



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU



Nikolina Ćurić

Primena Ojler - Lagranžove jednačine na problem
optimalne štednje i potrošnje

-Master rad-

Mentor:

dr Milica Žigić

Novi Sad, 2026.

Zahvalnica

Izrada ovog master rada predstavljala je značajan akademski i lični izazov, čija realizacija ne bi bila moguća bez podrške, razumevanja i pomoći brojnih ljudi kojima dugujem iskrenu zahvalnost.

Posebnu i duboku zahvalnost upućujem svojoj mentorki, dr Milici Žigić, na stručnom vođenju, izuzetnoj posvećenosti i kontinuiranoj podršci tokom svih faza izrade ovog rada. Njeni saveti, konstruktivne sugestije i nesebično deljenje znanja doprineli su kvalitetu istraživanja i jasnijem sagledavanju razmatrane problematike. Strpljenje, profesionalnost i motivacija koju je pokazala tokom saradnje imali su presudan uticaj na uspešan završetak ovog rada. Dodatno, zahvaljujem se i članovima komisije na konstruktivnim kritikama i sugestijama koje su značajno doprinele radu.

Iskrenu zahvalnost dugujem svojoj porodici, koja mi je tokom celokupnog perioda studiranja pružala bezuslovnu podršku, razumevanje i ohrabrenje. Njihova vera u mene, moralna snaga i stalna podrška bili su temelj na kojem se zasnivao svaki moj akademski uspeh i predstavljali su neizostavan oslonac u trenucima izazova i napora.

Takođe, zahvaljujem se svojim prijateljima na iskrenoj podršci, strpljenju i motivaciji koju su mi pružali tokom studija i izrade ovog rada. Njihovo razumevanje, razgovori i ohrabrenje doprineli su očuvanju istrajnosti i pozitivnog duha tokom čitavog procesa.

Na kraju, zahvaljujem se svima koji su na bilo koji način doprineli mom akademskom razvoju i uspešnom završetku master studija.

Sadržaj

Predgovor	8
1 Uvod	10
1.1 Istorija varijacionog računa	10
1.2 Fermaov doprinos	12
1.3 Problem brahistohrone	16
1.4 Problem brahistohrone kroz Zemlju	20
1.5 Uvodni pojmovi	24
2 Osnovne osobine varijacionog računa	31
2.1 Diferencijal funkcionele	32
2.2 Potreban uslov za ekstrem funkcionele	34
2.3 Ojler - Lagranžova jednačina	36
2.4 Specijalni slučajevi Ojler - Lagranžove jednačine	40
2.5 Rešenje problema brahistohrone	42
3 Varijacioni problem sa ograničenjima - Izoperimetrijski problem	45
3.1 Vrste graničnih uslova opšteg karaktera	45
3.2 Osnovne teoreme izoperimetrijskog problema	47
3.3 Rešenje Didoninog problema	49
4 Problem optimalne štednje i potrošnje	53
Zaključak	58
Literatura	59
Biografija	61

Predgovor

“The calculus of variations is nothing else but the art of finding the path that makes a certain quantity extremal.”

– Leonhard Euler

Optimizacija predstavlja značajnu oblast primenjene matematike, jer omogućava identifikovanje najboljih rešenja u okviru zadatih kriterijuma i ograničenja. Problemi optimizacije su prisutni u gotovo svim aspektima inženjerskog, biološkog, medicinskog, ali i ekonomskog odlučivanja, kojim ćemo se detaljnije baviti u ovom radu. Optimizacioni problem u finansijskoj sferi može se primeniti konkretno od alokacije resursa i planiranja investicija do maksimizacije koristi ili profita tokom vremena. U savremenim ekonomskim modelima često se javlja potreba da se odredi optimalna dinamika potrošnje i štednje pojedinca ili preduzeća u vremenskom periodu, uzimajući u obzir dostupni dohodak, kamatne stope, inicijalnu štednju i očekivane promene u prihodima.

U ovom kontekstu, varijacioni račun postaje posebno značajan. Varijacioni račun je podoblast optimizacije koja proučava ekstremume funkcionala — funkcija čije promenljive same predstavljaju funkcije ili putanje sistema. Njegova primena omogućava formalno definisanje i rešavanje problema u kojima odluke zavise od kontinuiranih promena kroz vreme. Istorijski, varijacioni račun je razvijen u XVIII veku kroz radove poznatih matematičara, prvenstveno u fizičkim i mehaničkim problemima. Tokom XIX i XX veka, njegova primena je proširena i na ekonomiju, naročito u okviru teorije optimizacije potrošnje i dinamičkih ekonomskih modela, gde služi za određivanje optimalnih strategija ponašanja subjekata kroz vreme.

Primena varijacionog računa u ekonomiji posebno je značajna u modelima štednje i potrošnje. Problem optimalne dinamike potrošnje može se formulisati kao maksimizacija ukupne koristi kroz vremenski period, uzimajući u obzir ograničenja budžeta i dinamiku štednje. Korišćenjem funkcionala korisnosti i izvođenjem Ojler–Lagranžovih uslova optimalnosti, moguće je dobiti matematički precizne karakterizacije optimalnih

strategija potrošnje i štednje. Ova metoda omogućava ekonomistima da analiziraju kako pojedinci raspoređuju svoje resurse kroz vreme, kako reaguju na promene kamatnih stopa i dohotka i kako ekonomske politike utiču na ponašanje potrošača.

Cilj ovog master rada je da sistematski predstavi primenu varijacionog računa na problem štednje i potrošnje, kombinujući teorijski okvir sa praktičnim primerima. Rad se sastoji od 4 poglavlja.

U prvom poglavlju upoznaćemo se sa istorijom i motivacijom varijacionog računa i definisaćemo osnovne teorijske pojmove funkcionalne analize i diferencijalnih jednačina koje ćemo koristiti u ostatku rada.

Drugo poglavlje odnosiće se na detaljno objašnjenje varijacionog problema, prvobitno će se izvesti *Teorema o potrebnom uslovu za ekstrem funkcionele*, a zatim i leme poput *Osnovne leme varijacionog računa* i *Rejmodnove leme*, kao i *Osnovna teorema varijacionog računa*, koje su ključne za izvođenje Ojler - Lagranžove jednačine. Nakon toga razmatraće se specijalni slučajevi Ojler - Lagranžove jednačine, kao i primena jednog od njih na rešavanje problema brahistohrone.

Treće poglavlje baviće se varijacionim problemom sa ograničenjima - izoperimetrijskim problemom. Najpre će se objasniti pojam i vrste graničnih uslova, a zatim će se uvesti dve ključne teoreme koje predstavljaju uopštenje Ojler - Lagranžove jednačine u izoperimetrijskom slučaju, nakon čega će se razmatrati njihova primena na rešavanje izoperimetrijskog problema.

Četvrto poglavlje pod nazivom Problem optimalne štednje i potrošnje, baviće se analizom i interpretacijom dobijenih rešenja u ekonomskoj perspektivi, konkretno u problemu optimalne dinamike štednje i potrošnje, kao i diskusijom dobijenih rezultata. Poseban akcenat biće stavljen na razumevanje matematičkih principa varijacionog računa i njihove direktne primene u rešavanju realnih ekonomskih problema, stoga radi lakšeg razumevanja, posmatraće se primer sa konkretnim vrednostima koji će nam omogućiti da dođemo do određenih zaključaka.

Nadam se da će ovaj rad doprineti unapređenju teorijskog i praktičnog znanja o primeni varijacionog računa u ekonomiji, posebno u kontekstu optimizacije strategija štednje i potrošnje, svim zainteresovanim za dublje razumevanje dinamike ekonomskog odlučivanja kroz matematički formalizovane modele.

Novi Sad, 2026.

Nikolina Ćurić

Glava 1

Uvod

U predstojećem poglavlju upoznaćemo se sa istorijom i motivacijom varijacionog računa i uvešćemo osnovne pojmove koji su neophodni za dalje razumevanje rada. Poglavlje će se sastojati iz pet delova. Prvi deo odnosiće se na drevnu istoriju varijacionog računa i govoriće o kartaginskoj kraljici Didoni koja je nesvesno koristila varijacioni račun za određivanje granica svoje teritorije, kao i o starogrčkom matematičaru, Heronu koji je prvi razmatrao probleme minimizacije putanje refleksije sa naučnog stanovišta, ali bez dokaza. Drugi deo odnosiće se na doprinos poznatog francuskog matematičara, Pjera de Fermaa, Heronovog sledbenika, koji uspešno razvija optički problem refleksije i formuliše svoj princip tzv. *Fermaov princip* koji se rešava primenom varijacionog računa. Treći deo vezan je za najpoznatiji problem u istoriji varijacionog računa tzv. *problem brahistohrone* koji će se u četvrtom delu uopštiti na *problem brahistohrone kroz Zemlju*. Videćemo da je rešavanje prethodno navedenog problema, dovelo do kreiranja najbrže podzemne železnice u 19. veku. U petom delu, uvešćemo osnovne teoreme i definicije kako bi lakše objasnili pojam varijacionog računa. Literatura koja je korišćena za izradu narednog poglavlja je [1], [2], [3], [5], [6], [7], [9], [10], [11]. Slike koje se nalaze u narednom poglavlju su preuzete iz [1], [5] i [8].

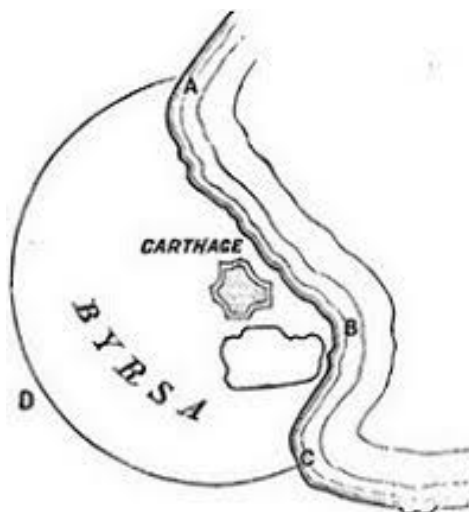
1.1 Istorija varijacionog računa

Pojam varijacionog računa veruje se da datira još iz devetog veka pre nove ere, u periodu osnivanja Kartagine. Mit tvrdi da je kraljica Didona osnovala Kartaginu, drevni grad u današnjem Tunisu, primenjujući izoperimetrijsko¹ svojstvo kruga kako bi

¹grč. *isos* - jednak, *perimetros* - obim

obezbedila najveću površinu zemlje koju bi dobila po dolasku u Severnu Afriku. Evo dva primera Didonine priče koji nisu u Virgilijevom² epu:

“Didona je bila kartaginska kraljica (oko 850. p.n.e.) koja je poticala iz disfunkcionalne porodice. Njen brat Pigmalion ubio je njenog suruga Siharba ili Aharba, pa je Didona, uz pomoć svojih pristalica, pobešla iz Libana na obale Severne Afrike dok je Pigmalion jurio za njom. Po iskrcavanju u Severnoj Africi, prema legendi, sklopila je dogovor sa lokalnim poglavicom da dobije onoliko zemlje koliko bi mogla obuhvatiti volovska koža. Zatim je odabrala vola i isekla njegovu kožu na veoma uske trake, koje je spojila u nit dugu više od dve i po milje. Didona je potom iskoristila tu nit od volovske kože i severnoafričku morsk obalu da odredi granicu svoje teritorije. Jasno je da je Didona težila da obuhvati najveću moguću površinu koristeći usku kožnu nit i more. Grad Kartagina zatim je izgrađen unutar granica definisanih ovom niti i obalom mora. Didona je mesto nazvala *Birsa*, što znači ”volovska koža” (videti sliku 1.1).



Slika 1.1: Birsa - omeđan Didonin grad

“Didona koristeći obalu (koja je aproksimirana pravom linijom) kao deo granice, položila je traku kože tako da obuhvati najveću moguću površinu, za koju je ”znala” da će imati oblik polukruga.”

²videti Vergilije: Eneide, knjiga prva, 367. stih

Ako bi ovi navodi bili zasnovani na činjenicama, onda bi Didona bila prva žena u istoriji čovečanstva koja je razumela matematički metod – mnogo pre prvih matematičara čija imena znamo. Pošto je Kartagina osnovana 814. godine p.n.e., Didona je rođena vekovima pre Talesa iz Mileta (oko 624–548 p.n.e.), Pitagore sa Samosa (oko 570–490 p.n.e.), Euklida iz Aleksandrije (325–265 p.n.e.) i mnogo pre grčkih matematičara koji su se bavili izoperimetrijskim problemima.

Didonin problem danas se uči kao najosnovniji izoperimetrijski problem: za zadati obim, odrediti oblik zatvorene ravanske krive koja obuhvata najveću površinu. Odgovor je krug, ali u varijacionom računu rešenje se dobija analitičkom metodom koju je uveo Leonard Ojler³ i usavršio Žozef-Luj Lagranž⁴ koji ćemo videti u narednom poglavlju.

Heron iz Aleksandrije

Prvom osobom koja je ozbiljno razmatrala probleme minimizacije sa naučnog stanovišta smatra se Heron iz Aleksandrije - starogrčki matematičar koji je živio negde između 150. godine p.n.e. i 300. godine n.e. On je proučavao optiku refleksije i ukazao, bez dokaza, da se reflektovana svetlost kreće na način koji minimizuje vreme njenog putovanja. Ovo je prethodnik Fermaovog principa najkraćeg vremena.

Heron je pokazao da kada se zrak svetlosti reflektuje od ogledala, putanja od objekta do oka posmatrača je kraća nego bilo koja druga moguća reflektovana putanja.

1.2 Fermaov doprinos

Složeniji i opštiji problem minimizacije u optici proučavan je sredinom 17. veka od strane francuskog matematičara Pjera de Fermaa⁵. On je verovao da priroda deluje putem i sredstvima koja su najlakša i najbrža, ali ne uvek najkraćim putem. Kada je reč o zracima svetlosti, Ferma je smatrao da svetlost putuje sporije u gušćem medijumu (iako nam se ovo može činiti intuitivnim), te je uspeo da pronade putanju svetlosti između dve tačke koja minimizira vreme.

Radi lakšeg razumevanja Fermaovog principa, prvenstveno se moramo podsetiti definicije o apsolutnom indeksu prelamanja, kao i definicije o ravnomernom kretanju.

³Leonhard Euler (1707 - 1783) - švajcarski matematičar i fizičar

⁴Joseph-Louis, comte de Lagrange (1736 - 1813) - italijansko - francuski matematičar i astronom

⁵Pierre de Fermat (1601-1655) - francuski matematičar i pravnik

Definicija 1.1. *Apsolutni indeks prelamanja neke sredine predstavlja odnos brzine svetlosti u vakuumu i u toj sredini. Označava se malim slovom n .*

$$n = \frac{c}{v},$$

gde je c brzina svetlosti u vakuumu, a v brzina svetlosti u datoj sredini.

Definicija 1.2. *Telo se kreće ravnomerno ako prelazi jednake puteve u jednakim vremenskim intervalima.*

Kod ravnomernog kretanja, brzinu kretanja tela v računamo kao količnik pređenog puta s i vremena kretanja tela t , to jest,

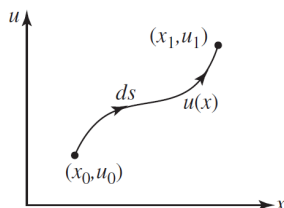
$$v = \frac{s}{t}.$$

Kada smo uveli prethodno navedene definicije, Fermaov princip možemo matematički izraziti kao:

$$T[u(x)] = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{v(x, u)} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{n(x, u)}{c} ds,$$

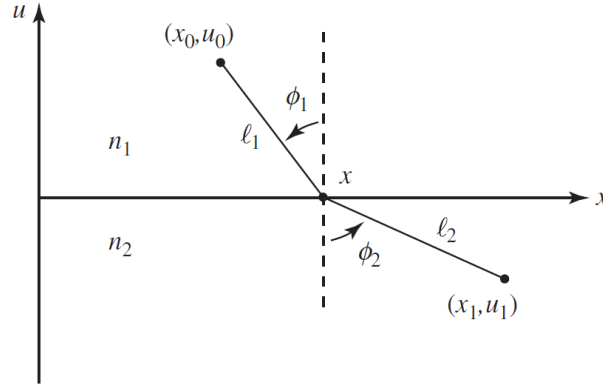
pri čemu je T vreme putovanja svetlosti, $u(x)$ moguća putanja kojom bi svetlost mogla da se kreće kroz medijum između tačaka x_0 i x_1 u trenucima t_0 i t_1 respektivno (videti sliku 1.2). Brzina svetlosti kroz medijum je $v(x)$, brzina svetlosti kroz vakuum je c , $n(x, u)$ je indeks prelamanja svetlosti kroz medijum, a ds je diferencijalni element duž putanje $u(x)$.

Fermaov princip je zapravo jedan od prvih problema optimizacije u fizici, jer sabira (putem integracije) vreme koje je potrebno svetlosti da pređe svaki beskonačno mali element ds putanje $u(x)$, kako bi se dobilo ukupno vreme putovanja $T[u(x)]$.



Slika 1.2: Grafički prikaz putanje kretanja svetlosti

Drugi deo jednakosti vezan je za kretanje svetlosti kroz dva homogena medijuma, pri čemu svaki od njih ima konstantan indeks prelamanja svetlosti i njihova granica se poklapa sa x - osom kao što se vidi na slici (1.3).



Slika 1.3: Grafički prikaz kretanja svetlosti kroz dva homogena medijuma

Svetlost putuje duž prave putanje kroz svaki medijum. To znači da je putanja koja ima najkraće vreme putovanja ista kao ona koja ima najkraću dužinu u homogenom medijumu. U ovom slučaju to su putanje l_1 i l_2 . Primetimo da su l_1 i l_2 hipotenuze pravouglog trougla čije katete određujemo preko koordinatnog sistema xu , pri čemu je

$$l_1 = \sqrt{(x - x_0)^2 + u_0^2},$$

$$l_2 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + u_1^2}.$$

Za fiksne krajnje tačke (x_0, u_0) i (x_1, u_1) želimo da pronađemo vrednost x na kojoj se stvarna putanja svetlosti seče sa granicom između dva medijuma. Sa konstantnim indeksima prelamanja, vreme putovanja izražava se na sledeći način:

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1}{c} \left[n_1 \int_{x_0}^x ds + n_2 \int_x^{x_1} ds \right] \\ &= \frac{1}{c} \left[n_1 l_1 + n_2 l_2 \right] \\ &= \frac{1}{c} \left[n_1 \sqrt{(x - x_0)^2 + u_0^2} + n_2 \sqrt{(x_1 - x)^2 + u_1^2} \right]. \end{aligned}$$

Kako tražimo vrednost x za koje funkcija $T(x)$ dostiže svoju minimalnu vrednost, po-

smatramo prvi izvod funkcije $T(x)$ po promenljivoj x , odnosno želimo da je:

$$\frac{dT}{dx} = 0.$$

Radi jednostavnosti računa uzećemo da je brzina svetlosti kroz vakuum $c = 1 \frac{m}{s}$.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= \frac{1}{2}n_1 \left[(x - x_0)^2 + u_0^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left[2(x - x_0) \right] + \frac{1}{2}n_2 \left[(x_1 - x)^2 + u_1^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left[-2(x_1 - x) \right] \\ &= n_1 \left[(x - x_0)^2 + u_0^2 \right]^{-\frac{1}{2}} (x - x_0) - n_2 \left[(x_1 - x)^2 + u_1^2 \right]^{-\frac{1}{2}} (x_1 - x) \\ &= n_1 \frac{(x - x_0)}{\left[(x - x_0)^2 + u_0^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - n_2 \frac{(x_1 - x)}{\left[(x_1 - x)^2 + u_1^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{n_1}{l_1} (x - x_0) - \frac{n_2}{l_2} (x_1 - x) = 0. \end{aligned} \tag{1.0.1}$$

Kako je

$$x - x_0 = l_1 \sin \phi_1,$$

$$x_1 - x = l_2 \sin \phi_2,$$

kada to uvrstimo u jednačinu (1.0.1) dobijamo:

$$\frac{n_1}{l_1} (l_1 \sin \phi_1) - \frac{n_2}{l_2} (l_2 \sin \phi_2) = 0,$$

odnosno,

$$\frac{n_1}{l_1} (l_1 \sin \phi_1) = \frac{n_2}{l_2} (l_2 \sin \phi_2),$$

što dovodi do *Snelovog*⁶ *zakona*⁷ za dva homogena medijuma

$$n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2.$$

Sada posmatramo opšti slučaj kad indeks prelamanja svetlosti nije konstantan već

⁶Willebrord van Royen Snell (1580-1626) - holandski matematičar i astronom

⁷Snelov zakon govori o tome da je odnos sinusa uglova upada i prelamanja jednak odnosu indeksa prelamanja u dva homogena medijuma.

predstavlja promenljivu $n(x, u)$. Tada je Fermaov princip dat sa:

$$\begin{aligned} T[u(x)] &= \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x_1} n(x, u) ds \\ &= \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x_1} n(x, u) \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x_1} n(x, u) \sqrt{1 + [u'(x)]^2} dx. \end{aligned}$$

Na osnovu jednačine

$$ds^2 = dx^2 + du^2,$$

sledi da je

$$ds = \sqrt{dx^2 + du^2} = \sqrt{dx^2 \left(1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right)} = \sqrt{1 + [u'(x)]^2} dx.$$

Može se zaključiti da treba da se minimizira funkcional $T[u(x)]$, definisan određenim integralom koji deluje na nepoznatu funkciju $u(x)$. To zahteva primenu varijacionog računa. Drugim rečima, direktna primena fizičkog zakona (Fermaovog principa) vodi ka varijacionom obliku. Ukratko, vidimo da je pronalaženje ekstremuma algebarske funkcije problem diferencijalnog računa, dok je pronalaženje ekstremuma određenog integrala problem varijacionog računa.

1.3 Problem brahistohrone

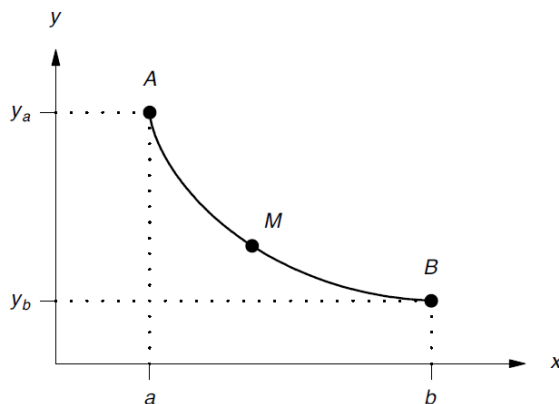
Najpoznatiji problem u istoriji varijacionog računa je problem *brahistohrone*. Problem je formulisao švajcarski matematičar Johan Bernuli⁸ u delu *Acta Eruditorum*⁹ 1696. godine i ostavio njegovo rešavanje kao izazov poznatim matematičarima tog veka. Problem je sledeći:

Date su dve tačke A i B u vertikalnoj ravni. Potrebno je odrediti glatku krivu AMB po kojoj će materijalna tačka M stići iz tačke A u tačku B za najkraće vreme. Kretanje se odvija pod dejstvom Zemljine teže, bez trenja i bez početne brzine.

⁸Johann Bernoulli (1667 - 1748) - švajcarski matematičar

⁹Acta Eruditorum - prvi časopis sa naučnim sadržajem za nemačko govorno područje štampan u periodu od 1682. do 1782. godine

Posmatrajmo česticu M mase m u vertikalnom gravitacionom polju koje ima ubrzanje g . Čestica se kreće duž krive $y = y(x)$ između dve tačke $A = (a, y_a)$ i $B = (b, y_b)$, tako da promenljiva y predstavlja visinu na kojoj se nalazi materijalna tačka (videti sliku 1.4).



Slika 1.4: Kriva kojom se kreće materijalna tačka

Označimo sa T vreme padanja čestice. Pošto se brzina kretanja čestice duž tražene krive y opisuje sa

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + (y')^2} \frac{dx}{dt},$$

vreme kretanja T se može izraziti na sledeći način:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{dt}{ds} ds = \int_0^L \frac{1}{v} ds = \int_a^b \frac{1}{v} \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

pri čemu je L dužina krive, a v je brzina kretanja čestice.

Na osnovu zakona održanja mehaničke energije, koji kaže da je mehanička energija tela jednaka zbiru potencijalne¹⁰ i kinetičke¹¹ energije tog tela, sledi da je ukupna mehanička energija tela koji slobodno pada jednaka u svakom položaju, odnosno ostaje konstantna tokom kretanja tela, tj.

$$E_k + E_p = \text{const.}$$

Odnosno važi da je:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_a.$$

¹⁰ $E_p = mgh$

¹¹ $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

Iz ovoga sledi da je brzina kretanja čestice

$$v = \sqrt{2g(y_a - y)}.$$

Sada želimo pronaći brahistohronu, odnosno tražimo krivu

$$y = y(x) \leq y_a,$$

koja minimizira integral

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y_a - y}} dx. \quad (1.0.2)$$

U rešavanju problema učestvovali su najpoznatiji svetski matematičari i fizičari poput Gotfrid Vilhelm Lajbnica,¹² Isaka Njutna¹³, Johana Bernulija, Jakoba Bernulija¹⁴ i Gijoma de Lopitala¹⁵.

Prvobitno je stiglo Lajbnicovo rešenje nekoliko dana nakon što je problem objavljen. Rešenje je bilo geometrijskog karaktera, izveo je diferencijalnu jednačinu za brahistohronu, ali nije precizirao kako kriva izgleda. Upravo se u prepisci između Bernulija i Lajbnica prvi put javlja termin *brachistochrone* koji je i sam Lajbnić predložio. Reč potiče iz grčkog jezika od dve reči *brachistos* - najkraće i *chronos* - vreme.

Ubrzo nakon Lajbnica rešenje je poslao i Njutn, ali anonimno, međutim, zbog svog prepoznatljivog rukopisa Johan Bernuli je shvatio odmah o kome je reč, pri čemu je izjavio i da je "*Prepoznao lava po svojim kandžama*". Njutново rešenje je bilo objavljeno u časopisu *Philosophical Transactions*¹⁶, ali nije objasnio svoju metodu koju je koristio za rešavanje ovog problema.

Johan Bernuli daje dva rešenja. Prvo rešenje je zasnovano na Fermaovom principu najkraćeg vremena, dok je svoje drugo rešenje opisao mnogo godina kasnije. Ovo drugo rešenje tada nije privuklo mnogo pažnje, ali se danas smatra prvim dokazom dovoljnog

¹²Gottfried Wilhelm Leibniz (1644 - 1716) - nemački matematičar, pravnik, filozof, istoričar, diplomata i pronalazač

¹³Isaac Newton (1643 - 1727) - engleski matematičar, fizičar i astronom

¹⁴Jacob Bernoulli (1655 - 1705) - švajcarski matematičar

¹⁵Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661 - 1704) - francuski matematičar

¹⁶Philosophical Transactions - prirodoslovni časopis koji izdaje kraljevo društvo iz Londona, prvi broj je izašao 1665. godine

uslova u varijacionom računu.

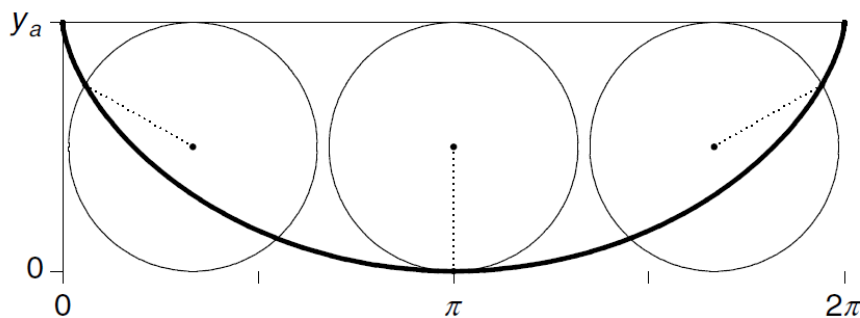
Rešenje Jakoba Bernulija nije bilo toliko jasno i razumljivo kao kod njegovog mlađeg brata Johana, ali je sadržalo ključnu ideju – da varira samo jednu vrednost krive rešenja u datom trenutku. Ova ideja postavila je osnovu za dalji razvoj varijacionog računa. Jakob Bernuli je svoje rešenje nazvao oligohrona (od grč. *oligos* – malo, i *chronos* – vreme).

Konačno primenom, koju ćemo pokazati u narednom poglavlju, varijacionog računa dobija se rešenje problema brahistohrone u parametarskom obliku

$$\begin{aligned}x(\phi) &= a + R(\phi - \sin \phi), \\y(\phi) &= y_a - R(1 - \cos \phi),\end{aligned}$$

pri čemu je R jedinstveni parametar određen iz početne i krajnje tačke. Dobijena kriva naziva se i cikloida. Ova cikloida je kriva koju iscrtava fiksirana tačka na obimu kruga poluprečnika R koji se kotrlja duž donje strane horizontalne prave $y = y_a$ (videti sliku 1.5).

Holandski matematičar Hajgens¹⁷ koji se bavio geometrijskim i mehaničkim svojstvima cikloide pokazao je da je obrnuta cikloida *tautohrona*, gde je tautohrona kriva ili putanja niz koju će čestica pasti pod uticajem gravitacije do određenog mesta u istom vremenskom periodu, bez obzira na početnu poziciju na krivoj.



Slika 1.5: Cikloida za $R = \frac{1}{2}y_a$ i $a = 0$

Problem brahistohrone se može uopštiti na problem brahistohrone kroz Zemlju. Ne-

¹⁷Christiaan Huygens (1629 - 1695) - holandski matematičar, astronom i fizičar

ka su A i B zadate tačke na površini Zemlje i neka je γ kriva u ravni određenoj sa A , B i centrom Zemlje. Traži se tunel, konstruisan po krivoj tako da materijalna tačka koja se kreće pod dejstvom sile Zemljine teže, stigne od tačke A do tačke B za najkraće vreme. Ovaj problem se, takođe, rešava primenom varijacionog računa, a njegovo rešenje je hipocikloida¹⁸.

1.4 Problem brahistohrone kroz Zemlju

Na osnovu prethodno navedenog, posmatrajmo problem transporta kroz Zemlju. Ideja je da se pomoću vozova transport preveze za što kraće vreme kroz tunele duboko iskopane u Zemlji, koji se kreću uz pomoć gravitacije i dodatno su potpomognuti pneumatskim pogonom. Prednosti ovakvih tunela su sledeće:

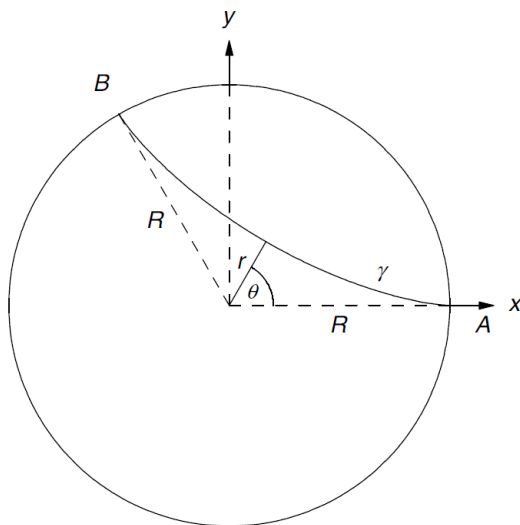
- 1) Veći deo tunela se spušta duboko u čvrstu stensku podlogu, gde su troškovi tuneliranja manji, a sporedna pomeranja tla svedena na minimum; stena je ujednačenije strukture i manja je verovatnoća prodora vode.
- 2) Neprijatnosti za vlasnike nekretnina smanjuju se sa dubinom, pa bi troškovi korišćenja prevoza trebalo da budu niži.
- 3) Dubok tunel ne ometa podzemne železnice, temelje zgrada, komunalne instalacije niti bunare za vodu.

Korišćenjem varijacionog računa izvedena je diferencijalna jednačina za najbrže tunele kroz Zemlju i na osnovu toga napravljena je prva njujorška podzemna železnica 1870. godine ispod Brodveja.

Sada ćemo da razmotrimo problem brahistohrone kroz Zemlju upotrebom matematičkog zapisa. Pretpostavimo da je Zemlja homogena sfera poluprečnika R . Posmatrajmo presek kroz Zemlju u polarnim koordinatama sa centrom u središtu Zemlje (videti sliku 1.6). Neka je m masa čestice koja se kreće od tačke $A = (r_a, \theta_a)$ do tačke $B = (r_b, \theta_b)$ na ili blizu zemljine površine. Želimo da pronađemo krivu u ravni koja minimizira vreme putovanja

$$T = \int_0^T dt = \int_\gamma \frac{dt}{ds} ds = \int_\gamma \frac{1}{v} ds = \int_\gamma \frac{1}{v} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}, \quad (1.0.3)$$

¹⁸Hipocikloida je kriva koju opisuje tačka na obodu malog kruga koji se kotrlja bez proklizavanja s unutrašnje strane većeg kruga.



Slika 1.6: Putanja kroz zemlju

između tačaka A i B , pri čemu je v brzina kretanja čestice. Ako je Zemlja homogena sfera, tada na telo koje se nalazi na rastojanju r od centra Zemlje gravitaciono deluje samo masa unutar sfere poluprečnika r . Ta masa je

$$M(r) = \int_0^r 4r^2 \pi \rho dr = \frac{4}{3} r^3 \pi \rho,$$

pri čemu je ρ gustina mase. Gravitaciona sila na masu m na rastojanju r od centra Zemljine sfere je

$$F(r) = \frac{GM(r)m}{r^2} = \frac{4}{3} r \pi \rho G m,$$

pri čemu je G univerzalna gravitaciona konstanta ($G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$). Na površini Zemlje ($r = R$) vazi:

$$mg = \frac{GMm}{R^2} \implies g = \frac{GM}{R^2}.$$

Pošto je $M = \frac{4}{3} R^3 \pi \rho$, sledi

$$\frac{4}{3} \pi G \rho = \frac{g}{R},$$

zamenom u izraz za silu, dobijamo:

$$F(r) = m \frac{g}{R} r.$$

Integracijom dobijene sile dobija se gravitaciona potencijalna energija unutar Zemlje

koja se može zapisati kao

$$V(r) = \frac{1}{2} \frac{mg}{R} r^2,$$

pri čemu je g gravitaciono ubrzanje na Zemljinoj površini. Na osnovu zakona održanja energije i činjenice da se čestica kreće iz stanja mirovanja, zaključujemo:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{mg}{R} r^2 = \frac{1}{2}mgR,$$

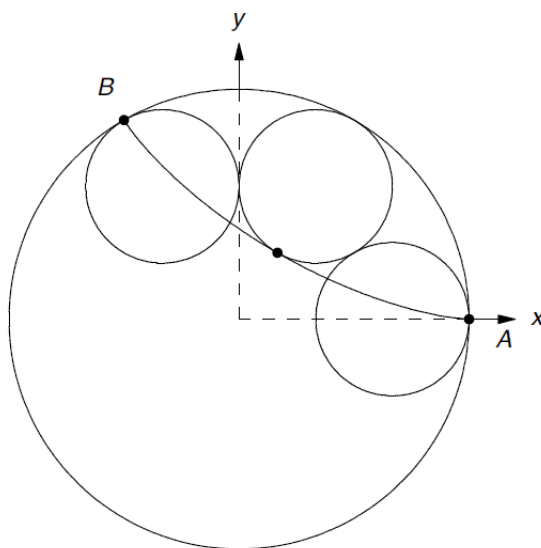
iz čega možemo izraziti brzinu

$$v = \frac{\sqrt{g(R^2 - r^2)}}{\sqrt{R}}.$$

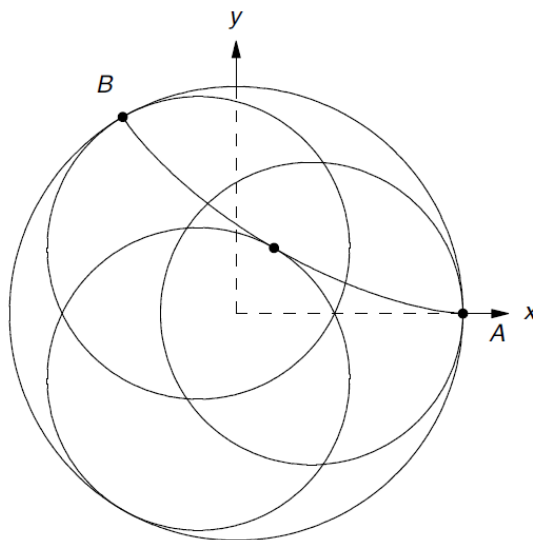
Kada se poslednja jednačina uvrsti u (1.0.3) dobija se ukupno vreme putovanja

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_a}^{\theta_b} \sqrt{\frac{(\frac{dr}{d\theta})^2 + r^2}{R^2 - r^2}} d\theta = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_a}^{\theta_b} \sqrt{\frac{(r')^2 + r^2}{R^2 - r^2}} d\theta.$$

Rešenje problema brahistohrone kroz Zemlju je hipocikloida, kriva koju opisuje tačka na obodu kruga poluprečnika $R - S_{AB}/\pi$ (slika 1.7) ili kruga poluprečnika S_{AB}/π (slika 1.8), dok se taj krug kotrlja unutar kruga poluprečnika R , gde je S_{AB} dužina luka duž površine Zemlje između tačaka A i B .



Slika 1.7: Hipocikloida sa unutrašnjim poluprečnikom $R - S_{AB}/\pi$

Slika 1.8: Hipocikloida sa unutrašnjim poluprečnikom S_{AB}/π

Primenom varijacionog računa dobija se rešenje u parametarskom obliku

$$x(\phi) = (R - b) \cos \phi + b \cos\left(\frac{R - b}{b} \phi\right),$$

$$y(\phi) = (R - b) \sin \phi - b \sin\left(\frac{R - b}{b} \phi\right),$$

pri čemu je R poluprečnik spoljašnjeg kruga, a b poluprečnik unutrašnjeg kruga.

Primer 1.3. *Najbrži voz kompanije Amtrak prelazi put od 400 kilometara između Bostona i Vašingtona, za šest i po sati. Cevni voz koji bi se kretao duž pravolinijske tetive između Bostona i Vašingtona prodro bi 5 kilometara u Zemlju i putovao 42 minuta. Najbrži cevni voz duž hipocikloide, pak, prodro bi 125 kilometara u Zemlju i putovao svega 10,7 minuta.*

Primer 1.4. *Tunel oblika hipocikloide koji bi spojio San Diego i San Francisco imao bi najveću dubinu od oko 260 kilometara ispod Zemljine površine i bio bi dugačak oko 1100 kilometara. Sa druge strane, tunel koji bi kroz Zemlju pravom linijom povezao ove gradove imao bi maksimalnu dubinu od 13 kilometara, a bio bi dugačak 805 kilometara. Materijalna tačka bi, krećući se po hipocikloidi, stigla od San Diega do San Franciska za 12 minuta, a prolazak kroz prav tunel trajao bi 42 minuta.*

Brahistohrona je jedan od mnogih problema u kojima želimo da odredimo funkciju

$y(x)$ koja minimizuje ili maksimizuje integral

$$J[y(x)] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx.$$

U prethodnim primerima videli smo kako se konstruiše funkcionala J data u vidu određenog integrala, što smo u našim slučajevima označavali sa T . Švajcarski matematičar, Leonard Ojler, je prvi razvio sistematsku metodu za rešavanje varijacionog problema. Kako bismo govorili o rešenju varijacionog problema potrebno je prvo objasniti uvodne pojmove.

1.5 Uvodni pojmovi

Definicija 1.5. *Metrički prostor je uređen par (X, d) , gde je X neprazan skup, a $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcionala za koju važi:*

1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X,$
2. $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y,$
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X,$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X.$

Primer 1.6. *Najznačajniji primer metričkog prostora iz oblasti optimizacije je*

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

sa euklidskom metrikom

$$d(x, y) := [(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]^{1/2},$$

gde su $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Može se pokazati da metrika, ako postoji, ne mora biti jedinstvena. U $\mathbb{R}^n$ metrika može da se definiše i sledećim funkcionalama:

$$d_\infty(x, y) = \max_{k=1, \dots, n} \{|x_k - y_k|\}$$

ili

$$d_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Definicija 1.7. Konvergencija niza $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$ ka elementu $x \in X$ definiše se na sledeći način

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0,$$

odnosno ako i samo ako

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \implies d(x_n, x) < \epsilon).$$

Napomena 1.8. Ako postoji granična vrednost u metričkom prostoru, onda je ona jedistvena.

Definicija 1.9. Niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ je Košijev niz u metričkom prostoru (X, d) ako važi

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})(n, m \geq n_0 \implies d(x_n, x_m) < \epsilon).$$

Teorema 1.10. U metričkom prostoru, svaki konvergentan niz je i Košijev niz.

Primer 1.11. Obrnuto ne važi. Postoje metrički prostori u kojima nije svaki Košijev niz konvergentan. Na primer u metričkom prostoru $(\mathbb{Q}, d)$, gde je $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{Q}$ za niz

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{N},$$

važi

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \notin \mathbb{Q}.$$

Teorema 1.12. Metrički prostor je kompletan ako u njemu svaki Košijev niz konvergira.

Definicija 1.13. Struktura X je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$, ako je $(X, +)$ komutativna grupa i ukoliko je definisano preslikavanje $\mathbb{R} \times X \rightarrow X$, tako da za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$ važi:

1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

$$3. (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),$$

$$4. 1 \cdot x = x,$$

pri čemu je slika para $(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X$ označena sa $\alpha x \in X$.

Definicija 1.14. Vektorski prostor X , nad poljem realnih brojeva, je normiran ako postoji preslikavanje, norma, $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ koje ispunjava sledeće uslove:

$$1. \|x\| \geq 0, \forall x \in X \text{ i } \|x\| = 0 \text{ ako i samo ako je } x = 0,$$

$$2. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X,$$

$$3. \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X.$$

$(X, \|\cdot\|)$ nazivamo normiran (vektorski) prostor.

Teorema 1.15. Svaki normiran vektorski prostor je metrički prostor.

Naime, metrika može da se definiše na sledeći način:

$$d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

Kaže se da je ta metrika $d_{\|\cdot\|}$ indukovana normom $\|\cdot\|$. U opštem slučaju, metrički prostor nije normiran; on čak ne mora biti ni vektorski prostor.

Primer 1.16. $\mathbb{R}^n$ je normiran vektorski prostor, gde je euklidska norma data sa

$$\|x\| = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Primer 1.17. Prostor

$$C[a, b] = \{x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ je neprekidna}\},$$

neprekidnih funkcija nad intervalom $[a, b]$ je vektorski prostor sa normom

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

Primer 1.18. Prostor

$$C^1[a, b] = \{x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid x, x' \text{ su neprekidne}\},$$

neprekidno diferencijabilnih funkcija nad intervalom $[a, b]$ je vektorski prostor sa normom

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [a, b]} |x(t)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|.$$

U ovom prostoru norma može da se definiše i sa

$$\|x\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} \{|x(t)|, |x'(t)|\}.$$

Može se zaključiti da je prostor $C^n[a, b]$, n puta neprekidno diferencijabilnih funkcija nad intervalom $[a, b]$ takođe normiran vektorski prostor.

Definicija 1.19. Banahov prostor je kompletan normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$.

Definicija 1.20. U metričkim prostorima (X, d_X) i (Y, d_Y) funkcija $f : X \rightarrow Y$ je neprekidna u tački x_0 ako važi:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon).$$

U metričkom prostoru neprekidnost funkcije f u tački x_0 je ekvivalentna sekvencijalnoj neprekidnosti funkcije f , odnosno činjenici da za svaki niz koji konvergira ka x_0 odgovarajući niz slika konvergira ka $f(x_0)$.

Definicija 1.21. Lopta $L_r(x)$ sa centrom u tački $x \in X$ poluprečnika r , $r > 0$ se definiše na sledeći način:

$$L_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r \iff \|x - y\| < r\}.$$

Lopta može da se definiše u metričkom prostoru, pa i u normiranom.

Definicija 1.22. Tačka $u_* \in U$ je tačka apsolutnog (globalnog) minimuma funkcionele¹⁹ J nad skupom $U \subseteq \mathbb{R}^d$, ako je $J(u_*) \leq J(u)$ za sve $u \in U$. Veličina $J(u_*)$ naziva se minimalna vrednost funkcionele J nad U . Skup svih tačaka minimuma označava se sa U_* . Tačka $u_* \in U$ je tačka lokalnog minimuma funkcionele J nad skupom U , ako postoji $r > 0$, tako da je $J(u_*) \leq J(u)$ za sve $u \in U \cap L_r(u_*)$

¹⁹Funkcija čiji je kodomen $\mathbb{R}$, odnosno $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, naziva se funkcionala

Primer 1.23. *Odrediti minimalnu vrednost funkcije $\sin^2(\frac{\pi}{u})$ i U_* ako je domen: a) $[1, 2]$; b) $[\frac{1}{3}, 1]$; c) $(0, 1]$ i d) $[2, \infty)$.*

Rešenje: Pošto minimalna vrednost date funkcije ne može biti manja od nule, rešavanje zadatka može da počne posmatranjem jednačine $\sin^2(\frac{\pi}{u}) = 0$ nad skupom pozitivnih realnih brojeva, a zatim posmatranjem njene restrikcije nad zadatim domenima. Rešenja jednačine su oblika $\frac{1}{k}$, gde je k prirodan broj. Dakle, važi: a) $U_* = \{1\}$; b) $U_* = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$; c) $U_* = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$; d) $U_* = \emptyset$.

Može se zaključiti da za datu funkciju ekstremni zadatak ne mora da ima rešenje (slučaj d)), a ako ima rešenje, ono može biti jedinstveno (slučaj a)), a moguće je da postoji konačno mnogo (slučaj b)), prebrojivo mnogo (slučaj c)), ili čak neprebrojivo mnogo rešenja.

Definicija 1.24. *Jednačina koja sadrži izvode jedne ili više nepoznatih funkcija po jednoj ili više promenljivih naziva se diferencijalna jednačina.*

U zavisnosti od toga da li nepoznata funkcija zavisi od jedne ili više promenljivih, diferencijalna jednačina može biti:

- a) obična diferencijalna jednačina (ODJ) - nepoznata funkcija zavisi od jedne nezavisne promenljive. Tada se u diferencijalnoj jednačini pojavljuju samo obični izvodi.
- b) parcijalna diferencijalna jednačina (PDJ) - nepoznata funkcija zavisi od više nezavisnih promenljivih. Tada se u diferencijalnoj jednačini pojavljuju parcijalni izvodi.

Definicija 1.25. *Red diferencijalne jednačine je red najvećeg izvoda koji se u njoj pojavljuje.*

Definicija 1.26. *Jednačina u kojoj se javljaju obični izvodi nepoznate funkcije y nezavisno promenljive x naziva se obična diferencijalna jednačina (u daljem tekstu ODJ). Opšti oblik ODJ n - tog reda za funkciju $y = y(x)$ je*

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad (1.0.4)$$

dok je njen normalni oblik

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)),$$

gde su F i f poznate funkcije.

Definicija 1.27. Funkcija $y = \phi(x)$ koja je definisana i n puta diferencijabilna na intervalu $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ je rešenje (integral) ODJ

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

na intervalu $\mathbb{I}$ ako za svako $x \in \mathbb{I}$ važi

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0.$$

Definicija 1.28. Grafik rešenja $y = \phi(x)$, $x \in \mathbb{I}$, ODJ (1.0.4)

$$\{(x, \phi(x)) : x \in \mathbb{I}\}$$

nazivamo integralnom krivom ODJ.

ODJ koje razdvajaju promenljive su oblika

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y).$$

Za $h(y) \neq 0$ zapisujemo

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx,$$

odakle integracijom dobijamo rešenje ove ODJ,

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx.$$

Na kraju treba proveriti da li funkcija h ima nulu: ukoliko je y_0 nula funkcije $h(y)$, tj. ukoliko je

$$h(y_0) = 0,$$

tada je i $y = y_0$ rešenje ODJ, jer su obe strane jednačine jednake nuli.

Definicija 1.29. ODJ prvog reda je linearna ako se može zapisati u obliku

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{1.0.5}$$

gde su p i q proizvoljne funkcije od x definisane na nekom intervalu. Specijalno, line-

arna jednačina je homogena ukoliko je $q(x) = 0$ za svako x na posmatranom intervalu, odnosno homogena linearna ODJ prvog reda je oblika

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0.$$

U suprotnom je nehomogena linearna jednačina, a član $q(x)$ se naziva nehomogeni član.

Jedan od načina rešavanja linearne ODJ je i primena metode varijacije konstanti odnosno korišćenje Duhamelove formule. Način rešavanja je sledeći:

1. Jednačina se zapisuje u obliku

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \quad (1.0.6)$$

2. Prvo se rešava odgovarajuća homogena ODJ

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0.$$

Rešenje je

$$y(x) = Ce^{-\int p(x) dx}.$$

3. Pušta se da integraciona konstanta C zavisi od x :

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x) dx}. \quad (1.0.7)$$

4. Diferenciranjem gornje jednakosti dobija se

$$y'(x) = -p(x)y(x) + C'(x)e^{-\int p(x) dx}.$$

5. Uvrstimo u ODJ (1.0.6) i dobijamo jednačinu za $C(x)$

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x) dx} \implies C(x) = \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + c.$$

6. Vraćanjem ovog rezultata u (1.0.7) dobijamo rešenje

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left(C + \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx \right).$$

Glava 2

Osnovne osobine varijacionog računa

U narednom poglavlju upoznaćemo se sa pojmom varijacije ili diferencijala funkcionele, kao i sa teoremom o potrebnom uslovu za ekstrem funkcionele. Zatim ćemo preći na definisanje slabog i jakog ekstrema, kao i na izvođenje Ojler - Lagranžove jednačine uz pomoć dve značajne leme: *Osnovne leme varijacionog računa* i *Rejmondove leme* i *Osnovne teoreme varijacionog računa*, nakon toga, razmatraćemo specijalne slučajeve Ojler - Lagranžove jednačine, a potom ćemo videti i primenu jednog od slučaja na problem rešavanja brahistohrone. Literatura korišćena u ovom odeljku je [4], [5] i [11], dok je slika 2.1 preuzeta iz [5].

Posmatramo integral

$$J(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t))dt, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B.$$

U ovom poglavlju ćemo prvenstveno pokazati da je $J(x)$ linearno neprekidna funkcionala nad $C^1[a, b]$, s tim da ćemo je zapisati u drugačijem obliku:

$$J(x) = \int_a^b [f(t)x(t) + g(t)x'(t)]dt, \tag{2.0.1}$$

pri čemu su f i g proizvoljne apsolutno integrabilne funkcionele nad $[a, b]$.

Linearnost:

$\forall \alpha, \beta, \quad \forall x, y \in X \subseteq C^1[a, b]$ treba pokazati da je $J(\alpha x + \beta y) = \alpha J(x) + \beta J(y)$.

$$\begin{aligned}
 J(\alpha x + \beta y) &= \int_a^b \left[f(t) \left(\alpha x(t) + \beta y(t) \right) + g(t) \left(\alpha x'(t) + \beta y'(t) \right) \right] dt \\
 &= \int_a^b \left[\alpha \left(f(t)x(t) + g(t)x'(t) \right) + \beta \left(f(t)y(t) + g(t)y'(t) \right) \right] dt \\
 &= \alpha \int_a^b \left[f(t)x(t) + g(t)x'(t) \right] dt + \beta \int_a^b \left[f(t)y(t) + g(t)y'(t) \right] dt \\
 &= \alpha J(x) + \beta J(y).
 \end{aligned}$$

Neprekidnost:

Kako je ovo linearna funkcionala njena neprekidnost je ekvivalentna sa njenom ograničenošću.

Definicija 2.1. Funkcionala J je ograničena na skupu X ako postoji $M > 0$, tako da za sve $x \in X$ važi da je

$$|J(x)| \leq M \cdot \|x\|.$$

Pokažimo ograničenost funkcionala J :

$$\begin{aligned}
 |J(x)| &= \left| \int_a^b \left[f(t)x(t) + g(t)x'(t) \right] dt \right| \leq \int_a^b |f(t)x(t) + g(t)x'(t)| dt \\
 &\leq \int_a^b \left(|f(t)||x(t)| + |g(t)||x'(t)| \right) dt \\
 &\leq \left(\max_{t \in [a,b]} |x(t)| + \max_{t \in [a,b]} |x'(t)| \right) \int_a^b \left(|f(t)| + |g(t)| \right) dt \\
 &= \|x\|_1 \cdot M
 \end{aligned}$$

Napomena 2.2. Znamo na osnovu Vajerštrasove¹ teoreme, linearno neprekidna funkcija nad kompaktnim skupom dostiže svoju ekstremnu vrednost, shodno tome je bilo neophodno pokazati da je funkcionala (2.0.1) linearno neprekidna.

2.1 Diferencijal funkcionala

Neka je dat normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ i funkcionala $J : X \rightarrow \mathbb{R}$. Priraštaj funkcionala J u tački $x \in X$ je dat sa

$$\Delta J_x(h) = J(x+h) - J(x), \tag{2.0.2}$$

¹Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815-1897) - nemački matematičar

gde je $h \in X$ priraštaj "nezavisno promenljive" $x \in X$.

Definicija 2.3. Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor i neka je $J : X \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcionela J je diferencijabilna u tački $x_0 \in X$ ako njen priraštaj ΔJ_{x_0} može da se napiše u obliku

$$\Delta J_{x_0} = \delta_{x_0}(h) + r_{x_0}(h), \quad (2.0.3)$$

gde je $\delta_{x_0}(h)$ linearno neprekidna funkcionala po $h \in X$, a $r_{x_0}(h) = o(\|h\|)$, kada $\|h\| \rightarrow 0$. Linearna funkcionala δ_{x_0} zove se diferencijal ili varijacija funkcionele J .

Lema 2.4. Neka je δJ_{x_0} varijacija funkcionele $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne u tački x_0 . Ako je $\delta J_{x_0}(h) = o(\|h\|)$, kada $\|h\| \rightarrow 0$, onda je $\delta J_{x_0} \equiv 0$. Takođe, varijacija δJ_{x_0} je jedinstveno određena u tački x_0 .

Dokaz. Pretpostavlja se da postoji $h_* \in X$, $h_* \neq 0$, tako da je $\delta J_{x_0}(h_*) = \lambda$, za neko $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jasno da niz $h_n := \frac{1}{n}h_*$ teži ka 0, za $n \in \mathbb{N}$, odnosno $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n\| = 0$. Važi da je

$$\frac{\delta J_{x_0}(h_n)}{\|h_n\|} = \frac{\delta J_{x_0}(\frac{1}{n}h_*)}{\|\frac{1}{n}h_*\|} = \frac{\delta J_{x_0}(h_*)}{\|h_*\|} = \frac{\lambda}{\|h_*\|} \neq 0,$$

odakle sledi da je $\delta J_{x_0}(h) \neq o(\|h\|)$, kada $\|h\| \rightarrow 0$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom leme. Dokaz drugog tvrđenja je direktna posledica upravo dokazanog svojstva varijacije δJ_{x_0} . □

Primer 2.5. Neka je η linearno neprekidna funkcionala nad normiranim prostorom X . Tada je

$$\begin{aligned} \Delta \eta_x(h) &= \eta(x+h) - \eta(x) \\ &= \eta(x) + \eta(h) - \eta(x) \\ &= \eta(h), \end{aligned}$$

za sve $x, h \in X$. Kako iz Definicije 2.3. sledi da je

$$\Delta \eta_x(h) = \delta \eta_x(h) + r_x(h),$$

zaključujemo da je $\delta \eta_x(h) = \eta(h)$, za proizvoljno $x \in X$, $h \in X$, a $r_x(h) \equiv 0$.

Prema tome linearno neprekidna funkcionala nad normiranim prostorom je diferencijabilna u svakoj tački. Ako je normiran prostor konačne dimenzije, onda je, automatski, svaka linearna funkcionala diferencijabilna.

Primer 2.6. Neka je $J : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ data sa $J(x) = \int_a^b f(t, x(t))dt$ gde je f dovoljno glatka² funkcionala po t i x . Dovoljno je, recimo, da ima neprekidne prve izvode po t i x . Koristeći diferencijabilnost funkcionele f po drugoj promenljivoj dobija se

$$\begin{aligned}\Delta J_x(h) &= \int_a^b \left[f(t, (x+h)(t)) - f(t, x(t)) \right] dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{df}{dx}(t, x(t))h(t) + r(t, x(t), h(t)) \right] dt \\ &= \int_a^b \frac{df}{dx}(t, x(t))h(t)dt + \int_a^b r(t, x(t), h(t))dt,\end{aligned}$$

pri čemu važi $r(t, x, h) = o(\|h\|)$, kada $\|h\| \rightarrow 0$. Tada važi

$$\int_a^b r(t, x(t), h(t))dt = o(\|h\|), \text{ kada } \|h\| \rightarrow 0.$$

Naime, važi da je

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \int_a^b r(t, x(t), h(t))dt = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \int_a^b \frac{r(t, x(t), h(t))}{\|h\|} dt = 0.$$

Funkcionala $\int_a^b \frac{df}{dx}(t, x(t))h(t)dt$ je linearna i neprekidna po h . Prema tome J je diferencijabilna u svakoj tački $x \in C[a, b]$ i važi

$$\delta J_x(h) = \int_a^b \frac{df}{dx}(t, x(t))h(t)dt.$$

2.2 Potreban uslov za ekstrem funkcionele

Posmatrajmo normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ i funkcionalu $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Funkcionala J dostiže svoju lokalnu ekstremnu vrednost u tački $x_0 \in X$, ako njen priraštaj $\Delta J_{x_0} = J(x) - J(x_0)$ ne menja znak u okolini tačke x_0 , odnosno ako postoji $\epsilon > 0$ tako da za sve $x \in X$ za koje je $\|x - x_0\| < \epsilon$ važi $\Delta J_{x_0} \geq 0$ ili $\Delta J_{x_0} \leq 0$.

Teorema 2.7. Da bi funkcionala $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ imala lokalni ekstrem u tački x_0 normiranog prostora $(X, \|\cdot\|)$ potrebno je da njen diferencijal u tački x_0 (ako postoji) bude jednak nuli, to jest, potrebno je da je $\delta J_{x_0}(h) = 0$ za sve $h \in X$.

Dokaz. Neka je x_0 tačka lokalnog minimuma funkcionele J i neka je J diferencijabilna u toj tački. Tada postoji $\epsilon > 0$ tako da važi:

²Drugim rečima, pretpostavlja se da f ima neprekidne izvode drugog reda po svakoj promenljivoj.

$$J(x_0 + \tilde{h}) - J(x_0) \geq 0 \text{ za sve } \tilde{h} \text{ za koje je } \|\tilde{h}\| < \epsilon.$$

Diferencijabilna funkcionala može da se napiše u obliku:

$$J(x_0 + \tilde{h}) - J(x_0) = \delta J_{x_0}(\tilde{h}) + r_{x_0}(\tilde{h}),$$

pri čemu je $r_{x_0}(\tilde{h}) = o(\|\tilde{h}\|)$, kada $\|\tilde{h}\| \rightarrow 0$.

Neka je $h \in X$ proizvoljno. Tada postoji $a > 0$, tako da je $\tilde{h} = ah \in X$ takvo da je $\|\tilde{h}\| < \epsilon$. Pošto je x_0 tačka lokalnog minimuma i $a > 0$, sledi da je:

$$\frac{J(x_0 + ah) - J(x_0)}{a\|h\|} \geq 0.$$

Iz uslova diferencijabilnosti funkcionala J i linearnosti varijacije dobija se da je:

$$\frac{\delta J_{x_0}(ah) + r_{x_0}(ah)}{a\|h\|} = \frac{1}{\|h\|} \delta J_{x_0}(h) + \frac{r_{x_0}(ah)}{\|ah\|} \geq 0.$$

Kada $a \rightarrow 0^+$, tada i $\|ah\| \rightarrow 0$, te se dobija da je:

$$0 \leq \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\|h\|} \delta J_{x_0}(h) + \frac{r_{x_0}(ah)}{\|ah\|} \right) = \frac{1}{\|h\|} \delta J_{x_0}(h),$$

to jest, $\delta J_{x_0}(h) \geq 0$. Slično za vektor $\tilde{h} = -ah \in X$, $a > 0$, važi da je $\|\tilde{h}\| < \epsilon$, pa se dobija da je sada:

$$\frac{J(x_0 - ah) - J(x_0)}{-a\|h\|} \leq 0.$$

Opet, iz uslova diferencijabilnosti funkcionala J i linearnosti varijacije δJ_{x_0} sledi:

$$\frac{\delta J_{x_0}(-ah) + r_{x_0}(-ah)}{-a\|h\|} = \frac{1}{\|h\|} \delta J_{x_0}(h) - \frac{r_{x_0}(-ah)}{\|-ah\|} \leq 0.$$

Kada $a \rightarrow 0^+$ važi da je:

$$0 \geq \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\|h\|} \delta J_{x_0}(h) - \frac{r_{x_0}(-ah)}{\|-ah\|} \right) = \frac{1}{\|h\|} \delta J_{x_0}(h),$$

to jest, $\delta J_{x_0}(h) \leq 0$. Dakle, $\delta J_{x_0}(h) = 0$. □

³Alternativni dokaz se zasniva na sledećoj lemi:

Lema. Ako je funkcionala ν diferencijabilna u $x_0 \in X$ onda je, za fiksirano $h \in X$, funkcija $f(t) = \nu(x_0 + th)$, kao funkcija po $t \in \mathbb{R}$ diferencijabilna u $t = 0$, a njen izvod je $f'(0) = \delta \nu_{x_0}(h)$.

2.3 Ojler - Lagranžova jednačina

Ojler - Lagranžova jednačina je u jakoj korelaciji sa potrebnim uslovom za slab ekstrem funkcionele

$$J(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt.$$

Prvobitno je neophodno objasniti razliku između jakog i slabog ekstrema. U nastavku ćemo pretpostaviti da je podintegralna funkcija dovoljno glatka.

Funkcionela $J(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt$ je definisana nad prostorom neprekidno diferencijabilnih funkcija, $C^1[a, b]$. Da bi se odredio lokalni ekstrem funkcionele J potrebno je precizirati u kojoj normi se definiše okolina nekog elementa $x_0 \in C^1[a, b]$. Lako se uočava da važi:

$$\{x \in C^1[a, b] \mid \|x - x_0\|_1 < \epsilon\} \subset \{x \in C^1[a, b] \mid \|x - x_0\| < \epsilon\}.$$

Pojmovi jakog i slabog ekstrema su zasnovani na ovoj primedbi.

Ako za $x_0 \in C^1[a, b]$ važi $J(x_0) \leq J(x)$ za sve $x \in C^1[a, b]$ za koje je $\|x - x_0\|_1 < \epsilon$, onda J ima u tački x_0 *slab lokalni ekstrem*, a ako je $J(x_0) \geq J(x)$ za sve $x \in C^1[a, b]$ za koje je $\|x - x_0\| < \epsilon$ onda je reč o *jakom lokalnom ekstremu*. Naravno, jaki ekstremi su uvek i ekstremi u slabom smislu, a obrnuto ne mora biti tačno. Oдавde sledi da je potreban uslov za slab ekstrem takođe i potreban uslov za jak ekstrem.

U slučaju određivanja globalnog ekstrema, jak ekstrem se posmatra u prostoru $(C[a, b], \|\cdot\|)$, a slab ekstrem u prostoru $(C^1[a, b], \|\cdot\|_1)$.

Posmatramo problem određivanja slabog ekstrema funkcionele

$$J(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt,$$

pri čemu su unapred zadati granični uslovi $x(a) = A$, $x(b) = B$.

Da bi priraštaj $x(t) + h(t)$, $t \in [a, b]$ nezavisno promenljive $x(t)$ zadovoljavao prethodno navedene granične uslove, pretpostavljamo da važi $h(a) = h(b) = 0$.

Na osnovu Teoreme 2.7. imamo da je potreban uslov za ekstrem funkcionele dat sa $\delta J = 0$, te preostaje da se odredi varijacija funkcionele J .

Kako je

$$\Delta J_x(h) = \int_a^b [f(t, (x+h)(t), (x+h)'(t)) - f(t, x(t), x'(t))] dt,$$

na osnovu diferencijabilnosti podintegralne funkcije sledi:

$$f(t, x + h, x' + h') - f(t, x, x') = \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial x'} h' \right) + r(t, x, x', h, h'),$$

pri čemu važi $r(t, x, x', h, h') \rightarrow 0$, kada $\|h\|_1 \rightarrow 0$. Odavde sledi da je

$$\delta J_x(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial x'} h' \right) dt.$$

Shodno tome, na osnovu potrebnog uslova za ekstrem funkcionele, sledi da je

$$\delta J_x(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial x'} h' \right) dt = 0. \quad (2.0.4)$$

Funkcije x za koje važi (2.0.4) su rešenja diferencijalne jednačine drugog reda, što je posledica narednih razmatranja.

Lema 2.8. (*Osnovna lema varijacionog računa*)

a) Neka je data funkcija $f \in C[a, b]$ i neka važi $\int_a^b f(t)h(t)dt = 0$, za sve $h \in C^1[a, b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. Dokazati da je tada $f \equiv 0$.

b) Neka je data funkcija $g \in C[a, b]$ i neka važi $\int_a^b g(t)h'(t)dt = 0$, za sve $h \in C^1[a, b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. Dokazati da je tada $g \equiv \text{const}$.

Dokaz. a) Pretpostavimo da postoji $t_* \in (a, b)$ tako da je $f(t_*) \neq 0$. Neka je, na primer funkcija f pozitivna na tom intervalu, to jest, $f(t_*) > 0$. Kako je funkcija f neprekidna funkcija, sledi da postoji interval $(c, d) \subset (a, b)$ koji sadrži tačku t_* , tako da važi $f(t) > 0$ za sve $t \in (c, d)$. Neka je h proizvoljna funkcija definisana na sledeći način:

$$h(t) = \begin{cases} (c-t)^2(d-t)^2, & \text{za } t \in (c, d) \\ 0, & \text{za } t \in [a, b] \setminus (c, d). \end{cases}$$

Može se lako zaključiti da je funkcija h neprekidno diferencijabilna funkcija, $h \in C^1[a, b]$, i da važi:

$$h'(t) = \begin{cases} -2(c-t)(d-t)^2 - 2(c-t)^2(d-t), & \text{za } t \in (c, d) \\ 0, & \text{za } t \in [a, b] \setminus (c, d). \end{cases}$$

Kako je $h(t) > 0$ za $t \in (c, d)$, lako se zaključuje da je $\int_a^b f(t)h(t)dt > 0$, što je u

kontradikciji sa uslovom zadatka.

b) Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti integrala, kako je g neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$, sledi da postoji $c \in \mathbb{R}$, tako da važi:

$$\int_a^b (g(t) - c) dt = 0.$$

Preostaje da se pokaže da za proizvoljnu neprekidnu funkciju $u(t)$, $t \in [a, b]$ važi:

$$\int_a^b (g(t) - c) u(t) dt = 0.$$

Neka je $u \in C[a, b]$. Tada ako je $\alpha = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt$, za funkciju $\lambda(t) = u(t) - \alpha$, $t \in [a, b]$, važi $\int_a^b \lambda(t) dt = 0$.

Vidi se da funkcija $h(t) = \int_a^t \lambda(\tau) d\tau$, $t \in [a, b]$ ispunjava uslov $h \in C^1[a, b]$ ($h'(t) = \lambda(t)$, $t \in [a, b]$). Dakle,

$$\begin{aligned} \int_a^b (g(t) - c) u(t) dt &= \int_a^b (g(t) - c) (\lambda(t) + \alpha) dt \\ &= \int_a^b g(t) \lambda(t) dt - c \int_a^b \lambda(t) dt + \alpha \int_a^b (g(t) - c) dt = 0, \end{aligned}$$

za proizvoljnu funkciju $u \in C[a, b]$. Za funkciju $u(t) = g(t) - c$, $t \in [a, b]$ dobija se:

$$\int_a^b (g(t) - c)^2 dt = 0,$$

iz čega sledi da je $g(t) = c$, $t \in [a, b]$. □

Lema 2.9. (*Rejmondova⁴ lema*) Neka su date funkcije $f, g \in C[a, b]$ i neka važi

$$\int_a^b (f(t)h(t) + g(t)h'(t)) dt = 0, \tag{2.0.5}$$

za sve $h \in C^1[a, b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. Tada je g diferencijabilna i važi $f(t) = g'(t)$, za sve $t \in [a, b]$.

Dokaz. Neka je

$$F(t) = \int_a^t f(\xi) d\xi, \quad t \in [a, b].$$

⁴Paul du Bois - Reymond (1831 - 1889) - namački matemati car

Parcijalnom integracijom dobija se:

$$\int_a^b f(t)h(t)dt = h(t)F(t)\Big|_a^b - \int_a^b F(t)h'(t)dt = - \int_a^b F(t)h'(t)dt.$$

Prema tome

$$\int_a^b [f(t)h(t) + g(t)h'(t)]dt = \int_a^b [g(t) - F(t)]h'(t)dt = 0.$$

Na osnovu Leme 2.8 pod b) dobija se $g(t) - F(t) = c$, za neko $c \in \mathbb{R}$ i sve $t \in [a, b]$. S obzirom da je $g'(t) - F'(t) = 0$, za $t \in [a, b]$, sledi $g \in C^1[a, b]$ i $g'(t) = F'(t) = f(t)$, $t \in [a, b]$. □

Na osnovu Rejmondove leme iz (2.0.4) sledi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x'} = 0. \quad (2.0.6)$$

Jednačina (2.0.6) naziva se *Ojler - Lagranžova jednačina*. Konačno, može se zaključiti da je potreban uslov koji funkcija x_0 mora da ispunjava da bi bila ekstrem funkcionele J , da x_0 bude rešenje Ojler - Lagranžove jednačine.

Teorema 2.10. (*Osnovna teorema varijacionog računa*) Neka je data funkcionala $J(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))dt$, pri čemu $x \in C^1[a, b]$ i važi $x(a) = A$, $x(b) = B$. Ako funkcionala J ima ekstrem u $x_0 \in C^1[a, b]$, onda je x_0 rešenje Ojler - Lagranžove jednačine

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x'} f(t, x(t), x'(t)) \right) = 0,$$

sa graničnim uslovima $x(a) = A$, $x(b) = B$.

Dokaz. Na osnovu prethodnih razmatranja, sledi direktan dokaz. Ako je x_0 ekstrem funkcionele J onda, na osnovu Teoreme 2.7, važi $\delta J_{x_0} \equiv 0$, odnosno x_0 zadovoljava jednakost (2.0.4). Na osnovu Rejmondove leme 2.9. da bi važilo (2.0.4), x_0 mora biti rešenje diferencijalne jednačine

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) = \frac{\partial f}{\partial x},$$

što je tačno Ojler - Lagranžova jednačina (2.0.6). □

2.4 Specijalni slučajevi Ojler - Lagranžove jednačine

Posmatrajmo Ojler-Lagranžovu jednačinu

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) = 0$$

i krive koje je zadovoljavaju, takozvane *ekstremale*. Da bismo napisali Ojler - Lagranžovu jednačinu u eksplicitnom obliku, moramo uzeti u obzir da je $f_{x'}$ funkcija od tri promenljive t , x i x' , pri čemu su x i x' funkcije koje zavise od promenljive t . Stoga imamo,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) = \frac{\partial f_{x'}}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f_{x'}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_{x'}}{\partial x'} \frac{dx'}{dx},$$

pa se Ojler - Lagranžova jednačina može zapisati u sledećem obliku

$$f_x - f_{x't} - f_{x'x}x' - f_{x'x'}x'' = 0. \quad (2.0.7)$$

Može se zaključiti da je (2.0.7) ODJ drugog reda

$$x'' = \frac{1}{f_{x'x'}}(f_x - f_{x't} - f_{x'x}x').$$

Ukoliko se $f_{x'x'}$ nikad ne anulira problem je regularan, u suprotnom imamo specijalne slučajeve:

1. Slučaj kada nema eksplicitne zavisnosti od x'

U ovom slučaju je

$$J(x) = \int_a^b f(t, x),$$

tada Ojler - Lagranžova jednačina nije diferencijalna jednačina, pa egzistencija ekstremale zavisi od graničnih uslova.

2. Slučaj kada nema eksplicitne zavisnosti od x

Posmatrajmo podintegralnu funkciju koja ne zavisi od promenljive x ,

$$J(x) = \int_a^b f(t, x') dx.$$

Ojler - Lagranžova jednačina se svodi na

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) = 0,$$

tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = c.$$

3. Slučaj kada nema eksplicitne zavisnosti od t

Posmatrajmo podintegralnu funkciju koja ne zavisi od promenljive t ,

$$J(x) = \int_a^b f(x, x') dx.$$

U ovom slučaju Ojler - Lagranžova jednačina se svodi na

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = f_x - f_{x'x} x' - f_{x'x'} x'' = 0.$$

Sada posmatrajmo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (f - x' f_{x'}) &= f_x x' + f_{x'x} x'' - x' f_{x'x} x' - x' f_{x'x'} x'' - x'' f_{x'} \\ &= f_x x' - x' f_{x'x} x' - x' f_{x'x'} x'' \\ &= (f_x - f_{x'x} x' - f_{x'x'} x'') x'. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\frac{d}{dt} (f - x' f_{x'}) = 0, \tag{2.0.8}$$

ekvivalentno Ojler - Lagranžovoj jednačini, sve dok je $x' \neq 0$. Jednačina (2.0.8) implicira da je prvi izvod Ojler - Lagranžove jednačine

$$f - x' f_{x'} = \alpha. \tag{2.0.9}$$

Ovu jednačinu ćemo iskoristiti prilikom rešavanja problema brahistohrone.

2.5 Rešenje problema brahistohrone

Problem brahistohrone formulisan je u prvom poglavlju. Dakle, na osnovu prethodno navedenog, želimo da minimiziramo problem

$$T = J(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y_a - y}} dx. \quad (2.0.10)$$

Radi lakšeg rešavanja, neka je

$$z \equiv y_a - y,$$

stoga, jednačina (2.0.10) postaje

$$J(z) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (z')^2}{z}} dx. \quad (2.0.11)$$

Pošto u ovom integralu ne postoji eksplicitna zavisnost od t , integraleći Ojler - Lagranžovu jednačinu dobijamo:

$$f - z' \frac{\partial f}{\partial z'} = \alpha,$$

ili

$$\frac{\sqrt{1 + (z')^2}}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{(z')^2}{\sqrt{1 + (z')^2}} = \alpha.$$

Poslednja jednačina se svodi na rešavanje

$$\frac{1}{\sqrt{z[1 + (z')^2]}} = \alpha.$$

Rešavanjem po z' dobijamo da je

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 z}{\alpha^2 z}}.$$

Koristeći metodu razdvajanja promenljivih, dobijamo

$$dx = \sqrt{\frac{\alpha^2 z}{1 - \alpha^2 z}} dz. \quad (2.0.12)$$

Primenom pikladne smene

$$z = \frac{1}{\alpha^2} \sin^2 \theta,$$

sledi da je

$$dz = \frac{2}{\alpha^2} \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

Jednačina (2.0.12) postaje

$$dx = \frac{2}{\alpha^2} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} \sin \theta \cos \theta d\theta,$$

što je ekvivalentno sa

$$\alpha^2 dx = 2 \sin^2 \theta d\theta = (1 - \cos 2\theta) d\theta.$$

Integraljenjem poslednje jednačine dobijamo:

$$\alpha^2 x = \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta + C.$$

Kako je

$$y = y_a - z,$$

imamo da je

$$y = y_a - \frac{1}{\alpha^2} \sin^2 \theta = y_a - \frac{1}{2\alpha^2} (1 - \cos 2\theta).$$

Ako uzmemo da je

$$R \equiv \frac{1}{2\alpha^2}, \quad \phi \equiv 2\theta, \quad a = \frac{C}{\alpha^2},$$

možemo zapisati rešenje u parametarkom obliku

$$x(\phi) = a + R(\phi - \sin \phi), \tag{2.0.13}$$

$$y(\phi) = y_a - R(1 - \cos \phi). \tag{2.0.14}$$

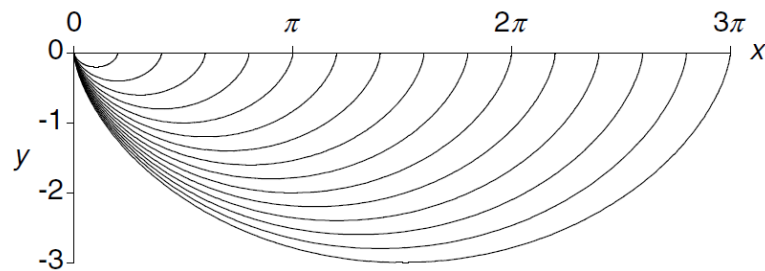
Ukoliko za levi granični uslov uzmemo

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0,$$

iz (2.0.13) i (2.0.14) zaključujemo da je $a = 0$ i $y_a = 0$, stoga dobijamo familiju cikoida sa jednim parametrom

$$x(\phi) = R(\phi - \sin \phi), \quad y(\phi) = -R(1 - \cos \phi).$$

Ova familija čini polje ekstremala (videti sliku 2.1). Svaka ekstremala se proteže duž x -ose, do svoje maksimalne dubine.



Slika 2.1: Familija cikloida sa jednim parametrom

Glava 3

Varijacioni problem sa ograničenjima - Izoperimetrijski problem

U ovom poglavlju bavićemo se tipovima graničnih uslova varijacionog problema, a zatim ćemo se usredsrediti na razmatranje *Graničnih uslova opšteg karaktera I* koji su u neposrednoj vezi sa izoperimetrijskim problemom. Nakon toga uvešćemo dve ključne teoreme koje predstavljaju uopštenje Ojler - Lagranžove jednačine u izoperimetrijskom slučaju, a potom ćemo videti i samu primenu ovih teorema na rešavanje izoperimetrijskog tzv. Didoninog problema. Literatura korišćena za realizaciju ovog poglavlja je [5] i [11], dok su slike preuzete iz [11]. Slika 3.3 je preuzeta sa sajta [12].

U prethodnom poglavlju proučavali smo traženje ekstrema funkcionele

$$J(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t)) dt,$$

pri čemu smo imali zadate granične uslove $x(a) = A$ i $x(b) = B$. Ovi granični uslovi predstavljaju jedan od podvrsta graničnih uslova opšteg karaktera I.

3.1 Vrste graničnih uslova opšteg karaktera

1. Granični uslovi opšteg karaktera I

Kako na osnovu potrebnog uslova za ekstrem funkcionele

$$\begin{aligned} \delta J_x(h) &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} h - \frac{\partial f}{\partial x'} h' \right) \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x'} \right) h dt + \frac{\partial f}{\partial x'} h \Big|_a^b = 0 \end{aligned}$$

i na osnovu Osnovne leme varijacionog računa za $h(a) = h(b) = 0$, prvi sabirak jednačine jednak nuli, da bi jednakost bila zadovoljena, sledi da drugi sabirak, takođe mora biti 0, tj.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x'} h \right|_a^b = 0,$$

odnosno,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x'} h \right|_{t=b} h(b) - \left. \frac{\partial f}{\partial x'} h \right|_{t=a} h(a) = 0. \quad (3.0.1)$$

Da bi navedena jednakost važila i za sve ostale izbore funkcije h , postoje sledeće mogućnosti (videti sliku 3.1):

- a) Za zadate granične uslove $x(a) = A$ i $x(b) = B$ prethodna jednakost je trivijalno zadovoljena. Ovaj slučaj je razmatran u prethodnom poglavlju.
- b) Ako x nije zadato ni u a , niti u b , njena varijacija ne mora biti jednaka nuli u tim tačkama, pa iz (3.0.1) sledi:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x'} \right|_{t=b} = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x'} \right|_{t=a} = 0.$$

- c) Ako x nije zadato u tački a , a $x(b) = B$, onda iz (3.0.1) sledi:

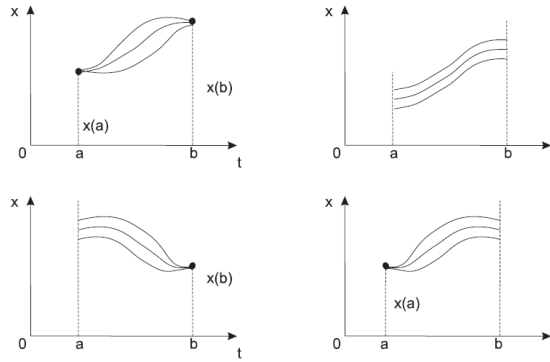
$$\left. \frac{\partial f}{\partial x'} \right|_{t=a} = 0.$$

- d) Ako je x nije zadato u tački b , a $x(a) = A$, onda iz (3.0.1) sledi:

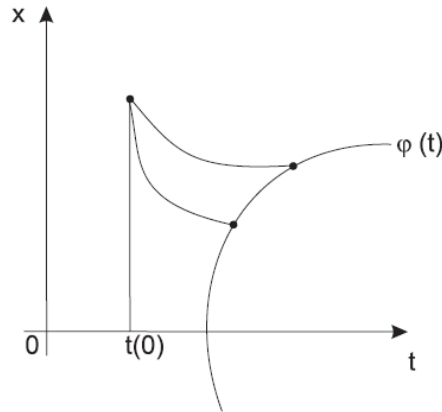
$$\left. \frac{\partial f}{\partial x'} \right|_{t=b} = 0.$$

2. Granični uslovi opšteg karaktera II

U velikom broju praktičnih situacija neophodno je varirati i nezavisno promenljivu koja figuriše u zadatku, što se često javlja u slučaju kada jedna ili obe granice određenog integrala, kriterijuma optimalnosti, nisu unapred određene. Radi jednostavnosti posmatraćemo problem nalaženja ekstrema funkcionele J , ako je $x(a) = A$, a drugi granični uslov je tačka na grafiku funkcije ϕ (videti sliku 3.2).



Slika 3.1: Granični uslovi a), b), c) i d)



Slika 3.2: Problem sa pokretnom granicom

3. Granični uslovi opšteg karaktera III

U ove granične uslove spada i slučaj kada je funkcionala zadata u obliku zbira određenog integrala i vanintegralnog člana, koji predstavlja funkciju vrednosti ekstremale u granicama intervala nezavisno promenljive.

3.2 Osnovne teoreme izoperimetrijskog problema

Varijacioni problem može imati tri tipa ograničenja: diferencijalni tip, algebarski tip i izoperimetrijski tip. Izoperimetrijski problem je tipičan problem nalaženja ekstrema funkcionele J pod integralnim ograničenjem K . Da bismo rešili probleme ovog tipa, uvodimo sledeće dve teoreme. Neka je X Banahov prostor i $D \subset X$. Koristimo oznaku

$D[K = k_0]$ koja označava skup D koji se sastoji od svih vektora x koji zadovoljavaju uslov $K(x) = k_0$, pri čemu je $K : D \longrightarrow \mathbb{R}$ i k_0 proizvoljan realan broj.

Teorema 3.1. (*Lagranžova teorema množitelja*) Neka su J i K definisane i diferencijabilne funkcionele na otvorenom skupu $D \subset X$ i neka je x^* lokalni ekstrem funkcionele J na skupu $D[K = k_0]$, gde je k_0 proizvoljno dat broj za koji je skup $D[K = k_0]$ neprazan. Pretpostavlja se da su diferencijali J i K neprekidni u nekoj okolini tačke x^* . Tada važi bar jedno od sledećih tvrđenja:

a) Diferencijal funkcionele K se anulira u tački x^* , odnosno,

$$\delta K_{x^*}(h) = 0$$

za sve $h \in X$ ili

b) Diferencijal funkcionele J je konstantni umnožak diferencijala funkcionele K u tački x^* , odnosno postoji konstanta $\lambda \in \mathbb{R}$, tako da je

$$\delta J_{x^*}(h) = \lambda \delta K_{x^*}(h)$$

za sve $h \in X$.

Dokaz Teoreme 3.1 pogledati u [11].

Naredna teorema predstavlja ključnu teoremu koja služi za rešavanje zadataka izoperimetrijskog tipa.

Pretpostavimo sledeće: Neka su f i g dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije po svim promenljivim i traženo rešenje nije ekstrem funkcionele K , odnosno da je ograničenje K nezavisno od problema određivanja ekstrema funkcionele J .

Teorema 3.2. Ako je kriva $x = x(t)$, $t \in [a, b]$, ekstremna vrednost integrala $J(x) = \int_a^b f(t, x, x') dt$ koja ispunjava uslove

$$K(x) = \int_a^b g(t, x, x') dt = k_0, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B$$

i ako ona nije ekstrem integrala K , onda postoji konstanta $\lambda \in \mathbb{R}$ takva da je ta kriva x ekstrem funkcionele $\int_a^b (f - \lambda g) dt$, odnosno kriva x je rešenje Ojler - Lagranžove

diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial x'} \right) = f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} - \lambda(g_x - \frac{d}{dt} g_{x'}) = 0. \quad (3.0.2)$$

Dokaz. Sledi na osnovu Teoreme 3.1. Kako x nije ekstrem funkcionele K , sledi da je $\delta K_x \neq 0$, odnosno da tvrđenje pod a) u prethodnoj teoremi ne važi. Kako na osnovu prethodne teoreme bar jedan uslov mora da važi, možemo zaključiti da tvrđenje pod b) mora biti ispunjeno, tj. postoji konstanta $\lambda \in \mathbb{R}$, tako da je

$$\delta J_{x^*}(h) - \lambda \delta K_{x^*}(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial x} h + \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial x'} h' \right) dt = 0,$$

za sve $h \in C^1[a, b]$. Na osnovu Teoreme 2.10, ovo je potreban uslov da je kriva x ekstremala funkcionala $\int_a^b (f - \lambda g) dt$ i da zadovoljava Ojlerovu jednačinu (2.0.6). $\square$

3.3 Rešenje Didoninog problema

Didonin problem predstavlja varijacioni problem uz zadato ograničenje u vidu integrala. U našem slučaju ograničenje predstavlja obim koji se dobija od niti volovske kože, a glavni cilj je da se maksimizuje površina grada uz zadati obim. Problem se matematički može izraziti na sledeći način:

Od svih zatvorenih krivih u ravni bez samopresečnih tačaka i zadatog obima odrediti onu koja omeđuje najveću površinu.

Ukoliko se rešenje Didoninog problema traži u parametarskom obliku $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [0, T]$, navedeni problem se matematički može zapisati kao maksimum funkcionele

$$J(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt,$$

uz ograničenje

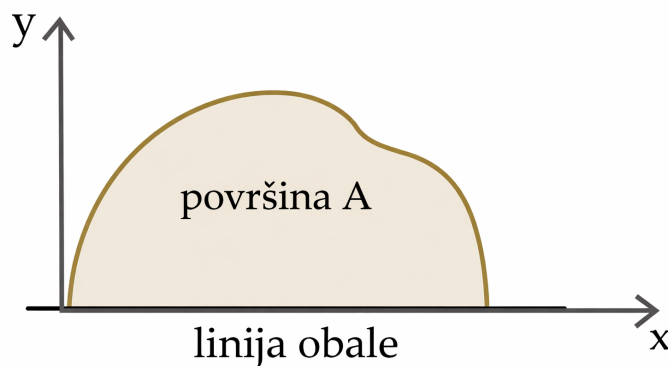
$$\int_0^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = l,$$

pri čemu je l zadati obim.

Rešenje. Posmatramo problem maksimizacije površine koja je omeđana krivom $y = y(x)$ i x - osom. Zadatak se svodi na pronalaženje krive $y(x)$ za koju će površina biti

najveća.

Treba pretpostaviti da je koordinatni sistem postavljen tako da je $A(0, 0)$, $B(b, 0)$ za neko $b > 0$ i tražena kriva se nalazi iznad x - ose, tj. $y(x) \geq 0$ za $x \in [0, b]$ (videti sliku 3.3).



Slika 3.3: Didonin problem

Tražimo maksimum funkcionele

$$J(y) = \int_0^b y(x) dx,$$

pod graničnim uslovima

$$y(0) = 0, \quad y(b) = 0$$

i ograničenjem u vidu integrala

$$K(y) = \int_0^b \sqrt{1 + y'^2} dx = l.$$

Kako imamo samo jedno ograničenje, imaćemo jedan Lagranžov množitelj, stoga posmatramo funkcionalu

$$J - \lambda K = \int_0^b \left(y - \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) dx.$$

GLAVA 3. VARIJACIONI PROBLEM SA OGRANIČENJIMA - IZOPERIMETRIJSKI PROBLEM

Na osnovu Teoreme 3.2. odgovarajuća Ojler - Lagranžova jednačina je

$$1 + \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0,$$

odnosno,

$$\lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = -1.$$

Poslednju jednačinu integralimo po promenljivoj x , pa se dobija:

$$\lambda \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = -(x - c_1).$$

Kvadriranjem poslednje jednačine dobijamo:

$$y' = \frac{x - c_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2}}.$$

Rešavanjem po y' i metodom razdvajanja promenljivih dobijamo:

$$dy = \pm \frac{x - c_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2}} dx,$$

iz čega sledi da je

$$y = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2} + c_2.$$

Poslednja jednačina zadovoljava jednačinu kruga sa centrom u tački (c_1, c_2) i poluprečnikom λ , tj.

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2.$$

Može se zaključiti da dobijena kiva ispunjava granične uslove opšteg karaktera I (slučaj pod d)), odnosno $y'(0) = y'(b) = 0$.

Dakle, rešenje problema je gornja polukružnica čija je dužina l , pa geometrijski možemo zaključiti da je poluprečnik kruga $\frac{l}{\pi}$, $b = \frac{2l}{\pi}$, a tražene konstante iznose $c_1 = \frac{l}{\pi}$, a $c_2 = 0$.

Konačno rešenje je

$$\left(x - \frac{l}{\pi}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2.$$

Napomena 3.3. *Radi jednostavnijeg rešavanja Didoninog problema, funkcionala*

$$J(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt$$

je pojednostavljena. Primećujemo da je data funkcionala računa površinu unutar zatvorene krive $(x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$ tj.

$$(x(0), y(0)) = (x(T), y(T))$$

upotrebom Grinove teoreme .

Teorema 3.4. *(Grinova teorema) Neka je C prosta, zatvorena, pozitivno orijentisana kriva, D oblast koju kriva C zatvara, $P(x, y), Q(x, y)$ funkcije sa neprekidnim parcijalnim izvodima na D , tada važi:*

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA \right).$$

Glava 4

Problem optimalne štednje i potrošnje

Ojler - Lagranžova jednačina se može primeniti u raznim sferama elektrostatičke, mehanike, optike, elektrotehnike, robotike, matematike, kao i u sferi ekonomije i finansija. Konkretno, u ovom poglavlju, videćemo primenu Ojler - Lagranžove jednačine na područje finansija, tačnije na problem štednje i potrošnje. Postavlja se pitanje da li je bolje da se zarađeni novac više štedi ili potroši, tj. kako naći ravnotežu između ove dve suprotnosti? Potrebno je kreirati optimalan model, tako da korist potrošača bude maksimalna. Naredno poglavlje se bavi kreiranjem tog modela i njegovom optimalnom upotrebom. Korišćena literatura je [2] i [8]. Slika 4.1 je preuzeta iz [8].

Razmotrimo kapitalističkog radnika koji zarađuje stalnu platu w godišnje. Platu može ili da troši ili da štedi. Neka $S(t)$ označava ušteđevinu u trenutku t , gde je $t \in [0, T]$ vreme izraženo u godinama, pri čemu $t = 0$ predstavlja vreme početka radnog odnosa, a $t = T$ vreme odlaska u penziju. Dalje, neka je $C(t)$ stopa potrošnje, tj. potrošnja po jedinici vremena, u trenutku t .

Na uštedeni kapital radnik ostvaruje kamatu po kontinuiranoj kapitalizovanoj stopi $r > 0$, što znači da se iznos kapitala $m > 0$ uvećava kao me^{rt} . U slučaju da nam je umesto r bila data godišnja nominalna kamatna stopa $r_1 > 0$, tada bismo mogli da izračunamo

$$r = \ln(1 + r_1).$$

Dalje, radi jednostavnosti, pretpostavimo da se plata isplaćuje kontinuirano, a ne u vremenskim intervalima. Dakle, w je stopa zarade, izražena u novcu po jedinici vremena.

Tada se promena ušteđevine radnika opisuje diferencijalnom jednačinom:

$$S'(t) = w + rS(t) - C(t). \quad (4.0.1)$$

Sada pretpostavimo da je naš radnik matematički sklon i želi da maksimizira sreću koju dobija iz potrošnje tokom svog života, pronalazeći optimalnu količinu potrošnje u svakom trenutku. Kao kapitalista njegova sreća zavisi isključivo od stope potrošnje C . Ako sa $U(C)$ označimo funkciju korisnosti, tačnije sreću koja proističe iz potrošnje C , radnik želi da pronađe funkciju

$$C : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R},$$

takvu da je

$$H[C] := \int_a^b U(C(t))dt$$

maksimalna. Izbor funkcije korisnosti U zavisi od lične preferencije radnika, ali je realno pretpostaviti da važi *zakon opadajućih prinosa*, tj. pri dvostruko većoj potrošnji radnik je srećniji, ali ne i dvostruko srećniji. Kako je pri većoj potrošnji korisnik srećniji, tj. ima veću korisnost, zaključujemo da je $U' > 0$. Kada njegova potrošnja raste neograničeno $C \longrightarrow \infty$, njegova sreća se smanjuje $U'(C) \longrightarrow 0$. Takođe važi da je $U(0) = -\infty$, jer u tom slučaju potrošač gladije. Nadalje, realno je da je funkcija korisnosti U konkavna, što znači da nema lokalnih maksimuma.

Funkcija koja zadovoljava ove zahteve je logaritamska funkcija, pa uzimamo

$$U(C) = \ln(C), \quad C > 0.$$

Pretpostavimo još da radnik započinje radni vek bez ušteđevine, $S(0) = 0$, i da na kraju radnog veka želi da ode u penziju sa ušteđevinom $S(T) = S_T \geq 0$. Ako iz jednačine (4.0.1) izrazimo $C(t)$ i to uvrstimo u izraz H dobijamo optimalni problem štednje koji je potrebno minimizirati:

$$\begin{cases} F[S] := \int_0^T -\ln(w + rS(t) - S'(t))dt \\ S(0) = 0, \quad S(T) = S_T \geq 0. \end{cases}$$

Rešenje. Problem se rešava primenom Ojler - Lagranžove jednačine (2.0.6). Za dati

problem, jednačina glasi:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{w + rS(t) - S'(t)} \right] = -\frac{r}{w + rS(t) - S'(t)}. \quad (4.0.2)$$

Kako je

$$C(t) = w + rS(t) - S'(T), \quad (4.0.3)$$

jednačina (4.0.2) postaje

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{C(t)} \right] = -\frac{r}{C(t)}$$

što je ekvivalentno sa

$$-\frac{C'(t)}{C^2(t)} = -\frac{r}{C(t)}$$

Množenjem obe strane jednakosti sa $C^2(t)$ dobijamo:

$$C'(t) = rC(t)$$

što je evivalentno sa

$$\frac{C'(t)}{C(t)} = r. \quad (4.0.4)$$

Primećujemo da je jednačina (4.0.4) obična diferencijalna jednačina koju rešavamo metodom razdvajanja promenljivih. Važi:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= Cr, \\ \frac{dC}{C} &= rdt, \end{aligned}$$

pa integracijom obe strane dobijamo:

$$\ln C(t) = rt + C_1. \quad (4.0.5)$$

Eksponciranjem imamo:

$$C(t) = C_0 e^{rt}, \quad (4.0.6)$$

gde je $C_0 = e^{C_1}$ i $C(0) = C_0$. Kada u jednačinu (4.0.3) uvrstimo dobijeni oblik $C(t)$ (4.0.6) dobijamo:

$$w + rS(t) - S'(t) = C_0 e^{rt},$$

odnosno,

$$S'(t) - rS(t) = w - C_0e^{rt}, \quad (4.0.7)$$

što je linearna diferencijalna jednačina prvog reda po $S(t)$. Neka je $f(t) = w - C_0e^{rt}$.

Rešavamo jednačinu

$$S'(t) - rS(t) = f(t).$$

Homogeno rešenje jednačine se dobija metodom razdvajanja promenljivih za $f(t) = 0$, analogno kao u prethodnom slučaju i iznosi

$$S_h(t) = Ke^{rt} = 0, \quad (4.0.8)$$

jer je $S_h(0) = K = 0$ na osnovu pretpostavke da potrošač na početku perioda nema ušteđevinu.

Partikularno rešenje jednačine dobijamo primenom Duhamelove¹ formule

$$S_p(t) = \int_0^t e^{r(t-s)}(w - C_0e^{rs})ds. \quad (4.0.9)$$

Računanjem integrala dobijamo

$$\begin{aligned} S_p(t) &= \int_0^t e^{r(t-s)}(w - C_0e^{rs})ds \\ &= \int_0^t e^{r(t-s)}wds - \int_0^t C_0e^{r(t-s)}e^{rs}ds \\ &= we^{rt} \int_0^t e^{-rs}ds - C_0e^{rt} \int_0^t ds \\ &= \frac{w}{r}(e^{rt} - 1) - C_0te^{rt}. \end{aligned}$$

Dakle, partikularno rešenje iznosi

$$S_p(t) = \frac{w}{r}(e^{rt} - 1) - C_0te^{rt}. \quad (4.0.10)$$

Kako je konačno rešenje ODJ zbir homogenog i partikularnog rešenja, na osnovu (4.0.8) i (4.0.10) zaključujemo da je

¹Jean-Marie Constant Duhamel (1797 - 1892) - francuski matematičar

$$S(t) = S_h(t) + S_p(T),$$

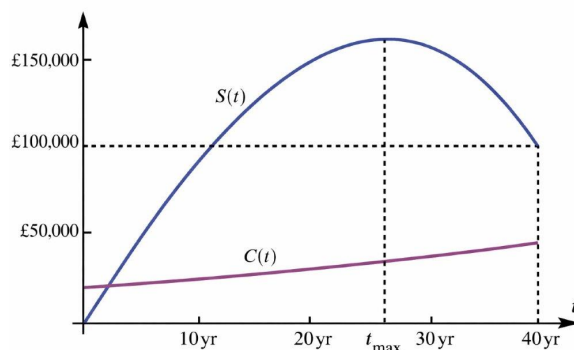
odnosno, konačno rešenje je partikularno rešenje ODJ

$$S(t) = \frac{w}{r}(e^{rt} - 1) - C_0 t e^{rt}. \quad (4.0.11)$$

Iz uslova $S(T) = S_T$ i jednačine (4.0.11) možemo izraziti C_0

$$C_0 = \frac{\frac{w}{r}(1 - e^{-rT}) - S_T e^{-rT}}{T}.$$

Kako je $-U(C) = -\ln(C)$, $C > 0$ konveksna funkcija, u ovom slučaju zaključujemo da je $S(t)$ minimizator našeg problema optimizacije.



Slika 4.1: Primer optimalne štednje

Na slici 4.1 vidimo optimalnu strategiju štednje jednog radnika. Pretpostavimo da period trajanja rada iznosi 40 godina, radnik zarađuje konstantnu platu $w = 30000$ funti godišnje i ima za cilj da uštedi $S_T = 100000$ funti do kraja svog radnog veka. Primećujemo da radnik radi otprilike $t_{\max} = 27$ godina kako bi dostigao štednju veću od 168000 funti - što predstavlja iznos njegove maksimalne štednje, a zatim počinje da povlači sredstva tokom poslednjih 13 godina ($S'(t) < 0$). Radnikova potrošnja $C(t) = C_0 e^{rt}$ raste kontinuirano tokom celog radnog veka, čineći ga materijalno zadovoljnim. Na osnovu primera, može se zaključiti da dokle god je prihod radnika veći od njegove potrošnje njegova ušteđevina će rasti, sve do trenutka $t_{\max}$ kada njegova ušteđevina dostigne svoj maksimum i obezbedi mu osećaj sigurnosti i blagostanja. Međutim, nakon tog trenutka, potrošnja prevazilazi prihod radnika te dolazi do smanjenja ušteđevine, narušavanja finansijske stabilnosti i, posledično, do opadanja njegove sreće.

Zaključak

U ovom radu bavili smo se primenom Ojler - Lagranžove jednačine na problem optimalne štednje i potrošnje. U prvom delu uveli smo motivaciju poput Didoninog problema, Fermaovog principa i problema brahistohrone, za rešavanje varijacionog računa kao i za kreiranje Ojler - Lagranžove jednačine. Osim toga, podsetili smo se osnovnih definicija, pojmova i teorema iz oblasti funkcionalne analize i diferencijalnih jednačina koje su potrebne u nastavku rada. U drugom poglavlju videli smo formulaciju Teoreme potrebnog uslova za postojanje lokalnog ekstrema funkcionele, kao i Osnovnu lemu varijacionog računa, Rejmondovu lemu i Osnovnu teoremu varijacionog računa na osnovu čijih dokaza se izvodi Ojler - Lagranžova jednačina. Dodatno, u datom poglavlju rešili smo problem brahistohrone koristeći specijalne slučajeve Ojler - Lagranžove jednačine. U trećem poglavlju uvodimo granične uslove, ali se baziramo na ograničenja u vidu integrala, te rešavamo probleme tog tipa - izoperimetrijske probleme. Uz pomoć teorema koje uopštavaju Ojler - Lagranžovu jednačinu na izoperimetrijski slučaj rešavamo najznačajniji problem izoperimetrijskog tipa, tzv. Didonin problem. U poslednjem poglavlju dolazimo do same primene varijacionog računa, konkretno, Ojler - Lagranžove jednačine na finansijski problem štednje i potrošnje. Kako želimo da naša potrošnja bude što manja, minimiziraćemo stopu potrošnje i primenom Ojler - Lagranžove jednačine problem se svodi na rešavanje ODJ prvog reda. Na samom kraju može se zaključiti da je varijacioni račun zaista primenjen u raznim naučnim sferama, ali za običnog pojedinca je veoma značajno na koji način treba rasporediti novac i kako ga trošiti, a da pri tome maksimizira svoju korisnost, stoga bih znatno istakla ovu ekonomsku primenu kao ključnu jer se ova dinamika štednje i potrošnje svakog dana dovodi u pitanje.

Literatura

- [1] K.W. Cassel, *Variational Methods with Applications in Science and Engineering*, Cambridge University Press, New York, 2013.
- [2] M. Čolić, *Matematika za studente fizike: diferencijalne jednačine i elementi teorije verovatnoće i statistike*, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Novi Sad 2020.
- [3] J. Ferguson, *A Brief Survey of the History of the Calculus of Variations and its Applications*, University of Victoria, Canada, 2004.
- [4] I.M. Gelfand, S.V. Fomin, *Calculus of Variations*, Dover Publications, Inc., New York, 2000.
- [5] M. Kot, *A First Course in the Calculus of Variations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014.
- [6] M. Kurilić, *Osnovi opšte topologije*, PMF, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1998.
- [7] A. Maxsam, *Brachistochrone inside the Earth: The Gravity Train*, Department of Physics and Astronomy, University of Nevada, Las Vegas, 2008.
- [8] D. Musielak, *Dido's Problem: When a myth of ancient literature became a problem of variational calculus*, University of Texas at Arlington, 2023.
- [9] F. Rindler, *Introduction to the Modern Calculus of Variations*, Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry, United Kingdom, 2015.
- [10] A. Stamenković, *Problem brahistohtone*, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2020.

- [11] N. Teofanov, M. Žigić, *Osnovi optimizacije*, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Novi Sad, 2018.
- [12] <https://www.researchgate.net>

Biografija



Nikolina Ćurić rođena je 11. 2. 2002. godine u Zrenjaninu u Republici Srbiji. Godine 2008. upisuje Osnovnu školu "Jovan Dučić" u Kleku i završava je 2016. godine kao đak generacije. Iste godine upisuje prirodno-matematički smer u Zrenjanskoj gimnaziji i nakon četiri godine je završava kao nosilac Vukove diplome. Godine 2020. upisuje osnovne akademske studije na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu na smeru primenjena matematika - matematika finansija, koje uspešno završava 2023. godine sa prosekom 9,31. Kao apsolvent osnovnih studija postaje nosilac Dositejeve stipen-

dije Fonda za mlade talente Republike Srbije i iste godine upisuje master akademske studije primenjene matematike na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Poslednji ispit polaže u novembru 2025. godine čime stiče pravo na odbranu master rada. Od maja 2025. godine radi u DDOR kompaniji u Novom Sadu kao aktuar.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Nikolina Ćurić

AU

Mentor: dr Milica Žigić

MN

Naslov rada: Primena Ojler - Lagranžove jednačine na problem optimalne štednje i potrošnje

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2026

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3

MA

Fizički opis rada: (4/66/12/0/13/0/0)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Optimizacija

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: normirani prostor, diferencijal, varijacija, ekstem, Ojler - Lagranžova jednačina, granični uslov, izoperimetrijski problem

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

CHU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

U radu je razmatrana primena Ojler - Lagranžove jednačine na problem optimalne stednje i potrošnje. U skladu sa tim veliku pažnju posvetili smo istoriji i motivaciji varijacionog računa, vektorskim prostorima, normiranim i metričkim prostorima, kao i diferencijalnim jednačinama. Nakon datih definicija i tvrđenja upoznajemo se sa osnovnim osobinama varijacionog problema, izvođenjem Ojler - Lagranžove jednačine, njenim specijalnim slučajevima, kao i vrstama graničnih uslova. Nakon toga, objašnjena je konkretna primena Ojler - Lagranžove jednačine na problem optimalne štednje i potrošnje i data je interpretacija sa konkretnim vrednostima.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 3.2.2026.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije: **KO**

Predsednik: dr Ivana Vojnović, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Milica Žigić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Goran Radojev, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master thesis

CC

Author: Nikolina Ćurić

AU

Mentor: Milica Žigić, Ph.D.

MN

Title: Applying the Euler–Lagrange Equation to the Problem of Optimal Saving and Consumption

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: Serbian (latin)

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2026

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 3

PP

Physical description: (4/66/12/0/13/0/0)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Optimization

SD

Subject/Key words: normed vector space, differential, variation, extremum, Euler - Lagrange equation, boundary condition, isoperimetric problem

SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

AB

This master's thesis examines the application of the Euler–Lagrange equation to the problem of optimal saving and consumption. Accordingly, considerable attention is devoted to the history and motivation of the calculus of variations in vector spaces, normed and metric spaces, as well as to differential equations. After presenting the relevant definitions and theorems, the thesis introduces the basic properties of variational problems, the derivation of the Euler–Lagrange equation, its special cases, and the types of boundary conditions. Finally, a concrete application of the Euler–Lagrange equation to the problem of optimal saving and consumption is presented, along with an interpretation using specific values.

Accepted by the Scientific Board on: 3.2.2026

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

- President: Ivana Vojnović, PhD, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
- Member: Milica Žigić, PhD, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
- Member: Goran Radojev, PhD, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,