

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ МАСТЕР РАДА

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ
1. Датум и орган који је именовао Комисију 23. 6. 2026. Веће Департмана за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду
2. Састав Комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен: др Бојан Башић, редовни професор на Природно-математичком факултету у Новом Саду, уже научна област: дискретна математика, изабран у звање 1. 4. 2023. – председник комисије др Борис Шобот, ванредни професор на Природно-математичком факултету у Новом Саду, уже научна област: алгебра и математичка логика, изабран у звање 4. 5. 2022. – члан комисије др Кристина Аго, доцент на Природно-математичком факултету у Новом Саду, уже научна област: дискретна математика, изабрана у звање 10. 12. 2021. – ментор
II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ
1. Име, име једног родитеља, презиме: Александар, Никола, Тркуља
2. Датум рођења, општина, република: 28. 2. 2003, Београд, Србија
3. Година уписа на дипломске академске студије, смер/усмерење: 2021, интегрисане академске студије Мастер професор математике
III НАСЛОВ МАСТЕР РАДА
О неким особинама дводимензионалних бинарних речи
IV ПРЕГЛЕД МАСТЕР РАДА
Мастер рад Александра Тркуље под насловом „О неким особинама дводимензионалних бинарних речи“ има 61 страну и организован је у шест поглавља, уз предговор, списак литературе, биографију кандидата и кључну документацијску информацију. Садржај рада је у складу са одобреном пријавом теме. У првом поглављу уведени су основни појмови и ознаке који се користе у наставку рада. Поред стандардних појмова из комбинаторике на речима, дефинисане су дводимензионалне речи и њихови фактори, периодичност и аперидичност, палиндроми, степен позиције у дводимензионалној речи, као и појмови из теорије графова који су потребни у другом поглављу. Уведене су и операције и трансформације дводимензионалних речи које се касније користе у формулацијама и доказима. Друго поглавље посвећено је максималним дводимензионалним бинарним речима са ограниченим степеном. Главни резултат овог поглавља даје егзактну вредност максималног броја појављивања једног слова у зависности од димензија речи и ограничења степена, за свих пет могућих вредности параметра степена. Доказ је организован по случајевима и користи различите комбинаторне идеје.. Треће поглавље бави се дводимензионалним бинарним палиндромима. Најпре се разматра број различитих палиндромских фактора у коначним речима и приказује горња граница за речи са две врсте, уз доказ заснован на индукцији и анализи палиндрома који настају додавањем колоне. Затим се разматрају доње границе за полубесконачне и бесконачне речи. Посебно је приказан резултат према ком свака бесконачна бинарна дводимензионална реч има најмање двадесет

палиндромских фактора, као и пример који показује да се ова граница не може побољшати. На крају поглавља наведене су и оцене за апериодичне речи.

Четврто поглавље посвећено је факторској сложености. Као увод приказан је једнодимензионални критеријум који повезује малу факторску сложеност са евентуалном периодичношћу. У дводимензионалном случају представљена је Ниватова хипотеза и дат је преглед више познатих парцијалних резултата, од ранијих оцена заснованих на правоугаоној сложености до новијих резултата за правоугаонике фиксне мале висине. Размотрен је и гранични облик сложености који је повезан са апериодичношћу.

У петом поглављу појмови из рада илустровани су на примерима шаха, игре Потапање подморница и Миноловца. Поређење суседства које се користи у Миноловцу са суседством из другог поглавља води до формулације аналогног екстремалног проблема са осам могућих суседа унутрашње ћелије.

У шестом поглављу сумирани су главни правци и резултати изложени у раду.

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА МАСТЕР РАДА

Тема мастер рада припада комбинаторици на речима и обухвата неколико различитих питања о дводимензионалним бинарним речима: екстремалне проблеме, палиндромичност и факторску сложеност. Изабрани резултати показују више типичних метода које се користе у овој области.

Уводно поглавље садржи терминологију потребну за читање остатка рада. Поред појмова из једнодимензионалне комбинаторике на речима, уведени су њихови дводимензионални аналози и нотација која омогућава формулисање резултата из наредних поглавља.

Друго поглавље је математички најзахтевнији део рада. Главна теорема даје потпун одговор на разматрани екстремални проблем за све могуће вредности ограничења степена. У различитим случајевима појављују се суштински различити аргументи, од једноставних поплочавања и парности до конструкција, анализе и везе са доминирајућим скуповима у мрежним графовима. Нарочито је обиман случај у ком параметар степена има вредност два, где је потребно раздвојити више подслучајева и комбиновати конструкције са горњим оценама.

Поглавље о палиндромима обједињује резултате о горњим и доњим границама броја различитих палиндромских фактора. Приказан је доказ главне горње границе за речи са две врсте, док остали резултати дају ширу слику понашања палиндромских фактора у коначним, полубесконачним, бесконачним и апериодичним речима. Примери који достижу поједине границе помажу да се види њихова оштрина.

Поглавље о факторској сложености смешта дводимензионалне речи у контекст једног важног отвореног проблема. Јасно су раздвојени једнодимензионални резултат о периодичности (који је у раду доказан), Ниватова хипотеза (која остаје отворена) и познати парцијални резултати.

Завршно поглавље даје конкретне интерпретације неких појмова из рада и показује како промена дефиниције суседства доводи до сродног екстремалног питања. Коришћена литература обухвата класичне изворе и новије научне радове. Рад је прегледног карактера, а његова вредност је пре свега у обједињавању резултата из више праваца и приказивању различитих метода које се користе у изучавању дводимензионалних речи. Кандидат је показао да може да прати математичке аргументе различите техничке сложености и да повеже резултате из више извора.

VI ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

Рад је прегледног карактера и у њему су обједињени резултати о три значајна аспекта дводимензионалних бинарних речи: ограниченом степену, палиндромским факторима и факторској сложености.

За максималне дводимензионалне бинарне речи са ограниченим степеном приказан је потпун резултат који одређује највећи могући број појављивања посматраног слова за свих пет могућих вредности параметра степена и произвољне димензије правоугаоне речи. Овај проблем је повезан са избегавањем образаца, а у једном од случајева и са проблемом доминације у мрежним графовима.

У делу о палиндромима приказане су горње оцене за број различитих палиндромских фактора у

коначним дводимензионалним речима и доње оцене за полубесконачне и бесконачне речи. Посебно, изложен је резултат да свака бесконачна бинарна дводимензионална реч има најмање двадесет различитих палиндромских фактора, а наведен је и пример са тачно двадесет таквих фактора. За апериодичне речи приказане су додатне доње и горње оцене.

У поглављу о факторској сложености доказан је једнодимензионални критеријум периодичности, а затим су систематизовани најважнији резултати у вези са Ниватовом хипотезом. Сама хипотеза остаје отворена, док изложени парцијални резултати показују у којим случајевима довољно мала правоугаона сложеност ипак повлачи периодичност.

Поређење са суседством у игри Миноловац на крају рада доводи до природног аналогног екстремалног проблема, у ком се уместо суседства преко заједничке странице посматра и дијагонално суседство. Ово даје један могући правац за даље разматрање варијаната проблема из другог поглавља.

VII КОНАЧНА ОЦЕНА МАСТЕР РАДА

Комисија оцењује да је мастер рад „О неким особинама дводимензионалних бинарних речи“ урађен у складу са одобреном пријавом теме и да представља садржајно заокружен преглед више важних питања из комбинаторике дводимензионалних речи. Рад по обиму и садржају испуњава захтеве који се постављају пред мастер рад.

VIII ПРЕДЛОГ

Комисија предлаже Већу Департмана за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду да прихвати позитивну оцену мастер рада Александра Тркуље и одобри његову јавну одбрану.

Нови Сад, 22. 9. 2026.

ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

др Бојан Башић,
редовни професор, ПМФ, Нови Сад
председник комисије

др Борис Шобот,
ванредни професор, ПМФ, Нови Сад
члан комисије

др Кристина Аго,
доцент, ПМФ, Нови Сад
члан комисије, ментор