



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno–matematički fakultet
Departman za matematiku i
informatiku



Svetlana Mandić

Povezanost i super-povezanost Kneserovih grafova

-master rad-

Mentor:
dr Anna Slivková

Novi Sad, 2026

Predgovor

Teorija grafova je oblast matematike koja proučava strukture poznate kao *grafovi*, koje modeluju relacije između objekata. Grafovi se prikazuju kao skup tačaka povezanih linijama koje predstavljaju odnose među njima. Upotreba grafova je veoma široka, upravo zbog jasne intuitivne predstave koju čovek ima o osobinama i ponašanju objekta koji se predstavlja grafom. Pored matematike, grafovi se koriste u hemiji gde predstavljaju strukturne formule molekula, zatim u informatici kao dijagrami kompjuterskih programa, teoriji pouzdanog prenosa informacija, a takođe i u sociologiji gde se pomoću grafova predstavljaju odnosi grupe ljudi. Pored navedenih nauka, grafovi imaju primenu u raznim drugim naukama, samim tim teorija grafova predstavlja važnu granu matematike.

U ovom master radu prikazaćemo osobine posebne vrste grafova, poznatih kao Kneserovi grafovi. Glavni deo rada biće posvećen povezanosti i super-povezanosti Kneserovih grafova.

Prvo poglavlje je uvodno poglavlje, u kojem ćemo se upoznati sa razvojem teorije grafova kroz istoriju, polazeći od problema čije je rešavanje dovelo do prvih formalnih primena grafova. Zatim uvodimo definiciju grafa i osnovne osobine potrebne za razumevanje ovog rada.

U drugom poglavlju uvodimo definiciju Kneserovih grafova i ispitujemo osnovne osobine, kao što su broj čvorova i grana, stepen čvora i regularnost grafa. Određujemo kada su Kneserovi grafovi povezani, a zatim ćemo pažnju posvetiti dijametru i hromatskom broju Kneserovih grafova.

U trećem poglavlju definišemo povezanost grafova, a zatim uvodimo pojam granske tranzitivnosti, neophodne za predstavljanje Votkinsovog rezultata o atomarnim delovima grafa i određivanje čvorne povezanosti Kneserovih grafova.

U četvrtom poglavlju proučavamo super-povezanost Kneserovih grafova. Uvodimo pojam super-čvornog separatora i dokazujemo rezultate koji se odnose na određivanje super-povezanosti. Posebnu pažnju posvećujemo povezanosti i super-povezanosti Kneserovih grafova $K(n, 3)$.

Na kraju rada navodimo kratku biografiju i literaturu korišćenu za ovaj rad.

* * *

Zahvalnost

Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Anni Slivkovej, na ukazanom poverenju, stručnim savetima, korisnim sugestijama i velikoj pomoći tokom izrade ovog master rada. Njeno znanje, posvećenost i podrška bili su mi od neprocenjivog značaja u svim fazama rada.

Zahvaljujem se i članovima komisije na izdvojenom vremenu, pažljivom čitanju rada i korisnim komentarima koji su doprineli njegovom unapređenju.

Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici. Hvala mojim roditeljima na bezuslovnoj ljubavi, razumevanju i podršci tokom celokupnog školovanja, kao i mojim sestrama na ohrabrenju i veri u mene.

Posebno hvala mom suprugu na strpljenju, razumevanju i neprekidnoj podršci tokom izrade ovog rada.

Zahvalnost upućujem i svojoj razrednoj starešini iz srednje škole, koja je prepoznala moje interesovanje za matematiku i podstakla me da nastavim obrazovanje u tom pravcu.

Na kraju, hvala svima koji su na bilo koji način bili uz mene tokom ovog važnog perioda i doprineli tome da ovaj rad bude uspešno završen.

Novi Sad, avgust 2026

Svetlana Mandić

Sadržaj

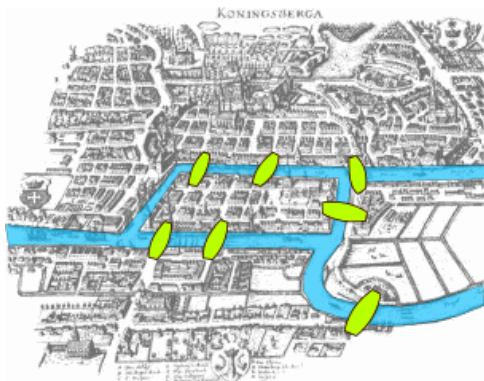
1	Uvod	4
1.1	Osnovni pojmovi	6
2	Definicija i osnovne odlike Kneserovih grafova	10
2.1	Povezani Kneserovi grafovi	13
2.2	Dijametar Kneserovih grafova	15
2.3	Hromatski broj Kneserovih grafova	21
3	Povezanost	27
4	Super-povezanost	37
	Zaključak	60
	Literatura	61
	Biografija	63

1 Uvod

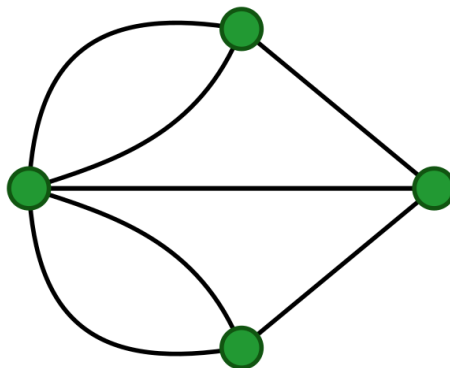
Počeci teorije grafova vezuju se za rad švajcarskog matematičara Leonarda Ojlera¹ iz 1736. godine koji je rešio problem sedam mostova u Kenigsbergu. *Problem Kenigsberskih mostova* je sledeći:

Reka Pregel protiče kroz Kenigsberg i deli grad na četiri dela, odnosno, dve obale reke i dva ostrva. Delove grada povezuje sedam mostova (slika 1.1). Pitanje je da li je moguće obići sve delove grada, prelazeći preko svakog mosta tačno jednom?

Ojler je problem posmatrao tako što je delove grada predstavio kao čvorove, dok je mostove predstavio kao veze između čvorova. Ovakav prikaz predstavlja graf, prikazan na slici 1.2. Gledajući na taj način, problem se svodi na pitanje: da li je moguće nacrtati dati graf tako da se olovka ne podiže sa hartije i da se ne pređe po već povučenoj liniji?



Slika 1.1 Mostovi Kenigsberga



Slika 1.2 Graf Kenigsberskih mostova

Pristupom problemu pomoću grafova Ojler je dao odričan odgovor, odnosno, dokazao je da je nemoguće obići sve delove grada prelazeći svaki most tačno jednom.

Nemački fizičar Gustav Kirhof² (1824-1887) je 1847. godine koristio grafove za proučavanje električnih mreža. Britanski matematičar Artur Kejli³ (1821-1895) je 1879. godine predstavio *problem četiri boje* pred članovima Londonskog geografskog društva. Problem se sastoji u tome da se dokaže da se

¹Leonhard Euler – švajcarski matematičar

²Gustav Kirchhoff – nemački fizičar

³Arthur Cayley – britanski matematičar

sa četiri boje može obojiti geoografska karta tako da nikoje dve susedne zemlje nisu obojene istom bojom. Kejljev problem dokazali su američki matematičar Kenet Appel⁴ (1932-2013) i nemački matematičar Wolfgang Haken⁵ (1928-2022) 1976. godine.

Teorija grafova je zasnovana kao matematička disciplina tek 1936. godine objavljivanjem knjige *Teorija konačnih i beskonačnih grafova* mađarskog matematičara Deneš Keniga⁶ (1883-1944).

Posebnu pažnju u teoriji grafova privlače Kneserovi grafovi, nazvani po nemačkom matematičaru Martinu Kneseru⁷ (1928-2004). Kneserovi grafovi su klasa grafova koju je uveo mađarski matematičar Laslo Lovas⁸ kako bi dokazao kombinatornu hipotezu koju je postavio Kneser 1955. godine: ako su n -člani podskupovi $(2n + k)$ -članog skupa podeljeni u $k + 1$ klasa, onda se dva disjunktna podskupa moraju naći u istoj klasi. Ako posmatramo graf $K(n, k)$, Kneser je ovom hipotezom pretpostavio da je minimalan broj boja potreban za pravilno bojenje grafa jednak $n - 2k + 2$. U ovom radu ćemo se najpre posvetiti nekim osnovnim osobinama Kneserovih grafova, počevši od same definicije i njihovih glavnih odlika, a zatim ćemo odrediti dijametar ove klase grafova. U nastavku ćemo razmatrati hromatski broj Kneserovih grafova. Ova vrednost zapravo proizilazi iz Kneserove hipoteze koju je prvi dokazao Lovas 1978. godine koristeći Borsuk⁹-Ulamovu¹⁰ teoremu, čime je uspostavio vezu između kombinatorike i topologije. Od svih dokaza koji su kasnije usledili, Baranj¹¹ (1978), Grin¹² (2002), Matošek¹³ (2004), posebnu pažnju ćemo posvetiti dokazu koji je potpuno kombinatorni, a njega je izveo Matošek polazeći od Takerove¹⁴ leme.

Glavni deo rada biće posvećen povezanosti i super-povezanosti Kneserovih grafova. Čvorna povezanost grafa je minimalan broj čvorova čijim uklanjanjem nastaje nepovezan ili trivijalan graf. Za čvornu povezanost Kneserovih

⁴Kenneth Appel – američki matematičar

⁵Wolfgang Haken – nemački matematičar

⁶Hőnig Dénes – mađarski matematičar

⁷Martin Kneser – nemački matematičar

⁸László Lovász – mađarski matematičar

⁹Karol Borsuk – poljski matematičar

¹⁰Stanisław Marcin Ulam – poljski matematičar

¹¹Imre Bárány – mađarski matematičar

¹²Curtis Greene – američki matematičar

¹³Jiří Matoušek – češki matematičar

¹⁴Albert William Tucker – kanadski matematičar

grafova koristićemo Votkinsove¹⁵ rezultate iz 1970. godine koji određuju čvornu povezanost granski tranzitivnih povezanih grafova, kakvi su i Kneserovi grafovi. Mnogo noviji i aktuelniji su rezultati iz super-povezanosti Kneserovih grafova. Super-povezanost grafa predstavlja minimalan broj čvorova čijim uklanjanjem graf postaje nepovezan, pri čemu nijedna od nastalih komponenti nije trivijalna. Ekinči i Gauči su u svom radu iz 2019. godine postavili hipotezu o tačnoj vrednosti super-povezanosti za sve Kneserove grafove $K(n, k)$. Hipoteza je dokazana za $k \in \{2, 3\}$, a ovi dokazi biće predstavljeni u master radu.

Zbog svoje kombinatorne jasnoće i složenih matematičkih osobina, Kneserovi grafovi služe kao značajan primer u teoriji grafova i inspiracija za dalja istraživanja u oblasti diskretne matematike i primenjene kombinatorike.

Pored svog teorijskog značaja u teoriji grafova i kombinatorici, super-povezanost predstavlja važnu meru otpornosti mreže na otkazivanje čvorova. Zbog toga nalazi primenu u analizi pouzdanosti računarskih i komunikacionih sistema, kao i drugih složenih mreža. Poseban značaj proučavanja super-povezanosti ogleda se u analizi stabilnosti mrežnih struktura koje se javljaju u savremenim oblastima, kao što su veštačka inteligencija, neuronske i društvene mreže. U takvim sistemima otpornost na otkazivanje pojedinih čvorova predstavlja jednu od važnih karakteristika koja utiče na njihovu pouzdanost i efikasnost.

1.1 Osnovni pojmovi

Za početak uvodimo definiciju grafa, kao i oznake koje ćemo koristiti u nastavku.

Definicija. *Graf* se sastoji od konačnog skupa V , koji se naziva skupom *čvorova* i kolekcije E dvoelementnih podskupova skupa V . Skup E naziva se skup *grana*. Element skupa E se naziva granom. Graf se označava sa $G(V, E)$. Elementi a i b skupa V su susedni ili *povezani* pomoću grane $\{a, b\}$ ako $\{a, b\} \in E$.

Skup susednih čvorova čvora v označavamo sa $N(v)$.

Konačan graf se predstavlja dijagramom u kome su čvorovi dati tačkama, a grane date linijama koje povezuju odgovarajuće čvorove.

¹⁵Mark E. Watkins-američki matematičar

Definicija. Ako skup $\{a, b\}$ predstavlja granu, tada se čvorovi a i b nazivaju *krajnjim tačkama* grane $\{a, b\}$. Za granu $\{a, b\}$ se, takođe, kaže da je *incidentna* sa čvorovima a i b . Nasuprot tome, za čvorove a i b se kaže da su incidentni sa granom $\{a, b\}$. Dva čvora su *susedna* ako predstavljaju krajnje tačke grane ili, ekvivalentno tome, ako su incidentni sa istom granom. Dve grane su *susedne* ako su incidentne sa istim čvorom.

Definicija grafa, koju smo naveli, opisuje *prost* graf. Prosti grafovi se u teoriji grafova najčešće koriste. Međutim, potrebno je da navedemo još neke grafove, kao i osobine grafova, koje ćemo koristiti u narednim poglavljima. *Petlja* je grana koja spaja čvor sa samim sobom.

Graf sa petljama je naziv za graf u koji su uključene petlje.

Obeleženi graf predstavlja graf u kojem su sve grane obeležene.

Paralelne grane su grane incidentne sa istim parom čvorova.

U skupu grana prostog grafa nema petlji, kao ni paralelnih grana.

Multigraf je graf u kojem se mogu pojavljivati paralelne grane i petlje.

Graf $G'(V', E')$ je *podgraf* grafa $G(V, E)$ ako je $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$.

Definicija. Graf predstavlja *kompletan graf* ako postoji grana između bilo koja njegova dva različita čvora. Kompletan graf sa n čvorova se obeležava sa K_n .

Graf je *k-partitan* ako skup čvorova možemo podeliti u k klasa, tako da grane povezuju čvorove iz različitih klasa. Ako skup čvorova možemo podeliti u dve klase tako da su čvorovi svake grane iz disjunktних skupova, onda imamo *bipartitni graf*.

Definicija. *Stepen čvora* v , označen sa $d(v)$ predstavlja broj grana koje su incidentne tom čvoru. Čvor sa stepenom 0 naziva se *izolovani čvor*.

Graf je *regularan* ako svi čvorovi imaju isti stepen. Graf G je *k-regularan* ako je svaki čvor stepena k , odnosno ako je $d_G(v) = k$, za svako $v \in V(G)$. Koristićemo oznaku $d(G) = k$.

Teorema 1.1. Zbir stepena čvorova grafa jednak je dvostrukom broju grana.

Iz navedene teoreme direktno sledi da u svakom grafu postoji paran broj čvorova čiji je stepen neparan broj.

Posledica 1.1. Suma stepena svih čvorova u grafu je uvek paran broj.

Definicija. Neka je $G = G(V, E)$ graf sa čvorovima $v_0, v_k \in V$. *Šetnja* dužine k od čvora v_0 do čvora v_k predstavlja niz čvorova i grana

$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 \dots e_k v_k,$$

takav da čvorovi $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$, grane $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ i $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. Dakle, šetnja dužine k sadrži k grana. *Put* od čvora v_0 do čvora v_k je šetnja u kojoj se nijedan od čvorova ne ponavlja. *Staza* od čvora v_0 do čvora v_k je šetnja u kojoj se nijedna grana ne ponavlja.

U daljem radu put ćemo označavati nizom čvorova, odnosno,

$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 \dots e_k v_k = v_0 v_1 v_2 \dots v_k.$$

Definicija. Graf G je *povezan* ako postoji put između bilo koja dva različita čvora grafa G .

Povezanost čvorova je relacija ekvivalencije na skupu $V(G)$. Svaka klasa ekvivalencije čini jednu komponentu povezanosti grafa G . Povezan graf ima tačno jednu komponentu.

Definicija. Neka je $G = (V, E)$ graf. *Zatvorena staza* predstavlja stazu čija je dužina veća od nule, koja spaja čvor sa samim sobom. *Ciklus (kontura)* je zatvorena staza od čvora v do njega samog, takva da je čvor v jedini čvor koji se ponavlja. *n-ciklus* predstavlja ciklus koji sadrži n grana i n različitih čvorova.

Stablo je povezan graf koji ne sadrži cikluse.

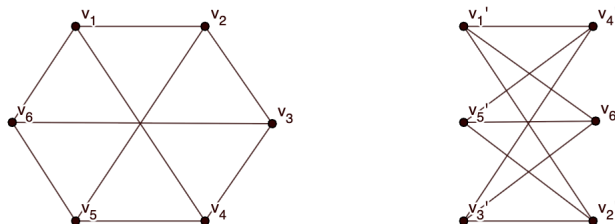
Definicija. Funkcija f se naziva *homomorfizam* grafa $G = (V, E)$ u graf $G' = (V', E')$ ako $f : V \rightarrow V'$ i pri tome čuva susednost čvorova, tj. za sve $u, v \in V$ važi: ako $\{u, v\} \in E$, onda $\{f(u), f(v)\} \in E'$.

Definicija. Homomorfizam f grafa G u graf G' je *izomorfizam* ako je $f : V \rightarrow V'$ bijektivna funkcija i za sve $u, v \in V$ važi: $\{u, v\} \in E$ ako i samo ako $\{f(u), f(v)\} \in E'$. Ako je f izomorfizam, tada su G i G' *izomorfni*.

Definicija. Automorfizam grafa G je izomorfizam grafa G u samog sebe. Grupu automorfizama grafa G označavamo sa $Aut(G)$.

Automorfizam grafa G je permutacija ρ skupa čvorova, takva da je $\{u, v\}$ grana ako i samo ako je i $\{\rho(u), \rho(v)\}$ grana. Samim tim, grupa automorfizama grafa G čini podgrupu simetrične grupe nad skupom čvorova grafa G .

Primer 1.1. Na slici 1.1. prikazan je automorfizam grafa G gde se svaki čvor v_i slika u v'_i .

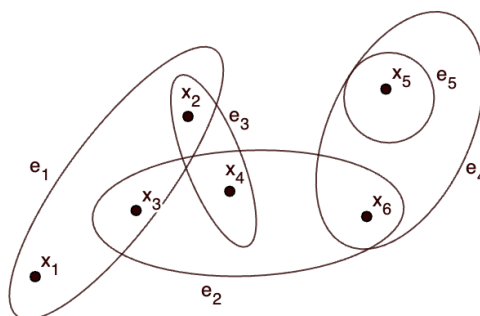


Slika 1.1 Automorfizam grafa G

Definicija. *Hipergraf* je uređeni par (X, E) gde je X neprazan skup čiji su elementi čvorovi grafa, a skup E je familija podskupova skupa X koji predstavljaju grane, koje još zovemo i *hipergrane*.

Hipergrana povezuje proizvoljan broj čvorova, dok grana u grafu povezuje tačno dva čvora. Čvorove hipergrafa predstavljamo tačkama u ravni, a hipergrane prostim zatvorenim linijama koje obuhvataju tačno one čvorove koji su sadržani u hipergrani. Ako svaka hipergrana hipergrafa sadrži isti broj čvorova, tada kažemo da je hipergraf *uniforman*. Stoga je prost graf specijalan slučaj hipergrafa, jer ga možemo posmatrati i kao 2-uniforman hipergraf, što će nam biti značajno u poslednjoj glavi.

Na slici 1.2. prikazan je hipergraf (X, E) , gde je $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, a E sadrži podskupove $e_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $e_2 = \{x_3, x_4, x_6\}$, $e_3 = \{x_2, x_4\}$, $e_4 = \{x_5, x_6\}$ i $e_5 = \{x_5\}$.



Slika 1.2. Hipergraf (X, E)

2 Definicija i osnovne odlike Kneserovih grafova

Neka je $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ skup sačinjen od n prirodnih brojeva. Kneserov graf $G = K(n, k)$ je graf čiji su čvorovi svi k -podskupovi skupa $[n]$, a dva čvora su povezana granom ako su ta dva skupa disjunktna. Drugim rečima, čvorovi predstavljaju podskupove kardinalnosti k , a grane između čvorova postoje samo ako ti skupovi nemaju presek.

Neka $V(G)$ označava skup čvorova grafa G . Tada broj čvorova grafa G dobijamo na sledeći način:

$$|V(K(n, k))| = \binom{n}{k}.$$

Svi čvorovi Kneserovog grafa imaju isti stepen, pa je graf G regularan graf stepena

$$\binom{n-k}{k}.$$

Kneserovi grafovi ne sadrže petlje, jer nijedan čvor nije susedan sam sa sobom i između svaka dva čvora postoji najviše jedna grana, što ih čini prostim grafovima.

Kako je svaka grana incidentna sa dva čvora, broj grana dobijamo na sledeći način:

$$|E(K(n, k))| = \frac{1}{2} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k}.$$

Za skup svih k -podskupova skupa $[n]$ korist ćemo i oznaku $[n]^k$.

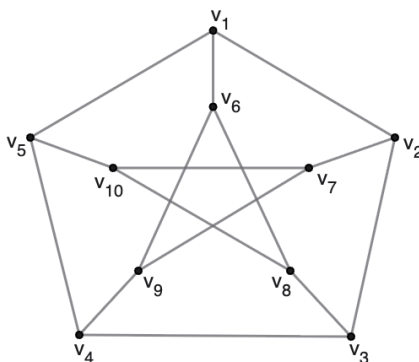
Navodimo primere Kneserovih grafova sa malim vrednostima n i k .

- 1) $K(4, 2)$: Čvorovi su dvoelementni podskupovi skupa $\{1, 2, 3, 4\}$, kojih ima ukupno 6. Svaki čvor u ovom grafu je disjunktan samo sa njemu komplementnim skupom, pa sledi da je svaki čvor susedan sa samo jednim čvorom. Dakle, u grafu $K(4, 2)$ imamo 3 disjunktne grane.



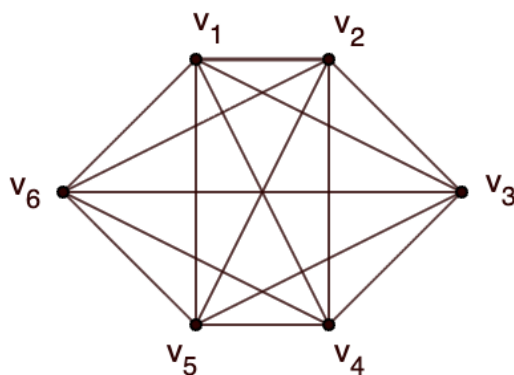
Slika 2.1 Kneserov graf $K(4, 2)$

- 2) $K(5, 2)$: Navedeni graf je Petersonov graf, nazvan po danskom matematičaru Juliusu Petersonu¹⁶ (1839-1910). Petersonov graf ima 10 čvorova i 15 grana, gde svaki čvor ima stepen 3, pa je graf regularan stepena 3. U daljem radu ćemo izračunati dijametar, hromatski broj, kao i povezanost Petersonovog grafa.



Slika 2.2 Petersonov graf

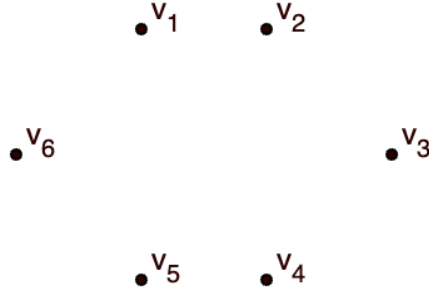
- 3) $K(n, 1)$: Čvorovi su jednoelementni podskupovi skupa $[n]$. Svi podskupovi su disjunktни, odnosno svaka dva čvora su povezana, pa imamo kompletan graf K_n . Na slici 2.3 prikazan je kompletan graf K_6 .



Slika 2.3 Kneserov graf $K(n, 1)$

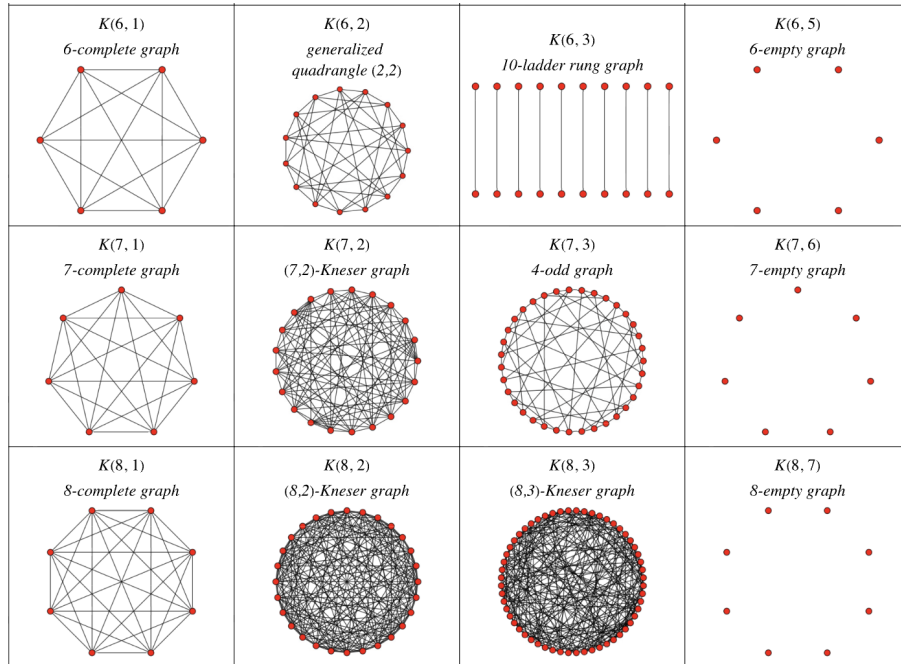
¹⁶Julius Peter Christian Petersen – danski matematičar

- 4) $K(n, n-1)$: Čvorovi su $(n-1)$ poskupovi skupa $[n]$. Za $n > 2$ svaka dva skupa u preseku imaju $n-2$ elementa, pa nemamo disjunktne skupove. Dakle, graf nema grana. Na slici 2.4 prikazan je graf $K(6, 5)$.



Slika 2.4 Kneserov graf $K(n, n-1)$, za $n > 2$

- 5) Na slici 2.5 prikazani su Kneserovi grafovi $K(n, 1)$, $K(n, 2)$, $K(n, 3)$, $K(n, n-1)$, za $n \in \{6, 7, 8\}$.



Slika 2.5 Neki Kneserovi grafovi (preuzeto sa [13])

2.1 Povezani Kneserovi grafovi

Posmatrajmo Kneserov graf $K(n, k)$.

- (1) Ako je $n < 2k$ tada graf nema grane, jer nemamo dva čvora sa kojim bi grana bila incidentna.
- (2) Ako je $n = 2k$ imamo čvorove stepena 1, jer za svaki k -podskup ima tačno jedan disjunktan k -podskup, pa sledi da imamo jednu granu za svaki izbor k -podskupa. Tada je $K(n, k)$ disjunktan unija nezavisnih grana.
- (3) Ako je $n > 2k$, graf $K(n, k)$ je povezan, što ćemo dokazati u nastavku. U specijalnom slučaju, za $k = 1$, Kneserov graf $K(n, 1)$ je kompletan graf sa n čvorova.

Teorema 2.1.1. Za $n > 2k$ graf $K(n, k)$ je povezan.

Dokaz. Ideja dokaza zasniva se na konstrukciji puta između dva proizvoljna čvora Kneserovog grafa. Konstrukciju dajemo za $n = 2k + 1$, a takav put je isti i za veće n .

Neka su A i B proizvoljni k -podskupovi skupa sa $2k + 1$ elemenata. Ako su disjunktne, tada su čvorovi susedni, pa imamo put dužine 1.

Pretpostavimo da nisu disjunktne. Neka je $|A \cap B| = t > 0$. Polazeći od čvora A , susedni čvor ćemo konstruisati tako da sadrži sve elemente iz skupa $B \setminus A$, a zajedničke elemente skupova A i B zamenićemo elementima koji ne pripadaju skupu $A \cup B$. Sledeći čvor sadrži elemente iz skupa $A \setminus B$ i samo jedan od zajedničkih elemenata je zamenjen elementom koji ne pripada $A \cup B$, tako da bude disjunktan sa prethodnim. U narednim koracima vraćamo po jedan zajednički element čvorovima koji sadrže elemente skupa $B \setminus A$. Na taj način se naizmenično formiraju čvorovi koji su disjunktne sa prethodnim čvorom puta, pa su samim tim susedni u Kneserovom grafu. Svakim korakom broj zajedničkih elemenata koji još nisu zamenjeni se smanjuje, a nakon konačno mnogo koraka dolazi se do temena B .

Navedimo to sada formalno. Elemente skupova A i B možemo bez umanjenja opštosti označiti na sledeći način:

$$A = \{a_1, \dots, a_{k-t}, c_1, \dots, c_t\}, \quad B = \{b_1, \dots, b_{k-t}, c_1, \dots, c_t\}, \quad \text{gde je } t < k.$$

Elemente koji ne pripadaju skupu $A \cup B$ označićemo sa $x_1, \dots, x_{t+1}$.

Sada ćemo konstruisati put između A i B . Polazeći od čvora A , svaki sledeći susedni čvor ćemo, radi preglednosti, pisati u novom redu.

$$\begin{aligned}
 A = & \{a_1, \dots, a_{k-t}, c_1, \dots, c_t\}, \\
 & \{b_1, \dots, b_{k-t}, x_1, \dots, x_t\}, \\
 & \{a_1, \dots, a_{k-t}, c_1, \dots, c_{t-1}, x_{t+1}\}, \\
 & \{b_1, \dots, b_{k-t}, x_1, \dots, x_{t-1}, c_t\}, \\
 & \{a_1, \dots, a_{k-t}, c_1, \dots, c_{t-2}, x_t, x_{t+1}\}, \\
 & \{b_1, \dots, b_{k-t}, x_1, \dots, x_{t-2}, c_{t-1}, c_t\}, \\
 & \{a_1, \dots, a_{k-t}, c_1, \dots, c_{t-3}, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}\}, \\
 & \{b_1, \dots, b_{k-t}, x_1, \dots, x_{t-3}, c_{t-2}, c_{t-1}, c_t\}, \\
 & \vdots \\
 & \{a_1, \dots, a_{k-t}, x_2, \dots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}\}, \\
 & \{b_1, \dots, b_{k-t}, c_1, \dots, c_{t-2}, c_{t-1}, c_t\} = B.
 \end{aligned}$$

Konstruisali smo put za proizvoljna dva čvora grafa $K(n, k)$, pa sledi da je graf $K(n, k)$ povezan.

■

2.2 Dijametar Kneserovih grafova

Neka je G povezan graf. Za dva čvora a i b grafa G definišemo dužinu najkraćeg puta u grafu G koji spaja čvorove a i b sa $d(a, b)$, kao rastojanje čvorova a i b . Maksimalno rastojanje između bilo koja dva čvora grafa G nazivamo **dijametar grafa**.

Dijametar grafa G definiše se kao $d(G) = \max_{u, v \in V(G)} d(u, v)$.

Da bismo došli do teoreme kojom je prikazana formula za računanje dijametra grafa prvo ćemo uvesti potrebne oznake. Takođe ćemo navesti pretpostavke i leme, potrebne za glavni dokaz.

Za skup svih n -elementnih podskupova skupa $[2n + k]$ koristićemo oznaku $[2n + k]^n$.

Lema 2.2.1. Neka su $A, B \in [2n + k]^n$ dva čvora u $K(2n + k, n)$ spojena putem dužine $2p$ ($p \geq 0$). Tada važi $|A \cap B| \geq n - kp$.

Dokaz. Posmatramo put od A do B u grafu $K(2n + k, n)$, dužine $2p$, dat sa

$$X_0 X_1 \dots X_{2p},$$

gde je $A = X_0$ i $B = X_{2p}$.

Kako su susedni čvorovi disjunktni, znamo da važi

$$X_i \cap X_{i+1} = \emptyset \quad \text{za} \quad 0 \leq i \leq 2p - 1.$$

Takođe, za svako i važi $|X_i| = n$. Za svako i, j važi

$$|X_i \cap X_j| = |X_i| + |X_j| - |X_i \cup X_j| = 2n - |X_i \cup X_j|.$$

Želimo da ograničimo datu uniju, kako bismo dobili traženu nejednakost. Znamo da važi $X_i \cap X_{i+1} = \emptyset$ i $X_{2p-i-1} \cap X_{2p-i} = \emptyset$. Krenućemo od čvorova koji su simetrično udaljeni od krajeva puta.

Posmatrajmo elemente skupa $X_i \cup X_{2p-i}$ gde $i \in \{0, 1, 2, \dots, p-2\}$. Elementi iz X_i ne mogu biti u X_{i+1} , a elementi iz X_{2p-i} ne mogu biti u X_{2p-i-1} . Odavde sledi

$$X_i \subseteq [2n + k] \setminus X_{i+1} \quad i \quad X_{2p-i} \subseteq [2n + k] \setminus X_{2p-i-1},$$

pa dobijamo da je

$$\begin{aligned} X_i \cup X_{2p-i} &\subseteq ([2n+k] \setminus X_{i+1}) \cup ([2n+k] \setminus X_{2p-i-1}), \\ X_i \cup X_{2p-i} &\subseteq [2n+k] \setminus (X_{i+1} \cap X_{2p-i-1}). \end{aligned}$$

Dalje sledi

$$\begin{aligned} |X_i \cup X_{2p-i}| &\leq 2n+k - |X_{i+1} \cap X_{2p-i-1}| \\ &= 2n+k - (2n - |X_{i+1} \cup X_{2p-i-1}|) \\ &= k + |X_{i+1} \cup X_{2p-i-1}|, \end{aligned}$$

pa dobijamo:

$$\begin{aligned} |X_0 \cup X_{2p}| &\leq k + |X_1 \cup X_{2p-1}| \\ |X_1 \cup X_{2p-1}| &\leq k + |X_2 \cup X_{2p-2}| \\ &\dots \\ |X_{p-2} \cup X_{p+2}| &\leq k + |X_{p-1} \cup X_{p+1}|. \end{aligned}$$

Počevši od unije krajnjih čvorova X_0 i X_{2p} , nakon $p-1$ koraka, dolazimo do unije $X_{p-1} \cup X_{p+1}$. Kako je čvor X_p disjunktan susednim čvorovima, kardinalnost date unije možemo izračunati na sledeći način:

$$|X_{p-1} \cup X_{p+1}| \leq 2n+k - |X_p| = n+k.$$

Iz prethodnih nejednakosti dobijamo

$$|X_0 \cup X_{2p}| \leq k(p-1) + |X_{p-1} \cup X_{p+1}| \leq k(p-1) + n+k = kp+n.$$

Kako važi

$$|A \cap B| = |X_0 \cap X_{2p}| = 2n - |X_0 \cup X_{2p}|,$$

konačno dobijamo

$$|A \cap B| \geq 2n - (kp+n) = n - kp.$$

■

U nastavku dajemo posledicu navedene leme.

Posledica 2.2.1. Neka su $A, B \in [2n+k]^n$ dva čvora u $K(2n+k, n)$ spojena putem dužine $2p+1$ ($p \geq 0$). Tada važi $|A \cap B| \leq kp$.

Propozicija 2.2.1. Neka su n i k pozitivni celi brojevi, takvi da $n \geq 2$, $k \geq n - 1$. Tada je dijametar Kneserovog grafa $K(2n + k, n)$ jednak 2.

Dokaz. Neka su A i B dva proizvoljna čvora koji nisu susedni. Znamo da nesusedni čvorovi postoje, zbog pretpostavke da je $n \geq 2$. Naime, mogu se izabrati dva različita n -podskupa koja imaju $n - 1$ zajedničkih elemenata, pa je presek neprazan, odnosno, čvorovi nisu susedni. Tada je dijametar grafa najmanje 2.

Kako A i B nisu susedni čvorovi, odgovarajući skupovi datih čvorova nisu disjunktne, pa važi $1 \leq |A \cap B| \leq n - 1$. Odavde direktno sledi da je

$$|[2n + k] \setminus (A \cup B)| \geq n.$$

Iz dobijenog sledi da u grafu $K(2n + k, n)$ postoji čvor C takav da $A \cap C = \emptyset$ i $B \cap C = \emptyset$. Odavde sledi da je dijametar grafa najviše 2, a kako smo pokazali da je 2 i donja granica, sledi da je dijametar grafa jednak 2. ■

Lema 2.2.2. Neka su $A, B \in [2n + k]^n$ dva različita čvora Kneserovog grafa $K(2n + k, n)$, pri čemu je $1 \leq k < n - 1$. Ako je $|A \cap B| = s$ tada je

$$d(A, B) = \min \left\{ 2 \left\lceil \frac{n - s}{k} \right\rceil, 2 \left\lceil \frac{s}{k} \right\rceil + 1 \right\}.$$

Dokaz. Neka je $C = A \cap B$ i neka je $s = |C|$. Neka je $D = [2n + k] \setminus (A \cup B)$, gde $|D| = s + k$. Pretpostavimo da su

$$A = \{a_1, \dots, a_{n-s}\} \cup C, B = \{b_1, \dots, b_{n-s}\} \cup C.$$

Neka je $t = 2 \left\lceil \frac{n-s}{k} \right\rceil$. Konstruišimo put između A i B na sledeći način:

$$X_0 X_1 \dots X_t,$$

gde $A = X_0$ i $B = X_t$.

Za $i < \frac{n-s}{k}$ važi

$$\begin{aligned} X_{2i-1} &= \{a_1, \dots, a_{(i-1)k}, b_{ik+1}, \dots, b_{n-s}\} \cup D, \\ X_{2i} &= \{b_1, \dots, b_{ik}, a_{ik+1}, \dots, a_{n-s}\} \cup C. \end{aligned}$$

Kako je $X_t = B$, za X_{t-1} imamo

$$X_{t-1} = \{a_1, \dots, a_{n-s-k}\} \cup D.$$

Neka je sada $D' \subseteq D$ tako da $|D'| = s$. Posmatramo čvor

$$A' = (B \setminus C) \cup D'.$$

Primetimo da su A i A' disjunktni. Neka je $s' = |A' \cap B| = n - s$. Slično kao malopre, postoji put između A' i B dužine $2 \left\lceil \frac{n-s'}{k} \right\rceil = 2 \left\lceil \frac{s}{k} \right\rceil$. Sledi da postoji put između A i B dužine $2 \left\lceil \frac{s}{k} \right\rceil + 1$. Iz dobijenog sledi

$$d(A, B) \leq \min \left\{ 2 \left\lceil \frac{n-s}{k} \right\rceil, 2 \left\lceil \frac{s}{k} \right\rceil + 1 \right\}. \quad (1)$$

Sa druge strane, neka je $d = d(A, B)$.

- Ako je $d = 2p$ tada po lemi 2.2.1 imamo $s = |A \cap B| \geq n - kp$, pa je $d = 2p \geq 2 \left\lceil \frac{n-s}{k} \right\rceil$.
- Ako je $d = 2p + 1$, onda po posledici 2.2.1 imamo $s = |A \cap B| \leq kp$, pa je $d = 2p + 1 \geq 2 \left\lceil \frac{s}{k} \right\rceil + 1$.

Dakle, dobili smo da je

$$d(A, B) \geq \min \left\{ 2 \left\lceil \frac{n-s}{k} \right\rceil, 2 \left\lceil \frac{s}{k} \right\rceil + 1 \right\}. \quad (2)$$

Iz (1) i (2) sledi tražena jednakost. ■

Sada prelazimo na glavnu teoremu za dijametar grafa, koju ćemo dokazati korišćenjem prethodno dokazanih lema i propozicije.

Teorema 2.2.1. Neka su n i k pozitivni celi brojevi. Tada je dijametar Kneserovog grafa $K(2n + k, n)$ jednak

$$\left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil + 1.$$

Dokaz. Neka D označava dijametar Kneserovog grafa $K(2n+k, n)$. Definišimo celobrojne funkcije

$$g(s) = 2 \left\lceil \frac{n-s}{k} \right\rceil, \quad h(s) = 2 \left\lceil \frac{s}{k} \right\rceil + 1, \quad f(s) = \min \{g(s), h(s)\},$$

gde s uzima vrednosti iz skupa $[n-1] = \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Po lemi 2.2.2 važi $D = \max_s f(s)$, pa je dovoljno pokazati da je

$$\max_s f(s) = \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil + 1.$$

Neka je $n-1 = 2qk + pk + y$, gde je $q \geq 0$, $p \in \{0, 1\}$ i $0 < y \leq k$. Sledi da je

$$\left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil + 1 = 2q + p + 2.$$

Uzmimo da je $s_0 = qk + pk$.

- Ako je $s \leq s_0$, tada je

$$f(s) = h(s) \leq h(s_0) = 2q + 2p + 1 \leq 2q + p + 2.$$

- Ako je $s > s_0$, tada je

$$f(s) = g(s) \leq g(s_0 + 1) = 2q + 2 \leq 2q + p + 2.$$

Dakle,

$$\max_s f(s) \leq \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil + 1.$$

Obrnuto, razmatramo dva slučaja:

- (i) $p = 0$: Neka je $s_1 = qk + y$. Tada je $g(s_1) = 2q + 2$ i $h(s_1) = 2q + 3$, pa je

$$f(s_1) = g(s_1) = \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil + 1.$$

- (ii) $p = 1$: Neka je $s_2 = qk + 1$. Tada je $g(s_2) = 2q + 4$ i $h(s_2) = 2q + 3$, pa je

$$f(s_2) = h(s_2) = \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil + 1.$$

Stoga,

$$\max_s f(s) = \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil + 1.$$

■

Primer 2.2.1. Izračunaćemo dijametar Petersonovog grafa $K(5, 2)$.

U prethodnoj teoremi imamo formulu za računanje dijametra za Kneserov graf $K(2n + k, n)$. Za Petersonov graf dobijamo da je $n = 2$ i $k = 1$, pa imamo:

$$d = \left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{2-1}{1} \right\rceil + 1 = 2.$$

2.3 Hromatski broj Kneserovih grafova

Bojenje čvorova grafa G je pridruživanje boja čvorovima grafa G , tako da se susednim čvorovima ne pridruži ista boja. Ukoliko je pridruženo k boja, bojenje zovemo *k-bojenje*.

Svaki graf sa n čvorova možemo obojiti sa n boja, tako što ćemo svaki čvor obojiti drugom bojom, pa je graf n -obojev. Međutim, potrebno je naći minimalan broj boja za bojenje grafa.

Hromatski broj grafa G je najmanji prirodan broj k za koji je graf G k -obojev i označava se sa $\chi(G)$. Ako je $\chi(G) = k$ kažemo da je G k -hromatski.

Bojenjem delimo skup čvorova na klase u zavisnosti od boje koja im je dodeljena. Svi čvorovi obojeni istom bojom čine *hromatsku klasu*, pa tako za k -obojev možemo reći i k -partitan, jer delimo čvorove na skupove čvorova iste boje.

Kneserova hipoteza iz 1955. godine može se formulisati kao problem bojenja grafa. Pretpostavka kaže da se Kneserov graf $K(n, k)$ ne može obojiti sa manje od $n - 2k + 2$ boja.

Dakle, Kneser je postavio hipotezu da važi $\chi(K(n, k)) \geq n - 2k + 2$. Lovas je dokazao da je Kneserova hipoteza tačna [7], šta više, dobio je jači rezultat: hromatski broj Kneserovog grafa $K(n, k)$ je tačno $n - 2k + 2$.

U ovom radu ćemo prikazati čisto kombinatorni dokaz Kneserove hipoteze, koji je izveden iz dokaza Takerove leme o obeležavanju temena posebnih triangulacija oktaedarske lopte. Dokaz Takerove leme nećemo navoditi, jer se u dokazu Kneserove teoreme ne pozivamo na Takerovu lemu.

Kneserova hipoteza. Za svaka dva prirodna broja n i k takva da je $n \geq 2k$ hromatski broj Kneserovog grafa $K(n, k)$ je

$$\chi(K(n, k)) \geq n - 2k + 2.$$

Dokaz Kneserove hipoteze.

Osnovni objekti koje ćemo koristiti u dokazu su disjunktni uređeni parovi (A, B) , takvi da su $A, B \subseteq [n]$ i $A \cap B = \emptyset$.

Da bismo dokazali Kneserovu hipotezu, odnosno nejednakost $\mathcal{X}(K(n, k)) \geq n - 2k + 2$, pretpostavićemo suprotno i pokazaćemo da dolazimo do kontradikcije.

Neka je c pravilno bojenje Kneserovog grafa $K(n, k)$ sa $n - 2k + 1$ boja, koje ćemo označiti sa $2k, 2k + 1, \dots, n$. Neka je linearno uređenje $\leq$ podskupova od $[n]$ takvo da proširuje parcijalno uređenje po veličini skupova, tj. tako da:

$$|A| < |B| \Rightarrow A < B.$$

Sa λ ćemo označiti funkciju obeležavanja na disjunktnim uređenim parovima. Za svaki uređeni par (A, B) definišemo oznaku $\lambda(A, B)$. Za računanje vrednosti $\lambda(A, B)$ imamo dva slučaja:

$$1^\circ |A| + |B| \leq 2k - 2$$

$$\lambda(A, B) = \begin{cases} |A| + |B| + 1, & \text{ako je } A \geq B \\ -(|A| + |B| + 1), & \text{ako je } A < B \end{cases}$$

$$2^\circ |A| + |B| \geq 2k - 1$$

$$\lambda(A, B) = \begin{cases} c(A), & \text{ako je } A > B \\ -c(B), & \text{ako je } B > A \end{cases}$$

gde je $c(A)$ boja prvih k elemenata skupa A , a $c(B)$ boja prvih k elemenata skupa B . Ako je $A > B$ i $|A| + |B| \geq 2k - 1$, tada je $|A| \geq k$, pa je $c(A)$ boja koja je u bojenju Kneserovog grafa $K(n, k)$ dodeljena podskupu od A koji čine prvih k elemenata. Analogno za $c(B)$.

U prvom slučaju, vidimo da λ uzima vrednosti iz skupa $\{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(2k - 1)\}$, dok u drugom slučaju vrednosti za λ pripadaju skupu $\{\pm 2k, \dots, \pm n\}$.

Predznačeni niz, odnosno, niz u kojem svaki član ima predznak $+$ ili $-$ je niz $(s_1, s_2, \dots, s_m)$ gde je:

- $0 \leq m \leq n$
- $s_1, \dots, s_m \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$

- $|s_i| \neq |s_j|$ za $i \neq j$.

Predznačeni niz određuje niz od $m + 1$ disjunktih uređenih parova (A_0, B_0) , (A_1, B_1) , $\dots$, (A_m, B_m) , gde je:

$$A_i = \{s_j : j \in [i], s_j > 0\}, \quad B_i = \{-s_j : j \in [i], s_j < 0\}.$$

A_0 i B_0 su prazni skupovi, dok se svaki sledeći (A_i, B_i) dobija iz prethodnog uređenog para, odnosno (A_i, B_i) , na sledeći način:

- (1) ako je $s_i > 0$, s_i se dodaje u A_{i-1} ,
- (2) ako je $s_i < 0$, tada se $-s_i$ dodaje u B_{i-1} .

S obzirom da u svakom narednom koraku dodajemo po jedan član skupu A_i ili skupu B_i , za svaki uređeni par (A_i, B_i) važi $|A_i| + |B_i| = i$.

Za dato bojenje c , niz oznaka pridružen nizu $(s_1, \dots, s_m)$ je $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ gde je $\lambda_i = \lambda(A_i, B_i)$.

Po definiciji λ , svaki niz oznaka počinje sa $(1, \pm 2, \pm 3, \dots)$, sve do $\pm(2k - 1)$, a ako ima više od $2k - 1$ članova onda su to $\pm i$ za $2k \leq i \leq n$.

U nastavku navodimo tvrđenje pomoću kojeg ćemo doći do kontradikcije.

Tvrđenje 2.3.1. Ako je c pravilno bojenje grafa $K(n, k)$ onda niz oznaka bilo kog predznačenog niza nikada ne sadrži dve komplementarne oznake, odnosno ne postoje $i \neq j$ takvi da je $\lambda_i = -\lambda_j$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoje $i \neq j$ takvi da je $\lambda_i = -\lambda_j$.

Ako su $i, j \leq 2k - 2$, onda su λ_i i λ_j dodeljene prema slučaju 1°. Kako za svako t važi $|A_t| + |B_t| = t$, dobijamo $|\lambda_t| = |A_t| + |B_t| + 1 = t + 1$. Dakle, ako bi važilo $\lambda_i = -\lambda_j$, tada bi moralo da važi i $|\lambda_i| = |\lambda_j|$, odnosno $i + 1 = j + 1$, pa sledi $i = j$, što je kontradikcija. Prema tome, mora biti $i, j \geq 2k - 1$, odnosno, oznake su dodeljene prema slučaju 2°.

Sada pretpostavimo da je $i < j$ i $\lambda_i > 0$. Tada su, po slučaju 2°, $\lambda_i = c(A_i)$, $\lambda_j = -c(B_j)$, tj $-\lambda_j = c(B_j)$ pa dobijamo $c(A_i) = c(B_j)$. Dobili smo da su dva disjunktna k -skupa isto obojena, što je u kontradikciji sa pravilnim bojenjem grafa.

■

Dokazaćemo da postoji predznačeni niz čiji niz oznaka sadrži komplementarne oznake.

Predznačeni niz $s = (s_1, \dots, s_m)$ je *dozvoljeni niz* ako važi $s_i \in \{\lambda_0, \dots, \lambda_m\}$, za svako $i \in [m]$, gde je $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ niz oznaka za s .

Pretpostavimo suprotno, da nijedan niz oznaka ne sadrži komplementarne oznake. Za svaki dozvoljeni niz definišemo jedan ili dva susedna dozvoljena niza.

Za pronalaženje suseda koristićemo lokalne transformacije: transpoziciju, skraćivanje, proširivanje i promenu znaka. Navedene transformacije su ili involutivne ili su međusobno inverzne, pri čemu svaka od njih očuvava dozvoljenost niza, pa je relacija „biti sused” simetrična.

Za prazan niz $s = \emptyset$ dobijamo $(A_0, B_0) = (\emptyset, \emptyset)$, pa je niz oznaka (λ_0) i važi $\lambda_0 = \lambda(\emptyset, \emptyset) = 1$. Navedenim transformacijama za prazan niz možemo konstruisati samo jedan susedni dozvoljeni niz $(+1)$, pa prazan niz ima tačno jednog suseda. Svi ostali dozvoljeni nizovi imaju tačno dva suseda, koje pronalazimo na sledeći način:

Primetimo da niz oznaka $\{\lambda_0, \dots, \lambda_m\}$ ima jedan element više od dozvoljenog niza $s = (s_1, \dots, s_m)$. Znamo da važi $s_i \in \{\lambda_0, \dots, \lambda_m\}$, $\forall i \in [m]$, u proizvoljnom redosledu, pa u zavisnosti od jedne preostale oznake imamo dva slučaja:

- (1) dve oznake se poklapaju, odnosno, $\lambda_i = \lambda_j$, za $i < j$,
- (2) postoji jedna „višak” oznaka $\lambda_i \notin \{s_1, \dots, s_m\}$.

U slučaju (1), jedan od dva suseda niza s dobija se transpozicijom na pozicijama $(i, i + 1)$, pa dobijamo susedni niz $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, s_i, s_{i+2}, \dots, s_m)$. Nije moguće da bude $i = 0$ jer se oznaka $\lambda_0 = 1$ ne može pojaviti ni na jednoj drugoj poziciji niza oznaka. Ovako dobijen niz je dozvoljeni niz jer transpozicijom niz i dalje ispunjava uslov $s_i \in \lambda$, $\forall i$. Drugi sused niza s dobijamo transpozicijom $(j, j + 1)$, osim u slučaju kad je $j = m$. U tom slučaju, drugi sused dobijamo skraćivanjem niza, uklanjanjem s_m , odnosno, dobijamo dozvoljeni niz $(s_1, \dots, s_{m-1})$.

U slučaju (2) jedan od dva suseda niza s je prošireni niz $(s_1, \dots, s_m, \lambda_i)$. Ovako dobijeni niz je dozvoljeni niz jer pretpostavljamo da ne postoje dve komplementarne oznake, pa $|\lambda_i| \notin \{|s_1|, \dots, |s_m|\}$. Pronalazak drugog suseda nas dovodi do podslučajeva:

- (2.1) Ako λ_i nije ni prvi ni poslednji član niza oznaka, tj. $1 \leq i \leq m - 1$, tada se drugi sused dobija od s transpozicijom na $(i, i + 1)$.

- (2.2) Ako je $i = m$, drugi sused se dobija skraćivanjem, tj. dobijamo niz $(s_1, \dots, s_{m-1})$.
- (2.3) Ako je $i = 0$, drugi sused se dobija promenom znaka, odnosno, dobijamo dozvoljeni niz $(-s_1, \dots, -s_m)$. Dobili smo novi niz čije su oznake zapravo negacije niza oznaka početnog niza, $\bar{\lambda}_t = -\lambda_t$, pa svaki $-s_i$ pripada svom skupu oznaka $\{\bar{\lambda}_0, \dots, \bar{\lambda}_m\}$, čime je očuvana dozvoljenost niza.

Na ovaj način smo svakom nepraznom dozvoljenom nizu pridružili dva različita suseda.

Ako posmatramo skup svih dozvoljenih nizova, vidimo da smo dobili konačan graf u kojem tačno jedan čvor ima stepen 1, a svi ostali čvorovi imaju stepen 2. Takav graf ne postoji, jer skup stepena u konačnom grafu mora imati paran broj čvorova neparnog stepena.

Došli smo do kontradikcije, pa je pretpostavka bila pogrešna, odnosno, postoji predznačeni niz čiji niz oznaka sadrži komplementarne oznake, tj. postoje $i \neq j$ takvi da je $\lambda_i = -\lambda_j$. Prema prethodnom tvrđenju dolazimo do kontradikcije sa pretpostavkom da je c pravilno bojenje grafa.

Dakle, graf se ne može pravilno obojiti sa $n - 2k + 1$ boja. Za bojenje Kneserovog grafa $K(n, k)$ potrebno je najmanje $n - 2k + 2$ boja, odnosno $\chi(K(n, k)) \geq n - 2k + 2$.

■

Kada je postavio navedenu hipotezu, Kneser je dao i konstrukciju pravilnog bojenja grafa sa tačno $n - 2k + 2$ boja. Pravilno bojenje grafa $K(n, k)$ navodimo u nastavku.

Posmatrajmo proizvoljan čvor grafa $K(n, k)$, odnosno k -elementni podskup skupa $\{1, 2, \dots, n\}$.

Za svako i , gde je $1 \leq i \leq n - 2k + 1$, svim čvorovima čiji je najmanji elemenat jednak i dodeljujemo boju i . Čvorovi koji su sada obojeni, obojeni su pravilno, jer ako su dva k -podskupa iste boje tada oba sadrže elemenat i , pa ne mogu biti disjunktni, a samim tim ni susedni. Na taj način smo iskoristili $n - 2k + 1$ boja.

Preostali neobojeni čvorovi, tj. k -podskupovi, su podskupovi čiji su svi elementi veći ili jednaki $n - 2k + 2$, odnosno, podskupovi skupa $\{n - 2k +$

$2, \dots, n\}$. Navedeni skup ima $2k - 1$ elemenata, pa dva k -podskupa ne mogu biti disjunktni, samim tim ni susedni. Zbog toga sledi da sve preostale čvorove možemo obojiti istom bojom $n - 2k + 2$.

Na ovaj način smo dobili pravilno $(n - 2k + 2)$ -bojenje grafa $K(n, k)$.

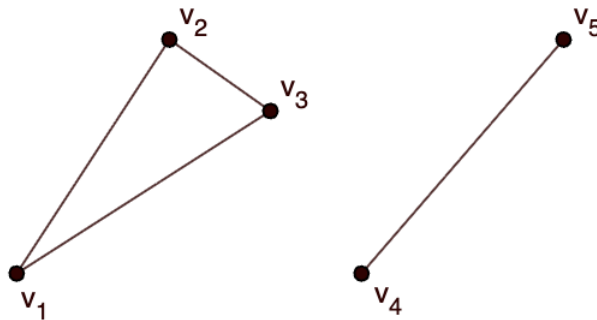
Primer 2.3.1. Izračunaćemo hromatski broj Petersonovog grafa $K(5, 2)$. Pokazali smo da je $\chi(K(n, k)) = n - 2k + 2$, pa je

$$\chi(K(5, 2)) = 5 - 2 \cdot 2 + 2 = 3.$$

3 Povezanost

Graf G je *povezan* ako postoji put između bilo koja dva različita čvora grafa. Ako postoje čvorovi koji se ne mogu povezati putem, graf je *nepovezan*. Maksimalan podgraf grafa koji je povezan nazivamo komponenta povezanosti grafa, te nepovezan graf čine dve ili više komponenti povezanosti, dok povezan graf ima jednu komponentu povezanosti.

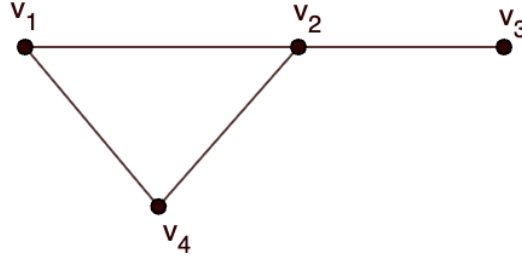
Primer 3.1. Na slici 3.1. prikazan je nepovezan graf, sa dve komponente. Naime, između čvorova v_1 i v_4 ne postoji put, pa sledi nepovezanost grafa. Naravno, jasno je da u datom grafu ima više parova čvorova između kojih ne postoji put, ali je za nepovezanost dovoljno da pronađemo jedan takav par čvorova.



Slika 3.1 Nepovezan graf

Čvorni separator u povezanom grafu G je skup čvorova $U \subseteq V(G)$, takav da je $G - U$ nepovezan graf. Svaki graf koji nije kompletan ima čvorni separator. Ako je graf G povezan, a nije kompletan graf, onda postoje dva čvora u i v koja nisu susedna. Ako je $U = V(G) - \{u, v\}$, tada je $G - U$ nepovezan.

Primer 3.2. Povezan graf G sa skupom čvorova $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ prikazan je na slici 3.2. Jedan od čvornih separatora datog grafa je skup $\{v_2, v_4\}$, čijim uklanjanjem graf postaje nepovezan. Uklanjanjem čvorova v_1 i v_3 dobijamo povezan graf, pa skup $\{v_1, v_3\}$ nije čvorni separator.



Slika 3.2. Povezan graf

Čvorna povezanost grafa je minimalan broj čvorova čijim uklanjanjem nastaje nepovezan ili trivijalan graf.

U daljem radu ćemo za čvornu povezanost i čvorni separator koristiti nazive *povezanost* i *separator*.

Povezanost grafa G , koji nije kompletan graf, definišemo kao $\kappa(G) = \min|U|$, gde je U separator u grafu G .

Ukoliko je graf G kompletan, uklanjanjem bilo kog čvora graf će ostati kompletan. Da bismo dobili nepovezan ili trivijalan graf potrebno je ukloniti $n - 1$ čvor, odnosno, za kompletan graf K_n važi $\kappa(K_n) = n - 1$.

Graf G je k -čvorno povezan ako je $\kappa(G) \geq k$. k -čvorno povezan graf ostaje povezan nakon uklanjanja bilo kojih t čvorova, gde je $t < k$.

U prethodnom primeru smo naveli jedan od čvornih separatora, međutim, primetimo da je dovoljno ukloniti samo čvor v_2 da bismo dobili nepovezan graf. Dati graf je 1-čvorno povezan.

Sa $\delta(G)$ označavamo minimalni stepen čvora u grafu G , tj.

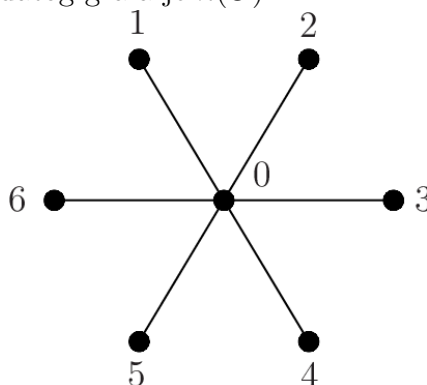
$$\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V(G)\}.$$

Uklanjanjem svih susednih čvorova čvora minimalnog stepena dobijamo izolovani čvor, pa je jasno da važi

$$\kappa(G) \leq \delta(G).$$

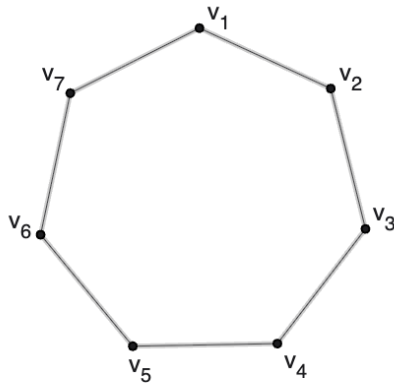
Čvor v je *artikulacioni čvor* u grafu G ako i samo ako postoje čvorovi u i w takvi da v leži na svakom putu od čvora u do čvora w . Uklanjanjem artikulacionog čvora povećava se broj komponenti grafa.

Primer 3.3. Na slici 3.3. prikazan je povezan graf koji sadrži artikulacioni čvor. Naime, uklanjanjem centralnog čvora 0, dobijamo nepovezan graf. Uklanjanjem bilo kog drugog čvora povezanost grafa ostaje očuvana. Prema tome, čvorna povezanost datog grafa je $\kappa(G) = 1$.



Slika 3.3. Povezan graf sa artikulacionim čvorom

Primer 3.4. Povezan graf koji još zovemo kontura prikazan je na slici 3.4. Minimalni broj čvorova koje moramo ukloniti da bi kontura postala nepovezan graf jeste 2, pritom, ti čvorovi ne smeju biti susedni.



Slika 3.4. Kontura

Važno je napomenuti da postoje i granski separatori, kao i granska povezanost, ali za nastavak ovog rada nam nisu potrebni, te ćemo ih izostaviti.

Povezanost grafa u odnosu na čvorove i grane korisna je u raznim realnim sistemima. Navešćemo primer naveden u literaturi *Teorija grafova i njene primene* [4]:

Posmatrajmo vojnu telekomunikacionu mrežu koja se sastoji od izvesnog broja punktova koji su povezani linijama veze na određeni način. Branilac u ratu će se truditi da održi celinu svoje mreže radi efikasnog komandovanja, a napadač će se truditi da je razori, odnosno razdvoji na manje izolovane delove. Ako neprijatelj može da deluje na mrežu uništavanjem punktova, onda je za ocenu povredivosti mreže potrebno posmatrati povezanost u odnosu na čvorove, a ako neprijatelj može da uništava linije veze posmatra se povezanost u odnosu na grane odgovarajućeg grafa. Branilac treba da organizuje mrežu tako da sa zadatim brojem čvorova i grana povezanost bude što veća. Napadač će svoja dejstva svakako skoncentrisati (ako mu je poznat plan mreže) na artikulacione čvorove, odnosno skupove čvorova koji dovode do prekida u mreži. S druge strane, branilac treba da očekuje takva dejstva pa da pojača odbranu kritičnih mesta.

Definicija. Graf G je *granski-tranzitivan* ako za bilo koje dve grane $\{x, y\}, \{u, v\} \in E(G)$ postoji automorfizam $\phi \in \text{Aut}(G)$ takav da $\phi(x) = u$ i $\phi(y) = v$ ili $\phi(x) = v$ i $\phi(y) = u$.

Ako je graf G povezan graf i ako je skup $C \subset V(G)$ minimalni čvorni separator grafa G , tada sa $\mathbf{C}(G)$ označavamo klasu svih separatora kardinalnosti $\kappa(G)$, odnosno klasu minimalnih separatora.

Nakon uklanjanja separatora C iz povezanog grafa G dobijamo nepovezan graf, čija se svaka komponenta naziva *deo grafa* u odnosu na separator C i označava sa P_i , gde je $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ i k je broj delova grafa. Svaki deo P_i određuje jedinstveni separator $C \in \mathbf{C}(G)$. Kako je C separator, sledi da je svaki čvor iz C susedan nekom čvoru iz dela P , kao i nekom čvoru iz skupa $V(G) \setminus (C \cup V(P))$.

Najmanji broj čvorova koji može imati deo grafa dobijen uklanjanjem nekog minimalnog separatora označava se sa $p(G)$, tj. važi

$$p(G) = \min\{\min\{|V(P)| : P \text{ je deo grafa } G - C\} : C \in \mathbf{C}(G)\}.$$

Deo čiji je broj čvorova jednak $p(G)$ naziva se *atomarni deo grafa*.

Lema 3.1. Ako je G povezan graf, sledeće tvrdnje su ekvivalentne:

- (i) $p(G) \geq 2$
- (ii) $\kappa(G) < \delta(G)$

(iii) Nijedan skup koji se sastoji od svih suseda nekog čvora ne pripada skupu $\mathbf{C}(G)$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (iii)$ Neka je $p(G) \geq 2$. Pretpostavimo da postoji čvor v takav da je $N(v) \in \mathbf{C}(G)$. Uklanjanjem separatora $N(v)$ uklanjamo sve susedne čvorove čvora v , pa čvor v ostaje izolovan u grafu $G - N(v)$. Dobili smo deo grafa koji sadrži samo jedan čvor, pa je $p(G) = 1$, a to je u kontradikciji sa tvrdnjom (i) .

$(iii) \Rightarrow (i)$ Neka važi tvrdnja (iii) . Ako pretpostavimo da je $p(G) < 2$, tada imamo da je $p(G) = 1$, odnosno imamo izolovani čvor u atomarnom delu grafa P . Sledi da separator C sadrži sve susede izolovanog čvora, a to je u kontradikciji sa tvrdnjom (iii) , pa sledi da važi $p(G) \geq 2$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Iz uslova (ii) imamo da je povezanost grafa G strogo manja od minimalnog stepena čvora $\delta(x)$. Ako pretpostavimo da je za neki čvor x skup njegovih susednih čvorova minimalni separator, tada je $\kappa(G) = |N(x)|$. Znamo da je $|N(x)| \geq \delta(G)$, pa sledi da je $\kappa(G) \geq \delta(G)$, što je u kontradikciji sa (ii) .

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Neka važi tvrdnja (iii) . Da bismo dokazali (ii) pretpostavićemo suprotno, tj. pretpostavićemo da je $\kappa(G) \geq \delta(G)$. Znamo da važi $\kappa(G) \leq \delta(G)$, pa sledi da je $\kappa(G) = \delta(G)$. Neka je x čvor minimalnog stepena. Tada je $|N(x)| = \delta(G) = \kappa(G)$. Uklanjanjem skupa $N(x)$ čvor x ostaje izolovan, pa je $N(x)$ separator kardinalnosti $\kappa(G)$. Dobili smo da je $N(x) \in \mathbf{C}(G)$, a to je u kontradikciji sa (iii) . ■

Teorema 3.2. U povezanom grafu, različiti atomarni delovi su disjunktni.

Za dokaz navedene teoreme, potrebne su nam leme koje ćemo u nastavku navesti i dokazati. Takođe, pretpostavljamo da je graf G povezan i uvodimo oznake koje ćemo koristiti.

Neka je $i \in \{1, 2\}$. Sa P_i označavamo atomarni deo grafa u odnosu na minimalni separator $C_i \in \mathbf{C}(G)$. Neka je $U_i = V(P_i)$ i $R_i = V(G) - (U_i \cup C_i)$. Tada je $|U_1| = |U_2| = p(G)$, $|C_1| = |C_2| = \kappa(G)$ i $|R_1| = |R_2|$.

Lema 3.2. Ako je $U_1 \not\subset R_2$ ili $U_2 \not\subset R_1$, tada je $U_1 \cap R_2 = \emptyset$ ili $U_2 \cap R_1 = \emptyset$.

Dokaz. Uvodimo oznake $Q_1 = U_1 \cap R_2$ i $Q_2 = U_2 \cap R_1$. Pretpostavimo da $Q_1, Q_2 \neq \emptyset$. Neka je

$$D_1 = (C_1 \cap R_2) \cup (C_1 \cap C_2) \cup (U_1 \cap C_2), D_2 = (C_2 \cap R_1) \cup (C_1 \cap C_2) \cup (U_2 \cap C_1).$$

Svaki čvor susedan nekom čvoru iz Q_i pripada skupu $Q_i \cup D_i$. Ako $Q_i \cup D_i \neq V(G)$ sledi da je skup D_i separator grafa G , jer njegovim uklanjanjem Q_i postaje nepovezan sa ostatkom grafa. U suprotnom, D_i nije separator grafa, jer njegovim uklanjanjem ostaje samo Q_i , tj. ne razdvaja graf.

Kako su skupovi $(C_1 \cap R_2)$, $(C_1 \cap C_2)$ i $(U_1 \cap C_2)$ međusobno disjunktne, kao i skupovi $(C_2 \cap R_1)$, $(C_1 \cap C_2)$ i $(U_2 \cap C_1)$, dobijamo

$$|D_1| = |(C_1 \cap R_2)| + |(C_1 \cap C_2)| + |(U_1 \cap C_2)|,$$

$$|D_2| = |(C_2 \cap R_1)| + |(C_1 \cap C_2)| + |(U_2 \cap C_1)|.$$

Odavde sledi

$$|D_1| + |D_2| = |(C_1 \cap R_2)| + |(C_1 \cap C_2)| + |(U_1 \cap C_2)| + |(C_2 \cap R_1)| + |(C_1 \cap C_2)| + |(U_2 \cap C_1)|.$$

Grupisanjem skupova koji pripadaju separatoru C_1 , kao i skupova koji pripadaju separatoru C_2 , dobijamo

$$|(C_1 \cap R_2)| + |(C_1 \cap C_2)| + |(U_2 \cap C_1)| = |C_1|,$$

$$|(U_1 \cap C_2)| + |(C_2 \cap R_1)| + |(C_1 \cap C_2)| = |C_2|,$$

pa sledi da je $|D_1| + |D_2| = |C_1| + |C_2| = 2\kappa(G)$. Dalje sledi da je $|D_i| \leq \kappa(G)$, za neko i .

Dobijamo da je $|D_i \cup Q_i| \leq |C_i| + |U_i| < |V(G)|$, pa je D_i separator grafa G . Svaki separator grafa je kardinalnosti veće ili jednake kardinalnosti minimalnog separatora, a mi smo pokazali da je $|D_i| \leq \kappa(G)$, pa sledi jednakost. Dakle, $D_i \in \mathbf{C}(G)$, za $i \in \{1, 2\}$. Pokazali smo i da je $|D_1| + |D_2| = 2\kappa(G)$, pa sledi da su i D_1 i D_2 minimamlni separatori.

Međutim, po pretpostavci važi $0 < |Q_i| < p(G)$, za neko i , a skup Q_i sadrži deo grafa u odnosu na separator D_i , pa dolazimo do kontradikcije. ■

Lema 3.3. Ako je $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, tada je $U_1 \cap R_2 = \emptyset$ ili $U_2 \cap R_1 = \emptyset$.

Dokaz. Neka je čvor v takav da $v \in U_1 \cap U_2$, pa sledi da $v \in U_1$ i $v \in U_2$. Znamo da važi $V(G) = U_1 \cup C_1 \cup R_1$ i $V(G) = U_2 \cup C_2 \cup R_2$, gde su skupovi U_1, C_1 i R_1 disjunktne, kao i skupovi U_2, C_2 i R_2 . Iz $v \in U_1$ sledi da $v \notin R_1$, a iz $v \in U_2$ sledi da $v \notin R_2$, pa imamo $U_1 \not\subset R_2$ i $U_2 \not\subset R_1$. Primenom leme 3.2. dobijamo da je $U_1 \cap R_2 = \emptyset$ ili $U_2 \cap R_1 = \emptyset$.



Lema 3.4. Ako je $U_2 \cap C_1 \neq \emptyset$ i $U_2 \cap R_1 = \emptyset$, tada je $U_2 \subset C_1$.

Dokaz. Pretpostavimo da $U_2 \not\subset C_1$. Znamo da je $V(G) = U_1 \cup C_1 \cup R_1$, a kako $U_2 \cap R_1 = \emptyset$ sledi da postoji čvor u skupu U_2 koji pripada skupu U_1 . Tada je $Q_1 = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Neka je

$$\begin{aligned} Q_2 &= U_1 \cup (U_2 \cap C_1), \\ D_1 &= (U_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap U_2), \\ D_2 &= (C_1 \cap R_2) \cup (C_1 \cap C_2) \cup (C_2 \cap R_1). \end{aligned}$$

Analogno dokazu leme 3.2. može se pokazati da svaki čvor iz Q_i može biti susedan samo čvorovima iz $Q_i \cup D_i$, pa je D_i separator grafa, osim u slučaju kad je $Q_i \cup D_i = V(G)$. Takođe, imamo da je $|D_1| + |D_2| = |C_1| + |C_2| = 2\kappa(G)$. Iz $D_1 \subseteq C_1 \cup U_1$, sledi $Q_1 \cup D_1 \neq V(G)$, pa je D_1 separator grafa G . Kako je zbir kardinalnosti skupova D_1 i D_2 jednak $2\kappa(G)$, a znamo da je D_1 separator, sledi da je $|D_2| \leq \kappa(G) \leq |D_1|$.

Pokazaćemo da je $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$. Ako pretpostavimo suprotno, dobijamo

$$|R_1 \cap C_2| = |R_1| = |R_2| = |R_2 \cap (U_1 \cup C_1)|,$$

pa imamo

$$\begin{aligned} 2|R_1| &= |R_1 \cap C_2| + |R_2 \cap U_1| + |R_2 \cap C_1| \\ &= |D_2| - |C_1 \cap C_2| + |R_2 \cap U_1| \\ &\leq |C_1 \cap U_2| + |U_1 \cap (C_2 \cup R_2)| \\ &< 2p(G). \end{aligned}$$

Dobili smo da je $|R_1| < p(G)$. Po definiciji atomarnog dela, imamo da je atomarni deo U_1 za separator C_1 kardinalnosti $p(G)$. Kako je R_1 unija svih preostalih komponenti grafa, tj. $G - C_1$, a svaka od tih komponenti mora imati bar $p(G)$ čvorova, sledi da je $|R_1| \geq p(G)$. Sledi da je pretpostavka pogrešna, pa imamo da je $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$.

Kako je $V(G) \setminus (Q_2 \cup D_2) = R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$, sledi da je i D_2 separator, pa je $|D_2| \geq \kappa(G)$. Iz $|D_2| \leq \kappa(G) \leq |D_1|$ sledi da je D_2 minimalni separator, pa je i $|D_2| = \kappa(G)$. Zatim, iz $|D_1| + |D_2| = 2\kappa(G)$ sledi da je i D_1 minimalni

separator. Pošto je $0 < |Q_1| < p(G)$, skup Q_1 sadrži deo grafa u odnosu na separator D_1 , a to je kontradikcija sa definicijom atomarnog dela grafa $p(G)$. ■

Lema 3.5. Ako je $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, tada je $U_2 \cap R_1 = \emptyset$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $U_2 \cap R_1 \neq \emptyset$. Tada je, po lemi 3.3. $U_1 \cap R_2 = \emptyset$. Možemo pretpostaviti da je $U_1 \neq U_2$. Pošto je P_1 povezan i važi $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ i $U_1 \cap R_2 = \emptyset$, svaki čvor iz U_1 pripada skupu $U_2 \cup C_2$. Iz $U_1 \neq U_2$ sledi da postoji čvor iz U_1 koji ne pripada U_2 . Zbog povezanosti atomarnog dela P_1 mora da postoji grana koja povezuje čvor iz $U_1 \cap U_2$ sa čvorom iz $U_1 \setminus U_2$. Posmatrani čvor iz $U_1 \setminus U_2$ ne pripada R_2 , pa mora pripadati C_2 . Odavde sledi da je $U_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Lema 3.4. ostaje tačna i kad se zamene indeksi 1 i 2, tj. imamo $U_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ i $U_1 \cap R_2 = \emptyset$, pa iz leme sledi da je $U_1 \subset C_2$. Iz pretpostavke imamo da je $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, pa iz $U_1 \subset C_2$ sledi da neki čvor iz U_2 pripada skupu C_2 . Znamo da su skupovi U_2 i C_2 disjunktni, pa dolazimo do kontradikcije. ■

Dokaz teoreme 3.2. Neka su P_1 i P_2 različiti atomarni delovi grafa G . Pretpostavimo suprotno, tj. da $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, te važi $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Kako je P_2 povezan i $P_1 \neq P_2$, slično kao u dokazu prethodne leme dobijamo da je $U_2 \cap C_1 \neq \emptyset$. Iz leme 3.5. sledi da je $U_2 \cap R_1 = \emptyset$, a iz leme 3.4. dobijamo da je $U_2 \subset C_1$. Međutim, skupovi U_1 i C_1 su disjunktni, pa dobijamo da je $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom. ■

Naredna posledica iz rada [12] američkog matematičara Votkinsa potrebna nam je za dokaz teoreme koju ćemo navesti u nastavku.

Posledica 3.1. Ako je povezan graf G granski-tranzitivan tada je čvorna povezanost jednaka minimalnom stepenu grafa, tj. tada važi:

$$\kappa(G) = \delta(G).$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Kako za svaki povezan graf važi $\kappa(G) \leq \delta(G)$, naša pretpostavka je da važi $\kappa(G) < \delta(G)$.

Po lemi 3.1. postoji atomarni deo grafa P koji sadrži bar dva čvora. Kako su i graf G i podgraf P povezani grafovi, postoje čvorovi $x, y, z \in V(G)$

takvi da grana $\{x, y\} \in E(P)$ i grana $\{x, z\} \in E(G) \setminus E(P)$. Graf G je granski-tranzitivan pa postoji automorfizam $\phi \in \text{Aut}(G)$ takav da važi

$$\phi(x) = x \quad \text{i} \quad \phi(y) = z,$$

ili

$$\phi(x) = z \quad \text{i} \quad \phi(y) = x.$$

U oba slučaja važi da jedan od čvorova podgrafa $\phi(P)$ ne pripada skupu P , pa je $\phi(P) \neq P$, a takođe važi $\phi(P) \cap P \neq \emptyset$. Po teoremi 3.2. različiti atomarni delovi grafa su disjunktni, a kako je $\phi(P)$ takođe atomarni deo grafa, dolazimo do kontradikcije. ■

Teorema 3.3. Čvorna povezanost Kneserovog grafa $K(n, k)$ za $n > 2k$ jednaka je

$$\kappa = \binom{n-k}{k}.$$

Dokaz. Kneserov graf $K(n, k)$ je regularan graf u kojem svaki čvor ima stepen $\binom{n-k}{k}$, pa je tako $\delta(K(n, k)) = \binom{n-k}{k}$. Za $n > 2k$ graf je povezan.

Posmatrajmo grupu svih permutacija S_n na skupu $[n]$. Čvorove grafa ćemo posmatrati preko odgovarajućih skupova elemenata. Svaka permutacija $\rho \in S_n$ deluje na odgovarajuće skupove tako što permutuje svaki element skupa, odnosno

$$\rho(A) = \{\rho(a) : a \in A\},$$

gde je A podskup skupa $[n]$.

Ako važi $A \cap B = \emptyset$, gde je B podskup skupa $[n]$, tada je i $\rho(A) \cap \rho(B) = \emptyset$, pa permutacija očuvava povezanost čvorova. Dakle, svaka permutacija ρ daje automorfizam grafa.

Posmatrajmo dva disjunktna para k -podskupova $A \cap B = \emptyset$ i $A' \cap B' = \emptyset$. S obzirom na disjunktnost navedenih skupova, njihove unije $A \cup B$ i $A' \cup B'$ imaju tačno $2k$ elemenata, pa postoji permutacija ρ koja preslikava elemente skupa A u elemente skupa A' i elemente skupa B u elemente skupa B' , odnosno, skup A u skup A' i skup B u skup B' . Na ovaj način dobijamo da automorfizam ρ preslikava granu $\{A, B\}$ u granu $\{A', B'\}$. Sledi da je graf $K(n, k)$ granski-tranzitivan.

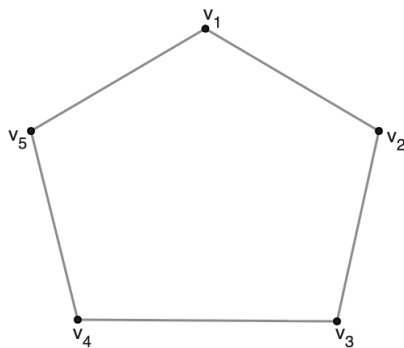
Kako je graf povezan i granski-tranzitivan, iz ranije navedene posledice 3.1. i regularnosti grafa $K(n, k)$ sledi da je $\kappa(G) = \binom{n-k}{k}$, pa dobijamo navedenu jednakost.

■

4 Super-povezanost

Neka je G graf sa čvornom povezanošću κ . Tada, ukoliko važi da brisanjem svakog čvornog separatora sa κ čvorova dobijamo bar jedan izolovani čvor, onda kažemo da je G *super-povezan* i takav čvorni separator nazivamo *trivijalan čvorni separator*.

Primer 4.1. Na slici 4.1 prikazana je kontura, odnosno povezan graf, sa čvornom povezanošću $\kappa = 2$. Brisanjem bilo kog separatora sa 2 čvora dobijamo izolovani čvor, pa imamo trivijalni čvorni separator. Sledi da je navedeni graf super-povezan.



Slika 4.1 Super-povezan graf

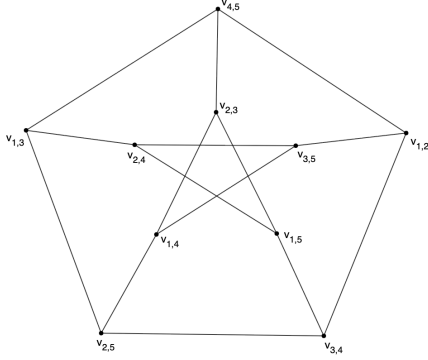
Ako je graf G super-povezan i postoji netrivijalan čvorni separator, tj. čvorni separator nakon čijeg brisanja ne dobijamo izolovani čvor, tada κ_1 označava najmanju kardinalnost netrivijalnog čvornog separatora. Takav čvorni separator nazivamo *super-čvorni separator*.

Super-povezanost grafa, odnosno κ_1 , zovemo i *1-ekstra povezanost*.

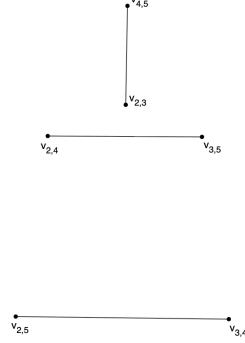
Na osnovu definicije super-čvornog separatora možemo zaključiti da: Ako za graf G postoji netrivijalni čvorni separator, važi da je $\kappa_1(G) > \kappa(G)$.

U prethodnom primeru smo pokazali da je svaki čvorni separator sa dva čvora trivijalni, te je super-povezan. Međutim, kako nema netrivijalni čvorni separator, za njega ne možemo da odredimo vrednost κ_1 .

Primer 4.2. Odredićemo povezanost i super-povezanost Petersonovog grafa, prikazanog na slici 4.2.



Slika 4.2 Petersonov graf



Slika 4.3 Nepovezan graf bez izolovanih čvorova

Da bismo dobili nepovezan graf moramo obrisati najmanje 3 čvora, pa sledi da je čvorna povezanost Petersonovog grafa $\kappa = 3$. Brisanjem bilo kog čvornog separatora stepena 3 dobijamo izolovani čvor, pa sledi da je Petersonov graf super-povezan.

Kako bismo dobili nepovezan graf bez izolovanih čvorova moramo obrisati 4 čvora, na primer čvorove sa elementom 1, tj. čvorove $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$ i $\{1, 5\}$. Brisanjem navedenih čvorova dobijamo graf na slici 4.3. Dakle, za Petersonov graf dobijamo da je $\kappa = 3$, a $\kappa_1 = 4$.

Oslanjajući se na rezultat iz [2], u radu [5] pokazano je da postoji m (gde $m = \frac{\binom{n}{2}}{2}$) particija $F_1, F_2, \dots, F_m$ skupa $[n]$ na dvoelementne klase (ili sa jednom jednoelementnom klasom ako je n neparan) tako da svaki dvoelementni podskup skupa $[n]$ je klasa tačno jedne particije F_i . To znači da ako su skupovi $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$ klase iste particije F_i onda su oni disjunktni, te ako ih posmatramo kao čvorove u $K(n, 2)$, onda su oni susedni. Primetimo da ovako posmatrano, date particije će predstavljati podgrafove grafa $K(n, 2)$ u kojima su svi čvorovi međusobno susedni.

Broj dvoelementnih klasa u svakoj particiji je označen sa p , a broj particija sa m . Određujemo ih na sledeći način:

$$p = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad \text{i} \quad m = \frac{\binom{n}{2}}{p}.$$

Navodimo lemu koja će nam biti potrebna za dokaz teoreme koja sledi.

Lema 4.1. Neka je S čvorni separator grafa $K(n, 2)$ takav da je

$$|S| \leq \binom{n-2}{2}.$$

Tada postoje bar dve particije F_i i F_j , $i \neq j$, takve da svaka od njih ima bar dva svoja elementa u grafu $G - S$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da m ili $m - 1$ particija ima najviše jedan elemenat u grafu $G - S$. S obzirom da svaka particija ima p dvoelementnih klasa, a najviše jedan elemenat je u grafu $G - S$, sledi da u S ostaje najmanje $p - 1$ elemenat. Zbog toga, u oba slučaja imamo da je

$$|S| \geq (m - 1)(p - 1).$$

Ako je n paran broj, tada je

$$|S| \geq (n - 2) \left(\frac{n}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2}(n - 2)^2 > \frac{1}{2}(n - 2)(n - 3).$$

Ako je n neparan broj, tada je

$$|S| \geq (n - 1) \left(\frac{n-1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 3) > \frac{1}{2}(n - 2)(n - 3).$$

S obzirom da je $\frac{1}{2}(n-2)(n-3) = \binom{n-2}{2}$, sledi da u oba slučaja važi $|S| > \binom{n-2}{2}$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $|S| \leq \binom{n-2}{2}$. ■

Na osnovu teoreme 3.3 Kneserovi grafovi $K(n, 2)$ za $n \geq 5$ imaju čvornu povezanost $\kappa(K(n, 2)) = \binom{n-2}{2}$. Stoga možemo razmatrati da li su super-povezani, što je rezultat naredne teoreme.

Teorema 4.1. Za $n \geq 5$ Kneserov graf $K(n, 2)$ je super-povezan.

Dokaz. Pretpostavićemo suprotno, tj. postoji separator $S \subseteq V(K(n, k))$ takav da

$$|S| = \binom{n-2}{2}$$

i graf $G - S$ nema izolovanih čvorova.

Na osnovu leme 4.1 postoje dve različite particije F_1 i F_2 takve da se u $G - S$ nalaze bar po dva čvora iz svake od njih. Neka su to:

$$e_1, e_2 \in F_1 \cap (V(K(n, 2)) \setminus S), \quad f_1, f_2 \in F_2 \cap (V(K(n, 2)) \setminus S)$$

Pošto je $G - S$ nepovezan, sledi da ima bar dve komponente C_1 i C_2 .

Svi čvorovi iz familije F_i , $i \in \{1, 2\}$, koji pripadaju grafu $G - S$, pripadaju istoj komponenti. Zaista, ako bi F_i imala bar jedan čvor u komponenti C_1 , a ostali čvorovi su u C_2 , imali bismo povezan graf.

Iz navedenog razloga, kada posmatramo čvorove iz F_1 i F_2 koji pripadaju grafu $G - S$, imamo samo dva slučaja.

- (1) Čvorovi iz F_1 su u komponenti C_1 , a čvorovi iz F_2 su u komponenti C_2 , odnosno $e_1, e_2 \in C_1$ i $f_1, f_2 \in C_2$. Pošto su e_1 i f_1 u različitim komponentama, znamo da nisu susedni, odnosno, imaju zajednički element. Neka je:

$$e_1 = \{a, b\}, \quad f_1 = \{a, c\}, \quad b \neq c.$$

Svaki drugi čvor iz F_1 je disjunktan sa e_1 , pa ne sme biti disjunktan sa f_1 , jer bismo inače imali granu koja povezuje komponente C_1 i C_2 . Da bi čvor iz F_1 imao zajednički elemenat sa $f_1 = \{a, c\}$, a da je pritom disjunktan sa $e_1 = \{a, b\}$, mora biti oblika $\{c, x\}$, gde $x \notin \{a, b, c\}$.

Analogno, svaki čvor iz F_2 koji nije u skupu S , mora biti oblika $\{b, x\}$, gde $x \notin \{a, b, c\}$.

Pošto imamo još po jedan preostali čvor iz svake familije, e_2 i f_2 , dobijamo:

$$e_2 = \{c, d\}, \quad f_2 = \{b, d\}, \quad d \notin \{a, b, c\}.$$

Samo čvorovi $\{a, d\}$ i $\{b, c\}$ imaju zajednički element sa svakim od čvorova e_1, e_2, f_1 i f_2 , pa možemo zaključiti da bi svi ostali čvorovi imali grane ka obe komponente C_1 i C_2 , iz čega sledi da moraju pripadati skupu S . Dakle, u $G - S$ ima najviše 6 čvorova, pa važi:

$$|S| \geq \binom{n}{2} - 6.$$

Međutim, za $n \geq 5$ važi

$$|S| \geq \binom{n}{2} - 6 = \frac{1}{2}(n^2 - n - 12) = \binom{n-2}{2} + 2n - 9 > \binom{n-2}{2},$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $|S| = \binom{n-2}{2}$.

- (2) Čvorovi iz F_1 i F_2 su u istoj komponenti. Neka su, bez umanjjenja opštosti, $e_1, e_2, f_1, f_2 \in C_1$.

Graf $G - S$ je nepovezan, pa postoji bar jedan čvor u komponenti C_2 . Neka je to čvor g . Čvor g mora imati zajednički element sa svakim od čvorova e_1, e_2, f_1 i f_2 .

Da bi čvor g imao po jedan zajednički element sa čvorovima $e_1 = \{a, b\}$ i $e_2 = \{c, d\}$, bez umanjjenja opštosti, možemo uzeti da je $g = \{a, c\}$. Zatim, da bi imao zajedničke elemente sa f_1 i f_2 , čvor f_1 mora biti oblika $f_1 = \{a, x\}$ a čvor $f_2 = \{c, y\}$, gde su $x \notin \{a, b, c\}, y \notin \{a, c, d\}$ i $x \neq y$.

Po pretpostavci, graf $G - S$ nema izolovanih čvorova, pa čvor $g = \{a, c\}$ ne sme biti izolovan u komponenti C_2 . Zbog toga sledi da postoji čvor $h = \{z_1, z_2\} \in C_2$, a da bi bio disjunktan sa čvorom g , mora da važi $z_1, z_2 \notin \{a, c\}$. Međutim, čvor h takođe mora imati zajednički element sa čvorovima e_1, e_2, f_1 i f_2 . Tada imamo:

$h \cap e_1 \neq \emptyset, a \notin h$, pa sledi $b \in h$,
 $h \cap e_2 \neq \emptyset, c \notin h$, pa sledi $d \in h$,
 $h \cap f_1 \neq \emptyset, a \notin h$, pa sledi $x \in h$,
 $h \cap f_2 \neq \emptyset, c \notin h$, pa sledi $y \in h$.

Dakle, čvor h mora da sadrži elemente b, d, x, y . S obzirom da je skup elemenata čvora h dvočlani skup, sledi da je, bez umanjjenja opštosti, $\{b, d\} = \{x, y\}$. Znamo da važi $x \notin \{a, b, c\}, y \notin \{a, c, d\}$, pa dobijamo da je $x = d, y = b$. Oдавde sledi da je $h = \{b, d\}, f_1 = \{a, d\}$ i $f_2 = \{c, b\}$.

Kako u komponenti imamo dve disjunktne grane $\{e_1, e_2\}$ i $\{f_1, f_2\}$, sledi da postoji još jedan čvor koji ih povezuje. Neka je to čvor t . Pretpostavimo da je čvor t susedan čvoru $e_1 = \{a, b\}$, tada je $t = \{u, v\}, u, v \in [n] \setminus \{a, b\}$. U svakom od slučajeva $u = c, u = d$ ili $u, v \notin \{a, b, c, d\}$ čvor t je disjunktan sa jednim od čvorova g i h , pa postoji grana koja povezuje komponente C_1 i C_2 . Došli smo do kontradikcije, pa sledi da slučaj 2 nije moguć.

■

Ekinči i Gauči su u radu [5], oslanjajući se na teoremu Baranjaija¹⁷ [2] o faktorizaciji kompletnih k -uniformnih hipergrafova, formulisali hipotezu o super-povezanosti Kneserovih grafova $K(n, k)$. Na osnovu pomenute teoreme povlači se paralela sa Kneserovim grafovima, jer su u k -uniformnim hipergrafovima grane k -podskupovi, dok su u Kneserovim grafovima čvorovi k -skupovi. Time se dobija postojanje super-čvornog separatora kardinalnosti $|S|$ i samim tim gornja granica za super-povezanost, tj. $\kappa_1(K(n, k)) \leq |S|$, gde je $|S|$ upravo vrednost navedena u njihovoj hipotezi.

Navodimo pomenutu hipotezu, koja nam daje formulu za računanje super-povezanosti κ_1 grafa $K(n, k)$.

Hipoteza. Neka je $n \geq 2k + 1$. Tada je super-povezanost κ_1 grafa $K(n, k)$

$$\kappa_1 = \begin{cases} 2 \left(\binom{n-k}{k} - 1 \right) & \text{ako } 2k + 1 \leq n < 3k, \\ 2 \left(\binom{n-k}{k} - 1 \right) - \binom{n-2k}{k} & \text{ako } n \geq 3k. \end{cases}$$

Navedenu hipotezu dokazaćemo za $k = 2$.

Teorema 4.2. Neka je $n \geq 5$. Tada je super-povezanost κ_1 grafa $K(n, 2)$

$$\kappa_1 = \begin{cases} 2 \left(\binom{n-2}{2} - 1 \right) & \text{ako } n = 5, \\ 2 \left(\binom{n-2}{2} - 1 \right) - \binom{n-4}{2} & \text{ako } n \geq 6. \end{cases}$$

Dokaz.

Neka $k = 2$ i $n \geq 5$.

Pokazaćemo da je $\kappa_1 = \binom{n}{2} - 6$.

U slučaju kada je $n = 5$ imamo Petersenov graf. Ovaj slučaj je urađen u primeru 6.4 gde je pokazano da je $\kappa_1 = 4$. Zaista, imamo

$$2 \left(\binom{5-2}{2} - 1 \right) = 4 = \binom{5}{2} - 6.$$

¹⁷Zsolt Baranyai – mađarski matematičar

Za $n \geq 6$ imamo

$$\begin{aligned}
 2 \left(\binom{n-2}{2} - 1 \right) - \binom{n-4}{2} &= 2 \left(\frac{(n-2)(n-3)}{2} - 1 \right) - \frac{(n-4)(n-5)}{2} \\
 &= \frac{2(n-2)(n-3) - 4 - (n-4)(n-5)}{2} \\
 &= \frac{2(n^2 - 5n + 6) - 4 - (n^2 - 9n + 20)}{2} \\
 &= \frac{n^2 - n - 12}{2} \\
 &= \frac{n(n-1)}{2} - 6 \\
 &= \binom{n}{2} - 6.
 \end{aligned}$$

Tražimo super-čvorni separator. Posmatrajmo dva susedna čvora $u = \{1, 2\}$ i $v = \{3, 4\}$. Ako obrišemo sve susedne čvorove čvorova u i v , osim njihovih samih, ostaju nam još čvorovi $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ i $\{2, 4\}$. Označimo sa S skup čvorova koje smo obrisali,

$$S = (N(u) \setminus \{v\}) \cup (N(v) \setminus \{u\}).$$

Brisanjem skupa S dobili smo graf koji ima grane

$$\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \quad \text{i} \quad \{u, v\}.$$

Dakle, dobili smo nepovezan graf, bez izolovanih čvorova, pa je skup S super-čvorni separator.

U početnom grafu imali smo $\binom{n}{2}$ čvorova, a nakon brisanja skupa S ostalo je 6 čvorova, pa sledi:

$$|S| = \binom{n}{2} - 6.$$

Dobijamo da je

$$\kappa_1 \leq \binom{n}{2} - 6.$$

Dobili smo gornje ograničenje.

Sada prelazimo na donje ograničenje.

Neka je S bilo koji skup čvorova takav da je $K(n, 2) - S$ nepovezan graf i bez izolovanih čvorova. Označimo sa T skup preostalih čvorova, odnosno $T = V \setminus S$. Dobijeni graf označićemo sa H . S obzirom da je H nepovezan i nema izolovanih čvorova, jasno je da u svakoj komponenti grafa imamo bar jednu granu, odnosno dva susedna čvora.

Neka su u jednoj komponenti, označimo je sa C , čvorovi $u = \{1, 2\}$ i $v = \{3, 4\}$ povezani granom. Svaki čvor van komponente C , odnosno svaki čvor $x \in T \setminus C$ mora imati presek sa čvorovima u i v , jer bi u suprotnom čvorovi bili susedni i pripadali bi komponenti C .

Dakle, imamo skup

$$T \setminus C \subseteq \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}.$$

Sledi da je

$$|T \setminus C| \leq 4.$$

Pretpostavimo sada da u komponenti C ima više od dva čvora. Jedini disjunktni skupovi skupu $\{1, 2\}$ su skupovi bez elemenata 1 i 2. Skupovi disjunktni skupu $\{3, 4\}$ su skupovi bez elemenata 3 i 4, a skupu $\{1, 2\}$ i $\{3, 4\}$ disjunktni su skupovi bez elemenata 1, 2, 3 i 4.

Neka je bez umanjenja opštosti čvor $\{5, 6\}$ u komponenti C . Jasno je da je on susedni čvor čvorovima u i v . Međutim, čvor $\{5, 6\}$ je susedni čvor i čvorovima $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ i $\{2, 4\}$, čime je druga komponenta povezana sa komponentom C , pa nemamo nepovezan graf, što je kontradikcija.

Dakle, u komponenti C imamo samo dva čvora, dok van komponente C imamo maksimalno 4 čvora. Kako graf ne sme imati izolovane čvorove, sledi da imamo dve mogućnosti, odnosno, van komponente C su 2 ili 4 čvora.

Imamo da je

$$|T| = |C| + |T \setminus C| \leq 2 + 4 = 6.$$

Sledi

$$|S| = |V| - |T| \geq \binom{n}{2} - 6,$$

pa je

$$\kappa_1 \geq \binom{n}{2} - 6.$$

Ovim smo pokazali i donje ograničenje, pa sledi

$$\kappa_1 = \binom{n}{2} - 6.$$

Dobijeni izraz važi za sve $n \geq 5$. ■

Odredićemo super-povezanost Kneserovog grafa $K(n, 3)$, gde je $n \geq 7$, čime ćemo potvrditi da je hipoteza tačna za $k = 3$ (dokazano u radu [3]).

Teorema 4.3. Super-povezanost Kneserovog grafa $K(n, 3)$ je

$$\kappa_1 = \begin{cases} 2 \left(\binom{n-3}{3} - 1 \right) & \text{ako } 7 \leq n \leq 8, \\ 2 \left(\binom{n-3}{3} - 1 \right) - \binom{n-6}{3} & \text{ako } n \geq 9. \end{cases}$$

Dokaz. Neka je $S \subseteq V$ super-čvorni separator grafa G . Pretpostavimo da je $n \geq 9$ i $|S| < 2 \left(\binom{n-3}{3} - 1 \right) - \binom{n-6}{3}$. Tada imamo:

$$|G - S| > \binom{n}{3} - 2 \left(\binom{n-3}{3} - 1 \right) + \binom{n-6}{3} = \frac{54n - 204}{6} = 9n - 34.$$

Pretpostavili smo da je super-čvorni separator manje kardinalnosti nego što kaže teorema, pa sledi da graf nastao uklanjanjem skupa S ima više od $9n - 34$ čvora, odnosno, $|G - S| > 9n - 34$. U nastavku ćemo pokazati da ako je graf $G - S$ nepovezan, onda je $|G - S| \leq 9n - 34$. Na taj način ćemo doći do kontradikcije.

S obzirom da je S super-čvorni separator, $G - S$ ima bar dve komponente i svaka komponenta ima bar dva čvora. Ako komponenta C ima tačno dva čvora onda je, kao u dokazu hipoteze za $k = 2$, $|S| = \kappa_1$. Naime, ako komponenta ima tačno dva čvora, tada skup S čine svi susedni čvorovi čvorova u komponenti C , osim ta dva čvora. Od ukupnog broja čvorova potrebno je oduzeti dva čvora iz komponente C , kao i čvorove koji su u drugoj komponenti. U drugoj komponenti ima tačno 4 čvora, jer toliko ima čvorova koji imaju po jedan zajednički elemenat sa svakim čvorom iz komponente C . Sledi da je kardinalnost skupa S jednaka $\binom{n-2}{2} - 6 = \kappa_1$.

Pretpostavimo da svaka komponenta grafa $G - S$ ima bar tri čvora. Posmatrajmo komponente C_1 i C_2 , pri čemu je $C_2 = G - S - C_1$. Komponenta

C_2 ne mora biti povezana, odnosno, može biti unija povezanih komponenti, od kojih svaka ima bar tri čvora.

Čvorovi u C_1 , kojih ima najmanje tri, mogu formirati kompletan graf K_3 ili put P_3 dužine 2. Ukoliko formiraju put, tada dva nesusedna čvora imaju jedan ili dva zajednička elementa.

U nastavku navodimo i dokazujemo tri tvrdnje, koje ćemo koristiti u daljem radu.

Tvrdnja 1. Ako jedna komponenta sadrži kompletan graf K_3 , tada druga komponenta ima najviše 27 čvorova.

Ako u komponenti C_1 imamo kompletan graf K_3 , možemo pretpostaviti da su čvorovi grafa K_3 čvorovi $v_1 = \{1, 2, 3\}$, $v_2 = \{4, 5, 6\}$, $v_3 = \{7, 8, 9\}$. S obzirom da su C_1 i C_2 nepovezane komponente, čvorovi u C_2 imaju bar jedan zajednički elemenat sa svakim čvorom u C_1 . Mogućnosti za izbor po jednog elementa iz tri skupa je $3^3 = 27$. Dakle, u komponenti C_2 ima najviše 27 čvorova.

Tvrdnja 2. Ako u jednoj komponenti imamo put u kojem dva nesusedna čvora imaju jedan zajednički elemenat, tada u drugoj komponenti ima najviše $3n + 3$ čvora. U nastavku ćemo ovako definisan put nazivati *put tipa 1*.

Neka su tri čvora puta u C_1 čvorovi $v_1 = \{1, 2, 3\}$, $v_2 = \{4, 5, 6\}$, $v_3 = \{1, 8, 9\}$.

Na isti način kao u tvrdnji 1 biramo po jedan elemenat iz svakog od tri skupa. Ukoliko je x čvor iz komponente C_2 sa elementima $\{1, a, b\}$, gde je a neki od tri elementa čvora v_2 , tada za elemenat b imamo $n - 2$ mogućnosti, jer isključujemo samo elemente 1 i a . U ovom slučaju broj mogućnosti je najviše $3(n - 2)$.

Međutim, na ovaj način smo dva puta brojali čvorove $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 4, 6\}$ i $\{1, 5, 6\}$, pa ćemo oduzeti 3 čvora, a zatim je potrebno dodati čvorove koji ne sadrže 1, kojih ima tačno $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

Dakle, u ovom slučaju imamo najviše $3(n - 2) - 3 + 12 = 3n + 3$ čvorova u komponenti C_2 .

Tvrdnja 3. Ako u jednoj komponenti imamo put u kojem dva nesusedna čvora imaju dva zajednička elementa, tada u drugoj komponenti ima najviše $6n - 18$ čvorova. U nastavku ćemo ovako definisan put nazivati *put tipa 2*.

Neka su tri čvora puta u C_1 čvorovi $v_1 = \{1, 2, 3\}$, $v_2 = \{4, 5, 6\}$, $v_3 = \{1, 2, 9\}$.

Slično kao u tvrdnji 2, u C_2 imamo najviše $3(n-3)$ čvorova sa elementom 1, a bez elementa 2. Takođe, imamo najviše $3(n-3)$ čvorova sa elementom 2, a bez elementa 1. Najviše tri čvora mogu da sadrže elemente 1 i 2, a takođe i najviše tri čvora ne sadrže ni elemenat 1 ni elemenat 2.

Moramo da oduzmemo čvorove koje smo na ovaj način obuhvatili dva puta, a to su $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{1, 5, 6\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{2, 4, 6\}$ i $\{2, 5, 6\}$.

Dakle, u ovom slučaju u komponenti C_2 imamo najviše $2 \cdot 3(n-3) + 3 + 3 - 6 = 6n - 18$ čvorova.

Sada ćemo pokazati da važi: ako je graf $G - S$ nepovezan, tada mora biti $|C_1 \cup C_2| \leq 9n - 34$.

Imamo sledeće slučajeve:

- (1) U obe komponente C_1 i C_2 postoji graf K_3 , odnosno, K_3 je podgraf komponenti.

Neka su

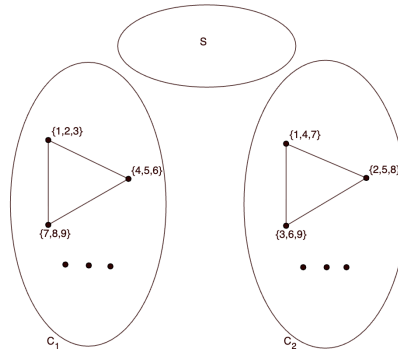
$$\{1, 2, 3\}, \quad \{4, 5, 6\}, \quad \text{i} \quad \{7, 8, 9\}$$

tri čvora u C_1 koja formiraju graf K_3 . Tada je, po tvrdnji 1, broj čvorova u C_2 najviše 27.

Neka su sada

$$\{1, 4, 7\}, \quad \{2, 5, 8\}, \quad \text{i} \quad \{3, 6, 9\}$$

čvorovi u C_2 koji formiraju graf K_3 .



Slika 4.4. Komponente C_1 i C_2 sa podgrafom K_3

Tada u C_1 ima najviše 27 čvorova, pa u $C_1 \cup C_2$ ima najviše 54 čvora. Od 54 čvora moramo oduzeti čvorove koje smo dvostruko prebrojali, a to su:

$$\{1, 5, 9\}, \quad \{1, 6, 8\}, \quad \{2, 4, 9\}, \quad \{2, 6, 7\}, \quad \{3, 4, 8\} \quad \text{i} \quad \{3, 5, 7\}.$$

Čvor $\{2, 3, 7\}$ može biti samo u komponenti C_1 ili u S , a $\{1, 4, 8\}$ samo u C_2 ili S . S obzirom da su navedena dva čvora susedni čvorovi, da bi komponente C_1 i C_2 ostale nepovezane jedan od čvorova mora biti u S . Slično važi i za parove čvorova

$$\{5, 6, 7\} \text{ i } \{1, 4, 9\}, \quad \{2, 3, 4\} \text{ i } \{1, 5, 7\}.$$

Dakle, kada oduzmemo 6 dvostruko prebrojanih čvorova, kao i 3 čvora koja moraju biti u S , dobijamo da u $C_1 \cup C_2$ ima najviše 45 čvorova.

Na početku dokaza smo pretpostavili da je $n \geq 9$, pa je broj $9n - 34$ veći od 45. Sledi da je $G - S$ povezan, odnosno komponente C_1 i C_2 moraju biti povezane, a to je u kontradikciji sa našom pretpostavkom. Dakle, ne mogu i C_1 i C_2 da sadrže K_3 . Na slici 4.4. prikazane su komponente C_1 i C_2 .

- (2) Tačno jedna od komponenti C_1 i C_2 sadrži graf K_3 .

Neka komponenta C_1 sadrži graf K_3 i neka su čvorovi koji formiraju graf K_3 kao u prethodnom slučaju, odnosno čvorovi

$$v_1 = \{1, 2, 3\}, \quad v_2 = \{4, 5, 6\}, \quad \text{i} \quad v_3 = \{7, 8, 9\}.$$

Tada je broj čvorova u C_2 najviše 27.

Ako u C_2 ima tačno 27 čvorova, pokazaćemo da se tada pojavljuje 36 grafova K_3 . U nastavku ćemo za graf K_3 koristiti izraz *trougao*.

Posmatrajmo tri čvora trougla u komponenti C_2 :

$$u_1 = \{a_1, b_1, c_1\}, \quad u_2 = \{a_2, b_2, c_2\} \quad \text{i} \quad u_3 = \{a_3, b_3, c_3\}.$$

Navedeni čvorovi su disjunktni isključivo ako su im sve tri koordinate različite, odnosno, ako su elementi a_1, a_2 i a_3 različiti, kao i elementi b_1, b_2 i b_3 , a zatim i elementi c_1, c_2 i c_3 . To znači da su sva tri elementa

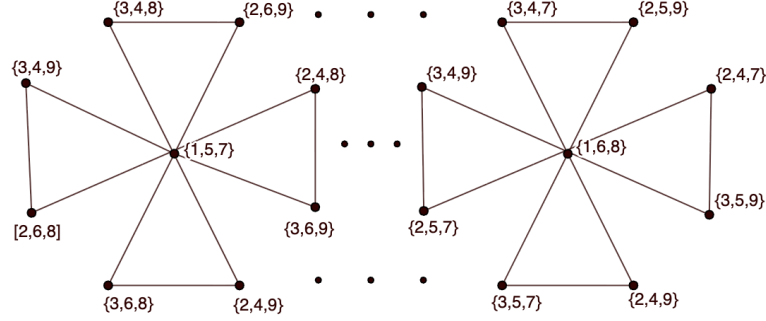
čvora v_1 raspoređena u čvorove u_1, u_2 i u_3 , a takođe i elementi čvorova v_2 i v_3 . Redosled čvorova u trouglu nije bitan, pa možemo bez umanjenja opštosti fiksirati raspodelu elemenata $\{1, 2, 3\}$ tako da $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$. Tada za drugu koordinatu imamo $3!$ načina da rasporedimo elemente $\{4, 5, 6\}$ i nezavisno od toga za treću koordinatu imamo $3!$ načina da rasporedimo elemente $\{7, 8, 9\}$. Na ovaj način dobijamo $3! \cdot 3! = 36$ trouglova.

Posmatrajmo čvor $u = \{1, 5, 7\}$. Da bi čvor u pripadao trouglu K_3 potrebno je izabrati još dva čvora iz komponente C_2 koji su disjunktни sa u , a takođe i međusobno disjunktни. S obzirom da u već sadrži po jedan elemenat iz skupova $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}$ i $\{7, 8, 9\}$, preostala dva čvora moraju sadržati preostale elemente $\{2, 3\}, \{4, 6\}$ i $\{8, 9\}$, po jedan iz svakog skupa. Elementi 2 i 3 se dodeljuju čvorovima na jedinstven način, po jedan u svaki čvor, dok se elementi 4 i 6 mogu rasporediti na 2 načina, a takođe na 2 načina možemo rasporediti i elemente 8 i 9. Na ovaj način dobijamo da čvor $\{1, 5, 7\}$ učestvuje u formiranju tačno $2 \cdot 2 = 4$ trougla. Slika 4.5. prikazuje deo komponente C_2 .

Da bismo uklonili sve trouglove iz komponente C_2 moramo da obrišemo po jedan čvor iz svakog trougla, jer brisanjem čvorova "u sredini" (na slici su to čvorovi 157, 168) istovremeno eliminišemo 4 trougla. Najmanji broj čvorova koje je potrebno obrisati je $\frac{36}{4} = 9$ čvorova.

Dakle, ako komponenta C_2 ne sadrži trougao K_3 , sledi da može imati najviše $27 - 9 = 18$ čvorova.

Ako u C_2 ima tačno 18 čvorova, to implicira da svi uklonjeni čvorovi sadrže isti elemenat, na primer 1. U suprotnom bismo morali ukloniti više od 9 čvorova da bismo bili sigurni da smo uklonili sve trouglove.


 Slika 4.5. Deo komponente C_2

U komponenti C_2 sa 18 čvorova mora da postoji put P_3 , jer bi u suprotnom postojao izolovan čvor ili put P_2 , a to je u kontradikciji sa pretpostavkom da svaka komponenta ima bar tri čvora.

Imamo dva podslučaja.

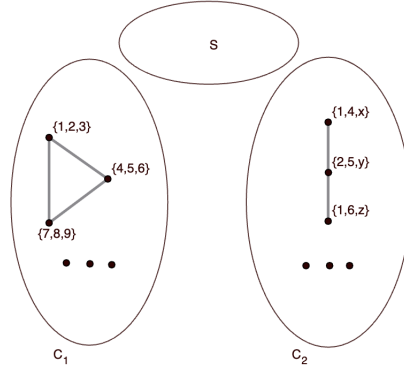
- (a) Ukoliko postoji put P_3 tipa 1, možemo pretpostaviti da krajnji čvorovi puta imaju oznaku 1, a čvor između njih sadrži oznaku 2. Takođe ćemo pretpostaviti da su na putu P_3 tri čvora $\{1, 4, x\}$, $\{2, 5, y\}$ i $\{1, 6, z\}$ gde važi $x \neq y \neq z \neq x$ i $x, y, z \in \{7, 8, 9\}$. Na slici 4.6. prikazane su komponente C_1 i C_2 .

U dokazu tvrdnje 2 smo pokazali da komponenta C_1 ima najviše $3n + 3$ čvorova.

Čvorove $\{1, 4, y\}$, $\{1, 5, 7\}$, $\{1, 5, 8\}$, $\{1, 5, 9\}$, $\{1, 6, y\}$, $\{2, 4, z\}$ i $\{2, 6, x\}$ smo prebrojali dva puta, a znamo da mogu biti samo u jednoj od komponenti C_1 i C_2 , pa sledi

$$|C_1 \cup C_2| \leq 18 + 3n + 3 - 7 = 3n + 14.$$

Kako je $3n + 14 < 9n - 34$, dobili smo da unija komponenti C_1 i C_2 ima manje od $9n - 34$ čvora, pa C_1 i C_2 moraju biti povezane komponente, a to je kontradikcija sa pretpostavkom.



Slika 4.6. C_1 sadrži K_3 , C_2 sadrži P_3 tipa 1

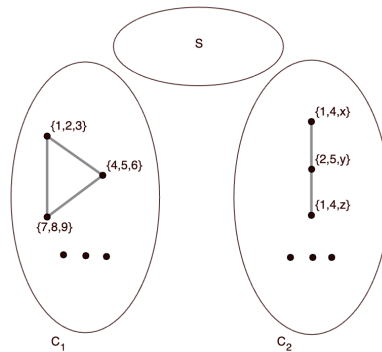
- (b) Ukoliko postoji put P_3 tipa 2, pretpostavićemo da ga čine čvorovi $\{1, 4, x\}$, $\{2, 5, y\}$ i $\{1, 4, z\}$, gde $x \neq y \neq z \neq x$ i $x, y, z \in \{7, 8, 9\}$. Na slici 4.7. prikazane su komponente C_1 i C_2 .

U dokazu tvrdnje 3 pokazali smo da komponenta C_1 ima najviše $6n - 18$ čvorova.

Dva puta smo prebrojali čvorove $\{1, 4, y\}$, $\{1, 5, 7\}$, $\{1, 5, 8\}$, $\{1, 5, 9\}$, $\{1, 6, y\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{2, 4, 8\}$ i $\{2, 4, 9\}$, koji mogu da pripadaju samo jednoj od komponenti C_1 i C_2 , pa sledi

$$|C_1 \cup C_2| \leq 18 + 6n - 18 - 8 = 6n - 8.$$

Kao i u prethodnom slučaju, dobili smo da ima manje od $9n - 34$ čvora, pa dolazimo do kontradikcije.



Slika 4.7. C_1 sadrži K_3 , C_2 sadrži P_3 tipa 2

- (3) Ni jedna od komponenti C_1 i C_2 ne sadrže graf K_3 , odnosno, obe komponente sadrže put P_3 .

U zavisnosti od tipa puteva u C_1 i C_2 imamo četiri slučaja gde se oni suštinski svode na tri.

- (a) U komponentama C_1 i C_2 postoji put P_3 tipa 1.

Neka su čvorovi puta u komponenti C_1 sledeći:

$$v_1 = \{1, 2, 3\}, \quad v_2 = \{4, 5, 6\}, \quad v_3 = \{1, 7, 8\}.$$

Po tvrdnji 2 komponenta C_2 ima najviše $3n + 3$ čvora, od kojih najviše 12 ne sadrži elemenat 1. Ako su svih 12 čvorova u komponenti C_2 (a ne u S) onda oni čine dva ciklusa dužine 6. Ako su neki čvorovi u skupu S , tada preostali čvorovi u C_2 čine skup puteva.

Čvorovi koji sadrže elemenat 1 nisu susedni, oni mogu biti susedni sa čvorovima koji ne sadrže elemenat 1.

Neka u komponenti C_2 put tipa 1 čine čvorovi $\{1, 4, x\}$, $\{2, 5, y\}$ i $\{1, 6, z\}$, takvi da $x \neq y \neq z \neq x$ i $x, z \in \{3, 7, \dots, n\}$, $y \in \{7, 8\}$.

Iz tvrdnje 2 sledi da u C_1 ima najviše $3n + 3$ čvora, pa u $C_1 \cup C_2$ ima najviše $2 \cdot (3n + 3) = 6n + 6$ čvorova.

Moramo oduzeti dvostruko prebrojane čvorove, odnosno čvorove koje smo računali i u C_1 i u C_2 , a to su $\{1, 5, a\} : a \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 4, y\}$ i $\{1, 6, y\}$.

Čvor $\{2, 4, 6\}$ je u C_1 ili u S , a čvor $\{3, 5, 7\}$ u C_2 ili u S .

Ako je $x = 3$, $y = 8$, $z = 7$ dobijamo da čvor $\{3, 5, 7\}$ pripada C_1 . Kako su $\{3, 5, 7\}$ i $\{2, 4, 6\}$ susedni čvorovi, sledi da: ako je $\{3, 5, 7\}$ u C_1 onda $\{2, 4, 6\}$ nije u C_2 , pa dobijena kardinalnost za C_2 mora da se smanji za 1. Isto važi za parove čvorova $\{1, 2, 7\}$ i $\{3, 5, 8\}$, $\{1, 2, 8\}$ i $\{3, 6, 7\}$.

Kada od $6n + 6$ čvorova oduzmemo navedene čvorove, dobijamo da u $C_1 \cup C_2$ ima najviše $5n - 1$ čvorova.

Kako je $5n - 1 < 9n - 34$ sledi da je graf sa $5n - 1$ čvorova povezan, odnosno da je $C_1 \cup C_2$ povezan graf, a to je kontradikcija, pa sledi da nam polazna pretpostavka nije tačna.

- (b) U komponenti C_1 postoji put tipa 1, a u C_2 ne postoji, odnosno, C_2 sadrži samo puteve tipa 2. (Slučaj kada je obrnuta situacija se radi analogno.)

U komponenti C_2 čvorova sa elementima 1 i 4 ima najviše $n - 2$, kao i čvorova sa elementima 1 i 5. Da bismo isključili mogućnost postojanja puta tipa 1, na primer puta koji čine čvorovi $\{3, 6, 9\}$, $\{1, 5, 7\}$, $\{2, 6, 8\}$, moramo isključiti bar 4 čvora koji ne sadrže 1, tj. čvorove $\{3, 6, 9\}$, $\{2, 6, 8\}$, $\{3, 6, 8\}$ i $\{2, 6, 9\}$.

Ne možemo isključiti svih 12 čvorova koji ne sadrže element 1, jer bismo u tom slučaju imali izolovane čvorove. Naime, isključivanjem čvorova $\{2, 4, 8\}$ i $\{3, 4, 8\}$, čvor $\{1, 5, 9\}$ bi bio izolovan.

Dakle, broj čvorova u C_2 je najviše $2 \cdot (n - 2) + 8 = 2n + 4$.

Neka su zajednički elementi nesusednih čvorova puta 1 i 4. Tada imamo put koji čine čvorovi $\{1, 4, x\}$, $\{2, 5, y\}$ i $\{1, 4, z\}$, takvi da $x \neq y \neq z \neq x$, $x, z \in \{3, 6, \dots, n\}$ i $y \in \{7, 8\}$.

Iz tvrdnje 3 sledi da u C_1 ima najviše $6n - 18$ čvorova.

Oduzimamo dvostruko prebrojane čvorove $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 4, y\}$, $\{1, 6, y\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{2, 4, 8\}$ i $\{1, 5, a\}$, $a \in \{2, 3, 4, 6, \dots, n\}$.

Odavde sledi da u C_1 nema više od $6n - 18 - (n - 2) - 8 = 5n - 24$ čvora, pa u $C_1 \cup C_2$ nema više od $5n - 24 + 2n + 4 = 7n - 20$ čvorova.

Kako je $7n - 20 < 9n - 34$ sledi da je graf sa $7n - 28$ čvorova povezan, odnosno da je $C_1 \cup C_2$ povezan graf, pa dolazimo do kontradikcije.

- (c) Komponente C_1 i C_2 sadrže samo puteve tipa 2.

Neka su čvorovi puta u C_1 sledeći:

$$v_1 = \{1, 2, 3\}, \quad v_2 = \{4, 5, 6\}, \quad v_3 = \{1, 2, 7\}.$$

Pretpostavimo da u C_2 postoje čvorovi koji sadrže elemente $\{1, 4\}$ i čvorovi koji sadrže elemente $\{2, 5\}$. U komponenti C_2 ne postoji čvor koji sadrži 1 ili 2, a da ne sadrži 4 ili 5, inače bismo imali put tipa 1 ili K_3 .

Čvorova sa $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$ ima po $n - 4$ za svaki navedeni par elemenata kada je treći elemenat bar 6 i treba još posebno razmotriti preostale čvorove: $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$. Prva dva čvora sadrže i 1 i 2, te ne mogu biti susedni sa čvorovima iz C_2 , jer bi tako činili K_3 ili put tipa 1, te se oni ni ne nalaze u C_2 . Dakle, u C_2 imamo najviše $4(n - 4) + 2 = 4n - 14$ čvorova.

Dalje, primetimo da u C_2 imamo put tipa 2: $\{1, 4, x\}$, $\{2, 5, y\}$, $\{1, 4, z\}$, gde $x \neq y \neq z \neq x$ i $x \in \{3, 6, \dots, n\}$. Zbog toga na osnovu tvrdnje 3 sledi da u C_1 ima najviše $6n - 18$ čvorova. Dobijamo da je $|C_1 \cup C_2| \leq 6n - 18 + 4n - 14 = 10n - 32$.

Međutim, potrebno je oduzeti i čvorove koje smo računali u obe komponente, a to su čvorovi $\{1, 5, a\}$, $a \in \{3, 4, 6, \dots, n\}$ i $\{2, 4, b\}$, $b \in \{3, 5, \dots, n\}$.

Sledi da $|C_1 \cup C_2| \leq 10n - 32 - ((n - 3) + (n - 3)) = 8n - 26$.

Kako je $8n - 26 < 9n - 34$ sledi da je graf sa $8n - 26$ čvorova povezan, odnosno da je $C_1 \cup C_2$ povezan, pa i u ovom slučaju dolazimo do kontradikcije.

Do sad smo pokazali da za $n \geq 9$, sa datom pretpostavkom, $G - S$ mora biti povezan, odakle sledi da je tvrdjenje teoreme tačno.

Posmatrajmo slučaj kada je $n = 7$. Tada je

$$\kappa_1 = 2 \left(\binom{4}{3} - 1 \right) = 6.$$

Sa 7 različitih elemenata možemo napraviti samo put tipa 2. Neka put u C_1 čine čvorovi

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{4, 5, 6\} \quad \text{i} \quad \{1, 2, 7\}.$$

Iz tvrdnje 3 sledi da u C_2 ima najviše $6n - 18 = 24$ čvora.

U nastavku navodimo tačan broj čvorova za svaku kombinaciju elemenata koja odgovara komponenti C_2 .

Čvorova sa elementom 1, bez elemenata 2 ima 9, kao i čvorova sa elementom 2, bez elementa 1. Za obe kombinacije elemenata broj čvorova

se računa slično, te u nastavku prikazujemo samo jedan slučaj, odnosno, način računanja broja čvorova za slučaj kada čvor sadrži elemenat 1, a ne sadrži elemenat 2.

Ako imamo elemenat 1, preostala dva elementa biramo iz skupa $\{3, 4, 5, 6, 7\}$, međutim, kombinacija elemenata $\{1, 3, 7\}$ nema presek sa $\{4, 5, 6\}$ pa ne pripada komponenti C_2 . Dakle, broj čvorova sa elementom 1, bez elementa 2 je $\binom{5}{2} - 1 = 9$.

Čvorova sa elementima 1 i 2 ima 3, kao i čvorova bez elemenata 1 i 2.

Znamo da C_2 ima bar 3 čvora i da sadrži samo put tipa 2. Neka dati put čine čvorovi:

$$\{1, 4, x\}, \quad \{2, 5, y\} \quad \text{i} \quad \{1, 4, z\},$$

takvi da

$$x \neq y \neq z \neq x, \quad \text{i} \quad x, y, z \in \{3, 6, 7\}.$$

U zavisnosti od izbora y imamo 3 puta u C_2 :

$$\begin{aligned} &\{1, 4, 3\} - \{2, 5, 6\} - \{1, 4, 7\} \\ &\{1, 4, 3\} - \{2, 5, 7\} - \{1, 4, 6\} \\ &\{1, 4, 6\} - \{2, 5, 3\} - \{1, 4, 7\}. \end{aligned}$$

Neka je bez umanjenja opštosti prisutan put $\{1, 4, 3\} - \{2, 5, 6\} - \{1, 4, 7\}$.

Iz tvrdnje 3 sledi da u C_1 ima najviše $6n - 18 = 24$ čvora. Dvostruko smo prebrojali 16 čvorova koji imaju presek sa čvorovima puta C_1 , kao i sa čvorovima puta C_2 .

Ti čvorovi su:

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 5, 6\}, \\ &\{1, 5, 7\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{3, 6, 7\}. \end{aligned}$$

Čvor $\{4, 5, 7\}$ može biti samo u komponenti C_1 ili u S . Čvor $\{2, 3, 6\}$ može biti samo u komponenti C_2 ili u S . Navedena dva čvora su susedni

čvorovi, što implicira da jedan od njih mora pripadati S . Isto važi i za parove čvorova:

$$\begin{aligned} \{3, 4, 5\} & \text{ i } \{2, 6, 7\}, \\ \{3, 4, 6\} & \text{ i } \{2, 5, 7\}, \\ \{4, 6, 7\} & \text{ i } \{2, 3, 5\}. \end{aligned}$$

Dakle, od 24 čvora moramo oduzeti ponovljenih 16 čvorova, kao i po jedan čvor iz svakog navedenog para čvorova. Sledi da u $C_1 \cup C_2$ ima najviše $24 + 24 - 16 - 4 = 28$ čvorova.

Kako je $|G| - \kappa_1 = \binom{7}{3} - 6 = 29$ veće od 28 dobijamo da je graf sa 28 čvorova povezan, odnosno da je $C_1 \cup C_2$ povezan, pa ponovo dolazimo do kontradikcije.

Posmatrajmo slučaj kada je $n = 8$. Tada je, po formuli iz tvrđenja, $\kappa_1 = 18$.

Sa 8 elemenata možemo napraviti put tipa 1 ili put tipa 2. Za K_3 je potrebno 9 elemenata.

Imamo 4 mogućnosti:

- (a) U C_1 i u C_2 imamo put tipa 1.

Neka je put u C_1 dat čvorovima

$$\{1, 2, 3\} - \{4, 5, 6\} - \{1, 7, 8\}.$$

Iz tvrdnje 2 sledi da u C_2 ima najviše $3n + 3 = 27$ čvorova.

Čvorova sa elementom 1 ima $\binom{7}{2} - \binom{4}{2} = 15$. U ovom slučaju smo morali oduzeti čvorove koji nemaju nijedan od elemenata 4, 5 i 6. Čvorova bez elementa 1 ima $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

Neka je bez umanjenja opštosti u C_2 put dat čvorovima

$$\{1, 4, 3\} - \{2, 5, 7\} - \{1, 6, 8\}.$$

Iz tvrdnje 2 sledi da u C_1 ima najviše $3n + 3 = 27$ čvorova.

Dvostruko smo prebrojali 13 čvorova, a to su:

$$\begin{aligned} & \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 4, 7\}, \{1, 5, 6\}, \\ & \{1, 5, 7\}, \{1, 5, 8\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 8\}, \{3, 5, 8\}, \{3, 6, 7\}. \end{aligned}$$

Čvor $\{1, 2, 7\}$ može biti samo u komponenti C_1 ili u S , a čvor $\{3, 4, 8\}$ može biti samo u komponenti C_2 ili u S . Navedeni čvorovi su susedni, pa jedan mora biti u S .

Isto važi i za parove čvorova:

$$\begin{aligned} \{2, 4, 6\} & \text{ i } \{3, 5, 7\}, \\ \{4, 5, 8\} & \text{ i } \{2, 6, 7\}, \\ \{4, 7, 8\} & \text{ i } \{1, 3, 6\}. \end{aligned}$$

Dobili smo da u $C_1 \cup C_2$ ima najviše $27 + 27 - 13 - 4 = 37$ čvorova.

Kako je $|G| - \kappa_1 = \binom{8}{3} - 18 = 38$ veće od 37, dobijamo da je graf sa 37 čvorova povezan, odnosno da je $C_1 \cup C_2$ povezan, pa ponovo dolazimo do kontradikcije.

(b) U C_1 imamo put tipa 1, a u C_2 put tipa 2.

Neka put u C_2 čine čvorovi $\{1, 4, x\}, \{2, 5, y\}$ i $\{1, 4, z\}$ takvi da $x \neq y \neq z \neq x$, $x, z \in \{3, 6, 7, 8\}$, $y \in \{7, 8\}$.

Iz tvrdnje 3 sledi da u C_1 ima najviše $6n - 18 = 30$ čvorova.

Dvostruko smo prebrojali 13 čvorova:

$$\begin{aligned} & \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 4, y\}, \{1, 5, 6\}, \\ & \{1, 5, 7\}, \{1, 5, 8\}, \{1, 6, y\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 4, 8\}, \{3, 4, y\}. \end{aligned}$$

Čvor $\{1, 2, 7\}$ može biti samo u komponenti C_1 ili u S , a čvor $\{3, 5, 8\}$ samo u komponenti C_2 ili u S . Navedeni čvorovi su susedni, pa jedan mora biti u S .

Isto važi i za parove čvorova:

$$\begin{aligned} \{1, 2, 8\} & \text{ i } \{3, 5, 7\}, \\ \{3, 4, 5\} & \text{ i } \{2, 6, 7\}, \\ \{4, 5, 7\} & \text{ i } \{2, 6, 8\}, \\ \{4, 5, 8\} & \text{ i } \{3, 6, 7\}, \\ \{2, 4, 5\} & \text{ i } \{3, 6, 8\}, \\ \{4, 7, 8\} & \text{ i } \{1, 3, 6\}. \end{aligned}$$

Dobili smo da u $C_1 \cup C_2$ ima najviše $27 + 30 - 13 - 7 = 37$ čvorova.

Kako je $|G| - \kappa_1 = \binom{8}{3} - 18 = 38$ veće od 37, dobijamo da je graf sa 37 čvorova povezan, odnosno da je $C_1 \cup C_2$ povezan, pa ponovo dolazimo do kontradikcije.

- (c) U C_1 imamo put tipa 2, a u C_2 put tipa 1.

U jednoj komponenti imamo put tipa 1, a u drugoj put tipa 2, pa se slučaj svodi na slučaj pod b).

- (d) U C_1 i u C_2 imamo put tipa 2.

Neka je put u C_1 dat čvorovima

$$\{1, 2, 3\} - \{4, 5, 6\} - \{1, 2, 7\}.$$

Iz tvrdnje 3 sledi da u C_2 ima najviše $6n - 18 = 30$ čvorova.

Čvorova sa elementom 1, bez elementa 2 ima $\binom{6}{2} - \binom{3}{2} = 15 - 3 = 12$. Od svih mogućnosti oduzeli smo 3 mogućnosti izbora čvorova bez elemenata 4, 5 i 6. Takođe i čvorova sa elementom 2, bez elementa 1 ima 12. Čvorova sa elementima 1 i 2 ima 3, a toliko ima i čvorova koji ne sadrže elemente 1 i 2.

Dakle, zaista u komponenti C_2 ima najviše $12 + 12 + 3 + 3 = 30$ čvorova.

Ako u C_2 postoje čvorovi sa elementima $\{1, 4\}$ i elementima $\{2, 5\}$, tada u C_2 ne postoji čvor sa elementima $\{1, 6\}$, kao ni sa elementima $\{2, 6\}$. U suprotnom, u C_2 bismo imali put tipa 1.

Odavde sledi da svi čvorovi koji sadrže elemenat 1 ili 2 moraju biti oblika $\{1, 4, x\}$, $\{1, 5, y\}$, $\{2, 4, z\}$, $\{2, 5, t\}$, jer bi u suprotnom ponovo nastao put tipa 1. Za $n = 8$ svaka od ove četiri familije ima najviše $n - 3 = 5$ mogućnosti za treći elemenat, jer smo isključili mogućnost izbora elementa 6, pa dobijamo najviše 20 čvorova.

Kada dodamo pomenute čvorove sa elementima 1 i 2, kao i čvorove bez elemenata 1 i 2, dobijamo najviše $20 + 3 + 3 = 26$ mogućnosti.

Potrebno je još oduzeti dvostruko prebrojane čvorove, a to su $\{1, 4, 5\}$ i $\{2, 4, 5\}$, pa dobijamo da u komponenti C_2 ima najviše $26 - 2 = 24$ čvora.

Put u C_2 može biti

$$\{1, 4, x\} - \{2, 5, y\} - \{1, 4, z\}, \quad x \neq y \neq z \neq x, \quad x, y, z \in \{3, 6, 7, 8\}.$$

Iz tvrdnje 3 sledi da u C_1 ima najviše $6n - 18 = 30$ čvorova.

Dvostruko smo prebrojali 14 čvorova, koje smo računali u obe komponente, a to su:

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 4, y\}, \{1, 5, 6\}, \\ &\{1, 5, 7\}, \{1, 5, 8\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 4, 8\}. \end{aligned}$$

Čvor $\{3, 4, 5\}$ može biti u komponenti C_1 ili u S , a čvor $\{1, 6, 7\}$ u komponenti C_2 ili u S . Navedeni čvorovi su susedni, pa jedan mora biti u S .

Isto važi i za parove čvorova:

$$\begin{aligned} &\{4, 5, 7\} \quad \text{i} \quad \{1, 6, 8\} \\ &\{4, 5, 8\} \quad \text{i} \quad \{1, 3, 6\} \\ &\{1, 2, 8\} \quad \text{i} \quad \{3, 5, 7\}. \end{aligned}$$

Dobili smo da u $C_1 \cup C_2$ ima najviše $24 + 30 - 14 - 4 = 36$ čvorova.

Kako je $|G| - \kappa_1 = \binom{8}{3} - 18 = 38$ veće od 36, dobijamo da je graf sa 36 čvorova povezan, odnosno da je $C_1 \cup C_2$ povezan, pa ponovo dolazimo do kontradikcije.

Pokazali smo da je za $k = 3$ hipoteza tačna, a da se granica postiže jedino u slučaju kada jedna od nepovezanih komponenti sadrži tačno dva čvora povezana granom.

Kako je gornja granica dobijena konstrukcijom zasnovanom na Baranjaijevoj teoremi primenjenoj na Kneserove grafove, a pokazali smo da manji super-čvorni separator ne postoji, sledi da važi jednakost.

■

Zaključak

U ovom master radu proučavani su Kneserovi grafovi sa posebnim osvrtom na njihovu čvornu povezanost i super-povezanost. Nakon uvođenja osnovnih pojmova teorije grafova predstavljene su osnovne osobine Kneserovih grafova, uključujući njihov broj čvorova i grana, regularnost, dijametar i hromatski broj. Posebna pažnja posvećena je Kneserovoj hipotezi za koju je prikazan Matošekov dokaz.

U nastavku rada razmatrana je čvorna povezanost Kneserovih grafova. Prikazan je Votkinsov rezultat kojim se određuje čvorna povezanost povezanih granski-tranzitivnih grafova. Primenom ovog rezultata određena je čvorna povezanost Kneserovih grafova za $n > 2k$. Nakon toga uvedeni su pojmovi trivijalnog i super-čvornog separatora, kao i pojam super-povezanosti, čime je prirodno prošireno proučavanje povezanosti grafova.

Poseban akcenat stavljen je na super-povezanost Kneserovih grafova. Prikazani rezultati pokazuju da određivanje otpornosti grafa na uklanjanje čvorova ne podrazumeva samo pronalaženje minimalnog broja čvorova čijim uklanjanjem graf postaje nepovezan, već i analizu strukture komponenti koje nakon toga nastaju. U tom smislu, super-povezanost predstavlja prirodno proširenje pojma čvorne povezanosti i pruža potpuniji uvid u strukturne osobine grafa.

Proučavanje Kneserovih grafova pokazuje da se iza njihove jednostavne definicije krije bogata kombinatorna struktura i veliki broj značajnih rezultata. Ova klasa grafova već dugo zauzima važno mesto u teoriji grafova, počevši od Kneserove hipoteze i njenog dokaza, pa sve do savremenih istraživanja povezanosti i super-povezanosti. Rezultati o hromatskom broju, čvornoj povezanosti i super-povezanosti doprinose boljem razumevanju njihove strukture i pokazuju da Kneserovi grafovi predstavljaju prirodan izvor daljih istraživanja u teoriji grafova.

Kao jedan od mogućih pravaca za dalje istraživanje izdvojila bih ispitivanje super-povezanosti generalizovanih Kneserovih grafova $K(n, k, s)$. Pored toga, za Kneserove grafove sa $k > 3$ problem super-povezanosti ostaje otvoren, odnosno, hipoteza o njihovoj super-povezanosti još uvek nije dokazana.

Literatura

- [1] J. A. Anderson, J. L. Lewis, *Discrete Mathematics with Combinatorics*, 2nd ed., Pearson Education (Prentice Hall), 2004.
- [2] Zs. Baranyai, On the Factorization of the Complete Uniform Hypergraph, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, **10** (1975), 91–108.
- [3] Y. Chen, Y. Lin, W. Yan, The Super-Connectivity of the Kneser Graph $KG(n, 3)$, *Australas. J. Combin.*, **82**(2) (2022), 201–211.
- [4] D. Cvetković, *Teorija grafova i njene primene*, 3. dopunjeno izd., Naučna knjiga, Beograd, 1990.
- [5] G. B. Ekinici, J. B. Gauci, The Super-Connectivity of Kneser Graphs, *Discuss. Math. Graph Theory*, **39** (2019), 5–11.
- [6] M. Kneser, Aufgabe 300, *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, **58**(2) (1955), 27.
- [7] L. Lovász, Kneser’s Conjecture, Chromatic Number, and Homotopy, *J. Combin. Theory Ser. B*, **25** (1978), 319–324.
- [8] J. Matoušek, A Combinatorial Proof of Kneser’s Conjecture, *Combinatorica*, **24**(1) (2004), 163–170.
- [9] V. Petrović, *Teorija grafova*, Univerzitet u Novom Sadu, 1998.
- [10] S. Stahl, n -Tuple Colorings and Associated Graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, **20** (1976), 185–203.
- [11] M. Valencia-Pabón, J.-C. Vera, On the Diameter of Kneser Graphs, *Discrete Math.*, **305**(1–3) (2005), 383–385.
- [12] M. E. Watkins, Connectivity of Transitive Graphs, *J. Combin. Theory*, **8** (1970), 23–29.
- [13] E. W. Weisstein, Kneser Graph, *MathWorld—A Wolfram Web Resource*. Dostupno na: <https://mathworld.wolfram.com/KneserGraph.htm> (pristupljeno: 25. 6. 2026.).

- [14] G. M. Ziegler, Aufgabe 360: The Kneser Conjecture, in U. Rehmann and Y. Tschinkel (eds.), *Martin Kneser Collected Works*, Contemporary Mathematicians, Birkhäuser, Cham, 2021, 743–749.

Biografija

Svetlana Mandić je rođena 9.11.1995. godine u Kikindi. Osnovnu školu „Slavko Rodić” završila je kao odličan učenik u Banatskom Velikom Selu. Hemijsku školu u Zrenjaninu završila je 2014. godine sa odličnim uspehom tokom celokupnog školovanja. Iste godine upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, studijski program Primenjena matematika. Diplomirala je 2020. godine i stekla zvanje Matematičar. Nakon završetka osnovnih studija upisala je integrisane akademske studije Master profesor matematike na istom fakultetu. Položivši poslednji ispit u aprilu 2025. godine, stekla je pravo na odbranu ovog master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa:

tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada:

master rad

VR

Autor:

Svetlana Mandić

AU

Mentor:

dr Anna Slivková

MN

Naslov rada:

Povezanost i super-povezanost
Kneserovih grafova

NR

Jezik publikacije:

srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda:

s/en

JI

Zemlja publikovanja:

Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje:

Vojvodina

UGP

Godina:

2026

GO

Izdavač:

autorski reprint

IZ

Mesto i adresa:

Novi Sad, Trg D. Obradovića 3

MA

Fizički opis rada

(broj poglavlja/strana/lit.citata/
tabela/slika/grafika/priloga): (4/63/14/0/20/0/0)

FO

Naučna oblast: matematika

NO

Naučna disciplina: teorija grafova

ND

Predmetne odrednice, ključne reči: Kneserovi grafovi, povezan graf, čvorna povezanost, super-povezanost, čvorni separator, super-čvorni separator, 1-extra povezanost

PO**UDK**

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu.

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Predmet ovog rada su povezanost i super-povezanost Kneserovih grafova. U cilju proučavanja ovih osobina, predstavljene su osnovne karakteristike Kneserovih grafova, uključujući broj čvorova i grana, regularnost, dijametar i hromatski broj. Proučavana je čvorna povezanost Kneserovih grafova, kao i super-povezanost, odnosno minimalna kardinalnost čvornog separatora čijim uklanjanjem graf postaje nepovezan bez izolovanih čvorova. Prikazani su dokazi rezultata o super-povezanosti za $K(n, 2)$ i $K(n, 3)$.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane

NN veća: 23. jun 2026.

DP

Datum odbrane: avgust 2026.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Igor Dolinka, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Petar Đapić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Anna Slivková, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION

Acession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: monograph type
DT
Type of record: printed text
TR
Contents code: master thesis
CC
Author: Svetlana Mandić
AU
Mentor: Dr Anna Slivková
MN
Title: Connectivity and super-connectivity of
Kneser graphs
TI
Language of text: Serbian (Latin)
LT
Language of abstract: s/en
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2026
PY
Publisher: author's reprint
PU
Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 3

PP

Physical description

(chapters/pages/references/tables/
pictures/charts/supplements): (4/63/14/0/20/0/0)**PD**

Scientific field: mathematics

SF

Scientific discipline: graph theory

SD

Subject, key words: Kneser graphs, connected graph, vertex connectivity, super-connectivity, vertex cut, super-vertex cut, 1-extra connectivity

SKW**UC**

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: The subject of this thesis is the connectivity and super-connectivity of Kneser graphs. In order to study these properties, the basic characteristics of Kneser graphs are presented, including the number of vertices and edges, regularity, diameter, and chromatic number. The vertex connectivity of Kneser graphs, as well as their super-connectivity, defined as the minimum cardinality of a vertex cut whose removal disconnects the graph without creating isolated vertices, is studied. Proofs of the super-connectivity results for the graphs $K(n, 2)$ and $K(n, 3)$ are presented.

AB

Accepted on Scientific board on: June 23th 2026

AS

Defended: August 2026

DE

Thesis Defend board:

DB

President: dr Igor Dolinka, full professor, Faculty of Science, Novi Sad
Member: dr Petar Đapić, associate professor, Faculty of Science, Novi Sad
Mentor: dr Anna Slivková, associate professor, Faculty of Science, Novi Sad