Univerzitet u Novom Sad, Prirodno - matematički fakultet
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad

Sistemi jednačina tokom prvog i drugog vaspitno-obrazovnog ciklusa

Master rad

Mentor
Dr Petar Đapić

Student
Ljubica Tadić

Novi Sad, 2025

Predgovor

Tema rešavanja sistema jednačina zauzima važno mesto u matematičkom obrazovanju, jer predstavlja poveznicu između intuitivnog pristupa problemskim situacijama u nižim razredima i formalnog algebarskog aparata koji se uvodi kasnije. Iz tog razloga javila se potreba da se sagleda na koji način se ovom sadržaju pristupa kroz različite faze osnovnoškolskog obrazovanja, kao i da se sistematično prikažu metode i brojni primeri zadataka koje učenici ovog uzrasta mogu uspešno da primene.

Sistemi jednačina imaju veliku obrazovnu vrednost jer omogućavaju da se različite životne i matematičke situacije jasno prikažu i analiziraju. Zato je važno da učenici postepeno razvijaju razumevanje ovih pojmova i sigurnost u njihovoj primeni. Ovaj rad namenjen je široj zajednici čitalaca: učenicima starijih razreda osnovne škole, njihovim nastavnicima, ali i nastavnicima razredne nastave. Dok jednima može poslužiti kao zbir raznovrsnih zadataka i ideja za nastavu, drugima može biti inspiracija i podsticaj da u ranim razredima uvode pristupe koji podstiču uočavanje odnosa među veličinama, razumevanje problemskih situacija i razvoj matematičkog modelovanja. Na taj način učenicima se već od ranog uzrasta pruža bogatiji matematički alat koji će im olakšati shvatanje i rešavanje kompleksnijih zadataka u narednim godinama školovanja.

Sadržaj rada podeljen je u pet poglavlja. U uvodnom poglavlju izlažu se definicije osnovnih algebarskih struktura, u meri potrebnoj za kasniju upotrebu (grupoid, grupa, prsten, polje). Nakon toga su dati osnovni pojmovi o sistemima linearnih jednačina, njihove vrste, ekvivalentnost, te je prikazana jedna od metoda njihovog rešavanja — Gausov postupak, čiji se jednostavniji slučaj obrađuje u osnovnoj školi (metoda suprotnih koeficijenata).

U drugom poglavlju dat je istorijski osvrt na razvoj sistema jednačina, koje se pojavljuju već u vavilonskim i egipatskim matematičkim tekstovima iz drugog milenijuma pre nove ere, a kasnije i u radovima grčkih, indijskih i kineskih matematičara.

Iako se pojam sistema jednačina formalno uvodi tek u osmom razredu, treće poglavlje prikazuje zadatke primerene učenicima nižih razreda osnovne škole, kao i metode pomoću kojih učenici tog uzrasta mogu intuitivno da pristupe rešavanju problema koji bi se klasično rešavali postavljanjem sistema jednačina (metoda lažne pretpostavke, metoda duži i metoda pravougaonika).

Četvrto poglavlje posvećeno je drugom ciklusu obrazovanja i vaspitanja. U prvom delu ovog poglavlja predstavljeni su zadaci karakteristični za peti, šesti i sedmi razred, uz navođenje tematskih celina kojima pripadaju, a koji se posredno oslanjaju na koncepte rešavanja sistema jednačina. Nakon toga prikazano je kako se u osmom razredu formalno uvode sistemi jednačina, njihova rešenja i metode rešavanja. U nastavku su izloženi brojni reprezentativni primeri zadataka koji se javljaju u redovnoj i dodatnoj nastavi, zadaci sa takmičenja i završnih ispita, kao i primeri prilagođeni učenicima koji ostvaruju pravo na individualni obrazovni plan (IOP).

U završnom poglavlju naglašava se značaj međupredmetne korelacije u cilju funkcionalnog i primenljivog učenja, kao i dubljeg razumevanja sadržaja. Nakon predstavljanja softverskog alata GeoGebra i razmatranja obrazovnih potencijala upotrebe veštačke inteligencije u obrazovanju, izneta je ideja o sprovođenju aktivne korelacije sa nastavom informatike i računarstva, koja se konkretno odnosi na sisteme linearnih jednačina.

Zahvaljujem se članovima komisije, dr Rozaliji Madaras Silađi i dr Samiru Zahiroviću, profesorima Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na saradnji i sugestijama.

Iskrenu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Petru Đapiću, na strpljenju, posvećenosti i stručnom vođenju tokom izrade ovog rada.

Zahvaljujem svojoj porodici na neprekidnoj podršci, razumevanju i ohrabrenju. Njihova vera u mene bila je snaga koja mi je omogućila da uspešno završim i ovaj rad.

Rad posvećujem majci.

Novi Sad, novembar 2025. Ljubica Tadić

Sadržaj

Uvod 5
1.1 Osnovne definicije 5
1.2 Sistemi linearnih jednačina 6
Istorijski osvrt 11
Prvi ciklus obrazovanja 16
3.1 Metoda lažne pretpostavke 17
3.2 Metoda duži 19
3.3 Metoda pravougaonika 23
Drugi ciklus obrazovanja 26
4.1 Linearna jednačina sa dve nepoznate 32
4.2. Pojam i metode rešavanja sistema dve linearne jednačine sa dve nepoznate 33
4.2.1 Grafički prikaz sistema od dve linearne jednačine sa dve nepoznate 35
4.2.2 Ekvivalentnost sistema linearnih jednačina 40
4.2.3 Rešavanje sistema linearnih jednačina metodom zamene 42
4.2.4 Rešavanje sistema jednačina metodom suprotnih koeficijenata 44
4.2.5 Karakteristični zadaci iz udžbenika i zbirki 47
4.3 Primena sistema linearnih jednačina 50
4.4 Sistemi jednačina koji se svode na linearne 54
4.5 Dodatna nastava i takmičenja 56
4.6 Individualni obrazovni plan (IOP) 61
4.7 Završni ispit 65
4.7.1 Zadaci iz zbirki za pripremu završnog ispita 66
4.7.2 Zadaci sa završnih ispita 69
Korelacija sa predmetom informatika i računarstvo 77
5.1 GeoGebra 78
5.2 Veštačka inteligencija u obrazovanju 79
5.3 Projektni zadatak 82
5.3.1 Predlog časa 85
Zaključak 87

Poglavlje 1

Uvod

U uvodnom poglavlju razmatraju se osnovne algebarske strukture relevantne za dalji tok izlaganja, poput grupoida, grupe, prstena, polja i identiteta. Ovi pojmovi predstavljaju teorijsku osnovu za uvođenje sistema linearnih jednačina. Nakon toga sledi pregled ključnih koncepata vezanih za sisteme linearnih jednačina, njihova rešenja, vrste, kriterijumi ekvivalentnosti i načini transformacija. Poglavlje se završava predstavljanjem Gausovog postupka kao jedne od fundamentalnih metoda rešavanja sistema linearnih jednačina, a koji je za potrebe ovog rada posebno interesantan jer se njegov jednostavniji slučaj (metoda suprotnih koeficijenata) obrađuje u osnovnoj školi.

1.1 Osnovne definicije

U radu se koristi standardna notacija za skupove:

$\mathbb{N}$ - skup prirodnih brojeva,

$\mathbb{Z}$ - skup celih brojeva,

$\mathbb{Q}$ - skup racionalnih brojeva,

$\mathbb{R}$ - skup realnih brojeva.

Definicija 1.1.1 Neka je A neprazan skup. Preslikavanje $f : A \times A \to A$ naziva se binarna operacija na skupu A.

Binarna operacija se najčešće označava sa određenim znakom koji se stavlja između argumenata, pa se tako umesto $f(x, y)$ koristi zapis $x * y$.

Neka je na nepraznom skupu A definisana binarna operacija $*$. Tada se operacijska struktura $(A,*)$ naziva grupoid.

Definicija 1.1.2 [1] Grupoid (G, $*$) je grupa, ako u G postoji element e tako da važi:

(1) $(\forall x, y, z \in G) \;\; x * (y * z) = (x * y) * z$

(2) $(\forall x \in G) \;\; x * e = e * x = x$

(3) $(\forall x \in G)(\exists x' \in G) \;\; x * x' = x' * x = e$

Element e se naziva neutralni element, a element x' se naziva inverzni element za x.

Ako za grupu $(G,*)$ važi i uslov $(\forall x, y \in G)\; x * y = y * x$ onda se takva grupa naziva komutativna (ili Abelova) grupa.

Definicija 1.1.3 Prsten je operacijska struktura $(R,+,\cdot)$ sa dve binarne operacije za koju važi :

(1) $(R,+)$ je Abelova grupa

(2) $(R,\ \cdot\ )$ je asocijativan grupoid, tj. za sve $x,y,z \in R$ važi
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(3) ispunjeni su sledeći distributivni zakoni: za sve $x,y,z \in R$ važi
$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ i $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

U $(R,+)$ neutralni element označava se 0, a inverzni za x sa $-x$ (suprotni element).

Ako u prstenu postoji neutralni element za operaciju $\cdot$, koji se označava sa 1, kaže se da je to prsten sa jedinicom.

Prsten je komutativan ako je operacija $\cdot$ komutativna, tj. ako za sve $x,y \in R$ važi $x \cdot y = y \cdot x$.

Definicija 1.1.4 Polje je komutativan prsten $(P,+,\cdot)$ sa jednicom u kome je $(P\backslash\{0\},\cdot)$ grupa.

Inverzni element za x u odnosu na operaciju $\cdot$ označava se sa x^{-1}.

Primer 1.1.1

- Strukture $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$ i $(\mathbb{R},+)$ su grupe, dok $(\mathbb{N},+)$ nije grupa, jer u njoj nije ispunjen uslov postojanja inverznog elementa.
- Strukture $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ su prsteni. Za $n \in \{2,3,\ldots\}$ struktura $(\mathbb{Z}_n,+_n,\ \cdot_n)$ je prsten, gde je $\mathbb{Z}_n = \{0,1,\ldots,n-1\}$, $+_n$ sabiranje po modulu n, a $\cdot_n$ množenje po modulu n.
- Strukture $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ i$(\mathbb{Z}_2,+_2,\ \cdot_2)$ su polja, dok $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ nije polje, jer elementi različiti od 0 nemaju svoj inverzni element u odnosu na operaciju množenja tj. $(\mathbb{Z}\backslash\{0\},\cdot)$ nije grupa.

1.2 Sistemi linearnih jednačina

Za definisanje sistema linearnih jednačina i metode rešavanja istih korišćeni su užbenici *Algebra 2* [1] i *Elementi algebre* [2]:

Definicija 1.2.1 Linearna jednačina sa nepoznatim $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je jednačina oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementi nekog polja P koji se nazivaju koeficijenti uz nepoznate, a b je takođe element iz P koji nazivamo slobodan član jednačine.

Definicija 1.2.2 Sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih nad poljem P je konjunkcija jednačina

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered} \tag{1}$$

gde su $a_{ij} \in P$ koeficijenti uz nepoznate, a $b_i \in P$ slobodni članovi.

Ako su svi slobodni članovi nule za sistem se kaže da je homogen, u protivnom je nehomogen.

Sistem linearnih jednačina zove se kvadratni sistem ukoliko je $m = n$, to jest ukoliko je u sistemu broj jednačina jednak broju nepoznatih.

Definicija 1.2.3 Rešenje sistema linearnih jednačina (1) je uređena n-torka $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in P^n$ ako su u polju P ispunjene jednakosti:

$$\begin{gathered} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m \end{gathered}$$

Ako ne postoji rešenje sistema linearnih jednačina onda je taj sistem protivrečan (kontradiktoran). Ako postoji barem jedno rešenje sistema onda je taj sistem saglasan, moguć. Svaki homogeni sistem uvek ima bar jedno trivijalno rešenje, to je n-torka $(0, 0, \dots, 0)$. Ostala rešenja homogenog sistema, ako postoje, su netrivijalna. Saglasan sistem je određen, ako ima tačno jedno rešenje, a neodređen ako ima više od jednog rešenja.

Definicija 1.2.4 Dva sistema linearnih jednačina su ekvivalentna ako i samo ako je svako rešenje prvog sistema rešenje i drugog i obrnuto, svako rešenje drugog sistema je i rešenje prvog sistema. Za svaka dva protivrečna sistema kaže se da su ekvivalentna. Dakle, dva sistema linearnih jednačina su ekvivalentna ako i samo ako su im skupovi rešenja jednaki.

U nastavku su navedena četiri osnovna postupka kojima se, polazeći od sistema (1), dobijaju sa njim ekvivalentni sistemi.

I Ako se promeni redosled jednačina u sistemu dobija se ekvivalentan sistem.
II Ako se promeni redosled sabiraka u jednačinama sistema, dobija se ekvivalentan sistem.
III Ako se bilo koja jednačina sistema pomnoži elementom polja različitim od nule, dobija se ekvivalentan sistem.
IV Ako se proizvoljnoj jednačini sistema doda bilo koja druga jednačina tog sistema, pomnožena elementom polja različitim od nule, dobija se ekvivalentan sistem.

Jedan od načina za rešavanje sistema linearnih jednačina je Gausova metoda koja se zasniva na primeni navedenih postupaka, kako bi se došlo do ekvivalentnog sistema jednostavnog oblika čija se rešenja lako uočavaju.

Na osnovu (I), prelazi se na ekvivalentan sistem kod koga je $a_{11} \neq 0$. Takva jednačina mora postojati, jer inače se u sistemu ne bi javljala nepoznata x_1.

Prvi korak metode sastoji se u tome da se prva jednačina sistema iskoristi za eliminaciju promenljive x_1 iz svih preostalih jednačina sistema. Na osnovu IV, drugoj jednačini se doda prva pomnožena sa $-a_{21}(a_{11})^{-1}$. Isto se uradi i sa svim ostalim jednačinama: za $i = 2, \dots, m$, i-toj jednačini doda prva pomnožena sa $-a_{i1}(a_{11})^{-1}$. U novom ekvivalentnom sistemu se analogni postupak primenjuje na nepoznatu x_2, ali tako da se prva jednačina ne menja, do na promenu redosleda sabiraka. Ako se u

preostalim jednačinama ne pojavljuje x_2, na osnovu II menja se redosled sabiraka u svim jednačinama sistema. Ukoliko se u nekom koraku pojavi jednačina oblika $0 = 0$ ona se izostavlja, a sistem ostaje ekvivalentan početnom.

U konačnom broju koraka dobija se ili da je polazni sistem protivrečan (ako se u nekom od ekvivalentnih sistema pojavi jednačina oblika $0 = b\,, b \neq 0$), ili se dolazi do tzv. trougaonog sistema:

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ \vdots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n &= d_r \end{aligned} \tag{2}$$

Svi koeficijenti $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{rr}$ su različiti od nule i dobijeni sistem je saglasan.

U slučaju da je $r = n$ sistem (2) je oblika :

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ \vdots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{nn}x_n &= d_n \end{aligned} \tag{3}$$

Sistem tada ima jedinstveno rešenje. U sistemu (3) se iz poslednje jednačine odredi x_n, pa se uvrštavanjem te vrednosti u pretposlednju jednačinu dobije x_{n-1}, i tako redom do x_1.

U opšem slučaju sistem (2) je ekvivalentan sa sistemom

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r &= d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r &= d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n \\ \vdots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{rr}x_r &= d_n - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n \end{aligned} \tag{4}$$

Ako se nepoznate $x_{r+1}, \ldots, x_n$ sa desne strane gornjih jednačina zamene proizvoljnim elementima iz polja dobija se sistem koji ima r jednačina i r nepoznatih koji se svodi na slučaj (3). Vrednosti koje smo dodelili promenljivim $x_{r+1}, \ldots, x_n$ i vrednosti koje se dobiju za $x_1, \ldots, x_r$ u novom sistemu daju jedno rešenje polaznog sistema (1). Kako je izbor elemenata iz polja za $x_{r+1}, \ldots, x_n$ proizvoljan, sistem nad poljem $\mathbb{R}$ ima beskonačno mnogo rešenja .

U narednom primeru je prikazan postupak rešavanja sistema linearnih jednačina nad poljem $\mathbb{R}$ primenom Gausove metode.

Primer 1.2.1 Nad poljem $\mathbb{R}$ dat je sistem

$$\begin{aligned} x - 5y - 4z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= -17 \\ -5x + 2y - z &= 15 \end{aligned}$$

Prva jednačina se množi sa -2 i dodaje drugoj, a zatim sa 5 i dodaje trećoj jednačini. Dobija se ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned} x - 5y - 4z &= 0 \\ 9y + 11z &= -17 \\ -23y - 21z &= 15 \end{aligned}$$

Zatim se druga jednačina pomnožena sa $\frac{23}{9}$ dodaje trećoj i time dobija ekvivalentan sistem

$$\begin{aligned} x - 5y - 4z &= 0 \\ 9y + 11z &= -17 \\ \frac{64}{9}z &= -\frac{256}{9} \end{aligned}$$

Iz poslednje jednačine sledi da je $z = -4$, a zatim iz druge jednačine sledi da je $y = 3$, a sa tim vrednostima iz prve jednačine sledi da je $x = -1$. Sistem dakle ima jedinstveno rešenje $(-1,3,-4)$.

Primer 1.2.2 Nad poljem $\mathbb{R}$ dat je sistem

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= -1 \\ x + 2y - 3z &= 8 \\ 3x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Gausovom metodom dobija se niz ekvivalentnih sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 8 \\ 2x - y + z &= -1 \\ 3x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 8 \\ -5y + 7z &= -17 \\ -5y + 7z &= -24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 8 \\ -5y + 7z &= -17 \\ 0 &= -7 \end{aligned}$$

U dobijenom ekvivalentnom sistemu se pojavljuje brojevna jednakost koja nije tačna, pa je polazni sistem protivrečan.

Primer 1.2.3 Nad poljem $\mathbb{R}$ dat je sistem

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 10z + 2u &= -7 \\ x - y + 5z - 2u &= 1 \\ -x + 3y - 2z + u &= 11 \end{aligned}$$

Gausovom metodom dobija se niz ekvivalentnih sistema:

$$
\begin{aligned}
-x + 3y - 2z + u &= 11 \\
x - y + 5z - 2u &= 1 \\
2x - 5y + 10z + 2u &= -7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-x + 3y - 2z + u &= 11 \\
2y + 3z - u &= 12 \\
y + 6z + 4u &= 15
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-x + 3y - 2z + u &= 11 \\
y + 6z + 4u &= 15 \\
2y + 3z - u &= 12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-x + 3y - 2z + u &= 11 \\
y + 6z + 4u &= 15 \\
-9z - 9u &= -18
\end{aligned}
$$

Redom iz treće jednačine, potom druge i na kraju iz prve jednačine sistema dobija se :

$$z = 2 - u\,, \quad y = 3 + 2u\,, \quad x = 9u - 6$$

Dakle sistem je neodređen tj. ima beskonačno mnogo rešenja. Skup rešenja sistema je

$$\{(5 + 9t, 3 + 2t, 2 - t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Gausova metoda predstavlja samo jedan način kako se sistemi linearnih jednačina mogu rešiti. Postoje i druge metode, kao što su Kramerovo pravilo i matrična metoda, ali one prevazilaze potrebe ovog rada, te se neće u radu razrađivati. Prikaz ovih metoda može se pronaći u literaturama [1] i [2].

Poglavlje 2

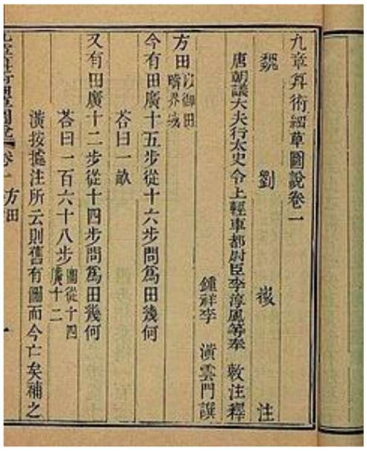
Istorijski osvrt

Zadaci čije se rešavanje zasniva na postavljanju i analizi sistema jednačina sa više nepoznatih pojavljuju se već u vavilonskim i egipatskim matematičkim tekstovima iz drugog milenijuma pre nove ere, a kasnije i u radovima grčkih, indijskih i kineskih matematičara.

U najpoznatijoj starokineskoj zbirci zadataka „Devet poglavlja veštine računanja“ (slika 2.1) posebno poglavlje je posvećeno sistemima linearnih jednačina. Autor ove zbirke je nepoznat, a nastala je u vreme Han dinastije (od 206. p.n.e. do 220. n.e.) i sadrži 246 zadataka koji su podeljeni u devet oblasti koje se mogu prevesti kao: [3]

1. Površine geometrijskih figura, razlomci
2. Procenti i proporcije, merne jedinice
3. Aritmetička i geometrijska progresija
4. Kvadratni i kubni koren, stranice na osnovu površine
5. Zapremina tela
6. Raspodela poreza
7. „Premalo i previše“
8. Sistemi linearnih jednačina
9. Osobine pravouglih trouglova

Sadržaj knjige koncipiran je tako što je prvo postavljen problem, a potom prikaz rešenja i obrazloženje postupka koji do rešenja dovodi. Ovaj metodološki okvir odražava pristup matematici koji teži otkrivanju opštih pravila rešavanja problema, za razliku od grčkih matematičara, čiji je rad počivao na aksiomatskom sistemu i deduktivnom zaključivanju.


九章算術細草圖說卷一
魏 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 敕注釋
鎮祥李 潢雲門謨
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
荅曰一百六十八步 廣十二 圖從十四
潢按攙注所云則舊有圖而今亡矣補之
方田

Slika 2.1 Jedna strana iz knjige Devet poglavlja veštine računanja) [4]

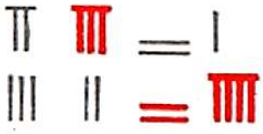
Sisteme linearnih jednačina rešavali su šematski. Postupak je razvijen polazeći od kineske table za računanje na kojima su štapići od bambusa ili slonovače raspoređeni u pravougaonim nizovima, tako da se mogu vršiti različiti proračuni, uključujući i osnovne računske operacije (slika 2.2).

Slika 2.2 Kineska tabla za računanje [3]

U starokineskoj matematici korišćen je pozicioni brojevni sistem, karakterističan po različitom načinu označavanja cifara na parnim i neparnim mestima u zapisu broja i zapisu brojeva s desna na levo. Mesto za nulu je u početku ostavljano prazno, dok je poseban simbol za nulu uveden tek u VIII veku nove ere.

Na slici 2.3 prikazan je način zapisivanja sistema jednačina na tabli. Zapisivali su se samo koeficijenti, pri čemu su se negativni brojevi predstavljali štapićima druge boje.

$$7x - 8y + 21 = 0$$
$$3x + 2y - 29 = 0$$



Slika 2.3. Prikaz sistema jednačina u starokineskoj matematici [3]

U zbirci zadataka se tačno znalo kako se koji od koeficijenata uz nepoznate naziva, a zatim su uputstva za rešavanje formulisana u skladu s tim nazivima. Određeni zadaci su rešeni računanjem determinanti sistema i determinanti koje odgovaraju nepoznatim. Poznavali su dakle ono što danas nazivamo Kramerovo pravilo. Drugi način kojim su rešeni određeni sistemi jednačina je postupak koji danas zovemo Gausova metoda eliminacije, u kojoj se prvo postavljaju koeficijenti i slobodni članovi u tabele, a zatim se izvodi niz aritmetičkih operacija koje dovode do eliminacije nepoznatih. Svi rešeni sistemi u zbirci su sistemi sa jedinstvenim rešenjem. U početku se uglavnom pojavljuju sistemi sa dve ili tri jednačine, a kasnije i sistemi sa više jednačina.

Od osamnaest obrađenih problema, trinaest je posvećeno agrarnim pitanjima kao što su količina stoke i žitarica izraženih brojem, težinom, zapreminom ili troškovima. Preostali zadaci se kreću od praktičnih, poput izračunavanja sile konjske vuče, raspodele vode među domaćinstvima koja dele zajednička dobra i analize potrošnje hrane u odnosu na društveni sloj, do apstraktnijih i zagonetnih, koji uključuju kombinacije novčića različite vrednosti, težinu ptica itd. Takvi primeri svedoče o visokom stepenu društvene organizovanosti, razvijenom trgovačkom sistemu i jasno izraženoj klasnoj strukturi kineskog društva oko 200. godine pre nove ere. [4]

Primer 2.1 [3]

Prodata su dva bivola i pet ovnova, a kupljeno je trinaest svinja i ostalo je hiljadu novčiča. Kada je prodato tri bivola i tri svinje bilo je dovoljno novca da se kupi devet ovnova. Kada se proda šest ovnova i osam svinja, da bi se kupilo pet bivola nedostaje šeststo novčića. Koliko koštaju bivo, ovan i svinja?

Ogovarajući sistem koji odgovara ovom problemu je

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 13z &= 1000 \\ 3x - 9y + 3z &= 0 \\ -5x + 6y + 8z &= -600 \end{aligned}$$

Šema sa koeficijentima je

$$\begin{array}{rrrr} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ -5 & 6 & 8 & -600 \end{array}$$

U kineskom rešenju jednačine su odmah poređane tako da se smanji broj potrebnih operacija i za razliku od Gausove metode eliminacije, koeficijenti su zapisani vertikalno. Podelimo li sve koeficijente duge jednačine sa 3, dobija se koeficijent 1 koji se dovodi u gornji levi ugao. Tako dobijamo šemu:

$$\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -5 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & -13 & 8 \\ & 1000 & -600 \end{array}$$

Rešenje ovog sistema je uređena trojka $(1200, 500, 300)$.

U poglavlju sistemi linearnih jednačina postoje i zadaci u kojima ima više nepoznatih nego jednačina, ali je u takvim slučajevima zadat i neki dodatni uslov kako bi rešenje bilo jednoznačno. To ukazuje na to da su Kinezi imali dobru intuiciju da broj nepoznatih u sistemu mora biti jednak broju jednačina, da bi se obezbedilo jedinstveno rešenje. Sledi jedan takav primer.

Primer 2.2 [3]

Iz tri bureta u kojima su bile jednake količine pirinča, tri lopova su krala pirinač. Ispostavilo se da je u prvom buretu ostao 1 g' pirinča, u drugom 1 sjing 6 g'-a, i u trećem 1 g'. Prvi lopov je priznao da je uzimao pirinač pomoću lopate, drugi da je koristio svoju drvenu cipelu, a treći činiju. Prvi je lopov uzimao samo iz prvog bureta, drugi samo iz drugog, a treći iz trećeg. U lopatu može da stane 1 sjing 9 g', u drvenu cipelu 1 sjing 5g', a u činiju 1 sjing 2 g'-a. Koliko je koji lopov uzeo pirinča, ako je poznato da je 10 g' jedan sjing, 10 sjing 1 tao, a 10 tao jedan š'?

Prvo treba ustanoviti koje su veličine nepoznate i koja je veza među njima. Nepoznata je količina pirinča u buradima, neka je označena sa x. Nepoznato je koliko puta je koji od lopova zahvatao pirinač iz „svog" bureta. Neka su veličine a, b, c brojevi zahvata prvog, drugog i trećeg lopova redom. S obzirom na datu vezu mernih jedinica, može se zapisati da u lopatu stane 1,9, u drvenu cipelu 1,5, a u činiju 1,2 sjinga pirinča. I veličina x će biti izražena u istoj meri. Prema uslovima zadatka dobija se sistem

$$1{,}9a + 0{,}1 = x$$
$$1{,}5b + 1{,}6 = x$$
$$1{,}2c + 0{,}1 = x$$

Dobijeni sistem ima tri jednačine, a četiri nepoznate ali iz prirode zadatka proizlazi i dodatni uslov, da su a, b, c prirodni brojevi. Ako se od prve jednačine oduzme druga, dobija se :

$$1{,}9a - 1{,}5b - 1{,}5 = 0$$

a ako se od prve oduzme treća, dobija se :

$$1{,}9a - 1{,}2c = 0$$

i množeći ovu jednačinu sa 10 dobija se :

$$19a - 12c = 0$$

Iz dobijene jednačine, obzirom da su 12 i 19 uzajamno prosti brojevi, a a i c prirodni brojevi sledi da mora biti $a = 12k$, a $c = 19k$, gde je k neki prirodni broj. Kada prvu jednačinu sistema pomnožimo sa 10 i u nju uvrstimo vrednost za a dobija se :

$$19 \cdot 12k - 15b - 15 = 0$$

odnosno da je

$$19 \cdot 12k = 15(b + 1)$$

Treba dakle odrediti prirodni broj k za koji važi da je број $19 \cdot 12k$ deljiv sa 15. Najmanji takav broj je 5. Dakle, prvi lopov je zahvatao $a = 60$ puta, drugi $b = 75$, a treći $c = 95$ puta. U svakom od buradi bilo je po 1140,1 sjinga pirinča, a to je 114,01 tao pirinča, odnosno 11,401 $\check{s}' - a$.

I u evropskoj matematici postupci rešavanja sistema linearnih jednačina bili su poznati mnogo pre rada Gausa. Francuski monah i matematičar Buteo, u delu Logistica iz 1559. godine, prikazali su metode eliminacije koje u suštini odgovaraju današnjoj Gausovoj metodi. Ovi pristupi predstavljali su značajan pomak u evropskoj algebri, jer su prvi put sistematski uvodili ideju o postupnom uklanjanju nepoznatih kroz niz ekvivalentnih transformacija sistema.

Tokom XVII veka, dalji doprinos dali su Dekart i Njutn, koji su razvijali opšti simbolički zapis i metode rešavanja sistema više promenljivih u kontekstu analitičke geometrije. U istom periodu, Lajbnic je oko 1683. godine uveo pojam determinante, mada bez jasne veze sa današnjim konceptom matrica. Njegov rad je omogućio kasnije formulisanje Kramerovog pravila, koje je švajcarski matematičar Kramer formalno objavio 1750. godine u delu *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*. [5]

Ipak, istinski napredak u linearnim metodama nastaje tek krajem XVIII i početkom XIX veka. U tom periodu Gaus ponovo otkriva i formalizuje metodu eliminacije, nezavisno od ranijih autora. Oko 1800. godine razvija i metodu najmanjih kvadrata, koju primenjuje za rešavanje praktičnih astronomskih problema. Gaus je ovu metodu prvi put koristio 1801. godine prilikom izračunavanja orbite asteroida Ceres, na osnovu ograničenog broja posmatranja. Da bi to postigao, morao je da reši sistem od 16 linearnih jednačina, koji je redukovao na četiri jednačine sa tri nepoznate, čime je uspešno predvideo tačnu poziciju asteroida na nebu. [4] Rezultate je objavio u delu *Theoria motus coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (1809. godine), gde je detaljno objasnio da sistem linearnih

jednačina ima jedinstveno rešenje, beskonačno mnogo rešenja ili nema rešenja, zavisno od odnosa među koeficijentima — što predstavlja suštinu savremene linearne algebre.

Tokom XIX veka matematičari kao što su Koši, Silvester i Kejli razvijaju teoriju matrica i determinanti, čime se linearna algebra odvaja kao posebna matematička disciplina. Kejli je 1858. godine objavio *Memoir on the theory of matrices* koja po prvi put sadrži apstraktnu definiciju matrice. Pokazao je i definiciju sabiranja, množenja i inverzne matrice i time postavio temelje današnje algebarske notacije.

U XX veku pojava računara i razvoj računarskih metoda omogućili su rešavanje sistema sa stotinama, pa i hiljadama nepoznatih, što je dodatno podstaklo razvoj numeričkih algoritama i linearne numeričke algebre, neophodne u fizici, inženjerstvu i ekonomiji.

Poglavlje 3

Prvi ciklus obrazovanja

Nastavne metode podrazumevaju naučno verifikovane načine i postupke rada nastavnika i učenika u nastavnom procesu radi ostvarivanja ciljeva, ishoda i zadataka nastave. Na izbor istih utiče više faktora: obrazovno-vaspitni zadaci, specifičnost gradiva, sastav odeljenja, nivo osposobljenosti učenika za samostalan rad, karakteristike dobrih i slabih strana konkretnih nastavnih metoda, sposobnosti i karakteristike stila rada samog nastavnika. [6]

Tokom istorijskog razvoja nastavnog procesa i nastavnih metoda, postojala je večita težnja da se pronađe neka jedinstvena, univerzalna metoda. Zagovornici ovakvog shvatanja bili su Komenski i Pestaloci. Danas, pak, preovladava mišljenje da se ni jedna metoda ne može smatrati najboljom. Najcelishodnije je upotrebiti kombinovane metode koje će imati za cilj da na najjednostavniji način objasne određeni pojam ili pojavu.

Znanja koja učenici stiču u nastavi matematike u najvećoj meri zavise od (metodičkog) oblikovanja nastavnog procesa. Stoga je neophodno precizno isplanirati kojom će se nastavnom metodom i oblikom rada obraditi određena nastavna jedinica, koja će se nastavna sredstva i literatura koristiti, kako će se utvrđivati i ponavljati pređeno gradivo i sl.

Teškoću za učenike u osnovnoj školi, na časovima matematike predstavlja rešavanje tekstualnih, problemskih zadataka. Istovremeno, samostalno rešavanje problemskih zadataka predstavlja vrhunac matematičkog obrazovanja i matematičke kulture. Rešavanjem tekstualnih zadataka učenici ovladavaju matematičkim metodama, tehnikama i postupcima, razvijaju sposobnost matematičko-kibernetičkog modelovanja. Na taj način se osposobljavaju za shvatanje brojnog i računsko – situacionog izražavanja. Učenici razvijaju misaone operacije i intelektualne funkcije, sposobnost apstraktnog mišljenja, kreativnost, racionalno rasuđivanje, objektivno argumentovanje, sistemski i planski samostalan rad, urednost, interesovanje, radoznalost, sigurnost, preciznost, upornost i istrajnost. [6]

Metode matematičkog modelovanja u nastavi matematike pogodne su i za uzrast dece u nižim razredima osnovne škole. U tom uzrastu je teško rešavati zadatke apstraktnim mišljenjem, a posebno je teško pri rešavanju problema uočiti odnose među veličinama. Sve to biva lakše i interesantnije ako se primene metode matematičkog modelovanja.

U nastavku rada biće predstavljene i primerima oslikane tri metode uz čiju pomoć se već od drugog razreda osnovne škole počinju rešavati problemski zadaci koji suštinski predstavljaju sisteme jednačina. To su: metoda lažne pretpostavke, metoda duži i metoda pravougaonika.

Važna napomena je da su dometi u rešavanju problemskih zadataka kod sve tri metode širi, ali u ovom radu biće sagledana samo njihova uloga u zadacima koji bi se klasično rešavali korišćenjem sistema jednačina.

3.1 Metoda lažne pretpostavke

Metoda lažne pretpostavke spada u logičko-kombinatorne modele. Kako joj i ime kaže, metoda lažne pretpostavke pribegava upotrebi neke “zgodne”, tj. lažne pretpostavke. Analizom zadatka na osnovu pretpostavke dolazi se do “procene greške”, što dalje vodi ka rešenju zadatka.

Nažalost, nastavnici relativno malo koriste metode modelovanja. Jedna od metoda koja se nalazi u “nemilosti” nastavne prakse je upravo i metoda lažne pretpostavke. Na sreću, češće nego na časovima redovne nastave, ona se primenjuje na časovima dodatne nastave. [6]

Primer 3.1.1

Zadatak: [6] Kroz pustinju ide karavan. Izračunati koliko je u njemu ljudi, a koliko kamila, ako ukupno ima 112 nogu, a 33 glave.

Slika 3.1 Ilustracija uz primer 3.1.1

Rešenje:

Polazi se od pretpostavke da se u karavanu nalaze samo kamile (potpuno ravnopravna bila bi pretpostavka i da se u karavanu nalaze samo ljudi). Kako ima 33 glave, ukupan broj nogu bio bi $33 \cdot 4 = 132$.

Kako se ovaj broj (132) razlikuje od zadatog broja nogu (112), zaključak je da je pretpostavka pogrešna (lažna), jer je dobijeno $132 - 112 = 20$ nogu viška.

I kamile i ljudi imaju po jednu glavu, što dalje znači da bi se svakim smanjivanjem broja kamila za jedan povećavao broj ljudi za jedan, dok bi se broj nogu smanjivao za dva (kamila 4 noge, čovek 2 noge).

Polaznom, lažnom, prepostavkom dobijeno je 20 nogu viška, što znači da kamila ima za $20 : 2 = 10$ manje u odnosu na pretpostavljeni broj, što dalje znači da kamila u karavanu ima $33 - 10 = 23$.

Stoga je broj ljudi $33 - 23 = 10$.

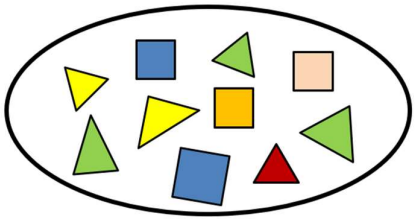
Provera:

23 kamile	sa po 4 noge	=	92 noge
10 ljudi	sa po 2 noge	=	20 nogu
33 glave			112 nogu

Treba istaći da crtež (slika 3.1) nema samo ilustrativnu funkciju. Sem podizanja motivacije i znatiželje, crtež je tu i da učenik lakše vizualizuje situaciju i poveže apstraktne podatke iz zadatka sa realnim kontekstom. Na taj način crtež pomaže da se zadatak ne doživljava kao puka računica, već kao problem iz stvarnog života, i pomaže učeniku da uočava potrebne odnose (npr. čovek 2 noge, kamila 4 noge i sl.).

Primer 3.1.2

Zadatak: [6] U jednom skupu nalazi se 20 geometrijskih figura: trouglova i kvadrata. Ako je ukupan broj stranica 68, izračunati koliko je u skupu trouglova, a koliko kvadrata.



Slika 3.2 Ilustracija uz primer 3.1.2

Rešenje:

Bez umanjenja opštosti, polazi se od pretpostavke da se u skupu nalaze samo trouglovi. Kako ima 20 geometrijskih figura, to bi značilo da ima 20 trouglova, pa bi ukupan broj stranica bio $20 \cdot 3 = 60$.

Kako se ovaj broj razlikuje od zadatog broja stranica, zaključak je da je pretpostavka lažna, jer je dobijeno $68 - 60 = 8$ stranica manje.

Analizom, uz posmatranje ilustracije (slika 3.2), utvrđuje se da svako smanjivanje trouglova za jedan, povećava broj kvadrata za jedan i povećava broj stranica za jedan (kvadrat 4 stranice, trougao 3 stranice, $4 - 3 = 1$).

Pošto je dobijeno 8 stranica manje, sledi da trouglova ima za $8 : 1 = 8$ manje, dakle, u skupu ima $20 - 8 = 12$ trouglova. Dalje, to znači da kvadrata ima $20 - 12 = 8$.

Provera:

12 trouglova	sa po 3 stranice	=	36 stranica
8 kvadrata	sa po 4 stranice	=	32 stranice
20 geometrijskih figura			68 stranica

U nastavku je dato još nekoliko zadataka koji se mogu rešavati metodom lažne pretpostavke: [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]

Zadatak 1: Novčanicu od 500 dinara treba razmeniti novčanicama od po 50 dinara i po 20 dinara, tako da ukupno bude 16 novčanica. Koliko će biti novčanica od po 50 dinara, a koliko po 20 dinara?

Zadatak 2: Na terasi su stolice sa po tri noge. Na neke od njih su seli ljudi, tako da sada ima ukupno 42 noge. Koliko ima stolica, a koliko ljudi, ako je broj i stolica i ljudi na terasi 16?

Zadatak 3: Domaćica je kupila 10 kilograma šljiva. Nekoliko kilograma je platila po 3 dinara, a ostatak po 5 dinara. Sve ukupno platila je 44 dinara. Koliko je kupila jedne vrste, a koliko druge?

Zadatak 4: U mlekari je sir upakovan u kutije od 5 kilograma i 8 kilograma. Da li je moguće izabrati 17 kutija, a da u njima bude 100 kilograma sira?

Zadatak 5: U jednom odeljenju ima 22 učenika. Neki od njih imaju 9, a neki 10 godina. Ako je ukupan zbir godina sve dece u razredu 204, koliko dece nije još proslavilo svoj deseti rođendan?

Zadatak 6: Lopovi su ukrali tricikle i beže na njima. Policajci ih jure na biciklima. Ako se kotrljaju na ukupno 10 točkova, koliko tricikala je ukradeno? (Tricikl ima tri točka.)

Zadatak 7: Odeljenje u kome je bilo 32 učenika kupilo je loptu koja košta 246 dinara, pri čemu su dečaci za loptu dali po 9 dinara, a devojčice po 6 dinara. Koliko u tom odeljenju ima devojčica, a koliko dečaka? (Š – 1998.)

Zadatak 8: Na reci je bilo 12 čamaca, od kojih veći imaju po 8 sedišta, a manji po 5 sedišta. Koliko je bilo većih, a koliko manjih čamaca, ako se u njih smestilo 75 osoba, i svi čamci su bili puni?

Napomena je da se svi ovi zadaci mogu dodatno otežati. Npr. u poslednjem primeru mogu se zadatku dodati informacije o potrošnji goriva za manji i veći čamac, kao i cena goriva, pa da se od učenika očekuje da izračuna ukupnu cenu potrošenog goriva. Može se možda kroz tekst zadatka napomenuti da su se pored vozača u čamce smestila 63 drugara, pa da učenik sam treba da se doseti da i vozač čamca zauzima mesto u čamcu, itd...

3.2 Metoda duži

Kod tekstualnih zadataka učenicima je najčešći problem uočiti šta je dato, šta se traži i koji su odnosi među veličinama. Savremena pedagoška praksa dokazala je da za učenikovo usvajanje i njegovo kasnije pamćenje najviše pomaže slika. Upravo metoda duži, kao u ostalom i metoda pravougaonika koja će kasnije biti ilustrovana, na jedan poseban način, tj. “crtežima”, želi da olakša učeniku sagledavanje, razumevanje, a potom i rešavanje problema.

Metoda duži je grafička i intuitivna metoda za rešavanje problemskih zadataka, koja koristi sliku (duži) kao vizuelni model za brojeve ili veličine. Svaku veličinu predstavljamo pomoću duži određene dužine.

Metoda duži polazi od toga da se nepoznate veličine predstave dužima čija dužina simbolizuje vrednost te veličine. To omogućava učenicima da lakše razumeju odnose između veličina, pređu sa konkretnog na apstraktno razmišljanje (od slika ka broju), kao i da izbegnu mehaničko postavljanje jednačine koje je još teško za taj uzrast. Pošto duži možemo lako porediti, deliti i slagati, one postaju jednostavan način da se vizuelno prikaže odnos između veličina. Na taj način učenik „vidi“ rešenje pre nego što ume da ga zapiše jednačinom, pa mu duži predstavljaju zapravo prelaznu fazu ka simboličkom zapisu.

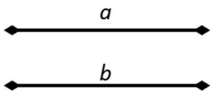
Metoda duži razvija konceptualno razumevanje odnosa između veličina, pomaže u razvijanju algoritamskog načina razmišljanja (analiziranje odnosa, modeliranje, pronalaženje obrazaca), te predstavlja i sjajnu pripremu uvođenju sistema jednačina u višim razredima.

Kako bi koristio metodu duži, učenik se prvo upoznaje sa osnovnim slučajevima potrebnim da bi razumeo metodu i kasnije je uspešno primenjivao. [13, 14]

Slučaj 1 Zapiši dužima: *Dva broja su međusobno jednaka.*

Prvi broj:

Drugi broj:

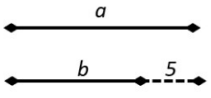


$a = b$

Slučaj 2 Prikaži dužima: *Prvi broj je za 5 veći od drugog*. (Može i *Drugi broj je za 5 manji od prvog* ili *Razlika prvog i drugog broja je 5*).

Prvi broj:

Drugi broj:



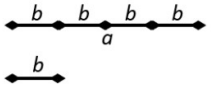
$a = b + 5$

$a - b = 5$

Slučaj 3 Prikaži dužima: *Prvi broj je četiri puta veći od drugog*. (Može biti i *Drugi broj je četiri puta manji od prvog* ili *Količnik prvog i drugog broja je 4*).

Prvi broj:

Drugi broj:



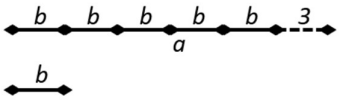
$a = 4 \cdot b$

$a : b = 4$

Slučaj 4 Prikaži dužima: *Ako prvi broj podelimo drugim dobija se količnik 5 i ostatak 3*.

Prvi broj:

Drugi broj:

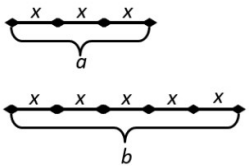


$a = 5 \cdot b + 3$

Slučaj 5 Prikaži dužima: *Prvi broj iznosi tri petine drugog broja.*

Prvi broj:

Drugi broj:



$a = 3 \cdot x$

$b = 5 \cdot x$

Nakon prikaza osnovnih slučajeva, učenik je spreman da primeni naučeno na zadacima. Primeri i zadaci koji su predstavljeni u nastavku su tipični zadaci koje učenici osmog razreda rešavaju korišćenjem neke od metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina. [13, 14]

Primer 3.2.1

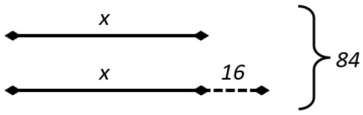
Zadatak: Brat i sestra imaju zajedno 84 dinara. Koliko ima svako od njih ukoliko brat ima 16 dinara više od sestre?

Rešenje:

Rešavanje zadatka započinje prikazom dužima. Učenik crta dve iste duži, a kasnije na bratovljevoj duži označava novu, isprekidanu, duž koja predstavlja razliku u novcu.

Sestra:

Brat:



Na osnovu slike sledi računica:

$x + x + 16 = 84$

$2x = 84 - 16$

$2x = 68$

$x = 68 : 2$

$x = 34$

Učenik dolazi do odgovora da sestra ima 34 dinara, a brat 34 + 16 = 50 dinara.

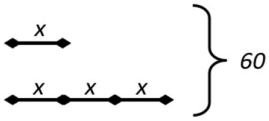
Primer 3.2.2

Zadatak: Zbir dva broja je 60. Jedan je tri puta veći od drugog. Odredi te brojeve.

Rešenje:

Prvi broj:

Drugi broj:



$x + x + x + x = 60$

$4x = 60$

$x = 60 : 4$

$x = 15$

Prvi broj = 15

Drugi broj = $3 \cdot 15 = 45$

Odgovor: To su brojevi 15 i 45.

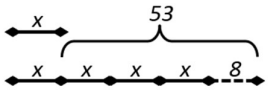
Primer 3.2.3

Zadatak: Razlika dva broja je 53. Ako se veći podeli manjim, dobije se količnik 4 i ostatak 8. Odredi te brojeve.

Rešenje:

Prvi broj:

Drugi broj:



$x + x + x + 8 = 53$

$3x = 53 - 8$

$3x = 45$

$x = 45 : 3$

$x = 15$

Prvi broj = 15

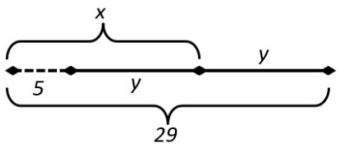
Drugi broj = $4 \cdot 15 + 8 = 68$

Odgovor: To su brojevi 15 i 68.

Primer 3.2.4

Zadatak: Zbir dva broja je 29, a njihova razlika je 5. Odredi te brojeve.

Rešenje: (drugi način prikaza)



$y + y + 5 = 29$

$2y = 29 - 5$

$2y = 24$

$y = 24 : 2$

$y = 12$

Drugi broj = 12

Prvi broj = $12 + 5 = 17$

Odgovor: To su brojevi 17 i 12.

Slede još neki zadaci koji se tipično rešavaju pomoću sistema jednačina, a mogu se rešiti metodom duži i sreću se u literaturi za dodatnu nastavu. [13, 14, 15, 16, 17]

Zadatak 1: Otac i sin imaju zajedno 60 godina, a pre 5 godina otac je bio 4 puta stariji od sina. Koliko godina sada ima sin, a koliko otac?

Zadatak 2: Sin sada ima 9 godina, a njegov otac 35. Za koliko godina će otac biti 3 puta stariji od sina?

Zadatak 3: U odeljenju ima 35 učenika. Ako bi se odselilo 5 dečaka, tada bi u odeljenju bilo dva puta više devojčica, nego dečaka. Koliko je u tom odeljenju bilo dečaka, a koliko devojčica? (Š – 1983.)

Zadatak 4: U magacinu A je bilo 108 kg jabuka više nego u magacinu B. Koliko jabuka je bilo u svakom magacinu, ako se zna da je u magacinu B bilo 4 puta manje jabuka nego u magacinu A. (O - 1978.)

Zadatak 5: Data su tri broja. Sabiranjem svaka dva od njih dobijaju se zbirovi 156, 162 i 170. O kojim brojevima je reč? (O – 1992.)

Zadatak 6: U jednoj korpi ima dva puta više jabuka nego u drugoj. Ako se iz svake korpe uzme po 20 jabuka, onda će u prvoj ostati tri puta više jabuka nego u drugoj. Koliko je jabuka bilo u svakoj korpi?

Zadatak 7: Učenik je za jedan udžbenik i dve zbirke platio 1560 dinara. Koliko košta udžbenik, a koliko zbirka ako cena udžbenika iznosi tri petine cene zbirke.

Zadatak 8: Zbir dva broja je 250. Ako prvi uvećamo tri puta, onda zbir ta dva broja iznosi 450. Odredi te brojeve.

Zadatak 9: Domaćica je kupila 3 kg jabuka i 2 kg krušaka i platila 360 dinara. Po kojoj ceni su prodavane jabuke, a po kojoj kruške, ako cena jabuka iznosi dve trećine cene krušaka.

Zadatak 10: Kapa je 36 dinara jeftinija od šala, a šal je 7 puta skuplji od kape. Koliko košta kapa, a koliko šal?

Zadatak 11: (Zadatak iz Arhimedesovog papirusa) Količina i četvrtina te količine daju broj 15. O kojoj se količini radi?

3.3 Metoda pravougaonika

Metoda pravougaonika je takođe grafička (vizuelna) metoda, ali prvenstveno namenjena zadacima kod kojih se koristi proizvod brojeva. Ideja leži u tome da se proizvod dva broja može zamisliti (i predstaviti) kao površina pravougaonika gde je jedan činilac dužina, a drugi širina tog pravougaonika. Kada se jedan, ili oba broja promene, onda se i površina (proizvod) menja za neki „dodatni pravougaonik“ – i ta vizuelizacija omogućava lakše razumevanje odnosa. Benefit metode pravougaonika leži i u tome što razvija intuitivno razumevanje zavisnosti između sabiranja i množenja

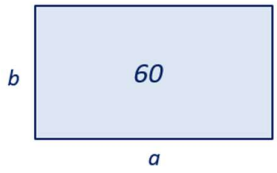
Metoda pravougaonika se uvodi u četvrtom razredu osnovne škole, jer se u tom uzrastu tek usvaja pojam površine pravougaonika i kvadrata.

Primer 3.3.1

Zadatak: [18] Proizvod dva broja je 60. Ako se jedan činilac uveća za 4, a drugi ostane nepromenjen, proizvod će se uvećati za 40. Koji su to brojevi?

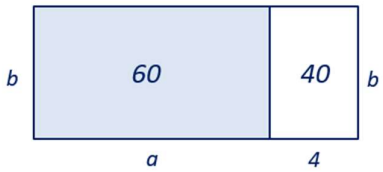
Rešenje:

Činjenica da je proizvod dva broja 60 predstavlja se pravougaonikom čije su stranice ta dva broja, a i b, a čija je površina 60.



$$a \cdot b = 60$$

Povećanjem jednog broja, a, za 4, dobija se novi proivod za 40 veći od prethodnog, što će vizuelno biti predstavljeno kao novi (veći) pravougaonik čija je površina za 40 veća u odnosu na prvobitnu površinu.



$$(a + 4) \cdot b = 60 + 40$$

Sa slike se sada jednostavno uočava da je to povećanje od 40 zapravo površina pravougaonika čije su stranice dužina b i 4, iz čega sledi jednostavan račun.

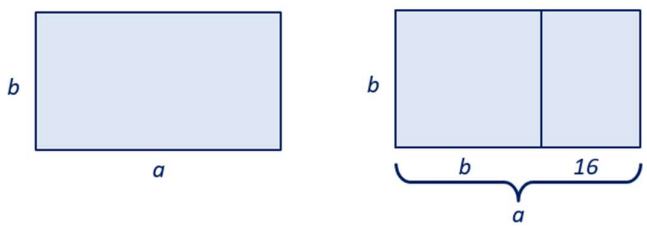
$$4 \cdot b = 40$$
$$b = 40 : 4$$
$$b = 10$$
$$a \cdot b = 60$$
$$a \cdot 10 = 60$$
$$a = 60 : 10$$
$$a = 6$$

Odgovor: To su brojevi 6 i 10.

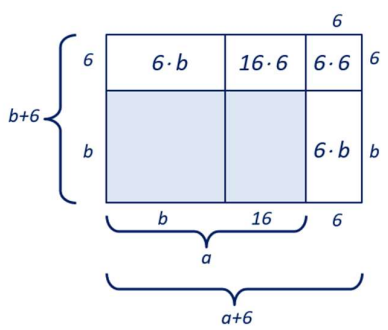
Primer 3.3.2*

Zadatak: [11] Dva broja se razlikuju za 16. Ako oba broja povećamo za 6, njihov proizvod se uveća za 396. Odredite te brojeve.

Rešenje:



$$a - b = 16$$



$$6 \cdot b + 16 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 6 \cdot b = 396$$
$$12 \cdot b + 96 + 36 = 396$$
$$12 \cdot b + 132 = 396$$
$$12 \cdot b = 396 - 132$$
$$12 \cdot b = 264$$
$$b = 264 : 12$$
$$b = 22$$
$$a - b = 16$$
$$a - 22 = 16$$
$$a = 16 + 22$$
$$a = 38$$

Odgovor: To su brojevi 38 i 22.

U nastavku su dati karakteristični zadaci koji se sreću u literaturi, kao i na takmičenjima, a koji se mogu rešavati metodom pravougaonika. [13, 11, 18]

Zadatak 1: Proizvod dva broja je 3600. Ako se jedan od tih brojeva uveća za 5, a drugi ostane isti, proizvod će biti 4000. Koji su to brojevi?

Zadatak 2: Sava je na police biblioteke stavio 48 knjiga. Na svaku policu stavio je isti broj knjiga. Kada bi na svaku policu dodao još tri knjige, mogao bi da smesti 12 knjiga više. Koliko ima polica, a koliko je knjiga Sava stavio na svaku policu na početku?

Zadatak 3: Stranice pravougaonika se razlikuju za 2cm. Ako obe stranice povećamo za 3cm, onda se površina pravougaonika poveća za $105cm^2$. Izračunati stranice, obim i površinu prvobitnog pravougaonika.

Zadatak 4: Ako se dužina pravougaonika smanji za 3cm, a širina poveća za 2cm, dobije se kvadrat jednake površine datom pravougaoniku. Za koliko se razlikuju njihovi obimi?

Zadatak 5: Grupa učenika odluči da kupi loptu. Ako bi svaki učenik dao po 10 dinara, nedostajalo bi još 30 dinara. Ukoliko bi svaki dao po 12 dinara, preostalo bi im 14 dinara. Koliko ima učenika i koliko košta lopta?

Poglavlje 4

Drugi ciklus obrazovanja

Iako se sistemi jednačina formalno uvode tek u osmom razredu osnovne škole, u prethodnom poglavlju prikazani su primeri zadataka sa kojima se sreću već i učenici prvog ciklusa obrazovanja, a koji u svojoj osnovi predstavljaju probleme sa više nepoznatih, i više veza među tim nepoznatim veličinama. Učenicima tog uzrasta ponuđene su i metode koje im mogu pomoći u lakšem uočavanju odnosa i pristupanju modelovanja zadataka.

Dok se kod učenika prvog ciklusa obrazovanja, ovakvi zadaci javljaju prevashodno na dodatnoj nastavi i takmičenjima, kod učenika petog, šestog i sedmog razreda (čak i osmog razreda, a pre teme koja se bavi sistemima jednačina), zadaci koji se posredno oslanjaju na koncepte rešavanja sistema jednačina sreću se i u okviru redovne nastave. Od učenika tog uzrasta očekuje se da se, u zadacima koji se zasnivaju na sistemima jednačina, više oslanjaju na intuitivno razumevanje i primenu, uglavnom metode zamene.

Važno je naglasiti da se zadaci zasnovani na sistemima jednačina u ovom uzrastu najčešće pojavljuju kao tekstualni, problemski zadaci. To dodatno povećava njihovu složenost, jer se od učenika najpre očekuje da iz teksta prepoznaju i izdvoje ključne odnose, zatim da ih pravilno prevedu u adekvatan matematički model, a tek potom pristupe rešavanju samog sistema jednačina. Nastavna praksa pokazuje da ovakvi zadaci predstavljaju značajan izazov za veliki broj učenika, što ukazuje na potrebu za pažljivo osmišljenim postupnim uvođenjem i raznovrsnim metodama rada koje podstiču razumevanje, a ne samo mehaničko rešavanje istih.

U nastavku rada biće predstavljeni primeri zadataka koji se sreću u udžbenicima i zbirkama matematike za osnovnu školu, organizovani prema razredima i tematskim celinama u okviru kojih se pojavljuju. Za svaki zadatak biće ukratko izložen i odgovarajući postupak rešavanja prilagođen datom uzrastu.

Nadalje, kod većine primera biće korišćen sledeći zapis reference:

- (Zbirka [19], zadatak 566) – što znači da se radi o 566. zadatku u literaturi [19]
- (Udžbenik [20], zadatak 97/33) – što znači da se radi o 33. zadatku na 97. strani u literaturi [20]

V razred

Tematska celina: Ugao

Primer 4.1 (Zbirka [19], zadatak 566) Ugao β je za $18°$ manji od udvostručenog ugla α, Uglovi α и β su suplementni. Odredi α и β.

Rešenje: Zbir suplementnih uglova je $180°$. Kako je $\beta = 2\alpha - 18°$ sledi da je $\alpha + 2\alpha + 18° = 180°$ iz čega se dobija $\alpha = 54°$, a potom i da je $\beta = 180° - 54° = 126°$

Primer 4.2 (Udžbenik [20], zadatak 97/33) Tupi ugao je 26 puta veći od svog uporednog ugla. Koliki je taj tupi ugao?

Rešenje: Neka je $\alpha > 90°$ takav da je $\alpha = 26\beta$, gde je β ugao uporedan uglu α. Kako je zbir uporednih uglova $180°$ sledi da je $4\beta + \beta = 180°$ iz čega se dobija $\beta = 6°18'$, a potom i da je traženi ugao $\alpha = 180° - 6°18' = 173°42'$.

Primer 4.3 (Zbirka [21], zadatak 798) Odredi meru ugla koji je 5 puta manji od svog komplementa?

Rešenje: Neka je α traženi ugao i β njegov komplement. Kako je zbir komplementnih uglova $90°$ i $\beta = 5\alpha$, sledi da je $\alpha + 5\alpha = 90°$ iz čega se dobija $\alpha = 15°$.

Primer 4.4 (Zbirka [21], zadatak 801) Zbir uglova α, β i γ je $360°$. Odredi mere tih uglova ako je α za $60°$ veći od γ, a ugao β tri puta veći od γ.

Rešenje: Kako je $\alpha = \gamma + 60°$, $\beta = 3\gamma$ dobija se $\gamma + 60° + 3\gamma + \gamma = 180°$, iz čega se dobija $\gamma = 24°$, zatim $\alpha = 24° + 60° = 84°$ i $\beta = 3 \cdot 24° = 72°$.

Primer 4.5 (Zbirka [22], zadatak 48/5) Odredi mere uglova sa paralelnim kracima ako je jedan od njih osam puta veći od drugog.

Rešenje: Kako dati uglovi sa paralelnim kracima nisu jednaki sledi da su suplementni. Neka je $\alpha = 8\beta$. Iz $8\beta + \beta = 180°$ sledi $\beta = 20°$ pa je $\alpha = 160°$.

Tematska celina: Skup prirodnih brojeva

Primer 4.6 (Zbirka [23], zadatak 25/31) U tri pogona jedne fabrike radi 4 933 radnika. U prvom pogonu radi četiri puta više radnika nego u drugom, a u trećem 13 radnika više nego u drugom. Koliko radnika radi u svakom pogonu?

Rešenje: Neka je x broj radnika u drugom pogonu. Tada je $4 \cdot x + x + x + 13 = 4\,933$, pa je $x = 820$. Dakle, u prvom pogonu radi 3280, u drugom 820 i u trećem 833 radnika.

Primer 4.7 (Zbirka [23], zadatak 25/32) U dve prostorije u pošti nalazi se 1 117 pošiljki. Kada je poštar Miroslav izneo iz jedne sobe 493 pošiljke, u njoj je ostalo 7 puta manje pošiljki nego u drugoj sobi. Koliko je bilo pošiljki u svakoj sobi?

Rešenje: Ako je x broj pošiljki u prvoj sobi posle iznošenja 493 pošiljke, tada je $x + 493 + 7x = 1\,117$, pa je $x = 78$. U prvoj sobi je bilo 571, a u drugoj 546 pošiljki.

Tematska celina: Razlomci

Primer 4.8 (Zbirka [23], zadatak 170/15) Otac je 25 godina stariji od ćerke, a ćerkine godine čine $\frac{2}{7}$ očevih godina. Koliko svako od njih ima godina?

Rešenje: Ako x predstavlja koliko godina ima ćerka, tada zadatku odgovara sledeća jednačina $\frac{2}{7} \cdot (x + 25) = x$, čije je rešenje $x = 10$. Dakle, ćerka ima 10, a otac 35 godina.

Primer 4.9 (Zbirka [23], zadatak 170/16) Janko i Jovana imaju zajedno 51 bombonu. Ako je $\frac{2}{3}$ Jovaninih bombona isto što i $\frac{3}{4}$ Jankovih, koliko bombona ima svako od njih?

Rešenje: Ako x predstavlja koliko Jovana ima bombona, zadatku odgovara sledeća jednačina $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{3}{4} \cdot (51 - x)$, čije je rešenje $x = 27$. Dakle, Jovana ima 27, a Janko ima 24 bombone.

Primer 4.10 (Zbirka [23], zadatak 170/20) Na prvoj polici ima 2 puta više knjiga nego na drugoj. Kada se $\frac{1}{5}$ knjiga sa prve police prebaci na drugu, na njoj će biti 5 knjiga manje nego na prvoj polici. Koliko je bilo knjiga na svakoj od te dve police?

Rešenje: Ako je x broj knjiga na drugoj polici, zadatku odgovara jednačina $2 \cdot x - \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot x = x + \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot x + 5$, čije je rešenje $x = 25$. Dakle, na prvoj polici je 50, a na drugoj 25 knjiga.

Primer 4.11 (Zbirka [23], zadatak 176/6) Jana i Nemanja treba da podele 3 500 dinara tako da se njihovi delovi odnose kao $4 : 3$. Koje sume će dobiti svako od njih?

Rešenje: Neka su J i N iznosi koji će dobiti Jovana i Nemanja, redom. Iz uslova zadatka važi $J : N = 4 : 3$ pa sledi $J = 4k$ i $N = 3k$. Tada važi $4k + 3k = 3\,500$, iz čega sledi da je $k = 500$. Dakle, Jovana će dobiti 2 000 dinara, a Nemanja 1 500 dinara.

VI razred

Tematska celina: Trougao

Primer 4.12 (Zbirka [24], zadatak 278) Odredi mere unutrašnjih uglova β i γ trougla ΔABC ako važi: $\alpha = 22°30'$, a ugao β je za $15°$ veći od ugla γ.

Rešenje: Zbir unutrašnjih uglova trougla je $180°$, a $\beta = \gamma + 15°$. Zadatku odgovara jednačina $22°30' + \gamma + 15° + \gamma = 180°$, čije je rešenje $\gamma = 71°15'$, pa je $\beta = 86°15'$.

Primer 4.13 (Zbirka [24], zadatak 281) Odredi mere unutrašnjih uglova trougla ΔABC ako važi $\alpha + \beta = 138°$ i $\beta + \gamma = 65°$

Rešenje: Iz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ i $\alpha + \beta = 138°$ i sledi da je $\gamma = 42°$, zatim sledi da je $\beta = 23°$, a potom $\alpha = 115°$.

Primer 4.14 (Zbirka [24], zadatak 331) Izračunaj obim i uporedi unutrašnje uglove α, β i γ trougla ΔABC, koji su naspramni stranicama a, b i c, redom, ako važi: $a + b = 30$ cm, $b + c = 25$ cm i $a + c = 23$ cm.

Rešenje: Ako se saberu sve date jednačine dobija se $2(a + b + c) = 78$, sledi da je $O = 39$ cm. Tada je $a = O - (b + c) = 14$ cm, $b = O - (a + c) = 16$ cm i $c = O - (a + b) = 9$ cm. Kako je $c < a < b$ sledi $\gamma < \alpha < \beta$.

Tematska celina: Četvorougao

Primer 4.15 (Zbirka [24], zadatak 941) Odredi mere unutrašnjih uglova četvorougla ako su dva susedna ugla suplementna i razlikuju se za 23°, a mere preostala dva unutrašnja su u razmeri $2 : 3$.

Rešenje: Neka su α i β susedni suplementni uglovi četvorougla. Tada iz $\alpha + \alpha + 23° = 180°$ sledi da je $\alpha = 78°30'$, pa je $\beta = 101°30'$. Kako je zbir uglova u četvorouglu 360°, sledi da su i γ i δ suplementni uglovi. Iz $\gamma : \delta = 2 : 3$ sledi $\gamma = 2k$ i $\delta = 3k$. Iz jednačine $2k + 3k = 180°$, čije je rešenje $k = 36°$ dobija se da je $\gamma = 72°$ i $\delta = 108°$.

Primer 4.16 (Zbirka [24], zadatak 851) Izračunaj površinu pravougaonika čiji je obim 35,2 cm, a razmera njegove dužine i širine $7 : 9$.

Rešenje: Iz $a : b = 7 : 9$ sledi $a = 7k$ i $b = 9k$. Kako je $14k + 18k = 35{,}2$, dobija se da je $k = 1{,}1$ cm, a potom da je $a = 7{,}7$ cm i $b = 9{,}9$ cm. Površina pravougaonika je $P = 76{,}23$ cm^2.

Tematska celina: Racionalni brojevi

Primer 4.17 (Zbirka [24], zadatak 632) Zbir dva broja je $36\frac{5}{12}$. Ako bismo od prvog sabirka oduzeli $3\frac{5}{6}$ i dodali drugom sabirku, prvi sabirak bi bio veći od drugog za $2\frac{3}{4}$. Koji su to brojevi?

Rešenje: Ako je x prvi sabirak, tada je $36\frac{5}{12} - x$ drugi sabirak. Jednačina koja odgovara uslovu zadatka je $x - 3\frac{5}{6} = 36\frac{5}{12} - x + 3\frac{5}{6} + 2\frac{3}{4}$ čije je rešenje $23\frac{5}{12}$. Sledi da je drugi sabirak 13.

VII razred

Tematske celine: Celi algebarski izrazi i Pitagorina teorema

Primer 4.18 (Zbirka [25], zadatak 621) Izračunaj površinu i obim pravouglog trougla čija je jedna kateta 6 cm, a druga kateta je za 1 cm kraća od hipotenuze.

Rešenje: Primenom Pitagorine teoreme dobija se jednačina $6^2 + (c - 1)^2 = c^2$, čije je rešenje $c = 18{,}5$ cm, pa je tako druga kateta 17,5 cm. Površina trougla je 52,5 cm^2 a obim 42 cm.

Tematska celina: Krug

Primer 4.19 (Zbirka [25], zadatak 949) Odredi mere centralnog i periferijskog ugla kruga nad istim kružnim lukom ako je njihov zbir $240°$.

Rešenje: Kako je centralni ugao α dva puta veći od periferijskog ugla β, jednačina koja odgovara zadatku je $\beta + 2\beta = 240°$. Periferijski ugao je $80°$, a centralni $160°$.

Zadaci sa takmičenja

Primer 4.20 (Opštinsko takmičenje 2023. godine, 5. razred, 3. zadatak) Stranice pravougaonika se razlikuju za 2 cm. Ako svaku stranicu uvećamo za 3 cm, tada se površina tog pravougaonika uveća za $105\ \text{cm}^2$. Izračunaj obim i površinu tog pravougaonika.

Primer 4.21 (Okružno takmičenje 2023. godine, 5. razred, 2. zadatak) Zbir uglova α, β i γ jednak je $180°$. Uglovi α i β su komplementni, a uglovi 5β i γ suplementni. Odredi mere uglova α, β i γ.

Primer 4.22 (Okružno takmičenje 2023. godine, 6. razred, 3. zadatak) U fudbalu pobednik meča dobija 3 boda, a poraženi dobija 0 bodova. Ako se meč završi nerešeno, tada oba tima dobijaju po 1 bod. Jedna ekipa je odigrala 68 utakmica i osvojila 170 bodova. Koliko najviše utakmica je ta ekipa mogla da izgubi?

Primer 4.23 (Okružno takmičenje 2022. godine, 5. razred, 1. zadatak) Uglovi α i β su suplementni, a uglovi β i γ komplementni. Zbir uglova α i γ je $123°$. Izračunaj uglove α, β i γ.

Primer 4.24 (Okružno takmičenje 2022. godine, 6. razred, 2. zadatak) Zbir dva broja i njihovog zbira je $\frac{40}{21}$. Iuračunaj sabirke ako je apsolutna vrednost jednog četiri puta veća od apsolutne vrednosti drugog.

Primer 4.25 (Okružno takmičenje 2020. godine, 6. razred, 1. zadatak) Odredi brojeve a, b i c ako se zna da je njihov zbir veći od broja a za $\frac{5}{2}$, od broja b za $\frac{59}{6}$ i od broja c za $\frac{5}{3}$.

– – – – – – – – – – – – – –

U naslovu rada namerno nije naglašeno da je reč o sistemima dve linearne jednačine sa dve nepoznate, jer se učenici tokom osnovnoškolskog obrazovanja — kako na redovnoj, tako i na dodatnoj nastavi — susreću i sa sistemima koji nisu linearni i/ili imaju veći broj nepoznatih. Ipak, formalno se u osnovnoj školi, u osmom razredu, uvode upravo sistemi dve linearne jednačine sa dve nepoznate.

Nastavna tema *Sistemi linearnih jednačina sa dve nepoznate* prema važećem planu i programu („Službeni glasnik – Prosvetni glasnik RS“, broj 3/2018) predviđena je za drugo polugodište osmog razreda, sa ukupnim fondom od 14 časova. Od toga je 5 časova namenjeno obradi novog sadržaja, 8 časova uvežbavanju i 1 čas proveri znanja.

Prema predviđenim ishodima, na kraju teme učenik će biti u stanju da:

- reši sistem linearnih jednačina sa dve nepoznate;
- reši realne probleme koristeći sistem linearnih jednačina sa dve nepoznate.

Pregled nastavnih jedinica predviđenih godišnjim planom i programom dat je u tabeli 4.1. [26]

Nastavna tema	R. broj	Naziv nastavne jedinice	Tip časa
Sistemi linearnih jednačina sa dve nepoznate	1.	Linearna jednačina sa dve nepoznate i skup njenih rešenja	obrada
	2.	Pojam sistema od dve linearne jednačine sa dve nepoznate. Rešenje sistema. Ekvivalentni sistem jednačina	obrada
	3.	Grafički način rešavanja sistema linearnih jednačina	obrada
	4.	Grafički način rešavanja sistema linearnih jednačina	uvežbavanje
	5.	Rešavanje sistema dve linearne jednačine sa dve nepoznate metodom suprotnih koeficijenata	obrada
	6.	Rešavanje sistema dve linearne jednačine sa dve nepoznate metodom suprotnih koeficijenata	uvežbavanje
	7.	Rešavanje sistema metodom zamene	obrada
	8.	Rešavanje sistema metodom zamene	uvežbavanje
	9.	Rešavanje sistema pogodnom metodom	uvežbavanje
	10.	Rešavanje sistema pogodnom metodom	uvežbavanje
	11.	Primena sistema jednačina u rešavanju zadataka	uvežbavanje
	12.	Primena sistema jednačina u rešavanju zadataka	uvežbavanje
	13.	Rešavanje sistema pogodnom metodom	utvrđivanje
	14.	Sistem dve linearne jednačine sa dve nepoznate	pismena provera znanja

Tabela 4.1 Pregled nastavnih jedinica za temu Sistemi linearnih jednačina sa dve nepoznate

Uvođenje teme započinje definisanjem linearne jednačine sa dve nepoznate, nakon čega se definiše i sam pojam sistema linearnih jednačina sa dve nepoznate. Iako se redosled obrade metoda rešavanja sistema može razlikovati, u praksi se najčešće najpre izlaže grafička metoda, budući da je grafik linearne funkcije učenicima već poznat. Nakon toga se obrađuje metoda zamene, a zatim i metoda suprotnih koeficijenata. Posebno važan deo nastavne teme čine časovi posvećeni primeni sistema linearnih jednačina, koji ne samo da produbljuju matematička znanja, već i omogućavaju povezivanje sa sadržajima drugih predmeta.

U nastavku ovog poglavlja biće prikazano kako se u osmom razredu obrađuje tema sistema linearnih jednačina, uz uvid u sve udžbenike odobrene od strane Ministarstva prosvete. Na mestima gde među udžbenicima postoje značajnija razmimoilaženja, ona su posebno istaknuta. Zatim slede brojni primeri zadataka koji se pojavljuju na redovnoj nastavi, dodatnoj nastavi i takmičenjima, kao i pregled zadataka iz ove oblasti koji su se javljali na završnim ispitima proteklih godina. Pri izboru zadataka, posebna pažnja posvećena je njihovoj raznovrsnosti po tipu, kao i izvorima iz kojih su preuzeti.

Poseban segment poglavlja posvećen je pristupima savladavanja ove teme kod učenika koji ostvaruju pravo na individualni obrazovni plan.

4.1 Linearna jednačina sa dve nepoznate

Učenici osmog razreda se tokom prvog polugodišta formalno upoznaju sa linearnim jednačinama sa jednom nepoznatom. Prirodno je da na toj osnovi kreće nadogradnja koja vodi ka uvođenju sistema linearnih jednačina sa dve nepoznate. Prvi stepenik u tome jeste uvođenje pojma linearne jednačine sa dve nepoznate.

Kroz neke udžbenike se pojmu prilazi problemski, preko praktičnog primera (izdavači Diofant, Bigz):

Primer 4.1.1 [27] Stranice pravougaonika imaju dužinu a i b, a obim pravougaonika je 50. Napiši jednakost koja date podatke prevodi na matematički jezik.

Primer 4.1.2 [28] Kako bismo matematički izrazili da smo za 6 čokolada i 4 kutije keksa platili 1850 dinara?

Ostali udžbenici odmah uvode definicije. Recimo Gerundijum-ov udžbenik uvodi definicije sledećim redom:

Definicija 4.1.1 [29] Jednakost u kojoj učestvuju tačno dve promenljive predstavlja jednačinu sa dve nepoznate veličine.

Definicija 4.1.2. [29] Rešenje jednačine s dve nepoznate x i y je uređeni par (x_0, y_0), $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, takav da, kada se x zameni sa x_0, a y sa y_0 jednačina postaje tačna brojevna jednakost.

Primer 4.1.3 Jednačina $x + 2y = 10$ je jednačina sa dve nepoznate x i y.

Uređeni par $(6, 2)$ jeste rešenje ove jednačine, jer je $6 + 2 \cdot 2 = 10$ tačna brojevna jednakost, dok uređeni par (4,1) nije rešenje ove jednačine jer $4 + 2 \cdot 1 = 10$ nije tačna brojevna jednakost.

Definicija 4.1.3 [29] Svi uređeni parovi koji su rešenja jednačine s dve nepoznate čine skup rešenja te jednačine.

Definicija 4.1.4 [29] Za dve jednačine s dve nepoznate kažemo da su ekvivalentne ako je svako rešenje jedne od njih ujedno i rešenje druge, i obrnuto.

Definicija 4.1.5 [29] Jednačinu s dve nepoznate x i y, ekvivalentnu jednačini oblika $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, nazivamo linearna jednačina s dve nepoznate x i y.

Postoje razmimoilaženja pojedinih izdavača oko opšteg oblika jednačine sa dve nepoznate. Dok se u nekim udžbenicima [27, 29, 30, 31] ne navode dodatni uslovi za koeficijente a i b, kod izdavača Bigz insistira se na tome da oba koeficijenta moraju biti različita od nule, dok se u udžbeniku izdavačke kuće Klett uvodi ograničenje da koeficijenti a i b ne mogu istovremeno biti nula. U radu je prihvaćena definicija kod koje ne postoje ograničenja za koeficijente a i b, kako bi se i jednačine oblika $0 \cdot x + by + c = 0$ i $ax + 0 \cdot y + c = 0$ smatrale linearnim jednačinama sa dve nepoznate, što će biti konzistentno sa kasnijom definicijom sistema dve linearne jednačine sa dve nepoznate, o čemu će biti reči nešto kasnije, u poglavlju 4.2. Jednačina oblika $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$ je u duhu prethodne definicije takođe linearna jednačina sa dve nepoznate.

Primer 4.1.4 Koje od navedenih jednačina predstavljaju linearne jednačine sa dve nepoznate: $3x - 4y = 12$, $2k + 5m - 16 = 0$, $x^2 + y^2 = 100$, $x + xy = 20$, $3p - 5q + 4r = 111$?

Rešenje: To su samo prva i druga jednačina. Treća i četvrta nisu linearne, jer u njima postoje sabirci koji predstavljaju monome stepena većeg od jedan. Peta jednačina jeste linearna, ali ne sa dve, nego sa tri nepoznate.

U svim posmatranim udžbenicima prirodno se u nastavku postavlja pitanje koliko rešenja ima linearna jednačina sa dve nepoznate i kako ih određujemo.

Primer 4.1.5 Jednačina $-3x + y - 17 = 0$ predstavlja linearnu jednačinu sa dve nepoznate x i y. Ako izaberemo da je $x = t$, gde je t proizvoljan realan broj, nalazimo da je $y = 3t + 17$, pa je uređeni par $(t, 3t + 17)$ rešenje polazne jednačine za proizvoljno t. Kako realnih brojeva označenih sa t ima beskonačno mnogo, to i polazna jednačina ima beskonačno mnogo rešenja. Skup svih rešenja te jednačine možemo zapisati na sledeći način $\{(t, 3t + 17) | t \in \mathbb{R}\}$.

4.2. Pojam i metode rešavanja sistema dve linearne jednačine sa dve nepoznate

Razmatranje pojma sistema dve linearne jednačine sa dve nepoznate započeće prikazom odgovarajućeg primera, koji će poslužiti kao uvod u formalno definisanje.

Primer 4.2.1 Matematičkim jezikom zapiši sledeću rečenicu: Zbir dva broja je 250, a njihova razlika je 70.

Ako se sa x označi prvi broj, a sa y drugi, tada se dati uslovi zadatka mogu zapisati kao $x + y = 250$ i $x - y = 70$. Dakle, matematički smo uslove zadatka preveli u dve jednačine sa dve nepoznate, pri čemu je jasno da tražene vrednosti nepoznatih moraju istovremeno zadovoljavati i prvu i drugu jednačinu.

Definicija 4.2.1 [29] Dve linearne jednačine u kojima učestvuju dve različite nepoznate čine sistem dve linearne jednačine sa dve nepoznate.

Sistem dve linearne jednačine sa dve nepoznate ima opšti oblik:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (5)$$

gde su $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ realni brojevi.

Realne brojeve a_1 i a_2 nazivamo koeficijenti uz nepoznatu x, realne brojeve b_1 i b_2 nazivamo koeficijenti uz nepoznatu y, dok realne brojeve c_1 i c_2 nazivamo slobodni članovi.

Za razliku od definisanja linearne jednačine sa dve nepoznate, kod definisanja sistema dve linearne jednačine sa dve nepoznate ne dolazi do razmimoilaženja kod udžbenika različitih izdavača u pogledu koeficijenata koji stoje uz nepoznate. Osim udžbenika izdavača Gerundijum koji sistem definiše kako

je navedeno u definiciji 4.2.1, kod ostalih izdavača se sistem uvodi davanjem njegovog opšteg oblika (5).

Razlika se jedino uočava u zapisu sistema, tj. da li se sistemi označavaju levom vitičastom zagradom ili ne. U nekim od posmatranih udžbenika se leva vitičasta zagrada koristi prilikom definisanja sistema, i početnim primerima, ili za postavku zadatka. To ima svoje metodičko opravdanje u isticanju da jednačine sistema zapravo treba posmatrati kao jednu celinu, te je i u radu prihvaćena takva forma zapisa. U drugim, pak, udžbenicima leva vitičasta zagrada se uopšte ne koristi.

Poštujući uvedenu notaciju, primer 4.2.1 bi sada poprimio sledeći oblik:

$$\begin{cases} x + y = 250 \\ x - y = 70 \end{cases}$$

Definicija 4.2.2 [29] Rešenje sistema dve linearne jednačine sa dve nepoznate *x* i *y* je svaki uređen par realnih brojeva (x_0, y_0) koji je rešenje obe jednačine tog sistema.

Drugim rečima, to je svaki uređeni par (x_0, y_0) za koga se dobijaju tačne brojevne jednakosti:

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2 \end{cases}$$

Svi uređeni parovi (x_0, y_0) koji zadovoljavaju sistem (5) čine skup rešenja tog sistema jednačina.

Za primer 4.2.1 rešenje je uređeni par $(160, 90)$ jer predstavlja rešenje i prve i druge jednačine u sistemu, odnosno kada se *x* zameni brojem 160, a *y* brojem 90, dobijaju se dve tačne brojevne jednakosti:

$$\begin{cases} 160 + 90 = 250 \\ 160 - 90 = 70 \end{cases}$$

U udžbeniku izdavača Diofant se prilikom definisanja rešenja sistema uvodi i dodatna definicija – sistem jednačina u rešenom obliku, koja se ne sreće u ostalim udžbenicima. Biće navedena i definicija rešenja sistema kako bi bio potpuno jasan kontekst u kom se vrši definisanje:

Ako je $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2 \end{cases}$, onda realni brojevi x_0 i y_0 predstavljaju rešenje sistema jednačina.

Tada se sistem $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$ naziva sistemom jednačina u rešenom obliku. [27]

Sistem dve linearne jednačina sa dve nepoznate može imati:

a) jedinstveno rešenje, kada postoji tačno jedan uređen par (x_0, y_0) koji je rešenje obe jednačine sistema;
b) beskonačno mnogo rešenja, kada postoji beskonačno mnogo uređenih parova (x_0, y_0) koji su rešenje obe jednačine sistema, što se dešava ukoliko su jednačine u sistemu ekvivalentne;
c) nema rešenja, kada ne postoji uređen par (x_0, y_0) koji je rešenje obe jednačine sistema.

Zanimljivo je da se u veoma malom broju udžbenika uvode pojmovi određen, neodređen i nemoguć (protivurečan) sistem. Samo u udžbeniku [28] se za sistem u slučaju *a)* navodi da se za takav sistem kaže da je određen. Udžbenici [28] i [32] navode da se u slučaju *b)* za takav sistem kaže da je neodređen, dok udžbenici [27] i [28] navode da se u slučaju *c)* za takav sistem kaže da je nemoguć ili protivrečan.

Primer 4.2.2 Dat je sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

Ovaj sistem nema rešenja, jer je nemoguće pronaći uređen par (x_0, y_0) za koga će istovremeno važiti i da je $x_0 + y_0 = 10$ i da je $x_0 + y_0 = 20$, tj. nemoguće je da je zbir dva broja u isto vreme i 10 i 20.

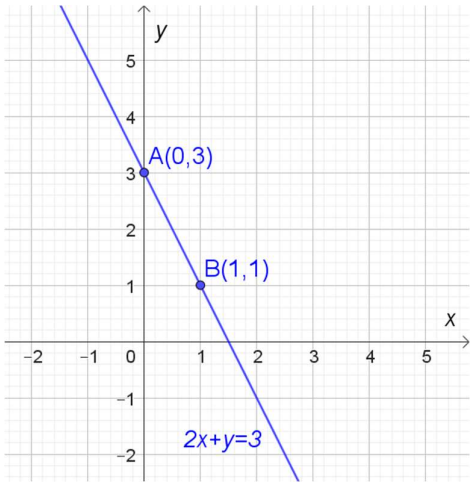
4.2.1 Grafički prikaz sistema od dve linearne jednačine sa dve nepoznate

Kako su u trenutku obrade sistema linearnih jednačina učenici već upoznati sa linearnom funkcijom i njenim grafikom, lako se uvodi objašnjenje grafičkog prikaza sistema dve linearne jednačine sa dve nepoznate. Opet uvodni deo jeste grafički prikaz rešenja linearne jednačine sa dve nepoznate.

Rešenja linearne jednačine sa dve nepoznate možemo odrediti i grafički, tako što ćemo tu linearnu jednačinu $ax + by + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$ i $b \neq 0$ sa nepoznatim x i y posmatrati kao linearnu funkciju zadatu u implicitnom obliku. Uređeni parovi koji su rešenja date linearne jednačine predstavljaju koordinate tačaka koje pripadaju grafiku te funkcije. Grafik linearne funkcije dakle predstavlja grafički prikaz rešenja date jednačine, jer koordinate svake tačke te prave jesu jedno od rešenja date jednačine. [29, 31]

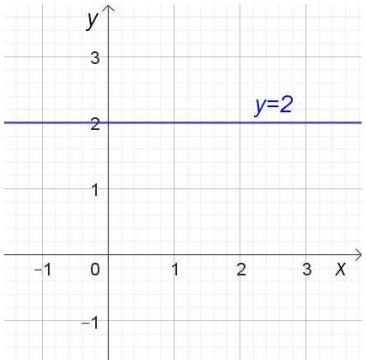
Primer 4.2.3 Grafički prikaži rešenja jednačine $2x + y = 3$.

Kako koordinate tačaka $(0,3)$ i $(1,1)$ zadovoljavaju jednačinu $2x + y = 3$, to prava koja ih sadrži predstavlja grafički prikaz rešenja te jednačine (slika 4.1). Koordinate svake tačke te prave predstavljaju jedno od rešenja te jednačine.

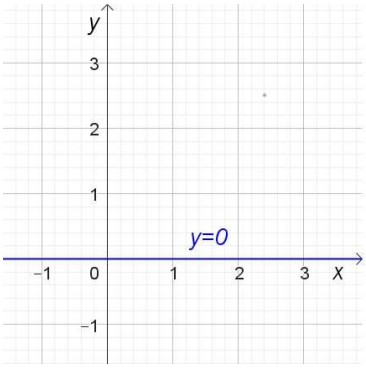


Slika 4.1 Grafički prikaz rešenja jednačine sa dve nepoznate

U kontekstu gornjeg razmatranja, specijalan slučaj jeste kada je u linearnoj jednačini $ax + by + c = 0,\ b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$ koeficijent uz nepoznatu x jednak nuli $(a = 0)$. U tom slučaju se ta linearna jednačina može posmatrati kao linearna funkcija oblika $y = n$, $(n = -\frac{c}{b})$. Učenici su već upoznati sa tim da je grafik takve linearne funkcije prava koja je paralelna sa apscisnom osom, i to ako je $n \neq 0$ sa njom nema zajedničkih tačaka (slika 4.2), a ako je $n = 0$ poklapa se sa njom (slika 4.3).

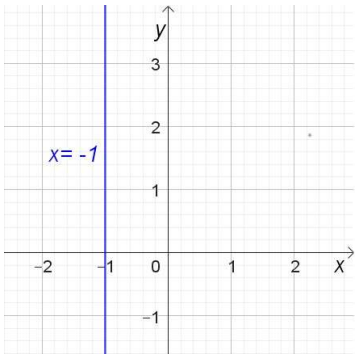


Slika 4.2 Grafik prave oblika $y = n,\ n \neq 0$

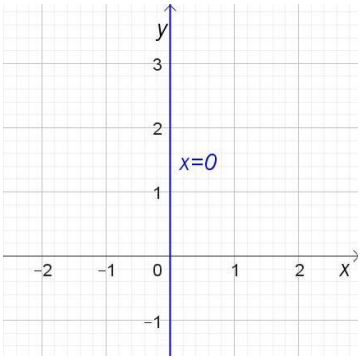


Slika 4.3 Grafik prave $y = 0$

U slučaju kada je $b = 0$, za $a \neq 0$, jednačina $ax + by + c = 0$ ima oblik $ax + 0 \cdot y + c = 0$, te je skup njenih rešenja $\left\{(-\frac{c}{a}, t) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$. Grafički prikaz rešenja je prava $x = -\frac{c}{a}$, koja je paralelna ordinatnoj osi. Za $c \neq 0$ ta prava nema zajedničkih tačaka sa ordinatnom osom (slika 4.4), dok se za $c = 0$ sa njom poklapa (slika 4.5).



Slika 4.4 Grafik prave oblika $x = n,\ n \neq 0$



Slika 4.5 Grafik prave $x = 0$

U udžbenicima za osmi razred se ne analizira situacija kada su u linearnoj jednačini $ax + by + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$, koeficijenti uz obe nepoznate jednaki sa nulom, tj. $a = b = 0$. U tom slučaju razlikuju se dve mogućnosti:

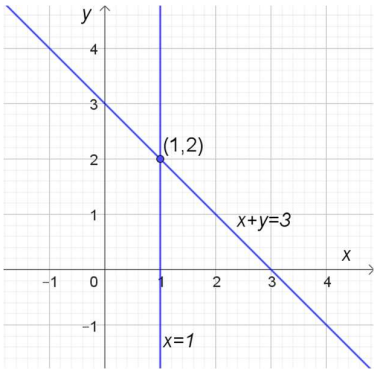
- $c = 0$ – tada svaki uređeni par (x_0, y_0) predstavlja rešenje te linearne jednačine sa dve nepoznate, pa je grafičko rešenje cela koordinatna ravan
- $c \neq 0$ – tada ne postoji uređeni par (x_0, y_0) koji predstavlja rešenje te linearne jednačine

Na osnovu prethodno rečenog, prirodno proizilazi da se sistem dve linearne jednačine sa dve nepoznate grafički prikazuje tako što se u istom koordinatnom sistemu crtaju prave koje predstavljaju grafičke

prikaze obe jednačine sistema. Zajedničke tačke tih pravih predstavljaju grafički prikaz rešenja tog sistema.

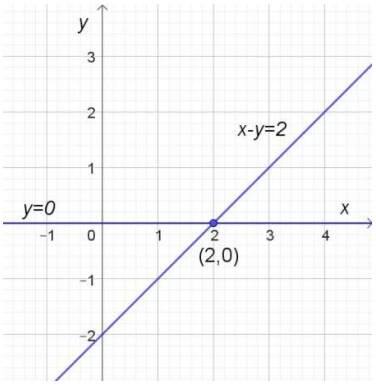
Primer 4.2.4 Grafički prikaži sistem jednačina, odredi njegovo rešenje i zapiši ga u obliku uređenog para.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$



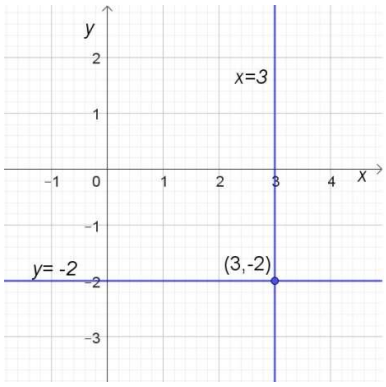
Rešenje sistema: $(1,2)$

b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ y = 0 \end{cases}$



Rešenje sistema: $(2,0)$

c) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$



Rešenje sistema: $(3, -2)$

Na osnovu međusobnog položaja pravih kojima grafički prikazujemo sistem jednačina sada se i neposredno uočava da sistem može da:

- ima jedinstveno rešenje (kada se prave seku);
- nema rešenja (npr. kada su prave paralelne i nemaju zajedničkih tačaka);
- ima beskonačno mnogo rešenja (npr. kada se prave poklapaju).

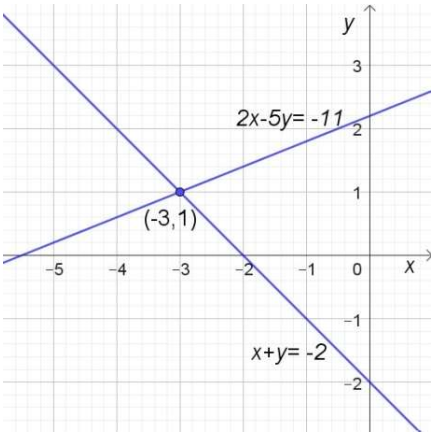
Sva tri slučaja biće predstavljena narednim primerima.

Prvi slučaj

Grafički prikaži sistem jednačina, odredi njegovo rešenje:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -11 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Nakon crtanja grafičkog prikaza obe jednačine sistema, dobijaju se dve prave koje se seku u jednoj tački (slika 4.6), čije su koordinate $x = -3$ i $y = 1$.



Slika 4.6 Grafički prikaz sistema u kome se prave seku

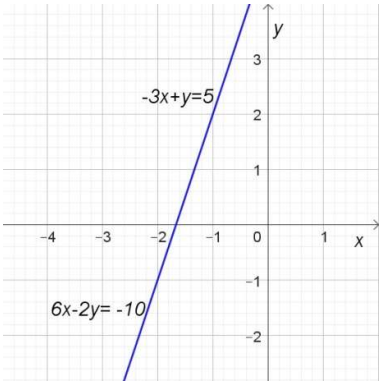
Za takav sistem kaže se da ima jedinstveno rešenje i to je uređeni par $(-3,1)$.

Drugi slučaj

Grafički prikaži sistem jednačina, odredi njegovo rešenje:

$$\begin{cases} -3x + y = 5 \\ 6x - 2y = -10 \end{cases}$$

Nakon crtanja grafičkog prikaza obe jednačine sistema, dobijaju se dve prave koje se poklapaju (slika 4.7). To je i očekivano, jer su jednačine tog sistemu ekvivalentne. Druga jednačina sistema se dobija množenjem prve brojem -2.



Slika 4.7 Grafički prikaz sistema u kome se prave poklapaju

Kako se prave poklapaju, one imaju beskonačno mnogo zajedničkih tačaka, i to su sve tačke te prave. U tom slučaju kaže se da sistem ima beskonačno mnogo rešenja, i čine ga svi uređeni parovi oblika $(t, 3t + 5)$, gde je *t* proizvoljan realan broj.

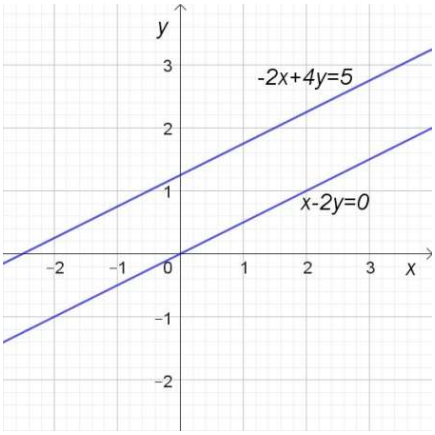
Rešenje sistema zapisuje se kao skup $\{(t, 3t + 5) | t \in \mathbb{R}\}$.

Treći slučaj

Grafički prikaži sistem jednačina, odredi njegovo rešenje:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 5 \end{cases}$$

Nakon crtanja grafičkog prikaza obe jednačine sistema, dobijaju se dve prave koje su paralelne, i nemaju zajedničkih tačaka (slika 4.8). Samim tim, ne postoji uređeni par koji bi bio rešenje i prve i druge jednačine sistema. Za takav sistem kaže se da nema rešenja, ili da je njegovo rešenje prazan skup.



Slika 4.8 Grafički prikaz sistema u kome su prave paralelne

Upravo zbog vizuelnog razumevanja broja rešenja sistema jednačina, veliki broj udžbenika se iz metodičkih razloga odlučuje da rešavanje sistema jednačina i započne upravo grafičkom metodom [28, 29, 31, 32].

Grafička metoda rešavanja sistema linearnih jednačina sa dve nepoznate učenicima obično ne predstavlja posebnu teškoću, jer se zasniva na sadržajima koje su nedavno usvojili pri obradi grafičkog prikaza linearne funkcije. Zbog toga se na času ponekad javlja pitanje zbog čega je potrebno uvoditi i druge metode rešavanja, kada im grafička metoda već deluje poznato i dovoljno. Upravo u ovoj fazi nastave korisno je ukazati na prednosti i ograničenja grafičkog pristupa, kako bi se opravdala potreba za uvođenjem algebarskih metoda i omogućilo dublje razumevanje koncepta rešenja sistema. Grafička metoda je korisna za vizuelno razumevanje sistema linearnih jednačina i lako uočavanje tipa rešenja. Međutim, zbog toga što se tačnost rezultata oslanja na preciznost crteža (pogotovo ako rešenja nisu celi brojevi), takođe zbog nepraktičnosti kada su u pitanju velika rešenja, kao i ograničenosti na sisteme sa dve nepoznate, obično se koristi samo u uvodnoj fazi, dok se za precizno određivanje rešenja primenjuju algebarske metode.

4.2.2 Ekvivalentnost sistema linearnih jednačina

U poglavlju o linearnim jednačinama i nejednačinama, učenici su savladali pojam ekvivalentnosti jednačina. Analogna definicija uvodi se i za sisteme linearnih jednačina.

Definicija 4.2.3 [27] Sistem jednačina J_1 ekvivalentan je sistemu jednačina J_2 ako je skup rešenja sistema J_1 jednak skupu rešenja sistema J_2.

Napomena je da je ovde definisana ekvivalentnost sistema jednačina, bez ograničenja na linearne jednačine sa dve nepoznate. Dakle, data je šira definicija, što ima smisla obzirom da se pred učenicima pojavljuju i sistemi koji neće biti linearni, ili će imati više od dve promenljive.

Primer 4.2.5 Da li su ekvivalnetni sistemi jednačina $J_1: \begin{cases} x = -1 \\ x + y = 4 \end{cases}$ i $J_2: \begin{cases} 2x - y = -7 \\ y = 5 \end{cases}$?

Rešavanjem i prvog i drugog sistema jednačina utvrđuje se da je uređeni par (-1, 5) jedinstveno rešenje i prvog i drugog sistema jednačina, tj. da važi $S_1 = \{(-1,5)\}$ i $S_2 = \{(-1,5)\}$. Kako je $S_1 = S_2$, to znači da su sistemi J_1 i J_2 ekvivalentni.

Primer 4.2.6 Da li su ekvivalentni sistemi jednačina $J_1: \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ i $J_2: \begin{cases} |x| = 2 \\ |y| = 0 \end{cases}$?

Skup rešenja prvog sistema jednačina je $S_1 = \{(2,0)\}$, dok je skup rešenja drugog sistema jednačina je $S_1 = \{(2,0), (-2,0)\}$. Pošto $S_1 \neq S_2$, to sistemi J_1 i J_2 nisu ekvivalentni.

Definicija ekvivalentnih sistema jednačina u udžbeniku izdavača Klett [32] glasi: Dva sistema jednačina su ekvivalentna ako je svako rešenje jednog od njih ujedno rešenje i drugog, ili ako oba sistema nemaju rešenje. Iz perspektive primera 4.2.6, čini se da ova definicija ne bi bila korektna. Sličnu definiciju nudi i udžbenik izdavača Gerundijum [29], koja glasi: Dva sistema linearnih jednačina s dve nepoznate nazivamo ekvivalentnim ako je svako rešenje jednog od njih ujedno i rešenje drugog i obrnuto. Upravo nedostatak reči "i obrnuto" koji se ovde sreće jeste deo koji definiciju iz [32] čini nepreciznom.

Nakon definisanja ekvivalentnih sistema, u svim udžbenicima navode se transformacije koje neki sistem prevode u njemu ekvivalentan sistem, kao niz tvrđenja, svojstava, pravila ili teorema. U nastavku će biti navedena sva pravila koja se pojavljuju u udžbenicima, i za svako će biti navedeno u kom udžbeniku/udžbenicima se pojavljuje. Pravila će biti ilustrovana i odgovarajućom šemom i/ili primerom.

Zapisaćemo sistem jednačina J u obliku $J: \begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases}$

Pravilo 1 – Zamena redosleda jednačina: [27]

Sistem jednačina $\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases}$ je ekvivalentan sa sistemom jednačina $\begin{cases} C = D \\ A = B \end{cases}$

Pravilo 2 – Zamena jednačina sistema ekvivalentnim jednačinama: [29, 30, 31, 32]

Sistem jednačina $\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases}$ je ekvivalentan sa sistemom koji se dobije kada se jedna ili obe jednačine sistema zamene ekvivalentnim jednačinama.

U udžbenicima [27] i [28] je dato specifičnijim pravilom:

Sistem jednačina $\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases}$ je ekvivalentan sa sistemom koji se dobije kada se jedna ili obe jednačine sistema pomnože brojem različitim od nule $\begin{cases} p \cdot A = p \cdot B \ \ (p \neq 0) \\ q \cdot C = q \cdot D \ \ (q \neq 0) \end{cases}$

Primer 4.2.7 Posmatrajmo sisteme $J_1: \begin{cases} -\frac{2}{3}x + y = 5 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$ i $J_2: \begin{cases} -2x + 3y = 15 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$. Sistem J_2 dobijen je tako što je prva jednačina u sistemu J_1 pomnožena brojem 3. Dakle, prvu jednačinu sistema J_1 zamenili smo ekvivalentnom jednačinom, te su i dati sistemi ekvivalentni.

Pravilo 3 – Zamena jedne jednačine sistema zbirom jednačina: [27, 28, 29, 30, 31, 32]

Sistem jednačina $\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases}$ je ekvivalentan sa sistemom jednačina $\begin{cases} A = B \\ A + C = B + D \end{cases}$.

Primer 4.2.8 Posmatrajmo sisteme $J_1: \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$ i $J_2: \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x = 1 \end{cases}$. Sistem J_2 dobijen je tako što je druga jednačina sistema J_1 zamenjena jednačinom koja je dobijena sabiranjem jednačina prvog sistema ($3x - 2y + x + 2y = 5 + (-4) \implies 4x = 1$). Na osnovu pravila 3 sledi da su dati sistemi ekvivalentni.

Pravilo 4 – Zamena nepoznate iz jedne jednačine sistema u drugu jednačinu sistema: [27, 29, 30, 31, 32]

Sistem jednačina $\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases}$ je ekvivalentan sa sistemom koji se dobije kada se jedna nepoznata iz bilo koje jednačine sistema izrazi u funkciji druge nepoznate, a potom zameni u drugu jednačinu.

Primer 4.2.9 Posmatrajmo sisteme $J_1: \begin{cases} -3x - y = 0 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ i $J_2: \begin{cases} -3x - y = 0 \\ -8x = 7 \end{cases}$. Sistem J_2 dobijen je tako što je iz prve jednačine nepoznata y izražena u funkciji nepoznate x ($y = -3x$), a potom zamenjena u drugu jednačinu ($x + 3 \cdot (-3x) = 7 \implies x - 9x = 7 \implies -8x = 7$. Na osnovu pravila 4 sledi da su dati sistemi ekvivalentni.

Pravilo 5 – Tranzitivnost: [30]

Ako je sistem jednačina $\begin{cases} A_1 = B_1 \\ C_1 = D_1 \end{cases}$ ekvivalentan sa sistemom jednačina $\begin{cases} A_2 = B_2 \\ C_2 = D_2 \end{cases}$, a sistem jednačina $\begin{cases} A_2 = B_2 \\ C_2 = D_2 \end{cases}$ ekvivalentan sa sistemom jednačina $\begin{cases} A_3 = B_3 \\ C_3 = D_3 \end{cases}$, tada je i sistem jednačina $\begin{cases} A_1 = B_1 \\ C_1 = D_1 \end{cases}$ ekvivalentan sa sistemom jednačina $\begin{cases} A_3 = B_3 \\ C_3 = D_3 \end{cases}$.

U nastavku su predstavljene još dve metode koje su predviđene planom i programom iz matematike za učenike osmog razreda. Obe te metode su algebarske, i zapravo se zasnivaju na tome da se polazni sistem primenom navedenih pravila svede na ekvivalentan sistem čije se rešenje neposredno određuje. To su metoda zamene i metoda suprotnih koeficijenata. Tokom rešavanja sistema uobičajeno je da se posle primene nekog od pravila dobijeni sistemi razdvoje horizontalnom linijom radi preglednosti zapisa.

4.2.3 Rešavanje sistema linearnih jednačina metodom zamene

Metoda zamene ili supstitucije se najvećom merom zasniva na korišćenju *Pravila 4*, a koje podrazumeva da se jedna nepoznata iz jedne od jednačina sistema izrazi pomoću druge nepoznate, a zatim se ta nepoznata u drugoj jednačini zameni dobijenim izrazom. Nizom ekvivalentnih transformacija polazni sistem se menja sve dok se ne dobije sistem ekvivalentan polaznom, a čije se rešenje neposredno određuje.

Iako je potpuno svejedno koju nepoznatu izraziti preko druge i iz koje jednačine, praktično se bira najpogodnija situacija. Metodu zamene je najzgodnije primenjivati kada je bar jedan koeficijent uz neku od nepoznatih jednak 1 ili –1, jer se tada jedna nepoznata lako izražava preko druge.

U nastavku su odabrani primeri koji ilustruju sve tri vrste mogućih skupova rešenja sistema: sistem koji ima jedinstveno rešenje, sistem sa beskonačno mnogo rešenja i sistem bez rešenja.

Primer 4.2.10 Metodom zamene reši sledeći sistem jednačina $\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x + 3y = 43 \end{cases}$.

$x - 2y = 11$ $2x + 3y = 43$	
$x = 2y + 11$ $2x + 3y = 43$	Pravilo 2 (zamena I jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)
$x = 2y + 11$ $2 \cdot (2y + 11) + 3y = 43$	Pravilo 4 (zamena nepoznate *x* iz I jednačine u II jednačinu)
$x = 2y + 11$ $4y + 22 + 3y = 43$	Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)
$x = 2y + 11$ $7y = 43 - 22$	Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)
$x = 2y + 11$ $7y = 21 / \ : 7$	Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)
$x = 2y + 11$ $y = 3$	Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)
$x = 2 \cdot 3 + 11$ $y = 3$	Pravilo 4 (zamena nepoznate *y* iz II jednačine u I jednačinu)
$x = 17$ $y = 3$	Pravilo 2 (zamena I jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

Polazni sistem ima jedinstveno rešenje. $S = \{(17,3)\}$

Primer 4.2.11 Metodom zamene reši sledeći sistem jednačina $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 8 \\ -2x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2y + 8 \\ -2x + 4y &= 2 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena I jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

$$\begin{aligned} x &= 2y + 8 \\ -2 \cdot (2y + 8) + 4y &= 2 \end{aligned}$$ Pravilo 4 (zamena nepoznate *x* iz I jednačine u II jednačinu)

$$\begin{aligned} x &= 2y + 8 \\ -4y - 16 + 4y &= 2 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

$$\begin{aligned} x &= 2y + 8 \\ 0 \cdot y - 16 &= 2 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

$$\begin{aligned} x &= 2y + 8 \\ 0 \cdot y &= 18 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

Jednačina $0 \cdot y = 18$ nema rešenje, pa ga nema ni dati sistem. To se može zapisati na sledeći način $S = \varnothing$. Dakle, polazni sistem je nemoguć.

Primer 4.2.12 Metodom zamene reši sledeći sistem jednačina $\begin{cases} -3x - y = 1 \\ 6x + 2y = -2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} -3x - y &= 1 \\ 6x + 2y &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -3x - 1 \\ 6x + 2y &= -2 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena I jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

$$\begin{aligned} y &= -3x - 1 \\ 6x + 2 \cdot (-3x - 1) &= -2 \end{aligned}$$ Pravilo 4 (zamena nepoznate *y* iz I jednačine u II jednačinu)

$$\begin{aligned} y &= -3x - 1 \\ 6x - 6x - 2 &= -2 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

$$\begin{aligned} y &= -3x - 1 \\ 0 \cdot x - 2 &= -2 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

$$\begin{aligned} y &= -3x - 1 \\ 0 \cdot x &= 0 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

Jednačina $0 \cdot x = 0$ je identitet, jer je svaki realan broj *x* rešenje ove jednačine. To dalje povlači da su rešenja poslednjeg dobijenog sistema, a samim tim i polaznog sistema, zapravo rešenja njegove prve jednačine. Dakle, ovaj sistem ima beskonačno mnogo rešenja, pa je sistem neodređen. Skup rešenja polaznog sistema je $S = \{(t, -3t - 1) | t \in \mathbb{R}\}$.

U poglavlju 3 dat je pregled metoda i zadataka koji se sreću kod učenika prvog ciklusa obrazovanja. Ilustracije radi, primer koji je u tom poglavlju rešen metodom duži (*Primer 3.2.2*) biće u nastavku rešen metodom zamene.

Primer 4.2.13 Zbir dva broja je 60. Jedan je tri puta veći od drugog. Odredi te brojeve.

Rešenje: Neka su nepoznati brojevi označeni promenljivima x i y. Iz teksta zadatka se lako postavljaju veze koje važe među promenljivima, čime se dobija sistem dve linearne jednačine sa dve nepoznate.

$$\begin{aligned} x + y &= 60 \\ y &= 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3x &= 60 \\ y &= 3x \end{aligned}$$ Pravilo 4 (zamena nepoznate y iz II jednačine u I jednačinu)

$$\begin{aligned} 4x &= 60 \quad /:4 \\ y &= 3x \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena I jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

$$\begin{aligned} x &= 15 \\ y &= 3x \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena I jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

$$\begin{aligned} x &= 15 \\ y &= 3 \cdot 15 \end{aligned}$$ Pravilo 4 (zamena nepoznate x iz I jednačine u II jednačinu)

$$\begin{aligned} x &= 15 \\ y &= 45 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

Odgovor: Traženi brojevi su 45 i 15.

4.2.4 Rešavanje sistema jednačina metodom suprotnih koeficijenata

Metoda suprotnih koeficijenata se zasniva na činjenici da je zbir suprotnih brojeva jednak nuli. Sastoji se od dva koraka:

- sistem se korišćenjem *Pravila 2* svodi na ekvivalentan sistem kod koga koeficijenti uz jednu promenljivu predstavljaju par suprotnih brojeva
- sistem se *Pravilom 3* svodi na ekvivalentan sistem tako što se jedna od jednačina sistema zamenjuje zbirom jednačina

Nizom ekvivalentnih transformacija polazni sistem se menja sve dok se ne dobije sistem ekvivalentan polaznom, a čije se rešenje neposredno određuje.

Metoda suprotnih koeficijenata je jednostavniji slučaj opštije metode, Gausove metode koja je pojašnjena u *Poglavlju 1.2*, a koja se može primeniti i na linearne sisteme sa većim brojem jednačina i/ili nepoznatih veličina.

U nastavku su odabrani primeri koji ilustruju sve tri vrste mogućih skupova rešenja sistema: sistem koji ima jedinstveno rešenje, sistem sa beskonačno mnogo rešenja i sistem bez rešenja.

Primer 4.2.14 Reši sistem jednačina $\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 5x + 2y = 13 \end{cases}$ metodom suprotnih koeficijenata i proveri rešenje.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 11 \\ 5x + 2y &= 13 \end{aligned}$$ Koeficijenti uz nepoznatu y su suprotni brojevi

$$\begin{aligned} &x-2y=11\\ &x-2y+5x+2y=11+13 \end{aligned}$$ Pravilo 3 (zamena druge jednačine sistema zbirom jednačina)

$$\begin{aligned} &x-2y=11\\ &6x=24 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

$$\begin{aligned} &x-2y=11\\ &x=24:6 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

$$\begin{aligned} &x-2y=11\\ &x=4 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

$$\begin{aligned} &4-2y=11\\ &x=4 \end{aligned}$$ Pravilo 4 (zamena nepoznate *x* iz II jednačine u I jednačinu)

$$\begin{aligned} &-2y=11-4\\ &x=4 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena I jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

$$\begin{aligned} &-2y=7\\ &x=4 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena I jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

$$\begin{aligned} &y=7:(-2)\\ &x=4 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena I jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

$$\begin{aligned} &y=-\tfrac{7}{2}\\ &x=4 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena I jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

Polazni sistem ima jedinstveno rešenje.

$S=\left\{\left(4,-\frac{7}{2}\right)\right\}$

Provera rešenja: $\begin{aligned} &4-2\cdot(-\tfrac{7}{2})=11\\ &5\cdot 4+2\cdot(-\tfrac{7}{2})=13 \end{aligned}$ Uređeni par $\left(4,-\frac{7}{2}\right)$ jeste rešenje datog sistema.

Primer 4.2.15 Reši sistem jednačina $\begin{cases} 2x-4y=-1\\ x-2y=5 \end{cases}$ metodom suprotnih koeficijenata.

$$\begin{aligned} &2x-4y=-1\\ &x-2y=5 \quad /\cdot(-2) \end{aligned}$$ Pomnožiti II jednačinu sa -2, zbog eliminacije nepoznate *y*

$$\begin{aligned} &2x-4y=-1\\ &-2x+4y=-10 \end{aligned}$$ Koeficijenti uz nepoznatu *y* su suprotni brojevi

$$\begin{aligned} &2x-4y=-1\\ &2x-4y+(-2x)+4y=-1+(-10) \end{aligned}$$ Pravilo 3 (zamena II jednačine sistema zbirom jednačina)

$$\begin{aligned} &2x-4y=-1\\ &0\cdot x=-11 \end{aligned}$$ Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

Jednačina $0\cdot x=-11$ nema rešenje, pa ga nema ni dati sistem. To se može zapisati na sledeći način $S=\varnothing$. Dakle, polazni sistem je nemoguć.

Primer 4.2.16 Reši sistem jednačina $\begin{cases} -2x + y = -5 \\ 4x - 2y = 10 \end{cases}$ metodom suprotnih koeficijenata.

$-2x + y = -5 \quad / \cdot 2$ $4x - 2y = 10$	Pomnožiti I jednačinu sa 2, zbog eliminacije nepoznate *x*
$-4x + 2y = -10$ $4x - 2y = 10$	Koeficijenti uz nepoznatu *x* su suprotni brojevi
$0 \cdot y = 0$ $4x - 2y = 10$	Pravilo 3 (zamena I jednačine sistema zbirom jednačina)

Jednačina $0 \cdot y = 0$ je identitet, jer je svaki realan broj *y* rešenje ove jednačine. To dalje povlači da su rešenja poslednjeg dobijenog sistema, a samim tim i polaznog sistema, zapravo rešenja njegove druge jednačine. Dakle, ovaj sistem ima beskonačno mnogo rešenja, pa je sistem neodređen. Skup rešenja polaznog sistema je $S = \{(2t - 5, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

Slično kao i u prethodnom poglavlju, radi ilustracije će biti rešen i jedan primer iz poglavlja 3. Konkretno, radi se o primeru 3.1.2. koji je bio rešen metodom lažne pretpostavke, a u nastavku će biti rešen metodom suprotnih koeficijenata.

Primer 4.2.17 U jednom skupu nalazi se 20 geometrijskih figura: trouglova i kvadrata. Ako je ukupan broj stranica 68, izračunati koliko je u skupu trouglova, a koliko kvadrata.

Rešenje: Neka je promenljivom *x* označen broj trougova u posmatranom skupu, a promenljivom *y* broj kvadrata. Kako je ukupan broj figura 20, to sledi veza $x + y = 20$. Trougao ima tri stranice, pa je ukupan broj stranica svih trouglova $3 \cdot x$, dok kvadrat ima četiri stranice pa je ukupan broj stranica svih četvorouglova $4 \cdot x$. Kako je ukupan broj svih stranica u posmatranom skupu 68, to se dobija jednačina $3x + 4y = 68$. Dakle, iz teksta zadatka proizilazi sledeći sistem: $\begin{cases} x + y = 20 \\ 3x + 4y = 68 \end{cases}$.

$x + y = 20 \quad / \cdot (-3)$ $3x + 4y = 68$	Pomnožiti I jednačinu sa -3, kako bi se eliminisala nepoznata *x*
$-3x - 3y = -60$ $3x + 4y = 68$	Koeficijenti uz nepoznatu *x* su suprotni brojevi
$y = 8$ $3x + 4y = 68$	Pravilo 3 (zamena I jednačine sistema zbirom jednačina)
$y = 8$ $3x + 4 \cdot 8 = 68$	Pravilo 4 (zamena nepoznate *y* iz I jednačine u II jednačinu)
$y = 8$ $3x + 32 = 68$	Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)
$y = 8$ $3x = 68 - 32$	Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)
$y = 8$ $3x = 36$	Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)
$y = 8$ $x = 12$	Pravilo 2 (zamena II jednačine sistema ekvivalentnom jednačinom)

Odgovor: U skupu ima 12 trouglova i 8 kvadrata.

4.2.5 Karakteristični zadaci iz udžbenika i zbirki

U ovom delu rada biće predstavljeni primeri zadataka iz udžbenika i zbirki namenjenih učenicima osmog razreda osnovne škole, prevashodno za časove redovne nastave. U pojedinim zadacima eksplicitno je navedeno kojom metodom treba rešiti dati sistem jednačina. Kada takvo uputstvo izostaje, učenik ima mogućnost da samostalno izabere metodu rešavanja. Ipak, prilikom donošenja odluke o izboru metode neophodno je pažljivo posmatrati date jednačine sistema, a u mnogim slučajevima prethodno ih dovesti u standardni oblik, što omogućava jasnije sagledavanje pogodnosti primene određene metode.

Grafička metoda ima značajnu ulogu u razvijanju vizuelnog razumevanja sistema linearnih jednačina, jer omogućava učenicima da jasno sagledaju položaj pravih u koordinatnom sistemu i na taj način lako uoče da li sistem ima jedno, nijedno ili beskonačno mnogo rešenja. Ipak, njen osnovni nedostatak ogleda se u tome što je u većini zadataka teško, a ponekad i nemoguće, odrediti tačan numerički rezultat, naročito kada rešenja uključuju iracionalne brojeve. Pored toga, grafička metoda zahteva više vremena za izradu i pažljiv rad sa koordinatnom mrežom, zbog čega se u praktičnoj nastavi najčešće preporučuje primena neke od algebarskih metoda rešavanja sistema.

Kako bi što lakše odabrali pogodnu algebarsku metodu za rešavanje datog sistema, potrebno je i da učenici budu upoznati sa prednostima i nedostacima svake od njih:

- Metoda zamene: Kako se metoda zamene zasniva na izražavanju jedne promenljive iz jedne jednačine i njenom uvrštavanju u drugu, to je ovaj pristup posebno pogodan u situacijama kada je jedna od jednačina već zapisana u obliku $x =$... ili $y =$..., ili kada je bar jedan koeficijent uz neku od nepoznatih jednak 1 ili –1. U tim slučajevima se jedna nepoznata lako izražava preko druge, što omogućava brzo i efikasno rešavanje sistema. Međutim, ukoliko takav oblik nije dat, postupak može dovesti do složenijih algebarskih izraza i povećati rizik od računskih grešaka, naročito kod učenika koji još uvek nemaju potpuno razvijenu sigurnost u sređivanju algebarskih izraza.
- Metoda suprotnih koeficijenata: Metoda suprotnih koeficijenata predstavlja najpregledniji pristup rešavanju sistema linearnih jednačina, pa se njena prednost ogleda u tome što postupak ostaje prilično uredan i pregledan, naročito kada su koeficijenti već takvi da se lako mogu dovesti do suprotnih vrednosti, pa se time umanjuje mogućnost računskih grešaka. Ova metoda učenicima pomaže i da uoče strukturu sistema kao celine, jer ne moraju eksplicitno izražavati promenljive iz pojedinačnih jednačina.

Problemski zadaci, kao i zadaci koji su namenjeni produbljivanju znanja i časovima dodatne nastave dati su u narednim poglavljima rada.

Primeri zadataka usmerenih na razumevanje pojmova rešenje linearne jednačine sa dve nepoznate i rešenje sistema dve linearne jednačine sa dve nepoznate:

Primer 4.2.18 (Zbirka [33], zadatak 854) Da li par $(1, -3)$ predstavlja rešenje neke od jednačina:

a) $3x + y = 0$ b) $x - 3y = 2$ v) $2x + y + 1 = 0$ g) $x - y - 4 = 0$

d) $2x + 3y + 5 = 0$ đ) $0 \cdot x + 0 \cdot y = 3$ e) $x - 1 = 0$ ž) $y - 3 = 0$

z) $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$

A par $(-1,1)$?

Primer 4.2.19 (Zbirka [33], zadatak 863) Koji od navedenih parova jesu rešenja sistema jednačina

$$\begin{cases} 5x - y = 4 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

a) $(-3,2)$ b) $(1,-1)$ v)) $(0,-4)$ g)) $(1,1)$

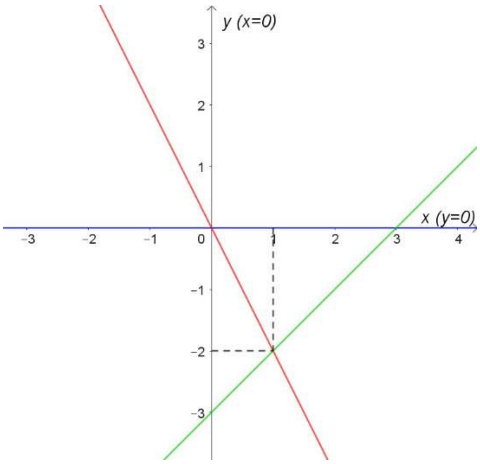
Primeri zadataka zasnovanih na grafičkoj metodi:

Primer 4.2.20 (Zbirka [34], zadatak 172/27) Zaokruži slovo ispred sistema jednačina čije je grafičko rešenje prikazano na slici:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

v) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$



Primer 4.2.21 (Zbirka [33], zadaci 879, 880, 881) Grafičkom metodom reši sistem jednačina:

a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$ v) $\begin{cases} y = x + 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

Slede primeri zadataka koji se očekivano rešavaju algebarskim metodama. U polaznim primerima su sistemi dati u sređenom obliku, dok kasniji primeri podrazumevaju viši stepen algebarske uvežbanosti (eliminacija razlomaka, rad sa decimalnim brojevima, množenje polinoma, kvadriranje binoma, primenu razlike kvadrata, rad sa iracionalnim brojevima, primena proporcije i slično).

Primer 4.2.22 (Zbirka [35], zadaci 131/78, 82, 83) Rešiti sistem jednačina:

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9x - 10y = 5 \\ 12x + 25y = 160 \end{cases}$ v) $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}3y = 5 \\ 0{,}4x - 0{,}5y = -1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}45y = 6{,}9 \\ 0{,}45x + 0{,}3y = 6{,}6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 4 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 5 \end{cases}$ đ) $\begin{cases} \frac{3x - 5y}{4} + \frac{3}{2} = \frac{2x + y}{10} \\ 4 - \frac{x - 2y}{10} = \frac{x}{4} + \frac{y}{6} \end{cases}$.

Primer 4.2.23 (Udžbenik [29], zadatak 157/16)

Ako je $(x + 4)(y + 2) = (x + 8)(y + 3)$ i $(x + 1)(y + 3) = (x + 3)(y - 4)$, kolika je brojevna vrednost izraza $30x + 15y$?

Primer 4.2.24 (Zbirka [35], zadatak 132/84) Reši sistem jednačina i proveri rešenje:

$$\begin{cases} 0{,}2(x-y)+0{,}3(2y-10)=8 \\ \dfrac{x+3}{3}-\dfrac{2x+y-3}{12}=2 \end{cases}.$$

Primer 4.2.25 (Zbirka [34], zadatak 175/40) Reši sistem jednačina:

$$\begin{cases} (x+2)(y+1)=(y-1)(x+5) \\ (2x-5)(y-1)=(x-4)(2y+2) \end{cases}.$$

Primer 4.2.26 (Zbirka [36], zadatak 64/3) Dokaži da su ova dva sistema ekvivalentna:

$$\begin{cases} \dfrac{5x-4}{3}+\dfrac{3y+1}{4}=x+y \\ \dfrac{7x-2}{6}-\dfrac{8y+1}{9}=x-y \end{cases} \text{ i } \begin{cases} 16x-6y=26 \\ 9x+6y=24 \end{cases}.$$

Primer 4.2.27 (Zbirka [36], zadatak 69/33) Reši sistem metodom koju izabereš:

$$\begin{cases} \dfrac{3x+y-4}{4}-\dfrac{y-x+2}{5}=x-y \\ \dfrac{2x-3y-1}{3}-\dfrac{5x-4y-3}{6}=y \end{cases}.$$

Primer 4.2.28 (Zbirka [37], zadatak 1134) Reši sistem jednačina i proveri rešenje:

$$\begin{cases} (5x-1):(5y-9)=(3x+7):(3y+6) \\ (4x+1):(2y+4)=(10x-2):(5y+1) \end{cases}.$$

Primer 4.2.29 (Zbirka [34], zadatak 175/40) Reši sistem jednačina:

$$\begin{cases} (x+2):(x-3)=(y+3):(y-2) \\ (y+1):(y+2)=(3x-12):(3x-11) \end{cases}.$$

Primer 4.2.30 (Zbirka [38], zadatak 522) Rešiti sistem jednačina

$$\begin{cases} (2x-1)^2-4x^2=3y \\ (3y-2)^2-2x=9y^2 \end{cases}.$$

Primer 4.2.31 (Zbirka [34], zadatak 175/39) Rešiti sledeći sistem jednačina:

$$\begin{cases} (2-x)^2-(y+1)^2=(x-y)(x+y)-3 \\ \dfrac{2x+y}{3}=\dfrac{4x-y}{6} \end{cases}.$$

Primer 4.2.32 (Zbirka [39], zadatak 127/2) Reši sistem jednačina pogodnom metodom i proveri tačnost rešenja.

$$\begin{cases} (x+2)^2-(x+2)(x-3)-3(y+5)=0 \\ (2y-3)^2-y(4y-3)+5\left(3x-4\dfrac{4}{5}\right)=0 \end{cases}.$$

Primer 4.2.33 (Zbirka [36], zadatak 70/45) Reši sistem metodom koju izabereš:

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 3\sqrt{6} \\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = 5 \end{cases}.$$

4.3 Primena sistema linearnih jednačina

Nastavna praksa pokazuje da učenicima najviše teškoća zadaju tekstualni, problemski zadaci, jer zahtevaju povezivanje različitih matematičkih sadržaja i angažovanje višeg nivoa logičkog rasuđivanja, procene i planiranja postupka rešavanja. Samostalno rešavanje problemskih zadataka zauzima posebno mesto u matematičkom obrazovanju, jer predstavlja priliku da učenici povežu stečeno znanje i primene ga u novim situacijama. Kroz rad na tekstualnim zadacima učenici uče da prepoznaju bitne informacije, da formulišu odgovarajuće matematičke modele i da izaberu adekvatne metode rešavanja. Takav proces doprinosi razvoju logičkog i apstraktnog mišljenja, sposobnosti analize i sinteze, kao i veština argumentovanog zaključivanja.

U nastavku su prikazani primeri zadataka karakteristični za udžbenike i zbirke predviđene za osmi razred osnovne škole, uz prikaze rešenja koji ilustruju osnovnu ideju ili postupak rešavanja, bez detaljnog razlaganja svih koraka.

Primer 4.3.1 (Udžbenik [27], zadatak 105/1) Zbir dva broja je 52. Ako se veći od njih podeli manjim, dobija se količnik 9 i ostatak 2. O kojim brojevima je reč?

Rešenje: Neka su x i y nepoznati brojevi takvi da je $y > x$. Iz uslova zadatka se dobija sistem $\begin{cases} x + y = 52 \\ y = 9x + 2 \end{cases}$ čijim se reševanjem dolazi do traženih brojeva $x = 5$ i $y = 47$.

Primer 4.3.2 (Zbirka [38], zadatak 602) Deda želi da izvestan broj jabuka podeli svojim unucima. Ako svakom unuku da po 5 jabuka, preostaju mu 3 jabuke, a ako bi svakom hteo da da po 6 jabuka, jedna jabuka bi mu nedostajala. Koliko ima unuka, a koliko jabuka?

Rešenje: Neka x predstavlja broj jabuka, a y broj unuka. Iz uslova zadatka se dobija sistem $\begin{cases} x = 5y + 3 \\ x = 6y - 1 \end{cases}$ čije je rešenje uređeni par $(23,4)$. Jabuka je dakle bilo 23, a unuka 4.

Primer 4.3.3 (Zbirka [34], zadatak 177/55) Zbir cifara dvocifrenog broja iznosi 14. Ako od tog broja oduzmemo broj koji se dobije zamenom mesta cifara polaznog broja, dobija se broj 36. Koji je to broj?

Rešenje: Neka je $\overline{xy}$ nepoznati broj. Kako važi $\overline{xy} = 10x + y$, odnosno $\overline{yx} = 10y + x$ iz uslova zadatka se dobija sistem $\begin{cases} x + y = 14 \\ (10x + y) - (10y + x) = 36 \end{cases}$ čije je rešenje uređeni par $(9,5)$ te je traženi broj 95.

Primer 4.3.4 (Zbirka [34], zadatak 178/57) Prvi broj iznosi 60% drugog broja. Ako se prvom broju doda 120, dobija se broj koji je za 20% veći od drugog. Izračunaj zbir ta dva broja.

Rešenje: Neka su x i y nepoznati brojevi. Iz uslova zadatka dobija se sistem $\begin{cases} x = 0{,}6y \\ x + 120 = 1{,}2y \end{cases}$ čijim se rešavanjem dolazi da su traženi brojevi $x = 120$ i $y = 200$. Dakle, zbir ta dva broja je $120 + 200 = 320$.

Primer 4.3.5 (Udžbenik [29], zadatak 157/19) Kada se razlomak čiji je imenilac za 4 veći od brojioca proširi brojem 5, dobija se razlomak čiji zbir imenioca i brojioca iznosi 90. Koliko cifara ima period u decimalnom zapisu datog razlomka?

Rešenje: Neka je $\frac{a}{b}$ nepoznati razlomak. Iz uslova zadatka dobija se sistem $\begin{cases} b = a + 4 \\ 5a + 5b = 90 \end{cases}$ čije je rešenje $(a, b) = (7{,}11)$. Kako je $\frac{7}{11} = 0,\overline{63}$ osnovni period decimalnog zapisa razlomka ima dve cifre.

Primer 4.3.6 (Zbirka [36], zadatak 74/45) Pre dve godine majka je bila četiri puta starija od sina, a za tri godine će biti tri puta starija. Koliko danas sin ima godina, a koliko majka ?

Rešenje: Uslovi zadatka mogu se predstaviti tabelom:

	pre 2 god.	sada	posle 3 god.
majka	$x - 2$	x	$x + 3$
sin	$y - 2$	y	$y + 3$

Odgovarajući sistem jednačina je $\begin{cases} x - 2 = 4(y - 2) \\ x + 3 = 3(y + 3) \end{cases}$ čije je rešenje $(x, y) = (42{,}12)$. Majka dakle sada ima 42, a sin 12 godina.

Primer 4.3.7 (Zbirka [36], zadatak 73/35) Na nekoj farmi nalaze se krave i guske. Koliko ima kojih životinja ako je prebrojano 56 glava i 140 nogu?

Rešenje: Neka je x broj krava. a y broj gusaka na farmi. Ukupan broj životinja na farmi je 56. Prebrojavanjem nogu za svaku kravu imamo po 4, a za svaku gusku po 2 noge. Tako se dobija da je odgovarajući sistem $\begin{cases} x + y = 56 \\ 4x + 2y = 140 \end{cases}$ čije je rešenje uređeni par $(14{,}42)$. Na farmi dakle ima 14 krava i 42 guske.

Primer 4.3.8 (Zbirka [35], zadatak 137/151) Za dečji vrtić kupljeno je 16 većih i manjih lopti za 244 dinara. Veće lopte koštaju 25 dinara, a manje po 12 dinara. Koliko je kupljeno većih, a koliko manjih lopti?

Rešenje: Neka je x broj kupljenih većih lopti, a y broj kupljenih manjih lopti. Iz uslova zadatka dobija se sistem $\begin{cases} x + y = 16 \\ 25x + 12y = 244 \end{cases}$ čije je rešenje uređeni par $(4{,}12)$. Kupljeno je dakle 4 velike i 12 malih lopti.

Primer 4.3.9 (Udžbenik [40], zadatak 167/6) Pre nekoliko dana Luka je kupio u menjačnici 150 evra i 65 američkih dolara i platio ukupno 24 200 dinara. Juče je po istom kursu kupio 65 evra i 150 američkih dolara. Ovog puta platio je 22 670 dinara. Koliki je kurs (kupovni) evra i američkog dolara?

Rešenje: Neka je x cena jednog evra u dinarima, a y cena jednog američkog dolara u dinarima. Iz uslova zadatka dobija se sistem $\begin{cases} 150x + 65y = 24\,200 \\ 65x + 150y = 22\,670 \end{cases}$ čije je rešenje uređeni par $(118{,}100)$. Kupovni kurs za 1 evro je 118 dinara, a za 1 američki dolar 100 dinara.

Primer 4.3.10 (Zbirka [39], zadatak 128/2) Jedan unutrašnji ugao trougla je $67°$, a razlika druga dva ugla istog trougla je $17°$. Izračunaj uglove tog trougla.

Rešenje: Neka je $\alpha = 67°$. Iz uslova zadatka i činjenice da je zbir unutrašnjih uglova trougla $180°$ dobija se sistem $\begin{cases} 67° + \beta + \gamma = 180 \\ \beta - \gamma = 17° \end{cases}$ čijim se rašavanjem dobija da je $\beta = 65°$ i $\gamma = 48°$

Primer 4.3.11 (Udžbenik [30], zadatak 180/13) Obim jednakokrakog trougla je 28 cm, a krak i osnovica su u razmeri $5 : 4$. Izračunaj stranice tog trougla.

Rešenje: Neka je a dužina osnovice, a b dužina kraka jednakokrakog trougla. Iz uslova zadatka dobija se sistem $\begin{cases} a + 2b = 28 \\ b : a = 5 : 4 \end{cases}$ čije je rešenje $(a, b) = (8{,}10)$. Osnovica tog trougla je 8 cm, a kraci su 10 cm.

Primer 4.3.12 (Zbirka [35], zadatak 134/114) Zbir kateta pravouglog trougla je 27 cm. Ako se manja kateta smanji za 2 cm, a veća poveća za 3 cm, površina trougla se ne menja. Naći katete tog trougla.

Rešenje: Neka su a i b katete pravouglog trougla takve da je $a > b$. Iz uslova zadatka dobija se sistem $\begin{cases} a + b = 27 \\ \frac{a \cdot b}{2} = \frac{(a+3)\cdot(b-2)}{2} \end{cases}$ čije je rešenje $(a, b) = (15{,}12)$. Dužine kateta trougla su 15 cm i 12 cm.

Primer 4.3.13 (Udžbenik [29], zadatak 155/22) Odrediti eksplicitni oblik linearne funkcije čiji grafik sadrži tačke $(3{,}1)$ i $(-6{,}13)$.

Rešenje: Uvrštavanjem koordinata datih tačaka u eksplicitni oblik linearne funkcije $y = kx + n$ dobija se sistem $\begin{cases} 3k + n = 1 \\ -6k + n = 13 \end{cases}$ čije je rešenje $(k, n) = \left(-\frac{4}{3}, 5\right)$. Eksplicitni oblik linearne funkcije je $y = -\frac{4}{3}x + 5$.

Primer 4.3.14 (Udžbenik [27], zadatak 107/5) Pomešani su rastvor koji sadrži 30% sirćetne kiseline i rastvor koji sadrži 50% sirćetne kiseline i dobijeno je 10 litara rastvora koji sadrži 45% sirćetne kiseline. Koliko litara kojeg rastvora je upotrebljeno?

Rešenje: Neka je x količina rastvora sa 30% sirćetne kiseline, a y količina rastvora sa 50% sirćetne kiseline. Iz uslova zadatka dobija se sistem $\begin{cases} x + y = 10 \\ 30\%x + 50\%y = 45\%(x + y) \end{cases}$ čijim se rešavanje dobija

da je $x = 2{,}5$ i $y = 7{,}5$. Upotrebljeno je 2,5 litara rastvora koji sadrži 30% sirćetne kiseline i 7,5 litara rastvora koji sadrži 50% sirćetne kiseline,

Primer 4.3.15 (Zbirka [38], zadatak 600) Dva radnika mogu da završe neki posao za 12 dana. Posle zajedničkog rada od 5 dana, jedan radnik je napustio posao, pa je drugi produžio da radi sam i završio posao za narednih 17,5 dana. Za koliko dana bi posao završio svaki od tih radnika radeći sam?

Rešenje: Neka je x broj dana za koji bi prvi radnik sam završio ceo posao, a y broj dana za koji bi drugi radnik sam završio ceo posao. Prvi radnik za jedan dan završi $\frac{1}{x}$ deo posla, dok drugi za jedan dan završi $\frac{1}{y}$ deo posla. Radeći zajedno 12 dana završe ceo posao pa se dobija jednačina $\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1$. Iz drugog uslova zadatka u kojem prvi radnik radi 22,5 dana, a drugi 5 dana, dobija se jednačina $\frac{22{,}5}{x} + \frac{5}{y} = 1$. Rešenje sistema ove dve jednačine je $(x, y) = (30{,}20)$. Prvi radnik sam završi posao za 30, a drugi sam za 20 dana.

Primer 4.3.16 (Zbirka [39], zadatak 130/3) Krećući se uzvodno brod pređe 96 km za 8 časova, a isti put u povratku prelazi za 6 časova. Kolika je brzina broda na mirnoj vodi, a kolika je brzina rečnog toka?

Rešenje: Neka je v_b brzina broda na mirnoj vodi, a v_r brzina rečnog toka. Krećući se uzvodno, brzina broda na mirnoj vodi je umanjena za brzinu rečnog toka (slika 4.9), a krećući se nizvodno je uvećana za brzinu rečnog toka (slika 4.10).

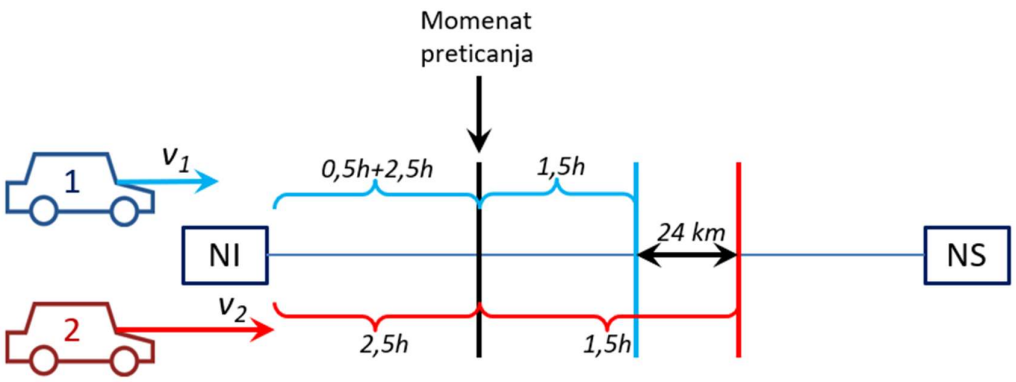
Slika 4.9 Kretanje uzvodno

Slika 4.10 Kretanje nizvodno

Dobija se sistem jednačina $\begin{cases} (v_b - v_r) \cdot 8 = 96 \\ (v_b + v_r) \cdot 6 = 96 \end{cases}$. Rešavanjem sistema dobija se da je brzina broda na mirnoj vodi $v_b = 14\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a brzina rečnog toka $v_r = 2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Primer 4.3.17 (Zbirka [33], zadatak 944) Za jednim automobilom, koji je krenuo iz Niša ka Novom Sadu, krene nakon pola sata drugi automobil i stigne ga posle 2,5 sata vožnje. Tokom kretanja oba vozila u istom smeru, sat i po od momenta preticanja brži auto je bio 24 km ispred sporijeg. Kolike su srednje brzine ovih automobila?

Rešenje: Neka je v_1 brzina prvog automobila, a v_2 brzina drugog automobila.



Slika 4.11 Ilustracija primera 4.3.17

U trenutku preticanja dobija se da je $(0{,}5+2{,}5)v_1 = 2{,}5v_2$, a sat i po od momenta preticanja dobija se jednačina $1{,}5v_1 = 1{,}5v_2 - 24$ (slika 4.11). Rešavanjem sistema ove dve jednačine dobija se da je brzina prvog automobila $v_1 = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a drugog automobila $v_2 = 96\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

4.4 Sistemi jednačina koji se svode na linearne

Pored klasičnih sistema linearnih jednačina, u nastavi se učenici susreću i sa sistemima u kojima se pojavljuju jednačine koje nisu linearne, a koje se primenom odgovarajućih algebarskih transformacija, kao što su rastavljanje na činioce, uvođenje novih promenljivih ili smena izraza, svode na rešavanje sistema linearnih jednačina.

Zadaci sa dodatnim transformacijama, poput rastavljanja na činioce i primene kvadrata binoma:

Primer 4.4.1 (Zbirka [37], zadatak 1156) Reši sisteme: a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} xy+y^2=36 \\ x+y=12 \end{cases}$

Rešenje: a) Kako je $x^2-y^2=(x+y)\cdot(x-y)$ zamenom vrednosti za $x+y$ iz prve jednačine u drugu dobija se ekvivalentan sistem $\begin{cases} x+y=7 \\ 7(x-y)=7 \end{cases}$ čije je rešenje $(x,y)=(4{,}3)$.

b) Izvlačenjem zajedničkog činioca u prvoj jednačini i zamenom vrednosti za $x+y$ iz druge jednačine u prvu dobija se ekvivalentan sistem $\begin{cases} 12y=36 \\ x+y=12 \end{cases}$ čije je rešenje $(x,y)=(9{,}3)$.

Primer 4.4.2 (Zbirka [38], zadatak 527) Metodom zamene rešiti sistem jednačina

$$\begin{cases} x^2+6y^2-5xy+x-3y+2=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$$

Rešenje: Zamenom izraza $x = 1 + 2y$ iz druge jednačine u prvu, a potom i sređivanjem prve jednačine dobija se ekvivalentan sistem $\begin{cases} -2y + 4 = 0 \\ x = 1 + 2y \end{cases}$ čije je rešenje $(x, y) = (5,2)$.

Zadaci u kojima se zadati sistem pojednostavljuje uvođenjem smene promenljivih.

Primer 4.4.3 (Zbirka [33], zadatak 912) Reši sistem jednačina

$$\begin{cases} 4|x| - 5|y| = 2 \\ 2|x| + 3|y| = 12 \end{cases}.$$

Rešenje: Smenom $|x| = a$ i $|y| = b$ dobija se sistem $\begin{cases} 4a - 5b = 2 \\ 2a + 3b = 12 \end{cases}$ čije je rešenje $(a, b) = (3,2)$. Rešenje sistema je svaki uređeni par (x, y) koji zadovoljava uslov $|x| = 3$ i $|y| = 2$. Dakle, skup rešenja sistema je $\{(3,2), (3, -2), (-3,2), (-3, -2)\}$.

Primer 4.4.4 (Udžbenik [29], zadatak 153/15) Reši sistem

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{4}{y+3} = 2 \\ \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{5}{y+3} = 3 \end{cases}.$$

Rešenje: Smenom $a = \frac{1}{x-1}$ i $b = \frac{1}{y+3}$, uz uslove $x \neq 1$ i $y \neq -3$, dobija se sistem jednačina $\begin{cases} 3a + 4b = 2 \\ 4a + 5b = 3 \end{cases}$ čije je rešenje $(a, b) = (2, -1)$. Zamenom dobijenih vrednosti u smenu dobijaju se vrednosti za x i y. Rešenje sistema je $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, -4\right)$.

Primer 4.4.5 (Zbirka [35], zadatak 133/101) Rešiti sistem uvođenjem novih nepoznatih

$$\begin{cases} \dfrac{5}{3x + 2y} + \dfrac{7}{5x - 2y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{45}{2(3x + 2y)} - \dfrac{7}{2(5x - 2y)} = 1 \end{cases}.$$

Rešenje: Smenom $a = \frac{1}{3x+2y}$ i $b = \frac{1}{5x-2y}$, uz uslove $3x + 2y \neq 0$ i $5x - 2y \neq 0$, dobija se sistem jednačina $\begin{cases} 5a + 7b = \frac{1}{2} \\ \frac{45}{2}a - \frac{7}{2}b = 1 \end{cases}$ čije je rešenje $(a, b) = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{28}\right)$. Zamenom dobijenih vrednosti u smenu dobija se novi sistem jednačina $\begin{cases} 3x + 2y = 20 \\ 5x - 2y = 28 \end{cases}$ čije je rešenje $(x, y) = (6,1)$.

Primer 4.4.6 (Zbirka [35], zadatak 137/158) Uvođenjem novih nepoznatih rešiti sistem jednačina

$$\begin{cases}(x+y)^2-(x-y)^2=16\\3(x+y)^2+2(x-y)^2=93\end{cases}.$$

Rešenje: Smenom $a=(x+y)^2$ i $b=(x-y)^2$ dobija se sistem $\begin{cases}a-b=16\\3a+2b=93\end{cases}$ čije je rešenje $(a,b)=(25,9)$. Zamenom dobijenih vrednosti u smenu dobija se $x+y=\pm5$ i $x-y=\pm3$. Za sve kombinacije vrednosti zbira i razlike dobija se po jedno rešenje sistema. Sledi da je skup rešenja $\{(1,4),(4,1),(-1,-4),(-4,-1)\}$.

4.5 Dodatna nastava i takmičenja

Dodatna nastava namenjena je učenicima koji pokazuju spremnost i želju da produbе svoje znanje izvan okvira redovne nastave. Njena suština nije u prostom proširivanju gradiva ili povećanju obima činjenica, već u podsticanju dubljeg razumevanja — uočavanju uzročno-posledičnih odnosa, povezivanju pojmova i pojava, istraživanju različitih pristupa problemu i pronalaženju novih, originalnih rešenja. Kroz ovakav rad razvija se sposobnost analitičkog mišljenja, kreativnog zaključivanja i samostalnog traganja za odgovorima. Istovremeno, dodatna nastava omogućava da se učenici razvijaju u skladu sa sopstvenim mogućnostima i interesovanjima, negujući njihove potencijale i stvarajući prostor za napredak koji prevazilazi standardne okvire školskog programa. [41] Dodatna nastava je posebno važna i za pripremu učenika za takmičenja iz matematike, ali i za razvijanje dugoročne motivacije i pozitivnog odnosa prema matematici.

U nastavku će biti prikazani odabrani zadaci koji se obrađuju na časovima dodatne nastave, kao i neki koji su se pojavljivali na takmičenjima iz matematike, a koji su ili zadati kao sistemi jednačina ili ih u svom rešenju koriste. Za pojedine zadatke dat je sažet prikaz postupka rešavanja, u smislu naglašavanja ključnih ideja i pristupa, bez detaljnog izvođenja svakog koraka. Kod zadataka koji su istog ili veoma sličnog tipa kao prethodni, rešenja nisu navođena.

Zadaci u kojima se uvodi parametar:

Primer 4.5.1 (Zbirka [37], zadatak 1155) Odredi parametar p tako da dati sistem nema rešenje.

$$\begin{cases}5x+\dfrac{2p-1}{p+1}y=-2\\4x+y=0\end{cases}$$

Rešenje: Koristeći metodu suprotnih koeficijenata, eliminacijom promenljive x dolazi se do jednačine $\left(\frac{8p-4}{p+1}-5\right)y=-8$. Kako se zahteva da sistem nema rešenje sledi da koeficijent uz y mora biti nula. Rešavanjem jednačine $\frac{8p-4}{p+1}=5$ dobija se da je $p=3$.

Primer 4.5.2 (Udžbenik [27], zadatak 109/5) Dat je sistem jednačina $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 21y - 14x = 28a \end{cases}$. Odredi sve realne brojeve a za koje: a) sistem ima beskonačno mnogo rešenja; b) nema rešenja.

Zadaci koji podrazumevaju postavljanje određenih uslova – bilo zbog oblasti definisanosti, bilo zbog rada sa apsolutnim vrednostima:

Primer 4.5.3 (Zbirka [38], zadatak 610) Reši sistem jednačina:

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{3+x} = \dfrac{1}{3} \\ 4\left(x - \dfrac{3y}{4}\right) = 3\left(1 + \dfrac{2x}{3}\right) \end{cases}$$

Rešenje: Sređivanjem jednačina dobija se sistem $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ iz čega sledi da sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Kako iz prve jednačine zadatog sistema imamo uslov $x \neq -3$ dobija se da je skup rešenja $\left\{\left(t, \frac{2}{3}t - 1\right) \mid t \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}\right\}$.

Primer 4.5.4 (Zbirka [36], zadatak 47) Reši sistem metodom koju izabereš:

$$\begin{cases} |2x - 1| - y = 2 \\ x - |4 - y| = 0 \end{cases}.$$

Rešenje: U zavisnosti od znaka izraza unutar apsolutne vrednosti, razlikuju se četiri slučaja. Kada je $x \geq \frac{1}{2}, y \leq 4$ dobija se sistem $\begin{cases} 2x - 1 - y = 2 \\ x - 4 + y = 0 \end{cases}$ čije je rešenje $\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Kada je $x \geq \frac{1}{2}, y > 4$ dobija se sistem $\begin{cases} 2x - 1 - y = 2 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$ čije je rešenje $(7,11)$. Kada je $x < \frac{1}{2}, y \leq 4$ ili $x \geq \frac{1}{2}, y > 4$ rešenja dobijenih sistema ne zadovoljavaju posmatrane uslove za promenljive. Dakle, rešenja početnog sistema su $\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$ i $(7,11)$.

Primer 4.5.5 (Udžbenik [27] zadatak 109/8) Koliko rešenja ima sistem jednačina

$$\begin{cases} |x| + 2|y| = 7 \\ 3|x| - 4|y| = 1 \end{cases}?$$

Zadaci sa dodatnim transformacijama i zadaci sa više nepoznatih:

Primer 4.5.6 (Zbirka [42], zadatak 1230) U skupu realnih brojeva rešiti sistem jednačina

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2yz = 100 \\ 2xy - z^2 = 100 \end{cases}$$

Rešenje: Oduzimanjem druge od prve jednačine sistema dobija se jednačina $x^2 + 2y^2 - 2yz - 2xy + z^2 = 0$. Njenim sređivanjem se dolazi do jednakosti $(x - y)^2 + (y - z)^2 = 0$, odakle sledi zaključak $x = y = z$. Uvrštavanjem dobijenih vrednosti u proizvoljnu jednačinu sistema dobija se da je $x = \pm 10$, pa tako dobijeni sistem ima dva rešenja $(10,10,10)$ i $(-10, -10, -10)$.

Primer 4.5.7 (Udžbenik [27], 109/1) Reši sistem jednačina:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ x+y-z=2 \\ x-y=1 \end{cases}.$$

Primer 4.5.8 (Zbirka [38], zadatak 613) Rešiti sistem jednačina:

$$\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$$

Primena sistema jednačina u problemskim zadacima:

Primer 4.5.9 (Zbirka [43], zadatak 278) Nikola ima dva puta više godina nego što je Nemanja imao kada je Nikoli bilo toliko godina koliko je sada Nemanji. Zajedno sada imaju 35 godina. Koliko je star svaki od njih?

Rešenje: Neka nepoznate x i y predstavljaju koliko trenutno imaju godina Nikola i Nemanja, redom. Nikola je za $x-y$ godina stariji od Nemanje, pa je Nikola pre $x-y$ godina imao koliko Nemanja ima sada.. Nemanja je pre $x-y$ godina imao $2y-x$ godina. Iz uslova zadatka se dobija sistem $\begin{cases} x=2\cdot(2y-x) \\ x+y=35 \end{cases}$ iz kojeg se dobija da je $x=20$ i $y=15$.

Primer 4.5.10 (Zbirka [38], zadatak 619) Ako se u jednom trocifrenom broju zamene mesta prve i poslednje cifre, dobija se broj za 99 manji od polaznog. Naći taj trocifreni broj ako je poznato da je zbir njegovih cifara jednak 10 i da je srednja cifra za 8 manja od zbira prve i poslednje.

Rešenje: Neka je $\overline{xyz}$ nepoznati broj. Iz uslova zadatka se dobija sistem jednačina

$$\begin{cases} 100z+10y+x=100x+10y+z-99 \\ x+y+z=10 \\ x+z=y+8 \end{cases}$$

Rešenje ovog sistema je $(x,y,z)=(5,1,4)$, pa je tako traženi broj 514.

Primer 4.5.11 (Zbirka [43], zadatak 274) U tri posude nalazi se voda. Ako polovinu vode iz prvog suda prespemo u drugu posudu, zatim trećinu tako dobijene količine prespemo iz drugog suda u treću posudu, i najzad, četvrtinu vode iz treće posude prespemo u prvu posudu, tada se u svakoj posudi nalazi po 6 litara vode. Koliko je bilo vode u svakoj posudi pre presipanja?

Rešenje: Neka su x, y i z količine vode pre presipanja u prvoj, drugoj i trećoj posudi redom. Posle prvog presipanja u prvom sudu se nalazi $\frac{x}{2}$ litara, a u drugom $\left(y+\frac{x}{2}\right)$ litara. Posle drugog presipanja u drugom sudu se nalazi $\frac{2}{3}\left(y+\frac{x}{2}\right)$, što prema uslovu zadatka daje $\frac{2}{3}\left(y+\frac{x}{2}\right)=6$, odakle sledi $2y+x=18$. Kako je ukupna količina vode $x+y+z=18$ litara, sledi $y=z$. Prema tome, u trećem sudu imamo prvo $y+\frac{1}{3}\left(y+\frac{x}{2}\right)$ i posle prelivanja u prvi sud, dobija se da u trećem sudu na kraju ima

$\frac{3}{4}\left(y+\frac{1}{3}\left(y+\frac{x}{2}\right)\right)=6$, odakle je $8y+x=48$. Jednačine $2y+x=18$ i $8y+x=48$ daju rešenja $x=8$ i $y=z=5$.

Primer 4.5.12 (Zbirka [36], 76/66) Po kružnici dužine 540 m dva šetača šetaju se ravnomernim, ali različitim brzinama. Ako se šetaju u suprotnom smeru, sastaju se svaka 3 minuta, a ako se šetaju u istom smeru, sastaju se svakih $13\frac{1}{2}$ minuta. Koliko metara prevaljuje svaki šetač u jednoj minuti?

Rešenje: Neka je v_1 brzina prvog (bržeg), a v_2 brzina drugog (sporijeg) šetača. Ako se šetači kreću u suprotnom smeru, za vreme od 3 minute zajedno pređu celu kružnicu, tj. zbir puteva koji su prešli jednak je 540 m. Iz toga sledi jednačina $v_1\cdot 3+v_2\cdot 3=540$, odnosno $v_1+v_2=180$.

Kada se kreću u istom smeru, da bi se ponovo sastali za $13\frac{1}{2}$ minuta, brži šetač prelazi celu kružnicu više nego sporiji, pa je razlika njihovih puteva koje su prešli 540 m. Sledi da je tj. $v_1\cdot 13\frac{1}{2}-v_2\cdot 13\frac{1}{2}=540$, odnosno $v_1-v_2=40$. Rešavanjem sistema dobija se da je $v_1=110$ metara u minuti i $v_2=70$ metara u minuti.

Primer 4.5.13 (Zbirka [35], zadatak 153) Bazen se puni kroz dve cevi. Ako je prva otvorena 10, a druga 16 minuta, u bazen uđe 680 l vode. Ako je, pak, prva otvorena 16, a druga 10 minuta, onda u bazen uđe 620 l vode.

Rešenje: Neka nepoznate x i y predstavljaju količinu vode koja u jednoj minutu isteče iz prve i druge slavine, redom. Sistem koji odgovara zadatom problemu je $\begin{cases}10x+16y=680\\16x+10y=620\end{cases}$, a njegovo rešenje je $(x,y)=(20{,}30)$.

Primer 4.5.14 (Zbirka [38], zadatak 626) Površine dva kruga razlikuju se za 7π cm^2, a njihovi obimi za 2π cm. Izračunati poluprečnike ovih krugova.

Rešenje: Neka su r_1 i r_2 ($r_2>r_1$) traženi poluprečnici. Iz uslova zadatka dobija se sistem

$$\begin{cases}{r_2}^2\pi-{r_1}^2\pi=7\pi\\2r_2\pi-2r_1\pi=2\pi\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}{r_2}^2-{r_1}^2=7\\r_2-r_1=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(r_2-r_1)(r_2+r_1)=7\\r_2-r_1=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}r_2+r_1=7\\r_2-r_1=1\end{cases}$$

Rešenje ovog sistema je $(r_1,r_2)=(3{,}4)$

Primer 4.5.15 (Zbirka [42], zadatak 1236) Dijagonale strana kvadra imaju merne brojeve $8\sqrt{10}$ cm, 10 cm i $6\sqrt{17}$ cm. Izračunati dijagonalu kvadra.

Rešenje: Neka su a,b i c stranice kvadra. Primenom Pitagorine teoreme dobijamo sistem jednačina

$$\begin{cases}a^2+b^2=612\\b^2+c^2=100\\a^2+c^2=640\end{cases}$$

Sabiranjem jednačina sistema dobija se da je $2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = 1352$, to jest $2 \cdot D^2 = 1352$, odakle se dobija da je $D = 26$ cm.

Zadaci sa takmičenja za učenike osmih razreda:

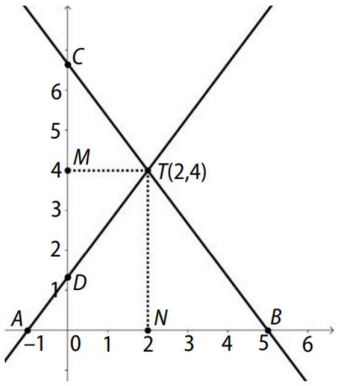
Primer 4.5.16 (Državno takmičenje 2024. godine, 2. Zadatak)

U koordinatnom sistemu u ravni data je tačka $T(2,4)$. Kroz tačku T povučene su prave p i q. Prava p seče x-osu u tački A, a y-osu u tački D. Prava q seče x-osu u tački B, a y-osu u tački C. Odrediti jednačine pravih p i q ako su trouglovi ABT i CDT jednakokraki sa osnovicama AB i CD, redom, a odnos njihovih površina iznosi $P_{ABT}: P_{CDT} = 9:4$

Rešenje: Trougao ABT je jednakokrak (slika 4.12), pa tačka N, podnožje visine iz temena T na osnovicu AB, predstavlja središte duži AB. Ako označimo $|AB| = a$, tada je $|NB| = \frac{a}{2}$. Kako je $|TN| = 4$, to je $P_{ABT} = 2a$. Slično, trougao CDT je jednakokrak, pa tačka M, podnožje visine iz temena T na osnovicu CD, predstavlja središte duži CD. Ako označimo $|CD| = b$, tada je $|MC| = \frac{b}{2}$. Kako je $|TM| = 2$, to je $P_{CDT} = b$.

Iz uslova $P_{ABT}: P_{CDT} = 9:4$ dobijamo $2a: b = 9:4$. Kako je $TM \parallel NB$ i $CM \parallel TN$, to su trouglovi CMT i TNB slični, pa je $CM: MT = TN: NB$, odakle je $ab = 32$. Iz sistema $\begin{cases} 2a: b = 9:4 \\ ab = 32 \end{cases}$ dobija se da je $a = 6$ i $b = \frac{16}{3}$. Koordinate tačke N su $(2,0)$, pa su koordinate tačaka A i B jednake $A(-1,0)$ i $B(5,0)$.

Prava p sadrži sadrži tačke A i T. Zamenom koordinata ovih tačaka u jednačini prave $p: y = kx + n$ dobija se sistem $\begin{cases} 2k + n = 4 \\ -k + n = 0 \end{cases}$. Rešavanjem ovog sistema dobija se da je tražena jednačina prave $p: y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$. Analogno, prava q sadrži tačke B i T, pa rešavanjem sistema $\begin{cases} 2k + n = 4 \\ 5k + n = 0 \end{cases}$ se dobija jednačina tražene prave $q: y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3}$



Slika 4.12 Grafik uz primer 4.5.16

Primer 4.5.17 (Opštinsko takmičenje 2021. godine, 2. Zadatak)

Ako se neki broj podeli drugim brojem, dobije se količnik 2 i ostatak 5. Ako se zbir tih brojeva podeli njihovom razlikom, dobije se količnik 2 i ostatak 7. Koliki je zbir tih brojeva?

Rešenje: Neka su x i y nepoznati brojevi takvi da je $x > y$. Iz uslova zadatka dobija se sistem jednačina
$\begin{cases} x = 2y + 5 \\ x + y = 2(x - y) + 7 \end{cases}$

Dobija se da je rešenje sistema uređeni par $(x, y) = (29,12)$, a time je traženi zbir $x + y = 41$.

Primer 4.5.18 (Državno takmičenje 2017. godine, 1. Zadatak)

Reši sistem jednačina

$$\frac{x+y}{xyz} = \frac{1}{6}; \qquad \frac{y+z}{xyz} = \frac{4}{15}; \qquad \frac{z+x}{xyz} = \frac{7}{30}$$

Rešenje: Iz postavke zadatka dobija se uslov $x \neq 0, y \neq 0$ i $z \neq 0$. Iz svake zadate jednačine se izrazi proizvod xyz

$$xyz = 6(x+y); \quad xyz = \frac{15}{4}(y+z); \quad xyz = \frac{30}{7}(x+z). \qquad (*)$$

Izjednačavanjem desnih strana svake dve jednačine iz (*) dobija se sistem

$$\begin{cases} 24(x+y) = 15(y+z) \\ 42(x+y) = 30(x+z) \\ 105(y+z) = 120(x+z) \end{cases}$$

Skup rešenja dobijenog sistema je $\left\{\left(\frac{2}{5}z, \frac{3}{5}z, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}$. Uvrštavanjem elemenata dobijene uređene trojke u prvu jednačinu iz (*) dobija se da je $z = \pm 5$, čime se dobija da početni skup ima dva rešenja $(x, y, z) = \{(2,3,5), (-2, -3, -5)\}$, što se i neposrednom proverom potvrđuje.

4.6 Individualni obrazovni plan (IOP)

„Inkluzija je proces rešavanja i reagovanja na raznovrsnost potreba svih učenika kroz sve veće učestvovanje u učenju, kulturama i zajednicama i sve manju isključenost u okviru obrazovanja i iz njega. Ona obuhvata promene i izmene sadržaja, pristupa, struktura i strategija, sa zajedničkom vizijom koja obuhvata svu decu odgovarajuće starosne dobi i sa uverenjem da je redovni obrazovni sistem odgovoran za obrazovanje sve dece.” [44]

Individualni obrazovni plan, skraćeno IOP, je dokument koji se izrađuje za dete, učenika ili odraslog kojim se planira dodatna podrška u obrazovanju i vaspitanju u skladu sa njegovim sposobnostima i mogućnostima.

Prema *Pravilniku o bližim uputstvima za utvrđivanje prava na individualni obrazovni plan, njegovu primenu i vrednovanje* [45], pravo na individualni obrazovni plan ima dete, učenik i odrasli kome je potrebna dodatna podrška zbog teškoća u pristupanju, uključivanju i učestvovanju u obrazovanju i vaspitanju, ako te teškoće utiču na njegovu dobrobit, odnosno ostvarivanje ishoda obrazovanja i vaspitanja ili predstavljaju rizik od ranog napuštanja školovanja, i odnose se na dete, učenika ili odraslog koji:

1) ima teškoće u učenju (zbog specifičnih smetnji u učenju ili problema u ponašanju i emocionalnom razvoju);
2) ima smetnje u razvoju ili invaliditet (telesne, motoričke, čulne, intelektualne ili smetnje iz spektra autizma);
3) potiče, odnosno živi u socijalno nestimulativnoj sredini (socijalno, ekonomski, kulturno, jezički siromašnoj sredini ili dugotrajno boravi u zdravstvenoj, odnosno socijalnoj ustanovi);
4) iz drugih razloga ostvaruje pravo na podršku u obrazovanju.

Pravo na prilagođen način obrazovanja po IOP-u u smislu proširivanja i produbljivanja sadržaja učenja ima i učenik sa izuzetnim sposobnostima koji stiče osnovno i srednje obrazovanje i vaspitanje.

Prema istom Pravilniku razlikuju se tri vrste IOP-a:

1) IOP1 – prilagođeni program nastave i učenja u kome se planira cilj pružanja podrške, prilagođavanje i obogaćivanje prostora i uslova u kojima se uči, prilagođavanje metoda rada, udžbenika i nastavnih sredstava tokom obrazovno-vaspitnog procesa, odnosno aktivnosti u vaspitnoj grupi, njihov raspored kao i lica koja pružaju podršku;
2) IOP2 – izmenjeni program nastave i učenja u kojem se, osim sadržaja iz stava 1. tačka 1) ovog člana, planira prilagođavanje ishoda obrazovanja i vaspitanja i prilagođavanje sadržaja za jedan, više ili za sve predmete;
3) IOP3 – proširen i produbljen program nastave i učenja koji se primenjuje za učenike sa izuzetnim sposobnostima.

Umesto investiranja u specijalne škole za decu sa smetnjama u razvoju, mnoge zemlje se okreću inkluzivnom obrazovanju, preusmeravajući napore da podrže svu decu u redovnim školama, kao i da pronađu nove načine za davanje podrške redovnim školama i nastavnicima.

U prethodnom poglavlju (*Poglavlje 4.5)* predstavljeni su primeri zadataka iz oblasti sistema linearnih jednačina predviđeni za dodatnu nastavu, kojima se proširuje i produbljuje program nastave. Stoga će u nastavku biti reči samo o prve dve vrste, IOP1 i IOP2.

„Svrha IOP-a nije smanjenje očekivanja, već stvaranje uslova da učenik ostvari svoj maksimum u okviru sopstvenih mogućnosti.” [44]

Kako se IOP izrađuje prema obrazovnim potrebama svakog pojedinačnog učenika, prema njegovom jedinstvenom profilu, sposobnostima, interesovanjima i stilu učenja, to je jasno da nema standardizacije, niti neke veće mogućnosti ponovnog korišćenja kreiranih materijala. Stoga ne čudi da je broj udžbenika i radnih materijala posebno prilagođenih za učenike koji rade po programima IOP1 i IOP2 veoma ograničen. Izrada materijala koji prati zvanični nastavni plan i program, a istovremeno omogućava individualizovano učenje i postizanje realnih ishoda, predstavlja značajan izazov za izdavače. U praksi to uglavnom podrazumeva da nastavnik samostalno kreira radne listove, zadatke ili druga pomoćna sredstva kako bi učeniku omogućio savladavanje predviđenih sadržaja. Ipak, neki izdavači su se osmelili da podrže nastavnike u ovom složenom procesu. Među prvima je i izdavačka kuća Gerundijum, koja je ponudila dodatno nastavno sredstvo „*Temelji matiša*“ kao korisnu podršku u nastavi matematike.

Ono što je glavna karakteristika ovog nastavnog sredstva jeste veći nivo postupnosti i kasnije podrške prilikom rešavanja zadataka u odnosu na onaj koji se uočava u klasičnim udžbenicima.

„*Temelji matiša 8*“ [46] pokrivaju i oblast sistema linearnih jednačina sa dve nepoznate. Struktura je sledeća: uvodi se definicija, ona se potom objašnjava na rešenom primeru (što je uvek naznačeno frazom *Učim kako...*) koji potom prati niz primera namenjenih za rad učenika. Radi ilustrovanja biće

predstavljena dva sadržaja na način kako su predstavljeni u tom udžbeniku – pojam rešenja linearne jednačine sa dve nepoznate i metoda zamene rešavanja sistema.

Jednačina s dve nepoznate – pojam, rešenje, ekvivalentnost [46]

Definicija 4.6.1 Jednakost u kojoj učestvuju tačno dve nepoznate veličine jeste jednačina s dve nepoznate.

Definicija 4.6.2 Rešenje jednačine sa dve nepoznate x i y je uređeni par (x_0, y_0), $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ takav da, kada se x zameni sa x_0, a y zameni sa y_0, jednačina postaje tačna brojevna jednakost.

Učim kako... Da li je uređeni par $(2,3)$ rešenje jednačine $3x - 5y + 9 = 0$?

Rešenje: Iz $(2,3)$ imamo da je $x = 2$ i $y = 3$.

$$3x - 5y + 9 = 0$$

$$x = 2 \qquad\qquad y = 3$$

Dakle,

$3 \cdot 2 - 5 \cdot 3 + 9 = 6 - 15 + 9 = 0$, te je uređeni par $(2,3)$ rešenje jednačine $3x - 5y + 9 = 0$.

Primer 4.6.1 Da li je dati uređeni par rešenje date jednačine?

a) $(1,2)$ $\underline{-2x + 6y = 10}$ $x = 1 \qquad y = 2$ $-2 \cdot$ ____ $+ 6 \cdot$ ____ $= -2 +$ ____ $= 10$ Uređeni par $(1,2)$ **jeste** rešenje jednačine $-2x + 6y = 10$.	b) $(-1,1)$ $\underline{4x + 4y = 0}$ $x =$ ____ $\qquad y =$ ____ $4 \cdot$ ____ $+ 4 \cdot$ ____ $=$ ____ $+$ ____ $=$ ____ Uređeni par $(-1,1)$ _____ (Upiši: *jeste* ili *nije*) rešenje jednačine $-2x + 6y = 10$.
v) $(3, -2)$ $\underline{2x + 4y + 2 = 0}$ $x =$ ____ $\qquad y =$ ____ $2 \cdot$ ____ $+ 4 \cdot$ ____ $+ 2$ $=$ ____ $-$ ____ $+ 2$ $=$ ____ Uređeni par $(3, -2)$ _____ (Upiši: *jeste* ili *nije*) rešenje jednačine $2x + 4y + 2 = 0$.	g) $(4,8)$ $\underline{7x + 9y = 100}$ $x =$ ____ $\qquad y =$ ____ $7 \cdot$ ____ $+ 9 \cdot$ ____ $=$ ____ $-$ ____ $=$ ____ Uređeni par $(4,8)$ _____ (Upiši: *jeste* ili *nije*) rešenje jednačine $7x + 9y = 100$.

Rešavanje sistema metodom zamene [46]

Učim kako... Reši dati sistem jednačina metodom zamene.

$$x = 2$$
$$3x + 4y = 10$$

Rešenje: $x = 2$

$3x + 4y = 10$

$3 \cdot 2 + 4y = 10$

$6 + 4y = 10$

$4y = 10 - 6$

$4y = 4$

$y = 4 : 4$

$y = 1$

zamenimo promenljivu x datim brojem (ili izrazom)

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}}$$

Rešenje sistema je uređeni par (2,1).

Primer 4.6.2 Reši dati sistem.

a) $x = 4$ $8x + 3y = 47$ _____ $8 \cdot 4 + 3y = 47$ ____ $+ 3y = 47$ $3y = 47 -$ ____ $3y =$ ____ $y = 15 :$ ____ $y = 5$ Rešenje sistema je uređeni par (____, ____).	b) $x = 2$ $5x + 4y = 38$ _____ $5 \cdot$ ____ $+ 4y =$ ____ ____ + ____ = ____ $4y =$ ____ − ____ $4y =$ ____ $y =$ ____ : ____ $y =$ ____ Rešenje sistema je uređeni par (____, ____).
v) $y = 2$ $2x - 5y = 8$ _____ ____ − ____ · ____ = ____ ____ − ____ = ____ _____= ____ + ____ _____= ____ $x =$ ____ : ____ $x =$ ____ Rešenje sistema je uređeni par (____, ____).	g) $y = 2x$ $5x + 3y = 88$ _____ $5x + 3 \cdot 2x =$ ____ ____ $+ 6x =$ ____ _____= ____ − ____ _____= ____ $x =$ ____ : ____ $x =$ ____ $y = 2x =$ ____ · ____ = ____ Rešenje sistema je uređeni par (____, ____).

d) $x = 3y$ $5x + 2y = 34$ ____ · ____ + ____ = ____ ____ + ____ = ____ _____= ____ − ____ _____= ____ y = ____ : ____ y = ____ $x = 3y$ = ____ · ____ = ____ Rešenje sistema je uređeni par (____, ____).	đ) $y = 6x$ $2x + 3y = 100$ Rešenje sistema je uređeni par (____, ____).

Napomena: U samom udžbeniku dato je više primera za samostalan rad. Ovde su probrani samo pojedini, radi prikaza postupnosti i dodatne pomoći učenicima pri izradi zadataka.

4.7 Završni ispit

U okviru završnog ispita iz matematike, koji se polaže na kraju osnovnog obrazovanja, proverava se stepen usvojenosti matematičkih znanja i sposobnosti primene naučenog u novim situacijama. To se proverava na osnovu standarda koje je propisalo Ministarstvo prosvete.

Standardi u obrazovanju predstavljaju suštinska znanja, veštine i umenja koje učenici treba da poseduju na kraju određenog ciklusa obrazovanja. U dokumentu Obrazovni standardi za kraj obaveznog obrazovanja, koji je izdao Zavod za vrednovanje kvaliteta obrazovanja i vaspitanja, standardi su postavljeni na tri nivoa postignuća:

- osnovni nivo – očekuje se da će svi učenici, a najmanje 80% njih postići ovaj nivo;
- srednji nivo – očekuje se da će oko 50% učenika postići ovaj nivo;
- napredni nivo – očekuje se da će oko 25% učenika postići ovaj nivo. [47]

Sadržaj predmeta matematika je podeljen na pet oblasti:

- Brojevi i operacije sa njima;
- Algebra i funkcije;
- Geometrija;
- Merenje ;
- Obrada podataka.

Sistemi linearnih jednačina pripadaju oblasti algebra i funkcije. Standardi koji se odnose na njih su:

1. srednji nivo: Učenik je računske procedure doveo do solidnog stepena uvežbanosti; ume da

   MA.2.2.1. reši linearne jednačine i sisteme linearnih jednačina sa dve nepoznate;

2. napredni nivo: Učenik je postigao visok stepen uvežbanosti izvođenja operacija uz isticanje svojstava koja se primenjuju; ume da

   MA.3.2.1. sastavlja i rešava linearne jednačine i nejednačine i sisteme linearnih jednačina sa dve nepoznate;

   MA.3.2.5. koristi jednačine, nejednačine i sisteme jednačina rešavajući i složenije tekstualne zadatke.

U nastavku su prikazani prvo primeri sistema jednačina iz zbirki zadataka iz matematike za pripremu završnog ispita u osnovnom obrazovanju [48] i [49], a potom i zadaci koji su se prethodnih godina pojavljivali na samom završnom ispitu, uz kratku analizu učeničkih postignuća.

4.7.1 Zadaci iz zbirki za pripremu završnog ispita

Zadaci u zbirkama raspoređeni su po nivoima i oblastima. Zadaci sa sistemima linearnih jednačina, pojavljuju se u zbirkama u različitim oblicima – od sistema koji su zadati u opštem obliku, do onih koji zahtevaju vršenje složenijih transformacija kako bi se sistem doveo do opšteg oblika, kao i tekstualni zadaci u kojima se od učenika očekuje da prepoznaju odnos između nepoznatih veličina, postave, a potom i reše sistem.

Primeri zadataka sa srednjeg nivoa:

Primer 4.7.1 (Zbirka [48], zadatak 45) Dati su uređen par $(4, -1)$ i dva sistema jednačina .

Sistem A: Sistem B:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 23 \\ 7x + 4y = 24 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + y = -9 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$$

Da li uređeni par:

a) jeste rešenje samo sistema A

b) jeste rešenje samo sistema B

c) jeste rešenje sistema A i sistema B

d) nije rešenje ni sistema A, ni sistema B?

Zaokruži slovo ispred tačnog odgovora.

Primer 4.7.2 (Zbirka [48], zadatak 47) Reši sistem jednačina:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 2\frac{4}{15} \\ 3x + 2y = 1\frac{2}{5} \end{cases}$$

Primer 4.7.3 (Zbirka [49], zadatak 200) Dat je sistem jednačina:

$$\begin{cases} 0{,}2x - 0{,}3y = 0{,}4 \\ 0{,}5x + y = 2{,}75 \end{cases}$$

Oboj kružić ispred rešenja sistema jednačina.

○ $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ○ $(x, y) = (1,1)$ ○ $(x, y) = \left(\frac{7}{2}, 1\right)$ ○ $(x, y) = (2,2)$

Primer 4.7.4 (Zbirka [48], zadatak 49) Ako je $\frac{a}{3} - \frac{b}{5} = 5$ i $-\frac{a}{12} + \frac{b}{3} = 3$, koliko je $a + b$?

Primer 4.7.5 (Zbirka [48], zadatak 50) Reši sistem jednačina.

$$\begin{cases} \dfrac{y+1}{3} - \dfrac{x-3}{2} = 8 \\ \dfrac{x+7}{2} + \dfrac{y-1}{8} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Primer 4.7.6 (Zbirka [49], zadatak 231) Milka ima jedan kilogram oraha. Napravila je dve torte. Za veću tortu joj je bilo potrebno 2,5 puta više oraha nego za manju. Ostalo joj je 300 g oraha. Koliko je oraha upotrebila za veću, a koliko za manju tortu?

Prikaži postupak.

Za veću tortu upotrebila je _____ g, a za manju _____ g oraha.

Primer 4.7.7 (Zbirka [49], zadatak 233) Jovana je dve marame i četiri magneta platila 830 dinara. Ako je marama tri puta skuplja od magneta, kolika je cena jedne marame, a kolika je cena jednog magneta?

Prikaži postupak.

Cena marame je _____ dinara, a cena magneta je _____ dinara.

Primeri zadataka sa naprednog nivoa:

Primer 4.7.8 (Zbirka [48], zadatak 110) Dva suplementna ugla stoje u razmeri 5: 7. Odredi te uglove.

Primer 4.7.9 (Zbirka [49], zadatak 347) Mira prodaje sokove „Dobro jutro“ i „Zovli“ koji se dobijaju mešanjem limunade i soka od zove. Ona sok naplaćuje u zavisnosti od količine limunade i soka od zove u mešavini. U tabeli su date količine limunade i soka od zove u ml i cene po čaši.

	Sok „Dobro jutro“	Sok „Zovli“
Limunada	150 ml	60 ml
Zova	50 ml	140 ml
Cena po čaši	150 dinara	180 dinara

Ana ima svoju meru za sok i naručila je da joj Mira pomeša 180 ml limunade sa 20 ml soka od zove. Koliko će koštati Anin specijalni sok?

Prikaži posupak.

Anin sok će koštati _____ dinara.

Primer 4.7.10 (Zbirka [49], zadatak 369) Cene kilograma sira i kilograma kajmaka na pijaci su u odnosu $3:7$. Za 5 kg sira i 7 kg kajmaka treba izdvojiti 7 040 dinara. Koliko iznosi cena kilograma sira, a koliko cena kilograma kajmaka?

Prikaži postupak.

Cena kilograma sira iznosi _____dinara, a cena kilograma kajmaka _____dinara.

Primer 4.7.11 (Zbirka [48], zadatak 122) Reši sistem jednačina.

$$\begin{cases} x(y-3)-y(2+x)=5 \\ (x-y)^2-(x+y)^2+4x(y+1)=-4 \end{cases}$$

Primer 4.7.12 (Zbirka [48], zadatak 188) Dva broja se razlikuju za 15. Ako se manji broj oduzme od 105, a veći od 150, onda će se te razlike odnositi kao $3:5$. Koji su to brojevi?

Primer 4.7.13 (Zbirka [48], zadatak 193) Za jednu pozorišnu predstavu prodato je 120 ulaznica i ostvaren je prihod od 26 500 dinara. Cena ulaznice za odrasle iznosila je 250 dinara, a za decu 150 dinara. Koliko je bilo dece i koliko odraslih na toj pozorišnoj predstavi?

Primer 4.7.14 (Zbirka [49], zadatak 369) Prošle godine se ukupno 95 učenika jedne škole plasiralo na opštinsko takmičenje iz matematike. Ove godine se plasiralo ukupno 108 učenika. Poznato je da je broj dečaka povećan za 8%, a devojčica za 20% u odnosu na prošlu godinu. Koliko se dečaka i koliko devojčica plasiralo na ovo takmičenje prošle godine?

Prikaži postupak.

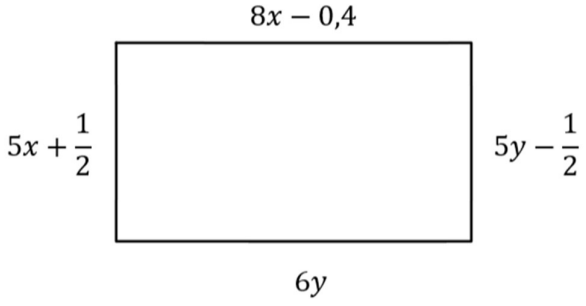
Prošle godine se na opštinsko takmičenje plasiralo _____ dečaka i _____ devojčica.

Primer 4.7.15 (Zbirka [49], zadatak 374) Nata i Tina skupljaju salvete za dekupaž. Ako Nata da Tini 7 salveta, onda će obe devojčice imati isti broj salveta, a ako Tina da Nati 7 salveta, onda će Nata imati dva puta više salveta od Tine. Koliko svaka od devojčica ima salveta?

Prikaži postupak.

Nata ima ____ salveta, a Tina ima ____ salveta.

Primer 4.7.16 (Zbirka [48], zadatak 375) Kaja i Paja mere dužine susednih stranica pravougaonog igrališta štapovima različite dužine. Kaja koristi štap dužine x metara, Paja štap dužine y metara, a oboje imaju na raspolaganju i školski lenjir. Rezultati njihovih merenja prikazani su na slici, pri čemu su sve mere izražene u metrima. Izračunaj površinu ovog igrališta.



Prikaži postupak.

Površina igrališta je _____ m^2.

4.7.2 Zadaci sa završnih ispita

Završni ispit iz matematike na kraju osnovnog obrazovanja predstavlja standardizovano nacionalno ispitivanje znanja učenika, koje sprovodi Zavod za vrednovanje kvaliteta obrazovanja i vaspitanja. Test je jedinstven za sve učenike na nivou Republike Srbije i koncipiran je tako da obuhvati sadržaje propisane nastavnim planom i programom osnovne škole. Za svaki zadatak koji se nalazi na testu definisan je obrazovni standard koji se proverava, a uz test se objavljuje i uputstvo za pregledanje (bodovanje), u kojem su navedena tačna rešenja, a u zavisnosti zadatka i različiti mogući postupci dolaska do istog rešenja.

Zadaci na završnom ispitu razlikuju se prema formi i načinu na koji učenici treba da daju odgovor. Najčešće se javljaju:

- zadaci zatvorenog tipa sa višestrukim izborom, u kojima učenik bira jedan od ponuđenih odgovora;
- zadaci tipa povezivanja, gde je potrebno uspostaviti tačne veze između elemenata;
- zadaci otvorenog tipa, kod kojih se od učenika zahteva da prikaže postupak rešavanja.

Pre samog završnog ispita, učenici imaju priliku da pristupe probnom završnom ispitu, koji ima istu strukturu i način bodovanja kao i zvanični test. Na taj način učenici stiču uvid u formu zadataka, mogu da procene svoj nivo znanja i dobiju povratnu informaciju o oblastima koje bi trebalo dodatno da utvrde.

Kada je reč o zadacima koji se odnose na sisteme linearnih jednačina, njihova zastupljenost na završnim ispitima tokom prethodnih godina nije bila ujednačena. Analizom testova iz poslednjih dvanaest godina uočava se da su se zadaci iz ove oblasti pojavili ukupno sedam puta (2025, 2024, 2023, 2017, 2016, 2015. i 2014.). Zapaža se da se u periodu od pet uzastopnih godina (2018.– 2022.) nije pojavio ni jedan zadatak iz sistema linearnih jednačina, kao i da se u poslednje tri godine ponovo pojavljuju na završnom testu.

U nastavku su prikazani zadaci iz sistema linearnih jednačina koji su se pojavljivali na završnom ispitu u posmatranom periodu, uz propratne komentare o samom zadatku, kao i analizi stepena postignuća učenika. Podaci o postignućima učenika koji su navedeni iza svakog zadatka (sem za školsku 2016/2017. godinu), i na kraju poglavlja grafički predstavljeni, dobijeni su od OŠ „Petefi Šandor“ u Novom Sadu, koja je iste dobila od Zavoda za vrednovanje kvaliteta obrazovanja i vaspitanja, u vidu *Izveštaja o rezultatima završnog ispita na kraju osnovnog obrazovanja i vaspitanja*. Kako su postignuća učenika data na nivou škole, opštine, okruga i republike, potrebno je istaći da to u nastavku konkretno znači da se radi o OŠ „Petefi Šandor“, opština Novi Sad, Južnobački okrug, Republika Srbija.

Primer 4.7.17 (Školska 2024/2025. godina, 11. zadatak, obrazovni standard MA.2.2.1.)

Koliki je proizvod brojevnih vrednosti nepoznatih koje zadovoljavaju sistem jednačina?

$x + 2y + 3{,}7 = 2y - (x + 1{,}3)$

$2 \cdot (x - y) - 0{,}45y = y - 5$

Oboj kružić ispred tačnog odgovora.

○ $x \cdot y = -3$ ○ $x \cdot y = -2$ ○ $x \cdot y = -1$ ○ $x \cdot y = 0$ ○ $x \cdot y = 1$

Komentar: Navedeni zadatak po obrazovnom standardu pripada srednjem nivou. Ovo je standardni zadatak sa kojim se učenici sreću na redovnoj nastavi u kojem se polazni sistem svodi na njemu ekvivalentan sistem pogodan za neku od metoda rešavanja.

Analiza postignuća: Ovaj zadatak tačno je rešilo 64% učenika na nivou OŠ „Petefi Šandor“, 56% učenika na nivou opštine Novi Sad, 47% učenika na nivou Južnobačkog okruga i 40% učenika na nivou republike. Broj učenika koji su tačno rešili ovaj zadatak je na nivou škole i opštine iznad, a na nivou okruga i republike ispod očekivanog nivoa od 50%. Kako se nije tražio postupak, postoji mogućnost i da su neki učenici nasumično izabrali tačan odgovor.

Primer 4.7.18 (Školska 2023/2024. godina, 12. zadatak, obrazovni standard MA.2.2.1.)

U tabeli, svaki simbol ima određenu vrednost.

●	★	★	25
■	■	★	7
●	●	●	45
x	y	z	

Na kraju svakog reda prikazan je zbir vrednosti simbola u tom redu, a na dnu svake kolone nepoznate x, y i z predstavljaju proizvod vrednosti simbola u toj kolini.

Tako je zbir vrednosti simbola ●, ★ i ★ u prvom redu 25, a proizvod simbola ●, ■ i ● u prvoj koloni je x.

Kolika je vrednost proizvoda y?

Oboj kružić ispred tačnog odgovora.

○ $y = 7$ ○ $y = 25$ ○ $y = 45$ ○ $y = 75$ ○ $y = 77$

Komentar: Navedeni zadatak po obrazovnom standardu pripada srednjem nivou. Jedan od načina rešavanja ovog zadatka jeste korišćenjem sistema linearnih jednačina.

$$\begin{cases} a + 2b = 25 \\ 2c + b = 7 \\ 3a = 45 \end{cases}$$

Iako bi postavljeni sistem imao tri jednačine i tri nepoznate, poslednja od jednačina je sa jednom nepoznatom a. Uvrštanjem vrednosti nepoznate a u prvu jednačinu izračunava se vrednost nepoznate b, a zatim iz druge jednačine i vrednost nepoznate c. Potom se izračuna vrednost $y = b \cdot c \cdot a$.

Analiza postignuća: Ovaj zadatak tačno je rešilo 84% učenika na nivou OŠ „Petefi Šandor“, 76% učenika na nivou opštine Novi Sad, 71% učenika na nivou Južnobačkog okruga i 66% učenika na nivou republike. Broj učenika koji su tačno rešili ovaj zadatak je značajno iznad očekivanog nivoa od 50%. Kako se nije tražio postupak, postoji mogućnost i da su neki učenici nasumično izabrali tačan odgovor. Takođe, kao što je već rečeno, rešenje putem postavljanja sistema predstavlja samo jedan mogući pristup. Ipak, u ovom zadatku se češće očekuje da učenici neposredno određuju vrednost simbola kruga, bez formalnog formulisanja sistema jednačina, te je upitna reprezentativnost ovog zadatka u smislu provere savladanosti postavljanja i rešavanja sistema linearnih jednačina.

Primer 4.7.19 (Školska 2023/2024. godina, 18. zadatak, obrazovni standard MA.3.2.1.)

Ako se brojiocu i imeniocu nekog razlomka doda broj 3, dobija se $\frac{6}{7}$, a ako se i od brojioca i od imenioca oduzme broj 3, rezultat je $\frac{3}{4}$. Odredi razlomak koji ispunjava navedene uslove.

Prikaži postupak.

U pitanju je razlomak _____ .

Komentar: Navedeni zadatak po obrazovnom standardu pripada naprednom nivou. U ovom problemskom zadatku od učenika se očekuje da prepozna odnos između nepoznatih veličina, postavi odgovarajući sistem jednačina $\begin{cases} \frac{x+3}{y+3} = \frac{6}{7} \\ \frac{x-3}{y-3} = \frac{3}{4} \end{cases}$ i potom ga reši.

Analiza postignuća: Ovaj zadatak tačno je rešilo 4% učenika na nivou OŠ „Petefi Šandor“, 10% učenika na nivou opštine Novi Sad, 7% učenika na nivou Južnobačkog okruga i 5% učenika na nivou republike. Broj učenika koji su tačno rešili ovaj zadatak je znatno ispod očekivanog nivoa od 25%.

Primer 4.7.20 (Školska 2022/2023. godina, 12. zadatak, obrazovni standard MA.2.2.1.)

Koliki je proizvod brojevnih vrednosti nepoznatih koje zadovoljavaju sistem jednačina?

$1{,}2x - 2y = -12$

$3x + 0{,}5y = 3$

Oboj kružić ispred tačnog odgovora.

○ $x \cdot y = 12$ ○ $x \cdot y = 6$ ○ $x \cdot y = -6$ ○ $x \cdot y = 0$

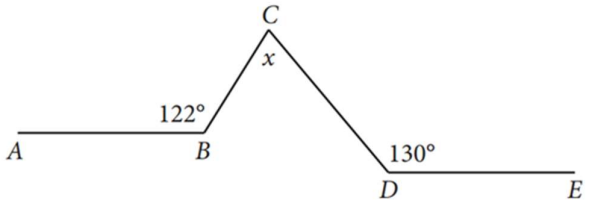
Komentar: Navedeni zadatak po obrazovnom standardu pripada srednjem nivou. Za razliku od primera 4.7.17 ovaj zadatak je već zadat u opštem obliku.

Analiza postignuća: Ovaj zadatak tačno je rešilo 69% učenika na nivou OŠ „Petefi Šandor“, 70% učenika na nivou opštine Novi Sad, 61% učenika na nivou Južnobačkog okruga i 52% učenika na nivou republike. Broj učenika koji su tačno rešili ovaj zadatak je značajno iznad očekivanog nivoa od 50%, sem na nivou republike gde je na očekivanom nivou. Kako se nije tražio postupak, postoji mogućnost i da su neki učenici nasumično izabrali tačan odgovor.

Primer 4.7.21 (Školska 2016/2017. godina, 19. zadatak, obrazovni standard MA.3.3.1.)

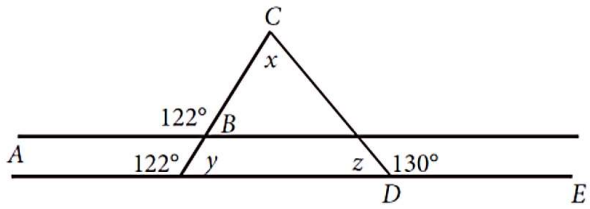
Odredi meru ugla x prikazanog na slici, ako je prava AB paralelna sa pravom DE.

Prikaži postupak.



$x =$ _____

Komentar: Navedeni zadatak po obrazovnom standardu pripada naprednom nivou. Obrazovni standard naveden za ovaj zadatk je iz oblasti geometrije. Međutim u uputstvu za pregledanje, kao jedan od načina za rešavanje, naveden je postupak koji koristi sistem linearnih jednačina. Koristeći osobine uglova u trouglu, da je svaki spoljašnji ugao trougla jednak zbiru nesusedna dva unutrašnja ugla, kao i da je zbir unutrašnjih uglova trougla $180°$, dobija se sistem $\begin{cases} x + z = 122° \\ x + y = 130° \\ x + y + z = 180° \end{cases}$



Primer 4.7.22 (Školska 2015/2016. godina, 11. zadatak, obrazovni standard MA.2.2.1.)

Reši sistem jednačina.

Prikaži postupak.

$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 2(x - 4) = 2y \end{cases}$

$(x, y) = (__, __)$

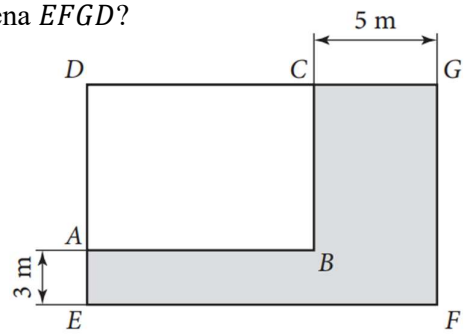
Komentar: Navedeni zadatak po obrazovnom standardu pripada srednjem nivou. Zadatak zahteva minimalnu transformaciju kako bi bio sveden na sebi ekvivalentan sistem u opštem obliku.

Analiza postignuća: Ovaj zadatak tačno je rešilo 50% učenika na nivou OŠ „Petefi Šandor“, 45% učenika na nivou opštine Novi Sad, 38% učenika na nivou Južnobačkog okruga i 33% učenika na nivou republike. Broj učenika koji su tačno rešili ovaj zadatak je dostigao očekivani nivo od 50% samo na nivou škole, dok je na ostalim nivoima ispod ili znatno ispod očekivanog.

Primer 4.7.23 (Školska 2014/2015. godina, 19. zadatak, obrazovni standard MA.3.2.1.)

Teren za rekreaciju $EFGD$ je oblika pravougaonika. Sastoji se od betonskog terena $ABCD$ oblika pravougaonika i travnatog terena koji je osenčen na slici. Obim betonskog terena $ABCD$ je 50 m, a površina travnatog terena je $108\ \text{m}^2$. Kolika je površina terena $EFGD$?

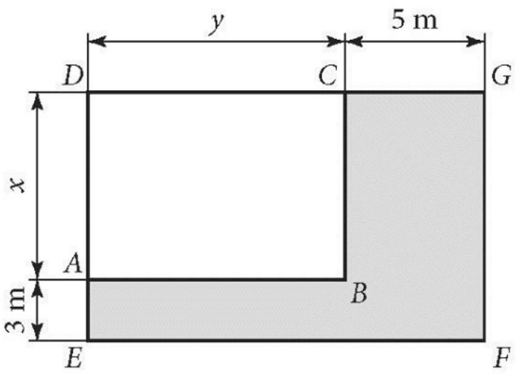
Prikaži postupak.



Površina terena $EFGD$ je _____ m^2.

Komentar: Navedeni zadatak po obrazovnom standardu pripada naprednom nivou. Od učenika se očekuje da koristeći formule za obim i površinu pravougaonika postavi odgovarajući sistem jednačina. Postoje dva načina rešavanja, u zavisnosti od toga koje su duži izabrane da budu nepoznate, $x = DA$ i $y = DC$ ili $a = DE$ i $b = DG$.

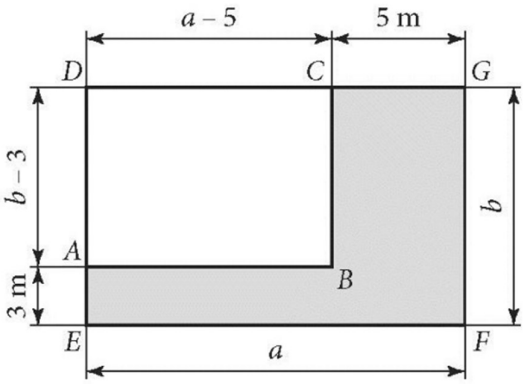
1. Način



Odgovarajući sistem je

$$\begin{cases} 2x + 2y = 50 \\ (3 + x) \cdot (5 + y) - xy = 108 \end{cases}$$

2. Način



Odgovarajući sistem je

$$\begin{cases} 2a - 10 + 2b - 6 = 50 \\ 3a + 5 \cdot (b - 3) = 108 \end{cases}$$

Analiza postignuća: Ovaj zadatak tačno je rešilo 9% učenika na nivou OŠ „Petefi Šandor“, 7% učenika na nivou opštine Novi Sad, 5% učenika na nivou Južnobačkog okruga i 5% učenika na nivou republike. Broj učenika koji su tačno rešili ovaj zadatak je znatno ispod očekivanog nivoa od 25%.

Primer 4.7.24 (Školska 2013/2014. godina, 18. zadatak, obrazovni standard MA.3.2.1.)

Vlada je za svoj rođendan kupio krem bananice i čoko štanglice. Jedna krem bananica koštala je 10 dinara, a jedna čoko štanglica koštala je 15 dinara. Vlada je ukupno potrošio 450 dinara i kupio ukupno 35 slatkiša. Koliko je Vlada kupio krem bananica, a koliko čoko štanglica?

Prikaži postupak.

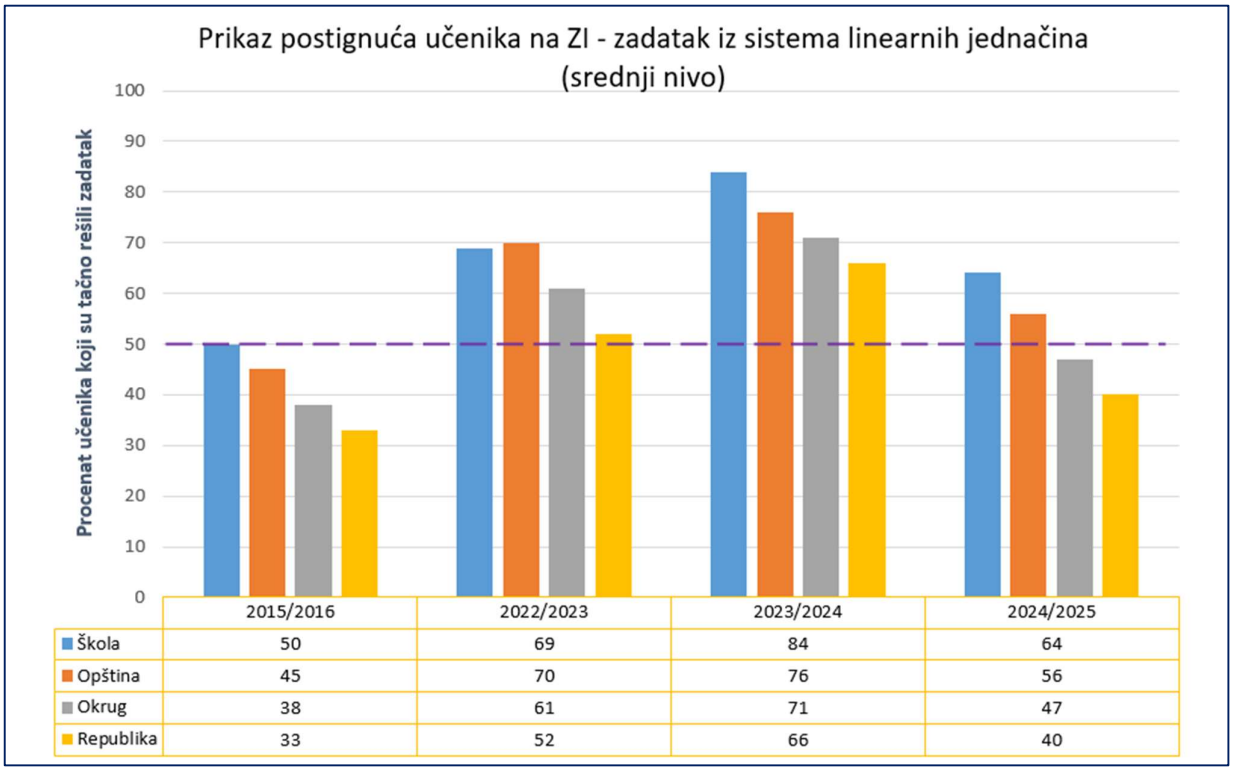
Vlada je kupio _____ krem bananica i _____ čoko štanglica.

Komentar: Navedeni zadatak po obrazovnom standardu pripada naprednom nivou. U ovom problemskom zadatku od učenika se očekuje da prepozna odnos između nepoznatih veličina, postavi odgovarajući sistem jednačina $\begin{cases} k + c = 35 \\ 10k + 15c = 450 \end{cases}$, gde je k broj kupljenih krem bananica, c broj kupljenih čoko bananica, a potom i reši sistem.

Analiza postignuća: Ovaj zadatak tačno je rešilo 58% učenika na nivou OŠ „Petefi Šandor“, 46% učenika na nivou opštine Novi Sad, 40% učenika na nivou Južnobačkog okruga i 33% učenika na nivou republike. Broj učenika koji su tačno rešili ovaj zadatak je znatno iznad očekivanog nivoa od 25% na nivou škole, opštine i okruga, dok je blago iznad očekivanog nivoa na nivou republike.

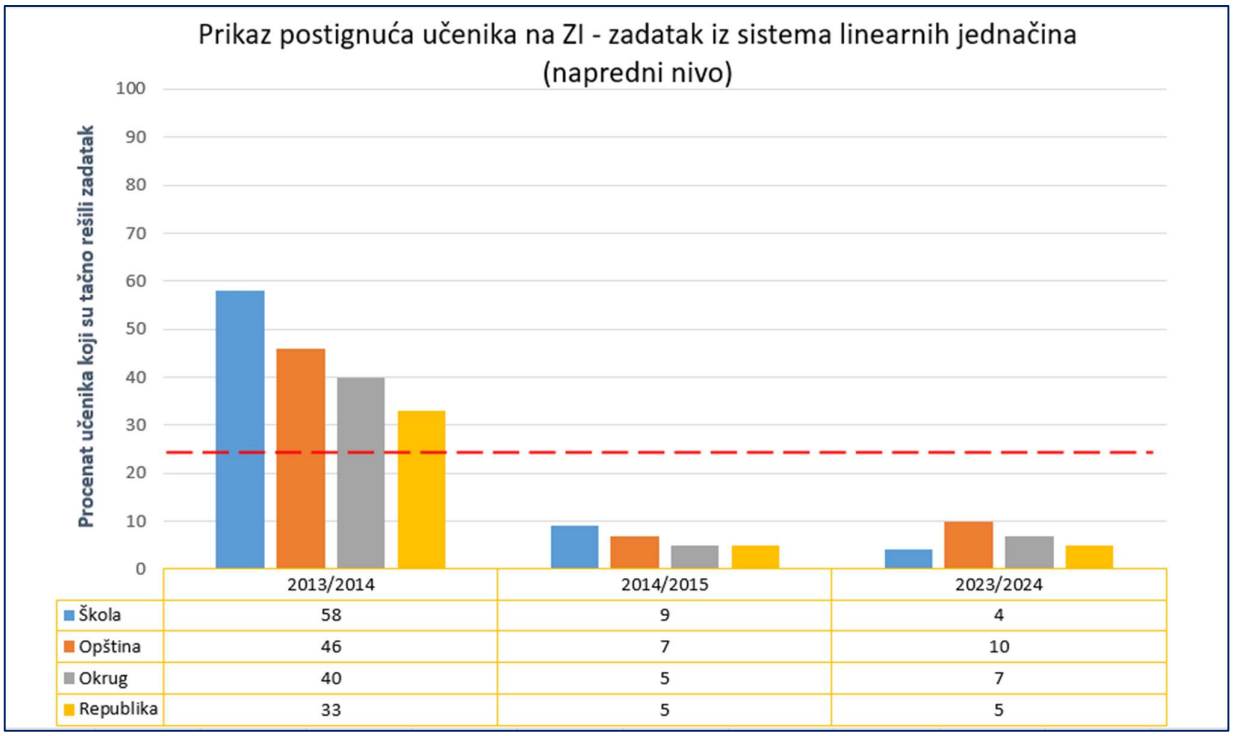
U nastavku će grafički biti prikazana postignuća učenika iz zadataka koji su se rešavali korišćenjem sistema linearnih jednačina, i to prvo zadaci srednjeg nivo (grafikon 4.1), zadaci naprednog nivoa (grafikon 4.2), i na kraju zbirni prikaz svih zadataka koji su se pojavili na završnom ispitu u posmatranom periodu od dvanaest godina.

Plavom isprekidanom linijom označeno je 50%, jer je to procenat učenika za koje se očekuje da će postići srednji nivo postignuća, dok je crvenom bojom istaknuto 25% – procenat učenika za koje se očekuje da će postići napredni nivo postignuća.



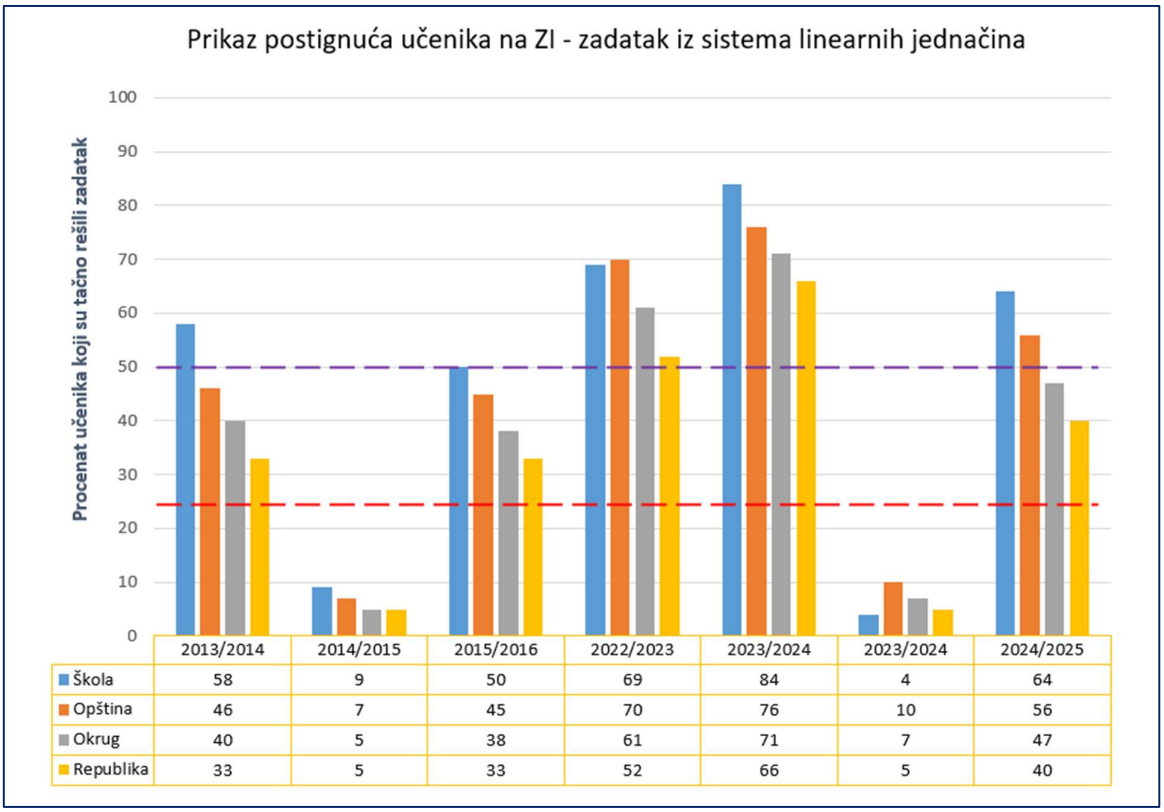
Grafikon 4.1 Postignuća učenika na završnim ispitima (srednji nivo postignuća)

Kako su na grafikonu 4.1 prikazani rezultati za zadatke srednjeg nivoa postignuća, uočava se da je broj učenika koji su tačno rešili zadatke značajno iznad očekivanog nivoa od 50%, naročito na nivou škole. Takva situacija nije u 2015/2016. godini, gde je samo na nivou škole dostignut očekivani nivo, dok su ostali rezultati ispod očekivanog nivoa. Treba istaći i da je od posmatranih zadataka jedino zadatak iz 2015/2016. godine od učenika očekivao da prikažu tačan postupak, dok je u preostale tri godine učenik trebalo da izabere jedan od ponuđenih odgovora, što bi moglo biti jedno od objašnjenja ovakve razlike u rezultatima.



Grafikon 4.2 Postignuća učenika na završnim ispitima (napredni nivo postignuća)

U poslednjih dvanaest godina, učenici su se četiri puta susreli sa zadacima iz oblasti sistema linearnih jednačina, a koji su na naprednom nivou postignuća. U radu nisu prikazani rezultati iz 2016/2017. zbog neuspešnosti pronalaženja odgovarajućih podataka. U preostale tri godine, čiji su rezultati prikazani na grafikonu 4.2 uočava se izuzetno mali procenat učenika koji su uspeli tačno da reše ovaj zadatak, slično na svim nivoima – od škole, do republike. Veliko odstupanje uočava se u 2013/2014. godini, gde su na svim nivoima očekivanja od 25% (crvena isprekidana linija) značajno nadmašena. Svi ovi zadaci su od učenika zahtevali i tačan postupak, tako da se u tome ne može tražiti uzrok ovako velike razlike.



	2013/2014	2014/2015	2015/2016	2022/2023	2023/2024	2023/2024	2024/2025
Škola	58	9	50	69	84	4	64
Opština	46	7	45	70	76	10	56
Okrug	40	5	38	61	71	7	47
Republika	33	5	33	52	66	5	40

Grafikon 4.3 Postignuća učenika na završnim ispitima

Na grafikonu 4.3 prikazani su rezultati svih zadataka iz oblasti sistema linearnih jednačina, tj. postignuća učenika u vidu procenata učenika koji su tačno rešili te zadatke. Ono što jeste očekivano, to je da su ti procenti znatno viši kod zadataka koji su bili na srednjem nivou, od zadataka sa naprednog nivoa, sem za godinu 2013/2014. koja odskače od ovog obrasca.

Kao celokupni zaključak na osnovu prikupljenih podataka u posmatranom periodu, čini se da je zadovoljavajući procenat učenika koji uspešno rešavaju zadatke srednjeg nivoa, dok je broj učenika koji rešavaju zadatke naprednog nivoa znatno ispod očekivanog.

Poglavlje 5

Korelacija sa predmetom informatika i računarstvo

Pojam korelacije u metodici nastave obično se definiše kao međusobno povezivanje i odnos sadržaja predmeta koji se izučavaju u školi. Pored tog uobičajenog shvatanja, korelacija se uspostavlja i između orijentacionih ciljeva nastave i strategije učenja. Pod učenjem se, u tom kontekstu, ne smatra samo usvajanje znanja, nego i sticanje metoda i strategija usvajanja znanja (kako pronaći informaciju, organizovati odgovor, primeniti i vrednovati znanje i sl.). [50]

Korelacija može da se odvija:

- Horizontalno – povezivanje i odnos sadržaja u okviru istog razreda;
- Vertikalno – povezivanje među razredima.

Takođe, korelacija može biti:

- unutarpredmetna – ukoliko se međusobno prožimanje ostvaruje unutar jednog istog predmeta;
- međupredmetna korelacija – povezivanje između različitih nastavnih predmeta.

Prema *Pravilniku o standardima kompetencija za profesiju nastavnika i njihovog profesionalnog razvoja*, koji bliže uređuje profesionalne standarde o tome kakvo se poučavanje smatra uspešnim, u okviru kompentencija za nastavnu oblast, predmet i metodiku nastave, od nastavnika se, između ostalog, očekuje da: [51]

- Poznaje odgovarajuću oblast i zna nastavni plan i program predmeta koji realizuje, kao i njegovu korelaciju sa drugim oblastima, odnosno predmetima;
- Planira i programira sadržaje nastave vodeći računa o korelaciji, kako horizontalnoj, tako i vertikalnoj;
- Povezuje nastavne sadržaje sa prethodnim znanjima i iskustvima učenika i njihovim sadašnjim i budućim potrebama, sa primerima iz svakodnevnog života, sa sadržajima iz drugih oblasti, sa aktuelnim dostignućima/naučnim novinama;
- Kontinuirano prati i vrednuje ostvarenu horizontalnu i vertikalnu povezanost sadržaja.

Navedeno potvrđuje teorijsku osvešćenost o važnosti korelacije u nastavi, zahvaljujući kojoj učenje postaje smislenije, funkcionalnije i primenljivije. Međupredmetnim povezivanjem, celovitim uvidom u materiju koja se proučava, upoređivanjem sadržaja i ukazivanjem na sličnosti i razlike unutar određenih nastavnih područja, znanje se usvaja i kvalitetnije i dugoročnije, a ujedno se podstiče i kritičko mišljenje i primena znanja u novim situacijama. [50]

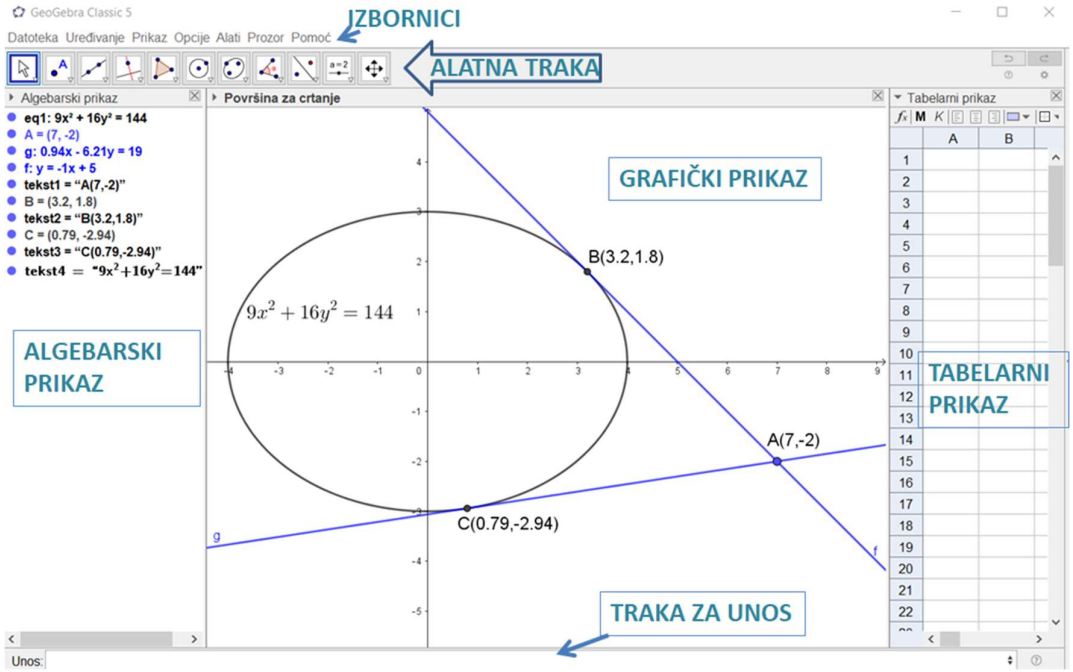
U ovom poglavlju rada, akcenat je upravo na predlogu ostvarivanja međupredmetne korelacije između nastavnog predmeta matematika sa nastavnim predmetom informatika i računarstvo, a koja se konkretno odnosi na oblast sistema linearnih jednačina. Pre samog projektnog zadatka, biće predstavljeni GeoGebra, kao alat koji će u projektnom zadatku biti korišćen (Poglavlje 5.1) i veštačka inteligencija, kao oblast informatike i računarstva u okviru koje će se projektni zadatak realizovati (Poglavlje 5.2).

5.1 GeoGebra

GeoGebra je dinamički softverski paket koji objedinjuje algebru, geometriju, tabelarni prikaz, grafove i statistiku u jedinstvenom okruženju. Pod dinamičkim softverom se podrazumevaju programski paketi koji omogućavaju korisniku da, menjanjem jedne veličine, istovremeno menja više zavisnih veličina i da prati nastale promene.

Program GeoGebra je pisan u programskom jeziku Java. Prvu verziju programa napravio je Markus Hohenwarter, profesor Univerzitetu u Salzburgu. Program ima podršku Austrijske akademije nauka. Osvojio je niz evropskih nagrada i preveden je na više od 50 svetskih jezika. [52]

Koristi se kao nastavno sredstvo u nastavi matematike od osnovne škole do univerzitetskog nivoa. Besplatan je softver, čime je omogućen širok krug korisnika. U obrazovnim ustanovama koriste ga i nastavnici i studenti. Prilagođen je i korisnicima koji nemaju programerske veštine i jednostavan je za korišćenje, sa intuitivnim i vizuelnim prikazom velikog broja mogućnosti, kao što se može videti na slici ispod (*Slika 5.1*). Na internetu je dostupan veliki broj nastavnih materijala koji se mogu koristi kao pomoćna nastavna sredstva.



Slika 5.1 Izgled prozora u softveru GeoGebra

Kada je u pitanju predstavljanje i rad sa matematičkim sadržajima u savremenoj nastavi matematike GeoGebra ima značajnu ulogu kako za učenike tako i za nastavnike. Za potrebe ovog rada takođe je korišćen softver GeoGebra.

Neke od prednosti ovog softvera su: [53]

- Podstiče učenike da samostalno istražuju, kao i da uče putem eksperimenta i otkrića;
- Pomaže učenicima da bolje savladaju određeni matematički sadržaj koristeći njegove dinamičke osobine – učenici mogu samostalno pomerati „slobodne“ objekte na radnoj površini,

posmatrajući ih iz različitih uglova, a koristeći klizač mogu menjati vrednosti određenih promenljivih i posmatrati kako ta promena utiče na osobine objekata koji zavise od te promenljive;
- Omogućava formiranje radnog okruženja u kojem se klasično predavanje može zameniti problemski orijentisanom nastavom, kojom se učenici podstiču na razmišljanje, pronalaženje rešenja i donošenje odluka, a imaju i mogućnost za proveru tačnosti rešenja i sagledavanje eventualnih grešaka;
- Stimuliše nastavnike da istražuju i unapređuju nastavu matematike, da koriste tehnologiju u cilju vizualizacije nastavnih sadržaja, da organizuju interaktivnu nastavu i učenje na daljinu.

U nastavku su navedene neke od mogućnosti koje GeoGebra nudi u različitim oblastima matematike:

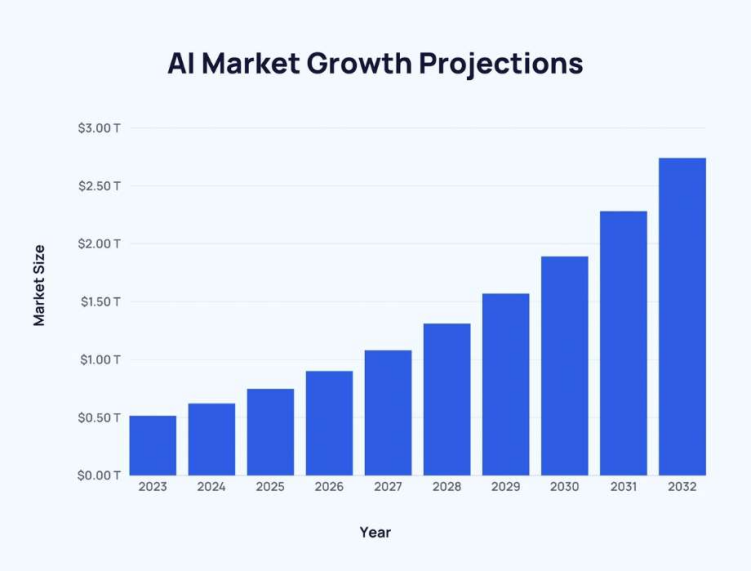
- Geometrija
  - Konstruisanje tačaka (tačaka na objektu, presek objekata, središte duži);
  - Konstruisanje prave, duži;
  - Konstruisanje kružnice, elipse, hiperbole i parabole;
  - Konstruisanje uglova i mnogouglova;
  - Transformacije podudarnosti (osna simetrija, centralna simetrija, rotacija, translacija);
  - 3D modeli (sfera, prizma, piramida, valjak...).
- Algebra
  - Povezivanje grafičkog prikaza sa algebarskim izrazima;
  - Omogućava rad sa polinomima (određivanje nula, grafički prikaz, rastavljanje na činioce, određivanje stepena polinoma i njegovih koeficijenata);
  - Sistemi jednačina;
  - Rad sa kompleksnim brojevima.
- Funkcije i analiza
  - Crtanje grafika funkcije;
  - Određivanje nula i ekstrema funkcije;
  - Prikaz tangente u zadatoj tački;
  - Prikaz asimptota;
  - Računanje i grafički prikaz izvoda funkcije;
  - Numeričko i simboličko izračunavanje integrala.
- Statistika
  - Unos i organizacija podataka (direktno u tabelu, uvoz podataka iz CSV ili Exel fajlova, formiranje grupa podataka, računanje osnovnih statističkih parametara);
  - Grafički prikaz podataka (stubičasti dijagram, kružni dijagram, histogram, linijski dijagram).

5.2 Veštačka inteligencija u obrazovanju

Savremeno društvo nalazi se u periodu u kojem je pojam veštačke inteligencije (VI) sveprisutan u gotovo svim sferama života. Bez obzira na to da li se naručuje hrana putem digitalnih platformi, uplaćuju računi, komunicira na društvenim mrežama, planiraju putovanja ili koristi pametni asistent, veštačka inteligencija postala je neizostavan deo svakodnevice. Njena primena vremenom je postala toliko rasprostranjena, da je Evropska unija 2024. godine donela prvi zakon na svetu o veštačkoj inteligenciji. U ovom dokumentu, sistem veštačke inteligencije se definiše kao „mašinski zasnovan

sistem koji je dizajniran da funkcioniše sa različitim nivoima autonomije i koji može, za eksplicitne ili implicitne ciljeve, generisati rezultate kao što su predviđanja, preporuke ili odluke koje utiču na fizička ili virtuelna okruženja“.

Predviđanja su da će globalni rast tržišta VI porasti sa 621 milijarde dolara u 2024. godini, na 2,7 biliona dolara u 2032. godini (slika 5.2). [54]



Slika 5.2 Globalni rast tržišta VI

U Republici Srbiji, strateški pristup razvoju i primeni veštačke inteligencije potvrđen je donošenjem *Strategije razvoja veštačke inteligencije u Republici Srbiji za period 2025–2030.* Kao podrška ovom dokumentu izrađene su i *Etičke smernice za razvoj, primenu i upotrebu pouzdane i odgovorne veštačke inteligencije*, koje naglašavaju značaj primene VI tehnologija u skladu sa najvišim etičkim i bezbednosnim standardima. [54]

Kako veštačka inteligencija postaje sastavni deo savremenog društva, njen uticaj sve više prožima i oblast obrazovanja. Početna primena bila je skromna, najpre kroz zadatke poput automatskog pisanja školskih sastava, prepričavanja lektira i izrade prezentacija. Međutim, razvojem naprednih jezičkih modela generativne veštačke inteligencije, kao što je ChatGPT, otvorene su mogućnosti za dublje promišljanje o obrazovnom potencijalu ovih tehnologija. Veštačka inteligencija već menja obrazovanje, a u budućnosti se očekuje da će to činiti još snažnije, nudeći prilike za personalizaciju nastave, unapređenje efikasnosti nastavnog procesa i veću dostupnost kvalitetnog obrazovanja širokom krugu učenika.

Odgovoran odnos prema obrazovanju podrazumeva da se pre, ali i tokom, uvođenja nove tehnologije sagledaju njene mogućnosti i prednosti, ali istovremeno i opasnosti i mogući nedostaci. S tim u vezi, Zavod za unapređivanje obrazovanja i vaspitanja ističe sledeće [54]:

- Prednosti primene VI u obrazovanju:
  - Personalizovano učenje – kreiranje individualizovanih programa učenja koji su prilagođeni potrebama svakog učenika ponaosob;

  - Podrška nastavnicima – automatizovanje administrativnih zadataka, pripremanje nastave, ubrzavanje pronalaženja resursa, pomoć u vrednovanju napretka učenika;
  - Dostupnost obrazovanja – pristup obrazovnim sadržajima bilo kad, bilo gde, što posebno može imati značaj za osobe sa invaliditetom, hroničnim bolestima...;
  - Efikasnost i analiza podataka.
- Izazovi i opasnosti:
  - Pristup podacima i privatnost – etička dilema je kako se čuvaju i ko ima pristup velikoj količini podataka o učenicima, njihovim navikama u učenju, emocionalnim reakcijama, pa čak i zdravlju [55], kako se prikupljeni podaci ne bi zloupotrebljavali;
  - Pristrasnost u algoritmima i njihova nedovoljna transparentnost;
  - Zamena ljudske interakcije;
  - Neadekvatna upotreba - prekomerna zavisnost od tehnologije, negativan uticaj na razvoj kritičkog mišljenja;
  - Nesavršenost – svaki proizvod dobijen uz pomoć VI mora biti kritički sagledan i dodatno proveren.

Postoji zabrinutost da VI može dodatno produbiti razlike između učenika koji imaju pristup tehnologiji i onih koja ga nemaju, što podrazumava kako učenike koji potiču iz socijalno ugroženih porodica ili područja, tako i one učenike koji imaju neku od fizičkih poteškoća kao što su učenici sa oštećenjem vida, sluha, učenike sa autizmom. [55]

Izazov se ogleda i u mogućem otporu prema uvođenju i prihvatanju novih tehnologija u obrazovni proces, bilo od strane učenika, nastavnika ili roditelja.

Kako je tema VI u obrazovanju veoma aktuelna, to se sprovodi veliki broj istraživanja, kako u svetu, tako i kod nas. [55, 56] Do sada dobijeni rezultati upućuju na to da u praksi postoji veliki prostor za primenu VI u izgradnji savremenog obrazovnog sistema.

Jedna od čestih dilema tiče se i pitanja autorstva nečega što je kreirano pomoću VI, odnosno etičnosti prisvajanja istog. Sliku 3.1, koja je korišćena u ovom radu, generisao je upravo ChatGPT. Ko je autor, a ko vlasnik te slike? GPTZero je onlajn alat koji identifikuje da li je tekst generisan pomoću ljudske ili veštačke inteligencije. OpenAI je takođe najavio da će svi tekstovi generisani u ChatGPT-u imati nevidljivi kriptografski žig kako bi taj tekst u sledećoj iteraciji pretrage baze znanja bio prepoznat kao tekst VI. [57]

Kako se celokupan nastavni proces oslanja na nastavnike, oni predstavljaju ključnu komponentu u korišćenju VI u obrazovanju, te je neophodno posvetiti se razvoju njihovih znanja i veština, te redefinisanju njihove uloge u nastavnoj praksi. ZUOV razlikuje pet ključnih uloga koje nastavnici imaju u primeni VI u obrazovanju: [54]

- Pedagoška uloga – nastavnik je moderator i integrator tehnologije;
- Etička uloga – nastavnik vrši etički nadzor upotrebe VI;
- Mentorska uloga – nastavnik uvodi učenike u svet VI;
- Kritička uloga – nastavnik daje podršku kritičkom razmišljanju;
- Ljudska uloga – nastavnik obezbeđuje socijalnu i emotivnu podršku učenicima.

5.3 Projektni zadatak

Informatika i računarstvo je predmet koji se u osnovnoj školi izučava u drugom ciklusu obrazovanja i vaspitanja. Cilj nastave jeste osposobljavanje učenika za upravljanje informacijama, bezbednu komunikaciju u digitalnom okruženju, izradu digitalnih sadržaja i kreiranje računarskih programa za rešavanje različitih problema u savremenom društvu koje se ubrzano menja pod uticajem digitalnih tehnologija. Predviđeni fond iznosi jedan čas nedeljno.

Reč je o izrazito praktično orijentisanom predmetu, u kojem se ključne veštine najuspešnije razvijaju kroz neposredan rad na računaru, čime se učenici osposobljavaju za smisleno i funkcionalno korišćenje računarske tehnologije. Poseban značaj ima i primena informatičkih znanja u drugim nastavnim predmetima, što odgovara savremenim trendovima integracije informacionih tehnologija u obrazovni proces.

Mogućnosti korelacije informatike sa ostalim predmetima izuzetno su velike i u značajnoj meri zavise od angažovanja, volje i kreativnosti nastavnika informatike. Ilustrativno, u nastavku su prikazani primeri sa časova autora rada, u kojima je nastojalo da se sadržaji i ishodi časa informatike ostvare kroz povezivanje sa drugim predmetima. Ovo povezivanje se odnosilo kako na sam sadržaj, tako i na sticanje metoda i strategija usvajanja znanja, kao što su: pronalaženje informacija, efikasno učenje, organizacija odgovora, primena i vrednovanje znanja:

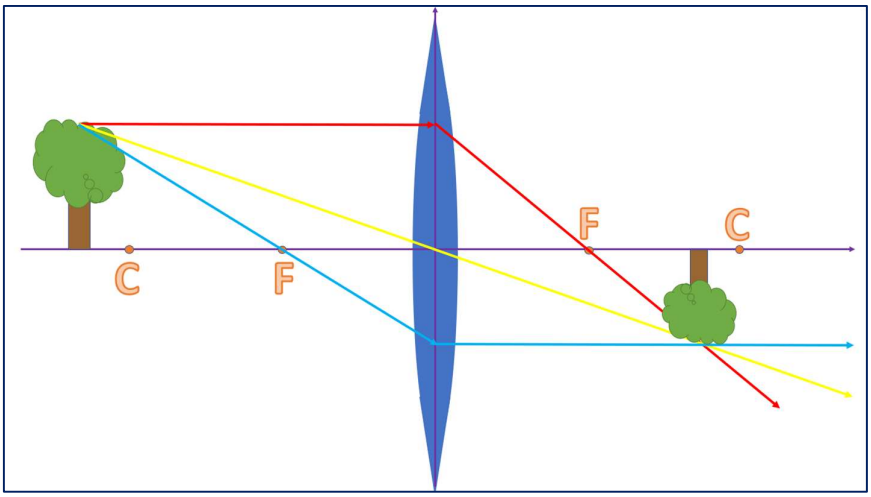
- Multimedijalne prezentacije:
  - → bilogija (ptice našeg kraja, VI razred) (slika 5.3)
  - → istorija (istorijski izvori, V razred)
  - → matematika, fizika (osnovne jedinice za površinu, VI razred)

Slika 5.3 Multimedijalna prezentacija biologija – informatika

- Rad sa tabelama u tekstualnim dokumentima:
  - → geografija (privreda, podela saobraćaja, VI razred)
  - → matematika (vrste četvorouglova, VI razred)
- Rad sa tekstom:
  - → srpski jezik (D. Radović: *Kapetan Džon Piplfoks*)
- Računarstvo:
  - → Istorija (kviz u programskom okruženju Scratch, V razred) (slika 5.4)
  - → Matematika (osna simetrija, programsko okruženje Scratch, V razred) (slika 5.5)
  - → Matematika (Euklidov algoritam, programsko okruženje Scratch, V razred)

Slika 5.4 Osnosimetrične figure (rad učenika) *Slika 5.5 Kviz u Scratch-u (rad učenika)*

- Rad sa programima za tabelarne proračune
  - → matematika (crtanje i analiza grafičkog prikaza podataka)
- Računarska grafika:
  - → likovno (logo škole, poentilizam)
  - → mape uma
- Informatika – Animacija:
  - → fizika (sočiva, VIII razred) (Slika 5.5)
  - → matematika (Pitagorina teorema, Pivot Animator, VII razred)

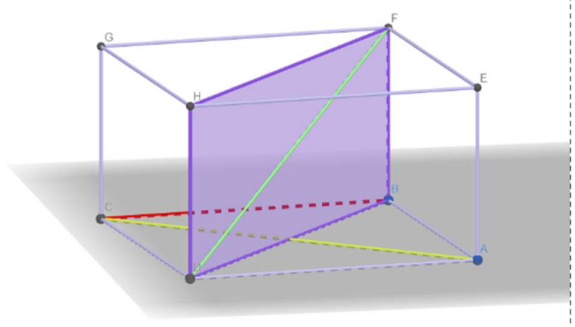


Slika 5.5 Animacija prelamanje svetlosti (rad učenika)

- Informatika – Projektni zadatak:
  - → matematika (prizma, GeoGebra, VIII razred) (slika 5.6)
  - → više predmeta (priprema za završni ispit, mobilne aplikacije ili veb-sajtovi, VIII razred)
  - → mape uma
  - → upitnici i testovi za utvrđivanje znanja
  - → rad sa deljenim dokumentima

Softver Geogebra (https://www.geogebra.org)

1. Nacrtaj četvorostranu prizmu, a zatim:
   - Crvenom bojom označi osnovnu ivicu
   - Plavom bojom označi bočnu ivicu (visinu)
   - Zelenom bojom označi dijagonalu prizme
   - Žutom bojom označi dijagonalu osnove
   - Ljubičastom bojom označi dijagonalni presek



Slika 5.6 Korelacija matematika – informatika, rad učenika

Za uspešnu realizaciju međupredmetne korelacije na časovima informatike, neophodno je pažljivo planiranje i procenjivanje koji se sadržaji mogu kvalitetno obrađivati kroz povezivanje predmeta. Izazov predstavlja i vremenski okvir predviđen planovima i programima, jer korelacija može obuhvatiti samo sadržaje koji su već ili istovremeno obrađeni u drugim predmetima. To zahteva usklađivanje redosleda i tempa realizacije nastavnih tema, kako bi povezivanje gradiva bilo efektivno i korisno za učenike.

Kao nastavnik dvopredmetne nastave, matematike i informatike, autor rada prepoznaje brojne mogućnosti za korelaciju ova dva predmeta. Neki primeri ovakvih povezanosti već su prethodno prikazani. U nastavku rada biće predstavljen predlog za ostvarivanja međupredmetne korelacije matematike i informatike u osmom razredu, a koja se odnosi na temu ovog rada – sisteme jednačina.

Okviri ostvarivanja korelacije:

I Matematika: Tokom prvog polugodišta osmog razreda, u okviru teme *Tačka, prava, ravan*, planirani sadržaj obuhvata odnos dve prave, kako u ravni, tako i u prostoru.

II Matematika: Neposredno pre teme *Sistemi linearnih jednačina sa dve nepoznate*, obrađuje se tema *Linearna funkcija*, u okviru koje se učenici upoznaju sa linarnim funkcijama i njihovim grafikom.

III Informatika: Za učenike osmog razreda su, u okviru teme *Digitalna pismenost*, predviđena tri časa namenjena uvođenju koncepta veštačke inteligencije. Učenici se prvo upoznaju sa pojmom veštačke inteligencije, ulozi veštačke inteligencije u sadašnjosti i očekivanja u budućnosti, etičkim pitanjima, i na kraju primerima primene veštačke inteligencije.

IV Informatika: Prema godišnjem planu rada, predviđena nastavna tema je *Projektna nastava*. Prema standardima postignuća, projekat počiva na načelu usmerenog mišljenja, koje podstiče aktivno učešće učenika u nastavi, razvijanje kritičkog i algoritamskog mišljenja, rešavanje realnih problema, saradničko učenje i primenu stečenih znanja u novim situacijama. Akcenat je na istraživačkim zadacima, analizi i interpretaciji podataka, kao i prezentovanju postignutih rezultata i sprovedenih aktivnosti.

5.3.1 Predlog časa

Trajanje: dvočas (čas informatike i zajednički čas matematike i informatike)

Mesto realizacije: kabinet informatike

Nastavne jedinice: informatika – *Projektni zadatak*, matematika – *Grafički način rešavanja sistema linearnih jednačina*

Nastavni oblik organizovanja rada: timski rad; učenici se raspoređuju u timove od po četiri člana, pri čemu po dva učenika rade za jednim računarom kako bi svi bili ravnomerno uključeni u aktivnosti.

Na početku časa nastavnik ukratko upoznaje učenike sa temom i ciljem časa, a zatim im dodeljuje zadatak za samostalan rad. Od učenika se očekuje da zadatke realizuju u softverskom alatu GeoGebra, sa kojim se do tada nisu susreli. Prethodno su informisani da se mogu osloniti isključivo na podršku veštačke inteligencije (ChatGPT). Zadatak je da nacrtaju dve prave u istom koordinatnom sitemu, pri čemu jednu treba da oboje plavom, a drugu crvenom bojom. Treba da predstave sva tri moguća slučaja u kome se mogu naći dve prave u ravni. Uz svaki dobijeni grafik treba dodati komentar o broju zajedničkih tačaka nacrtanih pravih. Takođe, u slučaju kada se prave seku, potrebno je pronaći način kako da GeoGebra odredi koordinate presečne tačke.

Učenici se unutar tima dogovaraju i raspodeljuju zaduženja tako da svaki član preuzme deo aktivnosti.

Po isteku predviđenog vremena, predstavnik svakog tima prezentuje rezultate rada svoje grupe, uključujući i opis postupka dolaženja do rešenja, te iznosi utiske tima o tome kako je izgledao rad na potpuno novom sadržaju bez neposredne pomoći nastavnika. Očekivano je da će učenici do rešenja doći na različite načine, u zavisnosti od komunikacije sa veštačkom inteligencijom, pa se može desiti da jedni prave konstruišu preko zadatih tačaka, drugi kao grafike jednačina, a treći kao grafik linearne funkcije. Upravo zato je predstavljanje korišćenih postupaka dragoceno: učenici sagledavaju kako su, iako su radili isti zadatak, do cilja stigli različitim putevima, što podstiče razumevanje i širi uvid u mogućnosti primene alata.

Timovima koji završe zadatke u kraćem roku može se ponuditi i rad na zadacima naprednog nivoa – prikazivanje pravih pomoću parametara, čije se vrednosti pomoću klizača mogu menjati, pri čemu se promene direktno odražavaju na položaj pravih u ravni.

Iako učenici imaju zadatak da u istoj koordinatnoj ravni pomoću GeoGebre nacrtaju po dve prave, u sva tri moguća odnosa, ipak se na prvom času namerno izostavlja eksplicitno pominjanje sistema linearnih jednačina. Fokus je usmeren na ovladavanje novim softverskim alatom uz podršku veštačke inteligencije. Svakako, ovaj čas je ujedno i priprema za realizaciju narednog časa matematike, na kome je predviđena nastavna jedinica *Grafički način rešavanja sistema linearnih jednačina*.

Drugi čas se takođe realizuje u kabinetu informatike. U uvodnom delu časa nastavnica matematike objašnjava grafičku metodu rešavanja sistema linearnih jednačina:

- podseća učenike na grafike linearnih funkcija, koje su prethodno obrađene na časovima;

- postupno uvodi grafik linearne jednačine sa dve nepoznate, pri čemu ukazuje na tri osnovne mogućnosti: prave paralelne sa apscisnom osom, prave paralelne sa ordinatnom osom i prave koje nisu paralelne nijednoj osi;
- u centralnom delu izlaganja naglašava da se grafička metoda zasniva na činjenici da se skup rešenja svake linearne jednačine može predstaviti kao skup tačaka u Dekartovom koordinatnom sistemu, dok je skup rešenja sistema linearnih jednačina jednak preseku skupova rešenja svih jednačina sistema.

Nakon objašnjenja, učenici u softverskom alatu GeoGebra grafički rešavaju zadate sisteme linearnih jednačina sa dve nepoznate i u svoje sveske zapisuju dobijena rešenja.

U zadacima osnovnog i srednjeg nivoa su sistemi koji imaju dve jednačine čiji su grafički prikazi prave.

Zadaci naprednog nivoa uključuju i mogućnost da jedna ili obe jednačine u sistemu budu u nekom od oblika: $0x + 0y + c = 0, c \neq 0$ ili $0x + 0y = 0$. Učenicima je dozvoljeno da koriste pomoć veštačke inteligencije pri određivanju rešenja naprednog nivoa.

Prema planu i programu, naredni čas matematike predviđen je za uvežbavanje rešavanja sistema linearnih jednačina grafičkom metodom. Na tom času učenici imaju priliku da razvijaju motoričke veštine, crtajući grafike pravih u svoje sveske uz pomoć geometrijskog pribora.

Prednosti koje nastavi matematike može doneti korelacija sa informatikom ogledaju se u povećanoj motivaciji i angažovanosti učenika, efikasnijem rešavanju zadataka, kao i u poboljšanoj vizuelizaciji, koja olakšava razumevanje različitih situacija prikazanih putem grafika sistema jednačina.

Takođe, upoznavanje sa GeoGebrom može podstaći učenike da koriste ovaj alat kako bi lakše vizualizovali i razumeli geometrijska tela koja se izučavaju u osmom razredu.

Poglavlje 6

Zaključak

Kroz rad naglašen je značaj prvih susreta učenika sa matematikom, posebno u razrednoj nastavi, gde se postavljaju temelji za razvoj sposobnosti formalizacije teksta, odnosno pretvaranje verbalno opisanih situacija u odgovarajuće matematičke modele i jednačine. Tokom celokupnog obrazovanja neophodno je stalno ponavljanje i osvežavanje prethodno stečenog gradiva, jer se matematičko znanje kontinuirano nadograđuje i proširuje.

Prikazana je raznovrsnost situacija u kojima se sistemi jednačina mogu primenjivati tokom osnovnoškolskog obrazovanja, kao i različiti pristupi njihovom rešavanju, sve u funkciji kvalitetnijeg i trajnijeg usvajanja gradiva. Nastavnici imaju širok izbor problemskih zadataka koji se mogu prilagoditi uzrastu i prethodno stečenim znanjima učenika. Posebno je značajno da zadaci budu bliski interesovanjima učenika, jer to podstiče motivaciju – ključan preduslov za efikasno učenje.

Takav pristup otvara prostor i za razvijanje međupredmetne korelacije, naročito sa informatikom, čiji softverski alati mogu doprineti vizualizaciji i dubljem razumevanju matematičkih koncepata. Promišljeno kombinovanje tradicionalnih i savremenih metoda, uz kontinuiranu podršku nastavnika i aktivno korišćenje dostupnih resursa, omogućava učenicima da razvijaju samostalnost, steknu trajnije znanje i budu osposobljeni za rešavanje složenijih problemskih situacija u narednim fazama školovanja.

Biografija

Ljubica Tadić rođena je 8. februara 1975. godine u Somboru.

Završila je OŠ „22. oktobar“ u Bačkom Monoštoru, a potom i gimnaziju „Veljko Petrović“ u Somboru. Akademsko obrazovanje podrazumeva završetak Visoke poslovne škole u Novom Sadu, a potom i Tehničkog fakulteta „Mihajlo Pupin“ u Zrenjaninu, gde stiče zvanje profesora informatike. Zbog nemogućnosti da dođe do zaposlenja u struci koju voli, nastavlja školovanje i upisuje Prirodno – matematički fakultet u Novom Sadu, na smeru integrisane dvopredmetne studije, za buduće zvanje diplomirani profesor matematike i informatike – master. Položila je ispite predviđene nastavnim planom i programom, sa prosečnom ocenom 9,79 i time stekla uslov za odbranu ovog master rada.

Zaposlena je u OŠ „Petefi Šandor“, Novi Sad, kao nastavnik informatike i računarstva.

Literatura

[1] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Algebra 2, teorija i zadaci*. Novi Sad: Symbol, 2011.

[2] S. Milić, *Elementi algebre*. Novi Sad: Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 1984.

[3] V. Jevremović, *Sistemi linearnih jednačina* (2008). Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

http://operator.pmf.ni.ac.rs/www/pmf/publikacije/Mii/2008-2009/broj%201%20sveska%201-2/mii1-1.pdf

[4] A. Lipkovski, *Sistemi linearnih jednačina u osmom razredu osnovne škole*, diplomski rad. Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 2018.

[5] M. Juraić, *Povijest matrica i determinanti* (2009). Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

https://matematickitalent.mk/uploads/books/9_7v8FW8a0Ob1GgtpPL8Gw.pdf]

[6] J. Bašić, *Metoda lažne pretpostavke u početnoj nastavi matematike*, diplomski rad. Pedagoški fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2008.

[7] Škola za ljubitelje matematike Integral, *Rešavanje problemskih zadataka metodom lažne pretpostavke za 2. Razred osnovne škole* (2020). Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

https://www.dms-valjevo.org.rs/wp-content/uploads/2020/05/Resavanje-problemskih-zadataka-metodom-lazne-pretpostavke.pdf

[8] M. Janković, S. Kovačević, *Matematičarenje, za učenike III razreda osnovne škole, radna sveska sa rešenjima za dodatni rad iz matematike*. Čačak: Pčelica, 2015.

[9] S. Petrović, *Različiti zadaci za pripremu učenika za takmičenje iz matematike za III i IV razred* (2022). Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na: https://www.youtube.com/watch?v=nl8xB6Ji24U

[10] M. Milošević, *Mladi matematičari, zbirka rešenih zadataka za 3. razred osnovne škole* (2010). Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

https://zelenaucionica.com/wp-content/uploads/2017/10/zbirka-zadataka-za-dodatnu-iz-matematike.pdf

[11] *Rešavanje zadataka metodom pravougaonika*. Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na: https://www.diofant.org/FAJLOVI/INTEGRAL%20PDF/INTEGRAL%204/TEMA%204.4.%20METOD%20PRAVOUGAONIKA.pdf

[12] M. Janković, S. Kovačević, *Matematičarenje, za učenike IV razreda osnovne škole, radna sveska, zbirka zadataka i testovi sa rešenjima za dodatnu nastavu i matematičku sekciju*. Čačak: Pčelica, 2015.

[13] R. Božić, *Tri, četiri, sad! – zanimljivi zadaci iz matematike sa rešenjima za 3. i 4. razred*. Beograd: Škola plus, 2013.

[14] T. Malinović, D. Cvetković, D, Dimitrijević, *Zbirka problemskih zadataka iz matematike za osnovnu školu*. Vranje: Učiteljski fakultet, 1999.

[15] *Rešavanje zadataka metodom duži*. Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

https://bit.ly/43vpbBi

[16] R. Ručnov, *Metoda duži*. Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

https://uciteljiucenici.wordpress.com/materijal-za-rad/matematika/dodatna-nastava-4/metoda-duzi/

[17] Škola za ljubitelje matematike Integral, *Rešavanje problemskih zadataka metodom duži za 2. razred osnovne škole* (2020). Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

https://www.dms-valjevo.org.rs/wp-content/uploads/2020/05/Resavanje-problemskih-zadataka-metodom-duzi.pdf

[18] G. Vučinić, *Metoda pravougaonika* (2023). Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

https://bit.ly/47XeubW

[19] G. Popović, V. Stojanović, N. Vignjević, *Matematika 5, zbirka zadataka za peti razred osnovne škole*. Beograd: Matematiskop, 2018.

[20] V. Stojanović, *Matematika 5, udžbenik za peti razred osnovne škole*. Beograd: Matematiskop, 2018.

[21] S. Ješić, J. Blagojević, A. Rosić, *Zbirka zadataka iz matematike, za peti razred osnovne škole*. Beograd: Gerundijum, 2018.

[22] R. Kozar, J. Gaćeša, N. Ugrinov, A. Samardžić, *Domaći zadaci iz matematike, za učenike 5. razreda osnovne škole*. Novi Sad: Školska knjiga, 2015.

[23] N. Ikodinović, S. Dimitrijević, S. Milojević, N. Vulović, *Matematika 5, zbirka zadataka sa rešenjima*. Beograd: Klett, 2008.

[24] S. Ješić, T. Njaradi, J. Blagojević, *Zbirka zadataka iz matematike, za šesti razred osnovne škole*. Beograd: Gerundijum, 2019.

[25] S. Ješić, T. Njaradi, J. Blagojević, *Zbirka zadataka iz matematike, za sedmi razred osnovne škole*. Beograd: Gerundijum, 2020.

[26] Društvo matematičara Srbije, Globalni i operativni planovi za nastavni predmet matematika (2025). Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na: https://novisados.dms.rs/dokumenta

[27] V. Andrić, M. Stefanović, Đ. Golubović, V. Ćirović, *Matematika 8, udžbenik sa zbirkom zadataka za osmi razred osnovne škole*. Valjevo: Matematički klub Diofant, 2022.

[28] R. Stojković, J. Radovanović, *Matematika 8, udžbenik iz matematike za 8. Razred osnovne škole*. Beograd: Bigz školstvo, 2011.

[29] S. Ješić, D. Mišić, N. Babačev, *Matematika, za 8. razred osnovne škole*. Beograd: Gerundijum, 2010.

[30] D. Omrčen, B. Pešić, *Matematika, udžbenik sa zbirkom zadataka za 8. razred osnovne škole*. Beograd: Eduka, 2021.

[31] M. Stojsavljević-Radovanović, Lj. Vuković, *Matematika 8, udžbenik za osmi rared osnovne škole*. Beograd: Kreativni centar, 2020.

[32] N. Ikodinović, S. Dimitrijević, *Matematika 8, udžbenik za osmi razred osnovne škole*. Beograd: Klett, 2010.

[33] V. Stojanović, M. Kovačević, N. Vignjević, *Matematika 8, zbirka zadataka za osmi razred osnovne škole*. Beograd: Matematiskop, 2020.

[34] R. Karović, S. Ivanović, *Matematika 8, zbirka zadataka za osmi razred osnovne škole*. Beograd: Eduka, 2021.

[35] B. Jevremović, Lj. Vuković, J. Ćuković, *Matematika 8, zbirka zadataka za redovnu i dodatnu nastavu*. Beograd: Škola plus, 2013.

[36] R. Stojković, J. Radovanović, *Matematika 8, zbirka zadataka iz matematike za 8. razred osnovne škole*. Beograd: Bigz školstvo, 2011.

[37] S. Ješić, T. Njaradi, V. Miletić, A. Rosić, *Zbirka zadataka iz matematike, za osmi razred osnovne škole*. Beograd: Gerundijum, 2021.

[38] Ž. Ivanović, S. Ognjanović, *Matematika 8, zbirka zadataka sa rešenjima za 8. razred osnovne škole*. Beograd: Krug, 2006.

[39] R. Kozar, J. Gaćeša, N. Ugrinov, A. Samardžić, *Domaći zadaci iz matematike, za učenike 8. razreda osnovne škole*. Novi Sad: Školska knjiga, 2016.

[40] V. Stojanović, *Matematika 8, udžbenik za osmi razred osnovne škole*. Beograd: Matematiskop, 2020.

[41] M. Jovanović, T. Vukić, *Uloga dodatne nastave u podsticanju i razvoju darovitosti* (2018). Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

https://izdanja.filfak.ni.ac.rs/casopisi/2018/download/2904_0113e0ec4ede4d8e275e6f2d71034866

[42] V. Andrić, *Matematika X = 1236, priručnik za pripremanje za takmičenja učenika osnovnih škola od IV do VIII razreda*. Beograd: Krug, 2006.

[43] V. Stojanović, *Put do šampiona matematike, zbirka rešenih zadataka za sedmi i osmi razred*. Beograd: Matematiskop, 2017.

[44] UNESCO, *Guidelines for Inclusion: Ensuring Access to Education for All* (2005). Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000140224

[45] Ministarstvo prosvete, *Pravilnik o bližim uputstvima za utvrđivanje prava na individualni obrazovni plan, njegovu primenu i vrednovanje*. Službeni glasnik RS, br. 74/2018. Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

https://www.paragraf.rs/propisi/pravilnik-blizim-uputstvima-utvrdjivanje-prava-individualni-obrazovni-plan.html

[46] T. Njaradi, J. Blagojević, S. Ješić, *Temalji matiša 8, dodatno nastavno sredstvo za nastavu matematike u osmom razredu osnovne škole*. Beograd: Gerundijum, 2024.

[47] D. Stanojević, O. Todorović, i dr., *Obrazovni standardi za kraj obaveznog obrazovanja za nastavni predmet Matematika*. Beograd: Ministarstvo prosvete Republike Srbije, Zavod za vrednovanje kvaliteta obrazovanja i vaspitanja, 2010.

[48] N. Vidović, G. Stanojević, Z. Stuparević, V. Stanojević, Lj. Vračar, M. Stančić, *Matematika, zbirka zadataka za završni ispit – osnovna škola*. Beograd: Kreativni centar, 2015.

[49] Grupa autora, *Zbirka zadataka iz matematike za završni ispit u osnovnom obrazovanju i vaspitanju za školsku 2023/2024. godinu*. Beograd: Zavod za vrednovanje kvaliteta obrazovanja i vaspitanja; Privredno društvo Prosvetni pregled, 2024.

[50] Z. Mrkalj, *Pojam korelacije u metodici nastave* (2010). Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

https://metodickividici.ff.uns.ac.rs/index.php/MV/article/view/749/758

[51] Ministarstvo prosvete, *Pravilnik o standardima kompetencija za profesiju nastavnika i njihovog profesionalnog tazvoja*. Službeni glasnik RS, br. 5/2011. Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

https://bit.ly/4r6njcd

[52] D. Milošević, *GeoGebra u nastavi matematike-osnove rada u programu, priručnik sa radnim materijalom*. Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

https://onlineobuka.wordpress.com/wp-content/uploads/2014/12/geogebra-priruc48dnik.pdf

[53] R. Božić, J. Dedeić, S. Milićević, I. Kovačević, *Primena GeoGebre u nastavi matematike* (2020). Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

http://www.trend.uns.ac.rs/stskup/trend_2020/radovi/T1.3/T1.3-20.pdf

[54] A. Eremija, *Veštačka inteligencija u obrazovanju* (2024). Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

https://zuov.gov.rs/uvod-u-vestacku-inteligenciju/#8

[55] I. Koca Dagli, B. Šabanović, *Veštačka inteligencija u nastavnom procesu* (2025). Zbornik radova (str. 202), Univerzitet u Novom Pazaru. Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na: https://bit.ly/4i1wvKG

[56] J. Bhattacharya, *AI in Education Technology: A Statistical Overview* (2023). Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na: https://seosandwitch.com/ai-in-education-technology-stats/

[57] J. Spajić, B. Milić, D. Bošković, D. Lalić, *Veštačka inteligencija: Nova stvarnost u visokom obrazovanju* (2023). Pristupljeno: 10.11.2025. Dostupno na:

http://www.trend.uns.ac.rs/stskup/trend_2023/radovi/T2.3/T2.3-19.pdf

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	Master rad
Autor: **AU**	Ljubica Tadić
Mentor: **MN**	Dr Petar Đapić
Naslov rada: **NR**	Sistemi jednačina tokom prvog i drugog vaspitno-obrazovnog ciklusa
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	srpski / engleski
Zemlja publikovanja: **ZP**	Srbija
Uže geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2025
Izdavač: **IZ**	Autorski reprint
Mesto i adresa: **MA**	Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Fizički opis rada: **FO**	broj poglavlja/broj strana/broj citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga 6 / 96 / 57 / 1 / 24 / 3 / 0
Naučna oblast: **NO**	Matematika
Naučna disciplina: **ND**	Metodika nastave matematike
Predmetna odrednica/ ključne reči: **PO**	sistemi jednačina, matematika, problemski zadaci, osnovna škola
UDK	
Čuva se: **ČU**	Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, PMF-a u Novom Sadu
Važna napomena: **VN**	nema
Izvod: **IZ**	Tema rešavanja sistema jednačina zauzima važno mesto u matematičkom obrazovanju, jer predstavlja poveznicu između intuitivnog pristupa problemskim situacijama u nižim razredima i formalnog algebarskog aparata koji se uvodi kasnije. Iz tog razloga javila se potreba da se sagleda na koji način se ovom sadržaju pristupa kroz različite faze osnovnoškolskog obrazovanja, kao i da se sistematično prikažu metode i brojni primeri zadataka koje učenici ovog uzrasta mogu uspešno da primene.
Datum prihvatanja teme od NN veća: **DP**	5. novembar 2025.

Datum odbrane: **DO**	27. novembar 2025.
Članovi komisije: **KO**	
Predsednik:	Dr Rozalia Madaras Silađi, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	Dr Samir Zahirović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član, mentor:	Dr Petar Đapić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: **ANO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	Monograph publication
Type of record: **TR**	Textual printed material
Content code: **CC**	Master thesis
Author: **AU**	Ljubica Tadić
Mentor/comentor: **MN**	Petar Đapić, Ph.D.
Title: **TI**	Systems of Equations in Elementary and Middle School
Language of text: **LT**	Serbian (Latin)
Language of abstract: **LA**	English/Serbian
Country of publication: **CP**	Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2025
Publisher: **PU**	Author's reprint
Publication place: **PP**	Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Physical description: ***PD***	6 / 96 / 57 / 1 / 24 / 3 / 0
Scientific field: **SF**	Mathematics
Scientific discipline: **SD**	Teaching Methods in Mathematics
Subject/ Key words: **SKW** **UC**	systems of equations, mathematics, problem-solving tasks, elementary school
Holding data: **HD**	Library of Department of Matematics and and Informatics, Trg Dositeja Obradovića 4
Note: **N**	none
Abstract: **AB**	The topic of solving systems of equations holds an important place in mathematics education, as it represents a link between the intuitive approach to problem-solving in the lower grades and the formal algebraic framework introduced later. For this reason, it became necessary to examine how this content is approached throughout different stages of elementary education and to systematically present the methods and numerous examples of tasks that students at this level can successfully apply.
Accepted by the Scientific Board: **ASB**	5 November 2025
Defended on: **DE**	27 November 2025

Thesis defend board:
DB

President:	Dr Rozália Madarász Szilágyi, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Dr Samir Zahirović, Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member, mentor:	Dr Petar Đapić, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad