тој фиксној тачки. Захваљујући овој особини, Банахов принцип контракције налази широку примену у различитим областима математике.

Теорема 2.5 (Банахов принцип контракције [3]). *Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $f : X \rightarrow X$ контракција. Тада пресликавање f има јединствену фиксну тачку $x^* \in X$.*

Доказ. Нека је $x_0 \in X$ произвољно. Формирајмо низ (x_n) тачака простора X тако да је $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, тј. сваки следећи члан тог низа је слика оног претходног.

(i) Најпре ћемо показати да је (x_n) Кошијев низ.

Користећи да је f контракција, за свака два узастопна члана тог низа важи:

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq q d(x_{n-1}, x_n) \leq \cdots \leq q^n d(x_0, x_1).$$

Како је $0 \leq q < 1$, за геометријски ред важи $\sum_{k=n}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q}$. Зато, за два произвољна члана x_n, x_m , где је $m > n$ користећи неједнакост троугла добијамо:

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} q^k d(x_0, x_1) \leq \sum_{k=n}^{\infty} q^k d(x_0, x_1) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1).$$

Пошто је $0 \leq q < 1$, следи да је $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$, па је (x_n) Кошијев низ. Како је метрички простор X комплетан, у њему је сваки Кошијев низ конвергентан, па постоји $x^* \in X$ тако да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

(ii) Сада ћемо показати да x^* фиксна тачка функције f , Пошто је

$$0 \leq d(x_n, f(x^*)) = d(f(x_{n-1}), f(x^*)) \leq q \cdot d(x_{n-1}, x^*) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n-1}, x^*) = 0$$

из непрекидности метрике d , добијамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, f(x^*)) = 0.$$

То јест, низ (x_n) конвергира ка $f(x^*)$, па из јединствености граничне тачке, закључујемо да је $f(x^*) = x^*$.

(iii) Преостаје још да се покаже да је таква тачка x^* јединствена.

Претпоставимо супротно, да је $f(y) = y$ за неко $y \in X$ такво да је $y \neq x^*$. Тада је

$$d(x^*, y) = d(f(x^*), f(y)) \leq q \cdot d(x^*, y),$$

па важи

$$(1 - q)d(x^*, y) \leq 0,$$

што је у супротности са претпоставком $d(x^*, y) > 0$, јер је $0 < 1 - q$.

Дакле, одбацујемо претпоставку и закључујемо да је $y = x^*$.

□

Напомена 2.6. Постоје различити докази Банахове теореме о фиксној тачки, али претходни даје поступак за проналажење фиксне тачке x контракције f . Овај поступак је познат и као Пикаров² итеративни метод и заснива се на томе да се полазећи од произвољне тачке $x_0 \in X$ формира низ узастопних итерација $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, који конвергира ка x .

Полазећи од различитих почетних тачака из простора X добијају се различити низови итерација. Међутим, према датом доказу, сви ови низови конвергирају ка истој, фиксној тачки контракције. Следећа последица нам даје и оцене грешке која се чини када се решење једначине $f(x^*) = x^*$ замени n -том итерацијом x_n .

Последица 2.7. [18] Нека је (X, d) комплетан метрички простор, $f : X \rightarrow X$ q -контракција и $x^* \in X$ фиксна тачка пресликавања f . Тада важи:

(1) низ $(f^n(x))$ је конвергентан за свако $x \in X$ и конвергира ка x^* ;

$$(2) d(x, x^*) \leq \frac{1}{1-q} d(x, f(x));$$

$$(3) d(f^n(x), x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x, f(x));$$

$$(4) d(f^{n+1}(x), x^*) \leq q d(f^n(x), x^*);$$

$$(5) d(f^{n+1}(x), x^*) \leq \frac{q}{1-q} d(f^n(x), f^{n+1}(x)).$$

Доказ. Нека је $x \in X$ произвољно. Посматрајмо низ итерација пресликавања f :

$$f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^n(x) = f(f^{n-1}(x)).$$

Приметимо да (1) следи директно из (3).

²франц. *Charles Émile Picard* (1856–1941)

(2) Неједнакост у (2) следи из:

$$\begin{aligned} d(x, x^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f^n(x)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} d(f^k(x), f^{k+1}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} d(f^k(x), f^{k+1}(x)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k d(x, f(x)) \\ &= \frac{1}{1-q} d(x, f(x)). \end{aligned}$$

(3) Користећи да је x^* фиксна тачка и неједнакост (2) добијамо

$$\begin{aligned} d(f^n(x), x^*) &= d(f(f^{n-1}(x)), f(x^*)) \leq q d(f^{n-1}(x), x^*) \leq \dots \leq q^n d(x, x^*) \\ &\leq \frac{q^n}{1-q} d(x, f(x)). \end{aligned}$$

(4) Добијамо користећи да је f контракција и $f(x^*) = x^*$.

(5) У оцени (2) заменимо x са $f^n(x)$. Тада добијамо

$$d(f^n(x), x^*) \leq \frac{1}{1-q} d(f^n(x), f(f^n(x))).$$

Коначно,

$$\begin{aligned} d(f^{n+1}(x), x^*) &= d(f(f^n(x)), f(x^*)) \\ &\leq q d(f^n(x), x^*) \\ &\leq q \cdot \frac{1}{1-q} d(f^n(x), f^{n+1}(x)). \end{aligned}$$

□

Напомена 2.8. Сада ћемо изложити неколико различитих доказа Теореме 2.5.

Доказ Теореме 2.5 (Joseph и Kwack [20]). Посматрајмо скуп

$$A = \{d(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Како је $A \subseteq [0, \infty)$, скуп A је ограничен одоздо, па $\exists c = \inf A$.

(i) Покажимо да је $c = 0$.

Претпоставимо супротно, да је $c > 0$. Тада је

$$\frac{c}{q} > c, \quad \text{јер је } 0 < q < 1.$$

По дефиницији инфимума постоји елемент $x \in X$ такав да важи

$$c < d(x, f(x)) < \frac{c}{q}.$$

Како је f контракција, добијамо

$$\begin{aligned} d(f(x), f(f(x))) &\leq q d(x, f(x)) \\ &< q \cdot \frac{c}{q} = c, \end{aligned}$$

што је у супротности са чињеницом да је $c = \inf\{d(x, f(x)) : x \in X\}$. Према томе $0 = \inf\{d(x, f(x)) : x \in X\}$ и зато за сваки природан број n постоји тачка $x_n \in X$ таква да

$$0 \leq d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n}.$$

На тај начин добијамо низ $(x_n) \subseteq X$ за који важи

$$d(x_n, f(x_n)) \longrightarrow 0, \quad \text{када } n \rightarrow \infty.$$

(ii) Показаћемо да је низ (x_n) Кошијев.

За произвољне $n, m \in \mathbb{N}$, применом неједнакости троугла добијамо

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, f(x_n)) + d(f(x_n), x_m) \\ &\leq d(x_n, f(x_n)) + d(f(x_n), f(x_m)) + d(f(x_m), x_m). \end{aligned}$$

Пошто је f контракција, добијамо

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, f(x_n)) + q d(x_n, x_m) + d(f(x_m), x_m).$$

Пребацивањем члана $q d(x_n, x_m)$ на леву страну имамо

$$(1 - q)d(x_n, x_m) \leq d(x_n, f(x_n)) + d(x_m, f(x_m)).$$

Како је $1 - q > 0$ и десна страна неједнакости тежи нули када $m, n \rightarrow \infty$, добијамо да је (x_n) Кошијев низ.

Будући да је простор X комплетан, постоји

$$x^* \in X \quad \text{тако да} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

Како је $d(x_n, f(x_n)) \longrightarrow 0$ и $x_n \longrightarrow x^*$, из неједнакости троугла

$$d(f(x_n), x^*) \leq d(f(x_n), x_n) + d(x_n, x^*)$$

слиди $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = x^*$. Даље, из $d(f(x_n), f(x^*)) \leq q d(x_n, x^*)$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ слиди $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x^*)$. Према јединствености границе низа добијамо $f(x^*) = x^*$.

(iii) Покажимо још да је фиксна тачка јединствена. Претпоставимо супротно, да је $f(y) = y$ за неко $y \in X$ такво да је $y \neq x^*$. Тада је

$$d(x^*, y) = d(f(x^*), f(y)) \leq q \cdot d(x^*, y),$$

па важи

$$(1 - q)d(x^*, y) \leq 0,$$

што је у супротности са претпоставком $d(x^*, y) > 0$, јер је $0 < 1 - q$. Према томе, контракција f има јединствену фиксну тачку.

□

Доказ Теореме 2.5 (Palais [27]). Нека су $x_1, x_2 \in X$. Тада важи

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq d(x_1, f(x_1)) + d(f(x_1), x_2) \\ &\leq d(x_1, f(x_1)) + d(f(x_1), f(x_2)) + d(f(x_2), x_2). \end{aligned}$$

Пошто је f q -контракција, имамо $d(f(x_1), f(x_2)) \leq q \cdot d(x_1, x_2)$. Зато следи

$$(1 - q)d(x_1, x_2) \leq d(x_1, f(x_1)) + d(f(x_2), x_2).$$

Тако добијамо *Основну контракцијску неједнакост*:

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{1}{1 - q} \left(d(x_1, f(x_1)) + d(x_2, f(x_2)) \right), \quad \forall x_1, x_2 \in X. \quad (2.2)$$

Уколико су x_1 и x_2 фиксне тачке функције f , онда из (2.2) следи $x_1 = x_2$. Дакле, контракција може имати највише једну фиксну тачку.

Нека је $x \in X$, $n, m \in \mathbb{N}$, и $x_1 = f^n(x)$, $x_2 = f^m(x)$. Из (2.2) добијамо

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq \frac{1}{1 - q} \left(d(f^n(x), f(f^n(x))) + d(f^m(x), f(f^m(x))) \right).$$

Пошто је f контракција,

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f(f^n(x))) &\leq q^n d(x, f(x)) \quad \text{и} \\ d(f^m(x), f(f^m(x))) &\leq q^m d(x, f(x)). \end{aligned}$$

Зато важи

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq \frac{q^n + q^m}{1 - q} \cdot d(x, f(x)). \quad (2.3)$$

Пошто је $0 \leq q < 1$, следи $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Одатле, $d(f^n(x), f^m(x)) \rightarrow 0$ када $n \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$. Зато је низ $(f^n(x))$ Кошијев, па конвергира јер је X комплетан м.п., то јест, постоји $x^* \in X$ т.д. $\lim_n f^n(x) = x^*$. Из непрекидности функције f , имамо

$$f(x^*) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n(x)) = x^*.$$

Ако у (2.3) пустимо да $m \rightarrow \infty$, добијамо оцену (3) из Последице 2.7, то јест

$$d(f^n(x), x^*) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(x, f(x)).$$

□

Доказ Теореме 2.5(Boyd и Wong [4]). За све $x \in X$ дефинишимо функцију која мери колико је нека тачка близу да буде фиксна тачка, то јест

$$\varphi(x) = d(x, f(x)).$$

Пошто је f контракција, она је непрекидна, отуда је и функција $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна и за свако $x \in X$ важи

$$\varphi(f^n(x)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Нека је

$$C_m = \left\{ x \in X : \varphi(x) \leq \frac{1}{m} \right\}.$$

Како је $[0, 1/m]$ затворен скуп, а функција $\varphi(x) = d(x, f(x))$ непрекидна, следи да је и $C_m = \varphi^{-1}([0, \frac{1}{m}])$, затворен подскуп у X , а из (2.4) видимо и да је непразан. Сада ћемо проценити дијаметар скупа C_m . Нека су $x, y \in C_m$. Тада важи

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), y) \\ &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), y) \\ &\leq \frac{2}{m} + q d(x, y). \end{aligned}$$

Пребацивањем члана $q d(x, y)$ на леву страну добијамо

$$\text{diam}(C_m) \leq \frac{2}{m(1-q)}.$$

Како су C_m затворени и ненепазни у X , такви да за њих важи

1. $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$, тј., сваки сведећи је садржан у оном претходном и
2. $\text{diam}(C_m) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$

из Канторове теореме о пресеку следи да постоји јединствена тачка $\xi \in X$ таква да

$$\bigcap_m C_m = \{\xi\}.$$

Како је $f(C_m) \subset C_m$ за свако m , тада из

$$f(\{\xi\}) = f\left(\bigcap_m C_m\right) \subset \bigcap_m f(C_m) \subset \bigcap_m C_m = \{\xi\},$$

следи да је ξ фиксна тачка функције f , а јасно је и да је јединствена.

Даље, приметимо да за свако $x \in X$ важи

$$d(f^n(x), \xi) = d(f^n(x), f^n(\xi)) \leq q^n d(x, \xi) \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Пошто важи

$$d(x, \xi) \leq d(x, f(x)) + d(f(x), f(\xi)) \leq d(x, f(x)) + q d(x, \xi),$$

следи

$$d(x, \xi) \leq \frac{d(x, f(x))}{1 - q}.$$

Према томе, поново добијамо оцену (3) из Последице 2.7

$$d(f^n(x), \xi) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(x, f(x)).$$

□

Последица 2.9. [18] Нека је S затворен подскуп комплетног метричког простора (X, d) и нека је $f : S \rightarrow S$ контракција. Тада за произвољну тачку $x_0 \in S$, итеративни низ

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

конвергира ка фиксној тачки пресликавања f .

Следећи пример показује да би ово тврђење важило, услов да је скуп S затворен је неопходан.

Пример 2.10. Нека је d уобичајена метрика на $\mathbb{R}$ дата са $d(x, y) = |x - y|$, за $x, y \in \mathbb{R}$, и $S = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$, тј. отворена јединична лопта у $\mathbb{R}$. Тада је пресликавање

$$f : S \rightarrow S, \text{ дато са } f(x) = \frac{x + 1}{2},$$

контракција са коефицијентом $\frac{1}{2}$, а једина тачка за коју важи $f(x) = x$ јесте $x = 1$. Како $1 \notin S$, пресликавање f нема фиксну тачку у S .

Банахова теорема о фиксној тачки има веома широку примену у решавању различитих врста једначина. Следећи пример показује како се један проблем из теорије линеарних оператора може свести на Банахов принцип контракције.

Пример 2.11. Нека је X Банахов простор, и нека су A и B ограничени линеарни оператори на X . Ако је оператор A инвертибилан и важи

$$\|(B - A)\| \|A^{-1}\| < 1,$$

тада је и B инвертибилан оператор.

Доказ. Да бисмо доказали да је B инвертибилан довољно је показати да за свако $y \in X$ једначина

$$Bx = y \quad \text{има јединствено решење} \quad x \in X.$$

Изаберимо произвољно $y \in X$. Ако је $Bx_0 = y$ за неко $x_0 \in X$, онда је

$$\begin{aligned} y &= Bx_0 \\ &= Bx_0 - Ax_0 + Ax_0 \\ &= (B - A)x_0 + Ax_0. \end{aligned}$$

Користећи да је A инвертибилан добијамо

$$A^{-1}y = A^{-1}(B - A)x_0 + x_0.$$

Уводимо ознаке: $z = A^{-1}y$ и $C = A^{-1}(B - A)$.

Према томе, $z = Cx_0 + x_0$, тј. $x_0 = z - Cx_0$. Идеја је да покажемо да је функција

$$f : X \rightarrow X, \quad \text{дана са } f(x) = z - Cx,$$

контракција и да је x_0 њена фиксна тачка.

За све $x, y \in X$ важи

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|C(x - y)\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|B - A\| \cdot \|x - y\|. \end{aligned}$$

Пошто је $\|A^{-1}\| \|B - A\| = \|B - A\| \|A^{-1}\| < 1$, следи да је f контракција.

Према Банаховој теорему о фиксној тачки, функција f има јединствену фиксну тачку $x_0 \in X$. Из $f(x_0) = x_0$ следи $x_0 = z - Cx_0$, према томе, једначина $Bx = y$ има јединствено решење $x_0 \in X$. □

Следећа последица се односи на пресликавање чији је неки степен контракција.

Последица 2.12. [18] *Дат је комплетан метрички простор (X, d) . Нека је $f : X \rightarrow X$ пресликавање такво да је f^n контракција за неко $n \geq 1$.*

Тада f има јединствену фиксну тачку у простору X .

Доказ. Пошто је f^n контракција, када на њу применимо Банахову теорему о фиксној тачки, добијамо да постоји јединствена тачка $x^* \in X$ таква да је $f^n(x^*) = x^*$.

Како је $f^n(f(x^*)) = f(f^n(x^*)) = f(x^*)$, из јединствености фиксне тачке следи да је

$$f(x^*) = x^*.$$

Свака фиксна тачка пресликавања f је истовремено и фиксна тачка пресликавања f^n , па је x^* јединствена фиксна тачка пресликавања f . □

Напомена 2.13. Следећи пример нам илуструје да пресликавање f из Последице 2.12 не мора бити непрекидно, за разлику од случаја из Теореме 2.5.

Пример 2.14. Дефинишимо пресликавање

$$f : [0, 2] \rightarrow [0, 2], \quad \text{са} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1), \\ 2, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Тада је

$$f^2(x) = 2, \quad x \in [0, 2],$$

па је $f^2 : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ контракција, иако пресликавање f није непрекидно.

Будући да се у доказу Банаховог принципа контракције итеративни низ конструише полазећи од произвољне тачке $x_0 \in X$, следећи природан корак у истраживању био је испитивање локалних особина.

Теорема 2.15. [18] *Дат је (X, d) комплетан метрички простор и*

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Ако је $f : B_r(x_0) \rightarrow X$ q -контракција, односно за неко $q \in [0, 1)$ важи,

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y) \quad \text{за све } x, y \in B_r(x_0) \quad (2.5)$$

и претпоставимо да је

$$d(f(x_0), x_0) < (1 - q)r, \quad (2.6)$$

онда функција f има јединствену фиксну тачку у $B_r(x_0)$.

Доказ. Из услова (2.6) можемо изабрати $r_0 \in [0, r)$, тако да важи неједнакост $d(f(x_0), x_0) \leq (1 - q)r_0$. Показаћемо да

$$f : \overline{B_{r_0}(x_0)} \rightarrow \overline{B_{r_0}(x_0)},$$

где $\overline{B_{r_0}(x_0)}$ означава затворену лопту полупречника r_0 .

За произвољно $x \in \overline{B_{r_0}(x_0)}$, користећи (2.5) и (2.6) важи

$$\begin{aligned} d(f(x), x_0) &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \\ &\leq q d(x, x_0) + (1 - q)r_0 \\ &\leq qr_0 + (1 - q)r_0 = r_0 \end{aligned}$$

Дакле, $f(x) \in \overline{B_{r_0}(x_0)}$, тј.

$$f(\overline{B_{r_0}(x_0)}) \subset \overline{B_{r_0}(x_0)}.$$

Како је $\overline{B_{r_0}(x_0)} \subset X$ затворен, а (X, d) комплетан простор, тада је $(\overline{B_{r_0}(x_0)}, d)$ такође комплетан, па према Банаховом принципу контракције, f има јединствену фиксну тачку z у $\overline{B_{r_0}(x_0)}$.

Из услова да је f контракција лако се показује да је z јединствена фиксна тачка пресликавања f и у целој лопти $B_r(x_0)$. □

У наредној теорему разматра се контракција на Банаховом простору, при чему се уместо услова да функција пресликава затворену лопту у себе захтева само да се њен руб пресликава у затворену лопту.

Теорема 2.16. [18] *Нека је X Банахов простор, $r > 0$ и $\overline{B_r(0)} = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ затворена лопта са центром у 0 и полупречником r у X . Нека је $f : \overline{B_r(0)} \rightarrow X$ q -контракција, тј. за $q \in [0, 1)$ важи*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\|, \quad \text{за свако } x, y \in \overline{B_r(0)}, \quad (2.7)$$

и претпоставимо да је $f(\partial B_r(0)) \subset \overline{B_r(0)}$, где је $\partial B_r(0)$ руб скупа $\overline{B_r(0)}$, то јест $\partial B_r(0) = \{x \in X : \|x\| = r\}$. Тада функција f има јединствену фиксну тачку у $\overline{B_r(0)}$.

Доказ. Нека је $x \in \overline{B_r(0)}$, при чему је $x \neq 0$ и означимо $\hat{x} := \frac{r}{\|x\|}x$.

Приметимо да је $\hat{x} \in \partial B_r(0)$, јер важи

$$\|\hat{x}\| = \left\| \frac{r}{\|x\|}x \right\| = \frac{r}{\|x\|}\|x\| = r.$$

Показаћемо да

$$\frac{x + f(x)}{2} \in \overline{B_r(0)}. \quad (2.8)$$

Користећи да је f контракција и $\|x - \hat{x}\| = \left| \frac{\|x\| - r}{\|x\|} \right| \|x\| = r - \|x\|$, имамо

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(\hat{x})\| &\leq q\|x - \hat{x}\| \\ &\leq q(r - \|x\|) \\ &\leq r - \|x\|. \end{aligned}$$

Према претпоставци $f(\partial B_r(0)) \subset \overline{B_r(0)}$, а пошто $\hat{x} \in \partial B_r(0)$, следи $\|f(\hat{x})\| \leq r$. Применом неједнакости троугла добијамо

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \|f(x) - f(\hat{x}) + f(\hat{x})\| \\ &\leq \|f(x) - f(\hat{x})\| + \|f(\hat{x})\| \\ &\leq (r - \|x\|) + r = 2r - \|x\|. \end{aligned}$$

Према томе

$$\left\| \frac{x + f(x)}{2} \right\| \leq \frac{\|x\| + \|f(x)\|}{2} \leq \frac{\|x\| + 2r - \|x\|}{2} = r.$$

Дакле, $\frac{x+f(x)}{2} \in \overline{B_r(0)}$, чиме смо доказали да важи (2.8) за ненулте елементе скупа $\overline{B_r(0)}$, па је следећи корак размотрити случај када је $x = 0$. Приметимо да постоји низ $(x_n) \subset \overline{B_r(0)} \setminus \{0\}$ такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Како је норма непрекидна, као и функција f , следи

$$\left\| \frac{0 + f(0)}{2} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_n + f(x_n)}{2} \right\| \leq r.$$

Према томе, функција

$$g(x) = \frac{x + f(x)}{2}, \quad x \in \overline{B_r(0)},$$

је добро дефинисана и важи $g : \overline{B_r(0)} \rightarrow \overline{B_r(0)}$.

Нека су сада $x, y \in \overline{B_r(0)}$. Тада, применом неједнакости троугла и чињенице да је f контракција, добијамо

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\| &= \left\| \frac{x + f(x)}{2} - \frac{y + f(y)}{2} \right\| \\ &= \left\| \frac{x - y + f(x) - f(y)}{2} \right\| \\ &\leq \frac{\|x - y\| + \|f(x) - f(y)\|}{2} \\ &\leq \frac{\|x - y\| + q\|x - y\|}{2} \\ &= \frac{1 + q}{2} \|x - y\|. \end{aligned}$$

Пошто је $0 \leq q < 1$, имамо $\frac{1+q}{2} < 1$, па је g контракција на скупу $\overline{B_r(0)}$.

Како је $\overline{B_r(0)}$ затворен подскуп Банаховог простора X , на основу Банаховог принципа контракције, пресликавање g има јединствену фиксну тачку $u \in \overline{B_r(0)}$. Из дефиниције функције g следи да се фиксне тачке пресликавања f и g поклапају.

□

Поглавље 3

Примене Банаховог принципа контракције

Банахов принцип контракције, поред свог значаја у теорији фиксне тачке, има важну улогу и у решавању различитих математичких проблема. Основна идеја његове примене састоји се у томе да се посматрани проблем формулише као проблем налажења фиксне тачке одговарајућег пресликавања. Уколико се покаже да је то пресликавање контракција на комплетном метричком простору, Банахов принцип гарантује постојање и јединственост фиксне тачке, а самим тим и постојање и јединственост решења полазног проблема. Многе једначине и докази различитих теорема се могу свести на Банахов принцип контракције, а у наставку ћемо навести само неке од њих.

3.1 Њутнов поступак за проналажење нуле функције

Једна од класичних примена Банаховог принципа контракције јавља се код Њутновог¹ поступка за налажење решења једначине $f(x) = 0$, где је $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција.

Полази се од почетне апроксимације $x_0 \in (a, b)$ и посматра се тангента на график функције f у тачки $(x_0, f(x_0))$. Следећа апроксимација x_1 одређује се као нула једначине тангенте. Како је та једначина у тачки x_0 дата са

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

за $y = 0$, под претпоставком да је $f'(x_0) \neq 0$, добијамо

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Понављањем овог поступка добија се итеративни низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ одређен са

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

под условом да је $f'(x_n) \neq 0$ за свако n .

¹енгл. *Isaac Newton* (1643–1727).

У пракси се често користити поједностављена варијанта овог поступка, у којој се вредност извода не рачуна у свакој тачки x_n , већ се током целог итеративног поступка користи његова вредност у почетној тачки x_0 . Тада је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дефинисан са

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

У наставку показујемо да се за овако дефинисан низ могу дати услови који обезбеђују његову конвергенцију ка нули функције f .

Теорема 3.1. [19] *Нека су дати $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, и $f : (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција таква да је $f'(x_0) \neq 0$. Ако је f' Липшицова функција са константом $L > 0$, $s := 2 \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| < r$ и $4L \frac{|f(x_0)|}{(f'(x_0))^2} \leq 1$, онда постоји јединствена тачка*

$$x^* \in [x_0 - s, x_0 + s] \text{ за коју је } f(x^*) = 0,$$

а низ (x_n) дефинисан са (3.1) конвергира ка x^ .*

Доказ. Дефинишимо пресликавање $F : [x_0 - s, x_0 + s] \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}.$$

Тада се једначина (3.1) може записати у облику $x_{n+1} = F(x_n)$.

Покажимо најпре да је F контракција. За $x \in [x_0 - s, x_0 + s]$ важи

$$F'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)} = \frac{f'(x_0) - f'(x)}{f'(x_0)}.$$

Како је f' Липшицова са константом L , а за $x \in [x_0 - s, x_0 + s]$, имамо

$$|F'(x)| \leq \frac{L|x - x_0|}{|f'(x_0)|} \leq \frac{Ls}{|f'(x_0)|} = \frac{2L|f(x_0)|}{(f'(x_0))^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Последњу неједнакост добијамо из претпоставке $\frac{4L|f(x_0)|}{(f'(x_0))^2} \leq 1$, дакле, $|F'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Према теорему о средњој вредности, за све $x, y \in [x_0 - s, x_0 + s]$ важи

$$|F(x) - F(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

Покажимо још да F пресликава интервал $[x_0 - s, x_0 + s]$ у самог себе. Нека је $x \in [x_0 - s, x_0 + s]$, тада

$$\begin{aligned} |F(x) - x_0| &\leq |F(x) - F(x_0)| + |F(x_0) - x_0| \\ &\leq \frac{1}{2}|x - x_0| + \frac{s}{2} \\ &\leq s. \end{aligned}$$

Дакле, $F([x_0 - s, x_0 + s]) \subseteq [x_0 - s, x_0 + s]$.

Како је $[x_0 - s, x_0 + s]$ затворен подскуп од $\mathbb{R}$, а са уобичајеном топологијом је комплетан метрички простор, па је и $[x_0 - s, x_0 + s]$ комплетан м.п. Показали смо

да је F контракција, па Банахов принцип гарантује постојање јединствене фиксне тачке

$$x^* \in [x_0 - s, x_0 + s] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$$

пресликавања F . Из $F(x^*) = x^*$ следи $f(x^*) = 0$. Према томе, x^* је јединствена нула функције f у посматраном интервалу. На крају, пошто је $x_{n+1} = F(x_n)$, из Банаховог принципа контракције следи да низ (x_n) конвергира ка x^* . □

3.2 Системи линеарних алгебарских једначина

Посматрајмо систем од n линеарних алгебарских једначина са n непознатих

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Да бисмо решавање овог система свели на проблем фиксне тачке, сваку од једначина запишимо у облику

$$\begin{aligned} x_1 &= +(1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n + b_1, \\ x_2 &= -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n + b_2, \\ &\vdots \\ x_n &= -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1 - a_{nn})x_n + b_n. \end{aligned}$$

Затим, уводимо коефицијенте

$$c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}, \text{ где је } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

тада се претходни систем краће записује у облику

$$x_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Дефинишемо пресликавање $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ са $T(x) = y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, где су координате тачке y одређене са

$$y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Према томе, тачка $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ је фиксна тачка пресликавања T ако и само ако је

$$x_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

односно ако и само ако њене координате представљају решење полазног система линеарних једначина. На тај начин, проблем решавања датог система своди се на проблем налажења фиксне тачке пресликавања T . Простор $\mathbb{R}^n$ је комплетан у односу на сваку од метрика које ћемо разматрати. Према томе, ако се покаже да је T контракција у односу на изабрану метрику, из Банаховог принципа контракције следи да T има јединствену фиксну тачку. Остаје да се одреди који су то довољни услови под којима је T контракција.

1. Најпре посматрајмо $\mathbb{R}^n$ са еуклидском метриком

$$d_2(x, z) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - z_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Нека су $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$, где је

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), \quad x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}),$$

и означимо $T(x^{(1)}) = y^{(1)}, T(x^{(2)}) = y^{(2)}$. Према дефиницији пресликавања T , за свако $i = 1, 2, \dots, n$ имамо

$$y_i^{(1)} - y_i^{(2)} = \sum_{j=1}^n c_{ij} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}).$$

Применом неједнакости Коши-Буњаковског, за свако $i = 1, 2, \dots, n$ добијамо

$$\begin{aligned} d_2^2(T(x^{(1)}), T(x^{(2)})) &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n c_{ij} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |c_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}|^2 \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}|^2 \right) d_2^2(x^{(1)}, x^{(2)}). \end{aligned}$$

Одатле следи

$$d_2(T(x^{(1)}), T(x^{(2)})) \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}|^2 \right)^{1/2} d_2(x^{(1)}, x^{(2)}).$$

Према томе, ако важи

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}|^2 < 1,$$

онда је T контракција у $\mathbb{R}^n$ са еуклидском метриком.

2. Посматрајмо сада простор $\mathbb{R}^n$ са метриком

$$d_\infty(x, z) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i|.$$

Нека су $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ и нека је $T(x^{(1)}) = y^{(1)}, T(x^{(2)}) = y^{(2)}$. Тада, за свако $i = 1, 2, \dots, n$, важи

$$y_i^{(1)} - y_i^{(2)} = \sum_{j=1}^n c_{ij} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}),$$

па је

$$\begin{aligned} d_\infty(T(x^{(1)}), T(x^{(2)})) &= \max_{1 \leq i \leq n} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n c_{ij} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \right| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}| |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}|. \end{aligned}$$

Како за свако $j = 1, 2, \dots, n$ важи $|x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| \leq d_\infty(x^{(1)}, x^{(2)})$, добијамо

$$d_\infty(T(x^{(1)}), T(x^{(2)})) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}| \right) d_\infty(x^{(1)}, x^{(2)}).$$

Према томе, ако важи

$$\sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

пресликавање T је контракција у $\mathbb{R}^n$ са метриком d_∞ .

3. Посматрајмо сада простор $\mathbb{R}^n$ са метриком

$$d_1(x, z) = \sum_{i=1}^n |x_i - z_i|.$$

Нека су $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ и нека је $T(x^{(1)}) = y^{(1)}, T(x^{(2)}) = y^{(2)}$. Тада

$$\begin{aligned} d_1(T(x^{(1)}), T(x^{(2)})) &= \sum_{i=1}^n |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n c_{ij} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}| |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j^{(1)} - x_j^{(2)}| \sum_{i=1}^n |c_{ij}| \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |c_{ij}| \right) d_1(x^{(1)}, x^{(2)}). \end{aligned}$$

Према томе, у простору $(\mathbb{R}^n, d_1)$ довољан услов да T буде контракција јесте

$$\sum_{i=1}^n |c_{ij}| < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Поред постојања и јединствености решења, Банахов принцип контракције даје и поступак за његово приближно одређивање. Ако је T контракција, полазећи од произвољне тачке $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ формирамо низ сукцесивних апроксимација

$$x^{(m+1)} = T(x^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

односно, по координатама,

$$x_i^{(m+1)} = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j^{(m)} + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Овај низ конвергира ка јединственом решењу полазног система линеарних једначина.

Пример 3.2. Посматрајмо систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_3 &= 1, \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_4 &= 2, \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_3 &= 1, \\ \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Ако означимо $C := [c_{ij}]_{n \times n}$, онда је

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Посматрајмо најпре простор $\mathbb{R}^4$ са метриком d_∞ . За сваки $i = 1, 2, 3, 4$ важи $\sum_{j=1}^4 |c_{ij}| = \frac{3}{4}$, па је

$$\max_{1 \leq i \leq 4} \sum_{j=1}^4 |c_{ij}| = \frac{3}{4} < 1.$$

Према томе, T је контракција у простору $(\mathbb{R}^4, d_\infty)$.

Приметимо да је и сума апсолутних вредности коефицијената у свакој колони једнака $\frac{3}{4}$. Зато је T контракција и у простору $(\mathbb{R}^4, d_1)$.

Међутим за метрику d_2 довољан услов који смо раније извели није испуњен. Заиста,

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 |c_{ij}|^2 = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 4 \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{5}{4} > 1.$$

Дакле, на основу наведеног довољног услова у овом случају не можемо да закључимо да је T контракција у односу на метрику d_2 .

Вратимо се сада на метрику d_∞ . Како је $(\mathbb{R}^4, d_\infty)$ комплетан метрички простор, а T контракција, из Банаховог принципа контракције следи да T има јединствену

фиксну тачку $x^* \in \mathbb{R}^4$. Пошто су фиксне тачке пресликавања T управо решења полазног система, дати систем има јединствено решење.

За произвољну почетну тачку $x^{(0)} \in \mathbb{R}^4$ може се формирати низ

$$x^{(m+1)} = T(x^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

који конвергира ка тој јединственој фиксној тачки x^* . У овом случају координате тачке $x^{(m+1)}$ су облика

$$\begin{aligned} x_1^{(m+1)} &= \frac{1}{2}x_1^{(m)} - \frac{1}{4}x_3^{(m)} + 1, \\ x_2^{(m+1)} &= \frac{1}{2}x_2^{(m)} - \frac{1}{4}x_4^{(m)} + 2, \\ x_3^{(m+1)} &= -\frac{1}{4}x_1^{(m)} + \frac{1}{2}x_3^{(m)} + 1, \\ x_4^{(m+1)} &= -\frac{1}{4}x_2^{(m)} + \frac{1}{2}x_4^{(m)} + 1. \end{aligned}$$

Може се показати

$$x^{(m+1)} \longrightarrow \left(\frac{4}{3}, 4, \frac{4}{3}, 0 \right) = x^*.$$

Овим примером смо решавање система линеарних једначина свели на проналажење фиксне тачке одговарајућег пресликавања. За примену Банаховог принципа контракције било је потребно изабрати метрику у којој се може показати да је то пресликавање контракција, што нам је у овом случају омогућила метрика d_∞ . Пошто су метрике d_2 и d_∞ на $\mathbb{R}^4$ еквивалентне, низ сукцесивних апроксимација који конвергира у метрици d_∞ конвергира ка истој тачки и у метрици d_2 . Дакле, добар избор метрике олакшава примену Банаховог принципа, али не утиче на добијену фиксну тачку, односно на решење полазног система.

3.3 Диференцијалне једначине

Посматрајмо почетни проблем

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Показаћемо како се Банахов принцип контракције може применити на доказ егзистенције и јединствености решења овог проблема.

Теорема 3.3 (Пикарова² теорема [2]). *Нека је $f(x, y)$ реална непрекидна функција две променљиве, дефинисана на правоугаонику $A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Ако f задовољава Липшицов услов по другој променљивој, тј. ако постоји константа $q > 0$ таква да*

$$|f(x, y) - f(x, \hat{y})| \leq q|y - \hat{y}|,$$

за све $y, \hat{y} \in [c, d]$, и ако је (x_0, y_0) унутрашња тачка правоугаоника A , онда почетни проблем (3.3) има јединствено решење.

²франц. *Charles Émile Picard* (1856–1941)

Доказ. Најпре ћемо показати да је проблем одређивања решења диференцијалне једначине (3.3) еквивалентан проблему налажења решења одговарајуће интегралне једначине. Ако $y = g(x)$ задовољава диференцијалну једначину $y' = f(x, y)$ и почетни услов $g(x_0) = y_0$, онда интеграцијом диференцијалне једначине од x_0 до x добијамо

$$g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt,$$

односно

$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt. \quad (3.4)$$

Према томе, налажење јединственог решења диференцијалне једначине са датим почетним условом еквивалентно је налажењу јединственог решења интегралне једначине (3.4), где ћемо применити Банахов принцип контракције.

Како је $f(x, y)$ непрекидна на компактном скупу $A \subset \mathbb{R}^2$, према Вајерштрасовој³ теореме она је ограничена на A . Према томе, постоји константа $m > 0$ таква да $|f(x, y)| \leq m$ за све $(x, y) \in A$.

Даље, изаберимо константу $p > 0$ тако да важи $pq < 1$ и да је правоугаоник B , који је дефинисан у наставку, садржан у A .

$$B = \{(x, y) : x_0 - p \leq x \leq x_0 + p, y_0 - pm \leq y \leq y_0 + pm\}.$$

Нека је

$$X = \{g \in C([x_0 - p, x_0 + p]) : |g(x) - y_0| \leq mp \quad \forall x \in [x_0 - p, x_0 + p]\}.$$

На простору $C([x_0 - p, x_0 + p])$ посматрамо супремум метрику дату са

$$d_\infty(g, h) = \sup_{x \in [x_0 - p, x_0 + p]} |g(x) - h(x)|.$$

Покажимо да је X затворен скуп. Нека је (g_n) низ функција из X који конвергира ка некој функцији $g \in C([x_0 - p, x_0 + p])$. То јест

$$d_\infty(g_n, g) = \sup |g_n(x) - g(x)| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Користећи неједнакост троугла и чињеницу да $g_n \in X$, добијамо

$$\begin{aligned} |g(x) - y_0| &\leq |g(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - y_0| \\ &\leq d_\infty(g, g_n) + mp. \end{aligned}$$

Како је $d_\infty(g, g_n) \rightarrow 0$, када пустимо да $n \rightarrow \infty$ имамо

$$|g(x) - y_0| \leq mp.$$

Ова неједнакост важи за свако $x \in [x_0 - p, x_0 + p]$, па је $g \in X$. Дакле, X садржи границу сваког конвергентног низа елемената из X , па је затворен подскуп комплетног простора $(C([x_0 - p, x_0 + p]), d_\infty)$. Како је сваки затворен подскуп комплетног метричког простора комплетан, следи да је и (X, d_∞) комплетан метрички простор.

³нем. *Karl Weierstrass* (1815–1897)

Посматрајмо пресликавање $T : X \rightarrow X$ дефинисано са

$$T(g) = h, \text{ где је } h(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt.$$

За свако $x \in [x_0 - p, x_0 + p]$ важи

$$|h(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt \right| \leq m|x - x_0| \leq mp.$$

Према томе, $h \in X$, па је пресликавање T добро дефинисано. Покажимо да је T контракција. Нека су $g_1, g_2 \in X$ и нека је $T(g_1) = h_1$ и $T(g_2) = h_2$. Тада користећи да је f Липшиц непрекидна по другој променљивој и да $x \in [x_0 - p, x_0 + p]$ добијамо

$$\begin{aligned} d_\infty(T(g_1), T(g_2)) &= d_\infty(h_1, h_2) \\ &= \sup \left| \int_{x_0}^x [f(t, g_1(t)) - f(t, g_2(t))] dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x \sup |f(t, g_1(t)) - f(t, g_2(t))| dt \\ &\leq q \int_{x_0}^x |g_1(t) - g_2(t)| dt \\ &\leq qp d_\infty(g_1, g_2). \end{aligned}$$

Дакле,

$$d_\infty(T(g_1), T(g_2)) \leq \alpha d_\infty(g_1, g_2), \quad \text{где је } 0 \leq \alpha = qp < 1.$$

Према томе, T је контракција простора X .

На основу Банаховог принципа контракције, пресликавање T има јединствену фиксну тачку $g^* \in X$. Дакле, $T(g^*) = g^*$, односно

$$g^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, g^*(t)) dt.$$

Ова функција g^* представља јединствено решење почетног проблема (3.3). □

3.4 Интегралне једначине

Познато је да се многи проблеми из различитих области примене математике могу описати помоћу интегралних једначина. Веза Банахове теореме о фиксној тачки са интегралним једначинама присутна је још од самог настанка ове теореме. Наиме, та теорема појавила се међу резултатима Банахове докторске дисертације, која је носила наслов *О операцијама на апстрактним скуповима и њиховим применама на интегралне једначине*. [3]

У овом одељку представимо егзистенције и јединствености решења за две врсте интегралних једначина, Фредхолмову⁴ и Волтерину⁵ интегралну једначину. Најпре ћемо размотрити Фредхолмову интегралну једначину, код које се Банахов принцип примењује непосредно на придружени интегрални оператор, а затим Волтерину интегралну једначину, код које се примењује на одговарајућу итерацију тог оператора.

⁴енгл. *Erik Ivar Fredholm* (1866–1927)

⁵итал. *Vito Volterra* (1860–1940)

3.4.1 Фредхолмова интегрална једначина

Нека су $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидне функције. Једначина

$$x(s) = f(s) + \int_a^b k(s, t)x(t) dt, \quad s \in [a, b], \quad (3.5)$$

назива се *Фредхолмова интегрална једначина друге врсте*, а функција k је *језгро* интегралне једначине.

Налажење решења ове једначине еквивалентно је налажењу фиксне тачке $x \in C[a, b]$ оператора $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ дефинисаног са

$$(Tx)(s) = f(s) + \int_a^b k(s, t)x(t) dt, \quad \text{за све } x \in C[a, b] \text{ и за све } s \in [a, b]. \quad (3.6)$$

Следећа теорема даје услов под којим оператор $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ има јединствену фиксну тачку.

Теорема 3.4. [2] *Нека је $X = C[a, b]$ метрички простор снабдевен метриком*

$$d_\infty(u, v) = \sup_{t \in [a, b]} |u(t) - v(t)|, \quad \forall u, v \in X.$$

Ако су $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидне функције такве да је

$$\kappa := \sup_{s \in [a, b]} \int_a^b |k(s, t)| dt < 1. \quad (3.7)$$

онда важе следећа тврђења:

(а) *Постоји јединствено решење $x^* \in C[a, b]$ Фредхолмове интегралне једначине (3.5).*

(б) *За произвољно $x_0 \in X$, низ (x_n) дефинисан са*

$$x_{n+1}(s) = f(s) + \int_a^b k(s, t)x_n(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

конвергира ка x^ .*

Доказ. (а) Покажимо најпре да је оператор $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ дефинисан са (3.6) Липшиц–непрекидан оператор са Липшицовом константом κ .

За $x, y \in C[a, b]$ имамо

$$\begin{aligned} d_\infty(Tx, Ty) &= \sup_{s \in [a, b]} |(Tx)(s) - (Ty)(s)| \\ &= \sup_{s \in [a, b]} \left| \int_a^b k(s, t)x(t) dt - \int_a^b k(s, t)y(t) dt \right| \\ &= \sup_{s \in [a, b]} \left| \int_a^b k(s, t)(x(t) - y(t)) dt \right| \\ &\leq \sup_{s \in [a, b]} \int_a^b |k(s, t)| |x(t) - y(t)| dt \\ &\leq d_\infty(x, y) \sup_{s \in [a, b]} \int_a^b |k(s, t)| dt \\ &\leq \kappa d_\infty(x, y). \end{aligned}$$

Пошто је $\kappa < 1$, следи да је оператор T , дефинисан са (3.6), контракција. Према Банаховом принципу контракције, постоји јединствена фиксна тачка $x^* \in C[a, b]$ оператора T . Како је једначина $Tx^* = x^*$ еквивалентна интегралној једначини (3.5), следи да је x^* њено јединствено решење.

- (б) Пошто је T контракција, из доказа Банаховог принципа контракције следи да за произвољно $x_0 \in X$ низ (x_n) , дефинисан са

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

односно

$$x_{n+1}(s) = f(s) + \int_a^b k(s, t)x_n(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

конвергира ка јединственој фиксној тачки x^* оператора T . □

Напомена 3.5. Пошто је k непрекидна на компактном скупу $[a, b] \times [a, b]$, функција $s \mapsto \int_a^b |k(s, t)| dt$ је такође непрекидна на $[a, b]$, па достиже свој максимум. Стога се може записати

$$\kappa = \max_{s \in [a, b]} \int_a^b |k(s, t)| dt.$$

У литератури се линеарна Фредхолмова интегрална једначина друге врсте често записује и у облику

$$x(s) = f(s) + \lambda \int_a^b k(s, t)x(t) dt,$$

где је λ реални параметар. Овај облик се своди на (3.5) ако се уведе ново језгро $\tilde{k}(s, t) = \lambda k(s, t)$. Притом ако обележимо са $M = \max_{(s, t) \in [a, b]^2} |k(s, t)|$, онда важи

$$d_\infty(Tx, Ty) \leq |\lambda| M(b - a) d_\infty(x, y).$$

Према томе, услов

$$|\lambda| M(b - a) < 1$$

довољан је да T буде контракција.

Пример 3.6. Покажимо да Фредхолмова интегрална једначина

$$x(s) = s + e^s - \int_0^1 st x(t) dt, \quad s \in [0, 1],$$

има јединствено решење у $C[0, 1]$ и одредимо то решење методом сукцесивних апроксимација.

У овом случају је $a = 0$, $b = 1$, $f(s) = s + e^s$ и $k(s, t) = -st$. Како су функције f и k непрекидне, треба још само да проверимо услов (3.7) из претходне теореме. Имамо

$$\begin{aligned} \kappa &= \sup_{s \in [0, 1]} \int_0^1 |k(s, t)| dt \\ &= \sup_{s \in [0, 1]} \int_0^1 st dt \\ &= \sup_{s \in [0, 1]} \frac{s}{2} = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Према томе, Фредхолмова интегрална једначина има јединствено решење $x^* \in C[0, 1]$, а да бисмо га одредили, треба да применимо поступак сукцесивних апроксимација. Узмимо $x_0(s) = 0$ и дефинишимо $x_{n+1}(s) = (Tx_n)(s)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, при чему је придружени оператор $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ дат је са

$$(Tx)(s) = s + e^s - \int_0^1 stx(t) dt.$$

За прву апроксимацију добијамо

$$x_1(s) = s + e^s - \int_0^1 stx_0(t) dt = s + e^s.$$

Затим, како је $\int_0^1 te^t dt = 1$,

$$\begin{aligned} x_2(s) &= s + e^s - s \int_0^1 t(t + e^t) dt. \\ &= s + e^s - \frac{4}{3}s = e^s - \frac{s}{3}. \end{aligned}$$

На исти начин,

$$\begin{aligned} x_3(s) &= s + e^s - s \int_0^1 t \left(e^t - \frac{t}{3} \right) dt \\ &= s + e^s - s \left(1 - \frac{1}{9} \right) \\ &= e^s + \frac{s}{9}, \end{aligned}$$

а затим и

$$x_4(s) = e^s - \frac{s}{27}.$$

Настављајући овај поступак, добијамо

$$x_n(s) = e^s + (-1)^{n-1} \frac{s}{3^{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Пошто је

$$\sup_{s \in [0, 1]} |x_n(s) - e^s| = \sup_{s \in [0, 1]} \frac{s}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^{n-1}} \rightarrow 0, \quad \text{када } n \rightarrow \infty,$$

низ (x_n) конвергира ка функцији $x^*(s) = e^s$. Према томе, јединствено решење посматране Фредхолмове интегралне једначине је

$$\boxed{x^*(s) = e^s}.$$

3.4.2 Волтерине интегралне једначине

Волтерине интегралне једначине представљају посебну класу интегралних једначина код којих је једна од граница интеграције променљива.

Нека су $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидне функције. Једначина облика

$$x(s) = f(s) + \lambda \int_a^s k(s, t)x(t) dt, \quad \text{за свако } s \in [a, b], \quad (3.8)$$

где је λ ненулти параметар из $\mathbb{R}$, назива се *линеарна Волтерина интегрална једначина друге врсте*. Функција k назива се *језгро* интегралне једначине.

Теорема 3.7. [2] Нека је $X = C[a, b]$ скуп свих непрекидних реалних функција дефинисаних на $[a, b]$, са метриком

$$d_{\infty}(u, v) := \sup_{t \in [a, b]} |u(t) - v(t)|, \quad \text{за све } u, v \in X.$$

Тада, за свако $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, линеарна Волтерина интегрална једначина (3.8) има јединствено решење $\bar{x} \in C[a, b]$.

Доказ. Пошто је функција k непрекидна на компактном скупу, постоји константа $M > 0$ таква да је $|k(s, t)| \leq M$, за све $s, t \in [a, b]$.

Дефинишимо оператор $T : X \rightarrow X$ са

$$(Tx)(s) = f(s) + \lambda \int_a^s k(s, t)x(t) dt, \quad \text{за све } x \in X.$$

За произвољне $x, y \in X$ важи

$$\begin{aligned} |(Tx)(s) - (Ty)(s)| &= \left| \lambda \int_a^s k(s, t)(x(t) - y(t)) dt \right| \\ &\leq |\lambda| \int_a^s |k(s, t)| |x(t) - y(t)| dt \\ &\leq |\lambda| M(s - a) d_{\infty}(x, y), \quad \text{за свако } s \in [a, b]. \end{aligned}$$

Према томе,

$$\begin{aligned} d_{\infty}(Tx, Ty) &= \sup_{s \in [a, b]} |(Tx)(s) - (Ty)(s)| \\ &\leq \sup_{s \in [a, b]} |\lambda| M(s - a) d_{\infty}(x, y) \\ &\leq |\lambda| M(b - a) d_{\infty}(x, y). \end{aligned}$$

Даље, приметимо да за $x, y \in X$ и $s \in [a, b]$ важи

$$\begin{aligned} |(T^2x)(s) - (T^2y)(s)| &= \left| \lambda \int_a^s k(s, t)((Tx)(t) - (Ty)(t)) dt \right| \\ &\leq |\lambda| \int_a^s |k(s, t)| |(Tx)(t) - (Ty)(t)| dt \\ &\leq |\lambda| \int_a^s |k(s, t)| (|\lambda| M(t - a) d_{\infty}(x, y)) dt \\ &\leq |\lambda|^2 M \int_a^s |k(s, t)| (t - a) d_{\infty}(x, y) dt \\ &\leq |\lambda|^2 M^2 d_{\infty}(x, y) \int_a^s (t - a) dt \\ &= \frac{|\lambda|^2 M^2 (s - a)^2}{2} d_{\infty}(x, y). \end{aligned}$$

Понављајући овај поступак, добијамо

$$|(T^n x)(s) - (T^n y)(s)| \leq \frac{|\lambda|^n M^n (s - a)^n}{n!} d_{\infty}(x, y), \quad \text{за свако } s \in [a, b].$$

Према томе,

$$\begin{aligned} d_\infty(T^n x, T^n y) &= \sup_{s \in [a, b]} |(T^n x)(s) - (T^n y)(s)| \\ &\leq \frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} d_\infty(x, y) \\ &= \frac{[|\lambda| M (b-a)]^n}{n!} d_\infty(x, y). \end{aligned}$$

Како за свако $r \in \mathbb{R}$ важи

$$\frac{r^n}{n!} \longrightarrow 0, \quad \text{када } n \rightarrow \infty,$$

слиди да за довољно велико n важи

$$\frac{[|\lambda| M (b-a)]^n}{n!} < 1.$$

Како је (X, d_∞) комплетан метрички простор и $T^n : X \rightarrow X$ је контракција за довољно велико n , из Банаховог принципа контракције слиди да T^n има јединствену фиксну тачку $\bar{x} \in X$. Према Последици (2.12), важи

$$T\bar{x} = \bar{x}.$$

Самим тим је $\bar{x}$ јединствено решење Волтерине интегралне једначине (3.8). □

3.5 Централна гранична теорема

У овом поглављу представимо једну занимљиву примену Банаховог принципа контракције на централну граничну теорему. Класични докази ове теореме најчешће су засновани на анализи карактеристичних функција и не дају нам интуицију о томе зашто се управо нормална расподела јавља као гранична. Идеју да се ова класична теорема теорије вероватноће интерпретира и докаже помоћу теорије фиксне тачке развили су Хамедани⁶ и Волтер⁷, 1984. године.

Циљ овог одељка је само да се прикаже основна идеја и улога Банаховог принципа контракције, а детаљнија конструкција метричког простора, као и потпун доказ одговарајућих резултата, могу се наћи у раду [17].

Најпре су увели метрику на одговарајућем простору функција расподеле. За $\lambda \geq 0$, означимо са R_λ скуп свих случајних променљивих X за које важи $E(|X|^\lambda) < \infty$ и

$$E(X^k) = m_k, \quad \text{за } k = 1, 2, \dots, [\lambda],$$

где је m_k k -ти моменат случајне променљиве X која има стандардну нормалну расподелу, а $[\lambda]$ означава највећи цео број који није већи од λ . Даље, нека M_λ представља скуп свих функција расподеле случајних променљивих из R_λ . За $F, G \in M_\lambda$ дефинишемо

$$d_\lambda(F, G) := \sup_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \left| E \left(\frac{e^{iXt} - e^{iYt}}{|t|^\lambda} \right) \right|,$$

⁶енгл. *Gholamhossein G. Hamedani*

⁷енгл. *Gilbert G. Walter*

где су F и G функције расподеле случајних променљивих $X, Y \in R_\lambda$, редом. Хамедани и Волтер су показали да је (M_λ, d_λ) метрички простор, а ако је λ ненегативан цео број, онда је (M_λ, d_λ) и комплетан метрички простор.

Подсетимо се да се случајне променљиве X и Y називају субнезависним (енгл. *sub-independent*) ако је функција расподеле њиховог збира једнака конволуцији њихових функција расподеле, тј.

$$F_{X+Y}(z) = (F_X * F_Y)(z).$$

Еквивалентно, преко карактеристичних функција

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Субнезависност је слабији услов од независности.

За $\alpha > 0$ су дефинисали пресликавање

$$T_\alpha : M_\lambda \rightarrow M_0$$

тако да функцију расподеле случајне променљиве X пресликава у функцију расподеле случајне променљиве

$$\frac{X + Y}{\alpha}.$$

Изражено помоћу карактеристичних функција, пресликавање T_α делује на следећи начин:

$$\varphi(t) \longmapsto \varphi^2\left(\frac{t}{\alpha}\right).$$

Хамедани и Волтер су показали да је T_α Банахова контракција ако важи

1. $\alpha^\lambda > 2$
2. $T_\alpha(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$.

Посебно, наведени услови су испуњени за $\alpha = \sqrt{2}$ и $\lambda > 2$.

Нека Φ означава функцију расподеле случајне променљиве са стандардном нормалном расподелом. Тада важи

$$\Phi = T_{\sqrt{2}}(\Phi)$$

и $\Phi \in M_\lambda$. Према томе, Φ је фиксна тачка пресликавања $T_{\sqrt{2}}$. Ово следи из чињенице да, ако су X и Y субнезависне случајне променљиве са стандардном нормалном расподелом, онда и случајна променљива $\frac{X + Y}{\sqrt{2}}$ има стандардну нормалну расподелу. Дакле, пресликавање $T_{\sqrt{2}}$ оставља стандардну нормалну расподелу непромењеном, па је Φ његова фиксна тачка. На основу Банаховог принципа контракције, за свако $F \in M_\lambda$ добија се

$$d_\lambda\left(T_{\sqrt{2}}^n F, \Phi\right) \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Хамедани и Волтер су затим приметили да, ако је (X_n) низ независних (или само субнезависних) случајних променљивих са истом функцијом расподеле F , математичким очекивањем 0, дисперзијом 1 и тако да је

$$E(|X_n|^\lambda) < \infty$$

за неко $\lambda > 2$ и свако $n \in \mathbb{N}$, онда је $T_{\sqrt{2}}^n F$ функција расподеле случајне променљиве

$$2^{-n/2} \sum_{i=1}^{2^n} X_i.$$

Конвергенција низа $T_{\sqrt{2}}^n F$ ка Φ у односу на метрику d_λ повлачи да низ случајних променљивих

$$2^{-n/2} \sum_{i=1}^{2^n} X_i$$

конвергира у расподели ка стандардној нормалној случајној променљивој Z .

На крају, уз помоћ одговарајуће леме, Хамедани и Волтер су проширили претходни резултат и на случај када случајне променљиве немају исте расподеле, него је скуп функција расподеле случајних променљивих X_n само ограничен у M_λ . Показали су да

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow Z,$$

у расподели када $n \rightarrow \infty$, чиме су на тај начин добили централну граничну теорему.

3.6 Проблем три симетрале углова

Поставља се проблем: Да ли се за произвољна три позитивна броја m, n, p може наћи троугао чије су дужине симетрала унутрашњих углова управо та три броја?

Овај наизглед једноставан геометријски проблем има дугу историју. Теркам⁸ је 1842. године изразио дужине симетрала унутрашњих углова преко страница троугла, a, b, c и добио

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{b+c} \sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]}, \\ n &= \frac{1}{c+a} \sqrt{ac[(c+a)^2 - b^2]}, \\ p &= \frac{1}{a+b} \sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

али је елиминација непознатих доводила до алгебарских једначина веома високог степена. Посебно је разматран и проблем симетрала спољашњих углова. Ван ден Берг је показао да у том случају троугао постоји ако и само ако је највећи од бројева mn, np, pm већи од збира преостала два и да тада постоје два решења са истим обимом.

Проблем са симетралама унутрашњих углова се показао сложенијим. Најс⁹ је 1937. године доказао да се тражени троугао у општем случају не може конструисати лењиром и шестаром. Нови приступ у решавању овог проблема су 1995. године дали Миронеску¹⁰ и Панайтопол¹¹, свдећи га на проблем фиксне тачке и применом Брауерове теореме показали су да за свака $m, n, p > 0$ постоји јединствен, до

⁸енгл. *Olry Terquem* (1782–1862)

⁹енгл. *Fritz Neiss* (1883–1952)

¹⁰енгл. *Petru Mironescu*, рођен 1966.

¹¹енгл. *Laurentiu Panaitopol* (1940–2008)

на изометрију, троугао са задатим дужинама симетрала унутрашњих углова. Касније су Динка¹² и Мавин¹³ показали да се Брауерова теорема у овом приступу може заменити Банаховим принципом контракције, чиме се добија и поступак за приближно одређивање страница траженог троугла. [10]

Нека су a, b, c странице траженог троугла, а m, n, p задате дужине симетрала његових унутрашњих углова. Уместо решавања система (3.9) по непознатим a, b, c , Миронеску и Панаитопол уводе нове променљиве

$$x = \frac{b+c-a}{2}, \quad y = \frac{c+a-b}{2}, \quad \text{и} \quad z = \frac{a+b-c}{2}.$$

Како су a, b, c странице троугла, из неједнакости троугла следи $x, y, z > 0$. Из претходних једнакости лако се добија

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y. \quad (3.10)$$

Покажимо сада како се прва једначина система може записати у новим променљивама. Из

$$bc[(b+c)^2 - a^2] = (b+c)^2 m^2,$$

користећи $4bc = (b+c)^2 - (b-c)^2$, следи

$$4m^2 = \frac{(b+c)^2 - (b-c)^2}{(b+c)^2} [(b+c)^2 - a^2].$$

После сређивања овог израза добија се

$$2(b+c) = \sqrt{4m^2 + (c+a-b)^2} + \sqrt{4m^2 + (a+b-c)^2}.$$

Сада је из (3.10)

$$2(2x+y+z) = \sqrt{4m^2 + 4y^2} + \sqrt{4m^2 + 4z^2}.$$

Након дељења са 2 и пребацивања $y+z$ на десну страну следи

$$2x = \sqrt{m^2 + y^2} - y + \sqrt{m^2 + z^2} - z,$$

На исти начин, из друге и треће једначине почетног система добијају се

$$y = \frac{1}{2} \left(\sqrt{n^2 + z^2} - z \right) + \frac{1}{2} \left(\sqrt{n^2 + x^2} - x \right) \text{ и}$$

$$z = \frac{1}{2} \left(\sqrt{p^2 + x^2} - x \right) + \frac{1}{2} \left(\sqrt{p^2 + y^2} - y \right).$$

За $\alpha > 0$ дефинишимо функцију $f_\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \frac{\alpha}{2}]$ са

$$f_\alpha(t) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\alpha^2 + t^2} - t \right).$$

Тада се претходни систем може краће записати као

$$\begin{aligned} x &= f_m(y) + f_m(z), \\ y &= f_n(z) + f_n(x), \\ z &= f_p(x) + f_p(y). \end{aligned} \quad (3.11)$$

¹²енгл. *George Dinca*, рођен 1941.

¹³енгл. *Jean Mawhin*, рођен 1942.

Функција f_α је непрекидна, а њен извод је

$$f'_\alpha(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}} - 1 \right) < 0, \quad t \geq 0.$$

Према томе, f_α је опадајућа на $\mathbb{R}^+$ и за $t > 0$ важи $|f'_\alpha(t)| < \frac{1}{2}$, па за сваке две различите тачке $t, t' \in \mathbb{R}_+$ добијамо

$$|f_\alpha(t) - f_\alpha(t')| < \frac{1}{2}|t - t'|. \quad (3.12)$$

Нека је $C := [0, m] \times [0, n] \times [0, p]$ и дефинишимо пресликавање $F : C \rightarrow C$ са

$$F(x, y, z) = (f_m(y) + f_m(z), f_n(z) + f_n(x), f_p(x) + f_p(y)). \quad (3.13)$$

Тада је систем (3.11) еквивалентан са

$$F(x, y, z) = (x, y, z).$$

Према томе, проблем постојања троугла са задатим дужинама симетрала унутрашњих углова има решење ако и само ако пресликавање F има фиксну тачку на скупу C .

Како је f_α опадајућа и $f_\alpha(0) = \frac{\alpha}{2}$, за свако $t \geq 0$ важи $0 < f_\alpha(t) \leq \frac{\alpha}{2}$. Према томе, F је добро дефинисано, то јест, $F(C) \subseteq C$.

Нека су $P = (x, y, z)$ и $P' = (x', y', z')$ две различите тачке скупа C . Користећи идентитет $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ и (3.12), добијамо

$$\begin{aligned} \|F(P) - F(P')\|^2 &= [f_m(y) - f_m(y') + f_m(z) - f_m(z')]^2 \\ &\quad + [f_n(z) - f_n(z') + f_n(x) - f_n(x')]^2 \\ &\quad + [f_p(x) - f_p(x') + f_p(y) - f_p(y')]^2 \\ &< \frac{1}{2}[(y - y')^2 + (z - z')^2] + \frac{1}{2}[(z - z')^2 + (x - x')^2] \\ &\quad + \frac{1}{2}[(x - x')^2 + (y - y')^2] \\ &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \|P - P'\|^2. \end{aligned}$$

Дакле,

$$\|F(P) - F(P')\| < \|P - P'\|, \quad \text{за } P \neq P'. \quad (3.14)$$

Међутим, још увек не може да се примени Банахов принцип контракције, јер није показано да постоји константа $q < 1$ тако да је F q -контракција, па у наставку ћемо дефинисати помоћна пресликавања.

Теорема 3.8. [10] Пресликавање F , дефинисано са (3.13), има јединствену фиксну тачку P^* у скупу C . Штавише, ако је (λ_k) произвољан низ у интервалу $(0, 1)$ такав да $\lambda_k \rightarrow 1$, онда важи

$$P^* = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k,$$

где је P_k јединствена фиксна тачка пресликавања $\lambda_k F$ у скупу C .

Доказ. Неједнакост (3.14) нам даје јединственост фиксне тачке пресликавања F . Заиста, ако би P и P' биле две различите фиксне тачке, онда бисмо добили

$$\|P - P'\| = \|F(P) - F(P')\| < \|P - P'\|,$$

што је контрадикција.

Нека је (λ_k) низ у $(0, 1)$ такав да $\lambda_k \rightarrow 1$. За свако $k \in \mathbb{N}$ дефинишимо пресликавање

$$T_k := \lambda_k F.$$

Пошто је $F : C \rightarrow C$ и $0 < \lambda_k < 1$, важи $T_k : C \rightarrow C$.

Из (3.14), за различите $P, P' \in C$, добијамо

$$\|T_k(P) - T_k(P')\| = \lambda_k \|F(P) - F(P')\| < \lambda_k \|P - P'\|.$$

Како је $\lambda_k \in (0, 1)$, пресликавање T_k је контракција са коефицијентом λ_k . Скуп C је затворен подскуп комплетног метричког простора $\mathbb{R}^3$, па је и сам комплетан. Зато, применом Банаховог принципа контракције, за свако $k \in \mathbb{N}$ добијамо јединствену фиксну тачку $P_k \in C$ пресликавања T_k , односно $P_k = T_k(P_k) = \lambda_k F(P_k)$.

Како је C компактан, сваки низ у C има конвергентан подниз. Стога низ $(P_k) \subset C$ има подниз (P_{k_j}) који конвергира ка некој тачки из C . Нека је

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_{k_j} = P^* \in C.$$

За свако j важи $P_{k_j} = \lambda_{k_j} F(P_{k_j})$. Како је $\lambda_{k_j} \rightarrow 1$, $P_{k_j} \rightarrow P^*$, а F непрекидно пресликавање, када пустимо $j \rightarrow \infty$ добијамо

$$\begin{aligned} P^* &= \lim_{j \rightarrow \infty} P_{k_j} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_{k_j} F(P_{k_j}) \\ &= F\left(\lim_{j \rightarrow \infty} P_{k_j}\right) \\ &= F(P^*). \end{aligned}$$

Према томе, P^* је фиксна тачка пресликавања F . Како смо већ показали да F може имати највише једну фиксну тачку, ова фиксна тачка је јединствена.

Докажимо сада да сваки конвергентан подниз низа (P_k) конвергира ка P^* , тада ће и цео низ (P_k) конвергирати ка P^* . Нека је (P_{k_i}) произвољан конвергентан подниз низа (P_k) и нека $P_{k_i} \rightarrow Q$. Како је P_{k_i} фиксна тачка пресликавања $T_{k_i}(P_{k_i}) = \lambda_{k_i} F(P_{k_i})$, преласком на границу добијамо $Q = F(Q)$. Због јединствености фиксне тачке пресликавања F , следи $Q = P^*$.

□

Постојање јединствене фиксне тачке $P^* = (x^*, y^*, z^*)$ пресликавања F значи да постоји јединствен, до на изометрију, троугао чије симетрале унутрашњих углова имају задате дужине m , n и p . Према (3.10), дужине његових страница су

$$a = y^* + z^*, \quad b = z^* + x^*, \quad c = x^* + y^*.$$

Да бисмо приближно одредили о ком троуглу је реч, довољно је приближно одредити фиксну тачку P^* пресликавања F . У наставку показујемо како се то може учинити применом Банаховог принципа. За пресликавање $T : C \rightarrow C$ са T^n означаваћемо n -ту итерацију, то јест,

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ пута}}.$$

Теорема 3.9. [10] *Нека је $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{N}$. Тада постоје $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ и $N(\varepsilon, k) \in \mathbb{N}$ такви да за свако $k \geq K(\varepsilon)$ и $n \geq N(\varepsilon, k)$ важи*

$$\left\| \left(\frac{k}{k+1} F \right)^n (0) - P^* \right\| < \varepsilon. \quad (3.15)$$

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$. Узмимо $\lambda_k := \frac{k}{k+1}$, па је пресликавање $T_k : C \rightarrow C$ из доказа претходне теореме дато са

$$T_k := \frac{k}{k+1} F, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Нека је P_k јединствена фиксна тачка пресликавања T_k , чије постојање је загарантовано Теоремом 3.8.

Подсетимо се да важи

$$P^* = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k,$$

па постоји $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ тако да за свако $k \geq K(\varepsilon)$ важи

$$\|P_k - P^*\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Банахов принцип контракције нам каже да Пикаров низ итерација са почетном тачком $0 = (0, 0, 0) \in C$ конвергира ка P_k , то јест, $P_k = \lim_{n \rightarrow \infty} T_k^n(0)$ и даје нам оцену

$$\|T_k^n(0) - P_k\| \leq \frac{\lambda_k^n}{1 - \lambda_k} \|T_k(0) - 0\|.$$

Како је $\lambda_k = \frac{k}{k+1}$ и $F(0) = (m, n, p)$, следи

$$\begin{aligned} \|T_k^n(0) - P_k\| &\leq \left(\frac{k}{k+1} \right)^n k \|F(0)\| \\ &\leq \left(\frac{k}{k+1} \right)^n k \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \end{aligned}$$

Пошто је $0 < \frac{k}{k+1} < 1$, за свако фиксирано k постоји $N(\varepsilon, k) \in \mathbb{N}$ такво да за свако $n \geq N(\varepsilon, k)$ важи

$$\|T_k^n(0) - P_k\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тада за свако $k \geq K(\varepsilon)$ и $n \geq N(\varepsilon, k)$, применом неједнакости троугла добијамо

$$\begin{aligned} \|T_k^n(0) - P^*\| &\leq \|T_k^n(0) - P_k\| + \|P_k - P^*\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

Поглавље 4

Пресликавања контрактивног типа

Многи аутори су дефинисали различите класе пресликавања контрактивног типа на комплетним метричким просторима X , које представљају уопштења чувене Банахове контракције. За велики број ових пресликавања доказано је постојање јединствене фиксне тачке, до које се долази применом Пикарових итерација, полазећи од произвољно изабране почетне тачке $x_0 \in X$.

У овом поглављу биће представљени поједини резултати који се односе на различита пресликавања контрактивног типа, са посебним освртом на услове који обезбеђују постојање јединствене фиксне тачке.

За пресликавање $f : X \rightarrow X$ дефинисано на комплетном метричком простору (X, d) , које задовољава услов

$$d(f(x), f(y)) < \lambda d(x, y), \quad x, y \in X, \quad x \neq y, \quad (4.1)$$

где је $0 \leq \lambda < 1$, Банахов принцип контракције обезбеђује постојање и јединственост фиксне тачке.

Ако се у услову (4.1) узме $\lambda = 1$, добија се *контрактивно пресликавање*, односно пресликавање које задовољава услов

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \quad x, y \in X, \quad x \neq y. \quad (4.2)$$

4.1 Резултати Еделштајна

Еделштајн¹ је 1962. године објавио рад [11] у коме је проучавао фиксне тачке контрактивних пресликавања користећи следећи услов и додатну претпоставку.

Услов (4.2), уз претпоставку да постоји тачка $x \in X$ за коју итеративни низ $(f^n(x))$ садржи конвергентан подниз $(f^{n_k}(x))$, односно да важи

$$\exists x \in X : (f^n(x)) \supset (f^{n_k}(x)) \quad \text{тако да} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) \in X, \quad (4.3)$$

обезбеђује постојање фиксне тачке пресликавања f .

Теорема 4.1 (Еделштајнова теорема [11]). *Нека је (X, d) метрички простор и $f : X \rightarrow X$ контрактивно пресликавање које задовољава (4.3). Тада је*

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) \quad \text{јединствена фиксна тачка пресликавања } f.$$

¹Енгл. *Michael Edelstein* (1917–2003).

Доказ. Претпостављамо супротно, тј. да важи $u \neq f(u)$. Нека је

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}, \quad \text{и} \quad Y = (X \times X) \setminus \Delta,$$

дефинишемо функцију

$$r : Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad r(x, y) = \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)}. \quad (4.4)$$

Пошто $(u, f(u)) \in Y$ и f је контрактивно, важи $r(u, f(u)) < R < 1$. Из непрекидности функције r следи да постоји околина U тачке $(u, f(u))$ таква да за свако $(x, y) \in U$ важи

$$0 \leq r(x, y) < R < 1. \quad (4.5)$$

Сада бирамо мале отворене лопте, $B_1 = B_\rho(u)$ и $B_2 = B_\rho(f(u))$, полупречника ρ тако да важи $B_1 \times B_2 \subset U$ и

$$\rho < \frac{1}{3}d(u, f(u)).$$

Приметимо да за $x \in B_1$ и $y \in B_2$ имамо: $d(x, y) > \rho$.

Из услова (4.3) следи да постоји природан број N такав да за свако $k > N$ важи

$$f^{n_k}(x) \in B_1,$$

док из непрекидности функције f следи да је

$$f^{n_k+1}(x) \in B_2.$$

За $k > N$, из избора полупречника ρ добијамо

$$d(f^{n_k}(x), f^{n_k+1}(x)) > \rho. \quad (4.6)$$

С друге стране, на основу (4.4) и (4.1) имамо

$$d(f^{n_k+1}(x), f^{n_k+2}(x)) < R d(f^{n_k}(x), f^{n_k+1}(x)). \quad (4.7)$$

Према томе, вишеструком применом неједнакости (4.7), за $l > j > N$ добија се

$$\begin{aligned} d(f^{n_l}(x), f^{n_l+1}(x)) &\leq d(f^{n_{l-1}+1}(x), f^{n_{l-1}+2}(x)) \\ &< R d(f^{n_{l-1}}(x), f^{n_{l-1}+1}(x)) < \dots \\ &< R^{l-j} d(f^{n_j}(x), f^{n_j+1}(x)). \end{aligned}$$

Пошто је $0 < R < 1$, важи $R^{l-j} \rightarrow 0$ када $l \rightarrow \infty$, па из тога следи да $d(f^{n_l}(x), f^{n_l+1}(x)) \rightarrow 0$ када $l \rightarrow \infty$. Ово је у директној супротности са (4.6). Према томе, мора важити $f(u) = u$.

Претпоставимо сада да постоји и друга фиксна тачка $v \neq u$. Тада из особине да су обе тачке фиксне добијамо

$$d(f(u), f(v)) = d(u, v),$$

што је у контрадикцији са (4.2).

□

Услов (4.3) је увек задовољен уколико је простор компактан, па важи следећи резултат.

Теорема 4.2. [11] *Нека је (X, d) компактан метрички простор и нека је $f : X \rightarrow X$ пресликавање које задовољава неједнакост*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y),$$

за све $x, y \in X$, при чему је $x \neq y$. Тада f има јединствену фиксну тачку.

Из Теореме 4.1 добија се следећа информација о низу итерација.

Теорема 4.3. [11] *Нека су испуњени услови Теореме 4.1. Ако низ $(f^n(p))$, за $p \in X$, садржи конвергентан подниз $(f^{n_k}(p))$, онда постоји граница*

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(p)$$

у простору X , и тачка u је фиксна тачка пресликавања f .

Доказ. Према Теореме 4.1, имамо $u = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(p)$ и тачка u је фиксна тачка пресликавања f .

Нека је дато произвољно $\delta > 0$. Тада постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за свако $k > n_0$ важи $d(u, f^{n_k}(p)) < \delta$. Нека је $m = n_k + l > n_k$, где је $l \in \mathbb{N}$. Тада важи

$$\begin{aligned} d(u, f^m(p)) &= d(f^l(u), f^{n_k+l}(p)) \\ &< d(u, f^{n_k}(p)) \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Дакле, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(p) = u$.

□

4.2 Резултати Ракоча

Дефинисање фамилије функција $F = \{\alpha(x, y)\}$, које задовољавају услове $0 \leq \alpha(x, y) < 1$ и $\sup \alpha(x, y) = 1$, тако да Банахова теорема о фиксној тачки важи када се константа q замени функцијом $\alpha(x, y) \in F$, предложио је Хаим Ханани². На основу те идеје, Е. Ракоч³, је 1962. године објавио рад у коме даје значајно уопштење Банаховог принципа, уводећи класу пресликавања контрактивног типа која се данас називају *Ракочеве контракције*. У овом одељку изложићемо неке резултате из наведеног рада. [28]

Дефиниција 4.4. Нека је (X, d) метрички простор. Са F_1 означавамо фамилију функција $\alpha(x, y)$, које задовољавају следеће услове:

- (1) $\alpha(x, y) = \alpha(d(x, y))$, односно функција α зависи само од растојања између тачака x и y ;
- (2) $0 \leq \alpha(d(x, y)) < 1$, за све $x \neq y$;

²енгл. *Haim Hanani*, (1912–1991)

³енгл. *Ephraim Rakotch*

(3) функција $\alpha(d)$ је монотono опадајућа функција од d .

Подсетимо се да је $f : X \rightarrow X$ контрактивно ако за сваке две различите тачке $x, y \in X$ важи $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Притом, свако контрактивно пресликавање је непрекидно и ако има фиксну тачку, онда је она јединствена.

Теорема 4.5. [28] Нека је (X, d) метрички простор и $f : X \rightarrow X$ контрактивно пресликавање, $M \subset X$ и $x_0 \in M$ тако да важи

$$d(x, x_0) - d(f(x), f(x_0)) \geq 2d(x_0, f(x_0)) \quad \text{за свако } x \in X \setminus M, \quad (4.8)$$

и нека је $f(M)$ подскуп неког компактног подскупа у X . Тада постоји јединствена фиксна тачка пресликавања f .

Доказ. Претпоставимо да је $f(x_0) \neq x_0$ и нека је $x_n = f^n(x_0)$, $n = 1, 2, \dots$, тј.

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.9)$$

Довољно је показати да $x_n \in M$ за свако n , јер ће тада низ (x_n) бити садржан у скупу M , а његове слике у скупу $f(M)$.

Пошто је f контрактивно пресликавање, низ $(d(x_n, x_{n+1}))$ је нерастући. Отуда, из $f(x_0) \neq x_0$ следи

$$d(x_n, x_{n+1}) < d(x_0, x_1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

Из неједнакости троугла добијамо

$$d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}).$$

Користећи (4.9) и (4.10), долазимо до

$$\begin{aligned} d(x_0, x_n) - d(x_1, x_{n+1}) &< d(x_0, x_1) + d(x_0, x_1), \text{ тј.} \\ d(x_0, x_n) - d(f(x_0), f(x_n)) &< 2d(x_0, f(x_0)), \end{aligned}$$

па из претпоставке (4.8) следи да $x_n \in M$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$. С друге стране, за свако $n \geq 1$ важи

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

Како $x_{n-1} \in M$, следи да

$$x_n = f(x_{n-1}) \in f(M).$$

По претпоставци, постоји компактан скуп $K \subset X$ такав да је $f(M) \subset K$. Дакле, низ (x_n) садржан је у K . Како је K компактан, низ (x_n) има конвергентан подниз x_{n_k} . Из $x_{n_k} = f^{n_k}(x_0)$, добијамо

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x_0).$$

Тиме је испуњена претпоставка Теореме 4.1. Према тој теорему, u је јединствена фиксна тачка пресликавања f .

□

Последица 4.6. Нека је $f : X \rightarrow X$ контрактивно пресликавање за које постоји тачка $x_0 \in X$ таква да за свако $x \in X$ важи

$$d(f(x), f(x_0)) \leq \alpha(x, x_0) d(x, x_0), \quad (4.11)$$

где је $\alpha(x, y) = \alpha(d(x, y)) \in F_1$ (видети дефиницију 4.4). Ако је $B_r(x_0)$ отворена лопта у X , при чему је

$$r = \frac{2d(x_0, f(x_0))}{1 - \alpha(2d(x_0, f(x_0)))}$$

и $f(B_r(x_0))$ подскуп компактног подскупа у X , тада пресликавање f има јединствену фиксну тачку.

Доказ. Када у Теореме 4.5 узмемо $M = B_r(x_0)$, тада за $x \in X \setminus M$ важи $d(x, x_0) \geq r$. На основу (4.11), монотоности функције $\alpha(d)$ и чињенице да је

$$r \geq 2d(x_0, f(x_0)),$$

следи

$$\begin{aligned} d(x, x_0) - d(f(x), f(x_0)) &\geq d(x, x_0) - \alpha(d(x, x_0)) d(x, x_0) \\ &= [1 - \alpha(d(x, x_0))] d(x, x_0) \\ &\geq [1 - \alpha(r)] r \\ &\geq [1 - \alpha(2d(x_0, f(x_0)))] r \\ &= 2d(x_0, f(x_0)). \end{aligned}$$

Дакле, услов (4.8) је испуњен за $M = B_r(x_0)$. Осим тога, по претпоставци је $f(B_r(x_0))$ садржан у неком компактном подскупу скупа X . Према томе, испуњене су све претпоставке Теореме 4.5, па пресликавање f има јединствену фиксну тачку. $\square$

Теорема 4.7. [28] Нека је $f : X \rightarrow X$ контрактивно пресликавање на комплетном метричком простору (X, d) . Претпоставимо да постоји $M \subset X$ и тачка $x_0 \in M$ тако да важи

$$d(x, x_0) - d(f(x), f(x_0)) \geq 2d(x_0, f(x_0)), \quad \text{за свако } x \in X \setminus M, \quad (4.12)$$

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha(x, y) d(x, y), \quad \text{за све } x, y \in M, \quad (4.13)$$

где је $\alpha(x, y) = \alpha(d(x, y)) \in F_1$ (видети дефиницију 4.4). Тада пресликавање f има јединствену фиксну тачку.

Доказ. Претпоставимо да је $f(x_0) \neq x_0$ и дефинишимо низ (x_n) са

$$x_n = f^n(x_0), \quad n = 1, 2, \dots$$

Користећи (4.12), као у доказу Теореме 4.5, имамо

$$d(x_n, x_{n+1}) < d(x_0, x_1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.14)$$

и $x_n \in M$, за свако n , што нам омогућава да у наставку применимо (4.13). Показаћемо да је низ (x_n) ограничен, а затим да је Кошијев. Из (4.13) и дефиниције низа (x_n) , добијамо

$$d(x_1, x_{n+1}) = d(f(x_0), f(x_n)) \leq \alpha(d(x_0, x_n)) d(x_0, x_n), \quad (4.15)$$

а применом неједнакости троугла на ланац тачака x_0, x_1, x_{n+1}, x_n , имамо

$$d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1}).$$

Према томе, из (4.14) и (4.15) следи

$$d(x_0, x_n) < d(x_0, x_1) + \alpha(d(x_0, x_n)) d(x_0, x_n) + d(x_0, x_1).$$

Пребацивањем средњег члана на леву страну добијамо

$$[1 - \alpha(d(x_0, x_n))] d(x_0, x_n) < 2d(x_0, x_1).$$

Ако за произвољно $d_0 > 0$ важи $d(x_0, x_n) \geq d_0$, из монотоности функције α , следи

$$\alpha(d(x_0, x_n)) \leq \alpha(d_0).$$

Одатле добијамо

$$d(x_0, x_n) < \frac{2d(x_0, x_1)}{1 - \alpha(d(x_0, x_n))} \leq \frac{2d(x_0, x_1)}{1 - \alpha(d_0)} =: C.$$

Дакле, (x_n) је ограничен јер сви чланови низа (x_n) припадају лопти $\overline{B_R(x_0)}$, где је

$$R = \max\{d_0, C\}.$$

Нека је $p > 0$ произвољан природан број. Из (4.13) и ограничености следи

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_{n+p-1})) \\ &\leq \alpha(x_{n-1}, x_{n+p-1}) d(x_{n-1}, x_{n+p-1}) \leq \dots \\ &\leq d(x_0, x_p) \prod_{k=0}^{n-1} \alpha(x_k, x_{k+p}) \\ &\leq R \prod_{k=0}^{n-1} \alpha(x_k, x_{k+p}). \end{aligned}$$

Показаћемо да је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев. Како је низ $(d(x_n, x_{n+p}))$ нерастући, довољно је доказати да за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број N , који зависи само од ε , тако да за свако $p > 0$ важи

$$d(x_N, x_{N+p}) < \varepsilon.$$

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Ако за неко $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ важи $d(x_k, x_{k+p}) \geq \varepsilon$, тада из (4.13), због монотоности функције α , добијамо

$$\alpha(x_k, x_{k+p}) = \alpha(d(x_k, x_{k+p})) \leq \alpha(\varepsilon).$$

Дакле, сваки фактор у производу може бити ограничен са $\alpha(\varepsilon)$, па добијамо

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq R[\alpha(\varepsilon)]^n.$$

Пошто је $\alpha(\varepsilon) < 1$, закључујемо да $[\alpha(\varepsilon)]^n \rightarrow 0$ када $n \rightarrow \infty$, па постоји природан број N , који не зависи од p , тако да је

$$d(x_N, x_{N+p}) < \varepsilon, \quad \text{за свако } p > 0.$$

Према томе, низ (x_n) је Кошијев.

Из комплетности метричког простора (X, d) , постоји $u \in X$ такво да $u = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Из непрекидности функције f следи да $f(x_n) \rightarrow f(u)$ када $n \rightarrow \infty$. Пошто је $x_{n+1} = f(x_n)$, добијамо да је $f(u) = u$.

□

Специјално, ако је $M = X$, добијамо следећу последицу.

Последица 4.8. [28] Нека је (X, d) комплетан метрички простор и нека за свако $x, y \in X$ важи

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha(x, y) d(x, y),$$

где је $\alpha(x, y) \in F_1$. Тада пресликавање f има јединствену фиксну тачку.

Напомена 4.9. Претходна последица и Теорема 4.7 представљају уопштење Банахове теореме о фиксној тачки.

4.3 Нелинеарне контракције Бојда и Вонга

У овом одељку изложићемо неке резултате Бојда⁴ и Вонга⁵, објављене 1969. године. У раду [5] аутори су проучавали фиксне тачке пресликавања дефинисаних на следећи начин.

Нека је (X, d) метрички простор, слику функције d означаваћемо са P , док ће њено затворење бити означено са $\bar{P}$. Према томе, $P = \{d(x, y) : x, y \in X\}$.

Дефиниција 4.10. Нека је (X, d) метрички простор. За пресликавање $f : X \rightarrow X$ које задовољава неједнакост

$$d(f(x), f(y)) \leq \Psi(d(x, y)), \quad \text{за све } x, y \in X, \quad (4.16)$$

где је Ψ функција дефинисана на затворењу слике од d , каже се да је Ψ -контракција.

Приметимо да Ракочева контракција, која је разматрана у претходном одељку, представља посебан случај Ψ -контракције када је

$$\Psi(t) = \alpha(t)t,$$

при чему је α опадајућа функција за коју важи $\alpha(t) < 1$ за свако $t > 0$. Ракоч је показао да пресликавање које задовољава услов (4.16) у том случају има јединствену фиксну тачку. Такође, може се показати да исти закључак Банахове теореме важи и за $\Psi(t) = \alpha(t)t$, када је функција α растућа и задовољава услов $\alpha(t) < 1$ за $t \geq 0$.

Бојд и Вонг су овај резултат додатно уопштили показавши да је довољно претпоставити да функција Ψ задовољава услов

$$\Psi(t) < t, \quad \text{за } t > 0,$$

и да је одозго полунепрекидна с десне стране. Штавише, ако је простор метрички конвексан, услов полунепрекидности функције Ψ није неопходан.

Подсетимо се да је функција $\varphi : X \rightarrow E$, $E \subseteq \mathbb{R}$, одозго полунепрекидна са десне стране у тачки $t_0 \in X$ ако за сваки низ $(t_n) \subseteq X$ који се приближава тачки t_0 са њене десне стране, односно $t_n \rightarrow t_0^+$ када $n \rightarrow \infty$, следи

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) \leq \varphi(t_0).$$

Функција $\varphi : X \rightarrow E$, $E \subseteq \mathbb{R}$ назива се одозго полунепрекидна с десне стране на скупу X ако је одозго полунепрекидна с десне стране функција у свакој тачки $t \in X$.

⁴енгл. *David William Boyd* (рођен 1941)

⁵енгл. *James Sai-Wing Wong* (1940–2025)

Теорема 4.11. [5] Дат је комплетан метрички простор (X, d) . Ако је пресликавање $f : X \rightarrow X$ Ψ -контракција, где је $\Psi : \overline{P} \rightarrow [0, \infty)$ одозго полунепрекидна са десне стране функција на скупу $\overline{P}$, и задовољава услов

$$\Psi(t) < t, \quad \text{за свако } t \in \overline{P} \setminus \{0\},$$

тада пресликавање f има јединствену фиксну тачку x_0 и важи

$$f^n(x) \rightarrow x_0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{за свако } x \in X.$$

Доказ. Нека је $x \in X$, посматрајмо низ итерација $x, f(x), f^2(x), \dots$. Дефинишимо низ који представља растојања између две узастопне итерације

$$c_n = d(f^n(x), f^{n-1}(x)), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

На основу услова (4.16) и чињенице да је $\Psi(t) < t$ за свако $t > 0$, добијамо

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \\ &\leq \Psi(d(f^n(x), f^{n-1}(x))) \\ &= \Psi(c_n) \\ &< c_n. \end{aligned}$$

Пошто је низ (c_n) монотонно опадајући и одоздо ограничен нулом, он је конвергентан. Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c \geq 0$. Показаћемо да је $c = 0$.

Претпоставимо супротно да је $c > 0$, тада је $\Psi(c) < c$. Из неједнакости $c_{n+1} \leq \Psi(c_n)$, преласком на горњу граничну вредност, а затим коришћењем особина функције Ψ добијамо

$$c \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \Psi(c_n) \leq \Psi(c) < c,$$

што је контрадикција. Дакле, мора бити $c = 0$.

Показаћемо да је $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев низ за свако $x \in X$. Тада ће гранична вредност овог низа бити јединствена фиксна тачка пресликавања f . Претпоставимо супротно да низ $(f^n(x))$ није Кошијев. Тада постоји $\varepsilon > 0$ и низови природних бројева $(m(k))$ и $(n(k))$ такви да је $m(k) > n(k) \geq k$ и да важи

$$d_k = d(f^{m(k)}(x), f^{n(k)}(x)) \geq \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

Можемо претпоставити да је

$$d(f^{m(k)-1}(x), f^{n(k)}(x)) < \varepsilon,$$

тако што ћемо изабрати $m(k)$ као најмањи индекс већи од $n(k)$ за који важи $d(f^{m(k)}(x), f^{n(k)}(x)) \geq \varepsilon$. Из (4.17), применом неједнакости троугла и коришћењем избора индекса $m(k)$ добијамо

$$\begin{aligned} d_k &= d(f^{m(k)}(x), f^{n(k)}(x)) \\ &\leq d(f^{m(k)}(x), f^{m(k)-1}(x)) + d(f^{m(k)-1}(x), f^{n(k)}(x)) \\ &< c_{m(k)} + \varepsilon \\ &< c_k + \varepsilon. \end{aligned}$$

Како је $m(k) \geq k$, последњу неједнакост добијамо из монотоности низа (c_n) .

Из $\varepsilon \leq d_k$ и $c_k \rightarrow 0$ следи $d_k \rightarrow \varepsilon^+$, када $k \rightarrow \infty$. Како је

$$\begin{aligned} d_k &\leq d(f^{m(k)}(x), f^{m(k)+1}(x)) + d(f^{m(k)+1}(x), f^{n(k)+1}(x)) \\ &\quad + d(f^{n(k)+1}(x), f^{n(k)}(x)) \\ &< 2c_k + \Psi(d(f^{m(k)}(x), f^{n(k)}(x))) \\ &= 2c_k + \Psi(d_k), \end{aligned}$$

и Ψ одозго полунепрекидна с десне стране, када пустимо да $k \rightarrow \infty$ добијамо

$$\varepsilon \leq \Psi(\varepsilon),$$

што је контрадикција, јер за $\varepsilon > 0$ важи $\Psi(\varepsilon) < \varepsilon$. Стога је низ $(f^n(x))$ Кошијев.

Из комплетности метричког простора (X, d) следи да постоји тачка $x_0 \in X$ т.д.

$$f^n(x) \longrightarrow x_0, \quad \text{када } n \rightarrow \infty.$$

Пошто је f контрактивно пресликавање, оно је непрекидно, па из последње конвергенције следи $f(x_0) = x_0$. Дакле, x_0 је фиксна тачка пресликавања f , а њена јединственост следи из контрактивности пресликавања f .

□

Следећи пример показује колико је важно да се услов о полунепрекидности функције Ψ не изостави, јер тада Теорема 4.11, у општем случају, не мора да важи.

Пример 4.12. Нека је $X = \{x_n = n\sqrt{2} + 2^n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ са метриком $d(x, y) = |x - y|$. X је затворен подскуп скупа реалних бројева, па је самим тим и комплетан. Показаћемо да за свако ненула $p \in P = \{d(x, y) : x, y \in X\}$, постоји јединствен пар (x_n, x_m) такав да је

$$p = d(x_n, x_m).$$

Претпоставимо да за неке целе бројеве j, k, m, n , при чему је $j > k$ и $m > n$, важи

$$d(x_j, x_k) = d(x_m, x_n).$$

Тада добијамо

$$-(m - n - j + k)\sqrt{2} = 2^j - 2^k - 2^m + 2^n. \quad (4.19)$$

Пошто је лева страна једнакости (4.19) ирационалан број или једнака нули, док је десна страна рационалан број, следи да обе стране морају бити једнаке нули. Дакле, за $m - n = j - k = s$ важи

$$2^{n+s} - 2^n = 2^{k+s} - 2^k,$$

што је могуће једино ако је $n = k$, отуда је и $m = j$. Приметимо да за свако $n \in \mathbb{Z}$ важи $x_{n+1} > x_n$, што следи из:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= ((n+1)\sqrt{2} + 2^{n+1}) - (n\sqrt{2} + 2^n) \\ &= (n+1)\sqrt{2} - n\sqrt{2} + (2^{n+1} - 2^n) \\ &= \sqrt{2} + 2^n(2 - 1) \\ &= \sqrt{2} + 2^n \\ &> 0. \end{aligned}$$

Уведимо сада пресликавање $f : X \rightarrow X$ дефинисано са $f(x_n) = x_{n-1}$, као и функцију $\Psi : \bar{P} \rightarrow [0, \infty)$ дефинисану са

$$\Psi(p) = |x_{n-1} - x_{m-1}|, \text{ ако је } p = |x_n - x_m|,$$

$$\Psi(p) = 0, \text{ за } p \in \bar{P} \setminus P.$$

Покажимо да су тада испуњени сви услови претходне теореме, осим полунепрекидности.

$$1. \Psi(t) < t, \quad \forall t \in \bar{P} \setminus \{0\}$$

За $t \in P$, по дефиницији скупа P , постоје индекси $m, n \in \mathbb{Z}$ такви да је $t = |x_n - x_m|$. Нека је без умањења општости $n > m$. Како је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ строго растући, важи

$$\begin{aligned} t &= x_n - x_m \\ &= (n - m)\sqrt{2} + 2^n - 2^m. \end{aligned}$$

С друге стране, по дефиницији функције Ψ и како је $n - 1 > m - 1$, добијамо

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= x_{n-1} - x_{m-1} \\ &= ((n - 1)\sqrt{2} + 2^{n-1}) - ((m - 1)\sqrt{2} + 2^{m-1}) \\ &= (n - m)\sqrt{2} + 2^{n-1} - 2^{m-1}. \end{aligned}$$

Стога је

$$\begin{aligned} t - \Psi(t) &= (2^n - 2^m) - (2^{n-1} - 2^{m-1}) \\ &= (2^n - 2^{n-1}) - (2^m - 2^{m-1}) \\ &= 2^{n-1} - 2^{m-1} \\ &> 0. \end{aligned}$$

За $t \in \bar{P} \setminus P$, по дефиницији функције Ψ важи

$$\Psi(t) = 0 < t.$$

$$2. d(f(x), f(y)) = \Psi(d(x, y))$$

Нека су $x, y \in X$. Тада постоје $m, n \in \mathbb{Z}$ такви да је $x = x_n$ и $y = x_m$. По дефиницији пресликавања f и функције Ψ добијамо

$$d(f(x), f(y)) = |x_{n-1} - x_{m-1}| = \Psi(|x_n - x_m|) = \Psi(d(x, y)).$$

$$3. \text{ Покажимо да функција } \Psi \text{ није полунепрекидна здесна у тачки } \sqrt{2}. \text{ Пошто је } \sqrt{2} \in \bar{P} \setminus P, \text{ по дефиницији проширења функције } \Psi \text{ важи } \Psi(\sqrt{2}) = 0.$$

Посматрајмо низ елемената из скупа P дат са

$$t_n = |x_{-n+1} - x_{-n}|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Како је $t_n = \sqrt{2} + 2^{-n}$, имамо $t_n \rightarrow \sqrt{2}^+$, када $n \rightarrow \infty$.

Међутим, по дефиницији функције Ψ имамо $\Psi(t_n) = \sqrt{2} + 2^{-n-1}$, одакле $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(t_n) = \sqrt{2}$. Зато је

$$\limsup_{t \rightarrow \sqrt{2}^+} \Psi(t) > 0 = \Psi(\sqrt{2}).$$

Дакле, на комплетном метричком простору (X, d) имамо пресликавање $f : X \rightarrow X$ за које важи $d(f(x), f(y)) = \Psi(d(x, y))$, при чему је $\Psi(t) < t$, $t \in \overline{P} \setminus \{0\}$.

Међутим, пресликавање f нема фиксну тачку, јер је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ строго растући.

Овим је показано да се услов полунепрекидности здесна функције Ψ , у Теореме 4.11 не може изоставити.

Наредни пример илуструје значај услова $\Psi(t) < t$, за свако $t \in \overline{P} \setminus \{0\}$. Наиме, ако дозволимо да се само у једној тачки добије једнакост $\Psi(t_0) = t_0$, закључак Теореме 4.11 више не мора да важи.

Пример 4.13. Нека је $X = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ са уобичајеном метриком

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in X.$$

Дефинишимо пресликавања $f_1, f_2 : X \rightarrow X$ са

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & x \geq 1, \\ \frac{x-1}{2}, & x \leq -1, \end{cases}$$

и

$$f_2(x) = -f_1(x).$$

Нека је функција Ψ дефинисана са

$$\Psi(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & t < 2, \\ \frac{t}{2} + 1, & t \geq 2. \end{cases}$$

Покажимо да тада f_1 и f_2 задовољавају услов $d(f(x), f(y)) \leq \Psi(d(x, y))$. За пресликавање f_1 разматрамо два случаја. Ако су $x, y \geq 1$ или $x, y \leq -1$, онда важи

$$d(f_1(x), f_1(y)) = \frac{1}{2} d(x, y) \leq \Psi(d(x, y)).$$

Ако је без умањења општости, $x \geq 1$, а $y \leq -1$, онда је $d(x, y) \geq 2$, па добијамо

$$d(f_1(x), f_1(y)) = \frac{1}{2}(x - y + 2) = \frac{1}{2} d(x, y) + 1 = \Psi(d(x, y)).$$

Како је

$$d(f_2(x), f_2(y)) = |-f_1(x) + f_1(y)| = d(f_1(x), f_1(y)),$$

и пресликавање f_2 задовољава исти услов.

Лако се проверава да функција Ψ задовољава све услове Теореме 4.11 осим што је $\Psi(2) = 2$. Остаје да испитамо да ли у том случају важи закључак теореме. Решавањем једначине $f_1(x) = x$ добија се да пресликавање f_1 има две фиксне тачке, то су $-1, 1$. С друге стране, ако би x била фиксна тачка пресликавања f_2 , онда за $x \geq 1$ добијамо

$$-\frac{x+1}{2} = x,$$

одакле следи $x = -\frac{1}{3} \notin X$.

За $x \leq -1$ добијамо

$$-\frac{1}{2}(x-1) = x,$$

одакле следи $x = \frac{1}{3}$, што, такође, није елемент скупа X . Према томе, пресликавање f_2 нема фиксних тачака.

У наставку разматрамо комплетне метрички конвексне просторе. Следећа лема показује да се услов одозго полунепрекидности са десне стране добија из саме структуре простора, па се у наредној теорему он не захтева као посебна претпоставка.

Лема 4.14. [18] *Дат је комплетан метрички простор (X, d) који је метрички конвексан и пресликавање $f : X \rightarrow X$ које задовољава услов*

$$d(f(x), f(y)) \leq M d(x, y), \quad x, y \in X, \quad (4.20)$$

за неку константу $M < \infty$.

Дефинишимо функцију $\phi : [0, b) \rightarrow [0, b]$ са

$$\phi(t) = \sup\{d(f(x), f(y)) : x, y \in X, d(x, y) = t\}.$$

Тада,

(а) *Ако је $s > 0$, $t > 0$ и $s + t < b$, онда важи*

$$\phi(s + t) \leq \phi(s) + \phi(t),$$

односно, ϕ је субадитивна функција.

(б) *Функција ϕ је одозго полунепрекидна са десне стране функција на $[0, b)$.*

Доказ. (а) Нека су $x, y \in X$ такви да је $d(x, y) = s + t$. Пошто је простор метрички конвексан, постоји тачка $z \in X$ таква да важи

$$d(x, z) = s \quad \text{и} \quad d(z, y) = t.$$

Применом неједнакости троугла и дефиниције функције ϕ добијамо

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(y)) \\ &\leq \phi(s) + \phi(t). \end{aligned}$$

Како ова неједнакост важи за сваки пар тачака $x, y \in X$ за који је $d(x, y) = s + t$, узимањем супремума по свим таквим паровима добијамо

$$\phi(s + t) \leq \phi(s) + \phi(t).$$

(б) Нека је $t_0 \in [0, b)$ произвољно и $t_0 < t < b$. Из субадитивности функције ϕ следи

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi((t - t_0) + t_0) \\ &\leq \phi(t - t_0) + \phi(t_0) \\ &\leq M(t - t_0) + \phi(t_0). \end{aligned}$$

Према томе,

$$\limsup_{t \rightarrow t_0^+} \phi(t) \leq \phi(t_0),$$

дакле, функција ϕ је одозго полунепрекидна са десне стране на интервалу $[0, b)$. □

Теорема 4.15. [18] *Дат је комплетан метрички простор (X, d) који је метрички конвексан. Нека пресликавање $f : X \rightarrow X$ задовољава услов (4.16) и нека за $\Psi : \overline{P} \rightarrow [0, \infty)$ важи $\Psi(t) < t$ за свако $t \in \overline{P} \setminus \{0\}$.*

Тада, f има јединствену фиксну тачку x_0 и $f^n(x) \rightarrow x_0$ за свако $x \in X$.

Доказ. Дефинишимо функцију $\phi : [0, b) \rightarrow [0, b]$ на исти начин као у Лему 4.14:

$$\phi(t) = \sup\{d(f(x), f(y)) : x, y \in X, d(x, y) = t\}.$$

Из услова (4.16) следи да је

$$\phi(t) \leq \Psi(t), \text{ за свако } t \in [0, b).$$

У случају када је $P = [0, b]$, $b < \infty$, додефинишемо $\phi(b) = \Psi(b)$. Тада за свако $x, y \in X$ важи

$$d(f(x), f(y)) \leq \phi(d(x, y)). \quad (4.21)$$

Пошто је

$$\phi(t) \leq \Psi(t) < t, \quad t \in \overline{P} \setminus \{0\},$$

следи да је услов (4.20) испуњен за $M = 1$. Према Лему 4.14, функција ϕ је одозго полунепрекидна са десне стране функција на интервалу $[0, b)$. Применом Теореме 4.11 на пресликавање f , при чему се уместо функције Ψ узима функција ϕ , добија се да f има јединствену фиксну тачку x_0 и да за свако $x \in X$ важи $f^n(x) \rightarrow x_0$. $\square$

4.4 Меир–Килерова теорема

Меир⁶ и Килер⁷ су 1969. године дошли до значајног резултата у теорији фиксне тачке, тако што су показали да закључак Банахове теореме важи за ширу класу контракција, коју дефинишемо у наставку [26].

Дефиниција 4.16. Нека је (X, d) метрички простор. Функција $f : X \rightarrow X$ назива се *слабо униформно строго контрактивно пресликавање*, или *Меир–Килерова контракција* (*МК контракција*), ако за свако $\varepsilon > 0$, постоји $\delta > 0$ тако да $\forall x, y \in X$

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon. \quad (4.22)$$

Теорема 4.17. [26] *Нека је на комплетном метричком простору (X, d) дато пресликавање је $f : X \rightarrow X$. Ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta(\varepsilon) > 0$ тако да*

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon. \quad (4.23)$$

Тада пресликавање f има јединствену фиксну тачку x^ . Штавише, за сваку почетну тачку $x \in X$ важи*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^*. \quad (4.24)$$

⁶енгл. *Amram Meir* (1929–2019)

⁷енгл. *Emmett Brown Keeler* (рођен 1941.)

Доказ. Најпре приметимо да је f контрактивно пресликавање, односно

$$x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y). \quad (4.25)$$

Заиста, за $x \neq y$, $d(x, y) = \varepsilon > 0$, а услов (4.23) даје $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

Из (4.25) следи да је f непрекидно и да може имати највише једну фиксну тачку.

Зато је довољно показати да је за свако $x \in X$ низ $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев низ. Наиме, пошто је (X, d) комплетан метрички простор, сваки Кошијев низ $(f^n(x))$ ће конвергирати ка некој тачки $x^*(x) \in X$. Непрекидност пресликавања f тада даје

$$f(x^*) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = x^*,$$

Према томе, x^* ће бити јединствена фиксна тачка пресликавања f .

Остаје нам још да покажемо да је за свако $x \in X$ низ итерација $(f^n(x)) = (x_n)$ Кошијев низ. Нека је $x \in X$ и $c_n = d(x_n, x_{n+1})$, $n = 1, 2, \dots$. Из (4.25) следи да је низ (c_n) монотono опадајући. Како је низ (c_n) је ограничен одоздо, знамо онда и да је конвергентан. Претпоставимо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \varepsilon > 0.$$

Одатле следи да постоји $m \in \mathbb{N}$ тако да важи $c_m < \varepsilon + \delta$. С друге стране, из монотоности низа (c_n) следи $\varepsilon \leq c_m$, па нам услов (4.23) даје следећу неједнакост

$$c_{m+1} = d(f(x_m), f(x_{m+1})) < \varepsilon,$$

што је у супротности са тим да је ε гранична вредност низа (c_n) . Дакле, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

Претпоставимо супротно, да постоји $x \in X$ т.д. низ итерација $(x_n) = (f^n(x))$ није Кошијев. Тада постоји број $2\varepsilon > 0$ такав да за свако $m_0 \in \mathbb{N}$ постоје индекси $m, n > m_0$ за које важи

$$d(x_m, x_n) > 2\varepsilon.$$

Према услову (4.23), за тако изабрано $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да из

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta$$

следи

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon. \quad (4.26)$$

Јасно је да (4.26) важи и ако број δ заменимо мањим бројем $\delta' = \min\{\delta, \varepsilon\}$.

Пошто је $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, постоји $m_0 \in \mathbb{N}$ такав да $c_{m_0} < \frac{\delta'}{3}$. Тада из наше претпоставке можемо изабрати индексе $m, n > m_0$, такве да је $m < n$ и да важи $d(x_m, x_n) > 2\varepsilon$.

- Показаћемо сада да постоји индекс $j \in \{m, m+1, \dots, n\}$ такав да важи

$$\varepsilon + \frac{2\delta'}{3} < d(x_m, x_j) < \varepsilon + \delta'. \quad (4.27)$$

Најпре приметимо да је $d(x_{n-1}, x_n) = c_{n-1} \leq c_{m_0} < \frac{\delta'}{3}$.

Пошто је $d(x_m, x_n) > 2\varepsilon$, из $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n)$ следи

$$d(x_m, x_{n-1}) > 2\varepsilon - \frac{\delta'}{3}.$$

Како је $\delta' \leq \varepsilon$, важи $2\varepsilon - \frac{\delta'}{3} \geq \varepsilon + \frac{2\delta'}{3}$, па добијамо

$$d(x_m, x_{n-1}) > \varepsilon + \frac{2\delta'}{3}.$$

Нека је сада j најмањи индекс из скупа $\{m, m+1, \dots, n-1\}$ за који важи

$$d(x_m, x_j) > \varepsilon + \frac{2\delta'}{3}.$$

Сада ћемо показати да за тако изабрани индекс j важи и горња граница у (4.27), односно $d(x_m, x_j) < \varepsilon + \delta'$. Претпоставимо да то није тачно, тј. да је $d(x_m, x_j) \geq \varepsilon + \delta'$. Пошто је j најмањи индекс са поменутом особином следи да је $j > m$ и важи

$$d(x_m, x_{j-1}) \leq \varepsilon + \frac{2\delta'}{3}. \quad (4.28)$$

Притом важи $c_{j-1} \leq c_{m_0} < \frac{\delta'}{3}$, па применом следеће неједнакости троугла

$$d(x_m, x_j) \leq d(x_m, x_{j-1}) + d(x_{j-1}, x_j),$$

добијамо

$$\varepsilon + \delta' \leq d(x_m, x_j) < d(x_m, x_{j-1}) + \frac{\delta'}{3},$$

одакле следи

$$d(x_m, x_{j-1}) > \varepsilon + \frac{2\delta'}{3}.$$

Међутим, ово је у контрадикцији са (4.28). Овим је доказано да постоји индекс j такав да важи (4.27).

Коначно, према услову (4.26), важи $d(f(x_m), f(x_j)) < \varepsilon$, тј., $d(x_{m+1}, x_{j+1}) < \varepsilon$. Сада, из

$$d(x_m, x_j) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{j+1}) + d(x_{j+1}, x_j),$$

узимајући у обзир да је $m, j > m_0$, а низ (c_n) опадајући, следи

$$\begin{aligned} d(x_m, x_j) &\leq c_m + d(x_{m+1}, x_{j+1}) + c_j \\ &< \frac{\delta'}{3} + \varepsilon + \frac{\delta'}{3}. \end{aligned}$$

Међутим, ово је у контрадикцији (4.27). Према томе, (x_n) мора бити Кошијев низ. $\square$

У наставку ћемо показати да Меир–Килерова теорема представља уопштење Банаховог принципа контракције и Еделштајнове теореме о фиксној тачки. То ћемо учинити тако што ћемо доказати да услови ових теорема имплицирају услов МК–контракције, па се и њихови закључци добијају непосредном применом Меир–Килерове теореме.

Теорема 4.18 (Банахов принцип контракције). *Нека је на комплетном метричком простору (X, d) дато пресликавање $f : X \rightarrow X$, за које постоји константа $q \in [0, 1)$ тако да за свако $x, y \in X$ важи*

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y).$$

Тада пресликавање f има јединствену фиксну тачку.

Доказ. Дато је $\varepsilon > 0$ и нека је

$$\delta = \left(\frac{1}{q} - 1 \right) \varepsilon.$$

Ако је $\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta$ онда добијамо

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y) < q(\varepsilon + \delta) = \varepsilon.$$

Према томе, пресликавање f задовољава услов (4.23). Применом Теореме 4.17 закључује да f има јединствену фиксну тачку. □

Теорема 4.19 (Еделштајнова теорема о фиксној тачки). *Нека је (X, d) компактан метрички простор и $f : X \rightarrow X$. Ако за свако $x, y \in X$ за које је $x \neq y$ важи*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y),$$

онда f има јединствену фиксну тачку.

Доказ. Претпоставимо да функција f не задовољава услов (4.23). То значи да постоји $\varepsilon > 0$ такво да за свако $\delta > 0$ можемо наћи $x, y \in X$ са особином

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \quad \text{и} \quad d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon.$$

Узимајући $\delta = \frac{1}{n}$ за $n \in \mathbb{N}$, добијамо низове (x_n) и (y_n) у X такве да важи

$$d(x_n, y_n) < \varepsilon + \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Како је X компактан скуп, постоје поднизови (x_{n_k}) и (y_{m_k}) низова (x_n) и (y_n) које конвергирају, редом, ка $x_0 \in X$ и $y_0 \in X$. Јасно је да тада важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x_0, y_0) \leq \varepsilon,$$

а непрекидност функције f нам даје

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f(x_n), f(y_n)) = d(f(x_0), f(y_0)) \geq \varepsilon.$$

Дакле, добијамо $d(x_0, y_0) \leq d(f(x_0), f(y_0))$, што нас доводи до контрадикције. Према томе, функција f задовољава услов (4.23) и доказ следи из Теореме 4.17. □

4.5 Кананова, Чатерџијева и Замфирескуова пресликавања

Канан⁸ је 1968. године увео нови тип контрактивног пресликавања. Његов резултат даје постојање и јединственост фиксне тачке пресликавања која не морају бити непрекидна.

Теорема 4.20 (Теорема Канана [21]). *Нека је (X, d) комплетан метрички простор. Ако је $0 \leq q < \frac{1}{2}$ и $f : X \rightarrow X$ пресликавање које задовољава услов*

$$d(f(x), f(y)) \leq q[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] \text{ за свако } x, y \in X, \quad (4.29)$$

онда f има јединствену фиксну тачку.

Доказ. Нека је

$$c = \inf\{d(x, f(x)) : x \in X\}. \quad (4.30)$$

Показаћемо да је $c = 0$. Претпоставимо супротно, да је $c > 0$. Како је $\frac{c(1-q)}{q} > c$ и c инфимум скупа $\{d(x, f(x)) : x \in X\}$, постоји $x \in X$ такво да је

$$d(x, f(x)) < \frac{c(1-q)}{q}.$$

Применом услова (4.29) на пар тачака x и $f(x)$ добијамо

$$d(f(x), f^2(x)) \leq q[d(x, f(x)) + d(f(x), f^2(x))].$$

Одатле следи

$$d(f(x), f^2(x)) \leq \frac{q}{1-q} d(x, f(x)) < c,$$

што је у супротности са (4.30). Дакле, $c = \inf\{d(x, f(x)) : x \in X\} = 0$. Одатле следи да постоји низ (x_n) у X такав да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, f(x_n)) = 0.$$

Сада желимо да покажемо да је (x_n) Кошијев низ. За произвољне $m, n \in \mathbb{N}$, применом неједнакости троугла и (4.29) добијамо

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, f(x_m)) + d(f(x_m), f(x_n)) + d(f(x_n), x_n) \\ &\leq d(x_m, f(x_m)) + d(x_n, f(x_n)) + q[d(x_m, f(x_m)) + d(x_n, f(x_n))] \\ &= (1+q)[d(x_m, f(x_m)) + d(x_n, f(x_n))] \end{aligned}$$

Десна страна неједнакости тежи нули када $m, n \rightarrow \infty$, па је низ (x_n) Кошијев. Пошто је (X, d) комплетан метрички простор, а низ (x_n) Кошијев, постоји тачка $z \in X$ таква да је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$. Да је и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = z$ следи из

$$d(f(x_n), z) \leq d(f(x_n), x_n) + d(x_n, z) \longrightarrow 0, \text{ када } n \longrightarrow \infty.$$

Докажимо да је $f(z) = z$. Из

$$\begin{aligned} d(z, f(z)) &\leq d(z, f(x_n)) + d(f(x_n), f(z)) \\ &\leq d(z, f(x_n)) + q[d(x_n, f(x_n)) + d(z, f(z))] \end{aligned}$$

⁸енгл. *Rangachary Kannan* (1946–2000)

када $n \rightarrow \infty$, добијамо

$$\begin{aligned} d(z, f(z)) &\leq q d(z, f(z)), \text{ тј.,} \\ (1 - q)d(z, f(z)) &\leq 0 \end{aligned}$$

па је $d(z, f(z)) = 0$. Према томе, z је фиксна тачка пресликавања f .

Јединственост: Нека су u и v фиксне тачке пресликавања f . Тада из услова (4.29) следи

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(f(u), f(v)) \\ &\leq q[d(u, f(u)) + d(v, f(v))] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Дакле $u = v$, па је фиксна тачка јединствена. □

Независност Банаховог (2.1) и Канановог услова (4.29) може се илустровати следећим примерима. Први пример показује да постоје пресликавања која задовољавају Кананов услов, али нису непрекидна, па не задовољавају Банахов услов, док други пример показује да постоје q -контракције које не испуњавају Кананов услов.

Пример 4.21. Нека је $X = [0, 1]$ и нека је пресликавање $f : X \rightarrow X$ дефинисано са

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ \frac{x}{5}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Најпре приметимо да f има прекид у тачки $x = \frac{1}{2}$. Заиста,

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{10} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} f(x).$$

Како из Банаховог услова (2.1) следи непрекидност пресликавања, закључујемо да f не задовољава услов (2.1).

С друге стране, пресликавање f задовољава Кананов услов (4.29) за $q = \frac{4}{9}$.

Ако је $x < \frac{1}{2} \leq y$, онда

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x}{4} - \frac{y}{5} \right| \leq \frac{5x + 4y}{20},$$

док је

$$\frac{4}{9}(|x - f(x)| + |y - f(y)|) = \frac{15x + 16y}{45},$$

па је

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{9}(|x - f(x)| + |y - f(y)|).$$

Случајеви $x, y < \frac{1}{2}$ и $x, y \geq \frac{1}{2}$ се проверавају на сличан начин.

Пример 4.22. Нека је $X = [0, 1]$ и нека је пресликавање $f : X \rightarrow X$ дефинисано са

$$f(x) = \frac{x}{3}, \quad x \in [0, 1].$$

За произвољне $x, y \in X$ важи

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \right| = \frac{1}{3}|x - y|,$$

па је Банахов услов задовољен за $q = \frac{1}{3}$.

Међутим, Кананов услов није задовољен. То уочавамо за $x = \frac{1}{3}$ и $y = 0$. Тада се добија $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{9}$, док је $|x - f(x)| + |y - f(y)| = \frac{2}{9}$, али ни за једно $q \in [0, \frac{1}{2})$ не важи

$$\frac{1}{9} \leq q \frac{2}{9}.$$

Напомена 4.23. Кананова теорема о фиксној тачки није уопштење Банаховог принципа контракције. Ипак, Кананова теорема има посебан значај у теорији фиксних тачака, јер даје карактеризацију комплетног метричког простора. Тачније, метрички простор X је комплетан ако и само ако свако Кананово пресликавање на X има фиксну тачку. За разлику од тога, постоји метрички простор X који није комплетан, а за који свако контрактивно пресликавање има фиксну тачку.

Чатерџи⁹ је 1972. године доказао следећу варијанту Кананове теореме о фиксној тачки, у којој се услов контрактивности заснива на укрштеним растојањима $d(x, f(y))$ и $d(y, f(x))$.

Теорема 4.24 (Чатерџијева теорема [7]). *Дат је комплетан метрички простор (X, d) . Нека је $0 \leq q < \frac{1}{2}$ и $f : X \rightarrow X$ пресликавање које задовољава услов*

$$d(f(x), f(y)) \leq q[d(x, f(y)) + d(y, f(x))], \quad (4.31)$$

за свако $x, y \in X$, тада f има јединствену фиксну тачку.

Доказ. Нека је $x \in X$ произвољно. Посматрамо низ итерација $(f^n(x))$.

Применом услова (4.31), добијамо

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^{n+1}(x)) &\leq q[d(f^{n-1}(x), f^{n+1}(x)) + d(f^n(x), f^n(x))] \\ &= q d(f^{n-1}(x), f^{n+1}(x)) \\ &\leq d(f^{n-1}(x), f^n(x)) + d(f^n(x), f^{n+1}(x)). \end{aligned}$$

Пребацивањем последњег члана на леву страну имамо

$$(1 - q)d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq q d(f^{n-1}(x), f^n(x)),$$

па се узастопном применом претходне неједнакости добија

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^{n+1}(x)) &\leq \frac{q}{1 - q} d(f^{n-1}(x), f^n(x)) \\ &\leq \left(\frac{q}{1 - q} \right)^n d(x, f(x)). \end{aligned}$$

⁹енгл. *Santi Kumar Chatterjea*

За произвольне $n, r \in \mathbb{N}$ применом неједнакости троугла, из претходно добијене оцене следи

$$\begin{aligned}
 d(f^n(x), f^{n+r}(x)) &\leq \sum_{k=n}^{n+r-1} d(f^k(x), f^{k+1}(x)) \\
 &\leq \sum_{k=n}^{n+r-1} \left(\frac{q}{1-q}\right)^k d(x, f(x)) \\
 &\leq \left(\frac{q}{1-q}\right)^n \left(1 + \frac{q}{1-q} + \cdots + \left(\frac{q}{1-q}\right)^{r-1}\right) d(x, f(x)) \\
 &\leq \left(\frac{q}{1-q}\right)^n \frac{1-q}{1-2q} d(x, f(x)).
 \end{aligned}$$

Пошто је $\frac{q}{1-q} < 1$, следи да је низ $(f^n(x))$ Кошијев у X . Како је (X, d) комплетан метрички простор, постоји тачка $z \in X$ таква да је

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x).$$

Покажимо да је z фиксна тачка пресликавања f . Применом неједнакости троугла и услова (4.31) добијамо

$$\begin{aligned}
 d(z, f(z)) &\leq d(z, f^n(x)) + d(f^n(x), f(z)) \\
 &\leq d(z, f^n(x)) + q[d(f^{n-1}(x), f(z)) + d(f^n(x), z)].
 \end{aligned}$$

Када $n \rightarrow \infty$, следи

$$d(z, f(z)) \leq q d(z, f(z)),$$

односно,

$$(1 - q)d(z, f(z)) \leq 0,$$

а како је $q < \frac{1}{2}$, имамо

$$d(z, f(z)) = 0, \text{ то јест, } f(z) = z.$$

Јединственост: Претпоставимо супротно, да постоји још једна фиксна тачка $z' \in X$, $z' \neq z$. Тада је

$$\begin{aligned}
 d(z, z') &= d(f(z), f(z')) \\
 &\leq q[d(z, f(z')) + d(z', f(z))] \\
 &\leq 2q d(z, z').
 \end{aligned}$$

Пошто је $2q < 1$, из $(1 - 2q)d(z, z') \leq 0$, следи $d(z, z') = 0$, што је у контрадикцији са претпоставом. Дакле, фиксна тачка пресликавања f је јединствена. □

Године 1972, Замфиреску¹⁰ је објединио резултате Банаха, Канана и Чатерџија у следећој теорему. [29]

¹⁰енгл. *Tudor Zamfirescu* (рођен 1944.)

Теорема 4.25 (Теорема Замфирескуа [29]). *Дат је комплетан метрички простор (X, d) . Нека је $f : X \rightarrow X$ пресликавање за које постоје реални бројеви $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta, \gamma < \frac{1}{2}$ такви да је за свако $x, y \in X$ задовољен бар један од следећих услова:*

$$\begin{aligned} (z_1) \quad & d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y); \\ (z_2) \quad & d(f(x), f(y)) \leq \beta [d(x, f(x)) + d(y, f(y))]; \\ (z_3) \quad & d(f(x), f(y)) \leq \gamma [d(x, f(y)) + d(y, f(x))]. \end{aligned}$$

Тада пресликавање f има јединствену фиксну тачку.

Доказ. Нека су $x, y \in X$. Према претпоставци теореме, за пар тачака x и y задовољен је бар један од услова (z_1) , (z_2) или (z_3) .

Ако је (z_2) задовољено, тада имамо

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq \beta [d(x, f(x)) + d(y, f(y))] \\ &\leq \beta \left\{ d(x, f(x)) + [d(y, x) + d(x, f(x)) + d(f(x), f(y))] \right\}. \end{aligned}$$

Одатле је

$$(1 - \beta)d(f(x), f(y)) \leq 2\beta d(x, f(x)) + \beta d(x, y),$$

односно

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{2\beta}{1 - \beta} d(x, f(x)) + \frac{\beta}{1 - \beta} d(x, y).$$

Слично, ако је испуњен услов (z_3) , поново применом неједнакости троугла добијамо

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq \gamma [d(x, f(y)) + d(y, f(x))] \\ &\leq \gamma [d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(y, x) + d(x, f(x))] \\ &= \gamma [2d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(x, y)]. \end{aligned}$$

Према томе,

$$(1 - \gamma)d(f(x), f(y)) \leq 2\gamma d(x, f(x)) + \gamma d(x, y),$$

односно

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{2\gamma}{1 - \gamma} d(x, f(x)) + \frac{\gamma}{1 - \gamma} d(x, y).$$

С друге стране, ако је испуњен услов (z_1) , онда важи

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Ради обједињавања сва три случаја, уведемо константу

$$\lambda = \max \left\{ \alpha, \frac{\beta}{1 - \beta}, \frac{\gamma}{1 - \gamma} \right\}.$$

Како је $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta$, и $\gamma < \frac{1}{2}$ следи да је $0 \leq \lambda < 1$. Тада, ако је испуњен услов (z_2) или (z_3) , важи

$$d(f(x), f(y)) \leq 2\lambda d(x, f(x)) + \lambda d(x, y) \quad (4.32)$$

На сличан начин показује се да, ако је испуњен услов (z_2) или (z_3) , важи и

$$d(f(x), f(y)) \leq 2\lambda d(x, f(y)) + \lambda d(x, y). \quad (4.33)$$

Уколико је, пак, испуњен услов (z_1) , тада из неједнакости

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \leq \lambda d(x, y)$$

непосредно следи да важе неједнакости (4.32) и (4.33).

Покажимо да пресликавање f има фиксну тачку. Нека је $x_0 \in X$ произвољно изабрана тачка и

$$x_n = f^n(x_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пикарове итерације пресликавања f .

Ако су $x := x_n$ и $y := x_{n-1}$ две сукцесивне апроксимације, из (4.33) добијамо

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}).$$

Математичком индукцијом по n добијамо

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n d(x_1, x_0).$$

Како је $0 \leq \lambda < 1$, следи да је низ (x_n) Кошијев. Пошто је (X, d) комплетан, постоји тачка $z \in X$ таква да

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

При томе важи и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0.$$

Применом неједнакости троугла и неједнакости (4.32) добијамо

$$\begin{aligned} d(z, f(z)) &\leq d(z, x_{n+1}) + d(f(x_n), f(z)) \\ &\leq d(z, x_{n+1}) + \lambda d(z, x_n) + 2\lambda d(x_n, f(x_n)), \end{aligned}$$

а када пустимо да $n \rightarrow \infty$, добијамо $d(z, f(z)) = 0$, односно $f(z) = z$.

Јединственост: Нека су z и z' фиксне тачке пресликавања f . Тада је, на основу неједнакости (4.32),

$$\begin{aligned} d(z, z') &= d(f(z), f(z')) \\ &\leq 2\lambda d(z, f(z)) + \lambda d(z, z') \\ &= \lambda d(z, z'). \end{aligned}$$

Пошто је $0 \leq \lambda < 1$, следи да је $d(z, z') = 0$, односно $z = z'$.

□

Напомена 4.26. Ако функција f задовољава услов из Теореме 4.25, онда пишемо $f \in (Z)$. Посебно, ако f задовољава само неки од услова (z_i) , $i = 1, 2, 3$, онда пишемо $f \in (Z; z_i)$, $i = 1, 2, 3$. Размотримо следеће услове.

(Z') : Постоје ненегативне функције $a, b, c : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ такве да важи

$$\sup_{x, y \in X} (a(x, y) + 2b(x, y) + 2c(x, y)) \leq \lambda < 1,$$

при чему је за сваки пар $x, y \in X$

$$d(f(x), f(y)) \leq a(x, y)d(x, y) + b(x, y)(d(x, f(x)) + d(y, f(y))) \\ + c(x, y)(d(x, f(y)) + d(y, f(x))).$$

(Z'') : Постоји константа h , где је $0 \leq h < 1$, таква да за сваки пар $x, y \in X$ важи

$$d(f(x), f(y)) \leq h \max \left\{ d(x, y), \frac{d(x, f(x)) + d(y, f(y))}{2}, \frac{d(x, f(y)) + d(y, f(x))}{2} \right\}.$$

Услови (Z) , (Z') и (Z'') су међусобно еквивалентни. У наставку ћемо показати следеће импликације

$$(Z) \xrightarrow{(1)} (Z') \xrightarrow{(2)} (Z'') \xrightarrow{(3)} (Z).$$

(1) $(Z) \implies (Z')$:

Уколико пресликавање f и $x, y \in X$ задовољавају услов $(Z; z_1)$, онда дефинишемо

$$a(x, y) = \alpha, \quad b, c = 0.$$

Ако f задовољава услов $(Z; z_2)$, онда дефинишемо

$$b(x, y) = \beta, \quad a, c = 0$$

и слично, у случају $(Z; z_3)$, дефинишемо

$$c(x, y) = \gamma, \quad a, b = 0$$

(2) $(Z') \implies (Z'')$: Уводимо функцију

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), \frac{d(x, f(x)) + d(y, f(y))}{2}, \frac{d(x, f(y)) + d(y, f(x))}{2} \right\}.$$

Нека пресликавање f задовољава услов (Z') . Тада важи

$$d(f(x), f(y)) \leq (a(x, y) + 2b(x, y) + 2c(x, y))M(x, y) \leq \lambda M(x, y),$$

па је услов (Z'') испуњен.

(3) $(Z'') \implies (Z)$: Нека пресликавање f задовољава услов (Z'') . За сваки пар $x, y \in X$ разматрамо три могућа случаја.

i) Ако је $M(x, y) = d(x, y)$, онда пресликавање f задовољава услов $(Z; z_1)$ за $\alpha = h$.

ii) Ако је $M(x, y) = \frac{d(x, f(x)) + d(y, f(y))}{2}$, онда пресликавање f задовољава услов $(Z; z_2)$ са $\beta = \frac{h}{2}$.

iii) На крају, ако је $M(x, y) = \frac{d(x, f(y)) + d(y, f(x))}{2}$, онда пресликавање f задовољава услов $(Z; z_3)$ са $\gamma = \frac{h}{2}$.

4.6 Ћирићева генерализована контракција

У раду [8], Ћирић¹¹ је уопштио добро познате услове контракције, Банахову и Кананову контракцију, и увео појам генерализоване контракције, који је дефинисао на следећи начин.

Дефиниција 4.27. Нека је (X, d) метрички простор. Пресликавање $f : X \rightarrow X$ назива се λ -генерализована контракција ако за свако $x, y \in X$ постоје ненегативни бројеви $q(x, y)$, $r(x, y)$, $s(x, y)$ и $t(x, y)$ тако да је

$$\sup_{x, y \in X} \{q(x, y) + r(x, y) + s(x, y) + 2t(x, y)\} = \lambda < 1,$$

и да за свако $x, y \in X$ важи

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) \leq & q(x, y)d(x, y) + r(x, y)d(x, f(x)) + s(x, y)d(y, f(y)) \\ & + t(x, y)(d(x, f(y)) + d(y, f(x))). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Приметимо је да је овај услов еквивалентан чињеници да постоји константа h , $0 \leq h < 1$ таква да за све $x, y \in X$ важи

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) \leq h \max \left\{ d(x, y), d(x, f(x)), d(y, f(y)), \right. \\ \left. \frac{d(x, f(y)) + d(y, f(x))}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Следећи примери показују да услов (4.34) заиста представља генерализацију услова (2.1) и (4.29).

Пример 4.28. Нека је $X = [0, 2] \subseteq \mathbb{R}$ и нека је пресликавање $f : X \rightarrow X$ дефинисано са

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{9}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{x}{10}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Пресликавање f задовољава услов (4.34) за

$$q(x, y) = \frac{1}{10}, \quad r(x, y) = s(x, y) = \frac{1}{4}, \quad t(x, y) = \frac{1}{6},$$

за све $x, y \in X$.

Међутим, f не задовољава Банахов услов (2.1) на целом X , јер за

$$x = \frac{999}{1000} \quad \text{и} \quad y = \frac{1001}{1000}$$

имамо

$$d(f(x), f(y)) = \left| \frac{999}{9000} - \frac{1001}{10000} \right| = \frac{981}{90000},$$

док је

$$d(x, y) = \left| \frac{999}{1000} - \frac{1001}{1000} \right| = \frac{2}{1000} = \frac{180}{90000}.$$

Одатле следи

$$d(f(x), f(y)) > 5d(x, y).$$

¹¹срп. Љубомир Б. Ћирић (1935–2016)

Пример 4.29. Нека је $X = [0, 10] \subseteq \mathbb{R}$ и нека је

$$f(x) = \frac{3}{4}x, \quad x \in X.$$

Покажимо да f не задовољава Кананов услов контракције. За $x = 0$ и $y = 8$ Кананова неједнакост има облик $6 \leq (0 + 2)$, односно, $q \geq 3$. Пошто Кананов услов захтева $0 \leq q < \frac{1}{2}$, следи да f није Кананова контракција.

С друге стране, за

$$q(x, y) = \frac{3}{4}, \quad r(x, y) = s(x, y) = t(x, y) = \frac{1}{20},$$

важи

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + 2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{19}{20} < 1$$

и пресликавање f задовољава услов Ћирићеве генерализоване контракције, што се уочава из следеће неједнакости

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \frac{3}{4} d(x, y) \\ &\leq \frac{3}{4} d(x, y) + \frac{1}{20} d(x, f(x)) + \frac{1}{20} d(y, f(y)) \\ &\quad + \frac{1}{20} (d(x, f(y)) + d(y, f(x))), \end{aligned}$$

Дефиниција 4.30. Нека је (X, d) метрички простор, $f : X \rightarrow X$ пресликавање и $x \in X$. Скуп

$$\mathcal{O}(x; f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$$

назива се *f -орбита елемента x* .

Ако је пресликавање f дато, користићемо уобичајену ознаку $\mathcal{O}(x)$.

Метрички простор (X, d) назива се *f -орбитално комплетан* ако сваки Кошијев низ у $\mathcal{O}(x; f)$, за произвољно $x \in X$, конвергира у X .

Напомена 4.31. Сваки комплетан метрички простор је f -орбитално комплетан, али обрнути закључак у општем случају не важи. На основу доказа Банахове теореме о фиксној тачки види се да није неопходно да цео простор (X, d) буде комплетан, већ је довољно захтевати да сваки Кошијев низ који припада орбити $\mathcal{O}(x; f) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ конвергира у X .

Дакле, услов комплетности може се заменити слабијим условом f -орбиталне комплетности. Ова идеја омогућава проширење резултата о фиксним тачкама на шире класе пресликавања, као што су λ -генерализоване контракције, што је дато у следећој теорему.

Теорема 4.32 (Ћирићева теорема[8]). Нека је $f : X \rightarrow X$ λ -генерализована контракција на f -орбитално комплетном метричком простору X . Тада,

(i) пресликавање f има јединствену фиксну тачку $z \in X$

(ii) за свако $x \in X$, $(f^n(x)) \rightarrow z$ и

(iii) важи оцена $d(f^n(x), z) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x, f(x))$.

Доказ. (ii) Нека је $x \in X$ произвољно и дефинишимо низ (x_n) са

$$x_0 = x, \quad x_1 = f(x_0), \dots, \quad x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x), \dots \quad n \in \mathbb{N}.$$

На основу услова (4.34) следи

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\ &\leq q(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_n) \\ &\quad + r(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, f(x_{n-1})) + s(x_{n-1}, x_n)d(x_n, f(x_n)) \\ &\quad + t(x_{n-1}, x_n)(d(x_{n-1}, f(x_n)) + d(x_n, f(x_{n-1}))) \\ &\leq q(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_n) + r(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_n) \\ &\quad + s(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1}) + t(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Применом неједнакости троугла, имамо

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq (q(x_{n-1}, x_n) + r(x_{n-1}, x_n))d(x_{n-1}, x_n) \\ &\quad + s(x_{n-1}, x_n)d(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + t(x_{n-1}, x_n)(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})). \end{aligned}$$

Одатле следи

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{q(x_{n-1}, x_n) + r(x_{n-1}, x_n) + t(x_{n-1}, x_n)}{1 - s(x_{n-1}, x_n) - t(x_{n-1}, x_n)} d(x_{n-1}, x_n). \quad (4.36)$$

Како је f λ -генерализована контракција и $\lambda < 1$, имамо

$$q(x, y) + r(x, y) + t(x, y) + \lambda s(x, y) + \lambda t(x, y) \leq \lambda.$$

Одатле добијамо да за свако $x, y \in X$ важи

$$\frac{q(x, y) + r(x, y) + t(x, y)}{1 - s(x, y) - t(x, y)} \leq \lambda,$$

а, у комбинацији са (4.36) имамо

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n). \quad (4.37)$$

Ова неједнакост показује да се генерализована контракција у ствари може посматрати као контракција за одређени пар тачака. Понављањем овог поступка, добијамо

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \lambda^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\leq \dots \\ &\leq \lambda^n d(x_0, x_1) = \lambda^n d(x, f(x)). \end{aligned}$$

За $m \geq n$, применом неједнакости троугла добијамо

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

Према претходно показаној оцени $d(x_k, x_{k+1}) \leq \lambda^k d(x, f(x))$, следи

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^k d(x, f(x)) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \lambda^k d(x, f(x)).$$

Како је $0 \leq \lambda < 1$, добијамо

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x, f(x)), \quad (4.38)$$

то јест, (x_n) је Кошијев низ у орбити $\mathcal{O}(x; f)$. Будући да је X f -орбитално комплетан метрички простор, постоји $z \in X$ тако да је

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

(i) Покажимо да је z фиксна тачка функције f , односно да важи $f(z) = z$. У ту сврху процењујемо растојање $d(f(z), f(x_n))$. Како је f λ -генерализована контракција, на основу (4.34) и неједнакости троугла следи

$$\begin{aligned} d(f(z), f(x_n)) &\leq q(z, x_n)d(z, x_n) + r(z, x_n)(d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, f(z))) \\ &\quad + s(z, x_n)d(x_n, x_{n+1}) + t(z, x_n)(d(z, x_{n+1}) + d(f(z), x_n)) \\ &\leq \lambda d(z, x_n) + (r(z, x_n) + t(z, x_n))d(z, x_{n+1}) \\ &\quad + r(z, x_n)d(f(x_n), f(z)) + s(z, x_n)d(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + t(z, x_n)(d(f(z), f(x_n)) + d(f(x_n), x_n)) \\ &\leq \lambda d(z, x_n) + \lambda d(z, x_{n+1}) \\ &\quad + (r(z, x_n) + t(z, x_n))d(f(z), f(x_n)) + \lambda d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \lambda(d(z, x_n) + d(z, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1})) + \lambda d(f(z), f(x_n)). \end{aligned}$$

Отуда

$$d(f(z), f(x_n)) \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} (d(z, x_n) + d(z, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1})). \quad (4.39)$$

Пошто $d(z, x_n) \rightarrow 0$ и $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$, па и

$$d(f(z), f(x_n)) \rightarrow 0$$

и зато важи следећа једнакост која нам каже да је z заиста фиксна тачка функције f ,

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = z.$$

Јединственост: Претпоставимо да је $u \in X$ такође фиксна тачка функције f , односно да је $f(u) = u$. Тада, према услову (4.34), имамо

$$\begin{aligned} d(z, u) &= d(f(z), f(u)) \\ &\leq q(z, u)d(z, u), \end{aligned}$$

то јест, $(1 - q(z, u))d(z, u) \leq 0$. Према томе, $z = u$, чиме је доказана јединственост фиксне тачке.

(iii) следи из (4.38) када пустимо да $m \rightarrow \infty$.

□

Напомена 4.33. Услов (4.34) за генерализоване контракције обухвата многе друге контрактивне услове. Зато Теорема 4.32 има бројне последице, од којих ћемо у наставку навести теореме које су аналогне Последици 2.12 и Последици 2.15 Банахове теореме.

Теорема 4.34. [25] *Нека је $f : X \rightarrow X$ пресликавање на f -орбитално комплетном метричком простору (X, d) такво да за неко $k \in \mathbb{N}$ пресликавање f^k представља λ -генерализовану контракцију за све $x \in X$. Тада итеративни низ $(f^n(x))$ конвергира ка јединственој фиксној тачки z пресликавања f , при чему важи*

$$d(f^n(x), z) \leq (\lambda')^n \rho(x, f(x)),$$

где је $\lambda' = \lambda^{1/k}$ и $\rho(x, f(x)) = \max \{ \lambda^{-1} d(f^r(x), f^{r+k}(x)) : r = 0, 1, \dots, k-1 \}$.

Доказ. Према Теорему 4.32, примењеној на пресликавање f^k , постоји јединствена фиксна тачка $z \in X$ пресликавања f^k . Пошто важи

$$f^k(f(z)) = f(f^k(z)) = f(z),$$

$f(z)$ је такође фиксна тачка пресликавања f^k . Због јединствености следи $f(z) = z$. Према томе, z је фиксна тачка пресликавања f , а њена јединственост следи из јединствености фиксне тачке пресликавања f^k .

Остаје да докажемо оцену за $d(f^n(x), z)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Произвољно $n \in \mathbb{N}$, можемо записати у облику $n = mk + r$, где је $m = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ и $0 \leq r < k$. Тада важи

$$f^n(x) = f^{mk+r}(x) = f^{mk}(f^r(x)),$$

а према Теорему 4.32, примењеној на пресликавање f^k и за почетну тачку $f^r(x)$, добијамо

$$\begin{aligned} d(f^n(x), z) &= d(f^{mk}(f^r(x)), z) \\ &\leq \frac{\lambda^m}{1 - \lambda} d(f^r(x), f^k(f^r(x))) \\ &= \frac{(\lambda^{1/k})^{mk}}{1 - \lambda} d(f^r(x), f^{k+r}(x)). \end{aligned}$$

Како је $r - k < 0$ и знамо да је $0 < \lambda < 1$, из тога следи $\lambda^{(r-k)/k} \geq 1$. Отуда је

$$(\lambda^{1/k})^{mk} \leq (\lambda^{1/k})^{mk+r-k}.$$

Стога добијамо

$$\begin{aligned} d(f^n(x), z) &\leq (\lambda^{1/k})^{mk+r-k} \lambda^{-1} d(f^r(x), f^{r+k}(x)) \\ &= (\lambda^{1/k})^n \lambda^{-1} d(f^r(x), f^{r+k}(x)). \end{aligned}$$

Тражену оцену добијамо ако означимо $\lambda^{1/k}$ са λ' и дефинишемо растојање

$$\rho(x, f(x)) = \max \{ \lambda^{-1} d(f^r(x), f^{r+k}(x)) : r = 0, 1, \dots, k-1 \}.$$

□

Слично Теорему 2.15, можемо дати локалну верзију Теореме 4.32.

Теорема 4.35. [25] Нека је $f : B \rightarrow X$ пресликавање на f -орбитално комплетном метричком простору (X, d) , где је $B = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$, за неко $x_0 \in X$ и $r > 0$. Ако је f λ -генерализована контракција на B и

$$d(x_0, f(x_0)) \leq (1 - \lambda)r, \quad (4.40)$$

тада

(i) низ $(f^n(x_0))$ конвергира ка јединственој фиксној тачки z пресликавања f која припада B ,

(ii) важи следећа оцена

$$d(f^n(x_0), z) \leq \lambda^n r,$$

где је $\lambda = \sup_{x, y \in B} \{q(x, y) + r(x, y) + 2t(x, y)\}$.

Доказ. (i) Дефинишимо низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ на следећи начин:

$$x_0, x_1 = f(x_0), \dots, x_n = f^n(x_0), \dots$$

Најпре ћемо показати да $x_n \in B$ за свако $n \in \mathbb{N}$. За $n = 0$ очигледно је да $x_0 \in B$, претпоставимо сада да $x_0, x_1, \dots, x_m \in B$. Можемо применити (4.37) за $n = 1, 2, \dots, m$ и (4.38) за $n = 0$ и $m = m + 1$. Тада на основу (4.38) и (4.40) имамо

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{m+1}) &\leq \frac{1}{1 - \lambda} d(x_0, f(x_0)) \\ &\leq r, \end{aligned}$$

па следи $x_{m+1} \in B$. Дакле, цела орбита

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\}$$

остаје у затвореној лопти B . Сада, користећи исти поступак као у доказу Теореме 4.32, добијамо да је (x_n) Кошијев низ у B и да конвергира ка некој тачки $z \in X$, која је јединствена фиксна тачка пресликавања f . Пошто је B затворена лопта и низ $x_n \in B$, следи да и његова гранична тачка припада B , односно $z \in B$.

(ii) Тражена оцена следи из Теореме 4.32. □

4.7 Каристијева теорема

Једно од значајних проширења Банаховог принципа контракције је 1976. године дао Каристи¹². Он је увео нови приступ заснован на постојању одговарајуће реалне функције φ , чије опадање дуж орбите пресликавања контролише растојање између тачке и њене слике. Каристијева теорема о фиксној тачки данас представља један од значајних резултата ове области и нашла је примену у различитим проблемима нелинеарне анализе, оптимизације и варијационог рачуна.

Мотивацију за Каристијев услов можемо уочити већ код Банахове контракције. Нека је (X, d) метрички простор и нека је $T : X \rightarrow X$ контракција са Липшицовом

¹²енгл. *James V. Caristi* (рођен 1950.)

константом $k \in [0, 1)$. Тада за свако $x \in X$ имамо

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &= \frac{1}{1-k} d(x, T(x)) - \frac{k}{1-k} d(x, T(x)) \\ &\leq \frac{1}{1-k} d(x, T(x)) - \frac{1}{1-k} d(T(x), T^2(x)). \end{aligned}$$

Ако дефинишемо функцију $\phi : X \rightarrow [0, \infty)$ са

$$\phi(x) = \frac{1}{1-k} d(x, T(x)),$$

добивамо

$$d(x, T(x)) \leq \phi(x) - \phi(T(x)).$$

Овако формулисан услов представља основу Каристијевог теорема о фиксној тачки. Оригинални доказ Каристијевог теорема (или Каристи–Киркове, односно Каристи–Кирк–Брауверове теореме) је прилично сложен, а у литератури постоји више различитих доказа овог резултата. Ми ћемо у наставку навести Каристијевог теорему, а затим дати Ћирићев доказ исте.

Подсетимо се да је функција $\varphi : X \rightarrow E$, $E \subseteq \mathbb{R}$, одоздо полунепрекидна у тачки $x \in X$ ако за сваки низ (x_n) , из $x_n \rightarrow x$ следи $\varphi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n)$. Функција $\varphi : X \rightarrow E$ је одоздо полунепрекидна на X ако је одоздо полунепрекидна у свакој тачки $x \in X$.

Теорема 4.36 (Каристијева теорема [6]). *Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $T : X \rightarrow X$. Ако постоји одоздо полунепрекидно пресликавање $\phi : X \rightarrow [0, \infty)$ такво да*

$$d(x, T(x)) \leq \phi(x) - \phi(T(x)) \quad \text{за свако } x \in X, \quad (4.41)$$

онда T има фиксну тачку.

Доказ. За свако $x \in X$ дефинишимо

$$P(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq \phi(x) - \phi(y)\} \text{ и}$$

$$\alpha(x) = \inf\{\phi(y) : y \in P(x)\}.$$

Пошто је $x \in P(x)$, скуп $P(x)$ је непразан, а за свако $y \in P(x)$ важи $0 \leq d(x, y)$, па је $\phi(y) \leq \phi(x)$. Како је $\phi(y) \geq 0$, следи

$$0 \leq \alpha(x) \leq \phi(x).$$

Нека је $x \in X$. Дефинишимо низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у X тако што узмемо $x_1 = x$. Ако су $x_1, x_2, \dots, x_n$ већ одређени, из дефиниције инфимума можемо изабрати $x_{n+1} \in P(x_n)$ тако да

$$\phi(x_{n+1}) \leq \alpha(x_n) + \frac{1}{n}.$$

Према томе, низ (x_n) испуњава следеће услове:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \phi(x_n) - \phi(x_{n+1}), \quad (4.42)$$

$$\alpha(x_n) \leq \phi(x_{n+1}) \leq \alpha(x_n) + \frac{1}{n}. \quad (4.43)$$

Из неједнакости (4.42) и чињенице да је $d(x_n, x_{n+1}) \geq 0$ следи да је $(\phi(x_n))$ опадајући низ реалних бројева. Како је $\phi(x_n) \geq 0$, овај низ је ограничен одоздо, па постоји $\alpha \geq 0$ такво да

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \alpha. \quad (4.44)$$

Поред тога, из (4.43) следи

$$\phi(x_{n+1}) - \frac{1}{n} \leq \alpha(x_n) \leq \phi(x_{n+1}),$$

па преласком на граничну вредност добијамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n) = \alpha. \quad (4.45)$$

Покажимо сада да је (x_n) Кошијев низ. Нека је $k \in \mathbb{N}$. Према (4.44), постоји $N_k \in \mathbb{N}$ тако да за свако $n \geq N_k$ важи $\phi(x_n) < \alpha + \frac{1}{k}$. Како је низ $(\phi(x_n))$ опадајући, за $m \geq n \geq N_k$ имамо $\alpha \leq \phi(x_m) \leq \phi(x_n) < \alpha + \frac{1}{k}$, одакле следи

$$\phi(x_n) - \phi(x_m) < \frac{1}{k} \quad \text{за свако } m \geq n \geq N_k. \quad (4.46)$$

С друге стране, применом неједнакости троугла и (4.42) добијамо

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{s=n}^{m-1} d(x_s, x_{s+1}) \\ &\leq \sum_{s=n}^{m-1} (\phi(x_s) - \phi(x_{s+1})) \\ &= \phi(x_n) - \phi(x_m). \end{aligned}$$

Из (4.46) за свако $m \geq n \geq N_k$ важи

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{k}.$$

Како ово важи за свако $k \in \mathbb{N}$, низ (x_n) је Кошијев. Пошто је (X, d) комплетан метрички простор, постоји $z \in X$ ка којем (x_n) конвергира.

Преостаје још да се покаже да је z фиксна тачка пресликавања T .

Пре тога, покажимо да је $\phi(z) = \alpha$. Како је ϕ одоздо полунепрекидно пресликавање, из $x_m \rightarrow z$ следи

$$\phi(z) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \phi(x_m).$$

С друге стране, из претходно добијене неједнакости $d(x_n, x_m) \leq \phi(x_n) - \phi(x_m)$, за фиксирано $n \in \mathbb{N}$ следи

$$\begin{aligned} \phi(z) &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \phi(x_m) \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} [\phi(x_n) - d(x_n, x_m)] \\ &= \phi(x_n) - d(x_n, z), \end{aligned}$$

односно,

$$d(x_n, z) \leq \phi(x_n) - \phi(z).$$

Према дефиницији скупа $P(x_n)$, $z \in P(x_n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$, а како је $\alpha(x_n) = \inf\{\phi(y) : y \in P(x_n)\}$, следи $\alpha(x_n) \leq \phi(z)$. Преласком на граничну вредност и коришћењем (4.45) добијамо

$$\alpha \leq \phi(z).$$

С друге стране, из одоздо полунепрекидности пресликавања ϕ и (4.44) следи

$$\phi(z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \alpha.$$

Према томе, $\phi(z) = \alpha$.

Сада можемо да покажемо да је z фиксна тачка пресликавања T . Из Каристијевог услова (4.41) примењеног на z имамо да $T(z) \in P(z)$. Пошто $z \in P(x_n)$, за свако $n \in \mathbb{N}$ применом неједнакости троугла добијамо

$$\begin{aligned} d(x_n, T(z)) &\leq d(x_n, z) + d(z, T(z)) \\ &\leq \phi(x_n) - \phi(z) + \phi(z) - \phi(T(z)) \\ &= \phi(x_n) - \phi(T(z)), \end{aligned}$$

ово значи да је и тачка $T(z) \in P(x_n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Стога је $\phi(T(z)) \geq \alpha(x_n)$, а преласком на граничну вредност имамо

$$\phi(T(z)) \geq \alpha.$$

С друге стране, користећи Каристијев услов (4.41) за тачку z и ненегативност функције растојања имамо $\phi(T(z)) \leq \phi(z)$. Пошто је $\phi(z) = \alpha$, добијамо

$$\phi(z) = \alpha \leq \phi(T(z)) \leq \phi(z),$$

па је

$$\phi(T(z)) = \phi(z).$$

Коначно, поновном применом Каристијевог услова добијамо

$$0 \leq d(z, T(z)) \leq \phi(z) - \phi(T(z)) = 0,$$

па је

$$T(z) = z.$$

Дакле, z је фиксна тачка пресликавања T .

□

Каристијева теорема је у тесној вези са Екеландовим¹³ варијационим принципом, једним од значајних резултата варијационог рачуна. У наставку га формуишемо, а потом ћемо показати еквиваленцију ова два резултата.

¹³франц. *Ivar Ekeland* (рођен 1944.)

Теорема 4.37. [18] Нека је $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ одоздо полунепрекидно пресликавање на комплетном метричком простору (X, d) . Ако је ϕ одоздо ограничена функција, онда постоји $z \in X$ такво да

$$\phi(z) < \phi(x) + d(z, x) \quad \text{за свако } x \in X, x \neq z.$$

Доказ. Пошто је ϕ ограничена одоздо, постоји $m \in \mathbb{R}$ такво да је $\phi(x) \geq m$ за свако $x \in X$. Дефинишимо функцију $\tilde{\phi} : X \rightarrow [0, \infty)$ са

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - m.$$

Ова функција је ненегативна. Осим тога, функција $\tilde{\phi}$ је одоздо полунепрекидна, јер за сваки низ $u_n \rightarrow u$ важи

$$\tilde{\phi}(u) = \phi(u) - m \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \phi(u_n) - m = \liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(u_n).$$

Користећи конструкцију из доказа Теореме 4.36 на функцију $\tilde{\phi}$, са ознакама

$$P(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq \tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(y)\},$$

$$\alpha(x) = \inf\{\tilde{\phi}(y) : y \in P(x)\},$$

добивамо низ (x_n) и тачку $z \in X$ за које важи $x_n \rightarrow z$,

$$z \in P(x_n) \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N},$$

$$\text{и } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(x_n) = \tilde{\phi}(z) = \alpha.$$

Пошто $z \in P(z)$, довољно је показати да је $P(z) = \{z\}$. Заиста, за свако $x \neq z$ услов $x \notin P(z)$ еквивалентан са неједнакошћу

$$\tilde{\phi}(z) < \tilde{\phi}(x) + d(z, x),$$

која је, по дефиницији функције $\tilde{\phi}$, еквивалентна траженој неједнакости за ϕ .

Претпоставимо супротно, да постоји $v \neq z$ такво да је $v \in P(z)$. По дефиницији скупа $P(z)$ и како је $v \neq z$, имамо

$$0 < d(z, v) \leq \tilde{\phi}(z) - \tilde{\phi}(v).$$

Одатле следи $\tilde{\phi}(v) < \tilde{\phi}(z) = \alpha$.

С друге стране, пошто је $z \in P(x_n)$, за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\begin{aligned} d(x_n, v) &\leq d(x_n, z) + d(z, v) \\ &\leq \tilde{\phi}(x_n) - \tilde{\phi}(z) + \tilde{\phi}(z) - \tilde{\phi}(v) \\ &= \tilde{\phi}(x_n) - \tilde{\phi}(v). \end{aligned}$$

Дакле, $v \in P(x_n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Зато је

$$\alpha(x_n) \leq \tilde{\phi}(v) \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N}.$$

Преласком на граничну вредност добијамо

$$\alpha \leq \tilde{\phi}(v).$$

Ово је у контрадикцији са $\tilde{\phi}(v) < \alpha$. Према томе, $P(z) = \{z\}$, па важи

$$d(z, x) > \tilde{\phi}(z) - \tilde{\phi}(x) = \phi(z) - \phi(x),$$

за свако $x \in X, x \neq z$. Тиме је доказ завршен. □

Напомена 4.38. Каристијева теорема и Екеландов варијациони принцип су еквивалентни.

Доказ. Теорема 4.37 $\implies$ Теорема 4.36 :

Према Екеландовом принципу, постоји $z \in X$ такво да $\phi(z) < \phi(x) + d(z, x)$ за свако $x \in X, x \neq z$. Претпоставимо да $T(z) \neq z$. Тада, применом претходне неједнакости за $x = T(z)$, добијамо

$$\phi(z) < \phi(T(z)) + d(z, T(z)),$$

што је у контрадикцији са Каристијевим условом

$$d(z, T(z)) \leq \phi(z) - \phi(T(z)).$$

Према томе, $T(z) = z$, па z мора бити фиксна тачка пресликавања T .

Теорема 4.36 $\implies$ Теорема 4.37 :

Претпоставимо супротно, да важи Каристијева теорема, а да закључак Екеландовог варијационог принципа није тачан. То јест, да за свако $x \in X$ постоји $y \in X, y \neq x$, такво да

$$\phi(x) \geq \phi(y) + d(x, y),$$

односно

$$d(x, y) \leq \phi(x) - \phi(y).$$

За свако $x \in X$ изаберимо једно такво y и дефинишимо пресликавање $T : X \rightarrow X$ са $T(x) = y$. Тада, T задовољава услов (4.41). Међутим, по начину на који је T дефинисано, пресликавање T нема фиксну тачку, а то је у супротности са Каристијевом теоремом.

Према томе, Каристијева теорема и Екеландов варијациони принцип су еквивалентни. □

Закључак

У раду смо се бавили контрактивним пресликавањима на метричким просторима и довољним условима под којима та пресликавања поседују фиксну тачку. Најпре смо навели основне појмове и резултате који су били потребни за даље излагање.

Потом смо представили Банахов принцип контракције и дали четири различита доказа ове теореме. Посебно смо истакли његов конструктивни карактер, јер поред постојања и јединствености фиксне тачке, он обезбеђује и поступак њеног приближног одређивања. Показали смо да Пикарове итерације конвергирају ка истој фиксној тачки независно од избора почетне тачке и извели оцене грешке добијених апроксимација. Ову идеју смо илустровали повезујући два наизглед различита проблема, узастопна примена функције косинус и сажимање медијалних троуглова.

Кроз даље примере и последице истакли смо улогу претпоставке комплетности простора и да без ње контракција не мора имати фиксну тачку. Поред тога, показали смо да за постојање јединствене фиксне тачке неког пресликавања није неопходно да оно буде непрекидно, већ је довољно да је нека његова итерација контракција. Дали смо довољан услов за инвертибилност ограниченог линеарног оператора, свдећи решавање операторске једначине на проблем налажења фиксне тачке контракције. Затим смо показали локални облик Банаховог принципа, који обезбеђује постојање и јединственост фиксне тачке у отвореној лопти под одговарајућим условом. За контракцију која је дефинисана на затвореној лопти у Банаховом простору показали смо да је довољно да се њен руб преслика у ту лопту како би у њој постојала јединствена фиксна тачка.

Следеће поглавље посветили смо применама Банаховог принципа контракције. Најпре смо дали довољне услове за конвергенцију поједностављеног Њутновог поступка ка јединственој нули функције. Затим смо решавање система линеарних алгебарских једначина свели на тражење фиксне тачке одговарајућег пресликавања. Користећи три метрике, извели смо довољне услове за постојање и јединственост решења таквог система у $\mathbb{R}^n$ и на конкретном примеру указали смо на значај избора метрике.

Применом Банаховог принципа доказали смо Пикарову теорему о локалном постојању и јединствености решења почетног проблема. Потом смо размотрили линеарне Фредхолмове и Волтерине интегралне једначине друге врсте. За Фредхолмову једначину смо дали довољан услов на језгру који обезбеђује да одговарајући придружен оператор буде контракција, а одређивање конкретног решења поступком сукцесивних апроксимација приказали смо примером.

Представили смо и основну идеју да се централна гранична теорема представи језиком теорије фиксне тачке. На крају поглавља размотрили смо проблем постојања троугла са задатим дужинама симетрала унутрашњих углова. Свођењем проблема на налажење фиксне тачке и увођењем помоћних контракција доказали

смо да за произвољне три позитивне дужине постоји јединствен такав троугао, до на изометрију. Поред тога, видели смо како се итерацијама помоћних пресликавања могу приближно одредити његове странице.

У последњем поглављу смо дефинисали контрактивна пресликавања и дали смо нека уопштења Банаховог принципа контракције. Најпре смо представили резултете Еделштајна, који каже да је за постојање јединствене фиксне тачке контрактивног пресликавања довољно да постоји тачка за коју низ итерација тог пресликавања садржи конвергентан подниз. Закључили смо да у компактним метричким просторима свако контрактивно пресликавање поседује јединствену фиксну тачку.

Дефинисали смо Ракочеве контракције, у којима се константа из Банаховог услова замењује ненегативном монотонно опадајућом функцијом која зависи од растојања између тачака и чије су вредности мање од један. Показали смо да је и под овим условом на комплетном метричком простору загарантовано постојање јединствене фиксне тачке. Затим смо још више уопштили тај услов и прешли на нелинеарне контракције Бојда и Вонга, код којих се растојање између слика оцењује помоћу функције Ψ , која задовољава $\Psi(t) < t$ за $t > 0$ и одозго је полунепрекидна с десне стране. Примерима смо указали на значај обе претпоставке, а затим показали да се на комплетном метрички конвексном простору претпоставка о полунепрекидности може изоставити.

Доказали смо Меир–Килерову теорему и показали да је она уопштење Банаховог принципа контракције и Еделштајнове теореме о фиксној тачки за компактне метричке просторе.

Затим смо доказали Кананову и Чатерџијеву теорему о егзистенцији и јединствености фиксне тачке. Примерима смо показали да су Банахов и Кананов услов независни и да из Канановог услова не следи непрекидност пресликавања. Затим смо доказали Замфирескуову теорему, која обједињује резултате Банаха, Канана и Чатерџија, захтевајући да за сваки пар тачака важи бар један од њихових услова. Дали смо и још две еквивалентне формулације Замфирескуовог услова.

Дефинисали смо Тирићеве генерализоване контракције и показали да је за постојање јединствене фиксне тачке и конвергенцију Пикарових итерација довољан слабији услов од комплетности, а то је f -орбитална комплетност. Извели смо оцену грешке и доказали локалну верзију теореме, као и резултат за пресликавања чији је нека итерација генерализована контракција.

На крају смо доказали Каристијеву теорему и показали да свака Банахова контракција задовољава Каристијев услов. Указали смо на то да ова теорема обезбеђује постојање фиксне тачке, али не и њену јединственост. Доказали смо и еквиваленцију Каристијеве теореме са Екеландовим варијационим принципом.

Литература

- [1] R. P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [2] Q. H. Ansari, D. R. Sahu, *Fixed Point Theory and Variational Principles in Metric Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 2023.
- [3] S. Banach. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales*. Fund. Math., 1922.
- [4] D. W. Boyd and J. S. W. Wong. *Another proof of contraction mapping theorem*. Canad. Math. Bull., 1968.
- [5] D. W. Boyd and J. S. W. Wong. *On nonlinear contractions*. Proc. Amer. Math. Soc., 1969.
- [6] J. Caristi. *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*. Trans. Amer. Math. Soc., 1976.
- [7] S. K. Chatterjee. *Fixed point theorems*. C. R. Acad. Bulgare Sci., 1972.
- [8] Lj. B. Ćirić. *Generalized contractions and fixed point theorems*. Publ. Inst. Math., 1971.
- [9] Lj. B. Ćirić, *Fixed Point Theory: Contraction Mapping Principle*, Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, Belgrade, 2003.
- [10] G. Dinca and J. Mawhin. *A constructive fixed point approach to the existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 2010.
- [11] M. Edelstein. *On fixed and periodic points under contractive mappings*. J. London Math. Soc., 1962.
- [12] I. Ekeland, *Sur les problemes variationnels*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1972.
- [13] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer, New York, 2003.
- [14] O. Hadžić, *Osnovi teorije nepokretne tačke*, Institut za matematiku, Novi Sad, 1978.
- [15] O. Hadžić, S. Pilipović, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Novi Sad, 1996.
- [16] O. Hadžić, *Zbirka rešenih zadataka iz funkcionalne analize*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1980.

- [17] G. G. Hamedani and G. G. Walter. *A fixed point theorem and its application to the central limit theorem*. Arch. Math., 1984.
- [18] D. Ilić, V. Rakočević, *Kontraktivna preslikavanja na metričkim prostorima i uopštenja*, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Nišu, Niš, 2014.
- [19] J. Jachymski, I. Jóźwik and M. Terepeta. *The Banach Fixed Point Theorem: selected topics from its hundred-year history*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, Vol. 118, Article 140, 2024.
- [20] J. E. Joseph and M. H. Kwack. *Alternative approaches to proofs of contraction mapping fixed point theorems*. Missouri J. Math Sci., 1999.
- [21] R. Kannan. *Some results on fixed points*, Bull. Cal. Math., 1969.
- [22] M. A. Khamsi and W. A. Kirk, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*, John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [23] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [24] M. Kurilić, *Osnovi opšte topologije*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1998.
- [25] E. Malkowsky, V. Rakočević, *Advanced Functional Analysis*, CRC Press, Boca Raton, 2019.
- [26] A. Meir and E. Keeler. *A theorem on contraction mappings*. J. Math. Anal. Appl., 1969.
- [27] R. S. Palais. *A simple proof of the Banach contraction principle*. J. Fixed Point Theory Appl., 2007.
- [28] E. Rakotch. *A note on contractive mappings*. Proc. Amer. Math. Soc., 1962.
- [29] T. Zamfirescu. *Fixed point theorems in metric spaces*. Archiv der Mathematik, 1972.

Биографија

Ерна Имеровић рођена је 22. децембра 2001. године у Драгашу. Основну школу „Иво Лола Рибар“ завршила је као носилац дипломе „Вук Караџић“, а потом наставила школовање у Гимназији „Јован Јовановић Змај“ у Новом Саду. Исте године уписала је интегрисане академске студије на Природно-математичком факултету Универзитета у Новом Саду, на студијском програму Мастер професор математике. Положила је све испите предвиђене наставним планом и програмом интегрисаних студија у новембру 2025. године, са просечном оценом 9,96, и тиме стекла право на одбрану мастер рада.

Током свих година студирања била је стипендиста Министарства просвете, науке и технолошког развоја и других фондација, а на завршној години студија добитница је стипендије „Доситеја“.



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:
РБР

Идентификациони број:
ИБР

Тип документације: Монографска документација
ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал
ТЗ

Врста рада: Мастер рад
ВР

Аутор: Ерна Имеровић
АУ

Ментор: др Ненад Теофанов
МЕ

Наслов рада: Контрактивна пресликавања на метричким просторима
НР

Језик публикације: Српски (ћирилица)
ЈП

Језик извода: српски / енглески
ЈИ

Земља публиковања: Република Србија
ЗП

Уже географско подручје: Војводина
УГП

Година: 2026
ГО

Издавач: Ауторски репринт
ИЗ

Место и адреса: Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 4
МА

Физички опис рада: (4/83/29/1/0/0/0) (број поглавља/ број страна/ број литерарних цитата/ број табела/ број слика/ број графика/ број прилога)
ФО

Научна област: Математика
НО

Научна дисциплина: Функционална анализа
НД

Кључне речи: Метрички простор, контракције, фиксна тачка, контрактивно пресликавање, Банахов принцип контракције, метод сукцесивних апроксимација, уопштења
ПО, УДК

Чува се: У библиотеци Департмана за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
ЧУ

Важна напомена:
ВН

Извод: У раду се разматрају контрактивна пресликавања на метричким просторима и њихова улога у теорији фиксних тачака. Након увођења основних појмова и резултата о метричким просторима, детаљно је изложен Банахов принцип контракције, његови различити докази, последице и метод сукцесивних апроксимација. Значај овог принципа приказан је кроз примене на Њутнов поступак, системе линеарних алгебарских једначина, диференцијалне и интегралне једначине, централну граничну теорему и геометријски проблем три симетрале. У завршном делу представљена су нека уопштења Банаховог принципа заснована на различитим контрактивним условима.
ИЗ

Датум прихватања теме од стране НН већа: 1.9.2026.
ДП

Датум одбране:
ДО

Чланови комисије:
ЧК

Председник: др Милица Жигић, ванредни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Члан: др Ивана Војновић, ванредни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

Ментор: др Ненад Теофанов, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Erna Imerović

AU

Mentor: Nenad Teofanov, PhD

MN

Title: Contractive Mappings on Metric Spaces

TI

Language of text: Serbian (Cyrillic)

LT

Language of abstract: Serbian / English

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2026

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (4/83/29/1/0/0/0) (chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Functional analysis
SD

Subject/Key words: Metric spaces, contraction, contractive mappings, fixed point, Banach contraction principle, successive approximations, generalizations
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This thesis studies contractive mappings on metric spaces and related fixed-point theorems. Following an overview of the basic concepts and results concerning metric spaces, the Banach contraction principle is presented, together with several proofs and consequences. Its applications to Newton's method, systems of linear algebraic equations, differential and integral equations, the central limit theorem, and the geometric problem of the existence of a triangle with prescribed angle-bisector lengths are discussed. The final part presents several generalizations of the Banach contraction principle based on different contractive conditions.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 1.9.2026.
ASB

Defended:
DE

Thesis defence board:
DB

President: Milica Žigić, PhD, associate professor at the Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Ivana Vojnović, PhD, associate professor at the Faculty of Science, Uni-

versity of Novi Sad

Mentor: Nenad Teofanov, PhD, full professor at the Faculty of Science, University of Novi Sad