



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU



Broj π

sa analitičkog aspekta

Master rad

Autor: **Branka Zekanović**

Mentor: dr Milica Žigić

Novi Sad, 2026

Predgovor

Još pre nego što su ljudi znali za matematiku, svet je bio pun krugova. Sunce je izlazilo i zalazilo svakog dana, mesec je menjao oblik u neprekidnom ciklusu, a voda u jezerima i rekama oblikovala je savršene, okrugle površine. Ljudi su primećivali obrasce u prirodi i pokušavali da ih razumeju. I tako, pre nego što su postojale reči, pre nego što su postojale table ili pergamenti, postojalo je nešto što danas zovemo π - misteriozna konstanta koja povezuje obim kruga sa njegovim prečnikom.

U dalekim vremenima, pre četiri hiljade godina, drevni Vavilonci i Egipćani prvi su pokušali da uhvate ovaj broj. Na glinenim pločama iz Vavilona zapisane su vrednosti koje približno odgovaraju broju π , dok su Egipćani u Papirusu Ahmesa koristili jednostavne formule da izračunaju površinu kruga. Njihove aproksimacije nisu bile savršene - ali u njihovim rukama, π je počeo da se pojavljuje iz tame misterije. Ljudi su, kroz posmatranje i eksperiment, polako dodirivali beskonačnost.

Hiljadama kilometara dalje, u Indiji, matematičari su razvili preciznije metode. Arijabata i drugi naučnici koristili su složene algoritme i decimalne aproksimacije kako bi približili π sa neverovatnom tačnošću za svoje vreme. U njihovim rukama, π je prestao biti samo praktična mera i postao apstraktni simbol - most između beskonačnih nizova i racionalnog uma. Njihova posvećenost pokazala je da ljudska radoznalost nema granica, baš kao što π nema kraja.

U Grčkoj, filozofi su gledali na π kroz prizmu geometrije i dokaza. Pokušaji kvadrature kruga, posebno rad Anaksagore, Antifona i Hipokrata, bili su inicijalni koraci u razumevanju ove tajne. Arhimed iz Sirakuze otišao je korak dalje, koristeći upisane i opisane mnogouglove kako bi stvorio rigorozne granice za π . Njegov rad nije bio samo matematički: bio je to dokaz da ljudska logika i intuicija mogu obuzdati i najdublje misterije prirode. Arhimedov metod ostavio je neizbrisiv trag u istoriji matematike, a π je postao simbol težnje ka beskonačnoj preciznosti.

Kroz vekove, dok se rimsko carstvo raspadalo, a srednjovekovna Evropa tonula u tminu, π nije nestajao. Rukopisi su preživeli u islamskim bibliotekama, dok su monasi i učenjaci pažljivo prepisivali antičke tekstove. Matematičari iz islamskog sveta unapređivali su Arhimedove metode, dodajući nove pristupe i algoritme. Svaka generacija matematičara dodavala je svoj trag, i π je putovao kroz vreme, postajući veći od broja - bio je simbol radoznalosti i neumorne potrage za znanjem.

Sa pojavom renesanse, Evropa je ponovo otkrila antičke spise. Matematičari poput Ludolfa van Kulena i Johana Hajnsa razvijali su nove metode izračunavanja π sa stotinama decimala, istražujući beskonačne nizove i trigonometrijske serije. U 18. i 19. veku, π je

postao centralni lik u svetu matematike i nauke - od računanja površina i zapremina do razumevanja kružnih i harmonijskih fenomena. Svaka nova decimala bila je dokaz ljudske strpljivosti i intelektualne upornosti.

Danas, u svetu računara i digitalnih tehnologija, π je dostigao milijarde decimala, ali njegova suština ostaje ista: simbol beskonačnosti i konstante koja povezuje prirodu i matematiku. Svaka generacija koja proučava π dodaje novi sloj razumevanja, a njegova priča se ne završava. Od peska pored Nila do modernih laboratorija, π je putovao kroz vekove - nevidljiv, ali uvek prisutan, podsećajući nas da svet brojeva i svet prirode nisu odvojeni, već spojeni u neprekidnoj harmoniji.

I tako, putovanje broja π nastavlja se i danas. Svaka decimala, svaki izračun, svaka nova metoda je deo beskonačne priče koju π ispisuje kroz ljudsku radoznalost i upornost. Broj koji nikada ne prestaje, koji je oduvek tu i uvek misteriozan, putuje kroz vreme zajedno sa nama, podsećajući nas da matematika nije samo niz pravila i formula - ona je priča o svetu, ljudskom umu i beskonačnosti.

* * *

Matematička konstanta π predstavlja jednu od najpoznatijih i najintragantnijih vrednosti u istoriji matematike. Njena univerzalna prisutnost u različitim oblastima nauke, tehnologije i inženjerskih disciplina čini je jednim od najprepoznatljivijih matematičkih simbola. Na elementarnom nivou, broj π se definiše kao odnos obima kruga i njegovog prečnika: $\pi = C/d$, gde je C obim, a d prečnik kruga. Ovaj odnos, nezavistan od veličine kruga, ukazuje na to da π predstavlja fundamentalnu geometrijsku konstantu. Međutim, kroz istoriju matematike značenje broja π daleko je prevazišlo jednostavni odnos koji se javlja u geometriji kruga.

Broj π je beskonačan nerekurentan decimalni razvoj: $\pi \approx 3,14159265358979323846\dots$, što ga svrstava u kategoriju iracionalnih brojeva, a kasnije je dokazano da je i transcendentan. Ove matematičke osobine čine broj π ključnim objektom istraživanja u brojnim granama matematike, uključujući analizu, teoriju brojeva, kombinatoriku, teoriju računanja i numeričku matematiku.

Razvoj razumevanja broja π može se istorijski podeliti u tri glavne faze. Prva faza vezana je za geometrijske metode i aproksimacije nastale u antičkim civilizacijama kao rezultat praktičnih potreba, pre svega u arhitekturi, astronomiji i merenju površina. Druga faza započinje razvojem matematičke analize u 17. veku, kada π počinje da se pojavljuje u beskonačnim redovima, integralskim izrazima i trigonometrijskim funkcijama. Treća faza započinje pojavom računara u 20. veku, što omogućava razvoj algoritamskih metoda za izračunavanje milijardi cifara broja π .

Značaj broja π prevazilazi matematičke okvire. On se javlja u oblastima fizike, statistike, signalne analize, kvantne teorije polja i teorije haosa. Tako, na primer, u fizici broj π

prirodno nastaje u formulacijama površina sfera, rešenjima diferencijalnih jednačina, teoriji potencijala i u formulama koje opisuju harmonijski oscilator. U teoriji verovatnoće π se pojavljuje u Gausovoj normalnoj raspodeli:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

što ukazuje da π poseduje duboku strukturalnu povezanost sa prirodnim fenomenima, nezavisno od geometrije.

S obzirom na matematičku i istorijsku složenost broja π , cilj ovog rada jeste da sistematski i analitički istraži njegov razvoj, primene i matematičku prirodu. Poseban akcenat biće stavljen na analitičke metode izračunavanja broja π , teorijska svojstva broja π , kao i algoritamske pristupe korišćene u savremenim numeričkim proračunima.

Rad je organizovan u četiri glavne celine. U prvoj glavi razmatra se istorijski razvoj broja π kroz geometrijski, analitički i algoritamski pristup. Druga glava posvećena je analitičkim metodama izračunavanja broja π , uključujući brojne redove, rezultate Gregorija, Lajbnica i Nilakante, brzo-konvergentne redove, Ojlerove metode, rezultate Gausa i Ramanudžanove algoritamske formulacije. Treća glava bavi se dokazima iracionalnosti i transcendentnosti broja π . Završna, četvrta glava obuhvata zanimljive matematičke rezultate povezane sa vrednošću broja π i sažet pregled najvažnijih matematičkih formula i iterativnih metoda.

Tokom izrade rada korišćena je literatura [1, 3, 4, 6–8, 13]. Cilj rada nije samo istorijska rekonstrukcija, već i matematička analiza evolucije razumevanja broja π kroz formalne metode savremene matematike.

* * *

Ovim putem želim izraziti iskrenu zahvalnost dr Milici Žigić, mom mentoru, na uloženom trudu i vremenu, pomoći i stručnim sugestijama, koje mi je pružila prilikom izrade ovog master rada.

Takođe želim da se zahvalim dr Petru Đapiću i dr Nikoli Sarajliji koji su prihvatili da budu članovi komisije i odvojili svoje vreme za realizaciju odbrane master rada.

Na kraju, najveću zahvalnost dugujem mojoj porodici i prijateljima koji su mi bili najveća podrška od početka studiranja.

Ovaj master rad posvećujem od srca mojim učenicima.

Novi Sad, 2026.

Branka Zekanović

Sadržaj

Predgovor	1
1 Istorijski razvoj broja π	7
1.1 Istorija broja π sa geometrijskog aspekta	7
1.1.1 Rani empirijski pristupi	8
1.1.2 Grčka matematika i konceptualna transformacija	8
1.1.3 Dalji razvoj geometrijskih metoda	10
1.2 Istorija broja π sa analitičkog aspekta	10
1.2.1 Redovi kao novi pristup	11
1.2.2 Njutn, račun i nizovi brže konvergencije	17
1.2.3 Ojler i transformacija π u univerzalnu konstantu	21
1.2.4 Dokaz iracionalnosti i put ka dokazima transcendentnosti	24
1.3 Istorija broja π sa algoritamskog aspekta	25
1.3.1 “Digit-hunteri” i društveno-matematički kontekst	25
1.3.2 „Circle-squareri“ i matematika pokušaja i zabluda	26
1.3.3 Računarski početak - ENIAC i nova era numerike	26
1.3.4 Algoritmi sa kvadratnom konvergencijom	28
1.3.5 Borvejnov kubni algoritam i moderna epoha	30
2 Analitički pristup izračunavanju broja π	31
2.1 Beskonačni redovi kao novi pristup	31
2.1.1 Definicija i osnovni pojmovi	31
2.1.2 Gregori–Lajbnicov red za broj π	32
2.1.3 Problemi sporog konvergiranja	32
2.2 Redovi Gregorija, Lajbnica i Nilakante	36
2.2.1 Gregorijev red	36
2.2.2 Lajbnicov red	36
2.2.3 Nilakantevi redovi	37
2.3 Redovi koji konvergiraju brže od Lajbnicovih	39
2.3.1 Mašinske formule	39
2.3.2 Ojlerova transformacija i ubrzanje konvergencije	40
2.3.3 Redovi Nilakanteve vrste sa optimizacijom	43
2.3.4 Upotreba u istorijskim proračunima	43
2.4 Ojlerovi rezultati	44

2.4.1	Ojlerov beskonačni proizvod za $\sin(x)$	44
2.4.2	Ojlerova veza π i kompleksnih brojeva	45
2.4.3	Ojlerovi redovi i Rimanova ζ -funkcija	47
2.4.4	Ojlerove transformacije i ubrzanje redova	52
2.5	Gausovi rezultati	53
2.5.1	Aritmetičko-geometrijska sredina (AGM)	54
2.5.2	AGM metoda za π	54
2.5.3	Kvadratna konvergencija	55
2.5.4	Povezanost sa eliptičkim integralima	55
2.6	Ramanudžanovi rezultati	57
2.6.1	Ramanudžanovi redovi za π	60
2.6.2	Još neke značajne Ramanudžanove formule	60
2.6.3	Brza konvergencija i iterativne metode	61
2.6.4	Istorijski značaj Ramanudžanovih rezultata	61
3	Iracionalnost i transcendentnost broja π	62
3.1	Iracionalnost broja π	62
3.1.1	Istorijski uvod u iracionalnost	62
3.1.2	Ideja Lambertovog dokaza	63
3.1.3	Analitički dokazi 20. veka	66
3.2	Transcendentnost broja π	70
3.2.1	Istorijski uvod u transcendentnost od π	71
3.2.2	Lindemanova teorema i primena na π	71
3.2.3	Detaljna analiza Lindemanovog dokaza	71
3.2.4	Posledice transcendentnosti broja π	78
3.2.5	Veza sa analitičkim formulama	79
4	Zanimljivi rezultati i pregled formula	81
4.1	Zanimljivi i neobični rezultati vezani za π	81
4.1.1	Poznati identiteti i paradoksi	81
4.1.2	Istorijski značaj	82
4.2	Pregled formula i iterativnih postupaka za π	82
4.2.1	Geometrijske metode	83
4.2.2	Analitički redovi i beskonačni proizvodi	83
4.2.3	Iterativni algoritmi visokog reda	84
	Zaključak	85
	Bibliografija	87

SADRŽAJ

Biografija	88
Ključna dokumentacijska informacija	89

Glava 1

Istorijski razvoj broja π

Razvoj razumevanja broja π predstavlja jedno od najdužih i najbogatijih poglavlja u istoriji matematike. Tokom više od četiri hiljade godina broj π je evoluirao od empirijske mere zasnovane na praktičnim zapažanjima do apstraktne matematičke konstante duboko povezane sa analizom, teorijom brojeva, kombinatorikom, geometrijom, statistikom i teorijom računanja. Ova konstanta je uporna u svom pojavljivanju u najrazličitijim oblastima matematike, što je odavno dovelo do shvatanja da π nije samo broj definisan u kontekstu kruga, već univerzalna matematička struktura.

Razvoj broja π istorijski se može podeliti u tri glavna matematička pristupa. Prvi je geometrijski pristup, koji dominira od najranijih civilizacija do kasne antike i oslanja se na empirijska merenja krugova i poligonske aproksimacije. Drugi je analitički pristup, koji započinje u 17. veku sa razvojem beskonačnih redova i diferencijalnog računa, uvodeći potpuno nov nivo razumevanja. Treći je algoritamski pristup, koji se javlja u 20. veku pojavom računara i modernih numeričkih metoda, omogućavajući izračunavanje trilionu cifara broja π i uvodeći metamatematička pitanja o njegovoj strukturi.

Za potrebe ove glave korišćena je literatura [1, 3, 4, 6, 7, 13]. Analiza je strukturirana tako da poštuje hronologiju razvoja, ali istovremeno naglašava matematičku logiku koja stoji iza ključnih trenutaka.

1.1 Istorija broja π sa geometrijskog aspekta

Ovo poglavlje bavi se najstarijim fazama razvoja broja π , kada matematičke metode nisu bile algebarske ili analitičke, već geometrijske i empirijske. U ovom periodu matematika nije bila apstraktna disciplina već praktično oruđe, najčešće korišćeno u inženjerstvu, građevini, geodeziji, astronomiji i administraciji. Uprkos ograničenjima, civilizacije poput Vavilonaca, Egipćana, Grka, Kineza i Indijaca razvile su brojne metode za određivanje približne vrednosti broja π . Poseban akcenat ovog poglavlja stavljen je na rad Arhimeda, čije metode predstavljaju matematičku prekretnicu i prvi teorijski utemeljeni i dokazivi pristup izračunavanju broja π [1, 4, 6, 7].

1.1.1 Rani empirijski pristupi

Najstariji tragovi koji ukazuju na poznavanje približne vrednosti broja π datiraju oko 2000 godina p. n. e. i nalaze se u egipatskoj i vavilonskoj matematici. Ovi rezultati nisu bili izvedeni teorijski, već kao posledica praktičnih merenja. Vavilonci su u matematičkim tablicama koristili aproksimaciju: $\pi \approx 3.125 = \frac{25}{8}$, dok se u egipatskom Rhindovom papirusu, nastalom oko 1650. godine p. n. e., pojavljuje formula koja vodi vrednosti: $\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3.160493827$.

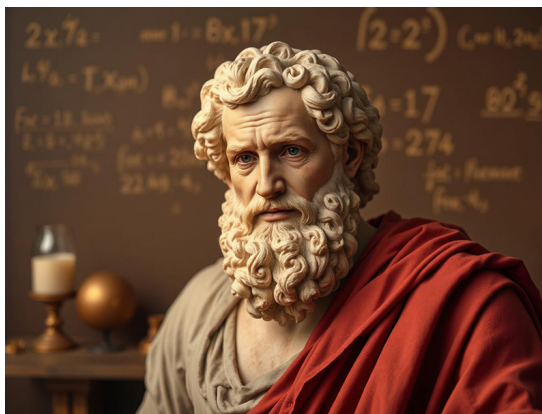
Ove aproksimacije ukazuju na visoku praktičnu preciznost, iako bez matematičkog opravdanja. U oba slučaja broj π se razumeo isključivo kao odnos mera.

1.1.2 Grčka matematika i konceptualna transformacija

Grčka civilizacija donosi značajan epistemološki pomak: matematika postaje teorijska i aksiomska. Grci uvode koncept:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{obim pravilnog } n\text{-ougla upisanog u krug}}{\text{prečnik kruga}}$$

čime počinje formalizacija matematičke ideje granice - iako ne eksplicitno formulisane. Najstariji poznati rezultat iz grčke tradicije pripisuje se Anaksagori, ali najznačajniji doprinos daje Arhimed iz Sirakuze.



Slika 1.1: Arhimed

Arhimed iz Sirakuze (287-212. p. n. e.)¹ smatra se jednim od najvećih matematičara i naučnika antičkog doba, kao i jednim od najuticajnijih umova u istoriji matematike uopšte. Rođen je u raskošnom kulturnom centru helenističke epohe, u grčkom gradu Sirakuzi na Siciliji, koji je tada bio pod snažnim uticajem aleksandrijske naučne tradicije. Iako o njegovom životu postoji relativno malo pouzdanih istorijskih izvora, pretpostavlja

¹Arhimed (287-212. p. n. e.), starogrčki matematičar, fizičar, inženjer i astronom.

se da je deo obrazovanja stekao u Aleksandrijskoj biblioteci, gde je bio u kontaktu sa najistaknutijim matematičarima tog vremena.

Arhimedovo delo obuhvata širok spektar matematičkih i fizičkih problema, uključujući teoriju poluga, hidrostatičku, optiku, geometriju i mehaniku. Njegova sposobnost da povezuje teorijska istraživanja sa praktičnom primenom učinila ga je izuzetno prepoznatljivom figurom čak i izvan matematičkih krugova. Međutim, posebno mesto u istoriji matematike zauzima njegovo istraživanje broja π , koje je po svojoj metodološkoj originalnosti i preciznosti predstavljalo neprevaziđen rezultat narednih više od hiljadu godina.

Najpoznatiji Arhimedov doprinos određivanju vrednosti broja π dat je u delu O merenju kruga (De Quadratura Circuli), u kojem prvi put u istoriji nalazimo sistematski i matematički rigorozan pristup aproksimaciji broja π . Arhimed je koristio metodu iscrpljenja (grč. ἐξαντλήσεως), preteču integralnog računa, postavljenu na principu da se površina nepoznate figure može aproksimirati površinama poznatih geometrijskih tela sa sve većom preciznošću. Polazna ideja bila je upisivanje i opisivanje pravilnih mnogouglova u krug i oko kruga, čime je Arhimed uspostavio prve matematičke intervale koji ograničavaju vrednost π . Upisivanjem i opisivanjem pravilnog šestougla i postupnim udvostručavanjem njegovog broja stranica do mnogougla sa 96 stranica, Arhimed je uspeo da dobije najprecizniju tada poznatu granicu:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Granica $\frac{22}{7}$ ostala je vekovima prihvatana racionalna aproksimacija za π i koristila se u različitim civilizacijama, uključujući i srednjevekovnu evropsku i arapsku matematičku tradiciju. Metoda i rezultat bili su toliko izuzetni da su i danas predmet proučavanja u okviru matematičke analize, posebno zbog toga što Arhimedov pristup sadrži embrione pojmova konvergencije, graničnih procesa i numeričkih metoda - koncepata koji će formalno biti razvijeni tek u XVII veku.

Osim toga, Arhimed je prvi uočio fundamentalnu geometrijsku vezu između obima kruga i njegovog prečnika, dajući matematičku osnovu definicije broja π kakvu i danas poznajemo. U Metodi, jednom od njegovih najznačajnijih dela čija je kopija otkrivena tek krajem XX veka, Arhimed koristi mehaničke analogije i ideje koje zadivljuju svojom dubinom i modernim karakterom, potvrđujući njegovu ulogu pionira matematičkog mišljenja zasnovanog na deduktivnoj naučnoj metodi.

Arhimedova smrt, prema legendi, dogodila se tokom opsade Sirakuze od strane rimske vojske, kada ga je vojnik ubio ne prepoznajući njegov značaj, dok je Arhimed bio zaokupljen geometrijskim problemom i izgovorio čuvenu rečenicu: „Noli turbare circulos meos!“ - „Ne diraj moje krugove!“.

Bez obzira na tragičan kraj, Arhimedovo nasleđe ostalo je duboko utisnuto u matematičku tradiciju. Njegov rad na broju π predstavlja temelj analitičkog pristupa ovom broju i ostao je inspiracija matematičarima kasnijih epoha, od Renea Dekarta i Gotfrida Lajbnica

do Karla Fridriha Gausa i Srinivasa Ramanudžana. Zbog toga se Arhimed danas s pravom smatra začetnikom metodološkog istraživanja broja π i jednim od ključnih graditelja mosta između antičke geometrije i savremene matematičke analize.

1.1.3 Dalji razvoj geometrijskih metoda

Nakon Arhimeda, matematički napredak usporava, ali tradicija se nastavlja u Kini i Indiji.

Kineski matematičar Zu Chongzhi (429-500) izračunao je da:

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

Predložio je i razlomke:

$$\frac{355}{113} \text{ i } \frac{22}{7},$$

pri čemu je $\frac{355}{113}$ toliko precizan da se ponovo pojavljuje tek u XVIII veku u radovima evropskih matematičara. Kada se kaže da se ova aproksimacija ponovo pojavljuje tek u XVIII veku u radovima evropskih matematičara, najčešće se misli na Leonarda Ojlera, Johana Heinrich Lamberta i Adrien-Marie Ležandra. Ojler je naveo ovu aproksimaciju u svojim radovima o razlomcima i neprekidnim razlomcima. Pod neprekidnim razlomkom podrazumeva se način predstavljanja realnog broja pomoću niza celih brojeva, pri čemu se u imeniocu svakog razlomka nalazi novi razlomak. Johan Heinrich Lambert je proučavao neprekidne razlomke za broj π i koristio iste vrednosti koje konvergiraju ka istom limesu, nazovimo ih konvergenti, među kojima je i razlomak $\frac{355}{113}$. Kasnije se ista aproksimacija pojavljuje i kod Adrien-Marie Ležandra u proučavanju broja π , iako je on delovao krajem XVIII i početkom XIX veka. Važno je napomenuti da evropski matematičari nisu preuzeli razlomak od Zu Chongzhija (nisu znali za njegov rad), već su do njega došli nezavisno, koristeći razvoj broja π u neprekidni razlomak. Razlomak $\frac{355}{113}$ je jedan od konvergenata tog razvoja, pa se prirodno javlja u matematičkim istraživanjima.

Razdoblje geometrijskih metoda obuhvata više od dve hiljade godina. U tom periodu π se transformisao od empirijskog odnosa do rigorozno utemeljene matematičke konstante. Na kraju da ponovo istaknemo, najvažniji rezultat ovog perioda jeste pomenuta Arhimedova metoda iscrpljivanja, koja uvodi ideju aproksimacije pomoću graničnih procesa - osnovnu ideju koja će kasnije postati temelj matematičke analize.

1.2 Istorija broja π sa analitičkog aspekta

Analitička faza istraživanja broja π počinje u 17. veku, kada se prvi put uvode beskonačni redovi, infinitezimalni račun i formalni koncept granične vrednosti. Za razliku

od geometrijskog perioda, u kojem je broj π posmatran kao odnos geometrijskih veličina, analitički period uvodi potpuno novu paradigmu: π postaje objekat analitičkih funkcija, pojavljuje se u adicionim formulama, integralima i specijalnim funkcijama, te poprima status fundamentalne konstante u matematičkoj analizi, a ne samo u geometriji. Ovaj prelaz nije samo istoriografski - on je matematički ključan, jer uvodi algebro-analitičku strukturu koja omogućava kasnije dokaze iracionalnosti i transcendentnosti broja π , kao i razvoj metoda za njegovo računanje do beskonačne preciznosti. U ovom poglavlju razmotrićemo razvoj analitičkog opisa broja π kroz nekoliko potperioda:

- razvoj trigonometrije i prvih beskonačnih suma, odnosno redova,
- pojavu infinitezimalnog računa (Njutn i Lajbnic),
- Ojlerov doprinos i integrali koji definišu π ,
- dokaze iracionalnosti i početak teorije brojeva vezane za π .

1.2.1 Redovi kao novi pristup

Definicija 1.1. Neka je dat niz realnih (ili kompleksnih) brojeva (a_n) , tj. uređeni skup

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Sa ovim nizom možemo povezati niz parcijalnih suma, definisan relacijom:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Red povezan sa nizom (a_n) definiše se kao formalni izraz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Kažemo da je red *konvergentan* ako postoji realan (ili kompleksan) broj S takav da niz parcijalnih suma (S_n) konvergira prema S , tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

U tom slučaju pišemo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Ako ovaj limes ne postoji ili je beskonačan, tada kažemo da je red *divergentan*.

Napomena 1. Za konvergenciju reda neophodno je, ali nije i dovoljno, da članovi niza (a_n) teže nuli, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Međutim, postojanje ovog limesa ne garantuje konvergenciju reda - što ilustruje, na primer, harmonijski red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

za koji važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

ali ipak divergira.

Definicija 1.2. Neka je funkcija f beskonačno puta diferencijabilna u nekoj okolini tačke x_0 . Tejlorov red funkcije f u tački x_0 jeste stepeni red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

gde je $f^{(n)}(x_0)$ n -ti izvod funkcije f u tački x_0 , a $n!$ faktorijel broja n . Ako za svako x iz neke okoline tačke x_0 važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0,$$

gde je $R_n(x)$ ostatak Tejlorove formule, tada se funkcija f može predstaviti svojim Tejlorovim redom, odnosno

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Ekvivalentno, ako je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

kažemo da je funkcija f analitička u tački x_0 .

Dakle, funkcionalni stepeni red dobija se tako što se izračunaju svi izvodi funkcije u izabranoj tački x_0 , a zatim se svaki izvod подели sa odgovarajućim faktorijelom i pomnoži odgovarajućim stepenom $(x - x_0)^n$. Na taj način dobija se razvoj funkcije u stepeni red, koji predstavlja funkciju u obliku beskonačnog polinoma u okolini tačke x_0 . Funkcije koje su jednake svom Tejlorovom redu nazivaju se analitičke funkcije.

Prvi značajan korak ka analitičkoj formulaciji broja π pojavljuje se u radovima Jamshida al-Kashija u 15. veku, ali tek su evropski matematičari 17. veka sistematski transformisali računanje π u analitički problem.

Jedan od prvih rigoroznih beskonačnih redova za π potiče od Džejmisa Gregorija (1638-1675) i Gotfrida Vilhelma Lajbnica (1646–1716):

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right).$$

Ovaj red, danas poznat kao Gregori-Lajbnicova formula, može se izvesti iz razvoja funkcije:

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots,$$

pa za $x = 1$ sledi:

$$\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Ovaj rezultat sledi iz sledećih razmatranja. Razvoj funkcije $\operatorname{arctg}(x)$ u Maklorenov red dat je izrazom

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

koji važi za $|x| \leq 1$ (pri čemu za $x = 1$ red konvergira uslovno). Uvrštavanjem vrednosti $x = 1$ dobija se

$$\operatorname{arctg}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

Pošto je

$$\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4},$$

sledi da je

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Ovaj izraz ima istorijski značaj jer predstavlja prvi dokaz da se π može odrediti kao suma beskonačnog niza, čime se napušta geometrijska tradicija.

Brzina konvergencije Gregori–Lajbnicovog reda može se analizirati posmatranjem njegovih parcijalnih suma

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

pri čemu važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{4}.$$

Greška aproksimacije nakon n članova definiše se kao

$$R_n = \frac{\pi}{4} - S_n.$$

Pošto je Gregori–Lajbnicov red alternativan, a njegovi članovi po apsolutnoj vrednosti monotonno opadaju i teže nuli, prema Lajbnicovom kriterijumu važi procena

$$|R_n| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Množenjem obe strane sa 4 dobija se procena greške pri aproksimaciji broja π :

$$\left| \pi - 4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leq \frac{4}{2n+3}.$$

Kako za velike vrednosti n važi

$$\frac{4}{2n+3} \sim \frac{2}{n},$$

sledi da se greška smanjuje reda veličine

$$R_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Ovakav red konvergencije ukazuje na veoma sporo približavanje parcijalnih suma graničnoj vrednosti. Naime, za dobijanje samo deset tačnih decimalnih cifara broja π potrebno je izračunati više od 500 miliona članova reda. Zbog toga, iako Gregori–Lajbnicova formula ima veliki istorijski i teorijski značaj kao jedna od prvih beskonačnih reprezentacija broja π , ona nije pogodna za njegovo efikasno numeričko izračunavanje.



Slika 1.2: Džejms Gregori

Džejsms Gregori (James Gregory, 1638-1675)² bio je škotski matematičar i astronom, čiji su radovi predstavljali važan doprinos razvoju analitičkih metoda 17. veka. Kao pripadnik generacije matematičara koja je radila u periodu formiranja temelja diferencijalnog i integralnog računa, Gregori se posebno bavio proučavanjem trigonometrijskih funkcija, njihovim razvojem u beskonačne redove, kao i primenom tih rezultata u numeričkom određivanju konstanti, među kojima je broj π bio najznačajniji.

Gregori je 1667. godine objavio svoje najpoznatije delo *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura*, u kome je izložio jedan od prvih poznatih beskonačnih redova za približavanje vrednosti broja π . Prvi je pokazao da se funkcije, i sa njima broj π , mogu predstaviti kao beskonačne algebarske strukture, što je bio važan korak ka razumevanju analitičke prirode broja π .

Gregori je takođe značajan zbog svojih ranih radova u oblasti teorije limesa i ideja koje prethode rigoroznoj formulaciji konvergencije niza, što je kasnije dovelo do potpunog razvoja analize u radovima Njutna, Lajbnica i Košija. Njegov doprinos aritmetičkom i analitičkom proučavanju broja π stoga predstavlja jednu od ključnih prekretnica u istorijskom prelasku sa geometrijskih metoda ka metodama beskonačnih redova.



Slika 1.3: Gotfrid Vilhelm Lajbnić

Gotfrid Vilhelm Lajbnić (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716)³ bio je jedan od najznačajnijih filozofa i matematičara evropskog prosvetljenja. Kao jedan od tvoraca računskog koncepta infinitezimala, Lajbnić je izvršio veliki uticaj na razvoj moderne matematike. Njegov interes za analitičke metode doveo ga je i do proučavanja broja π , gde

²James Gregory (1638-1675), škotski matematičar i astronom. Među njegovim značajnim doprinosima su razvoj beskonačnih redova i rezultati povezani sa trigonometrijskim funkcijama, koji su imali važnu ulogu u razvoju metoda za izračunavanje broja π .

³Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), nemački matematičar i filozof, jedan od utemeljivača diferencijalnog i integralnog računa. U okviru svojih istraživanja razvio je beskonačne redove, među kojima je posebno poznat red koji daje jednu od klasičnih formula za izračunavanje broja π .

je unapredio rezultate Gregorija i doprineo razvoju metoda izračunavanja ove konstante pomoću razvoja u red. Polazeći od Gregorijevog razvoja funkcije arkus tangens, Lajbnić je nezavisno došao do istog beskonačnog reda, koji je danas poznat kao Gregori-Lajbnićov red. Lajbnić ga je posebno istakao kao alat za numeričko izračunavanje vrednosti π i zapisao u obliku:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Polazeći od izvoda funkcije

$$\frac{d}{dx} \arctg(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

Lajbnić je iskoristio razvoj geometrijskog reda

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, \quad |x| < 1.$$

Integracijom član po član dobija se

$$\arctg(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots) dt,$$

odnosno

$$\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

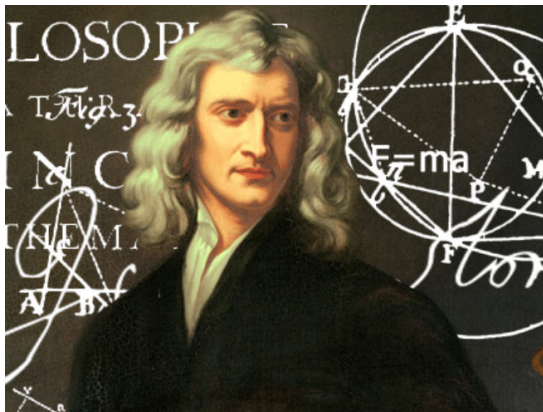
Uvrštavanjem vrednosti $x = 1$, pri čemu važi $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$, dobija se

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots,$$

što predstavlja Gregori-Lajbnićov red za broj π .

Ovaj red predstavlja jedan od najpoznatijih primera alternativnih (naizmeničnih) redova i često je prvi primer koji se navodi pri analitičkom uvodu u koncept beskonačnih redova. Istorijski značaj ovog rezultata je izuzetno veliki, jer je predstavljao prvi most između trigonometrije, beskonačnih redova i numeričkih metoda.

Lajbnić je dao i važne komentare o kriterijumima konvergencije beskonačnih redova, kao i prve umetnute ideje o povezivanju beskonačnih procesa sa algebarskim operacijama - što će kasnije biti uređen matematički sistem u okviru analize. Njegova formulacija reda za π postala je jedan od najuticajnijih rezultata ranog analitičkog pristupa broju π i ostala je simbol prelaza matematike ka metodološki preciznom i simbolički razvijenom pristupu brojevima.



Slika 1.4: Isak Njutn

1.2.2 Njutn, račun i nizovi brže konvergencije

Isak Njutn (Isaac Newton, 1643-1727)⁴ jedan je od najuticajnijih matematičara u historiji, a njegovi radovi obeležili su razvoj moderne nauke. Njegov doprinos matematici, fizici i filozofiji prirode obuhvata širok spektar tema, među kojima su diferencijalni i integralni račun, teorija gravitacije, zakoni kretanja, optika i numeričke metode. U okviru svog matematičkog rada, Njutn je dao važan doprinos razvoju analitičkih metoda za određivanje broja π , naročito kroz razvoj beskonačnih redova i njihove primene na izračunavanje funkcija.

Za razliku od ranijih geometrijskih pristupa broju π , Njutn je posmatrao π kao rezultat beskonačnog analitičkog procesa i povezao ga sa razvojem funkcija zadatih konačnim algebarskim izrazima. Polazeći od binomne teoreme, koju je prvi formulisao u opštem obliku, Njutn je uspeo da proširi oblast primene ove teoreme na racionalne i realne eksponente. Time je otvorio put razvoju funkcija u redove kao alata za numeričko računanje konstanti.

Definicija 1.3. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i neka važi $|x| < 1$. Tada se funkcija

$$(1+x)^\alpha$$

može predstaviti konvergentnim stepenim redom

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

⁴Isaac Newton (1643-1727), engleski fizičar, matematičar i astronom i jedan od utemeljivača matematičke analize. Dao je značajan doprinos razvoju beskonačnih redova i binomnog reda, koji su omogućili razvoj novih metoda za aproksimaciju matematičkih konstanti, uključujući i broj π .

gde su uopšteni binomni koeficijenti definisani formulom

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad n \geq 1.$$

Ovaj red naziva se *binomni red*. U slučaju kada je $\alpha \in \mathbb{N}_0$, red se svodi na konačan zbir i dobija se klasična binomna formula.

Jedan od najznačajnijih Njutnovih doprinosa izračunavanju broja π proističe iz primene njegove opšte binomne teoreme. Njutn je prvi u istoriji proširio binomnu teoremu na slučaj realnih i racionalnih eksponenata, što je omogućilo razvoj funkcija u beskonačne redove, uključujući i funkciju:

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2}.$$

Njutn je najpre proširio izraz $(1-x^2)^{1/2}$ u binomni red prema opštem obliku:

$$(1+u)^r = 1 + ru + \frac{r(r-1)}{2!}u^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}u^3 + \dots,$$

i zamenio $u = -x^2$ i $r = 1/2$, čime je dobio:

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 - \dots$$

Naredni korak bio je integracijom dobijenog reda član po član na intervalu $[0, 1]$, što je bilo u skladu sa metodama infinitezimalnog računa koje je Njutn razvijao. Integracijom svakog člana razvoja dobija se

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \dots$$

Funkcija

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

predstavlja gornju polovinu jedinične kružnice, pa integral

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

odgovara površini jedne četvrtine kruga poluprečnika 1. Kako je površina celog jediničnog kruga jednaka π , sledi da važi

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Množenjem prethodne jednakosti sa 4 dobija se Njutnova formula za broj π :

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \dots \right).$$

Ova formula predstavlja jedan od prvih primera primene razvoja funkcije u beskonačni red i integracije član po član za numeričko određivanje broja π .

Iako ovaj red konvergira brže od Gregori–Lajbnicovog reda, njegova brzina konvergencije i dalje nije dovoljna za praktično izračunavanje velikog broja decimala broja π . Ako se greška označi sa

$$R_n = \pi - S_n,$$

gde je S_n odgovarajuća parcijalna suma reda, procena ostatka pokazuje da važi

$$|R_n| = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ova kvadratna brzina konvergencije predstavlja poboljšanje u odnosu na Gregori–Lajbnicov red, kod kojeg je greška reda veličine $O(1/n)$, ali i dalje nije dovoljna za efikasno numeričko računanje velikog broja decimala. Zbog toga su kasnije razvijene naprednije metode ubrzavanja konvergencije i algoritmi zasnovani na brže konvergentnim razvojem. Uz razvoj sopstvenih redova za trigonometrijske funkcije i inverze trigonometrijskih funkcija, Njutn je prvi uočio ideju da se izbor promenljive može optimizovati kako bi se algoritamska efikasnost poboljšala. Konkretno, primenom razvoja $\arctg$ funkcije sa argumentima manjim od 1, uspeo je da konstruiše preciznije verzije redova koje konvergiraju mnogo brže od one koju su ranije formulirali Gregori i Lajbnic.

Na osnovu ovih metoda, Njutn je izračunao 15 decimalnih cifara broja π - što je za njegovo vreme predstavljalo izuzetno postignuće. Kasnije je u dopisivanju napomenuo da je sam proces bio toliko naporan da ga ne bi ponovio čak ni da dobije značajnu nagradu, što govori o sporosti ovih ranih metoda pre pojave modernih algoritama.

Njutnov pristup broju π predstavljao je prekretnicu u istoriji matematike: prvi put π nije posmatran samo kao geometrijska konstanta, već kao rezultat analitičkog procesa povezanog sa razvojem funkcija u beskonačne redove. Ovaj pristup kasnije je poslužio kao temelj Gausovim, Ojlerovim i Ramanudžanovim metodama, kao i modernim algoritamskim formulama korišćenim u numeričkom izračunavanju π .

Isak Njutn je značajno unapredio analitičke metode uvođenjem generalizovanog binomnog razvoja, čime je omogućio razvoj mnogih funkcija u beskonačne stepene redove. Ovaj postupak predstavljao je jednu od najvažnijih ideja ranog infinitezimalnog računa, jer je omogućio da se algebarske operacije primene na funkcije koje nisu polinomi. Za $\alpha = \frac{1}{2}$

generalizovana binomna formula daje

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n,$$

gde je

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!}, \quad n \geq 1.$$

Prema tome,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} x^n,$$

a razvoj do n -tog člana je

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{2^k k!} x^k.$$

Koeficijenti ovog reda zadovoljavaju

$$\frac{(2n-3)!!}{2^n n!} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}},$$

što pokazuje brzinu opadanja članova binomnog reda. Ovaj razvoj Njutn je primenio na funkciju

$$\sqrt{1-t^2} = (1-t^2)^{\frac{1}{2}},$$

uvođenjem zamene

$$x = -t^2.$$

Na taj način dobija se razvoj

$$\sqrt{1-t^2} = 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{16}t^6 - \frac{5}{128}t^8 - \dots$$

Ovaj razvoj predstavlja jedan od prvih značajnih primera primene beskonačnih redova u postupcima numeričkog određivanja matematičkih konstanti. Njime je Njutn uspostavio vezu između geometrijskog pristupa određivanju površine kruga i analitičkih metoda zasnovanih na beskonačnim redovima, čime je otvoren put za primenu metoda matematičke analize u numeričkim proračunima. Međutim, i pored svog istorijskog značaja, ovaj razvoj karakteriše relativno spora konvergencija, što ograničava njegovu praktičnu primenu pri izračunavanju velikog broja decimala broja π . Ova ograničenja predstavljala su podsticaj za razvoj savremenijih metoda koje se zasnivaju na transformaciji beskonačnih redova, kao

i na konstrukciji algoritama sa povoljnijim svojstvima konvergencije i većom numeričkom efikasnošću.

1.2.3 Ojler i transformacija π u univerzalnu konstantu



Slika 1.5: Leonard Ojler

Leonhard Ojler (Leonhard Euler, 1707-1783) ⁵ predstavlja jednu od najplodnijih i najuticajnijih ličnosti u istoriji matematike. Njegov rad obuhvata gotovo sve oblasti matematičkih istraživanja 18. veka: analizu, teoriju brojeva, geometriju, kombinatoriku, mehaniku i fiziku. U kontekstu proučavanja broja π , Ojler je ostvario rezultate fundamentalnog značaja, koji su u velikoj meri oblikovali moderno razumevanje ove konstante i njenog mesta u matematičkoj strukturi. Za razliku od svojih prethodnika, koji su π posmatrali prvenstveno kao geometrijsku veličinu ili rezultat trigonometrijskih i aritmetičkih redova, Ojler je π uveo u širi analitički okvir teorije funkcija, beskonačnih proizvoda i kompleksne analize. Ovaj novi pristup omogućio je tumačenje π ne samo kao geometrijski određene konstante, već kao broja duboko povezanog sa algebarskim strukturama, teorijom funkcija i harmonijskom analizom.

Jedan od najpoznatijih Ojlerovih doprinosa jeste rešenje tzv. Bazelskog problema, koji je formulisao Jakob Bernuli i koji je više od pola veka ostao nerazrešen. Problem se odnosio na tačnu vrednost sume recipročnih kvadrata prirodnih brojeva:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

⁵Leonhard Euler (1707-1783), švajcarski matematičar i fizičar i jedan od najznačajnijih matematičara 18. veka. Dao je veliki doprinos razvoju matematičke analize, teorije beskonačnih redova i teorije brojeva, a značajno je doprineo i proučavanju broja π . Uveo je i standardizovao mnoge matematičke oznake koje se koriste i danas.

Ojler je 1735. godine pokazao da je iznenađujući ishod ovog zbira povezan sa brojem π , i to formulom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ovaj rezultat bio je revolucionaran, jer je po prvi put uspostavio jasnu aritmetičku vezu između π i beskonačnih redova koji nisu direktno povezani sa geometrijom ili trigonometrijom. Na osnovu istog principa, Ojler je izveo i generalizaciju preko tzv. Rimanove zeta funkcije, kasnije definišući:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!},$$

gde su B_{2k} Bernulijevi brojevi. Ovaj odnos predstavlja jedno od najdubljih i najpoznatijih rezultata analitičke teorije brojeva.

Pored rešenja Bazelskog problema, Ojler je dao brojne formule i beskonačne proizvode koji konvergiraju ka π . Jedan od najpoznatijih primera jeste Ojlerov proizvod za sinus, iz kojeg sledi čuveni beskonačni proizvod:

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

Postavljanjem $x = \pi$, Ojler je dobio nove načine za formulaciju i izračunavanje broja π , čime je otvorio put kasnijim razvojem koje će kulminirati radovima Gausa, Borvejna i Ramanudžana.

Jedan od rezultata po kojem je Ojler najprepoznatljiviji jeste čuvena Ojlerova formula koja povezuje osnovne matematičke konstante:

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

koju je Ričard Fajnman nazvao najlepšom jednačinom u matematici. Ova formula istovremeno povezuje kompleksnu analizu, eksponencijalnu funkciju i trigonometriju, otkrivajući da π ima duboku ulogu u strukturi kompleksnih funkcija. Ovaj izraz istovremeno povezuje pet fundamentalnih matematičkih konstanti: $e, i, \pi, 1, 0$.

Ojler je svojim radovima po prvi put učinio broj π univerzalnom matematičkom konstantom, prisutnom u gotovo svim oblastima matematike, od geometrije i analize do teorije brojeva i kompleksnih funkcija. Njegovi rezultati ne samo da su unapredili metode za numeričko izračunavanje broja π , već su otkrili njegov suštinski matematički karakter. Zbog toga se Leonhard Ojler smatra jednom od ključnih figura u razvoju analitičkog pristupa broju π i jednim od najvećih matematičara svih vremena.

Kako je Ojler dokazao da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}?$$

Ključ Ojlerovog pristupa bio je u posmatranju sinusne funkcije kao beskonačnog proizvoda, koristeći svojstvo da sinus ima beskonačno mnogo nula u tačkama:

$$0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$$

Pre Ojlera, već je bilo poznato (ali ne formalizovano) da polinomi mogu biti zapisani na osnovu svojih korena - što je danas Vieteova ideja i preteča teorije beskonačnih proizvoda. Ojler je analogno primenio ovo razmišljanje na funkciju $\sin x$, posmatrajući je kao beskonačan polinom čiji su koreni upravo te vrednosti. Iz poznate Tejlorove ekspanzije dobijamo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Deljenjem obe strane sa x , Ojler dobija:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

Pošto su koreni funkcije $\sin x$ jednako raspoređeni u intervalima od π , Ojler zapisuje sinus kao beskonačan proizvod:

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Ovo je analogija s polinomom čiji su koreni $x = \pm n\pi$. Ojler sada izjednačava dva zapisa iste funkcije:

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Ako se beskonačni proizvod formalno proširi kao polinom (nešto što tada nije bilo rigorozno, ali danas znamo da važi), dobijamo:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = 1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2}\right) x^2 + \dots$$

Dakle, koeficijent uz x^2 u tom razvoju iznosi:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2}$$

Iz Tejlorovog niza znamo da je koeficijent uz x^2 :

$$-\frac{1}{6}$$

Pošto koeficijenti moraju biti jednaki, dobijamo:

$$\frac{1}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2}$$

Množenjem obe strane sa π^2 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ovaj dokaz bio je potpuno neočekivan jer je pokazao da se broj π - do tada smatran isključivo geometrijskom konstantom - pojavljuje u čistoj aritmetičkoj formi nevezanoj za krug ili geometriju. Time je π prvi put povezan sa teorijom brojeva i analizom.

1.2.4 Dokaz iracionalnosti i put ka dokazima transcendentnosti

Sedamnaesti i osamnaesti vek donose teorijska pitanja: može li π biti racionalan broj? Johan Lambert (1728-1777) prvi dokazuje da je π iracionalan koristeći razvoj funkcije:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \dots}}}.$$

Lambert pokazuje da, ako je x racionalan broj i $x \neq 0$, tada je $\operatorname{tg}(x)$ iracionalna vrednost - pa posebno:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \implies \frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}.$$

Ovim je po prvi put dokazano:

$$\pi \notin \mathbb{Q},$$

odnosno da π ne može da se napiše u obliku razlomka.

Kasnije, u 19. veku, Ferdinand fon Lindeman je dokazao da je broj π transcendentan, odnosno da ne postoji nijedan polinom sa celobrojnim koeficijentima čiji bi π bio koren. Drugim rečima, broj π nije algebarski iracionalni broj, već pripada skupu transcendentnih brojeva. Ovaj rezultat imao je za posledicu dokaz nemogućnosti rešavanja klasičnog problema “kvadrature kruga” pomoću lenjira i šestara. Naime, konstrukcija kvadrata iste površine kao dati krug zahtevala bi konstrukciju dužine $\sqrt{\pi}$, što bi bilo moguće samo ukoliko bi broj π bio algebarski. Pošto je Lindeman pokazao da je π transcendentan broj, takva konstrukcija nije moguća.

Analitički period razvoja broja π transformisao je matematičko razumevanje ove

konstante. Počevši od relativno jednostavnih trigonometrijskih redova, preko Njutnovog infinitezimalnog računa, pa sve do Ojlerove kompleksne analize i dokaza iracionalnosti, π se postepeno emancipovao iz geometrijskog konteksta i postao sveprožimajući matematički objekat.

Najvažnije posledice ovog perioda su:

- π postaje konstanta definisana analitički, a ne empirijski;
- uvodi se infinitezimalni račun koji zamenjuje geometrijske aproksimacije;
- π postaje deo univerzalnih matematičkih struktura, uključujući teoriju funkcija, kompleksnu analizu i teoriju brojeva.

1.3 Istorija broja π sa algoritamskog aspekta

Treći razvojni period u istoriji proučavanja broja π vezan je za algoritamski pristup, koji postaje dominantan tek u drugoj polovini 20. veka. Dok su prethodne epohe bile obeležene geometrijskim i analitičkim metodama, savremena era karakteriše prelazak na numeričke algoritme koje primenjuju visokoperformantni računari. Ovaj pristup omogućio je izračunavanje broja π sa dosad nezamislivom preciznošću, prelazeći evoluciju od stotina decimala (ručni proračuni) do trilion decimala (superračunari i distribuirani sistemi).

Razvoj algoritamskih metoda direktno je povezan sa tehnološkim napretkom, jer složeni iterativni postupci zahtevaju veliku računsku snagu i optimizovane numeričke tehnike. Za razliku od ranijih metoda koje su davale nekoliko decimala po iteraciji, moderni algoritmi - posebno oni bazirani na Gaus-Ležandr metodi ili Borvejinovim iterativnim formulama - ostvaruju eksponencijalnu brzinu konvergencije. Literatura [1, 6, 7] daje iscrpan pregled ove epohe i predstavlja osnovu ovog poglavlja.

1.3.1 “Digit-hunteri” i društveno-matematički kontekst

Pre pojave računara, pojedince koji su se bavili izračunavanjem sve većeg broja decimala broja π često su nazivali *digit-hunterima* - doslovno "lovcima na cifre". Među najpoznatijima su:

- Ludolf van Ceulen (16. vek), koji je izračunao π na 35 decimala, a zanimljivost je da su cifre ugravirane na njegov nadgrobni spomenik;
- William Shanks (19. vek), koji je tvrdio da je izračunao 527 decimala, a kasnije se pokazalo da je od 528. cifre nadalje rezultat bio pogrešan.

Ovi pokušaji bili su motivisani delom naučnom ambicijom, a delom prestižem - broj π je, već od antičkih vremena, bio broj „izazova”.

1.3.2 „Circle-squareri“ i matematika pokušaja i zabluda

Još jedna značajna grupa u ovom periodu su tzv. *circle-squareri*, pojedinci koji su pokušavali rešiti antički problem „kvadrature kruga“. Cilj zadatka bio je konstruisati kvadrat jednake površine datom krugu koristeći samo lenjir i šestar. Do kraja 19. veka tvrdnje o pronalasku rešenja bile su česta pojava, što je bila posledica nerazumevanja strukture broja π .

Tek nakon dokaza Lindemana 1882. godine da je π transcendentan, postalo je matematički formalno nemoguće izvesti takvu konstrukciju. Ipak, „circle-squareri“ ostaju istorijski trag fascinacije brojem π kao objektom matematičkog izazova.

1.3.3 Računarski početak - ENIAC i nova era numerike

Pravi algoritamski razvoj počinje nakon Drugog svetskog rata, izgradnjom prvih elektronskih računara. U periodu od 1949. do 1961. ključni sistemi za numeričko izračunavanje π bili su: ENIAC, NORC, IBM 704 i IBM 7090.

Računar	Period	Broj izračunatih decimala
ENIAC	1949	2037
NORC	1954	3089
IBM 704	1959	16167
IBM 7090	1961	100265

Tabela 1.1: Ključni sistemi za numeričko izračunavanje π u periodu od 1949. do 1961.

Ovim rezultatima započinje digitalna era. Ovi računari koristili su metode zasnovane na *arctg*-formulama i varijantama Mašinove formule:

$$\pi = 16 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

zbog relativno dobre konvergencije i jednostavnosti implementacije.

Razvoj elektronskih računara početkom dvadesetog veka zahtevao je efikasnije metode za numeričko izračunavanje broja π . Jedna od najznačajnijih formula koja je omogućila takav proračun jeste **Mašinova formula**, koju je 1706. godine izveo Džon Mašin:

$$\pi = 16 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Ova formula zasniva se na razvoju funkcije arkus tangens u red:

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

odnosno

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Za razliku od Gregori–Lajbnicovog reda, kod kojeg se koristi vrednost $x = 1$,

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

Mašin je iskoristio osobine funkcije tangens i odgovarajući izbor malih argumenata kako bi dobio bržu konvergenciju. Polazi se od adicione formule za tangens:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Izborom odgovarajućih uglova dobija se identitet

$$\operatorname{tg} \left(4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \right) = 1.$$

Kako je

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1,$$

sledi da je

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

Množenjem ove jednakosti sa 4 dobija se Mašinova formula:

$$\boxed{\pi = 16 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239}}.$$

Uvrštavanjem razvoja funkcije $\operatorname{arctg}(x)$ dobija se izraz

$$\pi = 16 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots \right) - 4 \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots \right).$$

Brzina konvergencije ovog razvoja može se proceniti pomoću ostatka alternirajućeg reda.

Za razvoj funkcije $\operatorname{arctg}(x)$ važi

$$|R_n| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

Kod Gregori–Lajbnicovog reda imamo $x = 1$, pa je

$$|R_n| \leq \frac{1}{2n+3},$$

što daje veoma sporu konvergenciju. Kod Mašinove formule prvi deo koristi

$$x = \frac{1}{5},$$

pa je greška reda veličine

$$|R_n| \leq \frac{1}{(2n+3)5^{2n+3}},$$

dok je drugi deo još brže konvergentan zbog vrednosti

$$x = \frac{1}{239}.$$

Zbog toga Mašinova formula omogućava veoma brzo izračunavanje broja π sa velikim brojem decimalnih mesta. Njena jednostavnost i dobra konvergencija učinile su je pogodnom za implementaciju na prvim elektronskim računarima, čime je predstavljala važnu vezu između klasičnih analitičkih metoda i početka digitalne ere računanja.

1.3.4 Algoritmi sa kvadratnom konvergencijom

Dalji napredak matematičara omogućio je razvoj metoda sa znatno boljim svojstvima. Posebno se ističe Gaus-Ležandr algoritam, poznat i kao AGM (*Arithmetic-Geometric Mean*) metoda. Algoritam počinje sledećim inicijalnim vrednostima:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad t_0 = \frac{1}{4}, \quad p_0 = 1.$$

Za svaku iteraciju računaju se nove vrednosti:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

$$t_{n+1} = t_n - p_n(a_n - a_{n+1})^2,$$

$$p_{n+1} = 2p_n.$$

Nakon n -te iteracije definiše se aproksimacija broja π izrazom

$$\pi_n = \frac{(a_n + b_n)^2}{4t_n}$$

gde π_n predstavlja približnu vrednost broja π dobijenu nakon n iteracija algoritma. Niz aproksimacija zadovoljava osobinu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = \pi,$$

odnosno vrednosti π_n se sa povećanjem broja iteracija približavaju pravoj vrednosti broja π .

Tačnost aproksimacije može se opisati greškom

$$e_n = \pi - \pi_n.$$

Za Gaus–Ležendreov algoritam važi kvadratna konvergencija, što znači da je greška približno oblika

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n|^2,$$

gde je C konstanta koja ne zavisi od iteracije. Ova osobina ima za posledicu veoma brzo povećanje preciznosti. Ako je u nekoj iteraciji greška reda veličine

$$|e_n| \approx 10^{-k},$$

onda je u sledećoj iteraciji približno

$$|e_{n+1}| \approx (10^{-k})^2 = 10^{-2k}.$$

Prema tome, ako aproksimacija π_n ima približno k tačnih decimalnih mesta, sledeća iteracija daje približno $2k$ tačnih decimalnih mesta. Zbog toga se kaže da kvadratna konvergencija približno udvostručuje broj tačnih cifara u svakoj iteraciji.

Za poređenje, kod Gregori–Lajbnicovog reda greška opada samo linearno:

$$R_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

dok kod Gaus–Ležendreovog algoritma broj tačnih cifara raste eksponencijalno sa brojem iteracija.

Na primer, nakon nekoliko iteracija dobijaju se sledeće aproksimacije:

$$\pi_1 \approx 3.1405792505,$$

$$\pi_2 \approx 3.1415926462,$$

$$\pi_3 \approx 3.141592653589793 \dots$$

Već posle tri iteracije dobija se približno dvostruko veća preciznost nego kod mnogih klasičnih beskonačnih redova. Zbog toga Gaus–Ležendreov algoritam predstavlja jedan od najefikasnijih postupaka za računanje broja π i važan je primer primene kvadratne konvergencije u numeričkoj analizi.

1.3.5 Borvejnov kubni algoritam i moderna epoha

Konačni prelaz u savremenu eru postiže se radovima Jonathana i Petera Borvejna, krajem 20. veka. Njihovi algoritmi zasnovani su na eliptičkim funkcijama i modularnim transformacijama, a postižu kubnu i kvartičnu konvergenciju, što omogućava izračunavanje biliona cifara π .

Primer Borvejnovog kubnog algoritma:

Inicijalne vrednosti:

$$a_0 = \frac{1}{3}, \quad s_0 = \frac{\sqrt[3]{2-1}}{2}.$$

Iteracije:

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{3}{1 + 2s_n}, \\ s_{n+1} &= \sqrt[3]{\frac{r_n^2(1 - s_n^3)}{1 + s_n + s_n^2}}, \\ a_{n+1} &= r_n^2 a_n - \frac{1}{3}(r_n^2 - 1). \end{aligned}$$

Zatim:

$$\pi \approx \frac{1}{a_n}.$$

Ovo označava prelazak od matematičkog istraživanja π do računarske matematike, koja π posmatra kao test platformu za algoritme visoke preciznosti.

Algoritamska faza razvoja broja π predstavlja novo poglavlje u matematici, u kojem π postaje referentna konstanta za testiranje numeričkih procedura, računarskih arhitektura i teorije kompleksnosti. Od ranih ručnih proračuna do superračunarskih metoda, istorija algoritamskog razvoja π pokazuje evoluciju matematičke analize u sinergiji sa tehnološkim napretkom.

Ovaj period predstavlja most između matematičke teorije i primene, i kao takav čini prirodan uvod u narednu glavu, u kojoj se detaljno razmatraju analitičke metode izračunavanja π .

Glava 2

Analitički pristup izračunavanju broja π

Analitička era proučavanja broja π započinje u 17. veku i predstavlja prekretnicu u matematičkom razumevanju ove konstante. Dok su u prethodnoj glavi razmatrani geometrijski i algoritamski pristupi, analitička faza uvodi π u svet beskonačnih redova, integrala, trigonometrijskih funkcija i specijalnih funkcija. Ovaj pristup omogućava ne samo teoretsku definiciju π , već i praktične metode izračunavanja njegovih decimala.

Analitički pristup omogućava sledeće:

- Transformaciju geometrijskog problema u beskonačne redove;
- Razvoj metoda koje se temelje na granicama i konvergenciji;
- Postavljanje temelja za dokaze iracionalnosti i transcendentnosti;
- Inspiraciju za algoritamske metode koje se primenjuju u savremenoj numeričkoj matematici.

U ovoj glavi koristi se literatura [1, 6, 7, 13].

2.1 Beskonačni redovi kao novi pristup

Beskonačni redovi predstavljaju prvi i najvažniji alat analitičkog izračunavanja broja π . Njihova osnovna ideja je izražavanje π kao limesa zbira beskonačnog niza elemenata, čime se prelazi sa geometrijskog aproksimiranja na analitičku preciznost.

Ovo poglavlje daje formalnu definiciju redova, kriterijume konvergenije i primere primene u numeričkoj praksi.

2.1.1 Definicija i osnovni pojmovi

Stroga definicija data je u prethodnoj glavi. U ovoj glavi ćemo ipak ponoviti osnovne osobine.

Definicija 2.1. Neka je $a \in \mathbb{R}$. Broj $x \in \mathbb{R}$ naziva se *racionalnim višekratnikom* broja a ako postoji racionalan broj $q \in \mathbb{Q}$ takav da važi

$$x = qa.$$

Pod pojmom višekratnik podrazumevamo broj koji je deljiv nekim brojem bez ostatka. Posebno, racionalni višekratnici broja π jesu svi brojevi oblika

$$q\pi, \quad q \in \mathbb{Q}.$$

U kontekstu π , cilj je pronaći red čiji je zbir jednak π ili racionalnom višekratniku π , npr.:

$$\frac{\pi}{k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad k \in \mathbb{Q}.$$

Za svako $p \in \mathbb{N}$ postoji $N(p) \in \mathbb{N}$ takav da

$$\left| S - \sum_{n=0}^{N(p)} a_n \right| < 10^{-p},$$

gde p predstavlja željeni broj tačnih decimalnih mesta.

2.1.2 Gregori–Lajbnicov red za broj π

Jedan od prvih analitičkih redova za π proističe iz razvoja funkcije arkus tangens u stepeni red:

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1.$$

Za $x = 1$ dobijamo Gregori–Lajbnicovu formulu:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Kao što smo ranije pomenuli, ovaj red je istorijski značajan, jer je prvi put matematički definisao π kao zbir beskonačnog niza, a ne samo kao geometrijski odnos.

2.1.3 Problemi sporog konvergiranja

Iako jednostavna, Gregori–Lajbnicova formula konvergira izuzetno sporo. Naime, za parcijalnu sumu

$$\pi_N = 4 \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

greška se, prema teoremi o alternirajućim redovima, može proceniti nejednakošću

$$|\pi - \pi_N| \leq \frac{4}{2N+3}.$$

Ako se zahteva tačnost od deset decimalnih mesta, dovoljno je da važi

$$\frac{4}{2N+3} < 10^{-10},$$

odakle sledi

$$N > \frac{4 \cdot 10^{10} - 3}{2} \approx 2 \times 10^{10}.$$

Dakle, za dobijanje približno deset tačnih decimalnih mesta potrebno je oko

$$2 \times 10^{10}$$

članova reda, što jasno ilustruje izuzetno sporu konvergenciju Gregori–Lajbnicovog reda. Ovo je motivisalo razvoj Mašinovih formula i drugih identiteta sa bržom konvergencijom:

$$\pi = 16 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{5} \right) - 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{239} \right),$$

koja smanjuje broj potrebnih članova na nekoliko stotina za istu preciznost. Mašinska formula za broj π zasniva se na identitetima za funkciju arkus tangens i formuli za tangens razlike uglova. Osnovni identitet, za $a, b \in \mathbb{R}$ i uz uslov $1 + ab > 0$, glasi

$$\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \left(\frac{a - b}{1 + ab} \right),$$

dok za tangens razlike važi

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Ideja je pronaći racionalne brojeve x i y tako da

$$\operatorname{arctg}(1) = 4 \operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y).$$

Pošto je

$$\operatorname{arctan}(1) = \frac{\pi}{4},$$

dobija se formula za broj π množenjem obe strane sa 4. Mašin je pronašao da izbor

$$x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{1}{239}$$

zadovoljava traženi uslov. Najpre izračunajmo

$$\operatorname{tg} \left(4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \right).$$

Neka je

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{1}{5},$$

tako da je

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{5}.$$

Koristeći formulu za dvostruki ugao,

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta},$$

dobijamo

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}.$$

Ponovnom primenom iste formule sledi

$$\operatorname{tg}(4\theta) = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}.$$

Sada primenjujemo formulu za tangens razlike:

$$\operatorname{tg}\left(4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}\right) = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \cdot \frac{1}{239}}.$$

Izračunavanjem brojilaca i imenilaca dobijamo

$$\frac{\frac{120 \cdot 239 - 119}{119 \cdot 239}}{\frac{119 \cdot 239 + 120}{119 \cdot 239}} = \frac{28561}{28561} = 1.$$

Dakle,

$$\operatorname{tg}\left(4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}\right) = 1.$$

Pošto je

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

iz jednoznačnosti funkcije arkus tangens sledi

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Množenjem prethodne jednakosti sa 4 dobija se poznata Mašinova formula

$$\pi = 16 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Zašto formula brzo konvergira? Mašin je znao da se može primeniti Tejlorov red za arkus tangens funkciju:

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad |x| \leq 1.$$

Ako je $|x| < 1$, članovi Tejlorovog reda

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

imaju apsolutnu vrednost

$$\left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|,$$

koja brzo opada sa porastom n , jer se stepeni x^{2n+1} geometrijski smanjuju kada je $|x| < 1$. Zbog toga je za postizanje visoke tačnosti dovoljan relativno mali broj članova reda. Na primer,

- za $x = \frac{1}{5}$ važi

$$\left(\frac{1}{5} \right)^3 = \frac{1}{125} \approx 8 \times 10^{-3},$$

pa su već treći i naredni članovi reda znatno manji od prvog;

- za $x = \frac{1}{239}$ dobija se

$$\left(\frac{1}{239} \right)^3 \approx 7.32 \times 10^{-8},$$

tako da članovi reda opadaju izuzetno brzo.

Za razliku od Gregori–Lajbnicovog i Ojlerovog reda, Mašinova formula konvergira veoma brzo. Naime, za postizanje približno deset tačnih decimalnih mesta broja π dovoljno je svega sedam članova reda za $\arctan(1/5)$, dok je doprinos reda za $\arctan(1/239)$ praktično zanemarljiv. Nasuprot tome, Ojlerov red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

zahteva red veličine 10^{10} članova da bi se postigla ista apsolutna tačnost, što jasno ilustruje veliku razliku u brzini konvergencije. Značaj formule ogleda se u sledećem:

- Mašin ju je koristio 1706. godine da izračuna π na 100 tačnih decimala, što je tada bio rekord;

- Ova formula postala je osnova za mnoge kasnije metode, posebno tzv. formule Mašinovog tipa, koje se i danas koriste u algoritmima za brzo računanje π (npr. Chudnovsky algoritam je daleki matematički nasljednik).

Beskonačni redovi predstavljaju prvi analitički korak u proučavanju π . Njihova vrednost nije u numeričkoj efikasnosti, već u:

- Utemeljenju teorijskog pristupa π ;
- Uvođenju koncepta granice i konvergencije;
- Otvaranju puta za brže metode i algoritamske tehnike.

2.2 Redovi Gregorija, Lajbnica i Nilakante

Ovo poglavlje detaljno obrađuje najranije i najpoznatije beskonačne redove koji konvergiraju ka π . Fokus je na doprinosima:

- Džejmsa Gregorija, 1638-1675,
- Gotfrida Vilhelma Lajbnica, 1646-1716,
- Nilakante Somaja, 1444-1544.

Ovi redovi su ne samo numerički alati već i istorijski značajni zbog uvođenja analitičkih principa u proučavanje π .

2.2.1 Gregorijev red

Značaj Džejmsa Gregorija opisan je u prethodnoj glavi. Džejms Gregori razvio je red:

$$\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1,$$

koji za $x = 1$ daje:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

2.2.2 Lajbnicov red

Značaj Gotfrida Vilhelma Lajbnica opisan je u prethodnoj glavi. Lajbnic je nezavisno otkrio isti red i posebno naglasio alternirajuće članove kao metodu procene greške:

$$|R_N| < \frac{1}{2N+1}.$$

Ovo je omogućilo prvi rigorozni pristup oceni preciznosti numeričkih aproksimacija π .

n	Parcijalna suma	Tačna vrednost	Aproksimirana vrednost
1	$4 \cdot 1$	4	4
2	$4 \cdot (1 - 1/3)$	$8/3$	2.666666666
3	$4 \cdot (1 - 1/3 + 1/5)$	$52/15$	3.466666666
4	$4 \cdot (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7)$	$304/105$	2.895238095
5	$4 \cdot (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9)$	$1052/315$	3.339682539
6	$4 \cdot (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11)$	$10312/3465$	2.976046176
7	$4 \cdot (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13)$	$147916/45045$	3.283738483
8	$4 \cdot (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - 1/15)$	$135904/45045$	3.017071817
9	$4 \cdot (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - 1/15 + 1/17)$	$2490548/765765$	3.252365934
10	$4 \cdot (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - 1/15 + 1/17 - 1/19)$	$44257352/14549535$	3.041839618
100	$4 \cdot (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 \pm \dots - 1/199)$	Brojilac i imenilac imaju 88 mesta	3.131592903
1000	$4 \cdot (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 \pm \dots - 1/1999)$	-	3.131592902
10000	$4 \cdot (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 \pm \dots - 1/19999)$	-	3.141492653
100000	$4 \cdot (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 \pm \dots - 1/199999)$	-	3.141582653

 Tabela 2.1: Aproksimirane vrednosti broja π Lajbnicovog reda

2.2.3 Nilakantevi redovi

Nilakanta Somaja iz Indije razvija red sa bržom konvergencijom:

$$\pi = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{(2n)(2n+1)(2n+2)}, \quad (2.1)$$

što čini praktičnu primenu analitičkih redova mnogo efikasnijom.

Odakle matematički nastaje taj oblik? Suština je transformisati alternativni red

$$4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad (\text{Gregori-Lajbnić}) \quad (2.2)$$

u nov, brže konvergujući oblik.

Evo jasnog matematičkog objašnjenja:

Za svako $n \geq 1$ važi identitet:

$$\frac{4}{(2n)(2n+1)(2n+2)} = \frac{2}{(2n)(2n+1)} - \frac{2}{(2n+1)(2n+2)}. \quad (2.3)$$

Ovo je lako proveriti algebarski (svođenjem desne strane na zajednički imenilac). Ovaj oblik je pogodan zato što se članovi na desnoj strani međusobno poništavaju pri sabiranju reda, usled teleskopskog karaktera sume.

Poznati alternativni red za π može se transformisati preuređivanjem njegovih članova. Korišćenjem rastavljanja racionalnih izraza na parcijalne razlomke dobija se teleskopska struktura u kojoj se pojedini članovi međusobno poništavaju, dok preostali članovi opadaju znatno brže. Kao rezultat ove transformacije dobija se red:

$$\pi = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{(2n)(2n+1)(2n+2)}. \quad (2.4)$$

Konkretno, primenom konačnih razlika (ili odgovarajućeg polinomskog faktora koji u

integralnoj reprezentaciji „prigušuje” oscilacije ostatka reda), Gregori–Lajbnicov red može se izraziti kao zbir početne konstante (u ovom slučaju broja 3) i novog alternativnog reda čiji članovi opadaju znatno brže.

Kratka algebraička skica transformacije

Nilakantin red može se dobiti transformacijom Gregori–Lajbnicovog reda

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Ideja transformacije jeste grupisanje susednih članova alternirajućeg reda. Za svako $n \geq 1$ važi

$$\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1} = \frac{2}{(4n-1)(4n+1)}.$$

Na taj način red se može zapisati u obliku

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n-1)(4n+1)}.$$

Daljom algebarskom transformacijom dobija se identitet

$$\frac{2}{(4n-1)(4n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{(2n)(2n+1)(2n+2)} - \frac{4}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)} \right),$$

što predstavlja teleskopsku transformaciju reda. Sabiranjem svih članova teleskopskog reda poništava se većina susednih članova, pa nakon sređivanja ostaje

$$\pi = 3 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)(2n+1)(2n+2)}.$$

Odnosno,

$$\pi = 3 + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{4}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{4}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \cdots$$

što je poznati Nilakantin red. Za velike vrednosti n članovi reda imaju asimptotsko ponašanje

$$\frac{4}{(2n)(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{1}{2n^3}, \quad n \rightarrow \infty,$$

dok članovi Gregori–Lajbnicovog reda opadaju kao

$$\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n}.$$

Prema tome, Nilakantin red konvergira znatno brže, jer njegov ostatak opada reda veličine

$$R_N = O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

dok za Gregori–Lajbnicov red važi

$$R_N = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Time se postiže značajno ubrzanje konvergencije, iako je Nilakantin red i dalje znatno sporiji od kasnijih formula, kao što su Mašinova ili Ramanudžanove formule za broj π .

2.3 Redovi koji konvergiraju brže od Lajbnicovih

Iako su redovi Gregorija, Lajbnica i Nilakanṭhe istorijski značajni, njihova praktična primena u numeričkom izračunavanju π ograničena je sporošću konvergencije. Tokom 18. i 19. veka, matematičari su razvili redove i formule koje omogućavaju bržu konvergenciju i time smanjuju broj potrebnih članova za postizanje određene preciznosti.

Ovo poglavlje analizira ključne metode koje omogućuju efikasnije numeričko izračunavanje π , uključujući Mašinske formule, Ojlerove transformacije, i redove inspirisane radom Nilakanṭhe, ali sa unapređenom brzinom konvergencije.

U ovom poglavlju koristili smo literaturu [7].

2.3.1 Mašinske formule

Džon Mašin (1706) otkrio je identitet koji značajno ubrzava konvergenciju arkus tangens redova:

$$\pi = 16 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right).$$

Ranije smo naveli odakle potiče ova jednakost. Ovaj izbor argumenata omogućava da redovi $\operatorname{arctg}(1/5)$ i $\operatorname{arctg}(1/239)$ konvergiraju daleko brže od $\operatorname{arctg}(1)$. U praksi, za preciznost od deset decimala, dovoljno je nekoliko stotina članova, u poređenju sa milionima potrebnih kod Lajbnicovog reda.

Kasnije su razvijene varijacije:

$$\pi = 4\left(4 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{70}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{99}\right)\right),$$

koje omogućavaju još bržu konvergenciju i veću numeričku stabilnost.

2.3.2 Ojlerova transformacija i ubrzanje konvergencije

Značaj Leonarda Ojlera opisan je u prethodnoj glavi.

Ojler je primenio tehnike transformacije redova koje smanjuju efekt sporokonvergentnih članova. Za alternativne redove

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

Ojlerova transformacija daje novi red:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}},$$

gde $\Delta^n a_0$ predstavlja n -tu diferencijaciju početnog člana, što ćemo u nastavku detaljno obrazložiti. Ova metoda omogućava ubrzanje konvergencije originalnog reda i bila je široko korišćena u 18. i 19. veku za aproksimaciju π .

Ojlerova transformacija alternativnih redova potiče iz njegovog rada na teoriji divergentnih i sporokonvergentnih redova, posebno iz studija objavljenih između 1738-1755 u delima:

- *De transformatione serierum* (1738),
- *Introductio in analysin infinitorum* (1748),
- *Institutiones calculi differentialis* (1755).

U tim radovima Ojler je prvi sistematski razvio metode za ubrzavanje konvergencije (danas poznate kao *Euler acceleration* ili *Euler summation*), analizirajući razlike između susednih članova alternativnih redova. On je uočio da se sporokonvergentni redovi mogu pretvoriti u brže konvergentne tako što se posmatraju razlike između članova (tzv. *finite differences*):

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \quad \Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n), \quad \Delta^3 a_n = \Delta(\Delta^2 a_n), \dots$$

Sa ovim formalizmom Ojler je došao do transformacije

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

koja se može prepisati u obliku:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{a_0}{2} + \frac{\Delta a_0}{2^2} + \frac{\Delta^2 a_0}{2^3} + \frac{\Delta^3 a_0}{2^4} + \frac{\Delta^4 a_0}{2^5} + \dots \\
 &= \frac{a_0}{2} + \frac{\Delta a_0}{4} + \frac{\Delta^2 a_0}{8} + \frac{\Delta^3 a_0}{16} + \frac{\Delta^4 a_0}{32} + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

Ojlerova transformacija potiče iz sledećeg ključnog opažanja:

- U alternativnom redu, članovi se međusobno delimično poništavaju, ali taj efekat je spor ako opadajuće veličine a_n sporo teže ka nuli.
- Ako se umesto originalnog niza koristi niz uzastopnih razlika, tada elementi reda brže opadaju, jer

$$|\Delta^k a_0| \rightarrow 0 \quad \text{mnogo brže nego} \quad |a_n|.$$

Kod alternativnih redova konačne razlike omogućavaju ubrzanje konvergencije, jer članovi transformisanog reda imaju oblik

$$\frac{\Delta^k a_0}{2^{k+1}}.$$

Za Gregori–Lajbnicov niz

$$a_n = \frac{1}{2n+1},$$

važi

$$\Delta^k a_0 = \int_0^1 (1-x^2)^k dx,$$

odakle sledi procena

$$\Delta^k a_0 = O(k^{-1/2}).$$

Zbog dodatnog faktora $2^{-(k+1)}$, članovi transformisanog reda opadaju kao

$$\frac{\Delta^k a_0}{2^{k+1}} = O\left(\frac{1}{2^k \sqrt{k}}\right),$$

što predstavlja znatno bržu konvergenciju u odnosu na originalne članove reda

$$a_n = O(n^{-1}).$$

Dakle, transformacija nije samo formalno prepisivanje - ona realno ubrzava približavanje sume konačnoj vrednosti. Posmatrajmo alternativni red

$$S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

odnosno

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Množenjem jednakosti sa 2 dobijamo

$$2S = 2a_0 - 2a_1 + 2a_2 - 2a_3 + \cdots.$$

Ovaj izraz možemo zapisati pomoću konačnih razlika. Kako je

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n,$$

važi

$$a_1 = a_0 + \Delta a_0,$$

$$a_2 = a_0 + 2\Delta a_0 + \Delta^2 a_0,$$

$$a_3 = a_0 + 3\Delta a_0 + 3\Delta^2 a_0 + \Delta^3 a_0,$$

itd. Alternativno, izraz za $2S$ može se zapisati u obliku

$$2S = a_0 - (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) - (a_3 - a_2) + \cdots,$$

odnosno

$$2S = a_0 - \Delta a_0 + \Delta a_1 - \Delta a_2 + \Delta a_3 - \cdots.$$

Sada sabiranjem sa početnim izrazom za S dobijamo

$$S = a_0 - \frac{\Delta a_0}{2} + \frac{\Delta^2 a_0}{4} - \frac{\Delta^3 a_0}{8} + \frac{\Delta^4 a_0}{16} - \cdots.$$

Konačno, u kompaktnom obliku Ojlerova transformacija glasi

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Delta^n a_0}{2^n}$$

gde $\Delta^n a_0$ predstavlja n -tu konačnu razliku niza $a_0, a_1, a_2, \dots$. Dakle, umesto originalnog reda čiji članovi opadaju kao a_n , dobija se novi red čiji članovi sadrže konačne razlike, a dodatni faktor 2^{-n} dovodi do ubrzanja konvergencije. Korišćenjem iterativnog formiranja razlika dobio je opšti oblik, koji posle pojednostavljenja vodi do finalne formule.

Ojlerova transformacija je bila jedna od prvih formalnih metoda za:

- ubrzanje alternativnih redova,
- sabiranje divergentnih redova (Cesàro-Euler nizova),
- praktično računanje konstanti, uključujući π .

Posebno je korišćena za ubrzavanje konvergencije Gregori-Lajbnicovog reda:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

jer primena Ojlerove transformacije drastično smanjuje broj potrebnih članova.

Ojlerova transformacija potiče iz njegovog rada na teoriji redova sredinom 18. veka i predstavlja jedan od prvih sistematskih matematičkih alata za ubrzavanje konvergencije. Ona je nastala analizom razlika između članova alternativnih redova i kasnije postala ključna tehnika u numeričkim metodama za računanje π .

2.3.3 Redovi Nilakanteve vrste sa optimizacijom

Nilakantevi redovi imaju oblik:

$$\pi = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4}{(2n)(2n+1)(2n+2)}.$$

Ovi redovi se mogu dodatno modifikovati kako bi se poboljšala brzina konvergencije. Na primer, primenom varijacije redova ili kombinovanjem više redova dobijaju se ubrzane formule:

$$\pi = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Ove metode služe kao osnova za kasnije algoritamske procedure i predstavljaju važan prelaz ka iterativnim i eksponencijalno konvergentnim formulama.

2.3.4 Upotreba u istorijskim proračunima

U 18. i 19. veku ove formule omogućile su:

- Ručno računanje stotina decimala π .
- Veću preciznost pri manjim brojevima članova.
- Razvoj algoritamskih metoda koje su se kasnije koristile na ENIAC-u i IBM-ovim računarima.

Brže konvergentni redovi postavljaju temelje za kvadratne i kubne iterativne algoritme koji će biti detaljno razmatrani u poglavljima posvećenim Gausu i Borvejnima.

Redovi koji konvergiraju brže od Lajbnicovih predstavljaju ključni korak ka praktičnoj primeni analitičkih metoda. Njihov značaj je dvostruk:

1. Omogućavaju numerički izračun π sa znatno manjim brojem članova.
2. Postavljaju teorijsku osnovu za razvoj algoritamskih i iterativnih metoda visokog reda konvergencije koje će dominirati u 20. veku.

2.4 Ojlerovi rezultati

Značaj Leonarda Ojlera opisan je u prethodnoj glavi. Leonard Ojler (1707-1783) predstavlja ključnu ličnost u istoriji analitičkog proučavanja broja π . Njegov doprinos nije ograničen samo na numeričke aproksimacije, već se prostire na teoriju beskonačnih redova, proizvoda i kompleksne analize, čime π postaje centralna konstanta u modernoj matematici.

U ovom poglavlju obrađujemo:

- Ojlerove beskonačne proizvode,
- vezu π sa trigonometrijskim funkcijama,
- identitet $e^{i\pi} + 1 = 0$,
- Ojlerove formule za nizove kvadrata i viših stepena.

Ovi rezultati transformišu π iz numeričkog objekta u univerzalnu matematičku konstantu. Koristili smo literaturu [1, 6, 7].

2.4.1 Ojlerov beskonačni proizvod za $\sin(x)$

Ojler je pokazao, što smo naveli ranije, da se funkcija $\sin(x)$ može izraziti kao beskonačni proizvod:

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right).$$

-poslati referencu!

Ova formula povezuje π sa nulama $\sin(x)$ na intervalu $[0, \infty)$, dajući elegantnu vezu između trigonometrijskih funkcija i aritmetičke strukture prirodnih brojeva.

Primena ovog identiteta omogućuje:

- razvoj novih nizova za π ,

- izvođenje Ojlerovog rešenja Bazelovog problema:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.4.2 Ojlerova veza π i kompleksnih brojeva

Leonard Ojler je uveo osnovnu relaciju u kompleksnoj analizi:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

što za $x = \pi$ daje čuveni identitet:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Ovaj izraz povezuje pet fundamentalnih matematičkih konstanti: $0, 1, \pi, i, e$, i smatra se jednom od najlepših formula u matematici. Pored estetske vrednosti, identitet služi i kao osnova za:

- razvoj Furijeove analize,
- definisanje kompleksnih eksponencijalnih funkcija,
- proučavanje periodičnosti trigonometrijskih funkcija u analitičkoj teoriji.

Ojlerova relacija

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

nije nastala kao izolovana formula, već kao rezultat opšteg proučavanja redova beskonačnih funkcija i njihove međusobne povezanosti. Ojler je uočio da se tri fundamentalne funkcije - eksponencijalna, sinus i kosinus - mogu zapisati pomoću istog matematičkog jezika: Tejlorovih (Maklorenovih) redova.

Ovo opažanje pojavljuje se u Ojlerovim radovima između 1740.-1748., a formalno u delu *Introductio in analysin infinitorum* (1748), gde prvi put povezuje analitičku reprezentaciju trigonometrijskih funkcija sa eksponencijalnom funkcijom.

Ojler je znao (preko Bernulija i Njutna) da se sledeće funkcije mogu predstaviti neprekidnim redovima:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Ojler je zatim napravio inovativan korak: zamenio je realni argument eksponencijalne funkcije kompleksnim brojem ix :

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$$

Pošto važi $i^2 = -1$, red se preoblikuje u:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots$$

Ojler je primetio da deo sa realnim koeficijentima odgovara $\cos x$, a deo sa imaginarnim koeficijentima odgovara $\sin x$:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

što daje:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Ovo nije bila samo algebarska zanimljivost - Ojlerova formula postala je temelj modernog:

- kompleksnog računa,
- Fourierove analize,
- teorije diferencijalnih jednačina,
- signalne i kvantne teorije.

Posebno, postavljanjem $x = \pi$ dobijamo najpoznatiju matematičku relaciju na svetu:

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

koja povezuje pet osnovnih matematičkih konstanti.

Ojlerova relacija potiče iz analize beskonačnih redova i predstavlja prirodni zaključak iz činjenice da eksponencijalna funkcija, sinus i kosinus imaju istu strukturu razvoja u Tejlorovim redovima. Ojler je prvi prepoznao da ove funkcije nisu odvojene, već duboko povezane kompleksnim imenovanjem argumenta.

Ova formula se smatra jednim od najvećih otkrića u istoriji matematike jer objedinjuje algebru, geometriju, analizu i kompleksne brojeve u jednu jedinu elegantnu jednačinu.

2.4.3 Ojlerovi redovi i Rimanova ζ -funkcija

Ojler je proučavao redove oblika:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k},$$

danas poznate kao Rimanova ζ -funkcija za pozitivne cele brojeve k .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

što je poznati Ojlerov rezultat dobijen 1735. godine. Ovaj identitet omogućio je prvo analitičko povezivanje beskonačnih redova sa brojem π i predstavlja jedan od najvažnijih rezultata u razvoju analitičkih metoda za njegovo izračunavanje. Ovaj rezultat može se pokazati korišćenjem Furijeovog razvoja funkcije

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Pošto je funkcija $f(x)$ parna, njen Furijeov red sadrži samo kosinusne članove:

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Koeficijenti Furijeovog reda dati su formulama

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx,$$

i

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx.$$

Zbog parnosti funkcije dobijamo

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx.$$

Računanjem integrala sledi

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Prema tome,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Sada računamo koeficijente a_n :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx.$$

Primenom parcijalne integracije dobijamo

$$\int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{n} \int_0^\pi x \sin(nx) dx.$$

Prvi član je jednak nuli jer je

$$\sin(n\pi) = 0.$$

Za preostali integral ponovo koristimo parcijalnu integraciju:

$$\int_0^\pi x \sin(nx) dx = \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nx) dx.$$

Pošto je

$$\int_0^\pi \cos(nx) dx = 0,$$

dobija se

$$\int_0^\pi x \sin(nx) dx = -\frac{\pi \cos(n\pi)}{n}.$$

Kako je

$$\cos(n\pi) = (-1)^n,$$

sledi

$$\int_0^\pi x \sin(nx) dx = -\frac{\pi(-1)^n}{n}.$$

Zamenom u prethodni izraz dobijamo

$$\int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}.$$

Dakle,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{2\pi(-1)^n}{n^2},$$

odnosno

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Furijev razvoj funkcije x^2 ima zato oblik

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Sada uzimamo

$$x = \pi.$$

Pošto važi

$$\cos(n\pi) = (-1)^n,$$

dobijamo

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^2}.$$

Kako je

$$(-1)^n (-1)^n = 1,$$

sledi

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Preuređivanjem jednakosti dobijamo

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 - \frac{\pi^2}{3},$$

odnosno

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Konačno sledi

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

što predstavlja jedan od najznačajnijih Ojlerovih rezultata i prvi primer povezivanja beskonačnih redova sa brojem π .

Ojler je dalje generalizovao na parne eksponente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1} \frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!},$$

gde B_{2k} označavaju Bernulijeve brojeve. Bernulijevi brojevi predstavljaju niz racionalnih brojeva

$$B_0, B_1, B_2, \dots$$

koji se prirodno pojavljuju u teoriji brojeva, razvoju funkcija u stepeni red, kao i u formulama za sume potencija celih brojeva. Definišu se pomoću generišuće funkcije

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

Razvijanjem leve strane u Tejlorov red dobijamo

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \frac{x^6}{30240} - \dots$$

Poređenjem sa prethodnim razvojem dobijaju se prvi Bernulijevi brojevi:

$$B_0 = 1,$$

$$B_1 = -\frac{1}{2},$$

$$B_2 = \frac{1}{6},$$

$$B_3 = 0,$$

$$B_4 = -\frac{1}{30},$$

$$B_5 = 0,$$

$$B_6 = \frac{1}{42},$$

$$B_8 = -\frac{1}{30},$$

itd. Svi Bernulijevi brojevi neparnog indeksa većeg od jedan jednaki su nuli:

$$B_{2k+1} = 0, \quad k \geq 1.$$

Bernulijevi brojevi pojavljuju se, između ostalog, u Ojlerovoj formuli za sumu parnih stepena recipročnih brojeva:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1} \frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}, \quad k \geq 1.$$

Za $k = 1$ dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{B_2(2\pi)^2}{2 \cdot 2!} = \frac{1}{6} \frac{4\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6},$$

čime se dobija prethodno izvedeni Ojlerov rezultat. Ove formule omogućavaju konstrukciju nizova za broj π sa znatno bržom konvergencijom od ranijih analitičkih redova. Na primer, za Gregori–Lajbnicov red greška nakon N članova zadovoljava

$$R_N = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

pa je za dobijanje d tačnih decimalnih mesta potrebno približno

$$N \approx 10^d$$

članova. Nasuprot tome, Mašinova formula

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}$$

koristi razvoj arkus tangensa

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

pri čemu ostatak zadovoljava procenu

$$|R_N| < \frac{x^{2N+3}}{(2N+3)(1-x^2)}.$$

Za član sa $x = 1/5$ dobija se približno

$$|R_N| < \frac{5^{-(2N+3)}}{2N+3},$$

tako da se greška smanjuje približno faktorom

$$\frac{1}{25}$$

sa svakim novim članom. Zbog toga se dobija oko

$$\log_{10}(25) \approx 1.4$$

novih tačnih decimalnih mesta po dodatnom članu reda. Još brže konvergiraju algoritmi zasnovani na aritmetičko–geometrijskoj sredini (AGM). Gauss–Ležandrov algoritam za broj π ima kvadratnu konvergenciju:

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n|^2,$$

što znači da se približno udvostručava broj tačnih cifara u svakom koraku. Već nakon nekoliko iteracija dobijaju se stotine tačnih decimalnih mesta. Sličnu osobinu imaju i Ramanudžanove formule, kod kojih jedan član reda donosi približno osam decimalnih cifara, dok formula Čudnovskih omogućava dobijanje približno

14

decimalnih cifara po jednom članu reda.

2.4.4 Ojlerove transformacije i ubrzanje redova

Ojler je takođe razvio tehnike ubrzanja konvergencije redova koje su primenjene i na redove za π :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \implies S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}.$$

Ova transformacija omogućava značajno smanjenje broja članova potrebnih za postizanje određene preciznosti. U kombinaciji sa Mašinovim formulama, Ojlerove metode čine prvi efektivni sistem za praktičnu numeričku aproksimaciju π .

Ojlerovi rezultati transformišu π iz empirijskog broja u matematički objekat univerzalnog značaja. Njegova dostignuća obuhvataju:

- Povezivanje π sa nulama trigonometrijskih funkcija (beskonačni proizvodi),
- Razvoj identiteta u kompleksnoj analizi, posebno $e^{i\pi} + 1 = 0$,
- Formulisanje brzokonvergentnih nizova putem ζ -funkcije i Bernulijevih brojeva.

Ovi rezultati postavili su temelj za radove Gausa i Ramanudžana, kao i za savremene algoritamske metode visokog reda konvergencije.

n	Parcijalna suma	Tačna vrednost	Aproksimirana vrednost
1	$\sqrt{6 \cdot 1/1^2}$	$\sqrt{6}$	2.449489742
2	$\sqrt{6 \cdot (1 + 1/2^2)}$	$\sqrt{30}/2$	2.738612787
3	$\sqrt{6 \cdot (1 + 1/2^2 + 1/3^2)}$	$7\sqrt{6}/6$	2.857738033
4	$\sqrt{6 \cdot (1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2)}$	$\sqrt{1230}/12$	2.922612986
5	$\sqrt{6 \cdot (1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2)}$	$\sqrt{32214}/60$	2.963387701
10	$\sqrt{6 \cdot (1 + 1/2^2 + \dots + 1/10^2)}$	$\sqrt{59049870}/2520$	3.049361635
100	$\sqrt{6 \cdot (1 + 1/2^2 + \dots + 1/100^2)}$	-	3.132076531
1000	$\sqrt{6 \cdot (1 + 1/2^2 + \dots + 1/1000^2)}$	-	3.140638056
10000	$\sqrt{6 \cdot (1 + 1/2^2 + \dots + 1/10000^2)}$	-	3.141497163
100000	$\sqrt{6 \cdot (1 + 1/2^2 + \dots + 1/100000^2)}$	-	3.141583104
10^6	$\sqrt{6 \cdot (1 + 1/2^2 + \dots + 1/(10^6)^2)}$	-	3.141591698
10^7	$\sqrt{6 \cdot (1 + 1/2^2 + \dots + 1/(10^7)^2)}$	-	3.141592558
10^8	$\sqrt{6 \cdot (1 + 1/2^2 + \dots + 1/(10^8)^2)}$	-	3.141592644
10^9	$\sqrt{6 \cdot (1 + 1/2^2 + \dots + 1/(10^9)^2)}$	-	3.141592652

Tabela 2.2: Aproksimirane vrednosti broja π Ojlerovog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$



Slika 2.1: Karl Fridrih Gaus

2.5 Gausovi rezultati

Karl Fridrih Gaus (Carl Fridrih Gauss, 1777-1855)¹, često nazivan „princem matematičara“, dao je izuzetno dubok doprinos razvoju matematičke analize, teorije brojeva, kompleksnih funkcija, geometrije i numeričkih metoda, a među njegovim radovima nalaze se i oni koji su značajno unapredili razumevanje konstante π . Njegovi rezultati u ovom

¹Carl Fridrih Gauss (1777-1855), nemački matematičar i fizičar, jedan od najznačajnijih matematičara 19. veka. Dao je izuzetne doprinose teoriji brojeva, matematičkoj analizi, geometriji i astronomiji. Njegova istraživanja eliptičkih funkcija i aritmetičko-geometrijske sredine povezana su i sa razvojem efikasnih metoda za izračunavanje broja π .

području nisu nastali u formi jedne jedine publikacije posvećene broju π , već se pojavljuju rasuti u različitim radovima, beleškama i privatnoj prepisci, što je karakteristično za Gausovu metodičnost i opreznu objavu novih ideja. Upravo zahvaljujući analizi ovih izvora danas znamo da su neke od najvažnijih modernih metoda računanja π nastale iz njegovih istraživanja.

Karl Fridrih Gaus, jedan od najvećih matematičara svih vremena, dao je ključni doprinos analitičkom proučavanju broja π kroz razvoj metoda zasnovanih na aritmetičko-geometrijskoj sredini (AGM) i eliptičkim integralima. Njegovi rezultati omogućili su kvadratnu konvergenciju, što je revolucionarno ubrzalo izračunavanje π i inspirisalo kasnije iterativne algoritme.

U ovom poglavlju obrađujemo:

- Definiciju aritmetičko-geometrijske sredine.
- AGM metodu za izračunavanje π .
- Kvadratnu konvergenciju i njene implikacije.
- Povezanost sa eliptičkim integralima i modernim numeričkim algoritmima.

U ovom poglavlju koristili smo literaturu [1, 7].

2.5.1 Aritmetičko-geometrijska sredina (AGM)

Gaus je uveo iterativni proces povezivanja aritmetičke i geometrijske sredine dve pozitivne realne vrednosti a_0 i b_0 :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad (2.5)$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}. \quad (2.6)$$

Nakon beskonačno mnogo iteracija, nizovi a_n i b_n konvergiraju ka zajedničkoj vrednosti:

$$\text{AGM}(a_0, b_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (2.7)$$

Ova vrednost ima izuzetna svojstva i omogućava precizno numeričko računanje π .

2.5.2 AGM metoda za π

Gaus je pokazao da se π može izraziti pomoću AGM procesa i eliptičkog integrala prvog tipa $K(k)$:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (2.8)$$

Za $k = 1/\sqrt{2}$, π se dobija iz formule:

$$\pi = \frac{2a_0^2}{t_\infty}, \quad (2.9)$$

gde su početne vrednosti:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad t_0 = \frac{1}{4}, \quad p_0 = 1, \quad (2.10)$$

a iteracije su definisane kao:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad (2.11)$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad (2.12)$$

$$p_{n+1} = 2p_n, \quad (2.13)$$

$$t_{n+1} = t_n - p_n(a_n - a_{n+1})^2. \quad (2.14)$$

Na kraju, aproksimacija π se dobija kao:

$$\pi_n = \frac{(a_n + b_n)^2}{4t_n}. \quad (2.15)$$

2.5.3 Kvadratna konvergencija

Karakteristika AGM metode je kvadratna konvergencija, što znači da se broj tačnih decimala približno udvostručuje u svakoj iteraciji:

$$\text{broj tačnih decimala u } \pi_{n+1} \approx 2 \times \text{broj tačnih decimala u } \pi_n.$$

Ovo predstavlja eksponencijalno ubrzanje u odnosu na linearnu konvergenciju Lajbnicovih i Nilakantevih redova.

2.5.4 Povezanost sa eliptičkim integralima

Gausova AGM metoda direktno povezuje π sa eliptičkim integralima prvog tipa:

$$K(k) = \frac{\pi}{2 \operatorname{AGM}(1, \sqrt{1 - k^2})}.$$

Gausova veza između AGM-a i eliptičnih integrala nije nastala kao jedan izolovan

rezultat, već kao posledica duboke analize ponašanja eliptičnih integrala pod specifičnom transformacijom parametara. Suština dokaza počiva na tome da se eliptični integral prvog tipa može transformisati tako da ostane numerički jednak, ali da mu se parametri zamene aritmetičkom i geometrijskom sredinom prethodnih. Ta transformacija se ponavlja iterativno - i upravo zato se pojavljuje AGM. Eliptični integral prvog tipa dat je formulom:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

Cilj je povezati ovu definiciju sa iterativnim procesom:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

čiji je zajednički limes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \text{AGM}(a_0, b_0).$$

Potpuni eliptični integral prve vrste definiše se kao

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad 0 \leq k < 1.$$

Gaus je pokazao da se ovaj integral može izraziti pomoću aritmetičko-geometrijske sredine. Neka su

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \sqrt{1 - k^2}.$$

Definišimo nizove

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Ova dva niza konvergiraju istoj granici,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \text{AGM}(1, \sqrt{1 - k^2}).$$

Gausova transformacija eliptičnog integrala pokazuje da se pri ovoj iteraciji integral ne menja, osim za faktor koji se akumulira kroz aritmetičko-geometrijsku sredinu. U granici se parametar transformisanog integrala približava nuli, pa ostaje

$$K(0) = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Zato se dobija osnovna Gausova formula

$$K(k) = \frac{\pi}{2 \operatorname{AGM}(1, \sqrt{1-k^2})}.$$

Ova jednakost predstavlja osnovu AGM algoritama za računanje broja π , jer aritmetičko-geometrijska sredina konvergira kvadratno.

Ovaj rezultat je izuzetno važan jer preokreće tradicionalni pristup:

- Pre Gausa: eliptični integrali su se smatrali neizračunljivim transcendentnim integracijama.
- Posle Gausa: oni se mogu izračunavati algoritamski, ponavljanjem aritmetičke i geometrijske sredine, pri čemu se greška smanjuje eksponencijalno.

Upravo ovaj pristup čini AGM-metodu jednom od najbržih metoda za numeričko računanje π . Ova veza omogućava razvoj iterativnih formula visokog reda i otvara vrata za Borvejnove algoritme koji će kasnije omogućiti izračunavanje milijardi cifara π .

Gausovi rezultati imaju nekoliko ključnih implikacija:

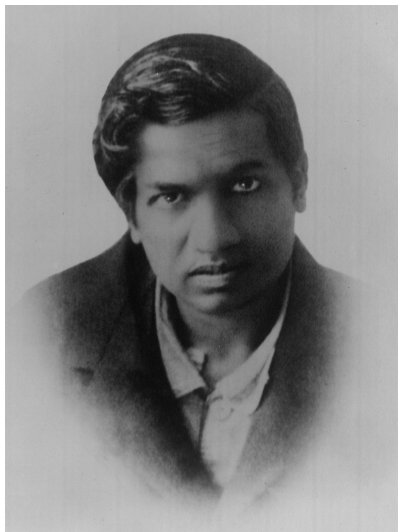
- Precizno i efikasno numeričko izračunavanje π .
- Kvadratna konvergencija omogućava eksponencijalno ubrzanje aproksimacija.
- Povezanost π sa eliptičkim integralima i AGM procesom postavlja temelje za iterativne algoritme savremene epohe.

Ovi rezultati predstavljaju most između Ojlerove analitičke teorije i Ramanudžanovih brzokonvergentnih formula.

2.6 Ramanudžanovi rezultati

Srinivasa Ramanudžan (1887-1920)² smatra se jednim od najintragantnijih matematičara 20. veka, naročito zbog izuzetne intuicije i sposobnosti da otkrije matematičke identitete bez formalnih metoda dokazivanja karakterističnih za zapadnu matematiku. Njegov rad na broju π predstavlja prekretnicu u razvoju analitičkih metoda za njegovo računanje, jer su njegove formule bile značajno brže od svih ranije poznatih, uključujući i one zasnovane na trigonometrijskim redovima, eliptičkim integralima i transformacijama Jakobijevih funkcija.

²Srinivasa Ramanudžan (1887-1920), indijski matematičar koji je dao izuzetne doprinose teoriji brojeva, beskonačnim redovima i matematičkoj analizi. Posebno su značajne njegove formule za izračunavanje broja π , zasnovane na beskonačnim redovima koji veoma brzo konvergiraju i omogućavaju dobijanje velikog broja decimala broja π .



Slika 2.2: Srinivasa Ramanudžan

Iako Ramanudžan nije imao formalnu obuku iz oblasti viših matematičkih analiza i teorije funkcija, njegovi rezultati pokazuju duboko razumevanje modularnih formi, eliptičkih funkcija i njihovih transformacija.

U periodu 1910-1920, Ramanudžan je razvijao formule za π koje su po brzini konvergencije bile bez presedana. Najpoznatiji među njima su redovi zasnovani na ternarnim kvadratnim formama i modularnim transformacijama. Jedan od njegovih najvažnijih rezultata, kasnije poznat kao *Ramanudžanov niz za π* , dat je izrazom:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \cdot \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}. \quad (2.16)$$

Ovaj red konvergira izuzetno brzo - samo četiri člana daju više od 30 tačnih decimala π . Brzina konvergencije ovih formula zasniva se na strukturama koje su povezane sa modularnim funkcijama i kompleksnom analizom, iako Ramanudžan ove teorijske temelje često nije eksplicitno koristio. Ramanujanov red za broj π glasi

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}.$$

Neka je

$$A_n = \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}$$

n -ti član reda. Odnos susednih članova je

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}{(n+1)^4} \frac{1103 + 26390(n+1)}{1103 + 26390n} \frac{1}{396^4}.$$

Uzimajući granicu za $n \rightarrow \infty$ dobijamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{256}{396^4} \approx 1.04 \cdot 10^{-8}.$$

Prema tome, članovi reda opadaju približno faktorom

$$10^{-8}$$

pri svakom povećanju indeksa za jedan. Zbog toga svaki novi član reda donosi približno osam novih decimalnih cifara broja π . Ako se zadrže prva četiri člana reda, procenjena greška je reda veličine

$$(10^{-8})^4 = 10^{-32},$$

što objašnjava zašto samo nekoliko članova Ramanujanovog reda daje više od 30 tačnih decimalnih mesta broja π (približno 32).

Kako se navodi u literaturi, mnoge od njegovih formula dugo su bile neshvatljive matematičarima sve dok teorija modularnih formi i eliptičkih funkcija nije bila u potpunosti razvijena tokom druge polovine 20. veka (videti [1], [7]).

Ramanudžanovo interesovanje za π nije bilo samo numeričke prirode. Njegovi radovi sadrže i niz identiteta, transformacija i funkcionalnih relacija koje su postavile temelje kasnijeg razvoja teorije eliptičkih funkcija i numeričke matematike. U savremenoj epohi, njegovi rezultati imaju dodatni značaj jer se zasnivaju na strukturama koje su kasnije korišćene u algoritmima za izračunavanje π na superračunarima.

Posebno je značajno da moderni algoritam braće Čudnovski iz 1988. godine - danas najefikasniji algoritam za izračunavanje π - predstavlja generalizaciju Ramanudžanovog pristupa i direktno se oslanja na njegove originalne ideje.

Ramanudžanov doprinos broju π učinio ga je ključnom figurom modernog pristupa izračunavanju ovog broja. Njegove formule predstavljaju spoj intuicije, analitičke genijalnosti i nesvakidašnjeg matematičkog uvida, a značaj njegovog rada danas nadilazi istorijski okvir i ostaje fundamentalni deo savremene numeričke matematike (videti [1], [7]).

Srinivasa Ramanudžan, plodonosni indijski matematičar, dao je neke od najimpresivnijih i najefikasnijih formula za izračunavanje broja π . Njegovi radovi predstavljaju vrhunac analitičkog pristupa u 20. veku pre razvoja modernih računarskih algoritama. Ramanudžanove formule karakteriše ekstremno brzo konvergirajući beskonačni red i iterativni postupci koji omogućavaju izračunavanje miliona decimala π sa vrlo malim brojem članova.

Ovo poglavlje detaljno analizira njegove ključne formule i njihove matematičke osnove. U ovom poglavlju koristili smo literaturu [1], [7].

2.6.1 Ramanudžanovi redovi za π

Jedna od najpoznatijih Ramanudžanovih formula za π data je izrazom:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)! (1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}. \quad (2.17)$$

Ramanudžanova formula za broj π ne predstavlja empirijski dobijen numerički izraz, već posledicu teorije eliptičnih funkcija i modularnih transformacija. Osnovu čini veza potpunog eliptičnog integrala prve vrste

$$K(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2 \right)$$

sa Gausovom hipergeometrijskom funkcijom. Razvojem hipergeometrijske funkcije u red dobijaju se članovi koji sadrže faktor

$$\frac{(4n)!}{(n!)^4},$$

dok specijalna modularna transformacija, koju je Ramanudžan koristio, daje koeficijente 1103, 26390 i faktor 396^{-4n} . Kombinacijom ovih rezultata dobija se poznata formula

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}.$$

Kompletan dokaz zahteva teoriju modularnih funkcija, ali ova formula pokazuje kako se svojstva eliptičnih integrala mogu transformisati u izuzetno brz algoritam za računanje broja π .

Karakteristike ovog reda:

- Svaki član doprinosi približno osam tačnih decimala broju π , što je mnogo brže od Lajbnicovih ili Mašinovih formula.
- Omogućava praktičnu numeričku primenu i ručne proračune sa visokim stepenom preciznosti.
- Zasniva se na teoriji modularnih funkcija i hipergeometrijskih serija, koje je Ramanudžan često koristio intuitivno.

2.6.2 Još neke značajne Ramanudžanove formule

Ramanudžan je razvio čitav niz sličnih formula. Jedna od njih je:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{12}{640320^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)! (545140134n + 13591409)}{(3n)! (n!)^3 (-640320)^{3n}}. \quad (2.18)$$

Ova formula je poznata po svojoj primeni u modernim algoritmima za računanje milijardi decimala broja π , posebno u kombinaciji sa algoritmom Čudnovskih, koji je zasnovan na Ramanudžanovim idejama.

2.6.3 Brza konvergencija i iterativne metode

Ramanudžanove formule omogućavaju:

1. Ekstremno brzu konvergenciju, što smanjuje broj potrebnih članova reda za visoku preciznost.
2. Razvoj iterativnih algoritama visokog reda, koji su korišćeni u računarstvu 20. i 21. veka.

Na primer, korišćenjem Ramanudžanove formule za 10 članova može se dobiti više od 50 cifara broja π , što je bilo nemoguće postići ranijim metodama i trigonometrijskim redovima.

2.6.4 Istorijski značaj Ramanudžanovih rezultata

1. Ramanudžan je uneo novu dimenziju u analitičko izračunavanje broja π kombinovanjem intuicije, beskonačnih redova i modularnih funkcija.
2. Njegovi rezultati postavili su temelj za modernu numeričku matematiku i razvoj algoritama visokog reda konvergencije.
3. Predstavio je metode koje su postale inspiracija savremenim superračunarskim proračunima i omogućile izračunavanje triliona decimala broja π .

Ramanudžanovi rezultati predstavljaju vrhunac analitičkog pristupa broju π , jer:

- omogućavaju ekstremno brzu konvergenciju u izračunavanju π ,
- povezuju π sa hipergeometrijskim funkcijama i modularnom teorijom,
- postavljaju osnovu za savremene algoritamske metode i numerička istraživanja.

Ramanudžanove formule čine prirodan prelaz ka narednom poglavlju, u kojem se istražuju iracionalnost i transcendentnost broja π , jer njihova analiza zahteva rigorozne dokaze iz analitičke teorije brojeva i kompleksne analize.

Glava 3

Iracionalnost i transcendentnost broja π

Broj π je još od antičkih vremena intrigirao matematičare ne samo svojom praktičnom primenom u geometriji, već i svojom aritmetičkom i analitičkom prirodom. Pre razvoja moderne analize postavljalo se pitanje da li je π racionalan broj i da li se može izraziti algebarski.

Glavni ciljevi ove glave su:

- dokazati da π nije racionalan broj, tj. da se ne može zapisati u obliku $\frac{p}{q}$, gde su p i q celi brojevi;
- dokazati da π nije algebarski broj, odnosno da je transcendentan, što ima direktne posledice na klasični problem kvadrature kruga.

Ova glava zasniva se na literaturi [3, 6, 7] i kombinuje istorijski pristup sa savremenim matematičkim metodama.

3.1 Iracionalnost broja π

Definicija 3.1. Broj $x \in \mathbb{R}$ naziva se **iracionalnim** ako se ne može predstaviti kao količnik dva cela broja, odnosno, ako ne postoji par celih brojeva $p, q \in \mathbb{Z}$, sa $q \neq 0$, takav da važi:

$$x = \frac{p}{q}.$$

Drugim rečima:

$$x \text{ je iracionalan} \iff x \notin \mathbb{Q}.$$

3.1.1 Istorijski uvod u iracionalnost

Prvi ozbiljan dokaz iracionalnosti broja π dao je Johan Lambert (1761). Lambert je koristio razvoj tangensa u neprekidni razlomak i pokazao, da ako bismo pretpostavili da je π racionalan onda bi došli u kontradikciju. Ovaj dokaz je bio revolucionaran jer je matematički formalno oslobodio π iz okvira geometrijskih aproksimacija i uveo analitičku rigoroznost. U nastavku poglavlja ćemo prezentovati ideju Lambertovog dokaza, kao i detaljan noviji dokaz koji deo Ivan Niven.

U ovom poglavlju koristili smo literaturu [6, 7].

Teorema 3.1. *Broj π je iracionalan.*

3.1.2 Ideja Lambertovog dokaza

Jedan od najznačajnijih rezultata u istoriji neprekidnih razlomaka jeste razvoj funkcije tangens u beskonačni neprekidni razlomak koji je 1768. godine pronašao Johan Hajnrih Lambert. Ovaj razvoj predstavlja jedan od prvih značajnih primera primene neprekidnih razlomaka u analizi transcendentnih funkcija, a imao je presudnu ulogu u Lambertovom dokazu iracionalnosti broja π .

Lambert je pokazao da se funkcija tangens može predstaviti pomoću beskonačnog neprekidnog razlomka

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \ddots}}}}.$$

Ovaj razvoj danas je poznat kao *Lambertov neprekidni razlomak*.

Originalni Lambertov dokaz nije bio formulisan savremenim jezikom teorije neprekidnih razlomaka, ali se njegov postupak može rekonstruisati u savremenoj notaciji. Lambert uvodi niz pomoćnih funkcija $\{R_n(x)\}_{n \geq 0}$ koje zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$R_n = (2n + 1)R_{n+1} - x^2 R_{n+2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Deljenjem ove jednakosti sa R_{n+1} dobija se

$$\frac{R_n}{R_{n+1}} = (2n + 1) - \frac{x^2}{\frac{R_{n+1}}{R_{n+2}}}.$$

Primenom iste formule na količnik $\frac{R_{n+1}}{R_{n+2}}$, zatim na $\frac{R_{n+2}}{R_{n+3}}$ i tako redom, dobija se formalni razvoj

$$\frac{R_0}{R_1} = 1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \ddots}}}.$$

Da bi se ovaj razvoj povezao sa funkcijom tangens, pomoćne funkcije biraju se tako da važi

$$R_0 = x \cos x, \quad R_1 = \sin x.$$

Razvijanjem funkcija $x \cos x$ i $\sin x$ u Tejlorove redove lako se proverava da ove funkcije zadovoljavaju datu rekurentnu formulu. Otuda neposredno sledi

$$\frac{R_0}{R_1} = \frac{x \cos x}{\sin x} = \frac{x}{\operatorname{tg} x},$$

pa dobijamo

$$\frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \frac{x^2}{9 - \ddots}}}}.$$

Drugim rečima,

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \ddots}}}}.$$

Ovde je potrebno naglasiti da se prethodni izraz ne posmatra samo kao formalni beskonačni razlomak. Može se pokazati da Lambertov neprekidni razlomak konvergira za svako realno x za koje je funkcija $\operatorname{tg} x$ definisana, odnosno za

$$x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

i da je njegova vrednost upravo $\operatorname{tg} x$.

Posebno je zanimljivo da se u imeniocima pojavljuju svi pozitivni neparni brojevi

$$1, 3, 5, 7, \dots,$$

dok su svi brojioci jednaki $-x^2$, što daje izuzetno pravilnu strukturu razlomka.

Glavni značaj Lambertovog razvoja nije bio samo u predstavljanju funkcije tangens, već pre svega u njenoj primeni u teoriji brojeva. Lambert je pokazao da, ako je $x \neq 0$ racionalan broj, tada je $\operatorname{tg} x$ iracionalan broj. Osnovna ideja dokaza zasniva se na posmatranju konačnih konvergenta Lambertovog neprekidnog razlomka.

Ako se beskonačni neprekidni razlomak funkcije tangens prekine nakon konačno mnogo nivoa, dobijaju se racionalne funkcije

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)},$$

koje se nazivaju *konvergenti* ili *aproksimante* neprekidnog razlomka. Na primer,

$$\frac{x}{1}, \quad \frac{3x}{3-x^2}, \quad \frac{x(15-x^2)}{15-6x^2}, \quad \dots$$

Za racionalno x , svaki od ovih konvergenata predstavlja racionalan broj.

Ključna činjenica koju Lambert koristi jeste da se razlika između $\operatorname{tg} x$ i njenih konvergenta može veoma precizno oceniti. U savremenoj formulaciji može se pokazati da za odgovarajuće polinome P_n i Q_n važi

$$0 < |Q_n(x) \operatorname{tg} x - P_n(x)| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Posebno,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_n(x) \operatorname{tg} x - P_n(x)| = 0,$$

jer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0.$$

Pretpostavimo sada da je

$$x = \frac{a}{b} \neq 0$$

racionalan broj i da je $\operatorname{tg} x$ takođe racionalan. Tada su $P_n(x)$ i $Q_n(x)$ racionalni brojevi. Ključni aritmetički deo Lambertovog argumenta sastoji se u tome da se, nakon množenja izraza

$$Q_n(x) \operatorname{tg} x - P_n(x)$$

odgovarajućim zajedničkim imeniocem, dobija nenulti ceo broj. Istovremeno, može se pokazati da se ovaj zajednički imenilac može izabrati tako da, zahvaljujući prethodnoj proceni i brzom rastu faktorijela, za dovoljno veliko n apsolutna vrednost dobijenog celog broja bude manja od 1.

Dakle, dobija se kontradikcija: sa jedne strane imamo nenulti ceo broj, čija apsolutna vrednost mora biti najmanje 1, a sa druge strane dobijamo da je njegova apsolutna vrednost manja od 1. Stoga pretpostavka da je $\operatorname{tg} x$ racionalan mora biti pogrešna. Time se dobija Lambertovo tvrđenje

$$x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \implies \operatorname{tg} x \notin \mathbb{Q}.$$

Sada se ovaj rezultat neposredno primenjuje na broj π . Pošto je

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1,$$

a broj 1 je racionalan, iz prethodnog tvrđenja sledi da

$$\frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}.$$

Prema tome,

$$\pi \notin \mathbb{Q}.$$

Na taj način Lambertov neprekidni razlomak predstavlja vezu između analitičkog razvoja funkcije tangens i aritmetičkog svojstva broja π . Upravo je ta povezanost analize i teorije brojeva jedan od razloga zbog kojih Lambertov rezultat zauzima posebno mesto u istoriji neprekidnih razlomaka.

3.1.3 Analitički dokazi 20. veka

Jedan od najlepših modernih dokaza iracionalnosti broja π zasniva se na integralima. Dokaz je dao Ivan Niven 1947. godine i predstavlja elegantnu kombinaciju analize i teorije brojeva. Dokažimo prvo narednu tehničku teoremu.

Teorema 3.2. *Neka je*

$$\pi = \frac{p}{q},$$

gde su $p, q \in \mathbb{N}$ i $NZD(p, q) = 1$. Za funkcije

$$f_n(x) = \frac{x^n(\pi - x)^n}{n!}$$

i

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f_n^{(2k)}(x),$$

važi da su brojevi

$$q^n F_n(0) \quad \text{ i } \quad q^n F_n(\pi)$$

celi.

Dokaz. Pošto je

$$\pi = \frac{p}{q},$$

imamo

$$f_n(x) = \frac{x^n \left(\frac{p}{q} - x\right)^n}{n!}.$$

Primenom binomne formule dobijamo

$$\left(\frac{p}{q} - x\right)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-j} (-x)^j,$$

pa je

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-j} x^{n+j}.$$

Množenjem sa q^n sledi

$$q^n f_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j p^{n-j} q^j \binom{n}{j}}{n!} x^{n+j} = \sum_{j=0}^n \frac{c_j}{n!} x^{n+j},$$

gde je

$$c_j = (-1)^j p^{n-j} q^j \binom{n}{j} \in \mathbb{Z}.$$

Odavde se dobija da je

$$q^n f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Zaista, ako je $k < n$, onda je

$$q^n f_n^{(k)}(0) = 0,$$

jer svaki član polinoma $q^n f_n$ sadrži faktor x^n .

Ako je $n \leq k \leq 2n$, jedini član koji nakon diferenciranja reda k može dati nenultu vrednost u tački $x = 0$ jeste onaj za koji je

$$n + j = k, \quad \text{odnosno} \quad j = k - n.$$

Prema tome,

$$q^n f_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} c_{k-n}.$$

Budući da je $c_{k-n} \in \mathbb{Z}$ i

$$\frac{k!}{n!} = (n+1)(n+2) \cdots k \in \mathbb{Z},$$

sledi

$$q^n f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Prema definiciji funkcije F_n imamo

$$q^n F_n(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k q^n f_n^{(2k)}(0).$$

Svi članovi ove sume su celi brojevi, pa je

$$q^n F_n(0) \in \mathbb{Z}.$$

Ostaje da pokažemo da je i

$$q^n F_n(\pi) \in \mathbb{Z}.$$

Za tačku $x = \pi$ koristimo simetriju funkcije f_n . Naime,

$$f_n(\pi - x) = \frac{(\pi - x)^n x^n}{n!} = f_n(x).$$

Diferenciranjem ove jednakosti k puta dobijamo

$$(-1)^k f_n^{(k)}(\pi - x) = f_n^{(k)}(x).$$

Za $x = 0$ sledi

$$f_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k f_n^{(k)}(0).$$

Kako je

$$q^n f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n,$$

sledi i

$$q^n f_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Otuda

$$q^n F_n(\pi) = \sum_{k=0}^n (-1)^k q^n f_n^{(2k)}(\pi) \in \mathbb{Z}.$$

Time je dokaz završen. □

Sada možemo detaljnije opisati Nivenov dokaz iracionalnosti broja π .

Teorema 3.3. *Broj π je iracionalan.*

Dokaz. Pretpostavimo, radi kontradikcije, da je broj π racionalan, odnosno da važi

$$\pi = \frac{p}{q},$$

gde su $p, q \in \mathbb{N}$ i $\text{NZD}(p, q) = 1$.

Za proizvoljan prirodan broj n definišemo funkciju

$$f_n(x) = \frac{x^n (\pi - x)^n}{n!},$$

kao i integral

$$I_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx.$$

Funkcija f_n je nenegativna na intervalu $[0, \pi]$ i pozitivna za $0 < x < \pi$, dok je $\sin x > 0$ za $0 < x < \pi$. Stoga je

$$I_n > 0.$$

Dalje definišemo funkciju

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f_n^{(2k)}(x).$$

Neposrednim diferenciranjem dobija se

$$F_n''(x) + F_n(x) = f_n(x),$$

pa sledi

$$\frac{d}{dx} (F_n'(x) \sin x - F_n(x) \cos x) = f_n(x) \sin x.$$

Integraljenjem na intervalu $[0, \pi]$ dobijamo

$$I_n = (F_n'(x) \sin x - F_n(x) \cos x) \Big|_0^\pi.$$

Kako je

$$\sin 0 = \sin \pi = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \cos \pi = -1,$$

sledi

$$I_n = F_n(\pi) - F_n(0).$$

Prema prethodnoj teoremi, brojevi

$$q^n F_n(0) \quad \text{i} \quad q^n F_n(\pi)$$

su celi. Zato je

$$q^n I_n = q^n (F_n(\pi) - F_n(0)) \in \mathbb{Z}.$$

Sa druge strane, za $0 < x < \pi$ važi

$$0 < \sin x < 1,$$

pa je

$$0 < I_n < \int_0^\pi \frac{x^n (\pi - x)^n}{n!} dx.$$

Kako je

$$x(\pi - x) \leq \frac{\pi^2}{4},$$

dobijamo

$$I_n < \frac{\pi}{n!} \left(\frac{\pi^2}{4} \right)^n.$$

Budući da faktorijal raste brže od svake eksponencijalne funkcije, za dovoljno veliko n važi

$$\frac{\pi}{n!} \left(\frac{\pi^2}{4} \right)^n < \frac{1}{q^n}.$$

Prema tome,

$$0 < I_n < \frac{1}{q^n},$$

odnosno

$$0 < q^n I_n < 1.$$

Međutim, već smo pokazali da je

$$q^n I_n \in \mathbb{Z},$$

što je nemoguće, jer ne postoji ceo broj između 0 i 1.

Dobijena kontradikcija pokazuje da je početna pretpostavka bila pogrešna. Dakle,

$$\pi \notin \mathbb{Q}.$$

□

3.2 Transcendentnost broja π

Definicija 3.2. Realni ili kompleksni broj α naziva se *transcendentnim* ako nije algebarski, tj. ako nije koren nijednog nenultog polinoma sa celobrojnim koeficijentima. Formalno:

$$\alpha \text{ je transcendentan} \iff \forall P(x) \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\} : P(\alpha) \neq 0.$$

Odnosno, broj α je transcendentan ako ne postoji skup celih brojeva $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ sa $a_n \neq 0$ takav da važi:

$$a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0.$$

Ekvivalentna formulacija

Skup transcendentnih brojeva predstavlja komplement skupa algebarskih brojeva u skupu kompleksnih brojeva, odnosno

$$\mathbb{T} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{A},$$

gde je $\mathbb{A}$ skup algebarskih brojeva, tj. svih brojeva koji su koreni nekog nenultog polinoma sa celobrojnim koeficijentima.

Ako se posmatraju samo realni brojevi, tada je skup realnih transcendentnih brojeva jednak

$$\mathbb{T}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}.$$

3.2.1 Istorijski uvod u transcendentnost od π

Prvi formalni dokaz transcendentnosti broja π dao je Ferdinand von Lindemann (1882). Njegov rad razjasnio je problem kvadrature kruga, star vekovima: nemoguće je konstruisati lenjirom i šestarem kvadrat jednak površini kruga.

Transcendentan broj nije rešenje nijednog polinoma sa racionalnim koeficijentima. Ovim rezultatom, π postaje ne samo iracionalan, već apsolutno nealgebarski broj.

U ovom poglavlju korišćena je literatura [2, 3].

3.2.2 Lindemanova teorema i primena na π

Pokažimo prvo pomoćnu lemu.

Lema 3.1. *Ako je broj π algebarski, tada je i broj $i\pi$ algebarski.*

Dokaz. Pretpostavimo da je π algebarski broj. Imaginarna jedinica i je takođe algebarski broj, jer je koren polinoma

$$x^2 + 1 = 0.$$

Poznato je da skup algebarskih brojeva predstavlja polje, odnosno da je zatvoren u odnosu na množenje. Pošto su brojevi i i π algebarski, njihov proizvod je takođe algebarski broj. Prema tome, $i\pi$ je algebarski broj. $\square$

Lindeman je 1882. godine dokazao sledeću teoremu (videti [9, 10]):

Teorema 3.4 (Lindemann, 1882). *Ako je $\alpha \neq 0$ algebarski broj, onda je e^α transcendentan.*

Ovaj rezultat se neposredno može primeniti na broj π pomoću Ojlerove formule

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \quad \text{odakle sledi} \quad e^{i\pi} = -1.$$

Pretpostavimo, suprotno, da je π algebarski broj. Tada je i $i\pi$ algebarski. Po Lindemanovoj teoremi, iz $i\pi \neq 0$ sledilo bi da je $e^{i\pi}$ transcendentan. Međutim, $e^{i\pi} = -1$, a -1 je algebarski broj, što predstavlja kontradikciju. Prema tome,

π je transcendentan broj.

3.2.3 Detaljna analiza Lindemanovog dokaza

Kao što je navedeno iznad, transcendentnost broja π prvi je dokazao Lindemann 1882. godine. Godine 1885. Vajerštras je dokazao opštiju činjenicu da, ako su $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ algebarski i linearno nezavisni nad racionalnim brojevima, onda su $(e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \dots, e^{\alpha_m})$ algebarski nezavisni.

Mnogi savremeni dokazi transcendentnosti broja π jednostavno konstatuju da je ona posledica Lindeman–Vajersštrasove teoreme. Međutim, po mišljenju autora rada [2], dokaz Lindeman–Vajersštrasove teoreme znatno je složeniji od direktnog dokaza transcendentnosti broja π . Ovaj direktan dokaz iz [2] će biti predstavljen u nastavku ovog poglavlja. On je prilagođen elegantnom dokazu Nivena iz 1939. godine objavljenom u [12] (i uglavnom koristi njegovu notaciju), kao i dokaz [11], ali uključuje i dodatne ilustracije i objašnjenja.

U nastavku prvo navodimo dva dobro poznata rezultata iz teorije polinoma koji će biti korišćeni kasnije.

Definicija 3.3. Polinom $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ naziva se *simetričnim polinomom* ako za svaku permutaciju σ brojeva od 1 do n važi

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Definicija 3.4. Za $1 \leq k \leq m$, k -ti elementarni simetrični polinom u promenljivama $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ je polinom

$$\sigma_k = \sigma_k(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}.$$

Posebno,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m, \\ \sigma_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq m} \alpha_i \alpha_j, \\ \sigma_3 &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} \alpha_i \alpha_j \alpha_k, \\ &\vdots \\ \sigma_m &= \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m. \end{aligned}$$

Teorema 3.5 (Vijet). *Ako je $p(x)$ moničan polinom (tj. koeficijent uz član najvećeg stepena jednak je jedan) sa celobrojnim ili racionalnim koeficijentima i stepena m , čiji su koreni $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, tada je*

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_m) \\ &= x^m - \sigma_1 x^{m-1} + \sigma_2 x^{m-2} - \cdots + (-1)^m \sigma_m. \end{aligned} \tag{8}$$

Ako su svi koeficijenti polinoma $p(x)$ celi, odnosno racionalni brojevi, tada je svaki elementarni simetrični polinom σ_k ceo, odnosno racionalan broj, bez obzira na to da li su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ realni, iracionalni ili kompleksni brojevi.

Obrnuto, ako su svi elementarni simetrični polinomi po promenljivim $\alpha_k \mid 1 \leq k \leq m$ celi, odnosno racionalni brojevi, tada su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ koreni polinoma stepena m sa

celobrojnim, odnosno racionalnim koeficijentima.

Dokaz. Dokaz neposredno sledi iz prethodnih razmatranja. □

Naravno, postoji mnogo simetričnih polinomskih izraza koji nisu elementarni simetrični polinomi, na primer:

$$x_1^2 + x_2^2, \quad (x_1 + x_2)^3 + (x_1 + x_3)^3 + (x_2 + x_3)^3.$$

Mogu li se ovi izrazi zapisati pomoću elementarnih simetričnih polinoma? Direktnom proverom može se pokazati da ovi polinomi mogu:

$$x_1^2 + x_2^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \quad (x_1 + x_2)^3 + (x_1 + x_3)^3 + (x_2 + x_3)^3 = 2\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3.$$

Međutim važi i mnogo opštiji rezultat:

Teorema 3.6 (Osnovna teorema o simetričnim polinomima). *Svaki simetričan polinom sa celobrojnim, odnosno racionalnim koeficijentima može se zapisati kao polinom sa celobrojnim, odnosno racionalnim koeficijentima po elementarnim simetričnim polinomima.*

Za detaljan dokaz pogledati [2, 5, 14].

Konačno smo spremni za dokaz transcendentnosti broja π .

Teorema 3.7 ([2]). *π je transcendentan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je π algebarski. Tada je, na osnovu Leme 3.1, i $i\pi$ algebarski. Drugim rečima, $i\pi$ je koren neke algebarske jednačine

$$\theta_1(x) = 0$$

sa celobrojnim koeficijentima (koja nije nužno monična), čiji su koreni $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ za neki ceo broj m , pri čemu je $\alpha_1 = i\pi$.

Iz Ojlerove formule

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \quad \text{odnosno} \quad 1 + e^{\alpha_1} = 0,$$

dobijamo

$$\begin{aligned} 0 &= (1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \cdots (1 + e^{\alpha_m}) \\ &= 1 + (e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \cdots + e^{\alpha_m}) + (e^{\alpha_1+\alpha_2} + e^{\alpha_1+\alpha_3} + \cdots + e^{\alpha_{m-1}+\alpha_m}) \\ &\quad + (e^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} + e^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4} + \cdots + e^{\alpha_{m-2}+\alpha_{m-1}+\alpha_m}) + \cdots + e^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}. \end{aligned} \quad (12)$$

Sada ćemo primeniti domišljatu konstrukciju iz Nivenovog rada kako bismo konstruisali algebarsku jednačinu sa racionalnim koeficijentima čiji su koreni upravo eksponenti koji se pojavljuju u razvijenom obliku (12).

Pošto su α_k koreni jednačine $\theta_1(x) = 0$, iz Teoreme 3.5 sledi da elementarni simetrični polinomi po promenljivim $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ imaju racionalne vrednosti.

Sada posmatrajmo skup korena sabranih po dva:

$$S_2 = \{\alpha_i + \alpha_j \mid 1 \leq i < j \leq m\}$$

odnosno

$$S_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \dots, \alpha_1 + \alpha_m, \dots, \alpha_{m-1} + \alpha_m\}. \quad (13)$$

Pošto su simetrični polinomi članova skupa S_2 takođe simetrični u odnosu na α_k , iz Teoreme 3.6 sledi da imaju racionalne vrednosti. Prema tome, ti racionalni brojevi čine koeficijente (osim znakova, kao u Vijetovoj teoremi) algebarske jednačine

$$\theta_2(x) = 0,$$

čiji su koreni upravo zbirovi iz skupa S_2 .

Isto činimo sa skupom zbrova po tri

$$S_3 = \{\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k \mid 1 \leq i < j < k \leq m\},$$

čime dobijamo algebarsku jednačinu

$$\theta_3(x) = 0$$

čiji su koreni zbirovi iz S_3 .

Nastavljamo sve do S_m i $\theta_m(x) = 0$. Konačno dobijamo da su koreni algebarske jednačine

$$\theta_1(x)\theta_2(x) \cdots \theta_m(x) = 0 \quad (14)$$

upravo eksponenti koji se pojavljuju u formuli (12).

Izbacivanjem korena koji su jednaki nuli, ako ih ima, dobijamo jednačinu

$$\theta(x) = c_0 x^r + c_1 x^{r-1} + \cdots + c_r = 0, \quad (15)$$

čiji su koreni $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ nenula eksponenti iz razvijenog oblika (12), a čiji su koeficijenti celi brojevi, pri čemu su c_0 i c_r različiti od nule.

Dakle, razvijeni oblik (12) može se zapisati kao

$$e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_r} + k = 0, \quad (16)$$

za neki pozitivan ceo broj k . Napomenimo da je $k \neq 0$, jer je bar prvi član razvijenog izraza (12) jednak 1.

Neka je $c = c_0$ vodeći koeficijent u (15). Definišimo funkciju

$$f(x) = \frac{c^s x^{p-1} [\theta(x)]^p}{(p-1)!}, \quad (17)$$

gde je

$$s = rp - 1,$$

a p prost broj koji ćemo izabrati u nastavku, i definišimo

$$F(x) = f(x) + D(f(x)) + D^2(f(x)) + \dots + D^{s+p}(f(x)), \quad (18)$$

gde D označava diferenciranje po x .

Primetimo da je

$$D(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}f(x),$$

gde smo koristili da je f polinom stepena $s+p$ te je $D^{s+p+1}(f(x)) = 0$. Dakle,

$$e^{-x}F(x) - F(0) = -\int_0^x e^{-y}f(y) dy,$$

što, nakon smene $y = \lambda x$ i sređivanja, daje

$$F(x) - e^x F(0) = -x \int_0^1 e^{(1-\lambda)x} f(\lambda x) d\lambda. \quad (20)$$

Podsetimo se da je

$$\sum_{j=1}^r e^{\beta_j} + k = 0$$

iz (16). Prema tome, zamenom $x = \beta_j$ i sabiranjem dobijamo

$$\sum_{j=1}^r F(\beta_j) + kF(0) = -\sum_{j=1}^r \beta_j \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} f(\lambda\beta_j) d\lambda. \quad (21)$$

Jednačina (21) vodi do kontradikcije, jer ćemo u nastavku pokazati da je za dovoljno veliki prost broj p izraz na levoj strani ceo broj različit od nule, dok je izraz na desnoj strani proizvoljno mali.

Najpre primetimo da, prema (17),

$$\sum_{j=1}^r D^t(f(x))\big|_{x=\beta_j} = 0, \quad 0 \leq t < p. \quad (22)$$

Dalje, polinom

$$g(x) = (p-1)!f(x)$$

ima celobrojne koeficijente. Pošto je proizvod p uzastopnih celih brojeva uvek deljiv sa $p!$, p -ti i viši izvodi polinoma $g(x)$ jesu polinomi po x sa celobrojnim koeficijentima deljivim sa $p!$.

Stoga su p -ti i viši izvodi polinoma $f(x)$ polinomi sa celobrojnim koeficijentima deljivim sa p . Takođe je jasno da je svaki od tih koeficijenata deljiv sa c^s .

Prema tome, za $t \geq p$, vrednost

$$D^t(f(x))\big|_{x=\beta_j}$$

jeste polinom po β_j stepena najviše s , sa koeficijentima deljivim sa pc^s .

Prema (15), svaka simetrična funkcija po promenljivim $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$ sa celobrojnim koeficijentima i stepenom najviše s ima celobrojnu vrednost, pod uslovom da je svaki koeficijent deljiv sa c^s , što ovde jeste slučaj.

Stoga

$$\sum_{j=1}^r D^t(f(x))\big|_{x=\beta_j} = pk_t, \quad p \leq t \leq p+s, \quad (23)$$

gde su k_t celi brojevi.

Kombinujući (22) i (23) i sabirajući po t dobijamo

$$\sum_{j=1}^r F(\beta_j) = p \sum_{t=p}^{p+s} k_t. \quad (24)$$

Iz (17) i (18) sledi

$$D^t(f(x))\big|_{x=0} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq p-2, \\ c^s c_r^p, & t = p-1, \\ pq_t, & p \leq t \leq p+s, \end{cases} \quad (25)$$

za neke cele brojeve q_t .

Dakle,

$$F(0) = pq + c^s c_r^p,$$

za neki ceo broj q .

Prema tome, leva strana (21) jednaka je

$$pq + kc^s c_r^p,$$

za neki ceo broj q .

Pošto su k , c i c_r različiti od nule, izraz

$$kc^s c_r^p$$

nije deljiv sa p , pod uslovom da izaberemo prost broj

$$p > \max\{k, |c|, |c_r|\}.$$

To znači da je leva strana (21) nenulti ceo broj.

Ali desna strana (21) može se zapisati kao

$$I_p = -\frac{c^s}{(p-1)!} \sum_{j=1}^r \beta_j^p \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} \lambda^{p-1} [\theta(\lambda\beta_j)]^p d\lambda.$$

Pošto su $\beta_1, \dots, \beta_r$ fiksni, a θ je polinom, postoji konstanta $M > 0$ takva da

$$|\beta_j \theta(\lambda\beta_j)| \leq M, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Takođe, postoji konstanta $C > 0$, nezavisna od p , takva da

$$|e^{(1-\lambda)\beta_j}| \leq C, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Prema tome,

$$|I_p| \leq \frac{|c|^s}{(p-1)!} \sum_{j=1}^r CM^{p-1} \int_0^1 \lambda^{p-1} d\lambda = \frac{|c|^s r CM^{p-1}}{p!}.$$

Kako za svaku fiksnu konstantu $M > 0$ važi

$$\frac{M^{p-1}}{p!} \longrightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty),$$

sledi da

$$I_p \longrightarrow 0.$$

Dakle, za dovoljno veliko p imamo da je $|I_p|$ proizvoljno malo, tj. postoji prost broj p tako

da je

$$|I_p| < 1.$$

Time je dokaz završen. □

3.2.4 Posledice transcendentnosti broja π

Kvadratura kruga je nemoguća, jer konstrukcija kvadrata sa površinom π zahteva algebarsku vrednost $\sqrt{\pi}$, što nije moguće ako je π transcendentan.

Kvadratura kruga predstavlja klasičan geometrijski problem u kome je, polazeći od kruga datog poluprečnika, potrebno konstruisati kvadrat iste površine koristeći isključivo lenjir i šestar. Ako je poluprečnik kruga jednak 1, njegova površina iznosi

$$P = \pi.$$

Kvadrat iste površine mora imati stranicu a za koju važi

$$a^2 = \pi,$$

odnosno

$$a = \sqrt{\pi}.$$

Brojevi koji se mogu konstruisati pomoću lenjira i šestara nazivaju se *konstruktibilni brojevi*. Pri ovakvim konstrukcijama polazi se od racionalnih brojeva i dozvoljene su operacije sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i izvlačenja kvadratnog korena. Zbog toga se svaki konstruktibilan broj dobija konačnim nizom kvadratnih proširenja polja racionalnih brojeva. Preciznije, ako je x konstruktibilan broj, tada postoji niz polja

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_m$$

takav da je

$$x \in K_m$$

i da za svako $j = 0, \dots, m-1$ važi

$$K_{j+1} = K_j(\sqrt{a_j}),$$

gde je $a_j \in K_j$. Svako takvo proširenje ima stepen najviše dva, pa je

$$[K_m : \mathbb{Q}]$$

konačan i deli neki stepen broja 2. Odavde sledi da svaki konstruktibilan broj zadovoljava

neku polinomsku jednačinu sa racionalnim koeficijentima, odnosno da je algebarski broj. Dakle, važi implikacija

$$\text{konstruktibilan broj} \implies \text{algebarski broj}.$$

Ova činjenica ima značajne posledice u klasičnim problemima konstrukcija. Na primer, konstrukcija kvadrata iste površine kao dati krug zahteva konstrukciju dužine

$$\sqrt{\pi}.$$

Kada bi ova dužina bila konstruktibilna, ona bi morala biti algebarski broj. Pošto je skup algebarskih brojeva zatvoren za množenje, iz

$$(\sqrt{\pi})^2 = \pi$$

sledilo bi da je i broj π algebarski.

Međutim, Lindemanovom teoremom iz 1882. godine dokazano je da je broj π transcendentan, odnosno da nije koren nijednog nenultog polinoma sa racionalnim koeficijentima. Dobijena kontradikcija pokazuje da broj $\sqrt{\pi}$ nije konstruktibilan. Na ovaj način dobija se poznati rezultat da je kvadratura kruga, odnosno konstrukcija kvadrata iste površine kao dati krug pomoću lenjira i šestara, nemoguća.

Transcendentnost broja π ima sledeće važne posledice:

1. Nemogućnost kvadrature kruga: ne postoji konačna konstrukcija kvadrata sa površinom π pomoću lenjira i šestara.
2. Svaka formula za π koja koristi algebarske operacije i korene ne može završiti u konačnom broju koraka.
3. Potvrđuje teorijsku legitimnost redova, iterativnih metoda i ekstremno brzih konvergentnih formula, kao što su formule Srinivase Ramanudžana.

3.2.5 Veza sa analitičkim formulama

- Redovi i nizovi iz Glave 2, kao što su Ramanudžanove i Ojlerove formule, zavise od beskonačnih procesa, što je u skladu sa transcendentnošću broja π .
- Kvadratna i kubna iteracija zasnovana na AGM ili eliptičkim integralima može se tumačiti kao algoritamski izraz neprekidnog karaktera broja π .

Glava 3 daje sveobuhvatnu matematičku potvrdu fundamentalnih svojstava broja π :

1. **Iracionalnost** – Lambertov dokaz i moderni analitički pristupi.
2. **Transcendentnost** – Lindemanova teorema i posledice za geometrijske konstrukcije.
3. **Veza sa prethodnim glavama** – objašnjava beskonačnost nizova, iterativne metode i brzinu konvergencije.

Ova svojstva čine broj π jedinstvenim matematičkim objektom, centralnim u analitičkoj teoriji i numeričkoj matematici.

Glava 4

Zanimljivi rezultati i pregled formula

Četvrta glava obuhvata zanimljive matematičke rezultate vezane za broj π i sistematičan pregled svih formula i iterativnih metoda koje su razmatrane u prethodnim delovima rada.

Ova glava ima dva osnovna cilja:

- Predstaviti neobične, često paradoksalne ili estetski privlačne identitete i nejednakosti koje uključuju broj π .
- Objediniti i sistematizovati sve važne formule i iterativne metode - od geometrijskih aproksimacija preko analitičkih nizova do kvadratnih i višestruko konvergentnih algoritama.

Kroz ovaj pregled, jasnije se ističe istorijski i matematički razvoj broja π , od antičkih metoda do savremenih algoritama, kao i značaj njegovih analitičkih i transcendentnih svojstava.

Literatura korišćena za prvo poglavlje je [1, 7], a za drugo poglavlje [1].

4.1 Zanimljivi i neobični rezultati vezani za π

Matematičari su kroz vekove otkrivali rezultate koji ističu čudesnu i često paradoksalnu prirodu broja π . Ovi rezultati uključuju neobične nejednakosti, identitete sa drugim fundamentalnim konstantama, kao i formalne paradokse u okviru divergentnih redova.

Cilj ovog poglavlja je da se ovi rezultati sistematizuju i prezentuju u kontekstu razvoja matematičke misli o broju π .

4.1.1 Poznati identiteti i paradoksi

- Ojlerova formula:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Povezuje pet fundamentalnih konstanti ($0, 1, \pi, e, i$) i ističe jedinstvenu vezu između eksponencijalnih i trigonometrijskih funkcija. Ovaj identitet je ujedno simbol matematičke lepote i centralan u analitičkom proučavanju π . U ranijim razmatranjima predstavili smo detaljan dokaz.

- **Nejednakost:**

$$e^\pi > \pi^e, \quad e^\pi \approx 23.1407 > 22.4592 \approx \pi^e$$

Ova jednostavna, ali interesantna relacija pokazuje fascinantne međusobne odnose između π i e i često se koristi u matematičkim zadacima i popularnim člancima.

- **“Paradoksalne” konstrukcije:** $\pi = 2$. Ovaj rezultat pojavljuje se u kontekstu manipulacije divergentnim redovima ili u formalnim matematičkim paradoksima (npr. Grandijev red). Ističe važnost rigoroznosti pri radu sa beskonačnim nizovima i redovima, što je posebno relevantno u kontekstu Ramanudžanovih i Ojlerovih formula.
- **Povezanost sa transcendentnim svojstvima:** Identiteti i nejednakosti vezani za π često demonstriraju njegovu transcendentnu prirodu, što potvrđuje Lindemanova teorema. Na primer, eksponencijalni identiteti i veze sa kompleksnim brojevima ne bi mogli postojati da je π algebarski.

4.1.2 Istorijski značaj

Ovi rezultati ukazuju na duboku matematičku strukturu broja π , koja nadilazi geometrijske i numeričke metode. Uvedeni su kroz radove Ojlera, Gausa i kasnije Ramanudžana, a još kasnije su inspirisali razvoj modularnih funkcija i hipergeometrijskih redova. Paradoksi i nejednakosti podstiču rigoroznost u analitičkoj i numeričkoj matematici. Zanimljivi rezultati pokazuju lepotu i kompleksnost π , demonstrirajući povezanost π sa fundamentalnim konstantama i beskonačnim redovima. Oni takođe postavljaju teoretsku osnovu za pregled formula i iterativnih metoda u sledećem poglavlju.

4.2 Pregled formula i iterativnih postupaka za π

Ovo poglavlje objedinjuje sve važne metode za izračunavanje π :

- **Geometrijske metode** (antički period i Arhimedove aproksimacije)
- **Analitičke redove i beskonačne proizvode** (Ojler, Mašin, Ramanudžan)
- **Iterativne algoritme** (Gaus-AGM, Borvejnove metode)

Cilj je prikazati kompletnu klasifikaciju metoda, sa naglaskom na efikasnost i istorijski razvoj.

4.2.1 Geometrijske metode

Arhimedova aproksimacija

- Bazirana na upisivanju i opisivanju mnogouglova unutar i oko kruga.
- Ograničena preciznost, ali istorijski značaj: prvi sistematični pokušaj numeričkog određivanja π .
- Formula:

$$\pi \approx \frac{O_n + o_n}{2},$$

gde su O_n i o_n obim spoljašnjeg i unutrašnjeg mnogougla sa n stranica.

Ostale geometrijske konstrukcije

- Koriste linearne aproksimacije i simetriju mnogouglova.
- Poslužile su kao polazna tačka za analitičke metode.

4.2.2 Analitički redovi i beskonačni proizvodi

- **Redovi Lajbnica, Gregorija, Nilakante:** linearna konvergencija, jednostavni, ali spori:

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

- **Mašinske formule:** ubrzana konvergencija pomoću funkcije $\arctg$:

$$\pi = 16 \arctg \frac{1}{5} - 4 \arctg \frac{1}{239}$$

- **Ojlerovi beskonačni proizvodi i ζ -funkcija:** povezuju π sa trigonometrijom i brojevima oblika a^2 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

- **Ramanudžanove formule:** veoma brza konvergencija, osnov za moderne algoritme:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

4.2.3 Iterativni algoritmi visokog reda

- **Gaus-AGM metoda:** kvadratna konvergencija

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad \pi_n = \frac{(a_n + b_n)^2}{4t_n}$$

- **Borvejnove metode:** višestruka konvergencija i brza iteracija
 - Omogućavaju izračunavanje miliona decimala broja π sa vrlo malo iteracija.
 - Inspirisane AGM metodom i Ramanudžanovim formulama.

Kategorija	Metoda	Konvergencija	Istorijski značaj
Geometrijska	Arhimed	Linearna	Antička numerička aproksimacija
Analitička	Lajbnić, Gregori	Linearna	Prvi analitički redovi
Analitička	Mašin, Ojler	Brža	18.–19. vek, praktično računanje
Analitička	Ramanudžan	Ekstremno brza	20. vek, osnov za superračunare
Iterativna	Gaus-AGM	Kvadratna	Brza konvergencija
Iterativna	Borvejn	Superbrza	Moderni algoritmi

Tabela 4.1: Sistematski pregled metoda za izračunavanje π .

Pregled formula i iterativnih metoda omogućava:

- Jasan uvid u istorijski i matematički razvoj π .
- Poređenje efikasnosti i brzine konvergencije različitih metoda.
- Sistematsku organizaciju svih ključnih rezultata prethodnih glava, čime se rad završava sa sveobuhvatnim prikazom broja π .

Zaključak

“ π je neizostavan u matematici; bez njega bi matematika bila lišena svoje najveće lepote.”
- Leonard Ojler

Master rad predstavio je sveobuhvatan pregled broja π sa različitih matematičkih aspekata - od geometrijskog i analitičkog do algoritamskog, iracionalnog i transcendentnog. Cilj rada bio je da objedini istorijski razvoj, matematičke metode i praktične algoritme za izračunavanje π , naglašavajući kako su se različiti pristupi nadovezivali i evoluirali kroz vekove.

U Glavi 1 razmatrani su istorijski aspekti. Istorija π počinje u antičko doba kroz geometrijske aproksimacije i merenja kruga. Arhimedove metode korišćenja mnogouglova unutar i oko kruga omogućile su prve precizne aproksimacije π . Razmatrane su i metode analitičkog izračunavanja, dok su algoritamski aspekti 20. veka pokazali prelazak od ručnih proračuna ka računarima poput ENIAC-a, NORC-a i IBM serije. Kvadratni i kubni iterativni algoritmi uvode koncept iterativnog izračunavanja, koji postaje ključan u modernoj numeričkoj analizi.

U Glavi 2 razmatran je analitički aspekt. Analitičke metode omogućavaju izračunavanje π beskonačnim redovima. Redovi Lajbnica, Gregorija i Nilakante predstavljaju linearno konvergentne redove, dok su Ojlerove i Mašinske formule uvod u bržu konvergenciju. Ojlerovi rezultati povezali su π sa funkcijama i eksponencijalnim identitetima, uključujući Ojlerovu formulu $e^{i\pi} + 1 = 0$. Gausovi rezultati i AGM metoda omogućavaju kvadratnu konvergenciju, dok Ramanudžanove formule daju ekstremno brzu konvergenciju, korišćenu u modernim superračunarskim proračunima.

U Glavi 3 razmatrane su iracionalnost i transcendentnost. Iracionalnost π dokazana je Lambertovim i modernim analitičkim metodama, što potvrđuje da se π ne može izraziti kao p/q . Transcendentnost π , dokazano Lindemanovim teoremom, čini nemogućom kvadraturu kruga pomoću lenjira i šestara. Ova svojstva pružaju teorijsku osnovu za beskonačne serije i iterativne metode, objašnjavajući matematičku neograničenost i kompleksnost π .

U Glavi 4 dati su zanimljivi rezultati i pregled formula. Prikazani su neobični identiteti i nejednakosti, uključujući $e^\pi > \pi^e$ i Ojlerovu formulu, što naglašava lepotu i paradoksalnost π . Sistematski su objedinjene sve ključne formule i iterativne metode, od antičkih geometrijskih pristupa do modernih algoritama visokog reda. Tabela metoda omogućava jasan pregled konvergencije, istorijskog značaja i praktične primene. Pregled pokazuje kako su se geometrijske, analitičke i algoritamske metode nadovezivale i razvijale, omogućavajući sve preciznije i brže izračunavanje π .

Opšti zaključak rada je da broj π predstavlja jedan od najznačajnijih matematičkih objekata, povezujući geometriju, analitičku matematiku, teoriju brojeva i numeričku analizu. Njegova istorija pokazuje evoluciju ljudskog razumevanja od prostih geometrijskih aproksimacija do sofisticiranih analitičkih formula i algoritama. Njegova analitička priroda omogućila je razvoj beskonačnih redova, eliptičkih integrala, AGM metoda i iterativnih algoritama visokog reda. Iracionalnost i transcendentnost broja π daju mu matematičku jedinstvenost i potvrđuju nemogućnost klasične kvadrature kruga. Moderne formule i algoritmi, inspirisani radovima Ramanudžana, Gausa i Borvejna, omogućavaju računanje trilion decimala, čime π postaje centralan i u savremenoj matematičkoj i kompjuterskoj nauci. Ovaj rad prikazuje integrisanu sliku broja π , naglašavajući njegovu duboku povezanost sa različitim granama matematike i njegovu kontinuiranu inspiraciju za matematička istraživanja i numeričke metode.

Bibliografija

- [1] J. Arndt i C. Haenel. *Pi-Unleashed*. Berlin Heidelberg: Springer, 1998.
- [2] D. H. Bailey. „An elementary, self-contained proof that π is transcendental”. U: (2026.). Preprint.
- [3] P. Beckmann. *A History of Pi*. New York: St. Martin’s Press, 1971.
- [4] L. Berggren, J. Borwein i P. Borwein. *Pi—A Source Book*. New York: Springer, 2004.
- [5] B. Blum-Smith i S. Coskey. „The Fundamental Theorem on Symmetric Polynomials: History’s First Whiff of Galois Theory”. U: *College Mathematics Journal* 48.1 (2017.), str. 18–29.
- [6] J. M. Borwein. *The Life of π : From Archimedes to ENIAC and Beyond*. Berlin Heidelberg: Springer, 2014.
- [7] D. Brink. „Nilakantha’s accelerated series for π ”. U: *Acta Arithmetica* 171(4) (2015.), str. 293–308.
- [8] P. Eymard i J. P. Lafon. *Autour du nombre Pi*. Paris: Hermann, 1999.
- [9] F. von Lindemann. „Über die Ludolph’sche Zahl”. U: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 2 (1882.), str. 679–682.
- [10] F. von Lindemann. „Über die Zahl π ”. U: *Mathematische Annalen* 20.2 (1882.), str. 213–225.
- [11] S. Mayer. „The transcendence of π ”. U: (2006.). Preprint.
- [12] I. Niven. „The transcendence of π ”. U: *American Mathematical Monthly*, 46(8) (1939.), str. 469–471.
- [13] A. S. Posamentier i I. Lehmann. *Pi—A Biography of the World’s Most Mysterious Number*. New York: Prometheus Books, 2004.
- [14] B. Sturmfels. *Algorithms in Invariant Theory*. 2. izdanje. Text and Monographs in Symbolic Computation. New York: Springer, 2008.

Biografija



Branka Zekanović rođena je 9. maja 1990. godine u Zenici. Nakon završetka osnovne škole “Dvorovi” u Dvorovima upisuje Tehničku školu “Mihajlo Pupin” u Bijeljini, smer tehničar računarstva. Po završetku srednje škole upisuje osnovne akademske studije matematike i informatike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Banjaluci, smer opšti. Po završetku studija radi kao profesor i nastavnik informatike i matematike, ali se zbog stručnog usavršavanja nakon nekog vremena odlučuje da upiše master studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, smer matematika (MA). Položila je sve ispite predviđene planom i programom i time stekla pravo na odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Branka Zekanović

AU

Mentor: dr Milica Žigić

ME

Naslov rada: Broj π sa analitičkog aspekta

NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / en

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2026
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (4/95/14/4/8/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Matematička analiza
ND

Ključne reči: broj π , aproksimacije broja π , analitičke reprezentacije, iracionalnost broja π , transcendentnost broja π
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Master rad predstavio je sveobuhvatan pregled broja π sa različitih matematičkih aspekata - od geometrijskog i analitičkog do algoritamskog, iracionalnog i transcendentnog. Cilj rada bio je da objedini istorijski razvoj, matematičke metode i praktične algoritme za izračunavanje π , naglašavajući kako su se različiti pristupi nadovezivali i evoluirali kroz

vekovе.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 21.11.2025.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

ČK

Predsednik: Dr Petar Đapić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: Dr Milica Žigić vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr Nikola Sarajlija, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Branka Zekanović

AU

Mentor: Dr Milica Žigić

MN

Title: The Number π from the Perspective of Mathematical Analysis

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: s / en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2026

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

PP

Physical description: (4/95/14/4/8/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Mathematical Analysis

SD

Subject/Key words: The number π , approximations of π , analytic representations, the irrationality of π , the transcendence of π

SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: This master's thesis presents a comprehensive overview of the number π from various mathematical perspectives, ranging from geometric and analytical to algorithmic, irrational, and transcendental aspects. The aim of the thesis was to bring together the

historical development, mathematical methods, and practical algorithms for calculating π , emphasizing how different approaches have built upon one another and evolved over the centuries.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 21 November 2025

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Petar Đapić, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: Milica Žigić, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Nikola Sarajlija, PhD, Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad