Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i
informatiku

Anja Dacić

Modeli prebukiranosti u avio-industriji

-master rad-

Mentor:
Prof. dr Sanja Rapajić

Novi Sad, 2025.

ZAHVALNOST

Posebnu zahvalnost dugujem svojoj mentorki prof. dr Sanji Rapajić na podršci i motivaciji tokom izrade ovog rada, ali i tokom studiranja.
Zahvalila bih se i prof. dr Zorani Lužanin i prof. dr Dejanu Brcanovu što su svojim sugestijama značajno doprineli radu.
Najveću zahvalnost dugujem svojim roditeljima i bratu, bez čije bezuslovne podrške, vere i ljubavi ne bih postigla ovaj uspeh. Njihova strpljivost, razumevanje i podsticaj bili su moj najveći oslonac tokom svih godina studiranja i izvor snage da istrajem u ostvarivanju svojih ciljeva.

Novi Sad, 2025. Anja Dacić

Sadržaj

1 Uvod

Avio-kompanije se veoma često suočavaju sa problemom nepojavljivanja putnika ili otkazivanja letova u poslednjem trenutku, što može dovesti do smanjenja očekivanog profita usled nepopunjenih letova. Kao odgovor na ove izazove, razvila se praksa prebukiranosti, koja je danas postala uobičajena u avio-industriji.

Prebukiranost predstavlja strategiju zasnovanu na matematičkom modelu za određivanje optimalnog broja karata koje je potrebno prodati iznad kapaciteta leta, sa ciljem maksimizacije ukupnog očekivanog profita. Posledica ovakve strategije avio-kompanija može biti to da neki putnici imaju validnu kartu, ali ne uspeju da se ukrcaju na let tj. budu prekobrojni. U tim slučajevima avio-kompanija je u obavezi da isplati odgovarajuću kompenzaciju, čiji iznos zavisi od dužine leta, udaljenosti destinacije i vremena čekanja na sledeći raspoloživi let. Povoljniji scenario za kompaniju jeste kada putnici dobrovoljno pristanu da odustanu od leta u zamenu za adekvatnu nadoknadu, dok je nedobrovoljno uskraćivanje ukrcavanja značajno nepovoljnije.

U ovom radu su razmatrane različite vrste modela prebukiranosti, njihova primena u savremenoj avio-industriji, kao i perspektiva putnika i njegovo uključivanje u jednom od modela kao aktivnog učesnika u odlučivanju.

U drugom poglavlju je predstavljen pojam ekvilibrijuma racionalnih očekivanja, koji je osnovni princip primenjen u radu.

U trećem poglavlju predstavljene su regulative koje definišu visinu novčane nadoknade kada je broj putnika sa kartom veći od raspoloživog broja mesta. Istaknuto je da je za avio-kompaniju u ovakvim slučajevima povoljnije da putnici dobrovoljno odustanu od leta, nego da budu nedobrovoljno uskraćeni za ukrcavanje. U okviru ovog dela izdvojeni su i primeri iz prakse koji ilustruju posledice nedobrovoljnog uskraćivanja ukrcavanja.

U četvrtom poglavlju su predstavljeni osnovni modeli prebukiranosti — od onih sa jednom klasom putnika, preko modela sa dve klase, do aukcijskog modela (gde putnici dobrovoljno odustaju od leta u zamenu za novčanu nadoknadu).

Poseban fokus je na modelu dobrovoljnog pristajanja na kupovinu karata prebukiranog leta, koji je izložen u petom poglavlju. Putnici imaju informacije o popunjenosti leta i donose racionalne odluke o kupovini karata po nižoj ceni, uz procenu rizika da možda neće biti ukrcani. Kompanija, s druge strane, pruža informacije koje omogućavaju formiranje racionalnih očekivanja o verovatnoći ukrcavanja na let. Na taj način se uspostavlja ekvilibrijum racionalnih

očekivanja, u kojem i putnici i kompanija minimizuju greške u procenama i zajedno doprinose optimizaciji kako cene karata, tako i iznosa nadoknade za dobrovoljno odustajanje. U ovom modelu putnici aktivno učestvuju u procesu prebukiranja. Cilj je da se kroz saradnju putnika i kompanije smanje troškovi i neprijatne situacije povezane sa nedobrovoljnim neukrcavanjem.
U šestom poglavlju, kroz analizu simuliranih podataka je predstavljena primena teorijskih okvira modela prebukiranosti na dobrovoljnoj bazi. Kroz simulirane podatke dobijene su ekvilibrijumske vrednosti cene, kompenzacije i verovatnoće pojavljivanja putnika na terminalu, kao i broj karata za preprodaju koji maksimizira profit. Na kraju rada sledi zaključak.

2 Teorijski pojam ekvilibrijuma racionalnih očekivanja

Osnovne principe ekvilibrijuma racionalnih očekivanja uspostavili su Lucas i Prescott[1] 70-ih godina prošlog veka [7]. Prateći njihovu ideju, opisana je teorijska osnova pojma ekvilibrijuma racionalnih očekivanja primenjena na avio-industriju.
U avio-industriji, ponuda sedišta i kapaciteta zavisi od sezone, aktuelnih tržišnih kretanja i vremena potrebnog za planiranje letova i posada. Zbog toga postoji izražen vremenski raskorak između planiranja kapaciteta, koje se obavlja mesecima unapred, i stvarne potražnje koja se formira tek u trenutku prodaje karata. Ravnoteža se postiže samo ukoliko je broj ponuđenih sedišta jednak potražnji, pri čemu isti princip važi i za cenu karte [3].
Troškovi prilagođavanja nameću avio-kompaniji da obim ponude menja postepeno, što nužno uključuje procenu budućih cena. Svaki prevoznik, stoga, nastoji da predvidi ukupnu buduću potražnju i uskladi je sa raspoloživim kapacitetima. Ekvilibrijum racionalnih očekivanja opisuje uslove pod kojima se očekivani ishodi tržišnih odluka poklapaju sa stvarnim [11].

Tražnja i ponuda

Neka je potražnja za sedištima q_t^d u trenutku t data linearnom funkcijom cene karte. Ponuda sedišta q_t^s u trenutku t određena je na osnovu cene p_t^* koju je avio-kompanija očekivala da će važiti za period t. Ravnoteža se postiže u tački gde su ponuda i tražnja jednake. Naredni sistem jednačina gde su q_t^d i q_t^s izražene kao linearne funkcije cene karte je

$$q_t^d = \alpha - \beta p_t$$
$$q_t^s = \gamma + \delta p_t^*$$
$$q_t^d = q_t^s,$$

gde su $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ parametri potražnje, a $\gamma > 0$ i $\delta > 0$ parametri ponude. Iz sistema se dobija relacija za tržišnu cenu

$$p_t = \frac{\alpha - \gamma}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} p_t^*.$$

[1] Lucas R. i Prescott E. se pominju kao utemeljivači teorije ekvilibrijuma racionalnih očekivanja.

Može se primetiti da formiranje očekivanja o budućoj ceni određuje kolika će biti stvarna cena karata u trenutku t.

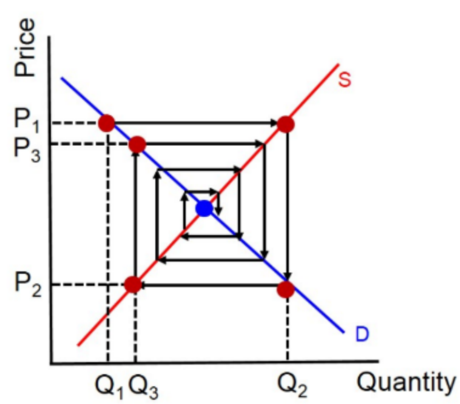
Model 1

Najjednostavniji model je kada se pretpostavi da avio-kompanije očekuju kretanje cene označena sa p_t^* u trenutku t tako da je jednako ceni u prethodnom vremenskom trenutku posmatranja $t-1$. Tada je

$$p_t^* = p_{t-1}$$

$$p_t = \frac{\alpha - \gamma}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} p_{t-1}.$$

Kada se uvrste konkretne vrednosti parametara modela, dobija se tipična dinamika paukove mreže. Na Slici 1 prikazana je ilustracija ovog procesa gde se cena i količina približavaju tački preseka kriva ponude (S) i tražnje (D), odnosno tržišnoj ravnoteži, pri čemu njihovo kretanje oblikuje prepoznatljivu strukturu paukove mreže.



Slika 1: Ilustracija dinamičkog modela paukove mreže

Model 2

Prethodni model predstavljao je osnovni okvir za opisivanje dinamičkih tržišnih procesa. Sledeći model ima za nijansu realističniju pretpostavku o formiranju očekivanja. U njoj avio-kompanije određuju očekivanu cenu p_t^* prema pravilu

$$p_t^* = p_{t-1} + \varepsilon(p_{t-1} - p_{t-2}),$$

gde je $\varepsilon < 0$ koeficijent očekivanja.
One znaju da prodaja karata i njihova dinamika prati sezonske oscilacije, odnosno znaju da je period viška kapaciteta (niske cene) praćen periodom manjka kapaciteta (visoke cene).

Model 3

Naredni model uzima u obzir, pored sezonskog oscilovanja cene karata i informacije kojom brzinom avio-kompanije uče na svojim greškama. Ako se pretpostavi da avio-kompanije postepeno prilagođavaju svoja predviđanja o ceni p_t^* u odnosu na prethodno uoče greške, onda je

$$p_t^* = p_{t-1}^* + \eta(p_{t-1} - p_{t-1}^*),$$

gde je $0 < \eta < 1$ koeficijent prilagođavanja.
U narednim koracima iterativnom zamenim unazad dobija se jednostavniji zapis. Kreće se od

$$p_t^* = (1-\eta)\, p_{t-1}^* + \eta\, p_{t-1}.$$

Za p_{t-1}^* se zna

$$p_{t-1}^* = (1-\eta)\, p_{t-2}^* + \eta\, p_{t-2},$$

pa ubacivanjem u prethodni izraz dobija se

$$p_t^* = (1-\eta)\big[(1-\eta)\, p_{t-2}^* + \eta\, p_{t-2}\big] + \eta\, p_{t-1} = (1-\eta)^2 p_{t-2}^* + \eta(1-\eta)\, p_{t-2} + \eta\, p_{t-1}.$$

Nastavljajući ovaj postupak posle n iteracija dobija se opšti obrazac

$$p_t^* = (1-\eta)^n p_{t-n}^* + \eta \sum_{k=1}^{n} (1-\eta)^{\,k-1} p_{t-k}. \tag{1}$$

Iz uslova $0 < \eta < 1$, znamo da je $|1-\eta| < 1$. Ako pretpostavimo da su istorijske cene p_{t-k} ograničene (ili bar da p_{t-n}^* ne raste brže od $(1-\eta)^{-n}$), onda prvi član $(1-\eta)^n p^*_{t-n} \longrightarrow 0$ kada $n \to \infty$. Izraz (1) postaje

$$p^*_t = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\eta)^{k-1} \eta \, p_{t-k}.$$

Može se primetiti da se očekivana cena p^*_t zasniva na čitavoj istoriji cena, ali sa eksponencijalno opadajućim ponderima $\eta(1-\eta)^{k-1}$, čije zbir je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta(1-\eta)^{k-1} = 1.$$

Dakle iterativnim postupkom dobija se

$$p^*_t = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\eta)^{k-1} \eta \, p_{t-k}, \tag{2}$$

odnosno

$$p^*_t = \sum_{k=1}^{\infty} w_{k-1} \, p_{t-k},$$

gde je $w_{k-1} = \eta(1-\eta)^{k-1}$. Očekivana cena predstavlja linearnu kombinaciju svih prethodnih cena i ne može premašiti najveću ranije zabeleženu vrednost. Zbog toga avio-kompanije, čak i uz veliko iskustvo, u okviru ovog modela ne mogu blagovremeno da predvide iznenadne skokove cena.

Međutim, teorija racionalnih očekivanja ne počiva isključivo na posmatranju istorijskih cena, već podrazumeva i poznavanje strukturnih karakteristika tržišta i modela koji ga opisuje. Ove pretpostavke čine osnovu koncepta racionalnih očekivanja. Ravnoteža racionalnih očekivanja definiše se kao fiksna tačka preslikavanja očekivanih ishoda kretanja vrednosti cene p^*_t u stvarne ishode kretanja cena na tržištu.

Početni model paukove mreže sada glasi

$$\begin{aligned} q^d_t &= \alpha - \beta p_t \\ q^s_t &= \gamma + \delta p^*_t + u_t \\ q^d_t &= q^s_t, \end{aligned}$$

gde stohastički član u_t u jednačini ponude čini da planirana količina karata uvek može odstupati od broja prodatih.

Može se uočiti da, ukoliko avio-kompanije koriste sve raspoložive informacije, njima mora biti poznata i ravnotežna cena p_r. Na prvi pogled moglo bi se zaključiti da bi u tom slučaju i ostvarena količina prodatih karata morala odgovarati planiranoj. Da je tako, budućnost ne bi sadržala nikakvu neizvesnost, a formiranje racionalnih očekivanja dovelo bi do determinističke dinamike i opšte ravnoteže. Očekivani ishodi svih ekonomskih odluka uvek bi se poklapali sa realizovanim vrednostima. Međutim, u posmatranom modelu postoji element koji sprečava potpuni determinizam, a to je u_t u jednačini ponude. Tada se iz modela paukove mreže dobija

$$p_t = \frac{\alpha - \gamma}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} p_t^* - \frac{1}{\beta} u_t. \tag{3}$$

Formiranje racionalnih očekivanja u vezi sa cenom p_t^* formalno se zapisuje kao matematičko očekivanje cene u prethodnom periodu p_{t-1} tj. uslovljeno je informacijama o ceni dostupnim u periodu $t-1$

$$p_t^* = \mathbb{E}_{t-1}[p_t]. \tag{4}$$

Kombinovanjem prethodnih izraza (3) i (4)

$$p_t^* = \frac{\alpha - \gamma}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} p_t^* - \frac{1}{\beta} E_{t-1}[u_t], \tag{5}$$

što jasno pokazuje da se očekivanje o ceni p_t^* zasniva i na informacijama o strukturi sistema (parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) i na raspoloživim istorijskim informacijama o tržišnim varijacijama cene.

3 Uvod u modele prebukiranosti avio-kompanija

Model prebukiranosti predstavlja široko rasprostranjenu praksu u avio-industriji i zasniva se na tome da se proda više karata nego što je raspoloživih mesta na letu. Motiv za ovakvo ponašanje proizilazi iz činjenice da se u praksi često dešava da se određeni broj putnika ne pojavi na ukrcavanje ili otkaže rezervaciju u poslednjem trenutku, što avio-kompaniji umanjuje očekivani profit.
Profitabilnija strategija za kompaniju podrazumeva prodaju većeg broja karata uz spremnost da se putnicima koji se ipak pojave na terminalu, a ne mogu biti ukrcani, isplati odgovarajuća kompenzacija. Međutim, u pojedinim situacijama putnici mogu biti uskraćeni za ukrcavanje protiv svoje volje, što dovodi do nezadovoljstva i narušava reputaciju kompanije.
Postavlja se pitanje da li je ovakav model zaista efikasan. Da li potencijalni finansijski dobitak opravdava gubitak poverenja putnika i narušavanje imidža avio-kompanije u situacijama kada se putnici, uprkos blagovremenom dolasku i čekiranju, ne ukrcaju na let usled prebukiranosti? [15]
Ukoliko pretpostavimo da ovaj model radi u korist avio-kompanije, glavni zadatak je pronaći optimalan broj karata koji treba prodati tako da se maksimizira očekivani prihod.
Strategija prebukiranosti, kao i odluka avio-kompanije da je primeni, najčešće zavisi od verovatnoće dolaska putnika na određeni let, koja se procenjuje na osnovu istorijskih podataka prikupljenih tokom prethodnih meseci, kvartala ili godina. Pored toga, važnu ulogu ima i visina troškova kompenzacije koje je kompanija spremna da snosi u slučaju da se pojavi više putnika nego što ima raspoloživih mesta.
U ovom poglavlju biće predstavljeni efekti primene strategije prebukiranosti, uz analizu stopa odbijenih putnika i učestalosti nepojavljivanja. Osim toga, biće predstavljeni i neki primeri iz prakse.

3.1 Efekti nepojavljivanja i otkazivanja letova

Svaki put kada putnik zakasni ili odluči da se ne pojavi, avio-kompanija gubi priliku da sedište proda drugom zainteresovanom putniku, što direktno dovodi do smanjenja profita. Najčešći razlozi za nepojavljivanje putnika na terminalu su:

- vremenske nepogode;

- gužva u saobraćaju do aerodroma;
- kašnjenje leta koji je konekcija za posmatrani;
- promena plana putovanja;
- nepoznavanje procedura čekiranja.

U avio-industriji letovi imaju velike fiksne troškove, dok su varijabilni troškovi manji, čime se povećava marginalni prihod [2] po proizvodu. Prosečna neto marža [3] je oko 2,6% prema Međunarodnoj asocijaciji za vazdušni saobraćaj. Dakle, letovi iziskuju znatna finansijska sredstva i svako prazno sedište predstavlja gubitak. Avio-kompanije imaju nekoliko opcija da smanje posledice nepojavljivanja putnika i praznih sedišta [15].
Prva opcija podrazumeva povećanje cene karte kako bi se nadoknadili troškovi putnika koji se verovatno neće pojaviti, pri čemu se ova procena zasniva na prosečnom broju nepojavljivanja tokom posmatranog perioda. Međutim, kako je avio-tržište vrlo konkurentno, povećanje cena jedne avio-kompanije može izazvati opadanje broja rezervacija i manju zainteresovanost putnika ukoliko ostale ne urade slično [15].
Druga opcija je bila opcija dodatnog naplaćivanja ukoliko se putnik ne bi pojavio, ali i ona bi dovela do neizainteresovanosti za takvu vrstu karata i odustajanje od letova date avio-kompanije. Strategija prebukiranosti stoga izgleda kao dobro rešenje za održavanje putnika zainteresovanim, a takođe i za balansiranje finansijskom situacijom avio-kompanije. Iako postoji rizik da putnik koji je redovno platio let ne bude ukrcan, model prebukiranosti pravi optimalno rešenje za obe strane [15].
Ministarstvo saobraćaja Sjedinjenih Američkih Država (US Department of Transportation-DOT) godinama pravi detaljne izveštaje o neukrcanim putnicima po avio-kompanijama kao i izveštaje o kontroli leta. U Tabeli 1 su za izabrane avio-kompanije u prvoj koloni predstavljeni redom broj neukrcanih putnika (dobrovoljno i nedobrovoljno), broj ukrcanih putnika kao i stopa nedobrovoljno neukrcanih putnika na 10 000 putnika u 2024. godini. Podaci su preuzeti iz izveštaja Ministarstva saobraćaja SAD objavljenog u februaru 2025. godine [17].

[2] Marginalni prihod predstavlja dodatni prihod koji avio-kompanija ostvaruje prodajom jednog dodatnog sedišta i definiše se kao cena karte koju putnik plaća.

[3] Marža je pokazatelj koji izražava odnos između profita i troškova, tj. koliko preduzeće zarađuje na svakoj jedinici prodaje.

Može se primetiti da je najveći broj ukrcanih putnika zabeležen sa *Southwest airlines*, *Delta air lines* i *American airlines*. Interval u kome se kreću nedobrovoljno izbačeni putnici je $[0, 8317]$, dok je *American airlines* kompanija koja ima najviše neukrcanih putnika (dobrovoljno i nedobrovoljno). Ipak, s obzirom na obim posla koji ima, kada uporedimo stope na 10 000 nedobrovoljno neukrcanih putnika primetićemo da stopa od 0.54 za *American airlines* nije najveća. Na zabeleženi obim posla, najveću stopu nedobrovoljnog odbijanja ima *Frontier airlines* sa 2.25%.

JANUARY - DECEMBER 2024					
RANK	CARRIER[1]	DENIED BOARDINGS (DB'S)		ENPLANED PASSENGERS	INVOLUNTARY DB's PER 10,000 PASSENGERS
		VOLUNTARY	INVOLUNTARY		
1	DELTA AIR LINES	66,381	0	154,212,662	0.00
2	ALLEGIANT AIR	703	0	16,982,836	0.00
3	ENDEAVOR AIR	14,362	0	12,465,203	0.00
4	UNITED AIRLINES	21,874	236	122,304,871	0.02
5	ALASKA AIRLINES	8,250	177	33,898,574	0.05
6	SOUTHWEST AIRLINES	35,320	1,360	173,937,806	0.08
7	JETBLUE AIRWAYS	5,014	283	34,814,287	0.08
8	HAWAIIAN AIRLINES	840	153	10,537,530	0.15
9	SKYWEST AIRLINES	33,501	667	42,174,225	0.16
10	REPUBLIC AIRWAYS	11,903	866	18,532,141	0.47
11	SPIRIT AIRLINES	19,794	1,997	41,958,580	0.48
12	AMERICAN AIRLINES	38,267	8,317	155,036,776	0.54
13	ENVOY AIR	6,437	1,391	17,349,643	0.80
14	PSA AIRLINES	6,202	1,521	13,516,809	1.13
15	FRONTIER AIRLINES	5,120	6,988	31,114,918	2.25
	TOTAL	273,968	23,956	878,836,861	0.27

Tabela 1: Odbijeni putnici u 2024.godini prema podacima Ministarstva saobraćaja Sjedinjenih Američkih Država.
Izvor: Izveštaj Ministarstva saobraćaja SAD iz februara 2025 [17].

3.2 Regulative za odbijene putnike

Ukoliko nastane situacija da je let prebukiran i putnici moraju biti odbijeni, povoljnije za obe strane je kada putnici dobrovoljno odustanu od leta. Uobičajeno je da avio-kompanija ponudi kompenzaciju i u tom slučaju i izvrši aukciju. Avio-kompanija može ponuditi i putnicima da sami odrede vrednost za koju bi odustali od leta. Kompenzacija ne mora biti novčana, može se odnositi na preusmeravanje na drugi let, vaučere za letove, smeštaj i obroke u okolini aerodroma, buduća putovanja i pogodnosti ili kombinaciju novčane nadoknade i neke od pogodnosti. Manje povoljna situacija za obe strane je ona u kojoj ne postoje putnici koji bi dobrovoljno odustali ili ne postoji dovoljan broj njih. Tada avio-kompanija mora odlučiti sama koga će da odbije. U Sjedinjenim Američkim Državama kao i u Evropskoj Uniji postoje regulative kojima je visina novčane nadoknade propisana.
Ministarstvo saobraćaja Sjedinjenih Američkih Država zahteva da svaka avio-kompanija, putnicima koji su van svoje volje odbijeni, dostavi pisano obaveštenje o pravima kao i o načinu na koji bira ko će putovati na prebukiranom letu. Putnici kojima je uskraćeno pravo leta imaju mogućnost na novčanu nadoknadu koja zavisi od dužine leta i cene karte [18], pri čemu važi sledeće:

(1) Nije potrebna nikakva kompenzacija ako prevoznik ponudi zamenski prevoz koji je, u trenutku dogovora, planiran da stigne na aerodrom prve stanice putnika, ili ako je nema, na aerodrom krajnje destinacije, najkasnije jedan sat nakon planiranog vremena dolaska originalnog leta.

(2) Kompenzacija mora biti najmanje 200% cene karte do destinacije putnika ili prve stanice, ili 1.075 $, u zavisnosti od toga šta je manje, ako prevoznik ponudi zamenski prevoz koji je planiran da stigne na destinaciju između jednog i dva sata nakon planiranog vremena dolaska originalnog leta (za međunarodne letove između jednog i četiri sata).

(3) Kompenzacija mora biti najmanje 400% cene karte do destinacije putnika ili prve stanice, ili 2.150$, u zavisnosti od toga šta je manje, ako prevoznik ne ponudi zamenski prevoz ili ako je planiran da stigne na destinaciju sa više od dva sata kašnjenja (za međunarodne letove više od četiri sata).

Ako sa p označimo cenu karte, a sa t vreme kašnjenja leta izraženo u satima, funkcija kompenzacije (refundacije) za međunarodne letove se može predstaviti na sledeći način

$$C(p,t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq 1, \\ \min\{2p,\, 1075\$\}, & 1 < t \leq 4, \\ \min\{4p,\, 2150\$\}, & t > 4. \end{cases}$$

Air Serbia ima propisane regulative oko visine novčane nadoknade [19]. One su zasnovane na propisima Uredbe (EZ) br. 261/2004 Evropskog parlamenta i Saveta od 11. februara 2004. godine. U Evropskoj uniji nadoknade zavise od dužine leta izražene u km i iznose:

- 250 € za letove do 1.500 km;
- 400 € za letove od 1.500 km do 3.500 km;
- 600 € za letove duže od 3.500 km.

Funkcija kompenzacije za gore navedene nadoknade izražena u eurima, gde je d udaljenost od početne do krajnje destinacije je

$$C(p,d) = \begin{cases} 250€, & d \leq 1500 \text{ km}, \\ 400€, & 1500 < d \leq 3500 \text{ km}, \\ 600€, & d > 3500 \text{ km}. \end{cases}$$

3.3 Primeri iz prakse

U ovom poglavlju su navedeni neki primeri iz prakse koji opisuju situacije u kojima je model prebukiranosti doveo do nedobrovoljnog uskraćivanja sedišta putnicima i negativnih posledica po avio-kompaniju.
Grupa od trinaest putnika (2011. godine) koja je unapred rezervisala karte putem kompanije *China Southern Airlines* je obaveštena po dolasku na aerodrom da su, zbog prebukiranja, dostupne samo tri karte. Putnici su negativno reagovali na vest, obzirom da su putovali kao grupa, što je dovelo do toga da kompanija, u nastojanju da ublaži posledice, obezbedi naredni let bez dodatnih troškova, izvrši povraćaj 50% cene karte i obezbedi smeštaj i prateće usluge tokom čekanja na sledeći let [13].
United Airlines je 2017. godine izazvala pažnju nakon što je putnica bila primorana da tokom četvoročasovnog leta drži svoje dvogodišnje dete u krilu. Naime, sedište deteta, koje je prethodno bilo unapred rezervisano i plaćeno,

neposredno pre polaska dodeljeno je putniku sa liste čekanja. Federalna uprava za avijaciju (FAA) propisuje da deca starija od dve godine moraju imati sopstveno sedište i pojas tokom leta, što je u ovom slučaju izostalo, čime je ugrožena sigurnost deteta. *United Airlines*je nakon incidenta izdao zvanično izvinjenje i ponudio kompenzaciju i vaučer [20].
9. aprila 2017. godine dogodio se jedan od najpoznatijih incidenata u avio-industriji, kada je na letu *United Airlines* iz Čikaga za Luisvil putnik, dr. David Dao, bio fizički primoran da napusti avion zbog prebukiranosti i potrebe da se oslobodi mesto za članove posade. Putnik je odbio da napusti avion, nakon čega je obezbeđenje primenilo silu, a incident je zabeležen i ubrzo postao viralan na društvenim mrežama. Ovaj događaj izazvao je snažne reakcije javnosti i globalni pad reputacije kompanije [5].
Kao odgovor na ovaj incident, *United Airlines* je uveo značajne izmene u svojoj politici prebukiranja. Maksimalna kompenzacija za putnike koji dobrovoljno odustanu od leta povećana je na čak 10.000$, što je rezultiralo smanjenjem udela nedobrovoljno izbačenih putnika u narednih par godina [15].
Nakon 2017. godine, *United Airlines* je postao znatno oprezniji u pogledu strategija za prebukiranje. Prema podacima Ministarstva saobraćaja Sjedinjenih Američkih Država stope nedobrovoljno odbijenih putnika su pale.[21] Avio-kompanije su počele da primenjuju napredne algoritme i modele veštačke inteligencije radi preciznijeg predviđanja pojavljivanja putnika, čime se smanjuje potreba za nedobrovoljnim uskraćivanjem ukrcavanja. Fokus upravljanja prebukiranjem pomeren je sa maksimizacije profita ka očuvanju poverenja putnika i zaštiti imidža kompanije.

4 Osnovni modeli prebukiranosti

U ovom odeljku predstavljeni su neki osnovni modeli prebukiranosti navedeni u [2] uz pretpostavku da se avio-kompaniji isplati da proda veći broj karata nego što je kapacitet leta. To su:

- model sa jednom klasom putnika,
- model sa dve klase putnika,
- aukcijski model dobrovoljnog odustajanja putnika od leta.

Prva dva modela posmatraju letove sa jednom ili dve klase putnika gde će biti prikazan način na koji se dolazi do optimalnog broja karata koje je potrebno prodati tako da bi se maksimizirao profit. Aukcijski model objašnjava sistem u kome avio-kompanija nudi određenu sumu (izvršava aukciju) putniku da bi on dobrovoljno odustao od leta.

4.1 Model prebukiranosti avio-kompanija sa jednom klasom

Najjednostavniji vid modela prebukiranosti je kada se posmatra jedan let sa jednom klasom. Terminologija koju ćemo koristiti u ove svrhe je sledeća:

- putnici sa kartama (ticketholders) - putnici koji poseduju kartu i avio kompanija već ima prihod od karata;
- putnici sa kartama koji su se pojavili na terminalu (contenders) - putnici koji poseduju kartu (ticketholders) i koji se pojave na terminalu do vremena predviđenog za ukrcavanje na let;
- putnici koji su se ukrcali (boarded passengers) -putnici koji su se pojavili (contenders) i uspešno ukrcali na let;
- prekobrojni putnici (bumped passengers) - putnici koji su se pojavili (contenders) i nisu se uspešno ukrcali na let;
- troškovi nadoknade (compensation costs) - ukupna novčana vrednost koju je avio-kompanija dala prekobrojnim putnicima;
- kapacitet leta (flight capacity) - ukupan broj mesta na datom letu.

Osnovne pretpostavke ovog modela su sledeće:

- Let sadrži samo jednu klasu.
- Posmatra se direktan let u jednom pravcu.
- Putnici pristižu na aerodrom nezavisno jedan od drugog.
- Cena karte je nezavisna od trenutka kada je kupljena.

Oznake koje ćemo koristiti su:

s - kapacitet leta,

p - cena karte,

B - broj prodatih karata,

r - kompenzacija(nadoknada) za putnike koji su neukrcani,

β - verovatnoća pojavljivanja putnika na terminalu,

X - broj osoba koje su se pojavile na terminalu.

Verovatnoća β da se osoba pojavi na terminalu može varirati i zavisi od faktora kao što su: vreme leta, dužina leta, destinacija, cena karte, da li je period praznika itd...
Ako je destinacija dalja i cena karte veća očekujemo da će verovatnoća pojavljivanja putnika biti veća, vođeni time da će ljudi osim u nepredviđenim situacijama gledati da iskoriste kartu koja je skupa.
Dakle, broj osoba X koje se pojave na terminalu je slučajna promenljiva, gde je β verovatnoća da će se putnik pojaviti. U ovom modelu predstavićemo X kao binomnu slučajnu promenljivu gde je $X \in \{1, 2, 3, ..., B\}$, a verovatnoća pojavljivanja svakog od putnika koji ima kartu je ista i iznosi β.
Dakle, $X : \mathcal{B}(B, \beta)$ ima binomnu raspodelu sa parametrima B i β, tj.

$$P(X = j) = \binom{B}{j} \beta^j (1 - \beta)^{B-j}.$$

Prihod

Prihod aviokompanije jednak je broju prodatih karata pomnožen sa cenom karte, tj.

$$P = Bp.$$

Troškovi kompenzacije

U modelu prebukiranosti putnici koji se nisu uspeli ukrcati na let bivaju isplaćeni za iznos karte p i troškove kompenzacije koji iznose rp, gde je r deo karte koji se isplaćuje kao kompenzacija. Dakle, $(1 + r)p$ je iznos koji dobiju putnici koji se nisu ukrcali. Funkcija troškova kompenzacije se definiše sledeći način

$$C(X, s) = \begin{cases} 0, & X \leq s \\ (1 + r)p(X - s), & X > s. \end{cases}$$

Uočava se da je kompenzacija jednaka nuli ukoliko se ne pojavi više putnika od kapaciteta, dok ako se pojavi više putnika isplaćuje se $(1 + r)p$ vrednost razlike broja putnika koji su se pojavili i kapaciteta.

Profit i očekivani profit

Funkcija profita se računa tako što se od prihoda oduzmu rashodi posmatranog leta tj.

$$\pi(B) = Bp - max\{0, (1 + r)p(X - s)\}.$$

Očekivani profit računa se kao očekivanje funkcije profita

$$E[\pi(B)] = Bp - (1 + r)p \cdot E[max\{0, X - s\}].$$

Slučajna promenljiva $C(X) = max\{0, X - s\}$ je slučajna promenljiva sa zakonom raspodele

$$\begin{pmatrix} 0 & s+1-s & 2 & ... & B-s \\ P(X \leq s) & P(X = s+1) & P(X = s+2) & ... & P(s = B) \end{pmatrix}.$$

Očekivanje slučajne promenljive je

$$E[C(X)] = \sum_{i=s+1}^{B} (i - s)\binom{B}{i}\beta^i(1 - \beta)^{B-i}.$$

Dakle, očekivani profit se može izračunati kao

$$E[\pi(B)] = \begin{cases} Bp & X \leq s \\ Bp - (1+r)p \cdot \sum_{i=s+1}^{B} (X-s)\binom{B}{i}\beta^i(1-\beta)^{B-i} & X > s. \end{cases} \quad (6)$$

Maksimizacija profita

Kako bi se maksimizovao profit, potrebno je odgovoriti na pitanje koliko karata je potrebno prodati da bi se ostvario najveći mogući profit.
Videli smo da nadoknada koju avio-kompanija plaća može da se izračuna na sledeći način

$$(1+r)p = p + rp,$$

odnosno da gubitak po jednom putniku iznosi

$$-rp = p - (1+r)p.$$

Gubitak je r puta veći od profita p od karte u slučaju da se putnik ukrcao na let. Optimalna strategija će se iz tog razloga birati na način da je u ravnoteži i da $\frac{1}{1+r}$ deo ove raspodele odgovara prekobrojnim putnicima, a $\frac{r}{1+r}$ deo putnicima koji su se ukrcali.
Za veliko n i $n\beta \geq 10$ binomna raspodela se može aproksimirati normalnom, što pokazuje Moavr-Laplasova teorema.

Definicija 4.1. *(Moavr-Laplasova teorema)*[4] Binomna raspodela može se aproksimirati normalnom na sledeći način:
a)

$$P\{X = j\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, n\beta(1-\beta)}}\, e^{-\frac{(j-n\beta)^2}{2n\beta(1-\beta)}}, \quad n \to \infty.$$

b)

$$P\{a \leq X \leq b\} = F(\frac{b - n\beta}{\sqrt{n\beta(1-\beta)}}) - F(\frac{a - n\beta}{\sqrt{n\beta(1-\beta)}}),$$

[4]Teorema se navodi bez dokaza.

Izračunava se verovatnoća da se na terminalu pojavi manje osoba nego što je kapacitet leta

$$P\{X \leq s\} = F\left(\frac{s - B\beta}{\sqrt{B\beta(1-\beta)}}\right) = \frac{r}{1+r}.$$

Neka je

$$z = F^{-1}\left(\frac{r}{1+r}\right).$$

Tada je uslov

$$\frac{s - B\beta}{\sqrt{B\beta(1-\beta)}} = z.$$

Dakle,

$$\frac{s - B\beta}{\sqrt{B\beta(1-\beta)}} = F^{-1}\left(\frac{r}{1+r}\right),$$

$$s - B\beta = F^{-1}\left(\frac{r}{1+r}\right)\sqrt{B\beta(1-\beta)}.$$

Uvedimo promenljivu $b = \sqrt{B}$

$$s - \beta b^2 = F^{-1}\left(\frac{r}{1+r}\right) b\sqrt{\beta(1-\beta)}.$$

$$\beta b^2 + F^{-1}\left(\frac{r}{1+r}\right)\sqrt{\beta(1-\beta)}\, b - s = 0.$$

$$b = \frac{-F^{-1}\left(\frac{r}{1+r}\right)\sqrt{\beta(1-\beta)} \pm \sqrt{\left(F^{-1}\left(\frac{r}{1+r}\right)\right)^2 \beta(1-\beta) + 4\beta s}}{2\beta}.$$

Izabere se pozitivan koren i dobije analitički oblik rešenja optimalne vrednosti za broj prodatih karata

$$B_{\text{opt}} = b^2 = \left(\frac{-F^{-1}\left(\frac{r}{1+r}\right)\sqrt{\beta(1-\beta)} + \sqrt{\left(F^{-1}\left(\frac{r}{1+r}\right)\right)^2 \beta(1-\beta) + 4\beta s}}{2\beta}\right)^2. \tag{7}$$

Poseban slučaj za $r = 1$ je

$$\frac{r}{1+r} = \frac{1}{2} \implies F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Tada

$$B_{\text{opt}} = \left(\frac{-0 \cdot \sqrt{\beta(1-\beta)} + \sqrt{0 + 4\beta s}}{2\beta}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{\beta s}}{2\beta}\right)^2 = \frac{s}{\beta}.$$

dakle

$$B_{\text{opt}} = \frac{s}{\beta}.$$

Predstavljeni model je pojednostavljen jer pretpostavlja da je funkcija troškova za nadoknadu putnika koji su neukrcani konstantna. Takođe, ne pravi razliku između dobrovoljno i nedobrovoljno prekobrojnih putnika. Model razmatra da su sve karte iste vrste, odnosno da postoji samo jedna klasa, kao i da je broj karata koji je avio-kompanija pustila u prodaju u potpunosti prodat. Uprkos ovim pojednostavljenim pretpostavkama, model odgovara na najvažnija pitanja koja se javljaju primenom prebukiranosti a tiču se prihoda, kapaciteta leta, verovatnoće pojavljivanja putnika i funkcije troškova nadoknade.

Primer 1. Neka je kapacitet leta $s = 150$ mesta, a cena karte $p = 140\$$. Za različite vrednosti β i r koristeći (6) u narednom kodu u programu R određen je optimalan broj karata B, a koristeći (7) izračunate su približne vrednosti.

```
# Parametri
s <- 150
p <- 140
r <- 1
beta <- 0.8

# Opseg pretrage za B
B_min <- s
B_max <- 300

# Očekivani profit E[pi(B)]
Epi <- function(B) {
  if (B <= s) {
    return(p * B)
```

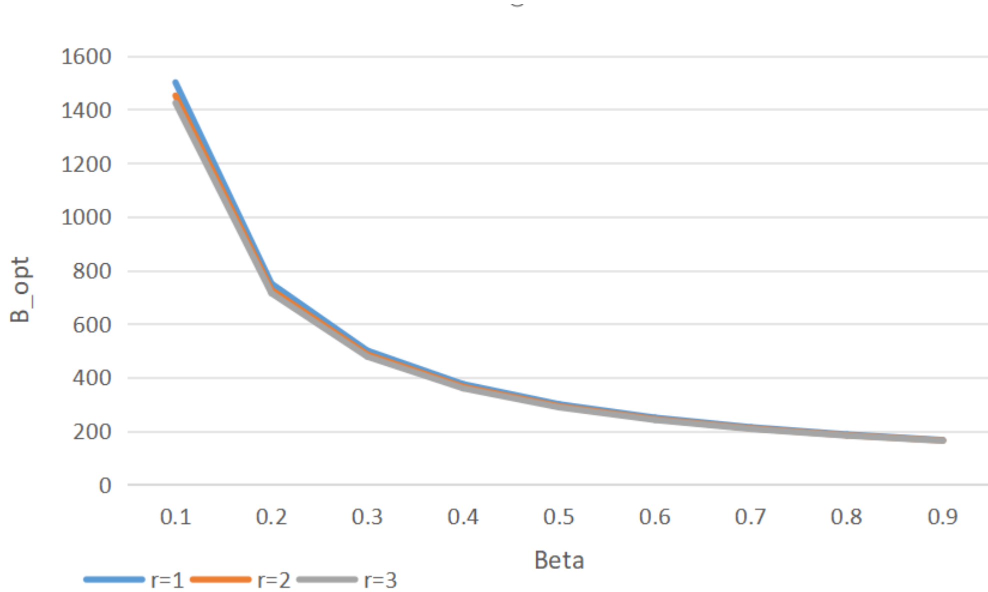
```
  } else {
    i_vals <- (s+1):B
    probs <- dbinom(i_vals, size = B, prob = beta)
    s_sum <- sum( (i_vals - s) * probs )
    return(p * B - (1 + r) * p * s_sum)
  }
}

#Traženje optimalnog B
B_vals <- B_min:B_max
profits <- vapply(B_vals, Epi, numeric(1))
opt_idx <- which.max(profits)
opt_B <- B_vals[opt_idx]
```

Na početku koda dati su ulazni parametri i verovatnoća pojavljvanja $\beta \in \{0.8, 0.85, 0.9\}$. Definisan je opseg u kom se optimalan broj karata B može tražiti i ispisana je funkcija koja računa očekivani profita kao u (6). Optimalni broj karata se određuje tako što se računa profit iz opsega B vrednosti, nakon čega se bira B vrednost koja maksimizuje profit.

Beta	r	B	B_opt
0.8	1	189	188
0.85	1	177	176
0.9	1	167	167
0.8	2	186	185
0.85	2	175	174
0.9	2	165	165
0.8	3	184	183
0.85	3	173	173
0.9	3	164	164

Tabela 2: Optimalne vrednosti B za različito β i r.

U Tabeli 2 su prikazani rezultati. Može se uočiti da je broj karata dobijen iz (7) gotovo identičan vrednosti dobijenoj iz (6), što potvrđuje da se radi o prihvatljivoj aproksimaciji. Parametar r u praksi vrlo retko prelazi vrednost 3, što je i uzeto u proračunu prikazanom u tabeli, jer se radi o približno 3 do 4 puta većoj vrednosti od maksimalne kompenzacije koja se primenjuje u praksi (za međunarodne letove do 400% cene karte). Analiza optimalnog broja karata za različite verovatnoće pojavljivanja pokazuje da je ovaj broj direktno proporcionalan promenama verovatnoća dolaska putnika na let.



Grafikon 1: Optimalne vrednosti B za različito β i r.

Na Grafikonu 1 prikazana je zavisnost optimalnog broja prodatih karata od verovatnoće pojavljivanja putnika β, za različite vrednosti parametra r. Uočava se da sa porastom verovatnoće pojavljivanja putnika opada spremnost avio-kompanija da rizikuju i prodaju dodatne karte. Jasno je da su za različite vrednosti parametra r krive za broj preprodatih karata istog oblika. Ovakav rezultat predstavlja i ponašanje avio-kompanija na tržištu. Što je verovatnije da će se veći broj putnika pojaviti na terminalu, to je manji broj karata u opticaju za prebukiranje. Suprotno tome, kada je verovatnoća pojavljivanja manja, avio-kompanija ima veću sigurnost da neće premašiti kapacitet, zbog čega je spremnija da proda veći broj dodatnih karata.

4.2 Model prebukiranosti avio-kompanija sa dve klase

Razmatra se slučaj sa dve klase: prva (biznis) klasa i druga (ekonomska) klasa.
Za prvu klasu uvode se sledeće oznake:

s_1 - broj sedišta u prvoj klasi,

p_1 - cena karte za prvu klasu,

B_1 - broj prodatih karata za prvu klasu,

β_1 - verovatnoća pojavljivanja putnika u prvoj klasi,

r_1 - kompenzacija(nadoknada) za putnike prve klase koji su neukrcani.

Za drugu klasu uvode se sledeće oznake:

s_2 - broj sedišta u drugoj klasi,

p_2 - cena karte u drugoj klasi,

B_2 - broj prodatih karata u drugoj klasi klasu,

β_2 - verovatnoća pojavljivanja putnika u drugoj klasi,

r_2 - kompenzacija(nadoknada) za putnike druge klase koji su neukrcani.

Pretpostavke koje se dodatno uvode u ovom modelu su sledeće:

- Razmatra se strategija u kojoj se prodaja dve vrste karata odvija nezavisno jedna od druge.
- Koriste se dve nezavisne binomne raspodele.
- Putnici sa kartom za prvu klasu imaju veću verovatnoću pojavljivanja nego putnici sa kartom za drugu klasu, jer su napravili veću novčanu investiciju kupujući kartu za prvu klasu tj. $\beta_1 > \beta_2$.
- Kompenzacija za putnike prve klase je veća od kompenzacije za putnike druge klase jer je cena karte bila veća tj. $r_1 > r_2$.

Verovatnoće da se tačno i putnika prve klase i tačno j putnika druge klase pojavi na terminalu su sledeće:

$$\binom{B_1}{i}\beta_1^i(1-\beta_1)^{B_1-i}, \qquad \binom{B_2}{j}\beta_2^j(1-\beta_2)^{B_2-j}.$$

Shodno tome, uvode se slučajne promenljive X_1 i X_2 koje redom predstavljaju broj osoba koje su se pojavile na terminalu iz prve i druge klase. Obe slučajne promenljive imaju bimomnu raspodelu tj.

$$X_1 : \mathcal{B}(B_1, \beta_1) \text{ i } X_2 : \mathcal{B}(B_2, \beta_2).$$

Prihod

Prihod avio-kompanije je jednak zbiru prihoda prve i druge klase tj. broju prodatih karata u odgovarajućoj klasi pomnožen sa cenom karte za tu klasu

$$P = B_1 p_1 + B_2 p_2.$$

Troškovi kompenzacije

Troškovi kompenzacije se modeliraju za četiri različita slučaja, u zavisnosti od toga koliko se putnika pojavilo u kojoj klasi. Za putnike prve klase, koristi se $(1+r_1)p_1$ kao kompenzacija, a za putnike druge klase $(1+r_2)p_2$. Definiše se funkciju troškova

$$C(X_1, X_2, s_1, s_2) := C$$

$$C = \begin{cases} 0, & X_1 \le s_1,\ X_2 \le s_2, \\ p_1(1+r_1)(X_1 - s_1), & X_1 > s_1,\ X_2 \le s_2, \\ \max\{p_2(1+r_2)((X_2 - s_2) - (s_1 - X_1)), 0\}, & X_1 \le s_1,\ X_2 > s_2, \\ p_1(1+r_1)(X_1 - s_1) + p_2(1+r_2)(X_2 - s_2), & X_1 > s_1,\ X_2 > s_2. \end{cases} \tag{8}$$

Troškovi kompenzacije mogu postojati isključivo ako je broj putnika koji su se pojavili na terminalu za ukrcavanje u prvu ili drugu klasu veći od kapaciteta. U suprotnom funkcija troškova je jednaka nuli (prvi slučaj).
Ako se u prvoj klasi pojavi više putnika nego što je sedišta, isplaćuje se kompenzacija u visini $p_1(1+r_1)$ za tu razliku (drugi slučaj).
Treći slučaj objašnjava se time da višak putnika druge klase može zauzeti

slobodna sedišta u prvoj klasi. Ako je njih manje nego preostalih sedišta u prvoj klasi, ne isplaćuje se kompenzacija i svi putnici su smešteni. Ukoliko je pak broj putnika koji nisu smešteni u drugoj klasi veći od preostalog broja sedišta u prvoj, isplaćuje im se kompenzacija onima koji su odbijeni i to u iznosu od $p_2(1 + r_2)$. S druge strane, višak putnika prve klase ne može biti smešten u sedišta druge klase.
Četvrti slučaj je slučaj kada su obe klase popunjene i u obe klase postoji višak putnika-tada im se isplaćuju odgovarajuće kompenzacije u visini predviđenoj za njihovu klasu.

Očekivani profit

Očekivani profit se računa na sledeći način

$$E[\pi(B_1, B_2)] = B_1p_1 + B_2p_2 - \sum_{i=1}^{B_1}\sum_{j=1}^{B_2} P\{X_1 = i\}P\{X_2 = j\}C =$$

$$= B_1p_1 + B_2p_2 - \sum_{i=1}^{B_1}\sum_{j=1}^{B_2} \binom{B_1}{i}\binom{B_2}{j}\beta_1^i(1-\beta_1)^{B_1-i}\,\beta_2^j(1-\beta_2)^{B_2-j}C. \quad (9)$$

Primer 2. Neka su date informacije o kapacitetu prve i druge klase s_1 i s_2, cenama karata p_1 i p_2 i paramterima r_1 i r_2 koje služe za određivanje visine kompenzacije:
$s_1 = 20, s_2 = 130, p_1 = 280\$, p_2 = 140\$, r_1 = r_2 = 1.$
Za različite vrednosti verovatnoće nepojavljivanja iz (9) može se izračunati B_{opt1} i B_{opt2}. Naredni kod u programu R pronalazi optimalni broj karata.

```
#Parametri
s1 <- 20
s2 <- 130
p1 <- 280
p2 <- 140
r1 <- 1
r2 <- 1

Beta1 <- 0.9
Beta2 <- 0.85
```

```
#Funkcija troškova

cost <- function(X1, X2, s1, s2, p1, p2, r1, r2) {

  if (X1 <= s1 && X2 <= s2) return(0)

  if (X1 > s1 && X2 <= s2)
    return(p1 * (1+r1) * (X1 - s1))

  if (X1 <= s1 && X2 > s2)
    return(max(p2 * (1+r2) * ((X2 - s2) - (s1 - X1)), 0))

  if (X1 > s1 && X2 > s2)
    return(
      p1 * (1+r1) * (X1 - s1) +
        p2 * (1+r2) * (X2 - s2)
    )
}


#Očekivani profit

profit <- function(B1, B2) {

  base <- B1*p1 + B2*p2

  x1_vals <- 0:B1
  x2_vals <- 0:B2

  px1 <- dbinom(x1_vals, B1, Beta1)
  px2 <- dbinom(x2_vals, B2, Beta2)

  expected_cost <- 0

  for (i in x1_vals) {
    for (j in x2_vals) {
```

```
      expected_cost <- expected_cost +
        px1[i+1] * px2[j+1] *
        cost(i, j, s1, s2, p1, p2, r1, r2)
    }
  }

  return(base - expected_cost)
}


#Pronalazak optimalnog broja karata

B1_range <- 0:80
B2_range <- 0:200

best_B1 <- 0
best_B2 <- 0
best_val <- -Inf

for (B1 in B1_range) {
  for (B2 in B2_range) {

    val <- profit(B1, B2)

    if (val > best_val) {
      best_val <- val
      best_B1 <- B1
      best_B2 <- B2
    }
  }
}
```

Na početku koda su definisani ulazni parametri dati u primeru i verovatnoće pojavljivanja β_1 i β_2. Verovatnoće pojavljivanja β_1 će se uzimati iz skupa $\{0.85, 0.9, 0.95\}$, a β_2 iz skupa $\{0.8, 0.85, 0.9\}$. Zatim su kao u (8) i (9) definisane funkcija troškova i očekivani profit. Na kraju se pronalazi optimalan broj karata tako što se prvo postavi interval u kom se mogu kretati β_1 i β_2. Kroz dvostruku petlju se ispituje svaka kombinacija ovih vrednosti i izračunava profit. Uslov `if (val > best_val)` proverava da li trenutni profit premašuje najveći profit do tog trenutka i ako premašuje ažurira promenljive B_1, B_2 i `val` čuvajući nove vrednosti. Na taj način se pronalazi optimalan broj karata u svakoj od klasa.

Beta_1	Beta_2	B_opt1	B_opt2
0.85	0.8	23	165
0.9	0.8	22	165
0.95	0.8	20	166
0.85	0.85	23	155
0.9	0.85	22	155
0.95	0.85	20	155
0.9	0.9	22	146
0.95	0.9	21	145

Tabela 3: Optimalne vrednosti karata za prvu i drugu klasu

Tabela 3 predstavlja dobijene rezultate. Uočava se da je prebukiranost u prvoj klasi manja od prebukiranosti u drugoj klasi, što je optimalna politika kojom se služe avio kompanije. Razlog za to su veće stope pojavljivanja putnika prve klase kao i veći troškovi nadoknade u slučaju izbacivanja putnika prve klase [2].
Dalje se vrši poređenje optimalnog broja prodatih karata u slučaju kada se model prebukiranosti primenjuje odvojeno na dve klase i kada se primenjuje na let sa jednom klasom istog kapaciteta (B_{opt}). Verovatnoća pojavljivanja putnika na letu sa jednom klasom uzima se kao $\beta = \beta_2$.
Tabela 4 jasno pokazuje da su dobijene vrednosti u oba slučaja veoma slične, što dovodi do zaključka da uvećavanje broja klasa ne utiče značajno na optimalnu strategiju prebukiranja [2].

Beta_1	Beta_2	B_opt1+B_opt2	B_opt za Beta=Beta_2
0.85	0.8	188	189
0.9	0.8	187	189
0.95	0.8	186	189
0.85	0.85	178	177
0.9	0.85	177	177
0.95	0.85	175	177
0.9	0.9	168	167
0.95	0.9	166	167

Tabela 4: Različite optimalne vrednosti za let sa jednom i sa dve klase

4.3 Aukcijski model prebukiranja

J.L.Simon[5] je 1968. godine prvi predložio model aukcije u avio-kompanijama, [2]. Uočio je da bi isplata kompenzacije putniku koji dobrovoljno pristane da odustane od leta predstavljala efikasno i ekonomski isplativo rešenje za prekomerne rezervacije. Na taj način putnici nikada ne bi mogli biti odbijeni za let bez odgovarajuće nadoknade, dok bi idealan sistem bio onaj u kojem se dobrovoljni kandidati za odustajanje sami javljaju. Drugi vid isplate bi bio aukcijski model u kome avio-kompanija u određenim vremenskim intervalima objavljuje moguće iznose nadoknade. Posmatra se slučaj dobrovoljnog odustajanja neprekidnog modela, gde avio-kompanije objavljuju moguće iznose kompenzacija.

Ovim pristupom aukcija se započinje pre samog leta i pitanje prebukiranosti se rešava na dobrovoljnoj bazi putnika.

Uvode se pretpostavke koje važe za ovaj model:

- n putnika sa kartama dolazi da se ukrca na let kapaciteta s, pri čemu je $n > s$.
- Svaki putnik ima graničnu cenu (*limit price*), koja predstavlja najmanju nadoknadu za koju je spreman da odustane od sedišta.
- Avio-kompanija može, bez dodatnog troška, da prebaci putnika na neki svoj kasniji let.

[5]Julian Lincoln Simon je bio američki ekonomista.

U idealnoj aukciji kompanija sukcesivno povećava ponudu nadoknade, a kada ponuda premaši putnikovu graničnu cenu, putnik dobrovoljno odustaje od leta. Neka su granične cene putnika $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ i pretpostavimo da su poređane tako da je $\Gamma_i \leq \Gamma_j$ za $i < j$. Definiše se:

- $D(x)$ – verovatnoća da će slučajno izabran putnik odustati od leta za cenu x .
- Y_m – iznos kompenzacije koji avio-kompanija mora da plati putniku Γ_m (m-tom po redu koji pristaje) da bi napustio sedište.
- X_m – ukupna nadoknada koju kompanija isplaćuje kada m putnika odustane od leta. Važi $X_m = \sum_{i=1}^m Y_i$.

Cilj je da se izračuna očekivana vrednost $E[X_m]$. Za to je potrebno pronaći $E[Y_i]$ za $i \leq m$, jer je

$$E[X_m] = \sum_{i=1}^{m} E[Y_i].$$

Propozicija 1. [6] Neka su $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ nenegativne slučajne promenljive sa funkcijom raspodele $D(x)$. Obeležimo rastuće uređen niz sa $\Gamma_1 \leq \cdots \leq \Gamma_n$. Tada važi

$$E[Y_m] = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} \int_0^{\infty} [D(x)]^{\,m} \, [1 - D(x)]^{\,n-m} \, dx.$$

Dokaz. Neka su reakcije n putnika međusobno nezavisne i neka je za datu cenu $x \geq 0$ događaj da pojedinačni putnik prihvati kompenzaciju x sa verovatnoćom $D(x)$. Za fiksno x verovatnoća da tačno i od n kandidata prihvati kompenzaciju x je binomna

$$G_i(x) = \binom{n}{i} D(x)^i \big(1 - D(x)\big)^{\,n-i}.$$

Neka je dalje $D_m(x)$ funkcija raspodele slučajne promenljive Y_m (dakle $D_m(x) = P(Y_m \leq x)$). Po definiciji, uslov da Γ_m (m-ti po redu putnik koji pristaje)

[6] Propozicija preuzeta iz [2].

ima graničnu cenu manju ili jednaku x je ekvivalentan događaju da najmanje m kandidata pristane na cenu x. Zato

$$D_m(x) = \sum_{i=m}^{n} G_i(x) = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} G_i(x).$$

Za nenegativnu slučajnu promenljivu Y_m važi

$$\mathbb{E}[Y_m] = \int_0^\infty \big(1 - D_m(x)\big)\, dx.$$

Ubacivanjem izraza za $D_m(x)$ dobijamo

$$\mathbb{E}[Y_m] = \int_0^\infty \sum_{i=0}^{m-1} G_i(x)\, dx = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} \int_0^\infty D(x)^i \big(1 - D(x)\big)^{n-i}\, dx,$$

čime je propozicija dokazana. □

Empirijskim analizama je zabeleženo (Nagarajan[7], 1978) da kumulativna funkcija raspodele granične cene ima identičan oblik eksponencijalnom obliku $D(x) = 1 - e^{-Ax}$ za neku konstantu A.

Propozicija 2. [8] Ako $D(x) = 1 - e^{-Ax}$, za neko A konstantno, tada važi

$$E[X_m] = \frac{1}{A}\left[m - (n-m)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-m+1}\right)\right].$$

Dokaz. Prvi korak je izračunavanje $\mathbb{E}[Y_m]$ koristeći prethodnu propoziciju i specijalni oblik $D(x) = 1 - e^{-Ax}$. U integralu iz propozicije uvedimo promenljivu $u = D(x) = 1 - e^{-Ax}$. Sledi

$$du = Ae^{-Ax}\, dx = A(1-u)\, dx \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{du}{A(1-u)}.$$

Dalje naredni integral postaje

$$\int_0^\infty D(x)^m \big(1 - D(x)\big)^{n-m}\, dx = \int_{u=0}^{1} u^m (1-u)^{n-m} \frac{du}{A(1-u)} =$$

[7] U literaturi [2] se pojavljuje podatak o eksponencijalnom obliku kumulativne funkcije raspodele granične cene zabeleženoj kod Nagarajan. U referencama spomenutog rada stoji Nagarajan, K.V. 1979. *On an auction solution to the problem of airline overbooking.* Transportation Research A13: 111–114., gde se može pronaći više o ovoj temi.

[8] Propozicija preuzeta iz [2].

$$= \frac{1}{A}\int_0^1 u^m(1-u)^{n-m-1}\,du.$$

Integral na desnoj strani je Beta funkcija i računa se kao

$$\int_0^1 u^m(1-u)^{n-m-1}\,du = \frac{i!(n-m-1)!}{(n-m+i)!} \quad = \frac{1}{n-m}\binom{n}{m}^{-1}.$$

Stoga za $\mathbb{E}[Y_m]$ se dobija

$$\mathbb{E}[Y_m] = \sum_{i=0}^{m-1}\binom{n}{i}\cdot\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{n-i}\binom{n}{i}^{-1} = \frac{1}{A}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{n-i}.$$

Uvodeći promenu indeksa $j = n - i$, zbir se može zapisati i kao

$$\mathbb{E}[Y_m] = \frac{1}{A}\sum_{j=n-m+1}^{n}\frac{1}{j}.$$

Sada $X_m = \sum_{r=1}^{m} Y_r$, pa je

$$\mathbb{E}[X_m] = \sum_{r=1}^{m}\mathbb{E}[Y_r] = \frac{1}{A}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=n-r+1}^{n}\frac{1}{j}.$$

Dvostruku sumu redukujemo na sumu preko $j = n-m+1, \ldots, n$

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=n-r+1}^{n}\frac{1}{j} = \sum_{j=n-m+1}^{n}\frac{j-(n-m)}{j} = \sum_{j=n-m+1}^{n}\left(1-\frac{n-m}{j}\right).$$

Izračunavanjem te sume dobija se

$$\sum_{j=n-m+1}^{n}\left(1-\frac{n-m}{j}\right) = m-(n-m)\sum_{j=n-m+1}^{n}\frac{1}{j}.$$

Konačno,

$$\mathbb{E}[X_m] = \frac{1}{A}\left[m-(n-m)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{n-m+1}\right)\right],$$

što je traženi izraz. □

Napomena 1. Koristeći aproksimaciju $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\approx \ln n$ dobija se

$$E[X_m]\approx \frac{1}{A}\left[m-(n-m)\ln\frac{n}{n-m}\right].$$

Ne postoji razlog da se pretpostavi da je vrednost parametra A konstantna u svim mogućim situacijama. Na primer, putnici će verovatno prihvatiti manju nadoknadu ukoliko sledeći let polazi ubrzo nakon prvobitnog. Ipak, za potrebe ovog modela pretpostavlja se da je A konstanta u svim slučajevima.

Primer 3. Posmatra se let sa kapacitetom od $s = 150$ mesta i sa malim brojem prebukiranih putnika, gde putnik označen sa Γ_1, ima graničnu cenu kompenzacije od 100\$. Iz toga sledi

$$\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{150}\approx 100\$$$

$$A\approx\frac{1}{15000}.$$

Shodno tome, očekivana nadoknada potrebna da se dobrovoljno prebaci m od ukupno n putnika putem aukcije može se približno izraziti kao

$$E[X_m]\approx \frac{1}{15000}\left[m-(n-m)\ln\frac{n}{n-m}\right],$$

što je značajno niži trošak u poređenju sa nedobrovoljnim izbacivanjem istog broja putnika, koje bi iznosio minimum 200% cene karte po putniku (u slučaju dužih međunarodnih letova i više), uz dodatne negativne efekte na reputaciju kompanije.

5 Model prebukiranosti na dobrovoljnoj bazi

Najnepovoljniji ishod u modelu prebukiranosti nastaje kada su putnici nedobrovoljno uskraćeni za ukrcavanje. Time ne samo da trpe štetu zbog propuštanja planiranog leta, već i narušavaju svoje dalje planove, dok avio-kompanije gube na ugledu i poverenju putnika. Iako avio-kompanije preduzimaju različite inicijative kako bi ublažile ovaj problem, ne postoji garancija da će one dati očekivane rezultate. Zbog toga su neke kompanije, među kojima je i *Southwest Airline* [5], potpuno odustale od primene ovog modela. Nameće se, međutim, pitanje da li postoji način da se model prebukiranosti ipak koristi, a da pritom ne nanosi štetu ni jednoj strani.
U ovom delu rada biće predstavljen model prebukiranosti na dobrovoljnoj bazi u kojem putnici više nisu pasivni akteri, već aktivno učestvuju na osnovu sopstvenih preferencija, procena i svesti o prebukiranosti željenog leta. Osnovna ideja modela zasniva se na radu [5] i počiva na principu ekvilibrijuma racionalnih očekivanja između avio-kompanije i putnika.
Sa stanovišta putnika, ovakav pristup nudi mogućnost kupovine karata za željeni let po nižoj ceni, uz potpunu garanciju refundacije u slučaju da ne budu ukrcani. Pored toga, putnici imaju informaciju o stepenu prebukiranosti leta i mogu samostalno da procene da li žele da prihvate rizik niže cene uz mogućnost uskraćenog ukrcavanja ili da se, bez rizika, opredele za drugi, manje poželjan, let ka istoj destinaciji.
Iz perspektive avio-kompanije, ključni zadatak postaje određivanje optimalnog broja ovakvih karata, njihove cene i visine refundacije. Na taj način izbegavaju se neprijatne situacije nedobrovoljnog uskraćivanja ukrcavanja i negativne posledice po ugled i poverenje putnika.

5.1 Pretpostavke i oznake u modelu

Da bismo uveli model prebukiranosti na dobrovoljnoj bazi naredne pretpostavke moraju da važe:

- Putnici će vremenom biti upućeniji u proces i način vrednovanja avionskih karata i biće voljni da svoje procene dostave avio-kompanijama koje traže dobrovoljce za kupovinu karata prebukiranih letova.

- Avio-kompanije će se u potpunosti pridržavati svojih uslova i pravila u trenutku prodaje karata.

- Avio-kompanije će podatke o broju nepojavljenih putnika za posmatrani let objavljivati javno u cilju informisanja potencijalnih dobrovoljno prijavljenih putnika za bukiran let. Takođe se ovde pretpostavlja da avio-kompanija ima svu potrebnu analitičku stručnost za takav vid informisanja.

Dobrovoljno prebukiranje podrazumeva sledeće ponašanje:

Ukoliko ima mesta na željenom letu kupuje se karta po regularnoj ceni.

Ukoliko je željeni let popunjen postoje dve mogućnosti:
a) putnik kupuje kartu po nižoj ceni svestan rizika da će možda biti odbijen.
b) putnik kupuje kartu manje željenog leta koji nije popunjen.

Ključne odluke koje avio-kompanija mora doneti vezane su, kao i u prethodno opisanim modelima prebukiranosti, za cenu karte i količinu dostupnih karata za prodaju.
Posmatra se model za letove druge (ekonomske klase). Na letove za prvu klasu neće biti primenjivana preprodaja karata.
Uvode se sledeće oznake:

s	kapacitet leta (broj sedišta u drugoj klasi);
p_2	regularna cena karte;
p_1	cena karte za bukiran let;
C	troškovi leta;
c	troškovi leta po putniku;
v_1	putnikovo vrednovanje željenog leta izraženo u novčanoj jedinici;
v_2	putnikovo vrednovanje drugog leta koji ga vodi do destinacije;
r	suma za refundaciju;
Q	broj sedišta koja su prodata nakon prebukiranja leta;
$X \geq 0$	broj putnika koji se nisu pojavili (slučajna promenljiva);
$f(x)$	funkcija gustine slučajne promenjive X;
$F(x)$	funkcija raspodele slučajne promenjive X.

Sa p_2 je označena cena karte dok ima mesta u avionu, ali kada se kapacitet leta popuni, cena se spušta na p_1 i postaje pristupačnija većem broju putnika

koji su posmatrali taj let. Oni koji plate mesto po ceni p_1 imaće određenu verovatnoću ukrcavanja na let, a razmena informacija između avio-kompanije i putnika o prethodnim verovatnoćama ukrcavanja će pomoći odluci. Vrednosti v_1 i v_2 predstavljaju iznose koje su putnici spremni da plate za kartu željenog leta, odnosno za kartu alternativnog leta.
Dalje, postavlja se pitanje zašto bi neko uzeo kartu za let koji je prebukiran. Navedena problematika zavisi od hitnosti putovanja, uverenja putnika kao i problema odlučivanja. Veruje se da dokle god postoje putnici koji se nisu pojavili na terminalu ujedno će postojati i putnici kojima će odgovarati niže cene karata uz rizik neizvesnosti. Stimulans za to je niža cena karata, garantovan povraćaj novca, kao i dostupne informacije o broju nepojavljivanja na datoj destinaciji. Uvek postoje putnici koji iz nekog razloga moraju hitno da otputuju ili oni koji su kasno napravili planove, posebno na dan većih praznika i upravo njima je interesantna strategija prebukiranosti.
Primetimo da važi $v_2 \leq v_1$ jer putnikovo vrednovanje kasnijeg leta u odnosu na željeni let je uvek manje (ili jednako) nego vrednovanje željenog leta.
Za pravilnu konstrukciju modela mora da važi i sledeća nejednakost

$$c \leq p_1 \leq p_2 \leq v_2 \leq v_1,$$

koja nam kaže da troškovi leta po putniku moraju biti manji od cena leta p_1 i p_2 , a cene leta moraju biti manje od putnikovog vrednovanja leta (sume novca koju je putnik spreman izdvojiti). Takav poredak ima smisla jer stvarne cene karata uvek moraju biti veće od troškova po putniku (da bi se ostvario profit), dok bi bilo dobro da avio-kompanija stavi manje (ili jednake) cene u odnosu na putnikovo vrednovanje istih i time poveća zainteresovanost za kupovinu karata.
Drugo pitanje koje se postavlja je zašto bi avio-kompanija garantovala povraćaj novca i potencijalno platila dodatno putnicima koji su se prijavili za već prebukiran let. Avio-kompanija želi primeniti model prebukiranja ali na način da ne škodi ni jednoj strani i da obezbedi zadovoljstvo putnika. Da bi model zainteresovao putnike mora postojati nadoknada koja će im kompenzovati negativnu stranu faktora neizvesnosti sa ovom vrstom karata.

5.2 Problematika iz ugla putnika

Putnik ima opciju da za prebukirani let uzme kartu po nižoj ceni p_1 ili da plati po ceni p_2 manje željeni let koji ima nepovoljne termine, datume ili

usluge. Ekvilibrijum (ravnotežu) će predstavljati tačka u kojoj je bukiranje željenog prebukiranog leta jednako privlačno kao i bukiranje leta koji nije prebukiran ali nije željeni. Ta tačka ravnoteže bi trebalo da maksimizuje prihode avio-kompanije.
Kao što je već spomenuto, broj putnika koji se nisu pojavili je slučajna promenljiva X, a sa x ćemo označiti broj putnika koji se nisu pojavili na posmatranom letu.

Ako je $Q \leq x$, onda je broj praznih mesta u avionu jednak $x - Q$, a svi putnici koji su se pojavili na terminalu su smešteni.

Ako je $Q > x$, onda će $Q - x$ putnika dobiti povrat novca i refundaciju.

Dalje, neka je $\bar{\beta}$ uverenje putnika o verovatnoći da će biti smešteni na prebukirani let. Tada, ako im je prebukirani let privlačniji od drugog ili kasnijeg leta, mora da važi sledeća nejednakost

$$v_2 - p_2 \leq \bar{\beta}(v_1 - p_1) + \beta r \tag{10}$$

pri čemu je $\beta + \bar{\beta} = 1$.
Refundacija je ograničena razlikom putnikovog vrednovanja leta i cene karte

$$r \leq v_2 - p_2,$$

a onda je

$$r \leq v_2 - p_2 \leq v_1 - p_1.$$

Kako putnici sami pretpostavljaju vrednost verovatnoće da budu smešteni, oni imaju određene pretpostavke i o ceni po kojoj mogu rezervisati sedište. Tu cenu označavamo sa p_p i ona nije poznata avio-kompaniji. Na sličan način i avio-kompanija formira procenu o ceni koju je putnik spreman da plati, označenu kao p_A.
Dakle putnik veruje da će sa verovatnoćom $\bar{\beta}$ biti smešten, a p_p je maksimalna cena koju je spreman da plati za rezervaciju prebukiranog leta, što iz (10) daje

$$v_2 - p_2 \leq \bar{\beta}(v_1 - p_p) + \beta r$$

$$v_2 - p_2 \leq (1 - \beta)v_1 - (1 - \beta)p_p + \beta r$$

$$(1 - \beta)p_p \leq v_1 - v_2 + p_2 - \beta(v_1 - r)$$

$$\boxed{p_p \leq \frac{v_1 - v_2 + p_2 - \beta(v_1 - r)}{1 - \beta}\,.} \tag{11}$$

Matematički odnos verovatnoće i cene p_p može se prikazati kao

$$p_p = f(\bar{\beta}), \quad \text{pri čemu} \quad \frac{dp_p}{d\bar{\beta}} > 0,$$

gde je p_p funkcija koja zavisi od $\bar{\beta}$.
Ako je verovatnoća koju putnik formira da neće biti smešten veoma mala ($\beta \to 0$), tada je iz (11) njegova rezervaciona cena

$$\lim_{\beta \to 0} p_p = v_1 - v_2 + p_2.$$

To znači da će putnikova cena koju je spreman da plati biti jednaka regularnoj ceni p_2 plus razlika njegovog vrednovanja v_1 i v_2 za oba leta (željeni i alternativni).
Ako je verovatnoća da neće biti smešten gotovo sigurna ($\beta \to 1$), rezervaciona cena raste bez ograničenja

$$\lim_{\beta \to 1} p_p = \infty.$$

Zaključujemo da će putnik pristati na kupovinu karte za prebukiran let ako je ponuđena cena manja ili jednaka njegovoj rezervacionoj ceni

$$p_1 \leq p_p.$$

Cena p_1 predstavlja kritičnu tačku odluke u problematici da se izvrši prebukiranje na željenom letu ili kupi potvrđena karta za drugi, ali manje poželjan let. Što je ta cena niža, to je veća verovatnoća da će putnik izabrati prebukiran let.

5.3 Problematika iz ugla avio-kompanije

Avio-kompanija ne zna putnikovu cenu rezervacije p_p, ali pretpostavlja cenu p_A (pretpostavka avio-kompanije o ceni koju je putnik spreman da plati).
Iz ugla kompanije poželjno bi bilo da $p_A \leq p_1$, jer prodaja prebukiranih karata po ceni koja je niža od p_A donosi manji prihod.

Profit avio-kompanije

Razmatraće se dva slučaja, u zavisnosti od toga da li je let popunjen ili nije. Ukoliko let nije popunjen profit se može izraziti kao

$$sp_2 + Qp_1 - \big(s - (x - Q)\big)c - C,$$

gde avio-kompanija prihoduje od broja karata prodatih po ceni p_1 i p_2. Broj karata prodat po ceni p_2 jednak je kapacitetu s (pretpostavljamo da je let u potpunosti prodat), dok je broj karata prodat po ceni p_1 jednak Q. Troškovi po putniku su

$$\big(s - (x - Q)\big)c = sc - xc + Qc.$$

Kada je $x < Q$, odnosno broj nepojavljenih putnika manji od broja karata koje su prodate po nižoj ceni, onda je prihod

$$sp_2 + xp_1 - (Q - x)r - sc - C,$$

gde je $(Q - x)$ broj putnika kojima će biti isplaćena refundacija troškova.

Očekivani profit

Broj nepojavljenih putnika je slučajna promenljiva sa funkcijom gustine $f(x)$. Ako je poznat je broj sedišta na letu, fiksni trošak leta, fiksni trošak po putniku i refundacija za putnike bez sedišta, onda se očekivani prihod može se odrediti pomoću sledećeg izraza

$$\begin{aligned}\pi(Q, p_1) = &\int_0^Q \big[sp_2 + xp_1 - (Q - x)r - sc - C\big] f(x)\, dx + \\ &+ \int_Q^\infty \big[sp_2 + Qp_1 - (s - (x - Q))c - C\big] f(x)\, dx, \end{aligned} \tag{12}$$

gde $\pi(Q, p_1)$ zavisi od količine karata Q koje su prodate po ceni p_1 i od cene p_1. Ako avio-kompanija pretpostavlja da svi putnici imaju rezervacionu cenu p_A, ona će izabrati $p_1 = p_A$ i količinu

$$Q(p_1) = \underset{Q}{\operatorname{argmax}}\, \pi(Q, p_1).$$

Dalje je izraz (12) jednak

$$\pi(Q, p_1) = sp_2 - sc - C + \int_0^Q xp_1 f(x)\,dx - \int_0^Q r(Q-x)f(x)\,dx +$$

$$+ \int_Q^\infty Qp_1 f(x)\,dx + \int_Q^\infty c(x-Q)f(x)\,dx.$$

Izvod po Q je

$$\frac{\partial}{\partial Q}\pi(Q, p_1) = p_1 \int_Q^\infty f(x)\,dx - r\int_0^Q f(x)\,dx - c\int_Q^\infty f(x)\,dx. \tag{13}$$

Sada se definiše

$$F_Q = \int_0^Q f(x)\,dx,$$

$$\bar{F_Q} = \int_Q^\infty f(x)\,dx,$$

gde važi

$$F_Q = 1 - \bar{F_Q}.$$

Izraz (13) postaje

$$\frac{\partial}{\partial Q}\pi(Q, p_1) = p_1\bar{F_Q} - rF_Q - c\bar{F_Q}. \tag{14}$$

Izraz (14) se izjednačava sa nulom

$$\frac{\partial}{\partial Q}\pi(Q, p_1) = 0.$$

Drugi izvod je

$$\frac{\partial^2}{\partial Q^2}\pi(Q, p_1) = -rf(Q) - (p_1 - c)f(Q),$$

a jedinstvenost maksimizatora garantuje sledeći uslov

$$\frac{\partial^2}{\partial Q^2}\pi(Q, p_1) < 0$$

koji važi jer je po pretpostavci cena karte p_1 sigurno veća od troškova po putniku c.
Dakle kada (14) izjednačimo sa 0 dobija se

$$p_1\bar{F_Q} - rF_Q - c\bar{F_Q} = 0,$$

$$p_1(1 - F_Q) - rF_Q - c(1 - F_Q) = 0.$$

Tada je

$$F_Q = \frac{p_1 - c}{p_1 + r - c}. \tag{15}$$

Primetimo da se, za datu cenu p_1, optimalna količina prodatih karata povećava kada je cena refundacije r niža. Važi i obratno. Trošak po putniku c je uglavnom fiksan, pa zbog toga ne utiče bitno na optimalan nivo prebukiranosti Q. Samim tim, porast cene p_1 vodi ka povećanju optimalne količine prodatih karata Q. S obzirom na to da putnicima odgovara da cena karte bude što niža, ravnoteža između interesa avio-kompanije i putnika uspostavlja se primenom principa ekvilibrijuma racionalnih očekivanja.

5.4 Ekvilibrijum racionalnih očekivanja

Ekvilibrijum racionalnih očekivanja pretpostavlja da pojedinci koriste sve dostupne informacije na optimalan način. Time se razlikuje od tradicionalne ekonomske teorije, prema kojoj se informacije interpretiraju u skladu sa subjektivnim tumačenjem i preferencijama pojedinca[9].
Na tržištu avio-prevoza, avio-kompanija i putnik nezavisno formiraju svoja očekivanja o cenama. Tokom vremena uspostavlja se ravnoteža u kojoj obe strane usklađuju ta očekivanja. Putnicima odgovaraju niže cene karata, što zahteva prodaju većih količina, odnosno veću dostupnost karata. Sa druge strane, avio-kompaniji više pogoduje viša cena karte, što podrazumeva manju količinu karata u prodaji.
Ekvilibrijum racionalnih očekivanja podrazumeva sledeće uslove:

1. $p_p = \frac{v_1 - v_2 + p_2 - \beta(v_1 - r)}{1-\beta}$

2. $p_1 = p_A$

[9]Poređenje tradicionalne definicije ravnoteže sa ekvilibrijumom racionalnih očekivanja preuzeto je iz [5].

3. $Q = \arg\max_Q \pi(Q, p_A)$
4. $\beta = F_Q = \int_0^Q f(x)dx$ (verovatnoća nepojavljivanja putnika)
   $\bar{\beta} = \bar{F_Q}$ (verovatnoća pojavljivanja putnika)
5. $p_A = p_p$.

Prva tri uslova nam garantuju da će obe strane delovati tako da maksimizuju korisnost. U 4. uslovu se pokazuje da je verovanje putnika β jednako stvarnoj verovatnoći da se putnik neće ukrcati. Uslov broj 5 nam govori da će avio-kompanija predvideti rezervacionu cenu putnika p_p.
Navedenih pet uslova se mogu svesti na dva koja suštinski karakterišu ekvilibrijum racionalnih očekivanja

$$p_1 = \frac{v_1 - v_2 + p_2 - \beta(v_1 - r)}{1 - \beta} \tag{16}$$

$$Q = \arg\max_Q \pi(Q, p_1). \tag{17}$$

Polazeći od (10) ali sada u obliku jednakosti (želimo ekvilibrijum) i od izraza (15) određuje se ekvilibrijumska cena p_1

$$v_2 - p_2 = \bar{\beta}(v_1 - p_1) + \beta r \text{ i } F_Q = \frac{p_1 - c}{p_1 + r - c}.$$

Ako važi

$$\beta = F_Q \text{ i } p_p = p_A = p_1,$$

tada je

$$v_2 - p_2 = (1 - \frac{p_1 - c}{p_1 + r - c})(v_1 - p_1) + \frac{p_1 - c}{p_1 + r - c} r$$

$$v_2 - p_2 = \frac{r(v_1 - p_1) + r(p_1 - c)}{p_1 + r - c}$$

$$v_2 - p_2 = \frac{r(v_1 - c)}{p_1 + r - c}$$

$$p_1 + r - c = \frac{r(v_1 - c)}{v_2 - p_2}$$

$$p_1 = \frac{r(v_1 - c)}{v_2 - p_2} - r + c$$

$$\boxed{p_1 = \frac{r(v_1 - c)}{v_2 - p_2} - (r - c)}. \tag{18}$$

Dalje, zanima nas iznos za refundaciju r. Pod pretpostavkom da putnici raspolažu iznosom novca p_1, njima je potrebno $\Delta p = p_2 - p_1$ da bi rezervisali drugi let, pa je

$$r > \Delta p \Rightarrow p_2 - r < p_1.$$

Kada pronalazimo ekvilibrijum želimo jednakost, a umesto p_1 uvrstićemo (18)

$$\begin{aligned}
p_2 - r &= \frac{r(v_1 - c)}{v_2 - p_2} - (r - c) \\
p_2 - r &= \frac{r(v_1 - c)}{v_2 - p_2} - r + c \\
p_2 - c &= \frac{r(v_1 - c)}{v_2 - p_2} \\
(p_2 - c)(v_2 - p_2) &= r(v_1 - c)
\end{aligned}$$

$$\boxed{r = \frac{(p_2 - c)(v_2 - p_2)}{v_1 - c}}. \tag{19}$$

Na osnovu (16) i (19) dobija se

$$p_1 = \frac{\frac{(p_2 - c)(v_2 - p_2)}{v_1 - c} \cdot (v_1 - c)}{v_2 - p_2} - \frac{(p_2 - c)(v_2 - p_2)}{v_1 - c} + c$$

$$\Rightarrow p_1 = p_2 - \frac{(p_2 - c)(v_2 - p_2)}{v_1 - c}$$

$$\boxed{p_1 = p_2 - \frac{(p_2 - c)(v_2 - p_2)}{v_1 - c}}. \tag{20}$$

Iz (15), (19) i (20) sledi

$$F_Q = \frac{p_2 - \frac{(p_2-c)(v_2-p_2)}{v_1-c} - c}{p_2 - \frac{(p_2-c)(v_2-p_2)}{v_1-c} + \frac{(p_2-c)(v_2-p_2)}{v_1-c} - c}$$
$$= \frac{p_2 - c - \frac{(p_2-c)(v_2-p_2)}{v_1-c}}{p_1 - c}$$
$$\boxed{F_Q = 1 - \frac{v_2 - p_2}{v_1 - c}}. \tag{21}$$

Izvedene jednačine opisuju tri ključne veličine: optimalni iznos refundacije, cenu karte za prebukirani let i verovatnoću neukrcavanja (a samim tim i verovatnoću ukrcavanja) na prebukirani let. Sve tri veličine formulisane su tako da zavise od putnikovog vrednovanja leta, troškova avio-kompanije i regularne prodajne cene karte.

Za precizno izračunavanje ovih parametara neophodna je strateška interakcija putnika i avio-kompanije. Porast vrednovanja prebukiranog leta v_1 odražava veću spremnost putnika da prihvate prebukiranu opciju. Povećanje ove vrednosti v_1 implicira da kompanija treba da poveća količinu karata Q.

6 Testiranje modela na simuliranim podacima

Predstavljen teorijski okvir modela prebukiranosti na dobrovoljnoj bazi u prethodnom poglavlju testiran je Monte Carlo simulacijom na letovima druge (ekonomske) klase[10]. Monte Carlo simulacija je tehnika koja koristi slučajan uzorak za predviđanje parametara koji opisuju situaciju prebukiranosti (prodaje više karata od kapaciteta leta). Korišćeni su naredni ulazni parametri:

- Posmatra se Airbus 320 tip aviona sa kapacitetom leta od 132 sedišta, gde 12 pripada prvoj klasi, a 120 drugoj. Dakle, kapacitet koji se koristi u modelu je $s = 120$ (samo letovi druge klase su uključeni u model).
- Regularna cena je $p_2 = 130$€ .
- Pretpostavlja se da vrednovanje putnika za karte željenog i manje željenog (alternativnog) leta iznose $v_2 = 160$€ i $v_1 = 220$€ .
- Neka su troškovi po putniku $c = 20$€ .
- Pretpostavlja se da ne postoje fiksni troškovi, jer oni ne utiču na model niti na dobijene rezultate, pa važi $C = 0\,e$.
- Broj putnika koji se ne pojavljuju modeluje se slučajnom promenljivom sa normalnom raspodelom, $X : \mathcal{N}(4, 2)$, čime se opisuje očekivani broj i varijabilnost nepojavljenih putnika.
- Simuliraju se podaci u periodu od 5 godina svakog dana tj. za $365 \cdot 5 = 1825$ letova.

Naredni kod u programu R pronalazi broj optimalnih karata koje maksimizuju profit nad simuliranim podacima sa zadatim početnim vrednostima.

```
# Parametri
s <- 120
p2 <- 130
```

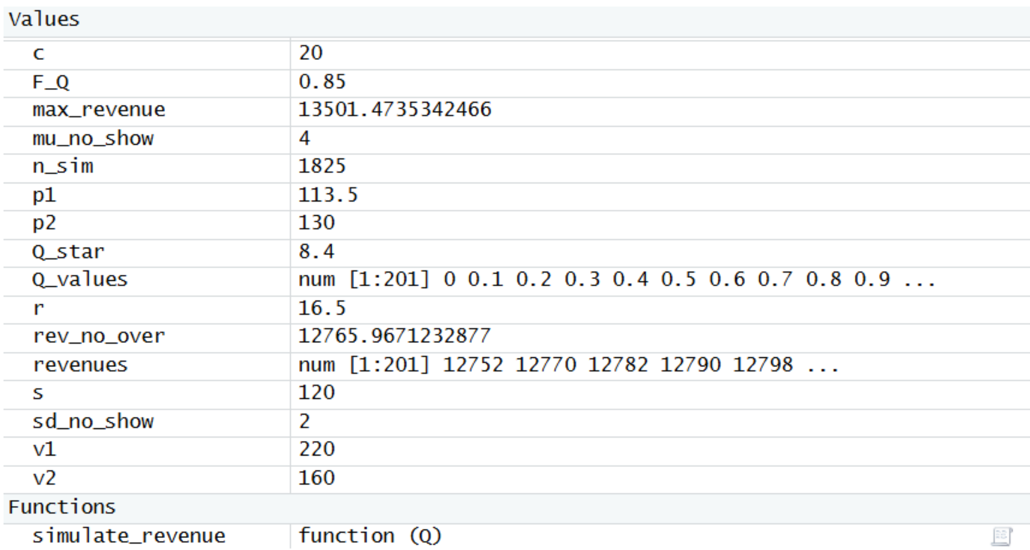
[10]U teorijskom okviru modela prebukiranja na dobrovoljnoj bazi za prvu klasu nije se vršila preprodaja karata, stoga će ona biti izostavljena i u simulacijama.

```
v1 <- 220
v2 <- 160
c  <- 20
mu_no_show <- 4
sd_no_show <- 2
n_sim <- 365 * 5

#Računanje r, p1 i F_Q

r <- (p2 - c) * (v2 - p2) / (v1 - c)
p1 <- r * (v1 - c) / (v2 - p2) - (r - c)
F_Q <- 1 - (v2 - p2) / (v1 - c)

#Funkcija optimalnog broja karata nad simuliranim podacima

simulate_revenue <- function(Q) {
  sold <- s + Q
  no_show <- pmax(0, round(rnorm(n_sim, mu_no_show,
   ↪  sd_no_show)))
  wealth <- numeric(n_sim)


  for (i in seq_len(n_sim)) {
    ns <- no_show[i]

    if (ns >= Q) {
      boarded <- sold - ns
      wealth[i] <- boarded * (p2 - c)
    } else {
      boarded <- s
      bumped <- Q - ns
      wealth[i] <- s * (p2 - c) + ns * (p1 - c) - bumped * r
    }
  }

  mean(wealth)

}
```

```
#Dopušta se da  broj preprodatih karata ide do 20

Q_values <- seq(0, 20, 0.1)
revenues <- sapply(Q_values, simulate_revenue)

#Optimalan broj karata koji maksimizuje profit

Q_star <- Q_values[which.max(revenues)]
max_revenue <- max(revenues)
rev_no_over <- simulate_revenue(0)
```

Na početku koda definisani su ulazni parametri koji obuhvataju kapacitet leta, regularnu cenu karte, vrednovanje cene od strane putnika, troškove leta po putniku, parametre normalne raspodele i broj simulacija koji odgovara periodu od 5 godina. Nakon toga predstavljen je postupak izračunavanja kompenzacije (19), cene prebukiranog leta (20) i verovatnoće nepojavljivanja putnika (21), koji proizilaze iz primene principa ekvilibrijuma racionalnih očekivanja.
Funkcija `simulate_revenue` razmatra dve mogućnosti - kada je broj nepojavljenih putnika manji od broja putnika sa kartama po nižoj ceni, i kada je taj broj veći ili jednak. Na početku funkcije se generiše se broj putnika koji se neće pojaviti na terminalu uz pomoć normalne raspodele $X : \mathcal{N}(4, 2)$. Negativan broj putnika koji se nisu pojavili nema značaj u posmatranom modelu prebukiranosti, stoga se sve negativne vrednosti postavljaju na nulu. To odgovara slučaju kada se svi putnici pojave na terminalu.
Sprovedena je i analiza očekivanog prihoda u zavisnosti od broja dodatno prodatih karata po nižoj ceni, označenih sa Q, pri čemu je posmatran interval vrednosti do $Q = 20$. Vrednost `Q_star` predstavlja optimalan broj dodatno prodatih karata koji maksimizuje očekivani prihod. Prihod u odsustvu strategije prebukiranja odgovara slučaju $Q = 0$.
Na Slici 2 prikazani su ulazni parametri, kao i rezultati dobijeni nakon pokretanja koda. Uočava se da se ravnoteža postiže pri ceni karte za prebukirani let od $p_1 = 113.5$ €. Refundacija po putniku u tom slučaju iznosi 16.5 €, što predstavlja razliku između cena p_2 i p_1. Verovatnoća da se putnici sa kartom po ceni p_1 ne ukrcaju na let iznosi $F_Q = 85\%$, dok je verovatnoća da se ukrcaju na let $\bar{F}_Q = 15\%$.
Optimalan broj dodatno prodatih karata koji maksimizira očekivani prihod

iznosi $Q_* = 8.4 \approx 8$. Na osnovu toga ostvaruje se maksimalan očekivani prihod od 13501.47€ . U poređenju sa prosečnim prihodom u slučaju bez dodatne prodaje karata (12765.97€), primena strategije prebukiranja omogućava povećanje prihoda od 5.76%.



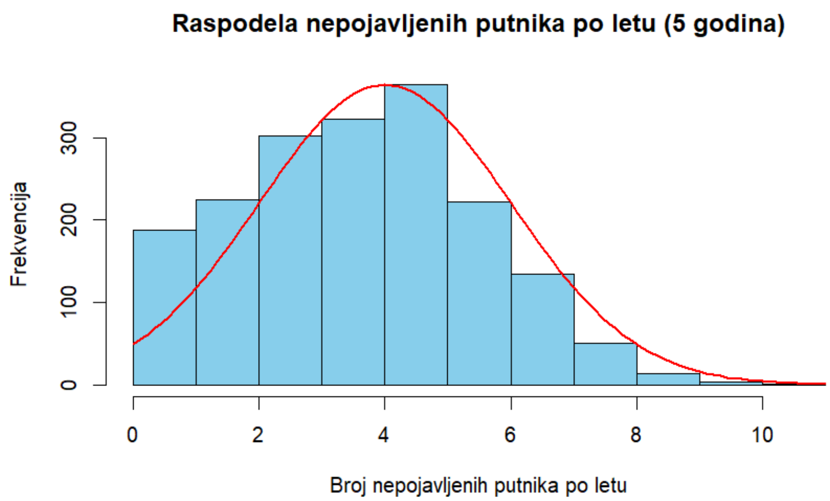
Values	
c	20
F_Q	0.85
max_revenue	13501.4735342466
mu_no_show	4
n_sim	1825
p1	113.5
p2	130
Q_star	8.4
Q_values	num [1:201] 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 ...
r	16.5
rev_no_over	12765.9671232877
revenues	num [1:201] 12752 12770 12782 12790 12798 ...
s	120
sd_no_show	2
v1	220
v2	160
Functions	
simulate_revenue	function (Q)

Slika 2: Rezultati nakon pokretanja simulacije

Sledi deo koda i grafički prikaz koji predstavlja raspodelu nepojavljivanja putnika po letu u periodu od 5 godina.

```
    # Histogram
hist_data <- hist(no_show_values,
                  breaks = seq(min(no_show_values),
                   ↪  max(no_show_values), by = 1),
                  col = "skyblue",
                  border = "black",
                  freq = TRUE,
                  main = "Raspodela nepojavljenih putnika po
                   ↪  letu (5 godina)",
                  xlab = "Broj nepojavljenih putnika po letu",
                  ylab = "Frekvencija")

# Gaussova (normalna) kriva
```

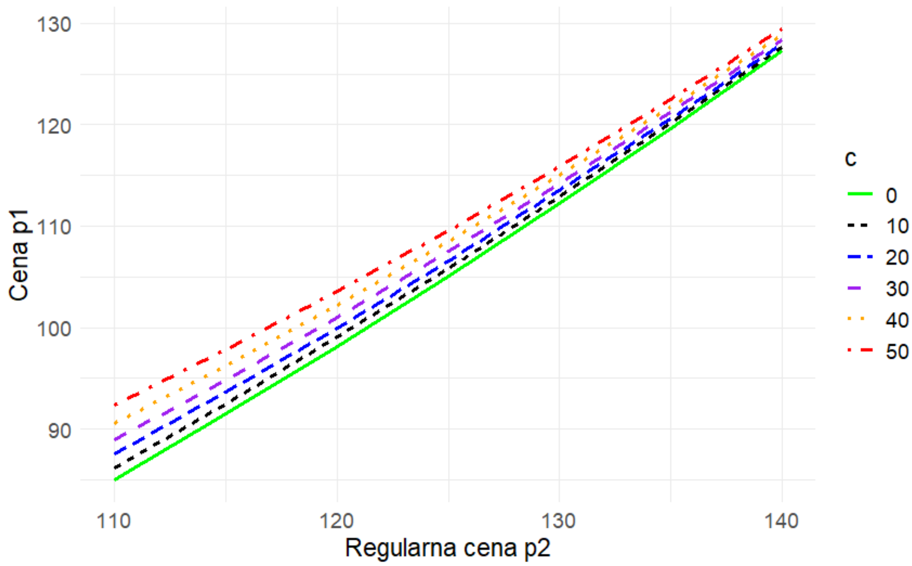
```
x_vals <- seq(min(no_show_values), max(no_show_values),
↪  length.out = 100)
y_vals <- dnorm(x_vals, mean = mu_no_show, sd = sd_no_show)
y_scaled <- y_vals * diff(hist_data$mids[1:2]) *
↪  length(no_show_values)

lines(x_vals, y_scaled, col = "red", lwd = 2)
```



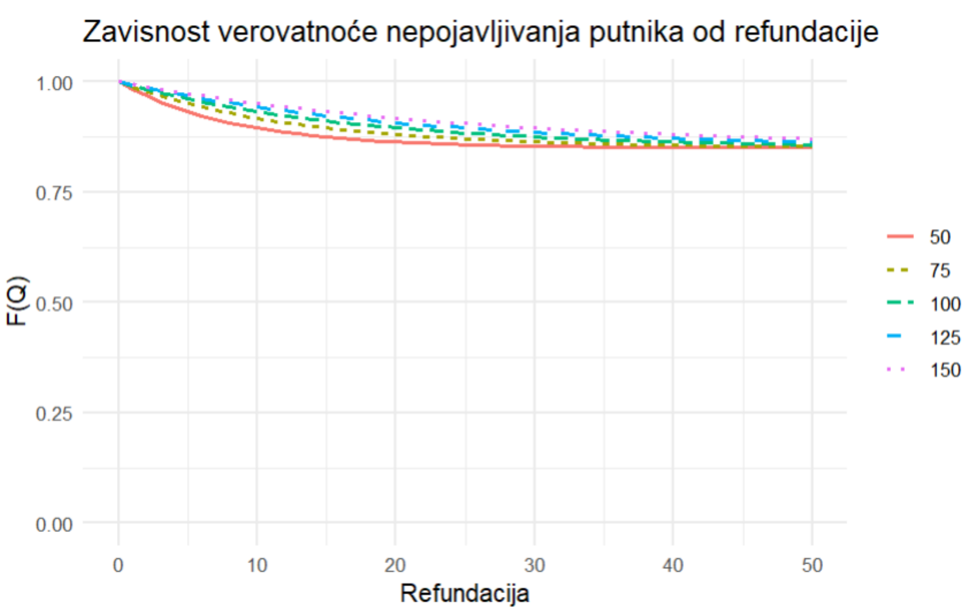
Grafikon 2: Raspodela nepojavljivanja putnika u periodu od 5 godina

Histogram pokazuje raspodelu nepojavljivanja putnika u simulaciji za period od 5 godina, prateći $\mathcal{N}(4, 2)$. Početni parametri normalne raspodele su postavljeni tako da se broj nepojavljivanja putnika po letu najčešće kreće između 3 i 5, dok su ekstremne vrednosti (više od 8 nepojavljivanja) retke.
Grafikon 3 prikazuje zavisnost cene p_1 od vrednosti p_2 za različite nivoe troškova po putniku. Ovi troškovi mogu da variraju, jer letovi ne pružaju uvek isti nivou usluge i udobnosti, pri čemu viši kvalitet usluge podrazumeva i veće troškove po putniku. Bez obzira na konkretan nivo troškova, funkcionalna zavisnost između cena p_1 i p_2 zadržava sličan oblik. Najviše vrednosti cene p_1 postižu se pri najvišim vrednostima p_2. Pri većim fiksnim troškovima po putniku, porast cene p_1 odvija se sporije u odnosu na njeno kretanje pri nižim troškovima. U teorijskom slučaju kada su troškovi jednaki nuli, zavisnost cene p_1 od cene p_2 je linearna, dok je u svim ostalim razmatranim

slučajevima ta zavisnost eksponencijalna.



Grafikon 3: Kretanje cena u zavisnosti od troškova po putniku



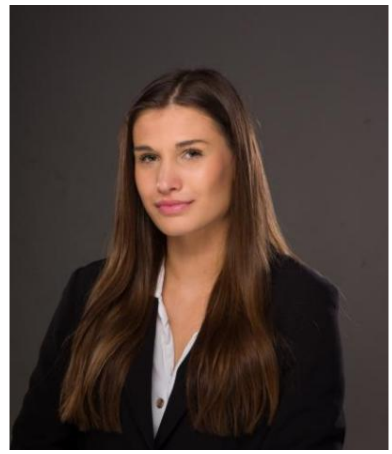
Grafikon 4: Zavisnost verovatnoće nepojavljivanja putnika od refundacije

Dalje se posmatra međusobna zavisnost visine refundacije r i verovatnoće nepojavljivanja putnika F_Q za različite cene prebukiranog leta p_1 . Na Grafikonu 4 mogu se uočiti osnovne zakonitosti ove veze za dati skup podataka. Posmatrane vrednosti cene p_1 obuhvataju opseg od $p_1 \in \{50, 75, 100, 125, 150\}$, što omogućava sagledavanje ponašanja sistema pri nižim, srednjim i višim cenama karata. Viša cena p_1 znači da je avio-kompanija sigurnija da se veći broj putnika sa cenom karte p_2 neće pojaviti na terminalu. Zbog toga je verovatnoća nepojavljivanja putnika F_Q veća, a onda se može očekivati i veća ponuđena količina prebukiranih karata. Nasuprot tome, povećanjem visine refundacije r smanjuje se verovatnoća nepojavljivanja putnika F_Q. Takvo ponašanje ima smisla jer avio-kompanija će biti spremnija da ponudi veću refundaciju samo ako je sigurna da će je isplatiti manjim broju putnika, odnosno kada je verovatnoća nepojavljivanja niska. Ovaj odnos odražava činjenicu da veći iznos refundacije povećava troškove avio-kompanije, zbog čega je optimalno smanjiti broj dodatno prodatih (prebukiranih) karata.

7 Zaključak

U ovom radu predstavljeni su osnovni modeli prebukiranosti u avio-industriji, kao i model dobrovoljnog pristanka putnika na kupovinu karata za prebukirane letove. Klasični modeli prebukiranosti sa jednom i dve klase, kao i aukcijski model, imaju pre svega teorijski karakter i služe kao ilustracija uobičajene prakse prebukiranosti u avio-saobraćaju. U radu su opisani načini maksimizacije profita i postupci određivanja optimalnog broja karata, što je i osnovna svrha uvođenja prebukiranosti. Iako primena prebukiranosti donosi značajne finansijske koristi, praksa nedobrovoljnog uskraćivanja ukrcavanja može imati negativne posledice po ugled avio-kompanije.
Ideja modela baziranog na dobrovoljnoj osnovi ogleda se u uspostavljanju međusobne saradnje između avio-kompanije i putnika, pri čemu putnici više ne predstavljaju samo pasivne učesnike u procesu. Ovaj model može predstavljati uspešan korak ka potpunom ukidanju prakse nedobrovoljnog izbacivanja putnika sa leta, čime se istovremeno čuva ugled avio-kompanije i povećava zadovoljstvo putnika. Polazi se od ideje da putnici daju informacije o sopstvenom vrednovanju leta (iznos koji su spremni da plate), dok zauzvrat dobijaju istorijske podatke o stopi nepojavljivanja putnika na datom letu, kao i mogućnost kupovine karata za prebukirane letove po nižoj ceni. Svesni rizika da možda neće biti ukrcani, putnici sami donose odluku o kupovini takvih karata. Prednost ovakvih karata je niža cena, zagarantovan povrat novca i refundacija u slučaju neukrcavanja. Polazeći od principa ekvilibrijuma racionalnih očekivanja, između dve strane uspostavlja se ravnoteža koja doprinosi efikasnijem funkcionisanju na tržištu i obostranom zadovoljstvu.
Na osnovu simuliranih podataka prikazani su rezultati koji potvrđuju pozitivne efekte ovakvog pristupa. Osim pozitivnog uticaja na reputaciju i odnos prema putnicima, uočljivi su i doprinosi povećanju finansijskih tokova avio-kompanije, što je jedan od glavnih razloga sprovođenja strategije prebukiranosti. Na kraju su date analize najznačajnijih parametara u modelu, kao i uticaj njihovih promena i međuzavisnosti.

Biografija



Anja Dacić rođena je 14. jula 2000. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu „Vasa Stajić“ u Novom Sadu završila je kao nosilac Vukove diplome, pokazujući izuzetan interes i postignuća u oblasti matematike. Prirodno-matematički smer gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj”u Novom Sadu upisuje 2015. godine, a završava 2019. godine sa odličnim uspehom. Iste godine upisuje osnovne studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, koje uspešno završava 2023. godine. Tokom osnovnih studija, šest meseci boravila je na razmeni studenata na Univerzitetu u Torinu , gde je pohađala nastavu i polagala ispite na smeru *Data Science and Stochastics*. Takođe je mesec dana provela u Olomucu, u Češkoj Republici, gde je slušala predavanja u okviru CEEPUS programa razmene iz oblasti *Mathematics and Computer Science*. Master akademske studije iz primenjene matematike upisuje 2023. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Poslednji ispit polaže u oktobru 2025. godine, čime stiče pravo na odbranu master rada. U toku prve godine master studija, u julu 2024. godine, pohađala je letnju školu matematike u Ljubljani.
Od februara 2024.godine radi na Ekonomskom fakultetu u Subotici, prvo kao demonstrator, a zatim i kao saradnik u nastavi.

Literatura

[1] A. Al-Bazi, *Developing an overbooking fuzzy-based mathematical optimization model for multi-leg airline network*, Transportation Research Interdisciplinary Perspectives, 1 (2019): 100026. doi:10.1016/j.trpro.2019.12.031

[2] D. Arthur, S. Malone, O. Nir, *Optimal overbooking*, The UMAP Journal 23, no. 3 (2002): 283–300.

[3] S. Babić, Z. Kovačić, *Racionalna očekivanja – Uloga očekivanja u ekonomskoj teoriji*, Zagreb (1994).

[4] W.-S. Chin, C.-Y. Ting, C.-L. Cham, *No-show passenger prediction for flights*, International Journal on Informatics and Visualization 7, no. 3-2 (2023): 2056–2066. doi:10.30630/joiv.7.3-2.2328

[5] D. Dalalah, *Voluntary overbooking in commercial airline reservations*, Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review 139 (2020): 101963. doi:10.1016/j.jairtraman.2020.101835

[6] L. Ely, D. Garrett, T. Hinnosaar, *Overbooking*, Journal of the European Economic Association 15, no. 6 (2017): 1377–1407. doi:10.1093/jeea/jvw025

[7] R. Frydman, *Towards an understanding of market processes: individual expectations, learning, and convergence to rational expectations equilibrium*, Working Paper, New York University (1993).

[8] H. Fukui, *Economic analysis of airline overbooking considering passengers' choice behavior*, Journal of Air Transport Management 79 (2019): 101683.

[9] K. Z. Leder, S. E. Spagnolie, S. M. Wild, *Probabilistically Optimized Airline Overbooking Strategies, or "Anyone Willing to Take a Later Flight?!"*,The UMAP Journal 23, no. 3 (2002): 317–338.

[10] D. Rajter-Cirić, *Verovatnoća*, Novi Sad (2009).

[11] T. J. Sargent, J. Stachurski, *Rational expectations equilibrium*, QuantEcon Lecture (2020).

[12] M. Somboon, S. Chien, *Applied two-class overbooking model in Thailand's domestic airline industry*, Journal of Air Transport Management 63 (2017): 1–8. doi:https://doi.org/10.1016/j.jairtraman.2016.01.001

[13] K. Xiaolong, Y. Dong, L. Liuyi, *Customer perspective on overbooking:The failure of customers to enjoy their reserved services, accidental or intended?*, Journal of Air Transport Management 53 (2016): 65–72. doi:10.1016/j.jairtraman.2016.01.001

[14] X. Zhang,Y. Zhang, *An optimization model for airline revenue management with passenger choice behavior*, Journal of Traffic and Transportation Engineering 7, no. 1 (2020): 48–59.

[15] Poslednji put pristupljeno 23.10.2025: AltexSoft – Prebukiranost u aviokompanijama.

[16] Poslednji put pristupljeno 23.10.2025: Ministarstvo transporta SAD – Izveštaji potrošača u avio-saobraćaju 2025.

[17] Poslednji put pristupljeno 23.10.2025: Ministarstvo transporta SAD – Februarski izveštaj potrošača u avio-saobraćaju 2025.

[18] Poslednji put pristupljeno 23.10.2025: Elektronski kodeks saveznog zakonodavstva – Deo 250.

[19] Poslednji put pristupljeno 23.10.2025: Air Serbia – Prava putnika.

[20] Poslednji put pristupljeno 23.10.2025: Business Insider – Reakcija United Airlines u vezi sa sedištem za dete.

[21] Poslednji put pristupljeno 23.10.2025: Federal Register – Izveštaj o putnicima kojima je odbijeno potvrđeno sedište.

[22] Šijačić B., *Modeli prebukiranosti*, Master rad, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet (2009.).

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:	
RBR	
Identifikacioni broj:	
IBR	
Tip dokumentacije:	monografska dokumentacija
TD	
Tip zapisa:	tekstualni štampani materijal
TZ	
Vrsta rada:	master rad
VR	
Autor:	Anja Dacić
AU	
Mentor:	prof. dr Sanja Rapajić
MN	
Naslov rada:	Modeli prebukiranosti u avio-industriji
NR	
Jezik publikacije:	srpski (latinica)
JP	
Jezik izvoda:	s/en
JI	
Zemlja publikovanja:	Republika Srbija
ZP	
Uže geografsko područje:	Vojvodina
UGP	
Godina:	2025
GO	
Izdavač:	autorski reprint
IZ	
Mesto i adresa:	Novi Sad, Trg D. Obradovića 3
MA	

Fizički opis rada
(broj poglavlja/strana/lit.citata/
tabela/slika/grafika/priloga): (7/56/22/4/2/4/0)
FO
Naučna oblast: matematika
NO
Naučna disciplina: optimizacija
ND
Predmetne odrednice, ključne reči: avio-industrija, modeliranje, prebukiranost, ekvilibrijum, preprodaja karata
PO
UDK
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, PMF u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Tema ovog rada su modeli prebukiranosti koje avio-kompanije primenjuju u cilju maksimizacije profita. Obrađeni su osnovni modeli prebukiranosti, kao i model dobrovoljnog pristajanja na prebukiranost koji opisuje saradnju između putnika i avio-kompanije radi ostvarivanja zajedničke koristi.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane
NN veća: 15.09.2025.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije: Predsednik: dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
Član: dr Dejan Brcanov, redovni profesor Ekonomskog fakulteta u Subotici Univerziteta u Novom Sadu, Odeljenje u Novom Sadu
Mentor: dr Sanja Rapajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
KO

UNIVESITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Acession number:	
ANO	
Identification number:	
INO	
Document type:	monograph type
DT	
Type of record:	printed text
TR	
Contents code:	master thesis
CC	
Author:	Anja Dacić
AU	
Mentor:	Prof. Dr. Sanja Rapajić
MN	
Title:	Overbooking models in the airline industry
TI	
Language of text:	Serbian (Latin)
LT	
Language of abstract:	s/en
LA	
Country of publication:	Republic of Serbia
CP	
Locality of publication:	Vojvodina
LP	
Publication year:	2025
PY	
Publisher:	author's reprint
PU	

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 3
PP
Physical description
(chapters/pages/references/tables/
pictures/charts/supplements): (7/56/22/4/2/4/0)
PD
Scientific field: mathematics
SF
Scientific discipline: optimization
SD
Subject, key words: airline industry, modelling,
overbooking, equilibrium,
ticket resale
SKW
UC
Holding data: Library of Department of Mathematics
and Informatics, Faculty of Sciences,
University of Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: The topic of this paper is overbooking models applied by airlines with the aim of maximizing profit. The paper examines the most commonly used overbooking models, as well as the model of voluntary overbooking, which describes the cooperation between passengers and the airline for the purpose of achieving mutual benefit.
AB
Accepted on Scientific board on: September 15th 2025
AS
Defended:
DE
Thesis Defend board: President: Dr. Zorana Lužanin, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Dr. Dejan Brcanov, full professor, Faculty of Economics in Subotica, University of Novi Sad
Mentor: Dr.Sanja Rapajić, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
DB