UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Vladimir Milošević

Posebni brojevi u kombinatorici: Stirlingovi, harmonijski i Katalanovi brojevi

-master teza-

Novi Sad, 2025

Predgovor

Brojevi koji su predmet proučavanja u ovom master radu imaju izuzetno značajnu ulogu u različitim oblastima matematike. Kroz istoriju su se pojavili kao prirodni rezultati problema iz kombinatorike, analize, teorije brojeva i diskretne matematike. Među njima se posebno izdvajaju *Stirlingovi brojevi*, *harmonijski brojevi* i *Katalanovi brojevi*, koji su predmet proučavanja ovog master rada.

Stirlingovi brojevi javljaju se u 18. veku u radu škotskog matematičara Džejmsa Stirlinga, u vezi sa analitičkim aproksimacijama i teorijom permutacija. Postoje dve vrste ovih brojeva — prve i druge vrste — koje imaju bogatu kombinatornu strukturu i pojavljuju se u razvijanju formula za n-tim stepenima promenljivih, kao i u funkcijama generisanja.

Harmonijski brojevi, poznati još od antičkih vremena, definišu se kao parcijalni zbirovi harmonijskog reda:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

a značajnu ulogu dobijaju u radovima Leonarda Ojlera u kontekstu divergentnih redova i zeta funkcije. Njihova veza sa logaritamskim funkcijama, zeta vrednostima i asimptotskim razvojem čini ih važnim objektom u analitičkoj teoriji brojeva i numeričkoj analizi.

Katalanovi brojevi su verovatno među najčešće susretanim brojevima u kombinatorici. Prvi ih je uočio Leonard Ojler, dok ih je Ežen Šarl Katalan popularizovao sredinom XIX veka. Oni se definišu formulom

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

i broje raznovrsne strukture: binarna stabla, ispravno zagrađene izraze, triangulacije mnogougla, Dyck-ove puteve, i mnoge druge. Tokom XX i XXI veka, Katalanovi brojevi su doživeli intenzivno proučavanje, naročito kroz radove Riordana, Fajneja, a zatim i Stenlija, koji je prikazao više od 200 različitih interpretacija ovih brojeva.

Cilj ovog rada je da se objedine osnovne osobine i međusobne veze između Stirlingovih, Harmonijskih i Katalanovih brojeva, kao i da se detaljno prouči jedna savremena generalizacija Katalanovih brojeva kao fokus istraživačkog dela. Posebna pažnja biće posvećena prikazu kombinatornih interpretacija generalizovanih Katalanovih brojeva $C_n^{(m)}$, kao i preciznoj analizi dokaza glavne teoreme iz jednog savremenog naučnog rada.

Raspored rada je sledeći:

- U prvom poglavlju razmatraju se Stirlingovi brojevi, njihove osobine i primene.
- U drugom poglavlju obrađuju se harmonijski brojevi, njihove granice i veze sa analitičkim funkcijama.
- Treće poglavlje posvećeno je klasičnim Katalanovim brojevima i njihovim kombinatornim interpretacijama.
- Četvrto poglavlje donosi istraživački deo — interpretaciju generalizovanih Katalanovih brojeva i detaljnu analizu izabranog naučnog rada.

Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Samiru Zahiroviću, na podršci, strpljenju i motivaciji tokom izrade ovog rada, kao i tokom čitavih master studija.

Zahvaljujem se i dr Petru Đapiću i dr Kristini Ago što su prihvatili da budu članovi komisije, te svojim sugestijama i predlozima doprineli kvalitetu ovog rada.

Mnogi profesori i asistenti koje sam tokom školovanja imao priliku da sretnem ostavili su trag u mom načinu razmišljanja, u pogledu na znanje, na trud, na suštinu učenja. Njihove rečenice, zadaci, primedbe i pohvale nisu bile samo deo nastavnog procesa — bile su putokazi na jednom dužem i dubljem putovanju ka razumevanju sveta kroz jezik matematike.

U tom duhu, podsećam se reči Ive Andrića: *"Od svega što čovek u životu ostavi iza sebe, najvažniji su tragovi dobrote."* Upravo takve tragove su ostavili oni koji su me učili, ispravljali i hrabrili — i za to im dugujem iskrenu zahvalnost.

Veliko hvala dugujem svom profesoru matematike iz srednje škole, Miloradu Beljiću, koji je svojim predanim radom i posvećenošću dodatno produbio moje interesovanje za matematiku. Na njegovim časovima bilo je podjednako mesta i za ozbiljno razmišljanje i za osmeh — spoj koji me je trajno inspirisao.

Tokom studija imao sam sreću da budem okružen sjajnim prijateljima, sa kojima sam delio kako obaveze i ispite, tako i mnogo smeha i pauza koje ćemo pamtiti celog života. Zajednički trenuci u čitaonici, neplanirane rasprave oko matematičkih zadataka i iskrena podrška u teškim danima ostaviće trajno mesto u mom sećanju. Vaše drugarstvo i vera u mene često su mi značili više nego što ste mogli da zamislite.

Neizmernu zahvalnost dugujem i svojoj porodici — majci Mariji, ocu Miroslavu, sestri Dragani, kao i svojoj supruzi Aleksandri i deci Milici i Ognjenu. Vaša podrška, ljubav i strpljenje bili su mi neprocenjiva snaga i oslonac tokom svih izazova.

Novi Sad, novembar 2025. Vladimir Milošević

Sadržaj

1 Stirlingovi brojevi **7**
1.1 Uvod 7
1.2 Stirlingovi brojevi druge vrste 7
1.3 Stirlingovi brojevi prve vrste 16

2 Harmonijski brojevi **26**
2.1 Uvod 26
2.2 Harmonijski brojevi višeg reda 39

3 Katalanovi brojevi **43**
3.1 Uvod 43
3.2 Kombinatorne interpretacije Katalanovih brojeva 45
3.2.1 Dyck-ovi putevi 45
3.2.2 Triangulacije konveksnog mnogougla 48
3.2.3 Izborni nizovi 49
3.2.4 Uređena stabla 50
3.2.5 Binarna stabla 51
3.3 Abelove granice i veza sa Dyck-ovim putanjama 58

4 Generalizacija Katalnovih brojeva **60**
4.1 Uvod 60
4.2 Pristup putem stabala i šetnji 61
4.2.1 Generalizacija: m-šetnje po stablima 62
4.3 Kombinatorne interpretacije generalizovanih Katalanovih brojeva 62
4.3.1 Struktura nivoa i posetska organizacija 63
4.3.2 Dopuštena m-označavanja 63
4.3.3 Formula za $C_n^{(m)}$ putem dopuštenih označavanja 65
Zaključak 72

Literatura **74**

Biografija **76**

Glava 1

Stirlingovi brojevi

1.1 Uvod

Stirlingovi brojevi predstavljaju jednu od centralnih tema u kombinatorici, jer se pojavljuju u različitim problemima prebrojavanja koji uključuju permutacije, particije, funkcije i raspodele objekata. Postoje dve osnovne vrste Stirlingovih brojeva: *Stirlingovi brojevi prve vrste* i *Stirlingovi brojevi druge vrste*, od kojih svaki ima svoju specifičnu kombinatornu interpretaciju i algebarsku ulogu.

Stirlingovi brojevi prve vrste označavaju broj permutacija skupa od n elemenata koje se sastoje od tačno k disjunktnih ciklusa. Ovi brojevi prirodno se pojavljuju u razvoju opadajućih faktorijela $x^{\underline{n}}$ po stepenima promenljive x, a imaju ključnu ulogu u transformacijama između običnih stepena i opadajućih (odnosno rastućih) stepena.

Stirlingovi brojevi druge vrste predstavljaju broj načina da se skup od n elemenata podeli na tačno k nepraznih i međusobno disjunktnih podskupova. Ovi brojevi imaju centralnu ulogu u kombinatorici, naročito u teoriji particija i prebrojavanja, a pojavljuju se i u formulama koje povezuju funkcije, rekurzivne relacije i generišuće funkcije.

Zahvaljujući svojoj univerzalnosti, Stirlingovi brojevi nalaze primenu u mnogim oblastima matematike: teoriji brojeva, analizi, numeričkoj matematici, računarstvu i statistici. Njihova algebarska struktura, rekurzivne formule i veze sa drugim važnim brojevima (kao što su harmonijski brojevi i Katalanovi brojevi) čine ih neizostavnim delom svake ozbiljne kombinatorne analize.

1.2 Stirlingovi brojevi druge vrste

Definicija 1.1 ***Particija skupa*** *S je familija $\{S_i \mid i \in I\}$ takva da važi:*

i) $\forall i \in I,\ S_i \neq \emptyset$ *i* $S_i \subseteq S$.

ii) $\forall i, j \in I$ *takvi da je* $i \neq j$, *važi* $S_i \cap S_j = \emptyset$.

iii) $\bigcup\limits_{i \in I} S_i = S$.

Podskupove S_i zovemo **blokovi particije**. U nastavku ovog rada će se podrazumevati da je S konačan skup koji ima n elemenata.

Definicija 1.2 *Broj svih particija na skup S ili broj relacija ekvivalencije na skupu S zovemo n-ti* **Belov broj** *i označava se sa B_n.*

Primer 1.3 *Particije skupa $S = \{1, 2, 3, 4\}$ su:*
$\{\{1, 2, 3, 4\}\}$,
$\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}, \{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}, \{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}, \{\{2, 3, 4\}, \{1\}\}$,
$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$,
$\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}$,
$\{\{2, 3\}, \{1\}, \{4\}\}, \{\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}\}, \{\{3, 4\}, \{1\}, \{2\}\}$,
$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$.
Što znači da je $B_4 = 15$.

Teorema 1.4 *Belovi brojevi zadovoljavaju rekurziju $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}$ skup svih particija od $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, a $\mathcal{F}_k$ skup particija od S u kojima je element n pokriven blokom veličine k. Po principu sume je $B_n = |\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_n| = \sum\limits_{k=1}^{n} |\mathcal{F}_k|$. Da bismo prebrojali particije iz $\mathcal{F}_k$, biramo $k-1$ elemenata iz $\{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ koje ćemo staviti u blok zajedno sa n, što možemo na $\binom{n-1}{k-1}$ načina. Za preostalih $n-k$ elemenata imamo B_{n-k} načina da izvršimo particiju. Po principu proizvoda je $|\mathcal{F}_k| = \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$. $\square$

Definicija 1.5 Stirlingovi brojevi druge vrste, *označeni sa $\left\{ {n \atop k} \right\}$, predstavljaju broj načina na koje se skup od n elemenata može podeliti na k nepraznih, disjunktnih podskupova.*

Stirlingovi brojevi druge vrste označavaju se ili simbolom $S(n, k)$, ili kao $\left\{ {n \atop k} \right\}$. U daljem tekstu koristićemo ovu drugu notaciju.

Primer 1.6 *Ako je $n = 4$, tada je $\left\{ {4 \atop 1} \right\} = 1$ jer postoji samo jedna particija skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ sa jednim blokom $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$, dalje $\left\{ {4 \atop 4} \right\} = 1$ jer postoji samo jedna particija skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ sa četiri bloka $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ zatim $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$ jer postoji sedam particija skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ sa dva bloka $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$, $\{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}, \{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}, \{\{2, 3, 4\}, \{1\}\}, \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$, i na kraju $\left\{ {4 \atop 3} \right\} = 6$ videti Primer 1.3.*

Iz ovog primera možemo zaključiti da za svaki ceo broj $n > 0$ važi:

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1,$$

jer postoji samo jedan način da skup od n elemenata podelimo na jedan blok, i

$$\left\{ {n \atop n} \right\} = 1,$$

jer postoji samo jedan način da skup od n elemenata podelimo na n blokova, pri čemu svaki blok sadrži tačno jedan element.

Ako je $n = 0$, tada važi:

$$\left\{ {0 \atop 1} \right\} = 0,$$

jer prazan skup, koji je kardinalnosti 0, ne može biti podeljen na jedan neprazan blok.

Slučaj $k = 0$ zahteva posebnu pažnju. Prihvatamo definiciju prema kojoj postoji tačno jedan način da se prazan skup podeli na nula nepraznih delova, što implicira da važi:

$$\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1.$$

Nasuprot tome, za neprazan skup potrebno je da postoji barem jedan deo, te stoga za $n > 0$ važi:

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0.$$

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = 0, \qquad \text{za } k > n.$$

Tvrđenje 1.7 *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada za Stirlingove brojeve druge vrste važi:*

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1.$$

Dokaz. Razmotrimo particiju n-članog skupa S na dva neprazna bloka. Neka je particija oblika $\{A, A^C\}$, gde je $A \subset S$ neprazan podskup, a $A^C = S \setminus A$ njegov komplement. Podskup A možemo izabrati na $2^n - 2$ načina, jer oba bloka moraju biti neprazna (isključujemo $A = \emptyset$ i $A = S$).

Međutim, zamena uloga A i A^C daje istu particiju, pa je svaka particija prebrojana dva puta. Stoga, ukupan broj particija je:

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1.$$

□

U primeru gde je $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$, rezultat se može mnogo brže dobiti korišćenjem formule $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 2^3 - 1 = 7$.

Tvrđenje 1.8 *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada za Stirlingove brojeve druge vrste važi:*

$$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}.$$

Dokaz. Particija n-članog skupa na $n - 1$ blokova može se svesti na izbor dva elementa koja ćemo staviti u isti blok, dok su svi ostali elementi u jednočlanim blokovima. Broj načina za izbor takva dva elementa iz skupa od n elemenata dat je binomnim koeficijentom $\binom{n}{2}$. Stoga važi:

$$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}.$$

□

Tvrđenje 1.9 *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada za Stirlingove brojeve druge vrste važi:*

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} = B_n$$

Dokaz. Desna strana predstavlja n-ti Belov broj, B_n, koji se definiše kao ukupan broj particija n-članog skupa. Leva strana, $\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$, broji particije istog skupa, ali prema broju blokova k.

Zbir svih Stirlingovih brojeva druge vrste za $k = 0, 1, \ldots, n$ upravo daje ukupan broj particija n-članog skupa, što pokazuje da su leve i desne strane jednake. □

Teorema 1.10 *Stirlingovi brojevi druge vrste zadovoljavaju sledeću rekurzivnu formulu:*

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\},$$

gde važi $n > 0$ i $k > 0$.

Dokaz. Neka je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Razmotrimo skup $\mathcal{F}$, koji sadrži sve particije skupa S na k blokova. Ovaj skup možemo podeliti na dva disjunktna podskupa, $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$, na sledeći način:

- $\mathcal{F}_1$ sadrži sve particije u kojima je $\{n\}$ zaseban blok,
- $\mathcal{F}_2$ sadrži sve particije u kojima $\{n\}$ nije zaseban blok.

Broj particija u $\mathcal{F}_1$ jednak je $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$, jer postoji bijekcija između particija skupa $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ na $k-1$ blokova i particija u $\mathcal{F}_1$. Ova bijekcija se uspostavlja dodavanjem ili uklanjanjem bloka $\{n\}$.

Za $\mathcal{F}_2$, broj particija je $k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$, što dokazujemo uspostavljanjem bijekcije između $\mathcal{F}_2$ i skupa svih particija skupa $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ na k blokova sa jednim istaknutim blokom. U particiji iz $\mathcal{F}_2$, element n se nalazi u jednom od k postojećih blokova. Uklanjanjem elementa n i označavanjem bloka iz kojeg je uklonjen kao istaknutog, uspostavljamo vezu sa odgovarajućom particijom skupa $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Obrnuto, element n možemo dodati u istaknuti blok kako bismo rekonstruisali particiju iz $\mathcal{F}_2$.

Na osnovu principa sume, ukupan broj particija skupa S na k blokova je:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = |\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}.$$

□

Ova formula omogućava postupno izračunavanje Stirlingovih brojeva druge vrste za različite vrednosti n i k, počevši od osnovnih slučajeva:

$$\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1, \quad \left\{ {n \atop 0} \right\} = 0 \text{ za } n > 0, \quad \left\{ {0 \atop k} \right\} = 0 \text{ za } k > 0.$$

Na osnovu ovih početnih vrednosti i rekurzivne formule, možemo konstruisati trougao Stirlingovih brojeva druge vrste. Trougao se gradi postepeno, red po red, gde svaki broj predstavlja rešenje formule za odgovarajuće n i k. Elementi trougla su prikazani u tabeli 1.1.

n	$\left\{ {n \atop 0} \right\}$	$\left\{ {n \atop 1} \right\}$	$\left\{ {n \atop 2} \right\}$	$\left\{ {n \atop 3} \right\}$	$\left\{ {n \atop 4} \right\}$	$\left\{ {n \atop 5} \right\}$	$\left\{ {n \atop 6} \right\}$	$\left\{ {n \atop 7} \right\}$	$\left\{ {n \atop 8} \right\}$	$\left\{ {n \atop 9} \right\}$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Tabela 1.1: Stirlingovi brojevi druge vrste $\left\{ {n \atop k} \right\}$ za $0 \leq n \leq 9$ i $0 \leq k \leq 9$

Važna interpretacija Stirlingovih brojeva odnosi se na koeficijente prelaza između različitih baza prostora polinoma. Standardnu bazu prostora polinoma čine monomi:

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}.$$

Pored standardne baze, opadajući i rastući faktorijeli takođe formiraju baze prostora polinoma:

$$\mathcal{B}_R = \{1, x^{\overline{1}}, x^{\overline{2}}, x^{\overline{3}}, \dots\} \quad \text{i} \quad \mathcal{B}_O = \{1, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, x^{\underline{3}}, \dots\},$$

gde su opadajući i rastući faktorijeli definisani na sledeći način:

$$x^{\underline{k}} = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \dots \cdot (x-k+1), \quad x^{\underline{0}} = 1,$$
$$x^{\overline{k}} = x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot \dots \cdot (x+k-1), \quad x^{\overline{0}} = 1.$$

Stirlingovi brojevi se prirodno javljaju kao koeficijenti u transformacijama između ovih baza, čineći ih značajnim u analizi polinoma i kombinatornim primenama.

Jedan od značajnih rezultata koji povezuje standardnu bazu monoma sa bazom opadajućih faktorijela dat je sledećom teoremom. Ova formula pokazuje da se monom x^n može izraziti kao linearna kombinacija opadajućih faktorijela, pri čemu su koeficijenti upravo Stirlingovi brojevi druge vrste. Rezultat je od posebnog značaja u kombinatornoj analizi i analizi polinoma, jer omogućava prelazak između baza prostora polinoma i time povezuje algebarske i kombinatorne pristupe u proučavanju polinomskih funkcija.

Primer 1.11 *Razvoj stepena x^4 u bazi opadajućih i rastućih faktorijela.*

Opadajući faktorijel. Za $n = 4$ imamo

$$x^{\underline{4}} = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.$$

Korišćenjem Stirlingovih brojeva druge vrste dobijamo razvoj

$$x^4 = x^{\underline{4}} + 6\,x^{\underline{3}} + 7\,x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.$$

Rastući faktorijel. Za rastući faktorijel reda četiri važi

$$x^{\overline{4}} = x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x.$$

Upotrebom Stirlingovih brojeva druge vrste (sa znakom) dobijamo razvoj

$$x^4 = x^{\overline{4}} - 6\,x^{\overline{3}} + 7\,x^{\overline{2}} - x^{\overline{1}}.$$

Teorema 1.12 *Neka je $n \geq 0$ ceo broj. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ važi:*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}},$$

Dokaz. Dokazaćemo tvrdnju matematičkom indukcijom. Za početak, posmatrajmo osnovni slučaj kada je $n = 0$:

$$x^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \left\{ {0 \atop k} \right\} x^{\underline{k}},$$

što je očigledno tačno jer je $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$.

Pretpostavimo sada da tvrdnja važi za n, tj. da je:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}.$$

Pokazaćemo da važi i za $n+1$.

Znamo da je:

$$x^{\underline{n+1}} = x^{\underline{n}} \cdot (x-n),$$

jer je:

$$x^{\underline{n+1}} = x \cdot (x-1) \cdot \dots \cdot (x-n).$$

Pomnožimo obe strane relacije induktivne pretpostavke sa x:

$$x \cdot x^n = x \cdot \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}.$$

Iz distributivnosti množimo svaki član sume:

$$x \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x \cdot x^{\underline{k}}.$$

Znamo da je:

$$x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + k \cdot x^{\underline{k}},$$

pa zamenom dobijamo:

$$x \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \left(x^{\underline{k+1}} + k \cdot x^{\underline{k}} \right).$$

Razdvojimo sumu na dva dela:

$$x \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} k \cdot x^{\underline{k}}.$$

Menjanjem indeksa u prvoj sumi ($k \to k-1$), prva suma postaje:

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ {n \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}}.$$

Druga suma ostaje nepromenjena:

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} k \cdot x^{\underline{k}}.$$

Spajanjem obe sume dobijamo:

$$x \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\left\{ {n \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n \atop k} \right\} \right) x^{\underline{k}}.$$

Na osnovu teoreme 1.10 Stirlingovih brojeva druge vrste, ovo je upravo:

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ {n+1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}}.$$

Time je dokaz završen.

□

Drugim rečima, Stirlingovi brojevi druge vrste predstavljaju koeficijente u razvoju običnih stepena kroz bazu opadajućih faktorijela.

Teorema 1.13 *Za svaki ceo broj $n \geq 0$ i realan broj x, običan stepen x^n može se izraziti preko rastućih faktorijela $x^{\overline{k}}$ kao:*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}},$$

Dokaz. Dokazaćemo formulu matematičkom indukcijom.

Za $n = 0$, leva strana je:

$$x^0 = 1.$$

Desna strana:

$$\sum_{k=0}^{0} \left\{ {0 \atop k} \right\} (-1)^{0-k} x^{\overline{k}} = \left\{ {0 \atop 0} \right\} (-1)^0 x^{\overline{0}} = 1,$$

jer je $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$ i $x^{\overline{0}} = 1$. Dakle, osnovni slučaj je tačan.

Pretpostavimo da tvrdnja važi za neki $n \geq 0$, tj. da je:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}.$$

Pokazaćemo da važi i za $n+1$.

Znamo da je:

$$x^{n+1} = x \cdot x^n.$$

Koristeći induktivnu pretpostavku za x^n, dobijamo:

$$x^{n+1} = x \cdot \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}.$$

Množenjem sa x, svaka suma postaje:

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} \big(x^{\overline{k+1}} - k \cdot x^{\overline{k}} \big),$$

gde smo koristili identitet:

$$x \cdot x^{\overline{k}} = x^{\overline{k+1}} + k \cdot x^{\overline{k}}.$$

Razdvojimo sumu na dva dela:

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k+1}} - \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} k \cdot x^{\overline{k}}.$$

Prvu sumu dobijamo menjanjem indeksa $k \to k-1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ {n \atop k-1} \right\} (-1)^{n+1-k} x^{\overline{k}}.$$

Druga suma ostaje:

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} k \cdot x^{\overline{k}}.$$

Na osnovu rekurzivne formule za Stirlingove brojeve:

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n \atop k} \right\},$$

spajanjem obe sume dobijamo:

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ {n+1 \atop k} \right\} (-1)^{n+1-k} x^{\overline{k}}.$$

□

Lema 1.14 *Za opadajuće i rastuće faktorijele važi sledeća relacija:*

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\overline{n}},$$

Dokaz. $x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) = (-1)^n(-x)(-x+1)(-x+2)\dots(-x+n-1) = (-1)^n(-x)^{\overline{n}}$ □

Tvrđenje 1.15 *Za celobrojne vrednosti $n \geq 0$, $m \geq 0$, i $1 \leq m+1 \leq n+1$, važi sledeći identitet:*

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\}.$$

Dokaz. Leva strana identiteta $\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\}$ predstavlja broj particija skupa $\{1, 2, \dots, n+1\}$ na $m+1$ nepraznih blokova. Desna strana, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\}$, takođe broji isti broj particija, ali na drugačiji način. Dokazaćemo njihovu jednakost

posmatrajući element $n+1$ u particiji. Postoje dva slučaja:
Slučaj 1: Element $n+1$ je u jednočlanom bloku.

- U ovom slučaju, preostalih n elemenata ($\{1, 2, \ldots, n\}$) treba podeliti na m nepraznih blokova. - Broj takvih particija je $\left\{ {n \atop m} \right\}$. Dodavanjem elementa $\{n+1\}$ kao posebnog bloka, dobijamo particiju na $m+1$ blokova. - Ovaj slučaj odgovara članu desne strane kada je $k = n$:

$$\binom{n}{n} \cdot \left\{ {n \atop m} \right\} = \left\{ {n \atop m} \right\}.$$

Slučaj 2 Element $n+1$ nije u jednoelmentnom bloku.

- U ovom slučaju, biramo $k < n$ elemenata iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Broj načina za izbor k elemenata je $\binom{n}{k}$. - Odabrani k elemenata podelimo na m nepraznih blokova, što je moguće na $\left\{ {k \atop m} \right\}$ načina. - Preostalih $n-k$ elemenata, zajedno sa elementom $n+1$, čine poseban blok. Na ovaj način dobijamo $m+1$ blokova. - Ovaj doprinos je:

$$\binom{n}{k} \cdot \left\{ {k \atop m} \right\}, \quad \text{za } k \geq m.$$

Slučaj kada $k < m$:

- Ako je $k < m$, nije moguće formirati m nepraznih blokova, pa je $\left\{ {k \atop m} \right\} = 0$. Dakle, doprinos desne strane u ovom slučaju je nula. Time je dokaz završen.

□

Primer 1.16 *Broj načina da se n različitih loptica rasporedi u k različitih kutija je $k! \left\{ {n \atop k} \right\}$.*

Razmotrimo problem raspoređivanja n različitih loptica u k različitih kutija tako da nijedna kutija ne ostane prazna. Ovaj postupak prirodno vodi do kombinatorne interpretacije Stirlingovih brojeva druge vrste.

Korak 1: Particije loptica.

Najpre podelimo n različitih loptica na k nepraznih podskupova. To se može uraditi na

$$\left\{ {n \atop k} \right\}$$

načina, što je upravo broj particija n-elementnog skupa na k nepraznih delova.

Korak 2: Raspoređivanje podskupova u kutije.

Pošto smo formirali k nepraznih podskupova, svaki od njih treba smestiti u jednu od k različitih kutija. Kako se kutije razlikuju, broj načina da se podskupovi rasporede u kutije jednak je

$$k!,$$

jer odgovara broju permutacija k podskupova.

Ukupni broj načina.

Kombinovanjem broja particija i broja načina da se ovi podskupovi rasporede u kutije dobijamo da je ukupan broj načina da se n loptica rasporedi u k različitih nepraznih kutija jednak

$$k! \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Primer 1.17 *Broj načina da se s različitih loptica rasporedi u t identičnih kutija (dozvoljene su i prazne kutije), odnosno ekvivalentno, broj particija skupa* $[s]$ *na t ili manje delova, dat je sledećom formulom:*

$$\sum_{k=0}^{t} \left\{ {s \atop k} \right\}.$$

Pošto se obrazloženje ovog primera neposredno zasniva na osnovnim svojstvima Stirlingovih brojeva druge vrste i predstavlja standardnu kombinatornu argumentaciju, ovde ga ne navodimo već ostavljamo čitaocu.

1.3 Stirlingovi brojevi prve vrste

U ovom poglavlju razmatramo Stirlingove brojeve prve vrste, koji određuju broj permutacija skupa s obzirom na unapred zadat broj ciklusa.

Definicija 1.18 *Funkcija* $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *koja je bijekcija naziva se* ***permutacija****.*

Postoji više načina kako da zapišemo permutaciju, uobičajeno je da se predstavi šemom:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ označava se sa S_n. Operacija kompozicije funkcija, definisana na skupu S_n, čini S_n grupom $(S_n, \circ)$ koja se naziva **simetrična grupa**.

Važnost simetrične grupe leži u njenom univerzalnom svojstvu: svaka konačna grupa reda n izomorfna je nekoj podgrupi simetrične grupe S_n. Ovo svojstvo čini simetrične grupe ključnim objektom proučavanja u teoriji grupa.

Definicija 1.19 *Ciklus* $(a_1\, a_2\, \ldots\, a_k)$ *je permutacija koja različite elemente* a_1, $a_2, \ldots, a_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *preslikava na sledeći način:*

$$a_1 \mapsto a_2, \quad a_2 \mapsto a_3, \quad \ldots, \quad a_{k-1} \mapsto a_k, \quad a_k \mapsto a_1,$$

dok sve ostale elemente preslikava u same sebe. Broj k naziva se dužinom ciklusa.

Za cikluse $\pi_1 = (a_1 a_2 a_3 \ldots a_k)$ i $\pi_2 = (b_1 b_2 b_3 \ldots b_m)$ kažemo da su **disjunktni** ako važi:

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\} \cap \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m\} = \emptyset.$$

Jedno od važnih svojstava disjunktnih ciklusa je da su komutativni u odnosu na operaciju kompozicije, tj. za disjunktne cikluse π_1 i π_2 važi:

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1.$$

Nasuprot tome, za opšte permutacije komutativnost u odnosu na kompoziciju ne mora važiti.

Primer 1.20 *Primer permutacije*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Permutacija π, zapisana kao proizvod disjunktnih ciklusa, izgleda ovako:

$$\pi = (1\,4\,6)\,(7\,8\,9)\,(2)\,(5)\,(3).$$

Kada permutaciju zapisujemo kao proizvod disjunktnih ciklusa, uključujemo i cikluse dužine jedan, iako oni predstavljaju identitetska preslikavanja.

Definicija 1.21 ***Stirlingov broj prve vrste*** $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ *predstavlja broj permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koje se mogu zapisati kao proizvod tačno k disjunktnih ciklusa.*

Drugim rečima, Stirlingov broj prve vrste $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ daje broj načina na koje možemo rasporediti n elemenata skupa na k disjunktnih ciklusa, uključujući i cikluse dužine jedan.

Primer 1.22 *Stirlingov broj prve vrste* $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11$ *jer postoji ukupno* 11 *permutacija skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ koje imaju tačno dva disjunktna ciklusa. Te permutacije su:*

$$\begin{array}{llll} (1\,2\,3)(4), & (1\,3\,2)(4), & (1\,2\,4)(3), & (1\,4\,2)(3), \\ (1\,3\,4)(2), & (1\,4\,3)(2), & (2\,3\,4)(1), & (2\,4\,3)(1), \\ (1\,2)(3\,4), & (1\,3)(2\,4), & (1\,4)(2\,3). & \end{array}$$

Ove permutacije ilustruju kako se elementi skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ mogu rasporediti u tačno dva disjunktna ciklusa različitih dužina.

Tvrđenje 1.23 *Za sve cele brojeve $n, k \geq 0$ važi:*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \geq \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}.$$

Dokaz. Svaka particija skupa na neprazne podskupove vodi do najmanje jednog uređenja elemenata u cikluse. Zbog toga važi nejednakost:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \geq \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}.$$

Jednakost u ovoj nejednakosti važi kada su svi ciklusi nužno jednočlani ili dvočlani, jer su u tim slučajevima ciklusi ekvivalentni podskupovima. To se dešava u sledećim specifičnim slučajevima:

- Kada je $k = n$, svaki element čini poseban jednočlani ciklus.
- Kada je $k = n - 1$, jedan ciklus je dvočlani, dok su preostali jednočlani.

U ovim slučajevima imamo:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}.$$

□

Tvrđenje 1.24 *Za ceo broj $n > 0$ važi:*

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!.$$

Dokaz. Elemente skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ možemo rasporediti na $n!$ načina kao uređenu n-torku. Međutim, kada posmatramo permutacije koje čine tačno jedan ciklus, treba da uzmemo u obzir da ciklične rotacije elemenata daju isti ciklus.

Na primer, ako n ljudi sede za okruglim stolom, permutacije koje dobijamo cikličnim pomeranjem svih n elemenata za jedno mesto (npr., $1 \to 2$, $2 \to 3$, $\ldots$, $n \to 1$) predstavljaju isti ciklus.

Dakle, svaka uređena n-torka generiše n identičnih ciklusa. Zbog toga je broj jedinstvenih cikličnih permutacija jednak:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Iz definicije Stirlingovih brojeva prve vrste, znamo da:

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$$

predstavlja broj permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ sa tačno jednim ciklusom. Prema gornjem zaključku, broj takvih permutacija je:

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!.$$

□

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1, & \text{ako } n = 0, \\ 0, & \text{ako } n > 0. \end{cases}$$

Ovo proizlazi iz definicije Stirlingovih brojeva prve vrste. Kada je $n = 0$ i $k = 0$, jedina mogućnost je identitetska permutacija sa 0 elemenata. Kada je $n > 0$, nije moguće formirati permutaciju sa 0 ciklusa.

Tvrđenje 1.25 *Za sve $n \geq 0$, važi:*

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!.$$

Dokaz. Tvrdnja proizlazi iz činjenice da Stirlingovi brojevi prve vrste $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ označavaju broj permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koje se sastoje od tačno k međusobno disjunktnih ciklusa.

Prema teoremi da se svaka permutacija konačnog skupa može jedinstveno, do redosleda ciklusa, zapisati kao proizvod disjunktnih ciklusa, sledi da se sve permutacije skupa sa n elemenata mogu klasifikovati prema broju ciklusa.

Ukupan broj permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ jednak je $n!$, a taj broj obuhvata sve permutacije sa k ciklusa za $k = 1, 2, \ldots, n$. Stoga važi:

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!.$$

□

Teorema 1.26 *Za sve $n, k \geq 1$, Stirlingovi brojevi prve vrste zadovoljavaju sledeću rekurzivnu formulu:*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}$ skup svih permutacija iz S_n koje imaju tačno k disjunktnih ciklusa. Podelimo ovaj skup na dva disjunktna podskupa:

- $\mathcal{F}_1$: skup permutacija iz $\mathcal{F}$ gde je element n sopstveni ciklus, tj. (n) čini ciklus dužine 1,
- $\mathcal{F}_2$: skup permutacija iz $\mathcal{F}$ gde n nije sopstveni ciklus, već je deo jednog od postojećih ciklusa.

Brojanje elemenata $|\mathcal{F}_1|$: U skupu $\mathcal{F}_1$, element n čini sopstveni ciklus (n). Preostalih $n-1$ elemenata treba rasporediti u $k-1$ disjunktnih ciklusa. Prema definiciji Stirlingovih brojeva prve vrste, broj takvih permutacija je:

$$|\mathcal{F}_1| = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}.$$

Brojanje elemenata $|\mathcal{F}_2|$: U skupu $\mathcal{F}_2$, element n nije sopstveni ciklus, već se pridružuje jednom od k postojećih ciklusa. Broj načina da preostalih $n-1$ elemenata rasporedimo u k ciklusa je:

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

S obzirom na to da element n može biti umetnut u bilo koji od postojećih ciklusa na više načina, za svaki ciklus dužine t, dodavanjem elementa n na bilo koje mesto unutar tog ciklusa dobijamo t različitih ciklusa, ukupno imamo $n-1$ načina umetanja. Stoga, broj permutacija u $\mathcal{F}_2$ je:

$$|\mathcal{F}_2| = (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

Ukupan broj permutacija sa k ciklusa je:

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

□

Rekurzivna formula za Stirlingove brojeve prve vrste:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix},$$

koristi se za računanje vrednosti svakog broja u trouglu Stirlingovih brojeva prve vrste. Počevši od osnovnih slučajeva:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1,$$

trougao se gradi postupnim računanjem prema navedenoj formuli.

n	$\left[{n \atop 0}\right]$	$\left[{n \atop 1}\right]$	$\left[{n \atop 2}\right]$	$\left[{n \atop 3}\right]$	$\left[{n \atop 4}\right]$	$\left[{n \atop 5}\right]$	$\left[{n \atop 6}\right]$	$\left[{n \atop 7}\right]$	$\left[{n \atop 8}\right]$	$\left[{n \atop 9}\right]$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

Tabela 1.2: Stirlingovi brojevi prve vrste $\left[{n \atop k}\right]$ za $0 \leq n \leq 9$ i $0 \leq k \leq 9$

Teorema 1.27 *Za ceo broj $n \geq 0$, rastući faktorijel $x^{\overline{n}}$ može se izraziti preko Stirlingovih brojeva prve vrste kao:*

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Dokaz. **Baza indukcije ($n = 0$):**
Za $n = 0$, prema definiciji rastućeg faktorijela:

$$x^{\overline{0}} = 1.$$

Desna strana postaje:

$$\sum_{k=0}^{0} \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} x^k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} x^0.$$

Iz definicije Stirlingovih brojeva prve vrste, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$. Dakle:

$$\sum_{k=0}^{0} \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} x^k = 1.$$

Baza indukcije je dokazana.

Induktivni korak:
Pretpostavimo da važi za neki $n \geq 0$:

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Pokažimo da važi i za $n+1$:

$$x^{\overline{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Po definiciji rastućeg faktorijela:

$$x^{\overline{n+1}} = x^{\overline{n}} \cdot (x+n).$$

Zamenom induktivne pretpostavke za $x^{\overline{n}}$:

$$x^{\overline{n+1}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \right) \cdot (x+n).$$

Koristimo distributivnost:

$$x^{\overline{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} n x^k.$$

Prvi član:

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} x^k.$$

Drugi član:

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} n x^k = \sum_{k=0}^{n} n \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Kombinujemo oba člana:

$$x^{\overline{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} x^k + \sum_{k=0}^{n+1} n \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Koristimo rekurzivnu formulu za Stirlingove brojeve prve vrste:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Zamenom dobijamo:

$$x^{\overline{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Zaključak: Po principu matematičke indukcije, dokazano je da za sve $n \geq 0$ važi:

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

□

Teorema 1.28 *Za svaki ceo broj $n \geq 0$, opadajući faktorijel $x^{\underline{n}}$ može se izraziti pomoću Stirlingovih brojeva prve vrste na sledeći način:*

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k.$$

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po n.

Baza indukcije ($n = 0$):
Za $n = 0$, prema definiciji opadajućeg faktorijela:

$$x^{\underline{0}} = 1.$$

Desna strana teoreme za $n = 0$ postaje:

$$\sum_{k=0}^{0} \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} (-1)^{0-k} x^k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (-1)^0 x^0.$$

Iz definicije Stirlingovih brojeva prve vrste, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$, pa je:

$$\sum_{k=0}^{0} \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} (-1)^{0-k} x^k = 1.$$

Baza indukcije je dokazana.

Induktivni korak:
Pretpostavimo da teorema važi za neki $n \geq 0$, tj.:

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k.$$

Pokažimo da važi i za $n + 1$:

$$x^{\underline{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n+1-k} x^k.$$

Po definiciji opadajućeg faktorijela:

$$x^{\underline{n+1}} = x^{\underline{n}} \cdot (x - n).$$

Zamenimo induktivnu pretpostavku za $x^{\underline{n}}$:

$$x^{\underline{n+1}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k \right) \cdot (x - n).$$

Primeni distributivnost:

$$x^{\underline{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} n x^k.$$

Prvi član:

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} (-1)^{n-(k-1)} x^{k}.$$

Drugi član:

$$-\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} n x^{k} = \sum_{k=0}^{n} n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n+1-k} x^{k}.$$

Kombinovanjem članova:

$$x^{\underline{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} (-1)^{n+1-k} x^{k} + \sum_{k=0}^{n} n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n+1-k} x^{k}.$$

Koristimo rekurzivnu formulu za Stirlingove brojeve prve vrste:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Tada dobijamo:

$$x^{\underline{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n+1-k} x^{k}.$$

Zaključak: Po principu matematičke indukcije, dokazano je da za svaki $n \geq 0$ važi:

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^{k}.$$

□

Definicija 1.29 *Kronekerov simbol δ_{nm} definisan je kao*

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n = m, \\ 0, & \text{ako je } n \neq m. \end{cases}$$

Teorema 1.30 *Za sve $n, m \geq 0$ važi*

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} = \delta_{nm}.$$

Dokaz. **Pomoćna formula za $x^{\underline{k}}$.** Iz Teoreme 1.26 imamo $x^{\overline{k}} = \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^{j}$. Za $x \mapsto -x$ dobijamo $(-x)^{\overline{k}} = \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} (-1)^{j} x^{j}$, a kako $(-x)^{\overline{k}} = (-1)^{k} x^{\underline{k}}$, sledi

$$x^{\underline{k}} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} x^{j}. \qquad (*)$$

Prvi identitet. Na osnovu $(*)$ možemo k zameniti sa n pa tako dobijamo

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \left(\sum_{m=0}^{k} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} x^{\underline{m}} \right),$$

gde smo za x^k koristili Teoremu 1.11 sa $n = k$. Zamenom redosleda sumiranja,

$$x^{\underline{n}} = \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{k=m}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} \right) x^{\underline{m}}.$$

Kako su $x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, \ldots, x^{\underline{n}}$ linearno nezavisni, koeficijenti moraju da se poklope, pa

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} = \delta_{nm}.$$

Drugi identitet. Iz Teoreme 1.11 sledi

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \left(\sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} x^m \right) \quad \text{(po } (*)\text{)}.$$

Preuređivanjem suma,

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{k=m}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{k-m} \right) x^m.$$

Upoređivanjem koeficijenata uz x^m dobijamo

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{k-m} = \delta_{nm}.$$

Pošto je $(-1)^{n-k} = (-1)^{n-m} (-1)^{m-k}$, sledi i traženi oblik

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} = (-1)^{n-m} \delta_{nm} = \delta_{nm}.$$

Time su obe jednakosti dokazane. □

Sledeću teoremu dajemo bez dokaza.

Teorema 1.31 (Klasični identiteti za Stirlingove brojeve) *Neka su $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Tada važe sledeći identiteti:*

1. $\begin{Bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix}.$

2. $\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$

3. $\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \begin{Bmatrix} k+1 \\ m+1 \end{Bmatrix} (-1)^{n-k}.$

4. $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} (-1)^{m-k}.$

5. $m! \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k}.$

6. $\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {k \atop m} \right\} (m+1)^{\underline{n-k}}.$

7. $\left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_{k=0}^{n} \left[{k \atop m} \right] n^{\underline{n-k}} \;=\; n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left[{k \atop m} \right].$

8. $\binom{n}{m} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{\underline{m-k}}.$

9. $n^{\underline{n-m}} = \sum_{k=m}^{n} \left[{n+1 \atop k+1} \right] \left\{ {k \atop m} \right\} (-1)^{\underline{m-k}}.$

Ovde ne navodimo dokaz ove teoreme zbog velikog broja primera, a primer pod 1. smo dokazali ranije.

Definicija 1.32 (Proširenje na cele indekse) *Stirlingovi brojevi druge vrste* $\left\{ {a \atop b} \right\}$ *definišu se za sve* $a, b \in \mathbb{Z}$ *kao jedino rešenje rekurzije*

$$\left\{ {a \atop b} \right\} = b \left\{ {a-1 \atop b} \right\} + \left\{ {a-1 \atop b-1} \right\}, \quad uz \quad \left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1, \quad \left\{ {a \atop 0} \right\} = 0 \ (a \neq 0).$$

Analogno, Stirlingovi brojevi prve vrste $\left[{n \atop k} \right]$ *su jedino rešenje*

$$\left[{n+1 \atop k} \right] = n \left[{n \atop k} \right] + \left[{n \atop k-1} \right], \qquad \left[{0 \atop 0} \right] = 1, \ \left[{n \atop 0} \right] = 0 \ (n \geq 1), \ \left[{0 \atop k} \right] = 0 \ (k \geq 1).$$

Sledeće tvrđenje dajemo bez dokaza.

Tvrđenje 1.33 *Za sve* $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *važi identitet*

$$\left\{ {-k \atop -n} \right\} = \left[{n \atop k} \right].$$

Glava 2

Harmonijski brojevi

2.1 Uvod

Harmonijski brojevi predstavljaju niz čiji se članovi dobijaju sabiranjem recipročnih vrednosti uzastopnih prirodnih brojeva počev od 1. Na primer, prvi harmonijski broj je 1, drugi je $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, treći je $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$, i tako dalje.

Ali zašto se zovu "harmonijski"? Odgovor leži u njihovoj vezi sa muzikom i ravnotežom, konceptima koji su duboko ukorenjeni u antičkoj matematici i filozofiji. Naziv "harmonijski" potiče od grčke reči *harmonia*, što znači sklad ili ravnoteža. Ovaj termin je prvobitno bio povezan sa muzičkom teorijom.

U staroj Grčkoj, filozofi poput Pitagore otkrili su da se muzički tonovi mogu opisati matematičkim odnosima. Na primer, ako uzmemo žicu na instrumentu, poput violine, i podelimo je na pola, dobičemo ton koji je oktavu viši od osnovnog tona – odnos dužina je $1 : 2$. Ako je podelimo na trećine, dobićemo kvintu, sa odnosom $2 : 3$, i tako dalje. Ovi odnosi su nazvani "harmonijski" jer su proizvodili ugodne, skladne zvuke. Harmonijski brojevi su dobili ime po ovoj ideji, jer njihova struktura $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ podseća na obrnute proporcije dužina žica koje proizvode harmonične tonove.

Istorijski gledano, Pitagora (oko 570–495. p.n.e.) i njegova škola su među prvima istraživali ove veze između matematike i muzike. Pitagorejci su verovali da su brojevi osnova svega u univerzumu, uključujući i harmoniju u prirodi i kosmosu. Iako Pitagora nije direktno "izmislio" harmonijske brojeve u smislu njihovog matematičkog zbira, on je postavio temelje za razumevanje njihovih svojstava kroz proučavanje muzičkih intervala. Kasnije, grčki matematičar Arhimed (287–212. p.n.e.) i drugi antički mislioci počeli su da analiziraju ove sume dublje, povezujući ih sa problemima u geometriji i fizici.

U srednjem veku, matematičari poput Nikole Orema (14. vek) počeli su sistematski da izučavaju harmonijske redove, primećujući da oni rastu veoma sporo i da nikada ne dostižu konačnu granicu – što je danas poznato kao divergencija harmonijskog reda. Ovo otkriće je bilo fascinantno, jer pokazuje da čak i beskonačan zbir "malih" delova može da "eksplodira" ka beskonačnosti.

Dakle, harmonijski brojevi nisu samo apstraktni matematički koncept – oni su most između muzike, prirode i matematike. Njihov naziv odražava ideju sklada, koju su drevni mislioci videli u svetu oko sebe, a njihova priča je putovanje od Pitagorinih žica do modernih analiza beskonačnih redova. Oni su

podsetnik da je matematika, u svojoj suštini, umetnost pronalaženja lepote u redu i ravnoteži.

Definicija 2.1 *Harmonijski broj reda n definisan je formulom:*

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \tag{2.1}$$

za svaki ceo broj $n \geq 1$, dok se po definiciji uzima $H_0 = 0$.

Ovi brojevi se toliko često pojavljuju u analizi algoritama da su informatičari morali uvesti posebnu notaciju za njih. Koristimo oznaku H_n, gde slovo "H" označava "harmonički" jer se ton talasne dužine $\frac{1}{n}$ naziva n-ti harmonik tona čija je talasna dužina 1.

Prve vrednosti harmonijskih brojeva date su u tabeli:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H_n	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{761}{280}$	$\frac{7129}{2520}$	$\frac{7381}{2520}$

Teorema 2.2 *H_n nikada nije ceo broj kada je $n > 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno: postoji neko $n > 1$ takvo da je H_n ceo broj. Neka je $H_n = k$, gde je k ceo broj. Tada imamo:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = k.$$

Neka je m najveći ceo broj takav da $2^m \leq n$. To znači da je $\frac{1}{2^m}$ član zbira H_n, dok $\frac{1}{2^{m+1}}$ nije, jer je $2^{m+1} > n$.

Označimo sa $D = \mathrm{NZS}(1, 2, \ldots, n)$ najmanji zajednički sadržalac brojeva od 1 do n. Tada možemo zapisati H_n kao razlomak:

$$H_n = \frac{a}{D},$$

gde je a ceo broj dat sa:

$$a = D \cdot 1 + D \cdot \frac{1}{2} + D \cdot \frac{1}{3} + \cdots + D \cdot \frac{1}{n}.$$

Po pretpostavci da je $H_n = k$, važi:

$$\frac{a}{D} = k \quad \text{odnosno} \quad a = k \cdot D.$$

Pošto je $2^m \leq n$, broj 2^m je faktor od D, pa je D deljiv sa 2^m. Napišimo $D = 2^m \cdot q$, gde je q ceo broj koji nije deljiv sa 2 (m je najveći ceo broj takav da 2^m deli D).

Sada posmatrajmo izraz za a:

$$a = D \cdot 1 + D \cdot \frac{1}{2} + D \cdot \frac{1}{3} + \cdots + D \cdot \frac{1}{n}.$$

Izdvojimo sabirak koji odgovara $\frac{1}{2^m}$:

$$D \cdot \frac{1}{2^m} = (2^m \cdot q) \cdot \frac{1}{2^m} = q.$$

Ovaj sabirak q je neparan broj, jer q nije deljiv sa 2.

Svi ostali sabirci $D \cdot \frac{1}{k}$ (za $k = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq 2^m$) su parni:

- Ako broj k nije stepen broja 2, ili jeste ali manji od 2^m (na primer $k = 2, 4, 8, \ldots, 2^{m-1}$), tada proizvod $D \cdot \frac{1}{k}$ sadrži činilac $\frac{2^m}{k}$, koji je pozitivan stepen broja 2.
- Ako k nije deljiv sa 2 (npr. $k = 1, 3, 5, \ldots$), onda $D \cdot \frac{1}{k}$ ima faktor 2^m, pa je opet paran.

Dakle, zbir svih ostalih sabiraka je paran broj. Tada je:

$$a = (\text{paran broj}) + q,$$

gde je q neparan, pa je a neparan broj.

Međutim, sa druge strane, $a = k \cdot D$, gde je $D = 2^m \cdot q$ deljiv sa 2^m (pa je paran za $m \geq 1$), a k je ceo broj. Proizvod parnog broja i celog broja mora biti paran, što znači da a mora biti paran.

Ovo je kontradikcija: a ne može istovremeno biti neparan i paran. Stoga, pretpostavka da je H_n ceo broj za $n > 1$ ne može biti tačna. Prema tome, H_n nikada nije ceo broj kada je $n > 1$. □

Očigledno da važi da je $H_n < H_{n+1}$.

Sada dajemo nekoliko primera kako nastaju harmonijski brojevi u jednostavnim situacijama.

Primer 2.3 (Trick sa kartama i harmonijski brojevi) *Razmotrimo trik sa kartama, inspirisan idejom R.T. Šarpa, koji ilustruje kako harmonijski brojevi prirodno nastaju u jednostavnim fizičkim situacijama. Imamo n karata i sto, a cilj je stvoriti najveći mogući izbacaj (overhang) tako što ćemo slagati karte preko ivice stola, uz poštovanje zakona gravitacije. Pretpostavljamo da su ivice karata paralelne ivici stola i da je svaka karta dužine* 2 *jedinice.*

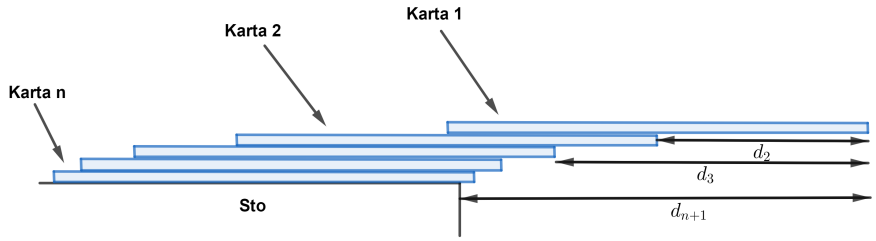
Za $n = 1$, maksimalni izbacaj postižemo kada je težište karte (u njenoj sredini) tačno iznad ivice stola. Pošto je dužina karte 2, izbacaj je:

$$d_2 = 1.$$

Za $n = 2$, postavljamo dve karte tako da težište obe karte zajedno leži iznad ivice stola. Težište dve karte je u sredini njihovog zajedničkog dela, gornja karta može izbačaj dužine 1 preko donje karte, a donja karta ima izbačaj $\frac{1}{2}$ preko ivice stola. Ukupan izbacaj je:

$$d_3 = 1 + \frac{1}{2}.$$

Ovaj obrazac sugeriše opštu metodu: za k karata, postavljamo ih tako da težište gornjih k karata leži tačno iznad ivice karte koja ih podržava (sto igra



Slika 2.1: Ilustracija slaganja karata.

ulogu za $k = n$). Neka je d_{k+1} rastojanje od krajnje ivice gornje karte do ivice stola kada imamo k karata. Tada važi rekurzivna formula:

$$d_{k+1} = \frac{(d_1 + 1) + (d_2 + 1) + \cdots + (d_k + 1)}{k}, \quad \text{za} \quad 1 < k \leq n,$$

uz početni uslov $d_1 = 0$ (kada nema karata iznad stola). Gde je $d_i + 1$ težište i-te karte.

Prepišimo ovo algebarski:

$$kd_{k+1} = k + d_1 + d_2 + \cdots + d_k.$$

Za $k - 1$:

$$(k-1)d_k = (k-1) + d_1 + d_2 + \cdots + d_{k-1}.$$

Oduzimanjem ovih jednačina dobijamo:

$$kd_{k+1} - (k-1)d_k = k - (k-1) + d_k = 1 + d_k,$$

pa je:

$$d_{k+1} = d_k + \frac{1}{k}, \quad \text{za} \quad k \geq 1.$$

Rešavanjem rekurzije sa $d_1 = 0$:

$$d_2 = 0 + \frac{1}{1} = 1, \quad d_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad d_4 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \ldots,$$

vidimo da je opšta formula:

$$d_{k+1} = H_k,$$

gde je $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$ harmonijski broj. Za n karata, ukupan izbacaj je:

$$d_{n+1} = H_n.$$

Ovo se može dokazati indukcijom:

- *Bazni korak*: Za $k = 1$, $d_2 = \frac{1}{1} = H_1$, što je tačno.
- *Induktivni korak*: Pretpostavimo da važi $d_k = H_{k-1}$. Tada:

$$d_{k+1} = d_k + \frac{1}{k} = H_{k-1} + \frac{1}{k} = H_k,$$

  što potvrđuje formulu.

Primetimo da je $H_4 = \frac{25}{12} > 2$, pa su četiri karte dovoljne da gornja karta potpuno pređe ivicu stola (dužine 2 jedinice). Za standardni špil od 52 karte, izbacaj je $H_{52} \approx 4.54$, odnosno oko 2.27 dužina karte.

Primer 2.4 (Crv na gumici i harmonijski brojevi) *Razmotrimo problem pod nazivom "Crv na gumici", koji ilustruje nastanak harmonijskih brojeva u dinamičkom kontekstu. Crv W kreće sa jednog kraja gumice dužine 1 metar (100 cm) i puže ka drugom kraju brzinom od 1 cm po minuti. Na kraju svake minute, gumica se isteže za dodatni 1 metar, pri čemu W održava svoj relativni položaj u odnosu na ukupnu dužinu gumice. Pretpostavljamo beskonačnu elastičnost gumice i zanemarujemo fizičke dimenzije crva.*

Posmatrajmo proces:

- Nakon 1. minute: W prepuzi 1 cm, gumica je duga 100 cm, pa je W na 1 cm od početka (1% dužine). Gumica se isteže na 200 cm, a W ostaje na 1% dužine, tj. na 2 cm od početka, sa 198 cm do cilja.

- Nakon 2. minute: W prepuzi još 1 cm, pa je na 3 cm od početka, a gumica je duga 200 cm (ostatak do cilja je 197 cm). Gumica se isteže na 300 cm, pa je položaj W-a $\frac{3}{200} \cdot 300 = 4.5$ cm od početka, a do cilja ostaje $300 - 4.5 = 295.5$ cm.

Opštije, označimo sa s_n ukupan udeo gumice koji je W prešao nakon n minuta, izražen kao deo početne dužine gumice (100 cm). Tokom k-te minute, gumica je duga $100k$ cm pre istezanja, a W prelazi 1 cm, što je $\frac{1}{100k}$ njenog trenutnog dela. Nakon istezanja, udeo ostaje isti. Ukupan udeo nakon n minuta je:

$$s_n = \frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \cdots + \frac{1}{100n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{100k} = \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{H_n}{100},$$

gde je $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ n-ti harmonijski broj.

Da li W ikada stiže do cilja? Na primer, $H_{100} \approx 5.187$, pa je $s_{100} \approx 0.05187 < 1$, ali $H_{10^{44}} \approx 101.9$, pa $s_{10^{44}} > 1$, što pokazuje da je potrebno između 10^{43} i 10^{44} minuta.

Razmotrimo sada "Supercrva" koji puže brzinom od 50 cm po minuti u istoj situaciji. Njegov udeo po minuti je $\frac{50}{100k} = \frac{1}{2k}$, pa je ukupan udeo nakon n minuta:

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{H_n}{2}.$$

Supercrv stiže do cilja kada $s_n \geq 1$, tj. $\frac{H_n}{2} \geq 1$ ili $H_n \geq 2$. Prvi harmonijski broj veći od 2 je $H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \approx 2.083$. Proverimo:

- Nakon 3 minuta: $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \approx 1.833$, pa $s_3 = \frac{11}{12} \approx 0.9167 < 1$. Dužina gumice je 400 cm, pređeno je $0.9167 \cdot 400 = 366.67$ cm, ostaje 33.33 cm.

- U 4. minuti: Pre istezanja, gumica je 400 cm, Supercrv prelazi preostalih 33.33 cm za $\frac{33.33}{50} \approx 0.6667$ minuta (40 sekundi). Dakle, Supercrv stiže za tačno 3 minuta i 40 sekundi.

Teorema 2.5 *Za svaki prirodan broj $n \geq 1$, broj permutacija $n+1$ objekata sa tačno dva ciklusa, označen sa $\left[{n+1 \atop 2}\right]$, zadovoljava:*

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n!H_n,$$

gde je $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ n-ti harmonijski broj.

Dokaz. Stirlingovi brojevi prve vrste $\left[{n \atop k}\right]$ predstavljaju broj permutacija n objekata koje se razlažu na tačno k ciklusa. Za $k = 2$, fokusiramo se na $\left[{n \atop 2}\right]$. Poznata rekurzivna formula za ove brojeve glasi:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}, \quad n \geq 1,$$

gde je $\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!$, jer je broj permutacija n objekata sa jednim ciklusom jednak broju ciklusa dužine n, što je $(n-1)!$. Dakle:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + (n-1)!.$$

Da bismo našli zatvoreni oblik, primenimo tehniku faktora sumacije kako bismo transformisali rekurziju u sumu koja vodi do harmonijskih brojeva. Podelimo obe strane sa $n!$:

$$\frac{\left[{n+1 \atop 2}\right]}{n!} = \frac{n\left[{n \atop 2}\right]}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!}.$$

Pojednostavimo desnu stranu:

- $\frac{n\left[{n \atop 2}\right]}{n!} = \frac{\left[{n \atop 2}\right]}{(n-1)!}$, jer $n! = n \cdot (n-1)!$,
- $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n \cdot (n-1)!} = \frac{1}{n}$.

Tako dobijamo:

$$\frac{\left[{n+1 \atop 2}\right]}{n!} = \frac{\left[{n \atop 2}\right]}{(n-1)!} + \frac{1}{n}.$$

Definišimo pomoćni niz $a_n = \frac{\left[{n \atop 2}\right]}{(n-1)!}$ za $n \geq 1$. Tada rekurzija postaje:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Početni uslov je:

$$a_1 = \frac{\left[{1 \atop 2}\right]}{(1-1)!} = \frac{0}{0!} = 0,$$

jer nema permutacija jednog objekta sa dva ciklusa.

Razvijmo ovu rekurziju eksplicitno:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + \frac{1}{1} = 0 + 1 = 1, \\
a_3 &= a_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\
a_4 &= a_3 + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{9}{6} + \frac{2}{6} = \frac{11}{6}, \\
a_5 &= a_4 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{22}{12} + \frac{3}{12} = \frac{25}{12}.
\end{aligned}$$

Opšti obrazac je:

$$a_{n+1} = a_1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = 0 + H_n = H_n.$$

Stoga:

$$a_{n+1} = \frac{\left[{n+1 \atop 2}\right]}{n!} = H_n,$$

pa množenjem sa $n!$ dobijamo:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n!H_n.$$

Alternativno, dokaz možemo potvrditi indukcijom:

- *Bazni korak*: Za $n = 1$, $\left[{2 \atop 2}\right] = 1! \cdot H_1 = 1$, što važi.
- *Induktivna hipoteza*: Pretpostavimo da $\left[{n \atop 2}\right] = (n-1)!H_{n-1}$ važi za neko $n \geq 1$.
- *Induktivni korak*: Iz rekurzije:

  $$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + (n-1)! = n \cdot (n-1)!H_{n-1} + (n-1)!.$$

  Faktorišemo $(n-1)!$:

  $$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)!(nH_{n-1} + 1).$$

  Po definiciji harmonijskog broja, $H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$, pa:

  $$nH_{n-1} + 1 = nH_{n-1} + n \cdot \frac{1}{n} = n\left(H_{n-1} + \frac{1}{n}\right) = nH_n.$$

  Dakle:

  $$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)! \cdot nH_n = n!H_n,$$

  što potvrđuje hipotezu za $n + 1$.

Oba pristupa (sumacija i indukcija) potvrđuju da je $\left[{n+1 \atop 2}\right] = n!H_n$, čime je teorema dokazana. □

Teorema 2.6 *Harmonijski red $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ divergira ka $+\infty$ kako $n \to \infty$. Preciznije, za svaki realan broj $M > 0$ postoji n takvo da $H_n > M$.*

Dokaz. Da bismo pokazali da $H_n \to \infty$, grupisaćemo članove harmonijskog reda prema stepenima broja 2. Definišimo grupe na sledeći način:

- Grupa 1: $\frac{1}{1}$ (1 član),
- Grupa 2: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (2 člana),
- Grupa 3: $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ (4 člana),

- Grupa 4: $\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{15}$ (8 članova),
- Opštije, Grupa k: $\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k-1}$ (2^{k-1} članova).

Broj članova u grupi k je 2^{k-1}, jer svaka grupa pokriva intervale između uzastopnih stepena broja 2 (npr. Grupa 3 ide od $2^2 = 4$ do $2^3 - 1 = 7$). Za n dovoljno veliko, H_n uključuje sve članove do određene grupe i deo sledeće.

Procenimo zbir unutar svake grupe:

- U grupi k, članovi su između $\frac{1}{2^{k-1}}$ (najmanji, na početku grupe) i $\frac{1}{2^k}$ (najveći, na kraju prethodne grupe, ali manji od sledećeg). Na primer:
- Grupa 2: $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$, gde je $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{2} < 1$,
- Grupa 3: $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$, gde je $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$ i $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

Zbir grupe k sa 2^{k-1} članova može se ograničiti:

$$2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} < \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{j} < 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Pojednostavimo:

- Donja granica: $2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{2^{k-1}}{2 \cdot 2^{k-1}} = \frac{1}{2}$,
- Gornja granica: $2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = 1$.

Dakle, za svaku grupu k:

$$\frac{1}{2} < \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{j} < 1.$$

Sada, za $n = 2^m - 1$ (kada su uključene sve grupe do m):

$$H_{2^m-1} = \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{2^m - 1}\right),$$

gde ima m grupa (Grupa 1 do Grupa m). Donja granica za H_{2^m-1} je:

$$H_{2^m-1} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + (m-1) \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{m-1}{2}.$$

Kako $m \to \infty$, $n = 2^m - 1 \to \infty$, pa:

$$H_{2^m-1} > \frac{m+1}{2} \to \infty.$$

Za proizvoljni n, izaberimo m tako da $2^{m-1} \leq n < 2^m$. Tada H_n uključuje bar $m - 1$ punih grupa plus deo sledeće, pa:

$$H_n \geq H_{2^{m-1}-1} > \frac{m}{2}.$$

Za bilo koji $M > 0$, izaberimo $m > 2M$, pa $H_n > M$. Stoga, $H_n \to \infty$, što dokazuje teoremu. $\square$

Divergencija H_n deluje kontraintuitivno jer svaki sledeći član $\frac{1}{n}$ postaje sve manji, sugerišući da bi suma mogla biti konačna. Ipak, ovaj dokaz otkriva snagu beskonačnog nagomilavanja malih doprinosa. Na primer, u problemu sa kartama, $H_{100} \approx 5.187$ znači izbacaj od preko 5 metara sa kartama dužine 2 metra, a u problemu sa crvom, $H_{10^4} > 9$ znači da crv prelazi gumicu nakon 10 hiljada minuta. Ova ideja inspirisala je drevne paradokse, poput Zenonovog o Ahilu i kornjači, gde beskonačni procesi izazivaju našu intuiciju o kretanju i beskonačnosti.

Harmonijski red $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ divergira ka beskonačnosti, ali njegov rast je spor i može se precizno ograničiti. U ovom odeljku formalizujemo granice H_n u smislu logaritamske funkcije, koristeći indukciju i geometrijsku interpretaciju.

Teorema 2.7 *Za svaki prirodan broj $n \geq 1$, harmonijski broj H_n zadovoljava sledeće granice:*

$$\frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2} < H_n \leq \lfloor \log_2 n \rfloor + 1,$$

gde $\lfloor x \rfloor$ označava ceo deo broja x. Ovo implicira da $H_n \to \infty$ logaritamski sporo kako $n \to \infty$.

Dokaz. Dokazaćemo granice indukcijom po k, gde $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$ predstavlja najveći ceo broj takav da $2^k \leq n$. Ova indukcija se odnosi na broj grupa u prethodnom dokazu divergencije H_n , ali ćemo je ovde prilagoditi za eksplicitne granice.

Definišimo $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ i posmatrajmo n u intervalima $2^k \leq n < 2^{k+1}$, gde je $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Donja granica: $H_n > \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2}$

Koristimo ideju grupisanja članova po stepenima 2:

- Za $n = 1$: $H_1 = 1$, $k = \lfloor \log_2 1 \rfloor = 0$,

  $$\frac{0+1}{2} = 0.5 < 1,$$

  što važi.

- Neka je sada $k \geq 1$ i uzmimo $n = 2^k$. Tada možemo da grupišemo članove po intervalima

  $$[1], \quad [2], \quad [3,4], \quad [5,6,7,8], \ \ldots, \ [2^{k-1}+1, \ldots, 2^k].$$

  Dakle,

  $$H_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right).$$

  Svaka grupa počev od druge sadrži tačno 2^{j-1} članova čiji su imenitelji u intervalu $\{2^{j-1}+1, \ldots, 2^j\}$, pa je svaki član veći od ili jednak $1/2^j$. Zato je zbir svake takve grupe strogo veći od

  $$2^{j-1} \cdot \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}.$$

Ima ukupno k takvih grupa (od imenitelja 2 pa do 2^k), pa dobijamo grubu donju procenu

$$H_{2^k} > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{k \text{ puta}} = 1 + \frac{k}{2} = \frac{k+2}{2}.$$

Za ovaj n imamo $\lfloor \log_2 n \rfloor = \lfloor \log_2 2^k \rfloor = k$, pa je

$$\frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2} = \frac{k+1}{2},$$

a dobijena nejednakost je čak i jača:

$$H_{2^k} > \frac{k+2}{2} > \frac{k+1}{2} = \frac{\lfloor \log_2 2^k \rfloor + 1}{2}.$$

- Za opšti n takav da
$$2^k \leq n < 2^{k+1},$$
važi $\lfloor \log_2 n \rfloor = k$ i, kako je niz (H_n) strogo rastući,
$$H_n \geq H_{2^k} > \frac{k+2}{2} > \frac{k+1}{2} = \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2}.$$
Dakle, donja granica važi za sve $n \geq 1$.

Gornja granica: $H_n \leq \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

Posmatrajmo n do najvećeg stepena 2:

- Za $n = 2^k$:
$$H_{2^k} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right).$$
Svaka grupa ima zbir manji od 1:
$$H_{2^k} < 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 1 + k,$$
gde ima $k+1$ grupa (od Grupe 1 do Grupe $k+1$). Pošto je $k = \lfloor \log_2 2^k \rfloor$, $H_{2^k} < k + 1$.

- Za $n < 2^{k+1}$: $H_n \leq H_{2^{k+1}-1} < (k+1) + 1 = k + 2$, ali moramo proveriti tačno $k+1$. Zapravo, $H_{2^{k+1}-1}$ ima $k+1$ grupa, pa:
$$H_{2^{k+1}-1} < k + 2,$$
ali za $n = 2^k$, $H_n < k + 1$ je previše strogo. Testirajmo: - $n = 3$: $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1.833$, $k = \lfloor \log_2 3 \rfloor = 1$, $k + 1 = 2$, $1.833 < 2$, - $n = 4$: $H_4 = 2.083$, $k = 2$, $k + 1 = 3$, $2.083 < 3$. Gornja granica $k + 1$ važi ako uzmemo najveću moguću grupu do n.

Indukcija po k:

- *Bazni korak*: $n = 1$, $k = 0$, $H_1 = 1$, $\frac{1}{2} < 1 \leq 1$, tačno.

- *Induktivni korak*: Pretpostavimo da za n sa $\lfloor \log_2 n \rfloor = k$ važi $\frac{k+1}{2} < H_n \leq k+1$. Za n' gde $2^{k+1} \leq n' < 2^{k+2}$, $k' = k+1$:

$$H_{n'} > H_{2^{k+1}-1} > \frac{(k+1)+1}{2} = \frac{k+2}{2},$$

i $H_{n'} \leq H_{2^{k+2}-1} < (k+1)+1 = k+2$, što potvrđuje granice.

Pošto $\lfloor \log_2 n \rfloor \to \infty$ kako $n \to \infty$, H_n divergira logaritamski sporo, čime je teorema dokazana. □

Geometrijska primedba: Veza sa prirodnim logaritmom

Harmonijski broj $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ može se posmatrati kao diskretni analog prirodnog logaritma $\ln n$, definisanog kao površina ispod krive $y = \frac{1}{x}$ na intervalu $[1, n]$. Geometrijski, H_n je suma površina pravougaonika širine 1 i visine $\frac{1}{k}$, dok je $\ln n$ integral

$$\int_1^n \frac{1}{x}\, dx.$$

Ovo poređenje sugeriše da $H_n \approx \ln n + \gamma$ (gde je γ Ojler–Maskeronijeva konstanta), što potvrđuje logaritamski rast i pruža finiju aproksimaciju od granica dobijenih indukcijom.

Primer 2.8 (Poređenje H_n i $\ln n$ putem površina) *Harmonijski broj $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ i prirodni logaritam $\ln n$ blisko su povezani, što možemo ilustrovati geometrijskim poređenjem površina. Razmotrimo površinu ispod krive $y = \frac{1}{x}$ od $x = 1$ do $x = n$, koja je data integralom:*

$$\int_1^n \frac{1}{x}\, dx = \ln n.$$

Ova površina je manja od zbira površina n pravougaonika, gde svaki pravougaonik ima širinu 1 i visinu $\frac{1}{k}$ za $k = 1, 2, \ldots, n$, što je upravo:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n.$$

Ovaj odnos ilustrovan na Slici 2.2 pokazuje da svaki pravougaonik (npr. od k do $k+1$ sa visinom $\frac{1}{k}$) pokriva veću površinu od dela krive ispod njega, jer je $\frac{1}{k} > \frac{1}{x}$ za $x \in (k, k+1)$. Stoga:

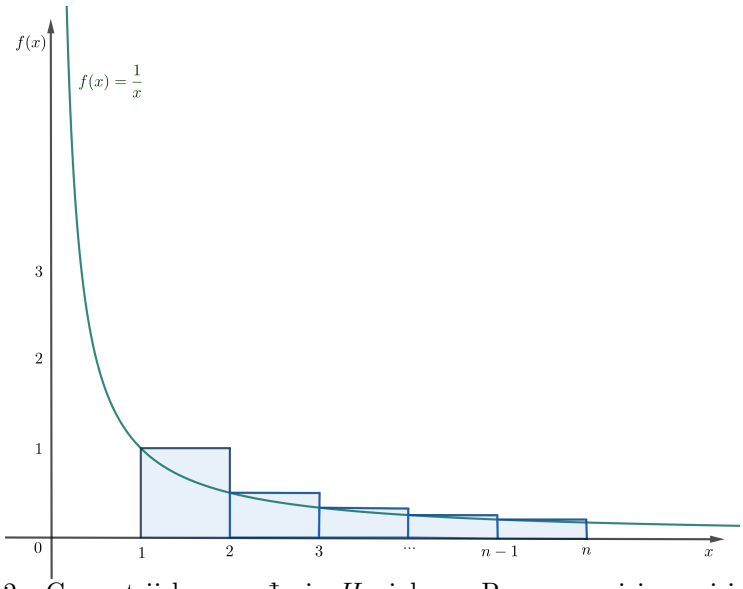
$$\ln n < H_n, \quad \text{za sve} \quad n \geq 2.$$

Ovaj rezultat je oštriji od prethodne donje granice izvedene grupisanjem po stepenima 2:

$$\frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2} < H_n \leq \lfloor \log_2 n \rfloor + 1,$$

jer je $\ln n$ veći od $\frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2}$ za velike n i pruža precizniju donju granicu. Na primer:

- Za $n = 4$: $\ln 4 \approx 1.386$, $\frac{\lfloor \log_2 4 \rfloor + 1}{2} = \frac{2+1}{2} = 1.5$, $H_4 \approx 2.083$, pa $1.386 < 2.083 < 1.5$ nije tačno, ali $\ln 4 < H_4$ važi.



Slika 2.2: Geometrijsko poređenje H_n i $\ln n$: Pravougaonici sa visinama $\frac{1}{k}$ prelaze preko krive $y = \frac{1}{x}$, dok je integral ispod krive manji.

- Za $n = 10$: $\ln 10 \approx 2.303$, $\frac{\lfloor \log_2 10 \rfloor + 1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$, $H_{10} \approx 2.929$, pa $2.303 < 2.929$.

Da bismo dobili gornju granicu, razmotrimo pravougaonike pomerene za jedan korak unazad, gde pravougaonik od $k-1$ do k ima visinu $\frac{1}{k}$. Tada je:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = H_{n+1} - 1,$$

a ova suma je manja od površine ispod $\frac{1}{x}$ od 1 do $n+1$:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n+1).$$

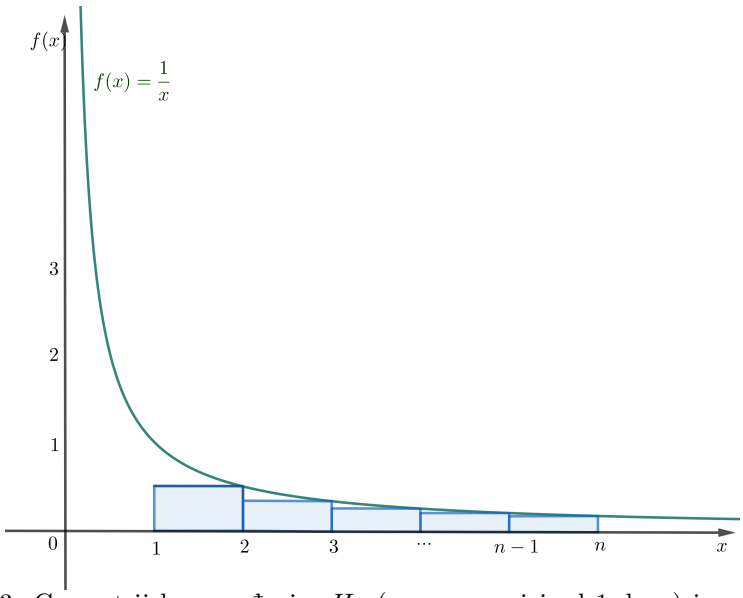
Stoga:

$$H_{n+1} - 1 < \ln(n+1), \quad \text{odnosno} \quad H_n < 1 + \ln n,$$

jer je $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$, a $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n$ za velike n. Ova gornja granica je oštrija od $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ za većinu n, npr. za $n = 10$: $1 + \ln 10 \approx 3.303 < 4$.

Ovaj pristup potvrđuje da H_n raste logaritamski, sa $\ln n$ kao donjom i $1+\ln n$ kao gornjom granicom, pružajući bolju kontrolu nad njegovim ponašanjem od granica baziranih na $\log_2 n$.

Primer 2.9 (Poređenje H_n sa površinom pravougaonika i krive) *U prethodnom primeru ustanovili smo da je $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ veće od površine ispod krive $y = \frac{1}{x}$ od 1 do n, tj. $\ln n$. Sada razmotrimo alternativni geometrijski pristup: površina n pravougaonika, svaki širine 1 i visine $\frac{1}{k}$, data sa H_n, manja je od zbira površine prvog pravougaonika (od 0 do 1, visine 1) i površine ispod krive $y = \frac{1}{x}$ od 1 do $n+1$.*



Slika 2.3: Geometrijsko poređenje: H_n (pravougaonici od 1 do n) je manje od površine prvog pravougaonika (0 do 1) plus površine ispod $y = \frac{1}{x}$ od 1 do $n+1$.

Površina prvog pravougaonika je:

$$\int_0^1 1\,dx = 1,$$

a površina ispod krive od 1 do $n+1$ je:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1).$$

Ukupna površina ovog skupa je:

$$1 + \ln(n+1).$$

Sada, H_n je suma pravougaonika od $k = 1$ do n, dok je $H_{n+1} - 1 = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$ suma od 2 do $n+1$. Geometrijski, H_n se može uporediti sa ovim zbirom pomeranjem koordinata. Posmatrajmo granice:

- Donja granica: $H_n > \ln n$, jer je H_n veće od površine ispod $\frac{1}{x}$ od 1 do n (kao u prethodnom primeru).
- Gornja granica: $H_n < 1 + \ln(n+1)$, jer je $H_{n+1} - 1 < \ln(n+1)$ (površina pravougaonika od 2 do $n+1$ je manja od integrala od 1 do $n+1$), a $H_n = (H_{n+1} - 1) + 1 - \frac{1}{n+1}$, gde je $1 - \frac{1}{n+1} < 1$.

Precizirajmo granice za $n \geq 1$:

$$\ln n < H_n < \ln(n+1) + 1.$$

Proverimo:

- Za $n = 1$: $H_1 = 1$, $\ln 1 = 0 < 1 < \ln 2 + 1 \approx 1.693$, tačno.
- Za $n = 2$: $H_2 = 1.5$, $\ln 2 \approx 0.693 < 1.5 < \ln 3 + 1 \approx 2.099$, tačno.
- Za $n = 10$: $H_{10} \approx 2.929$, $\ln 10 \approx 2.303 < 2.929 < \ln 11 + 1 \approx 3.398$, tačno.

Ilustracija na Slici 2.3 pokazuje da H_n leži između ovih granica, potvrđujući logaritamski rast. Gornja granica $\ln(n+1) + 1$ je nešto šira od $1 + \ln n$ iz prethodnog primera, ali i dalje konzistentna sa sporim divergentnim ponašanjem H_n.

2.2 Harmonijski brojevi višeg reda

Definicija 2.10 (Harmonijski brojevi reda r i Rimanova zeta funkcija) *Za svaki prirodan broj n i realan broj $r > 0$, definišemo harmonijski broj reda r, označen sa $H_n^{(r)}$, kao sumu recipročnih vrednosti prirodnih brojeva od 1 do n, podignutih na r-ti stepen:*

$$H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r}.$$

Posebno, za $r = 2$, dobijamo *harmonijske brojeve drugog reda*:

$$H_n^{(2)} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Kada $n \to \infty$, za $r > 1$, ova suma konvergira ka konačnoj granici, koja se konvencionalno naziva Rimanova zeta funkcija:

$$\zeta(r) = H_\infty^{(r)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}.$$

Na primer, za $r = 2$, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.64493$, dok za $r = 1$ suma divergira, što je slučaj klasičnih harmonijskih brojeva $H_n^{(1)} = H_n$. Za $0 < r \leq 1$, suma $H_n^{(r)}$ divergira ka $+\infty$, ali sporije kako r raste.

Ojler je otkrio elegantan način da koristi generalizovane harmonijske brojeve za aproksimaciju klasičnih harmonijskih brojeva $H_n = H_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Ovde ćemo formalizovati ovu ideju kroz teoremu koja izražava razliku $H_n - \ln n$ i njenu graničnu vrednost.

Teorema 2.11 *Za svaki prirodan broj $n \geq 2$, harmonijski broj H_n zadovoljava:*

$$H_n - \ln n = 1 - \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r} \left(H_n^{(r)} - 1 \right),$$

gde je $H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r}$ harmonijski broj reda r. Kada $n \to \infty$, ova razlika konvergira ka konstanti:

$$H_n - \ln n \to 1 - \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\zeta(r) - 1 \right),$$

gde je $\zeta(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ Rimanova zeta funkcija.

Dokaz. Počnimo sa beskonačnim redom koji Ojler koristi za svaki $k \geq 1$:

$$\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \cdots = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{rk^r}.$$

Za $k \geq 2$ i $r > 1$, ovaj red konvergira jer je ogranicen geometrijskim redom. Leva strana je:

$$\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = \ln k - \ln(k-1).$$

Sumirajmo obe strane za k od 2 do n:

$$\sum_{k=2}^{n} (\ln k - \ln(k-1)) = \sum_{k=2}^{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{rk^r}.$$

Leva strana je teleskopska suma:

$$\ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln n - \ln(n-1) = \ln n - \ln 1 = \ln n,$$

jer se svi međutermini poništavaju, a $\ln 1 = 0$.

Desna strana se može preurediti po stepenima r:

$$\sum_{k=2}^{n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{rk^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{rk^r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^r}.$$

Izraz $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^r}$ je harmonijski broj reda r bez prvog člana:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^r} = H_n^{(r)} - H_1^{(r)} = H_n^{(r)} - 1,$$

jer je $H_1^{(r)} = \frac{1}{1^r} = 1$. Dakle:

$$\ln n = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left(H_n^{(r)} - 1\right).$$

Sada izdvojimo $r = 1$ iz sume:

$$\ln n = \frac{1}{1} \left(H_n^{(1)} - 1\right) + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r} \left(H_n^{(r)} - 1\right).$$

Pošto je $H_n^{(1)} = H_n$, imamo:

$$\ln n = (H_n - 1) + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r} \left(H_n^{(r)} - 1\right).$$

Preuređivanjem dobijamo:

$$H_n - \ln n = H_n - (H_n - 1) - \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r} \left(H_n^{(r)} - 1\right) = 1 - \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r} \left(H_n^{(r)} - 1\right),$$

čime je prvi deo teoreme dokazan.

Za granično ponašanje, kada $n \to \infty$, $H_n^{(r)} \to \zeta(r)$ za $r > 1$, dok $H_n^{(1)} = H_n \to \infty$. Suma $\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r}\left(H_n^{(r)} - 1\right)$ konvergira ka:

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\zeta(r) - 1\right),$$

jer je $\zeta(r) - 1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ konačno za $r > 1$, a red $\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r}(\zeta(r) - 1)$ apsolutno konvergira zbog brzog opadanja $\zeta(r) - 1$ (npr. $\zeta(2) - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0.644$). Dakle:

$$H_n - \ln n \to 1 - \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\zeta(r) - 1\right).$$

Ova konstanta je poznata kao Ojler–Maskeronijeva konstanta $\gamma \approx 0.577$, što potvrđuje asimptotsku aproksimaciju $H_n \approx \ln n + \gamma$. □

Primer 2.12 (Ojlerova konstanta i aproksimacija H_n) *Kada $n \to \infty$, razlika $H_n - \ln n$ teži graničnoj vrednosti koju je Ojler identifikovao:*

$$1 - \frac{1}{2}(\zeta(2) - 1) - \frac{1}{3}(\zeta(3) - 1) - \frac{1}{4}(\zeta(4) - 1) - \cdots,$$

gde je $\zeta(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ Rimanova zeta funkcija. Ova konstanta, poznata kao Ojler–Maskeronijeva konstanta i označena grčkim slovom γ, ima vrednost:

$$\gamma = 0.5772156649\ldots$$

Beskonačna suma konvergira relativno brzo jer je $\zeta(r) - 1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ približno $\frac{1}{2^r}$ za velike r (npr. $\zeta(2) - 1 \approx 0.644$), što omogućava precizne numeričke aproksimacije.

Ojlerov argument uspostavlja graničnu relaciju:

$$\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \gamma.$$

Ovo znači da H_n leži otprilike na 58% rastojanja između granica $\ln n < H_n < \ln(n+1) + 1$ za velike n, jer je $\gamma \approx 0.58$ blizu sredine intervala dužine približno 1.

Poboljšana aproksimacija

Dalja poboljšanja aproksimacije H_n moguća su. Na primer, možemo koristiti asimptotski razvoj:

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\epsilon_n}{120n^4},$$

gde je $0 < \epsilon_n < 1$ mali ostatak. Ova formula omogućava precizno izračunavanje H_n bez direktnog sabiranja n članova. Na primer, za $n = 1,000,000$:

$$H_{1,000,000} \approx \ln(1,000,000) + \gamma + \frac{1}{2 \cdot 1,000,000} - \frac{1}{12 \cdot 1,000,000^2} + \frac{\epsilon_n}{120 \cdot 1,000,000^4}.$$

Numerički, $\ln(1,000,000) \approx 13.8155$, a viši članovi su zanemarljivi ($\frac{1}{2n} = 0.0005$, $-\frac{1}{12n^2} \approx -0.000000083$, ostatak je još manji), pa:

$$H_{1,000,000} \approx 14.392726722865723631381127 5.$$

Primena na problem karata

Ova vrednost ima praktične implikacije. U problemu slaganja karata dužine 2 jedinice, ukupan izbacaj je $2H_n$*. Za* $n = 1,000,000$*:*

$$2H_{1,000,000} \approx 2 \cdot 14.3927 \approx 28.785,$$

što je više od 14 dužina karte (oko 7 dužina po karti), a ne "više od 7" kako je sugerisano, jer je $14 < 28.785$*.*

Primena na crva na gumici

U problemu crva na gumici, gde crv puže 1 cm po minuti, a gumica (početno 100 cm) se isteže za 100 cm svake minute, ukupan udeo pređene dužine je $H_n/100$*. Crv stiže do kraja kada* $H_n/100 \geq 1$*, tj.* $H_n \geq 100$*. Koristeći aproksimaciju:*

$$H_n \approx \ln n + \gamma,$$

rešavamo:

$$\ln n + \gamma \approx 100 \quad \Rightarrow \quad \ln n \approx 100 - \gamma \approx 99.4228,$$

pa:

$$n \approx e^{99.4228} \approx 2.875 \cdot 10^{43}.$$

Preciznije kritična vrednost n *ili* $\lfloor e^{100-\gamma} \rfloor$ *ili* $\lceil e^{100-\gamma} \rceil$*, što je blizu* $2.87 \cdot 10^{43}$*. Tada je gumica duga* $100(n+1) \approx 2.87 \cdot 10^{45}$ *cm, ili oko* $3 \cdot 10^{20}$ *svetlosnih godina, znatno manje od* 10^{21} *zbog korekcije eksponencijalnog rasta.*

Ovaj scenario ilustruje trijumf crva nakon ogromnog vremena – približno $2.87 \cdot 10^{43}$ *minuta, ili* $5.45 \cdot 10^{34}$ *vekova – dok se gumica rasteže do kosmičkih razmera, sa molekulima veoma razmaknutim.*

Glava 3

Katalanovi brojevi

3.1 Uvod

Katalanovi brojevi predstavljaju jedan od najpoznatijih i najfascinantnijih nizova brojeva u kombinatorici. Pojavljuju se u velikom broju različitih problema i struktura, kao što su pravilno ugnježdene zagrade, binarna stabla, Dyckovi putevi, triangulacije konveksnih mnogougla i mnogi drugi. Njihova široka primena i prisustvo u različitim oblastima matematike čine ih značajnim objektom proučavanja kako u teorijskom, tako i u primenjenom kontekstu.

Prva poznata pojava brojeva koji danas nose naziv *Katalanovi brojevi* može se pratiti do rada belgijskog matematičara Ežana Šarla Katalana iz 1838. godine. U svom radu, Katalan je proučavao broj načina na koje se proizvod više faktora može potpuno zagraditi korišćenjem binarnih operacija, što je dovelo do formule koju danas prepoznajemo kao:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad n \geq 0.$$

Međutim, zanimljivo je da su ovi brojevi identifikovani i u ranijim radovima. Na primer, švajcarski matematičar Leonard Ojler u 18. veku proučavao je slične formule u kontekstu rešavanja problema vezanih za planarne grafove i rekurentne relacije, iako ih nije eksplicitno povezao sa formulom koju danas koristimo. Takođe, gotovo ceo vek pre Katalana, brojevima se bavio Johan fon Zegner proučavajući problem triangulacije konveksnog mnogougla.

Još manje poznata činjenica jeste da je kineski matematičar Ming Antu tokom 1730-ih godina nezavisno otkrio iste brojeve, ali njegovi rezultati su ostali nepoznati u zapadnoj matematičkoj tradiciji sve do 1839. godine.

Uprkos bogatoj istoriji, naziv *Katalanovi brojevi* ostao je u čast Ežana Katalana, koji je značajno doprineo njihovom sistematskom proučavanju i dokazivanju brojnih osobina i identiteta.

Ponovno interesovanje za ove brojeve usledilo je u drugoj polovini 20. veka, zahvaljujući radovima savremenih matematičara poput Donalda Knuta i Ričarda Stenlija, koji su ih povezali sa širokim spektrom kombinatornih objekata i dali im centralno mesto u savremenoj kombinatorici.

Danas Katalanovi brojevi predstavljaju klasičan primer u matematičkom obrazovanju i istraživanju i služe kao uvod u brojne tehnike kombinatornog prebrojavanja, teorije formalnih jezika, rekurzije i generišućih funkcija.

Napominjemo da se strukture povezane sa Katalanovim brojevima javljaju i u savremenim istraživanjima. Aritmetička svojstva centralnih binomnih koeficijenata, koji direktno učestvuju u formuli za C_n, analizirana su u radovima [14, 16], dok se u [15] ispituju veze između multiplikativnih funkcija, generalizovanih binomnih koeficijenata i proširenih formi Katalanovih brojeva. Pored toga, Dyck-ove putanje — klasičan katalanski objekat — pojavljuju se i u teoriji reči; u radu [13] pokazano je da se abelove granice binarnih reči mogu karakterisati upravo pomoću Dyck-ovih podreči. Ovi primeri potvrđuju da Katalanovi brojevi imaju širok raspon savremenih primena, od aritmetike binomnih koeficijenata do kombinatorike reči.
U ovom poglavlju biće definisani osnovni Katalanovi brojevi i prikazana njihova fundamentalna svojstva. Poseban fokus biće na pet klasičnih kombinatornih interpretacija, koje pokrivaju širok spektar problema i struktura u diskretnoj matematici:

- broj Dyckovih puteva dužine $2n$,
- broj triangulacija konveksnog mnogougla sa $n+2$ temena,
- broj binarnih stabala sa n čvorova,
- broj uređenih stabala sa $n+1$ čvorova,
- broj izbornih (ballot) nizova dužine $2n$.

Definicija 3.1 *Katalanov broj C_n, za $n \geq 0$, dat je formulom*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Vrednosti C_n za $n \leq 10$ date su u tabeli.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Lema 3.2 *Za svaki ceo broj $n \geq 0$ važi identitet:*

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

Dokaz. Po svojstvu simetrije binomnih koeficijenata imamo:

$$\binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n-1}.$$

Poznato je da:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}.$$

Uzimanjem zajedničkog imenioca dobijamo:

$$\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\left((n+1)-n\right) = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Dakle,

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

što je trebalo dokazati. □

3.2 Kombinatorne interpretacije Katalanovih brojeva

3.2.1 Dyck-ovi putevi

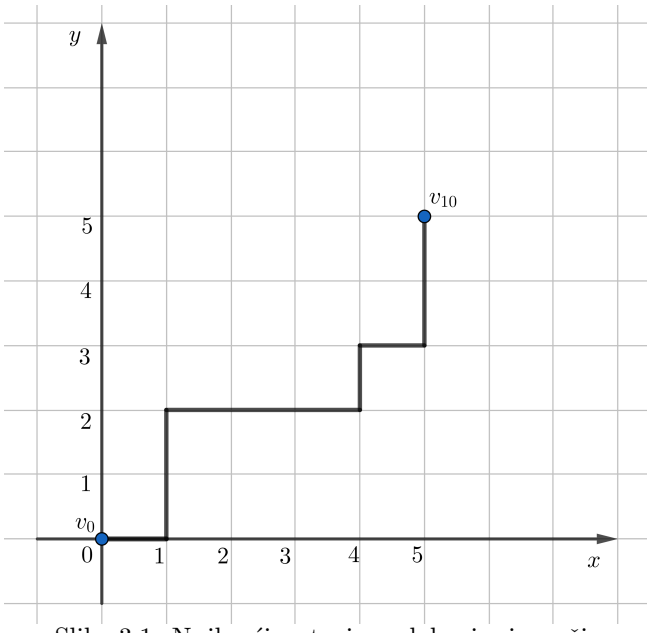
Put dužine k u celobrojnoj mreži predstavlja niz tačaka

$$(v_0, v_1, \ldots, v_k), \quad \text{gde je } v_i \in \mathbb{Z}^2,$$

takav da su svaka dva uzastopna para susedna, odnosno razlikuju se za tačno jedan korak u nekom od četiri osnovna pravca: desno, levo, gore ili dole. Formalno, za svako $i = 1, \ldots, k$ važi

$$v_i - v_{i-1} \in \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}.$$

Najčešće nas zanimaju najkraći putevi između početnog vrha v_0 i krajnjeg vrha v_k. Ukoliko su obe koordinate vektora v_k veće ili jednake odgovarajućim koordinatama vektora v_0, tada su dozvoljeni samo koraci u pravcu desno i gore.



Slika 3.1: Najkraći putevi u celobrojnoj mreži.

Na slici prikazani put odgovara kretanju $DGGDDDGDGG$.

Lema 3.3 *Broj najkraćih puteva u celobrojnoj mreži od koordinatnog početka do tačke* $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ *jednak je* $\binom{n+m}{m}$.

Dokaz. Najkraći put od tačke $(0, 0)$ do tačke (m, n) u celobrojnoj mreži sastoji se od tačno m koraka udesno (koraka $(1, 0)$) i n koraka nagore (koraka $(0, 1)$), u bilo kom redosledu. Dakle, svaki takav put može se predstaviti kao niz dužine $m + n$ nad alfabetom $\{D, G\}$, gde D označava korak udesno, a G korak nagore.

Broj takvih nizova jednak je broju permutacija m identičnih i n identičnih objekata, tj.

$$\binom{m+n}{m}.$$

Neka je P skup svih najkraćih puteva od $(0, 0)$ do (m, n) u $\mathbb{Z}^2$ takvih da je svaki korak iz skupa $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Neka je W skup svih reči dužine $m+n$ nad alfabetom $\{D, G\}$ sa tačno m slova D i n slova G.

Definišimo funkciju:

$$\varphi : P \to W$$

tako što svakom putu pridružimo reč koja beleži pravac svakog njegovog koraka. Ova funkcija je očigledno injektivna, jer različiti putevi daju različit niz koraka, a i surjektivna je jer svaka reč u W jednoznačno određuje put u P (kreni od $(0, 0)$ i redom primenjuj korake $D = (1, 0)$ i $G = (0, 1)$). Dakle, φ je bijekcija, pa su skupovi P i W ekvivalentne kardinalnosti, tj. $|P| = \binom{m+n}{m}$. □

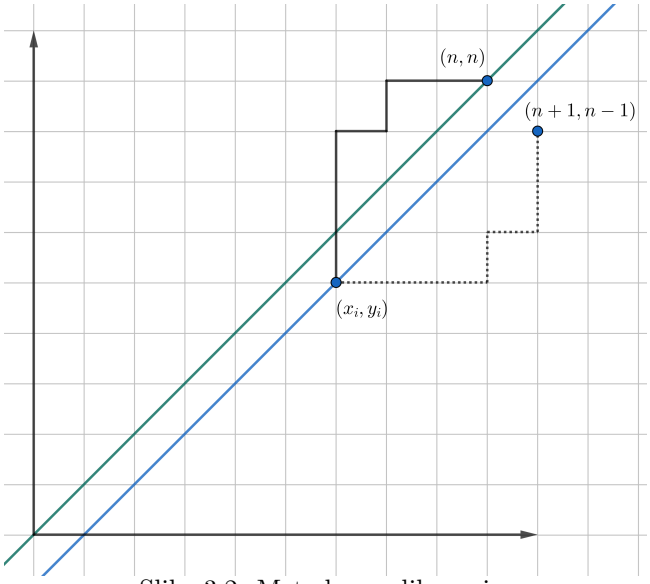
Definicija 3.4 ***Dyck-ov put*** *dužine* $2n$ *je najkraći put u celobrojnoj mreži koji vodi od tačke* $(0, 0)$ *do tačke* (n, n) *koristeći isključivo korake* $(1, 0)$ *i* $(0, 1)$*, tako da nijedna tačka puta ne leži ispod prave* $y = x$*. Drugim rečima, za svaku tačku* (x, y) *na putu važi* $y \geq x$ *kada se put posmatra relativno u odnosu na dijagonalu* $y = x$*.*

Teorema 3.5 *Broj Dyck-ovih puteva jednak je*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Dokaz. Na osnovu leme 3.2 važi $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$. Neka je P skup svih najkraćih puteva od $(0, 0)$ do (n, n), a D skup svih Dycovih puteva . Očigledno je $|P| = \binom{2n}{n}$ i $|D| = |P| - |D^c|$, pa je dovoljno dokazati da puteva koji nisu Dykovi ima $|D^c| = \binom{2n}{n+1}$. Uspostavićemo bijekciju između D^c i skupa P' svih najkraćih puteva od $(0, 0)$ do $(n+1, n-1)$, kojih prema teoremi ima $|P'| = \binom{2n}{n+1}$.

Funkcija $f : D^c \to P'$ definisana takozvanom metodom preslikavanja slika 3.2. Put $P \in D^c$ nije Dyckov, pa ima bar jedan vrh na pravcu $y = x - 1$. Neka je (x_i, y_i) zadnji vrh puta P na tom pravcu. Preslikajmo deo puta od (x_i, y_i) do (n, n) preko pravca $y = x - 1$ i tako dolazimo do puta P', koji završava u vrhu $(n + 1, n - 1)$. Funkcija $f : D^c \to P'$ koja pridružuje $f(P) = P'$ je bijekcija jer ima inverznu funkciju $g : P' \to D^c$. Svaki put $P' \in P'$ seče pravac $y = x-1$, jer su početna tačka i krajnja tačka $(0, 0)$ i $(n + 1, n - 1)$ na suprotnim stranama tog pravca. Neka je (x_i, y_i) zadnja tačka puta P' na pravcu $y = x - 1$. Put $P = g(P')$ dobijamo preslikavanjem dela P' od (x_i, y_i) do $(n + 1, n - 1)$ preko tog pravca. Taj put završava u (n, n) i nije Dyckov, jer sadrži tačku (x_i, y_i). Dakle, funkcija $g : P' \to D^c$ je dobro definisana, a očigledno je inverzna funkciji f. □



Slika 3.2: Metoda preslikavanja.

Teorema 3.6 *Katalanovi brojevi zadovoljavaju rekurziju* $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$*, uz početni uslov* $C_0 = 1$*.*

Dokaz. Za brojeve zadate formulom $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ bilo bi teško direktno dokazati rekurziju. Koristimo se kombinatornom interpretacijom iz predhodne teoreme. Broj C_n je broj Dyckovih puteva od $(0,0)$ do (n,n). Skup svih Dyckovih puteva podelimo na disjunktne podskupove prema prvom mestu nakon ishodišta na kojem dotiče pravac $y = x$. Ako je to mesto (k,k) takvih puteva ima $C_{k-1} \cdot C_{n-k}$. Naime na delu od $(0,0)$ do (k,k) put ne dotiče pravac $y = x$ osim u prvoj i poslednjoj tački. Translacijom za jednu jedinicu prema dole možemo ga poistovetiti sa Dyckovim putem od $(0,0)$ do $(k-1,k-1)$, kojih ima C_{k-1}. Deo puta od (k,k) do (n,n) poistovetiti sa Dyckovim putem od $(0,0)$ do $(n-k,n-k)$, kojih ima C_{n-k}. Rekurziju dobijamo po principu proizvoda i sume.

□

Druga verzija definicije Dyck-ovih puteva koristi formalizam usmerenih koraka u ravni. Ovaj pristup se često koristi u kombinatorici zbog svoje geometrijske i intuitivne jasnoće.

Definicija 3.7 ***Dyckova putanja dužine*** $2n$ *je usmerena putanja u ravni* $\mathbb{R}^2$ *koja:*

- *počinje u tački* $(0,0)$*,*
- *završava u tački* $(2n,0)$*,*
- *sastoji se od koraka* $(1,1)$ *(uspon) i* $(1,-1)$ *(pad),*
- *i nikada ne silazi ispod* x*-ose.*

Drugim rečima, Dyckove putanje modeluju kretanje koje se uvek održava iznad ili na horizontalnoj osi. Ove putanje imaju brojne primene i interpretacije: predstavljaju nizove pravilno ugnježdenih zagrada, tokove igara sa izjednačenim stanjima, balansirane izraze u formalnim jezicima, kao i brojne strukture u diskretnoj matematici.

Teorema 3.8 *Broj Dyckovih putanja dužine $2n$ jednak je $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.*

Dokaz. Bez ograničenja, svaki Dyckov put dužine $2n$ sastoji se od n uspona (koraka $(1,1)$) i n padova (koraka $(1,-1)$), tako da se nakon svakog koraka održava ne-negativna visina (put nikada ne silazi ispod x-ose).

Ukupan broj mogućih putanja koje sadrže tačno n uspona i n padova (bez ograničenja o visini) jednak je ukupnom broju ređanja n koraka $(1,1)$ i n koraka $(1,-1)$, što je

$$\binom{2n}{n}.$$

Međutim, nisu sve te putanje Dyckove. Moramo oduzeti one koje silaze ispod x-ose. To možemo učiniti koristeći **metodu refleksije** (engl. reflection principle).

Za svaku putanju koja pređe ispod x-ose mora sadržati tačku $(k,-1)$ neka je to poslednja tačka na putanji koja je ispod x-ose, možemo konstruisati bijekciju sa putanjom od $(0,0)$ do $(2n,-2)$ tako što preslikamo deo putanje od $(k,-1)$ do $(2n,0)$ preko prave $y=-1$.

Broj takvih "loših" putanja koje završavaju u $(2n,-2)$ sa n uspona i n padova (ali zapravo jednim viškom pada) jednak je

$$\binom{2n}{n-1}.$$

Prema tome, broj Dyckovih putanja je:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

□

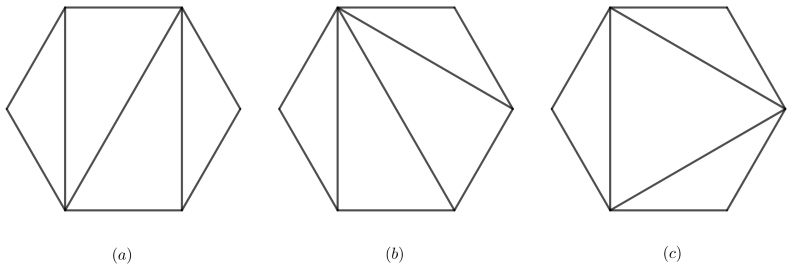
3.2.2 Triangulacije konveksnog mnogougla

Još jedna klasična struktura koja se broji Katalanovim brojevima jeste broj triangulacija konveksnog mnogougla.

Definicija 3.9 *Neka je $n \geq 3$. Konveksni n-ugao u ravni je mnogougao P sa n temena i n stranica. Temena označavamo sa $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$, poređana u smeru suprotnom od kazaljke na satu. Stranice su definisane kao $s_i = v_i v_{i+1}$ za $0 \leq i \leq n-2$ i $s_{n-1} = v_{n-1}v_0$.*

Duž $v_i v_j$ naziva se dijagonala *ako spaja dva nesusedna temena. Mnogougao je* konveksan *ako se svaka dijagonala nalazi unutar njegove unutrašnjosti.*

Definicija 3.10 Triangulacija *konveksnog mnogougla P je podela njegove unutrašnjosti na trouglove pomoću skupa međusobno nesečivih dijagonala. Svaka stranica trougla u triangulaciji je ili stranica mnogougla P, ili dijagonala unutar P.*



Slika 3.3: Tri triangulacije konveksnog šestougla.

Na slici 3.3 prikazane su tri triangulacije konveksnog šestougla.

Lema 3.11 *Triangulacija konveksnog n-ugla sadrži tačno $n-2$ trougla i $n-3$ dijagonale.*

Dokaz. Indukcijom po n:

Baza: Za $n = 3$ imamo jedan trougao i 0 dijagonala; za $n = 4$ dva trougla i jednu dijagonalu.

Induktivni korak: Neka tvrdnja važi za sve $3 \leq m < n$. Neka je P konveksan n-ugao ($n \geq 5$), i neka je T njegova triangulacija. Izaberimo neku dijagonalu v_0v_k ($2 \leq k \leq n-2$), koja P deli na dva manja konveksna mnogougla: P_1 i P_2 sa $k+1$ i $n-k+1$ temena.

Po induktivnoj pretpostavci:

- P_1 ima $k-1$ trouglova i $k-2$ dijagonala,
- P_2 ima $n-k-1$ trouglova i $n-k-2$ dijagonale.

Ukupan broj trouglova: $(k-1)+(n-k-1) = n-2$.

Ukupan broj dijagonala: $(k-2)+(n-k-2)+1 = n-3$ (uz dodatak dijagonale v_0v_k).

□ Pretpostavimo sada da je P konveksan $(n+2)$-ugao. Po prethodnoj Lemi, svaka triangulacija P koristi $n-1$ dijagonalu i sadrži n trouglova. Neka t_n označava broj svih različitih triangulacija $(n+2)$-ugla. Tada:

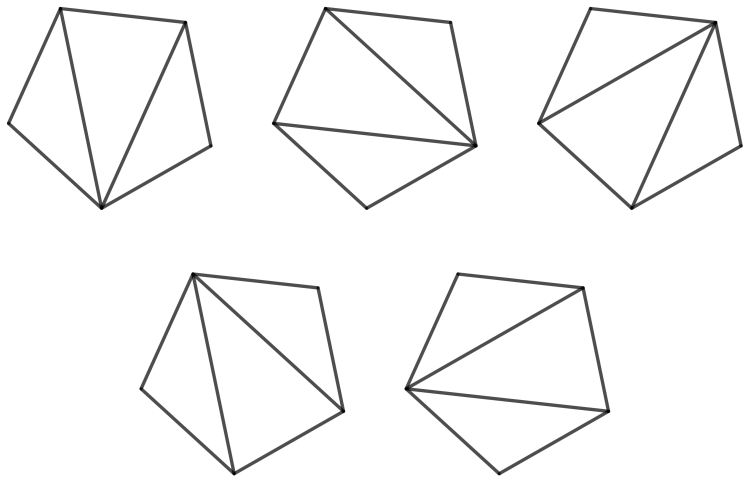
$$t_1 = 1, \quad t_2 = 2.$$

Primer 3.12 *Pronaći sve triangulacije konveksnog petougla i pokazati da je $t_3 = 5$.*

Rešenje: *Za $n = 3$, imamo pet temena. Svaka triangulacija koristi $n - 1 = 2$ dijagonale. Dijagonale moraju deliti zajedničko teme (da bi se trouglovi nepreklapali), i moguće je povući pet različitih takvih konfiguracija. Prikazane su na slici 3.4.*

3.2.3 Izborni nizovi

Zamislimo sledeću situaciju: na izborima učestvuju dva kandidata, A i B, i ukupno se glasa $2n$ puta, pri čemu oba kandidata dobijaju po n glasova. Glasovi se broje nasumičnim redosledom, a nas zanima verovatnoća da kandidat A nikada nije bio iza kandidata B tokom brojanja.



Slika 3.4: Pet triangulacija konveksnog petougla ($t_3 = 5$).

Definicija 3.13 Izborni niz *(ili glasačka sekvenca) dužine* $2n$ *je niz* $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$*, gde je svako* $x_i \in \{1, -1\}$*, tako da je* $\sum_{i=1}^{2n} x_i = 0$ *i da su sve parcijalne sume nenegativne:*

$$s_i = \sum_{j=1}^{i} x_j \geq 0 \quad \textit{za sve } i = 1, \ldots, 2n.$$

Vrednost $x_i = 1$ označava glas za kandidata A, a $x_i = -1$ glas za kandidata B. Svaka parcijalna suma s_i predstavlja trenutnu prednost kandidata A u odnosu na B nakon i prebrojanih glasova.

3.2.4 Uređena stabla

Uređena ili Katalanova stabla predstavljaju jednu od osnovnih struktura koje se prebrojavaju Katalanovim brojevima. Njihova važnost ogleda se u prirodnoj rekurzivnoj građi, kao i u vezi sa mnogim drugim strukturama: binarnim stablima, zagradjivanjem izraza, Dyckovim putanjama itd.

Definicija 3.14 *Neka je* V *neprazan skup. Graf je uređen par*

$$G = (V, E), \qquad E \subseteq \big\{ \{u, v\} : u, v \in V,\ u \neq v \big\}.$$

Elementi skupa V *su temena (čvorovi), a elementi skupa* E *su grane (ivice). Za* $u, v \in V$ *kažemo da su susedni ako važi* $\{u, v\} \in E$.

Definicija 3.15 U grafu $G = (V, E)$ putanja od temena u do v je niz različitih temena $(v_0, \ldots, v_\ell)$ sa $v_0 = u$, $v_\ell = v$ takav da za svako $i = 1, \ldots, \ell$ važi $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$.

Definicija 3.16 Graf $G = (V, E)$ je povezan ako između svaka dva temena $u, v \in V$ postoji putanja u G.

Definicija 3.17 Kontura u grafu G je niz temena $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_0)$ dužine $k \geq 3$ takav da su sva temena $v_0, \ldots, v_{k-1}$ međusobno različita i da važi $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ za svako $i = 0, \ldots, k-2$, kao i $\{v_{k-1}, v_0\} \in E$.

Definicija 3.18 Graf $T = (V, E)$ je stablo ako je povezan i ne sadrži konturu (tj. acikličan je).

Definicija 3.19 Neka je $T = (V, E)$ stablo i neka je $r \in V$. Uređeni par (T, r) zove se korensko stablo, a teme r je koren. Za svako $v \in V \setminus \{r\}$ neka je $P_{r \to v}$ jedinstvena prosta putanja od r do v u stablu T. Roditelj od v je jedini sused $p(v)$ temena v koji leži na putanji $P_{r \to v}$ bliže korenu, a susedi v različiti od $p(v)$ su deca od v.

Za temena $u, v \in V$:

- u je *predak* od v (a v je *potomak* od u) ako u leži na putanji $P_{r \to v}$.
- *List* je teme bez dece.
- *Dubina* je $\mathrm{d}(v) = \mathrm{dist}_T(r, v)$. *Nivo* k je skup $L_k = \{v \in V : \mathrm{d}(v) = k\}$. *Visina* je $\mathrm{v}(T, r) = \max_{v \in V} \mathrm{d}(v)$.
- *Podstablo* ukorenjeno u v je indukovano stablo na skupu $\{v\} \cup \{\text{potomci } v\}$, sa korenom v.

Definicija 3.20 ***Uređeno stablo*** *je korensko stablo u kome je za decu svakog čvora određen redosled. Svaki čvor ima uređenu (linearno poređanu) listu podstabala. Za razliku od binarnih stabala, ravna stabla ne mogu biti prazna — uvek sadrže najmanje jedan čvor (koren).*

Uređena stabla se mogu definisati rekurzivno:

- Postoji jedno uređeno stablo koje se sastoji samo od korena.
- Ako su $P_1, P_2, \ldots, P_m$ uređena stabla, tada i stablo sa korenom koji ima uređenu listu podstabala $(P_1, \ldots, P_m)$ takođe predstavlja uređeno stablo.

Kod crtanja, koren stabla se postavlja na vrh, a podstabla se raspoređuju s leva na desno, redosledom kojim su zadana. Ivice se uvek orijentišu od čvora ka njegovoj deci.

3.2.5 Binarna stabla

Definicija 3.21 ***Binarno ravno stablo*** *(engl. binary plane tree) je korensko stablo koje se definiše rekurzivno na sledeći način:*

- *Prazno stablo je binarno ravno stablo.*
- *Ako su T_1 i T_2 binarna ravna stabla, tada je stablo sa korenom v, levim podstablom T_1 i desnim podstablom T_2, takođe binarno ravno stablo.*

Svaki čvor može imati najviše dva deteta — *levo* i *desno* — i redosled dece je značajan. Ako postoji samo jedno dete, ono se eksplicitno označava kao levo ili desno.

Vizuelno, binarno ravno stablo se prikazuje tako što se koren postavlja na vrh, levo podstablo ulevo, a desno podstablo udesno, čime se čuva planarna (ravna) struktura stabla.

Teorema 3.22 *Katalanov broj C_n prebrojava sledeće klase kombinatornih objekata:*

(i) triangulacije konveksnog mnogougla sa $n+2$ temena;

(ii) binarna (ravna) stabla sa n čvorova;

(iii) uređena stabla sa $n+1$ čvorova;

(iv) izborni nizovi (ballot sequences) dužine $2n$ sa jednakim brojem glasova;

(v) Dyckove putanje dužine $2n$.

Dokaz.

Bijekcija između uređenih korenskih stabala i Dyck-ovih putanja.

Neka $\mathcal{T}_n$ označava skup svih *planarnih* (uređenih) korenskih stabala sa n grana (odnosno sa $n+1$ temena), a $\mathcal{D}_n$ skup svih Dyck-ovih putanja dužine $2n$. U ovom potpoglavlju opisujemo klasičnu bijekciju između ove dve kominatorne klase.

Definicija 3.23 *Za $T \in \mathcal{T}_n$ definišemo preslikavanje*

$$\Phi : \mathcal{T}_n \longrightarrow \mathcal{D}_n$$

kao prefiksni obilazak stabla. Svaka grana se obilazi tačno dva puta: pri silasku od roditelja ka detetu upisujemo korak $U = (1,1)$, a pri povratku od deteta ka roditelju upisujemo korak $D = (1,-1)$. Tako dobijamo reč dužine $2n$, koju označavamo sa $\Phi(T)$.

Lema 3.24 *Za svako $T \in \mathcal{T}_n$ putanja $\Phi(T)$ je Dyck-ova.*

Dokaz. Neka S_k označava parcijalni zbir

$$S_k = \big|\{\, i \le k : \text{ korak } i = U \,\}\big| - \big|\{\, i \le k : \text{ korak } i = D \,\}\big|.$$

Veličina S_k predstavlja trenutnu dubinu obilaska posle k-tog koraka. Početno je $S_0 = 0$, a svaki korak U povećava dubinu za 1, dok svaki korak D smanjuje dubinu za 1. Kako obilazak nikada ne napušta stablo, važi $S_k \ge 0$ za svako k, pa putanja ne pada ispod x-ose.

Budući da svaka grana doprinosi jednom usponu i jednom silasku, u $\Phi(T)$ ima tačno n koraka U i n koraka D, pa je $S_{2n} = 0$. Dakle, $\Phi(T) \in \mathcal{D}_n$. □

Definicija 3.25 *Za $\pi \in \mathcal{D}_n$ definišemo preslikavanje $\Psi : \mathcal{D}_n \to \mathcal{T}_n$ na sledeći način. Počinjemo od korena r i trenutnog čvora $c = r$. Putanju čitamo sleva nadesno:*

- *ako je korak U, kreiramo novo dete w od c, dodamo granu $\{c, w\}$ i postavljamo $c := w$;*
- *ako je korak D, prelazimo na roditelja i postavljamo $c := p(c)$.*

Usled uslova $S_k \ge 0$ nikada se ne pokušava silazak iznad korena, a zbog $S_{2n} = 0$ procedura se završava u korenu. Kako ima tačno n uspona, dobija se tačno n grana i $n+1$ temena, pa $\Psi(\pi) \in \mathcal{T}_n$.

Lema 3.26 (Kanonička dekompozicija Dyck-niza) *Svaka Dyck-ova putanja π dužine $2n$ predstavlja se jedinstveno u obliku*

$$\pi \;=\; U\,\pi_1\,D\,U\,\pi_2\,D\;\cdots\;U\,\pi_k\,D,$$

gde su $\pi_1, \ldots, \pi_k$ Dyck-ove putanje (moguće prazne). Dekompozicija se dobija tako što se pri čitanju reči s leva prvi put kada se visina vrati u 0 izdvoji blok $U\pi_1 D$, zatim se isti postupak primeni na preostali sufiks.

Ovo omogućava elegantne rekurzivne definicije preslikavanja.

Definicija 3.27 *Ako koren stabla T ima redom potstabla $T_1, \ldots, T_k$, definišemo rekurzivno*

$$\Phi(T) := U\,\Phi(T_1)\,D\,U\,\Phi(T_2)\,D\;\cdots\;U\,\Phi(T_k)\,D,$$

pri čemu je Φ trivialnog stabla (samo koren) jednaka praznoj reči.

Obrnuto, ako

$$\pi = U\,\pi_1\,D\;\cdots\;U\,\pi_k\,D$$

predstavlja kanoničku dekompoziciju Dyck-niza, definišemo

$$\Psi(\pi)$$

kao stablo čiji koren ima, redom, potstabla $\Psi(\pi_1), \ldots, \Psi(\pi_k)$. Za praznu reč ϵ dobijamo trivialno stablo.

Teorema 3.28 *Preslikavanja Φ i Ψ su međusobno inverzna:*

$$\Phi(\Psi(\pi)) = \pi, \qquad \Psi(\Phi(T)) = T.$$

Dokaz. Oba identiteta dokazujemo indukcijom.

(1) Identitet $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ na Dyck-putanjama. Neka je $\pi = U\pi_1 D \cdots U\pi_k D$ njena kanonička dekompozicija. Po definiciji stabla $\Psi(\pi)$, koren ima potstabla $\Psi(\pi_1), \ldots, \Psi(\pi_k)$. Stoga

$$\Phi(\Psi(\pi)) = U\,\Phi(\Psi(\pi_1))\,D \cdots U\,\Phi(\Psi(\pi_k))\,D = U\pi_1 D \cdots U\pi_k D = \pi,$$

gde smo koristili induktivnu hipotezu na sve π_i (koje su kraće).

(2) Identitet $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$ na stablima. Neka koren stabla T ima potstabla $T_1, \ldots, T_k$. Po definiciji,

$$\Phi(T) = U\,\Phi(T_1)\,D\;\cdots\;U\,\Phi(T_k)\,D.$$

Čitanjem ove reči visina prvi put pada na 0 upravo na kraju bloka $U\Phi(T_1)D$, pa je to kanonička dekompozicija $\Phi(T)$. Stoga

$$\Psi(\Phi(T)) = \text{stablo sa decom } \Psi(\Phi(T_1)), \ldots, \Psi(\Phi(T_k)) = T$$

induktivno, jer su sva T_i manja stabla.

Teorema je time dokazana. □

Napomena. Za $n = 0$ preslikavanje identifikuje praznu Dyck-ovu putanju sa stablom koje se sastoji samo od korena.

Bijekcija između Dyck-ovih putanja i izbornih nizova

Neka $\mathcal{B}_n$ označava skup svih nizova oblika

$$a = (a_1, \ldots, a_{2n}), \qquad a_i \in \{\pm 1\},$$

koji ispunjavaju uslove

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0 \quad (1 \leq k \leq 2n), \qquad \sum_{i=1}^{2n} a_i = 0.$$

Takvi nizovi se nazivaju *izborni nizovi* (engl. *ballot sequences*). Definišemo preslikavanje

$$b : \mathcal{D}_n \longrightarrow \mathcal{B}_n$$

korespondencijom po koraku:

$$(1, 1) \longmapsto +1, \qquad (1, -1) \longmapsto -1.$$

Lema 3.29 *Preslikavanje b je bijekcija.*

Dokaz. Neka je $\pi \in \mathcal{D}_n$, i neka h_k označava ordinatnu visinu posle k-tog koraka u π. Ako je $(a_1, \ldots, a_{2n}) = b(\pi)$, tada važi

$$h_k = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Uslov da Dyck-ova putanja nikada ne pada ispod x-ose odgovara nejednakosti $h_k \geq 0$, dok završetak u visini 0 znači da je $h_{2n} = 0$. To je upravo uslov da $a \in \mathcal{B}_n$.

Obrnuto, svaki niz $a \in \mathcal{B}_n$ jednoznačno određuje rešetkastu putanju iz $(0, 0)$ sa koracima $(1, \pm 1)$ koja nikada ne prelazi ispod x-ose i završava se u $(2n, 0)$. To je upravo Dyck-ova putanja.

Kako je preslikavanje definisano po komponentama i obrnuto po komponentama, ono je i injektivno i surjektivno, pa je b bijekcija. □

Bijekcija između triangulacija konveksnog mnogougla i binarnih planarih stabala

U ovom poglavlju opisujemo klasičnu bijekciju između triangulacija konveksnog mnogougla Π_{n+2} i binarnih planarih stabala sa n čvorova. Ona predstavlja još jednu od fundamentalnih interpretacija Katalanovih brojeva.

1. Graf susednosti trouglova

Lema 3.30 *Neka je Δ triangulacija konveksnog mnogougla Π_{n+2}. Posmatrajmo graf G_Δ čiji su temena trouglovi triangulacije, a dve temene su spojene ivicom ako odgovarajući trouglovi dele dijagonalu (ne obodnu ivicu). Tada je G_Δ stablo. Ako kao koren uzmemo jedini trougao τ_e koji sadrži izdvojenu ivicu e, svaki drugi čvor ima jedinstvenog roditelja — svog suseda na jedinstvenom putu do τ_e.*

Dokaz. Triangulacija Π_{n+2} ima tačno n trouglova i $n-1$ dijagonala. Svaka dijagonala pripada tačno dvama trouglovima, pa daje tačno jednu ivicu u G_Δ. Dakle,

$$|V(G_\Delta)| = n, \qquad |E(G_\Delta)| = n-1.$$

Povezanost sledi iz konveksnosti: segment koji spaja po jednu unutrašnju tačku bilo koja dva trougla prolazi kroz konačan niz susednih trouglova, što daje put u G_Δ. Povezan povezan graf sa n temena i $n-1$ ivica je stablo. Time je tvrdnja dokazana. □

2. Preslikavanje Φ: od triangulacije do binarnog stabla

Neka je Δ triangulacija. Čvorovi $\Phi(\Delta)$ biće trouglovi triangulacije, a koren označavamo sa $\rho := \tau_e$, trougao koji sadrži izdvojenu obodnu ivicu e. Fixiramo CCW orijentaciju oboda Π_{n+2}.

Za svaki trougao t označimo njegove stranice u CCW redosledu kao $(s_0(t), s_1(t), s_2(t))$. Po Lemi 3.30 graf G_Δ je stablo ukorenjeno u τ_e. Za $t \neq \tau_e$ neka je $p(t)$ njegov roditelj, a

$$\mathrm{par}(t)$$

zajednička stranica trouglova t i $p(t)$. Za koren postavljamo $\mathrm{par}(\tau_e) := e$.

Ako je $\mathrm{par}(t) = s_i(t)$, definišemo

$$\ell(t) := s_{i+1 \bmod 3}(t), \qquad r(t) := s_{i-1 \bmod 3}(t),$$

tj. preostale dve stranice u CCW smeru. Ako trougao susedan uz $\ell(t)$ postoji, on je levo dete od t; analogno za $r(t)$ i desno dete. Dobija se ukorenjeno binarno planarno stablo.

Lema 3.31 *$\Phi(\Delta)$ je binarno planerano stablo sa tačno n čvorova.*

Dokaz. Graf susednosti ima n čvorova, pa toliko ima i $\Phi(\Delta)$. Svaki trougao ima najviše tri suseda, ali jedan je roditelj; preostaju najviše dva deteta, što daje binarnost. Planarni poredak dece (levo/desno) kanonizovan je CCW orijentacijom. □

3. Preslikavanje Ψ: od binarnog stabla do triangulacije

Neka je $B \in \mathcal{B}_n$ korensko binarno stablo. Radimo nad intervalom $v_a, \ldots, v_b$ obodnih tačaka (inicijalno $v_0, \ldots, v_{n+1}$), u CCW smeru.

Definicija 3.32 *Triangulaciju $\Psi(B; [v_a, \ldots, v_b])$ definišemo rekurzivno:*

1. ***(Baza)*** *Ako je $|B| = 1$, tada $b-a+1 = 3$ i jedini trougao je (v_a, v_{a+1}, v_b).*
2. ***(Indukcijski korak)*** *Ako su B_L i B_R levo i desno podstablo korena b veličina n_L i n_R (mogu biti prazna), postavljamo*

$$v_c := v_{a+(n_L+1)}.$$

Dodajemo korenski trougao (v_a, v_c, v_b), a zatim rekurzivno triangulišemo podmnogougao $[v_a, \ldots, v_c]$ koristeći B_L i $[v_c, \ldots, v_b]$ koristeći B_R.

Na kraju postavljamo $\Psi(B) := \Psi(B; [v_0, \ldots, v_{n+1}])$.

Lema 3.33 *$\Psi(B)$ je dobro definisana triangulacija Π_{n+2} sa tačno n trouglova.*

Dokaz. Indukcija po n. Baza je očigledna. U koraku, izbor v_c obezbeđuje da levi i desni podmnogougao sadrže tačno n_L i n_R trouglova. Pošto se podmnogugovi dodiruju samo u v_c, rekurzivne dijagonale nikada se ne mogu preseći niti sa dijagonalama iz drugog podmnogougla niti sa stranicama korenskog trougla. Ukupan broj trouglova je $1 + n_L + n_R = n$. □

4. Glavna teorema: bijekcija

Teorema 3.34 *Za svako $n \geq 1$ preslikavanja*

$$\Phi : \mathcal{T}_n \to \mathcal{B}_n, \qquad \Psi : \mathcal{B}_n \to \mathcal{T}_n$$

su međusobno inverzna:

$$\Phi(\Psi(B)) = B \quad \text{za svako } B \in \mathcal{B}_n, \qquad \Psi(\Phi(\Delta)) = \Delta \quad \text{za svaku } \Delta \in \mathcal{T}_n.$$

Dokaz. Indukcija po n.

(1) $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$ na triangulacijama. Konstrukcija $\Phi(\Delta)$ zapisuje roditelja $p(t)$ i stranice $\ell(t), r(t)$ upravo prema dijagonalama koje dele trouglovi. Rekurzija Ψ rekonstruiše iste dijagonale u istom poretku (levo podstablo odgovara trouglovima levo od $\mathrm{par}(t)$, itd.). Induktivno, dobijamo $\Psi(\Phi(\Delta)) = \Delta$.

(2) $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ na binarnim stablima. Konstrukcija Ψ dodaje korenski trougao koji deli mnogougao u intervale veličina n_L i n_R, tačno kao što u B postoje levo i desno podstablo. Konstrukcija Φ potom vraća istu roditeljsku dijagonalu i istu strukturu dece. Induktivno, $\Phi(\Psi(B)) = B$. □

Svaki trougao ima tačno jednu roditeljsku stranicu i najviše dve preostale, pa je dobijeno korensko stablo binarno.

Bijekcija između planarnih i binarnih planarih stabala (de Brujn–Morselt transformacija)

1. Notacija

Za plane stablo T neka r označava koren, a deca svakog temena uređujemo u redosledu s leva na desno:

$$\mathrm{children}(v) = (v_1, \ldots, v_k).$$

Ako postoji, *sused desno* od v_i je v_{i+1}.

2. Preslikavanje $\Phi : \mathrm{PT}_n \to \mathrm{BT}_n$ (de Brujn–Morselt)

Neka je $T \in \mathrm{PT}_n$ sa korenom r i decom $r_1, \ldots, r_k$. Čvorovi stabla $\Phi(T)$ su sva nekorenska temena stabla T. Za svako takvo teme v definišemo:

$$\text{levo dete u } \Phi(T) := \begin{cases} v_1, & \text{ako } v \text{ ima decu u } T, \\ \text{prazno}, & \text{inače;} \end{cases}$$

$$\text{desno dete u } \Phi(T) := \begin{cases} \text{sused desno od } v, & \text{ako postoji,} \\ \text{prazno}, & \text{inače.} \end{cases}$$

Koren binarnog stabla $\Phi(T)$ jeste najlevlje dete r_1 korena stabla T (ako T ima samo koren, onda je $\Phi(T)$ prazno stablo).

Lema 3.35 *Ako je $T \in \mathrm{PT}_n$, tada je $\Phi(T) \in \mathrm{BT}_n$ binarno stablo sa tačno n čvorova.*

Dokaz. Svako nekorensko teme daje jedan čvor u $\Phi(T)$, pa ih je ukupno n. Levo dete je prvo dete u T, a desno dete je prvi sused desno; oba mogu postojati ili ne, pa je stepen svakog čvora ≤ 2. Dakle $\Phi(T)$ je binarno stablo sa n čvorova. □

3. Preslikavanje $\Psi : \mathrm{BT}_n \to \mathrm{PT}_n$ (obrnuta konstrukcija)

Neka je $B \in \mathrm{BT}_n$ sa korenom b (za $n = 0$ uzimamo $B = \emptyset$).

Dodamo novi čvor r, koji postaje koren dobijenog planarnog stabla $\Psi(B)$. Deca se rekonstruišu sledećim pravilom:

- **Deca korena r.** To je desni lanac polazeći od b:

  $$b,\ \mathrm{right}(b),\ \mathrm{right}^2(b), \ldots$$

  dokle god postoji desno dete.

- **Deca ostalih čvorova.** Ako y ima levo dete $y_L = \mathrm{left}(y)$, tada su deca od y:

  $$y_L,\ \mathrm{right}(y_L),\ \mathrm{right}^2(y_L), \ldots$$

  Ako y_L ne postoji, onda je y list.

Rekurzivno isti postupak primenjujemo u podstablima ukorenjenim u svakom novodobijenom detetu.

Lema 3.36 *Ako je $B \in \mathrm{BT}_n$, tada je $\Psi(B) \in \mathrm{PT}_n$ plane stablo sa $n+1$ temenom.*

Dokaz. Dodavanjem r i razlaganjem svake grane na levo dete i njegov desni lanac dobijamo tačno n novih temena plus novi koren r, ukupno $n + 1$. Hijerarhijska konstrukcija je aciklična i povezana, pa daje plane stablo. □

4. Glavna teorema – bijekcija

Teorema 3.37 *Za svako $n \geq 0$ preslikavanja*

$$\Phi : \mathrm{PT}_n \to \mathrm{BT}_n, \qquad \Psi : \mathrm{BT}_n \to \mathrm{PT}_n$$

su međusobni inverzi:

$$\Phi(\Psi(B)) = B \quad \textit{za svako } B \in \mathrm{BT}_n, \qquad \Psi(\Phi(T)) = T \quad \textit{za svako } T \in \mathrm{PT}_n.$$

Dokaz. Indukcija po n.

Baza $n = 0$. PT_0 sadrži jednočvorno stablo, a BT_0 prazno stablo; definicije daju $\Phi(\bullet) = \emptyset$ i $\Psi(\emptyset) = \bullet$.

Induktivni korak. Neka je $T \in \mathrm{PT}_n$ i neka koren r ima decu $r_1, \ldots, r_k$. U binarnom stablu $B = \Phi(T)$:

- koren je r_1;
- desni lanac iz r_1 je $r_1 \to r_2 \to \cdots \to r_k$;
- levo podstablo u r_i je $\Phi(T_i)$.

Primena Ψ vraća korektno decu korena r (desni lanac) i potom decu svakog r_i iz levog deteta i njegovog desnog lanca; po induktivnoj hipotezi svako podstablo T_i se tačno rekonstruiše. Dakle $\Psi(\Phi(T)) = T$.

Obrnuto, neka je $B \in \mathrm{BT}_n$ sa korenom b. U $\Psi(B)$ deca korena su desni lanac $b, \mathrm{right}(b), \ldots$; za svako dete y deca su desni lanac polazeći od $\mathrm{left}(y)$. Primena Φ tačno vraća prvo dete kao levo dete i suseda desno kao desno dete, što rekonstituiše B induktivno po podstablima. Dakle $\Phi(\Psi(B)) = B$. □

Broj planarnih stabala sa $n+1$ temenom i binarnih stabala sa n čvorova jednak je C_n.

□

3.3 Abelove granice i veza sa Dyck-ovim putanjama

Na kraju ovog poglavlja navodimo ilustrativnu primenu Dyck-ovih putanja u teoriji reči. U skorašnjem radu [13] pokazano je da se pojava abelovih granica u binarnim rečima može karakterisati pomoću Dyck-ovih podreči, što dodatno potvrđuje univerzalnost Katalanovih struktura.

Osnovni pojmovi

Skup Σ naziva se *alfabet* ako je konačan i neprazan skup simbola. Za reč $x = x[1..n]$ nad Σ prefiks, sufiks i faktor definišu se standardno: w je faktor reči x ako $x = uwv$ za neke reči u i v; prefiks ako je $u = \varepsilon$, sufiks ako je $v = \varepsilon$.

Reč u je *granica* reči x ako je istovremeno njen pravi prefiks i pravi sufiks. Parikh-vektor reči x označavamo sa P_x i definišemo kao $P_x[i]$ = broj pojavljivanja simbola a_i u reči x.

Abelove granice

Za binarnu reč x dužine n i $1 \leq m < n$ kažemo da je prefiks $x[1..m]$ *abelova granica* reči x ako prefiks i sufiks iste dužine imaju jednake Parikh-vektore:

$$P_{x[1..m]} = P_{x[n-m+1..n]}.$$

Reč koja nema nijednu nenultu abelovu granicu naziva se *abelovo-granično slobodnom.*

Tvrđenje 3.38 *Za svaku abelovu granicu u reči $x[1..n]$, dužine $|u| \neq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, postoji još jedna abelova granica u' reči x dužine $n - |u|$.*

Ovaj rezultat se navodi, između ostalog, i u radu [13].

Ternarna reprezentacija reči

Za binarnu reč x dužine $n > 2$ definiše se ternarna reč y_x dužine $1 \leq |y_x| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ preko:

$$y_x[i] = \begin{cases} a, & x[i] = x[n+1-i], \\ b, & x[i] = 0,\ x[n+1-i] = 1, \\ c, & x[i] = 1,\ x[n+1-i] = 0. \end{cases}$$

Veza sa Dyck-ovim podrečima

Tvrđenje 3.39 *Neka je x binarna reč dužine n. Najkraća abelova granica reči x ima dužinu k, gde $2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ako i samo ako je prefiks $y_x[1..k]$ najkraći prefiks ternarne reči y_x koji sadrži Dyck-ovu reč (ili njen binarni komplement) dužine $0 < 2h \leq k$ kao podniz.*

Detaljnije o ovom rezultatu videti u radu [13].

Ovaj rezultat pokazuje da se problem određivanja abelovih granica može prevesti na prepoznavanje pravilno ugnježdenih struktura tipičnih za Dyck-ove putanje, što predstavlja savremenu primenu Katalanovih objekata u kombinatorici reči.

Glava 4

Generalizacija Katalnovih brojeva

4.1 Uvod

Katalanovi brojevi $(C_n)_{n\geq 0} = 1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots$ predstavljaju jedan od najpoznatijih i najvažnijih nizova u kombinatorici. Njihova široka primena obuhvata oblasti kao što su kombinatorika, algebra, teorija formalnih jezika, geometrija i teorija matrica. Ovi brojevi broje različite strukture — od broja izbornih nizova, binarnih stabala, uređenih stabala, do triangulacija konveksnih poligona i Dyck-ovih puteva. Već sama raznovrsnost interpretacija ukazuje na duboku unutrašnju strukturu i univerzalnost ovog niza.

Prirodno se postavlja pitanje — da li i kako možemo proširiti ovu klasu brojeva? U ovom poglavlju razmatramo jednu takvu generalizaciju.

Cilj ovog poglavlja je definisanje beskonačne porodice celobrojnih nizova $(C_n^{(m)})_{n\geq 0}$ za svaki ceo broj $m \geq 1$, koje nazivamo *hipergrafski Katalanovi brojevi*. Posebno, kada je $m = 1$, dobijamo standardne Katalanove brojeve, tj. $C_n^{(1)} = C_n$. Nizovi $C_n^{(m)}$ pojavljuju se kao koeficijenti u analizi određenih modela slučajnih matrica i imaju duboke veze sa strukturama u teoriji hipergrafova.

Za početne vrednosti m, nizovi $C_n^{(m)}$ imaju sledeće vrednosti:

- $m = 1$: $1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots$
- $m = 2$: $1, 1, 6, 57, 678, 9270, \ldots$
- $m = 3$: $1, 1, 20, 860, 57200, 5344800, \ldots$
- $m = 4$: $1, 1, 70, 15225, 7043750, 6327749750, \ldots$
- $m = 5$: $1, 1, 252, 299880, 1112865264, 11126161436292, \ldots$

Definicija brojeva $C_n^{(m)}$ polazi od prebrojavanja određenih šetnji na stablima, pri čemu svakoj šetnji pridružujemo težinu određenu redom njene grupe automorfizama. Iako ova konstrukcija nije među najpoznatijim klasičnim interpretacijama Katalanovih brojeva, pokazuje se da ona za $m = 1$ takođe računa C_n, što će biti dokazano u teoremi 4.12.

Plan ovog poglavlja je sledeći: najpre dajemo formalnu definiciju niza $C_n^{(m)}$, zatim prikazujemo metode za njihovo računanje, a potom izlažemo šest kombinatornih interpretacija koje generalizuju klasične interpretacije Katalanovih brojeva.

4.2 Pristup putem stabala i šetnji

Razmatramo pristup u kojem se Katalanovi brojevi i njihove generalizacije izražavaju pomoću šetnji po stablima. Neka je $\mathscr{T}_n$ skup neobeleženih (neoznačenih) stabala sa n čvorova. Niz $|\mathscr{T}_n|$ počinje kao:

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 11,\ 23,\ 47,\ 106,\ \ldots,$$

pri čemu se, po konvenciji, postavlja $|\mathscr{T}_0| := 1$.

Za svako stablo $T \in \mathscr{T}_n$ i svaki njegov čvor $v \in T$, definišemo sledeću funkciju:

Definicija 4.1 *Neka je T stablo, a $v \in T$ njegov čvor. Broj $a_T(v)$ označava broj različitih šetnji koje počinju i završavaju u čvoru v, pri čemu se svaka grana stabla T posećuje tačno dva puta.*

Ovakve šetnje mogu se posmatrati kao prelazak svake grane po jednom u oba smera, pri čemu svaki čvor biva posećen najmanje jednom.

Definicija Za graf $G = (V, E)$ *automorfizam* je bijekcija $\varphi : V \to V$ takva da za svaka $u, v \in V$ važi

$$\{u, v\} \in E \iff \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E.$$

Skup svih automorfizama G čini grupu po kompoziciji; označavamo je $\Gamma(G)$, a njen *red* je $|\Gamma(G)|$.

Ako je (T, r) *korensko* stablo, onda je $\Gamma(T, r)$ podgrupa svih automorfizama koji dodatno fiksiraju koren: $\varphi(r) = r$. Ako je stablo *planarno* odnosno *uređeno*, automorfizmi takođe moraju očuvati levo–desni poredak dece svakog temena.

Na slici 4.1 prikazani su primeri vrednosti funkcije $a_T(v)$ za tri stabla iz skupa $\mathscr{T}_5$, kao i odgovarajući redovi grupa automorfizama: redom 2, 24 i 2.

Na primer, u gornjem levom stablu, listovi imaju vrednost $a_T(v) = 1$, dok unutrašnji čvorovi imaju vrednost $a_T(v) = 2$, što odražava različite mogućnosti prelazaka.

U ovom okviru, Katalanovi brojevi imaju sledeću interpretaciju:

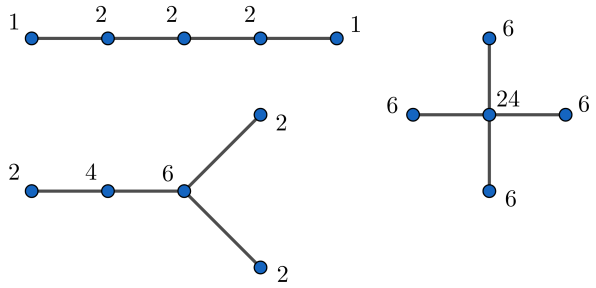
Za svaki $n \geq 0$ važi:

$$C_n = \sum_{T \in \mathscr{T}_{n+1}} \sum_{v \in T} \frac{a_T(v)}{|\Gamma(T)|}.$$

Primer 4.2 *Za $n = 4$, koristeći stabla iz $\mathscr{T}_5$, dobijamo:*

$$C_4 = \frac{8}{2} + \frac{48}{24} + \frac{16}{2} = 4 + 2 + 8 = 14.$$

Detaljniju diskusiju dajemo kao deo dokaza Teoreme 4.12.



Slika 4.1: Stabla iz skupa $\mathscr{T}_5$, sa čvorovima označenim vrednostima funkcije $a_T(v)$. Redovi grupa automorfizama su 2, 24 i 2.

4.2.1 Generalizacija: m-šetnje po stablima

Za fiksirani ceo broj $m \geq 1$, uvodimo sledeću generalizaciju funkcije $a_T(v)$:

Definicija 4.3 ***$a_T^{(m)}$-šetnja*** *koja počinje u čvoru v jeste šetnja koja počinje i završava u v, i koja prelazi svaku granu stabla T tačno $2m$ puta. Broj takvih šetnji označavamo sa $a_T^{(m)}(v)$.*

Za $m = 1$ se dobija prethodno definisana funkcija: $a_T^{(1)}(v) = a_T(v)$. Svaka takva šetnja prelazi svaku granu m puta u svakom smeru.

Na osnovu ove konstrukcije, uvodimo sledeću ključnu definiciju:

Definicija 4.4 ***Hipergrafski Katalanov broj*** *reda m, označen sa $C_n^{(m)}$, definisan je formulom:*

$$C_n^{(m)} = \sum_{T \in \mathscr{T}_{n+1}} \sum_{v \in T} \frac{a_T^{(m)}(v)}{|\Gamma(T)|}.$$

Primer 4.5 *Za $n = 4$ i $m = 2$, koristeći šetnje prikazane na slici 4.1, dobijamo:*

$$C_4^{(2)} = \frac{216}{2} + \frac{5040}{24} + \frac{720}{2} = 108 + 210 + 360 = 678.$$

Ovaj pristup otvara mogućnost za dalje kombinatorne i algebarske interpretacije, koje ćemo razraditi u narednim poglavljima.

4.3 Kombinatorne interpretacije generalizovanih Katalanovih brojeva

U ovom poglavlju prikazujemo kombinatorne interpretacije generalizovanih Katalanovih brojeva $C_n^{(m)}$ koje proširuju klasične interpretacije brojeva C_{nm}. U osnovi ovih interpretacija nalazi se ideja o tzv. m-označavanju struktura koje poseduju prirodnu posetsku organizaciju i po nivoima. Kroz naredne definicije postavljamo formalni okvir za ove interpretacije.

4.3.1 Struktura nivoa i posetska organizacija

U kontekstu opšte kombinatorne interpretacije brojeva $C_n^{(m)}$, radimo sa klasom objekata X, koji se javljaju u klasičnim interpretacijama Katalanovih brojeva (kao što su triangulacije, binarna stabla itd.). Svaki takav objekat biće predstavljen kao konačan skup sastavljen od elementarnih jedinica (čvorova, lukova, stepenika i sl.), koje dodatno opremamo hijerarhijskom strukturom.

Definicija 4.6 *Neka je X konačan skup.* Struktura nivoa *za X je surjektivna funkcija*

$$\ell : X \to \{1, 2, \ldots, N\}, \quad \text{za neki } N \in \mathbb{Z}_{>0},$$

koja svakom elementu $x \in X$ dodeljuje njegov nivo. Za $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, skup

$$X_i := \ell^{-1}(i)$$

*nazivamo i-*tim nivoom *objekta X. U nekim slučajevima prirodno se uvodi i nulti nivo X_0, u kojem se najčešće nalazi korenski element, sa konvencijom $|X_0| = 1$.*

Neformalno, za dva elementa $x, x' \in X$, kažemo da je x na višem nivou od x' ako važi $\ell(x) > \ell(x')$, a analogno definišemo odnose za iste i niže nivoe. Napominjemo da grafički prikaz (npr. dijagrami stabala) ne mora nužno odražavati numeričke vrednosti funkcije ℓ; ona je apstraktna oznaka nivoa, a ne geometrijska visina.

Dalje, objektu X dodeljujemo strukturu parcijalnog uređenja koja reflektuje odnose roditelj–dete u odgovarajućim interpretacijama.

Definicija 4.7 *Neka je X* poset*, tj. parcijalno uređen skup sa relacijom pokrivanja. Kažemo da element $x \in X$* pokriva *element $x' \in X$ (tj. x je roditelj od x', a x' dete od x) ako su uporedivi relacijom uređenja, i ako važi:*

$$\ell(x') = \ell(x) + 1.$$

Drugim rečima, funkcija nivoa mora biti kompatibilna sa posetskom strukturom u tom smislu da su deca uvek tačno jedan nivo iznad svojih roditelja.

Ukoliko je nivo 0 definisan (koren), tada se funkcija nivoa ℓ može jednoznačno rekonstruisati iz same posetske strukture.

4.3.2 Dopuštena m-označavanja

Za dalju analizu brojeva $C_n^{(m)}$, biće ključno uvođenje posebne vrste funkcija koje nazivamo m-označavanje, zasnovanim na strukturi nivoa definisanoj u prethodnom odeljku.

Definicija 4.8 *Neka su A i B skupovi. Njihova* disjunktna unija*, označena sa*

$$A \sqcup B,$$

definiše se kao unija skupova A i B pod pretpostavkom da su A i B međusobno disjunktni, tj. $A \cap B = \varnothing$. Po potrebi se može definisati i formalna disjunktna unija

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}),$$

čime se obezbeđuje da se elementi iz A i B razlikuju po pripadnosti kojoj komponenti unije pripadaju.

Definicija 4.9 *Neka je $m \in \mathbb{N}$, i neka je $X = X_0 \sqcup \bigsqcup_{i>0} X_i$ disjuktno razlaganje objekta X po nivoima. Fiksirajmo proizvoljan beskonačan skup oznaka L. Za svaki $i > 0$, pretpostavimo da je $|X_i| \equiv 0 \pmod m$, te da je X_i dodatno disjunktno razložen na blokove (podskupove) veličine tačno m.*

*Funkcija koja svakom takvom bloku dodeljuje oznaku iz L naziva se m-*označavanje *objekta X. Kažemo da je to označavanje* dopušteno *ako su zadovoljena sledeća dva uslova:*

1. ***Injektivnost:*** *Svaki blok dobija različitu oznaku iz skupa L;*
2. ***Kompatibilnost sa posetskom strukturom:*** *Ako dva elementa $x, x' \in X \setminus X_0$ imaju istu oznaku, tada i njihovi roditelji (ako postoje) moraju imati istu oznaku.*

Drugim rečima, dopušteno m-označavanje jeste particija skupa $X \setminus X_0$ na blokove veličine m, zajedno sa označavanjem tih blokova, tako da ako dva elementa dele oznaku, tada i njihovi roditelji dele oznaku. Uslov injektivnosti sprečava ponavljanje oznaka među blokovima.

Napomena Dva m-označavanja smatramo *ekvivalentnim* ako se jedno može dobiti od drugog permutacijom oznaka iz skupa L. Drugim rečima, brojimo različite klase označavanja koje se ne razlikuju po imenima oznaka, već po njihovoj raspodeli. Takođe, kada je $m = 1$, svi zahtevi za dopuštenost postaju trivijalni, pa je svako označavanje dopušteno.

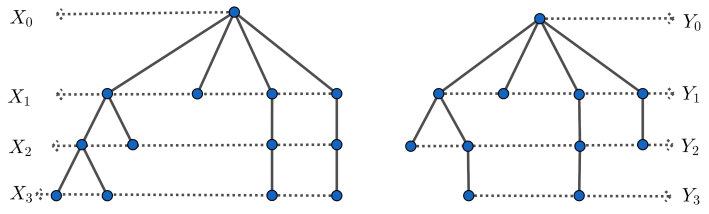
Radi ilustracije prethodno definisanih pojmova, razmotrimo konkretan primer u kojem je objekat X uređeno stablo.

Primer 4.10 *Neka je X uređeno stablo sa korenom v. Svaki čvor $x \in X$ dodeljuje se nivou*

$$\ell(x) := \textit{udaljenost od } x \textit{ do korena } v,$$

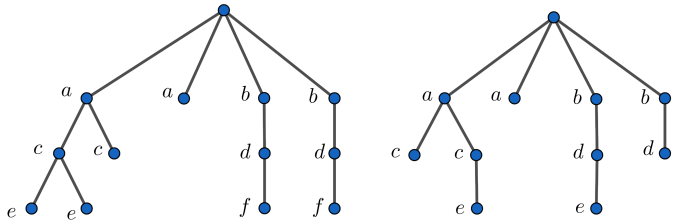
pri čemu je $X_0 = \{v\}$. Posetska struktura proizlazi iz roditeljskih odnosa u stablu: čvor x je roditelj čvora x' ako su povezani granom i ako je $\ell(x') = \ell(x) + 1$.

Na Slici 4.2 prikazana su dva ovakva stabla, svako sa četiri nivoa. Na Slici 4.3 data su ista stabla sa pokušajem 2-označavanje. Oznaka (iz skupa $L = \{a, b, c, d, e\}$) prikazane su slovima unutar čvorova. Levo stablo je dopušteno



Slika 4.2: Korensko stablo sa 4 nivoa.

2-označavanje, *jer svaka oznaka dodeljena paru čvorova ima roditelje sa istom oznakom. Desno stablo to nije: donji čvorovi označeni istom oznakom e imaju roditelje označene različitim oznakama c i d, čime se narušava uslov kompatibilnosti.*



Slika 4.3: 2-označavanje korenskog stabla

4.3.3 Formula za $C_n^{(m)}$ putem dopuštenih označavanja

Razmotrimo fiksirane prirodne brojeve n i m, i neka je $\mathcal{X}_{nm}$ skup kombinatornih objekata koji učestvuju u interpretaciji broja C_{nm} — klasičnog Katalanovog broja. U nastavku ćemo razmotriti konkretne primere takvih objekata, ali uopšteno, za svaki objekat $X \in \mathcal{X}_{nm}$, pretpostavljamo da su mu određeni:

- *Posetska struktura*, koja definiše odnose roditelj–dete;
- *Struktura nivoa* ℓ, kompatibilna sa prethodnom, u smislu da svako dete pripada tačno jednom višem nivou u odnosu na svog roditelja.

Na osnovu prethodno uvedenog pojma dopuštenog m-označavanja, definišemo sledeću funkciju:

Definicija 4.11 *Za svaki objekat $X \in \mathcal{X}_{nm}$, označimo sa $N_m(X)$ broj* dopuštenih m-označavanja *objekta X, u skladu sa pravilima definisanim u prethodnoj sekciji.*

Tada važi sledeća ključna formula koja izražava hipergrafske Katalanove brojeve $C_n^{(m)}$ kao zbir dopuštenih označavanja objekata u skupu $\mathcal{X}_{nm}$:

Teorema 4.12 *Za sve $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, važi:*

$$C_n^{(m)} = \sum_{X \in \mathcal{X}_{nm}} N_m(X). \tag{8}$$

Napomena Veličina svakog pozitivnog nivoa u objektu $X \in \mathcal{X}_{nm}$ mora biti deljiva sa m kako bi broj dopuštenih m-označavanja $N_m(X)$ bio različit od nule. Ovaj *neophodan uslov deljivosti* proističe iz konstrukcije: svaki nivo se mora podeliti na disjunktne blokove veličine m kako bi se na njih mogla primeniti funkcija označavanja. Međutim, važno je naglasiti da ovaj uslov nije dovoljan.

Na primer, na slici 4.3 prikazana su dva objekta čiji pozitivni nivoi imaju parne veličine (tj. deljive sa $m = 2$), ali dopušteno 2-označavanje postoji samo za jedan od njih. To pokazuje da je dodatno neophodna i kompatibilnost označavanja sa posetskom strukturom.

Napomena Kada je $m = 1$, svi uslovi za dopuštenost označavanja se trivijalizuju. Svaka particija pozitivnih nivoa na jedinične blokove automatski zadovoljava uslove za dopušteno označavanje. Otuda svaki objekat $X \in \mathcal{X}_n$ ima tačno jedno takvo označavanje, što implicira da je $N_1(X) = 1$ za svaki $X \in \mathcal{X}_n$. Uvrštavanjem u formulu (8), dobijamo:

$$C_n^{(1)} = \sum_{X \in \mathcal{X}_n} N_1(X) = |\mathcal{X}_n| = C_n,$$

što potvrđuje da se u slučaju $m = 1$ vraćamo na klasičnu kombinatornu interpretaciju Katalanovih brojeva.

Sada smo spremni da izložimo konkretne kombinatorne interpretacije brojeva $C_n^{(m)}$. Svaka od ovih interpretacija polazi od poznatih objekata koji se pojavljuju u standardnim tumačenjima Katalanovih brojeva, uz dodatnu strukturu nivoa i odnosa roditelj–dete. Za svaku interpretaciju jasno definišemo kako su elementi objekta raspoređeni po nivoima i kako je uspostavljena posetska hijerarhija među njima. Ilustrativni primeri svih objekata dati su na Slikama 4.4 i 4.5.

(i) **Uređena stabla.** Skup $\mathcal{X}_{nm}$ čine uređena ukorenjena stabla sa $nm + 1$ temenom. Struktura nivoa određena je rastojanjem svakog čvora od korena, dok je odnos roditelj–dete indukovan standardnim granama stabla.

(ii) **Dyck-ovi putevi.** Skup $\mathcal{X}_{nm}$ čine Dyck-ovi putevi od tačke $(0, 0)$ do $(2mn, 0)$. Elementi objekta su tzv. ploče, koje predstavljaju povezane komponente preseka unutrašnjosti Dyck-ovog puta sa horizontalnim trakama $Y_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid k - 1 < y < k\}$. Ploča se nalazi na nivou k ako pripada traci Y_k. Nulti nivo je prazan, a hijerarhija je određena po vertikalnom položaju — ploča je roditelj ako se nalazi direktno ispod druge ploče.

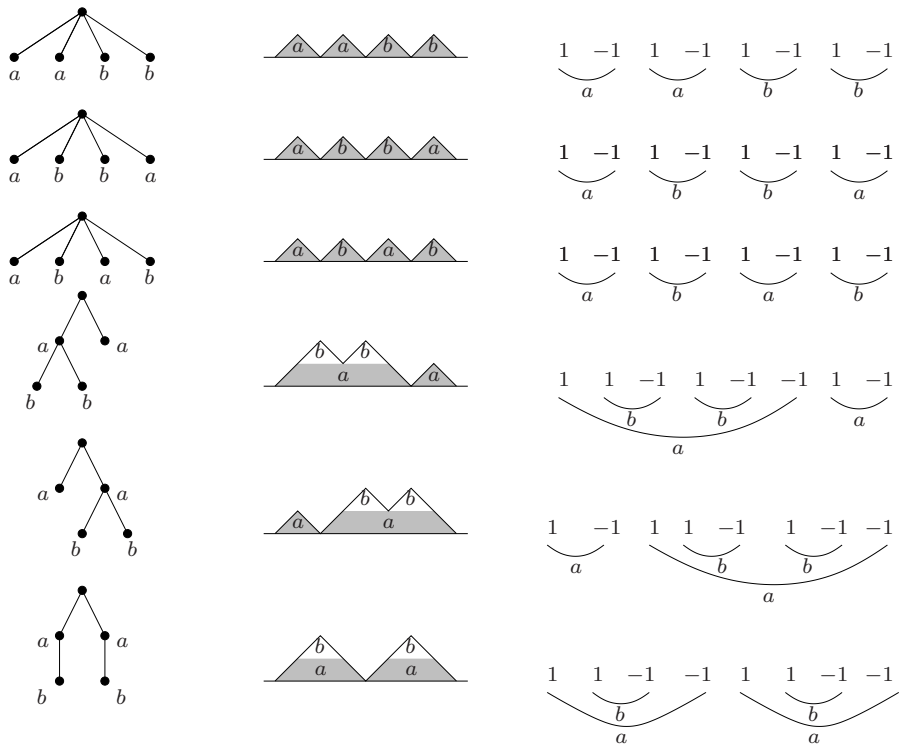
(iii) **Izborni nizovi.** Skup $\mathcal{X}_{nm}$ čine izborni nizovi $B = (a_1, a_2, \ldots, a_{2nm})$ sastavljeni od brojeva 1 i -1, uz uslov da su svi parcijalni zbirovi $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ nenegativni i da je ukupan zbir nula. Par (i, j) se formira kada je $a_i = 1$, $a_j = -1$, parcijalni zbirovi zadovoljavaju $s_i = s_j + 1$, a indeks j je najmanji sa tim svojstvom. Nivoi se određuju prema vrednostima parcijalnih zbirova s_i, a roditelj je onaj element koji pripada nižem nivou i vremenski obuhvata svoje dete.

(iv) **Binarna ravna stabla.** Skup $\mathcal{X}_{nm}$ čine sva binarna stabla sa nm čvorova. Nivoi su definisani na osnovu broja levih skretanja prilikom silaska od korena do čvora: čvor se nalazi na i-tom nivou ako se do njega stiže tačno sa $i - 1$ levih skretanja. Nulti nivo je prazan. Odnos roditelj–dete zasniva se na jedinom levom skretanju koje ih razdvaja.

(v) **Triangulacije.** Neka je Π pravilan mnogougao sa $nm + 2$ temena. Skup $\mathcal{X}_{nm}$ čine sve moguće triangulacije Π koje ne dodaju nova temena. Nivoi se

određuju na osnovu geodetske udaljenosti trouglova od fiksiranog početnog trougla, kroz niz skretanja levo ili desno. Roditelj je trougao iz kojeg se može stići u dati trougao jednim desnim i proizvoljnim brojem levih skretanja.

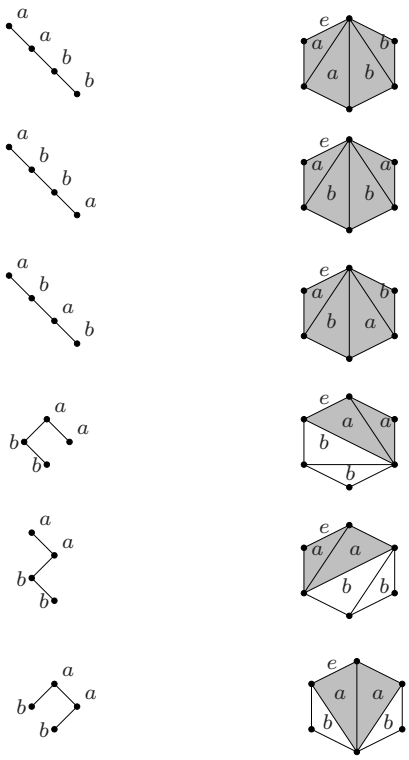
Slike 4.4 i 4.5 prikazuju ilustracije svih pet interpretacija za slučaj $C_2^{(2)} = 6$. U ovom slučaju, svaki objekat koji omogućava dopušteno 2-označavanje ima najviše dva pozitivna nivoa. Prvi nivo je prikazan svetlosivom bojom, dok je drugi prikazan belom. Oznake su označene slovima a i b. Posebno napominjemo da samo jedan objekat doprinosi sa više od jednog 2-označavanje, i on se pojavljuje u prva tri reda na svakoj od figura.



Slika 4.4: Uređena stabla, Dyck-ovi putevi, Izborni nizovi

Bijekcija: ploče Dyck-ove putanje $\leftrightarrow$ parovi u izbornom nizu. Neka $\mathcal{D}_{mn}$ označava skup Dyck-ovih putanja od $(0,0)$ do $(2mn,0)$ sa koracima $(1,1)$ i $(1,-1)$. Za $\pi \in \mathcal{D}_{mn}$ definišemo niz $a = (a_1, \ldots, a_{2mn}) \in \{\pm 1\}^{2mn}$ tako da $(1,1) \mapsto +1$ i $(1,-1) \mapsto -1$, a parcijalne zbirove označimo sa $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ (uz $s_0 = 0$). Dyck-uslov daje $s_k \geq 0$ za sve k i $s_{2mn} = 0$, pa je a izborni niz.

Parovi u izbornom nizu. Za svaki indeks i sa $a_i = +1$ definišemo njegov par $j = \mathrm{match}(i)$ kao najmanji indeks $j > i$ takav da $s_j = s_{i-1}$ (standardno uparivanje



Slika 4.5: Binarna ravna stabla, Triangulacija mnogougla

zagrada po pravilu steka). Skup svih takvih parova je

$$\mathcal{P}(a) = \{(i,j) \mid a_i = +1,\ j = \mathrm{match}(i)\}.$$

Nivo para je $L(i,j) = s_{i-1} + 1$.

Ploče Dyck-ove putanje. Za $k \geq 1$ neka je $Y_k = \{(x,y) \mid k-1 < y < k\}$ horizontalna traka. Unutrašnjost regiona ispod putanje π seče Y_k u konačno mnogo intervala; njihove povezane komponente nazivamo *pločama* na nivou k. Skup ploča označimo sa $\mathcal{Q}(\pi)$. Svaka ploča na nivou k ograničena je odozdo pravom $y = k-1$ i odozgo segmentom putanje između prvog uspona sa $y = k-1$ na $y = k$ i prvog kasnijeg silaska sa $y = k$ na $y = k-1$.

Teza. Preslikavanje $\Phi : \mathcal{Q}(\pi) \to \mathcal{P}(a)$ koje svakoj ploči Q na nivou k dodeljuje par (i,j) gde je i indeks prvog uzlaznog koraka kojim π ulazi u Q, a j indeks prvog silaznog koraka kojim π izlazi iz Q, jeste bijekcija. Pri tom se nivo čuva:

$$L(\Phi(Q)) = k,$$

a relacija roditelj–dete između ploča odgovara relaciji stroge ugnježđenosti lukova (i,j).

Dokaz. Neka Q leži na nivou k. Prvi ulaz u Q je uzlazni korak sa visine $k-1$ na k, pa je $a_i = +1$ i $s_{i-1} = k-1$, što daje $L(i,j) = k$. Izlaz iz Q je prvi silazni korak koji vraća putanju sa visine k na $k-1$, što je upravo $j = \mathrm{match}(i)$ iz uparivanja zagrada. Time je Φ dobro definisana.

Injektivnost je očigledna: dve različite ploče imaju različite ulazne i izlazne korake, pa daju različite parove (i,j).

Za surjektivnost, uz proizvoljan par $(i,j) \in \mathcal{P}(a)$ posmatrajmo deo putanje od i do j. On počinje ulazom na nivo $s_{i-1}+1$ i prvi put se vraća na nivo s_{i-1} upravo u koraku j. Region između tog segmenta i prave $y = s_{i-1}$ čini jedinstvenu ploču Q na nivou $s_{i-1}+1$ za koju je $\Phi(Q) = (i,j)$.

Očuvanje nivoa sledi direktno iz $L(i,j) = s_{i-1}+1 = k$. Za relaciju roditelj–dete: ploča Q' je neposredno ugnježdena u ploču Q ako i samo ako se odgovarajući luk (i',j') nalazi strogo unutar luka (i,j), bez međuluka između njih, što je standardna karakterizacija neposrednog potomstva u ugnježđenoj strukturi zagrada. Dakle, Φ je izomorfizam hijerarhija. $\square$

Teorema 4.13 *Neka su za fiksne $n \geq 0$ i $m \geq 1$ dati skupovi objekata* (i)–(v) *i neka $\mathcal{X}_{nm}$ označava odgovarajući skup objekata u jednoj od tih interpretacija, a $N_m(X)$ broj dopuštenih m-označavanja objekta X. Tada važi*

$$C_n^{(m)} \;=\; \sum_{X \in \mathcal{X}_{nm}} N_m(X),$$

tj. svaka od pet interpretacija zaista predstavlja validnu kombinatornu interpretaciju broja $C_n^{(m)}$.

Dokaz. Dokaz Teoreme 4.13 za interpretaciju (i) Da bismo zaključili dokaz teoreme, dovoljno je pokazati da interpretacija uređenih stabala sa dopuštenim m-označavanjima zaista prebrojava brojeve $C_n^{(m)}$. U nastavku gradimo preciznu bijekciju između dva objekta:

$$\mathcal{C}/\!\sim \qquad \text{i} \qquad \mathcal{A}_{mn+1},$$

pri čemu prvi skup predstavlja šetnje po automorfizmima, a drugi skup predstavlja m-označena uređena stabla.

1. Skup šetnji po automorfizmima

Definišemo

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{n+1} := \big\{(T,w) \;\big|\; T \in T_{n+1},\ w \text{ je } a_T^{(m)}\text{-šetnja}\big\},$$

gde T_{n+1} označava skup svih ukorenjenih stabala sa $n+1$ temenom, a $a_T^{(m)}$-šetnja je definisana u prethodnom odeljku.

Na $\mathcal{C}$ uvodimo relaciju ekvivalencije

$$(T,w) \sim (T',w') \quad \Longleftrightarrow \quad T = T' \ \text{ i postoji } \varphi \in \mathrm{Aut}(T) \text{ sa } \varphi{\cdot}w = w'.$$

Dakle, dve šetnje smatramo ekvivalentnim ako se razlikuju samo za automorfizam stabla. Skup orbita označavamo sa $\mathcal{C}/\!\sim$.

Iz konstrukcije $a_T^{(m)}$-šetnji (i faktorisanja po automorfizmima) poznato je da važi

$$\big|\mathcal{C}/\!\sim\big| \;=\; C_n^{(m)}. \tag{4.1}$$

2. Skup dopušteno m-označenih uređenih stabala

Neka $\mathcal{P}_{mn+1}$ označava skup uređenih stabala sa $mn+1$ temenom. Definišemo

$$\mathcal{A}_{mn+1} := \Big\{(T,\ell) \;\Big|\; T \in \mathcal{P}_{mn+1},\ \ell \text{ je dopušteno } m\text{-označavanje}\Big\}. \tag{4.2}$$

Ako $N_m(T)$ označava broj dopuštenih m-označavanja stabla T, tada

$$|\mathcal{A}_{mn+1}| = \sum_{T\in\mathcal{P}_{mn+1}} N_m(T),$$

što je upravo izraz iz tvrdnje teoreme.

3. Plan dokaza

Konstruisaćemo bijekciju između skupova $\mathcal{C}/\sim$ i $\mathcal{A}_{mn+1}$ putem preslikavanja

$$\alpha : \mathcal{C}/\sim \longrightarrow \mathcal{A}_{mn+1}, \qquad \beta : \mathcal{A}_{mn+1} \longrightarrow \mathcal{C}/\sim .$$

Dokazaćemo da su oba preslikavanja dobro definisana i da su međusobno inverzna.

4. Definicija preslikavanja α

Za orbitu $[T,w] \in \mathcal{C}/\sim$ definišemo

$$\alpha([T,w]) = (\widetilde{T},\widetilde{\ell}),$$

gde se par $(\widetilde{T},\widetilde{\ell})$ gradi u dva koraka opisane u nastavku.

- **Konstrukcija uređenog stabla $\widetilde{T}$.** Neka šetnja w počinje u temenu v_0. Posmatramo T kao ukorenjeno stablo sa korenom v_0 i čitamo šetnju w redom.

  Svaki prelazak preko grane $e = \{u,v\}$ može se pojaviti u jednom od dva smera:

  (a) *silazak*: šetnja prelazi e u smeru od roditelja ka detetu;
  (b) *povratak*: prelazi e u smeru od deteta ka roditelju.

  Samo silasci (a) utiču na konstrukciju $\widetilde{T}$: svaki put kada se u šetnji w desi silazak preko grane e, u $\widetilde{T}$ dodajemo *novog potomka* trenutnog čvora. Redosled kojim se silasci pojavljuju u šetnji određuje planarni redosled dece u $\widetilde{T}$ (s leva na desno).

  Pošto se svaka grana u T prelazi ka detetu tačno m puta (po definiciji $a_T^{(m)}$-šetnje), iz jedne grane e nastaje tačno m novih potomaka, smeštenih uzastopno u planarnom poretku. Tako dobijamo uređeno stablo sa mn grana, odnosno $mn+1$ temenom.

- **Konstrukcija oznaka $\widetilde{\ell}$.** Šetnja w preko svake grane e sadrži tačno m uzastopnih silazaka (svaki silazak u smislu (a) je jedan 'odlazak od roditelja ka detetu'). U prethodnom koraku, tih m silazaka proizvelo je blok od m uzastopnih potomaka u urešenom stablu $\widetilde{T}$.

  Oznaku $\widetilde{\ell}$ definišemo tako da *svi potomci u tom bloku dobiju istu oznaku.* Drugim rečima:

(a) svaki izvorni silazak preko grane e daje po jedno dete u $\widetilde{T}$;

(b) m silazaka preko iste grane e daju blok od m uzastopnih potomaka;

(c) svim tim potomcima dodeljujemo istu oznaku (zavisi samo od grane e).

Na taj način se čvorovi $\widetilde{T}$ prirodno dele na blokove veličine m, koji se u potpunosti poklapaju sa pričom o dopuštenom m-označavanju: broj dece na svakom pozitivnom nivou je deljiv sa m, a blokovi poštuju hijerarhiju roditelj–dete.

Stoga je $\widetilde{\ell}$ upravo dopušteno m-označavanje u smislu definicije.

Automorfizmi izvornog stabla T mogu permutovati simetrične (izomorfne) grane, ali takve permutacije ne menjaju redosled prelazaka u šetnji w. Zato konstrukcija $(\widetilde{T}, \widetilde{\ell})$ zavisi isključivo od orbite $[T, w]$, a ne od izbora predstavnika, pa je α dobro definisana.

5. Definicija preslikavanja β

Za $(T, \ell) \in \mathcal{A}_{mn+1}$ definišemo

$$\beta(T, \ell) = [\widehat{T}, \widehat{w}],$$

gde:

- $\widehat{T}$ je stablo dobijeno *kolapsiranjem* svakog bloka od m uzastopnih potomaka sa istom oznakom u jedno dete.

  Preciznije, u uređenom stablu T deca svakog temena su podeljena u uzastopne blokove veličine m (zahvaljujući dopuštenosti označavanja ℓ), i svi članovi jednog bloka predstavljaju 'm-kopije' iste izvorne potomke–grane. Kolapsiranje znači da se svaki takav blok od m čvorova zamenjuje jednim detetom. Tako se iz $|E(T)| = mn$ paralelnih potomaka dobija tačno n grana u $\widehat{T}$, pa $\widehat{T}$ ima $n+1$ temena. Ovaj postupak ne uključuje nikakav izbor: blokovi su jednoznačno određeni oznakama i planarnim poretkom.

- $\widehat{w}$ je $a^{(m)}_{\widehat{T}}$-šetnja dobijena čitanjem oznaka u ℓ u uređenom poretku i prepisivanjem svakog bloka od m potomaka kao m uzastopnih prelazaka odgovarajuće grane u $\widehat{T}$.

  Naime, kontur–obilazak stabla T daje hronološki redosled pojavljivanja blokova u kojima se nalaze m-kopije iste potomke. Svaki takav blok se u $\widehat{T}$ prepoznaje kao jedna grana $\widehat{e}$, a činjenica da blok sadrži tačno m elemenata znači da šetnja mora preći granu $\widehat{e}$ tačno m puta 'ka detetu' i isto toliko puta nazad. Tim prepisivanjem blokova u prelaze grana dobijamo jedinstvenu šetnju $\widehat{w}$ koja prelazi svaku granu $\widehat{T}$ tačno $2m$ puta — upravo šetnju tipa $a^{(m)}_{\widehat{T}}$.

Pošto je struktura blokova u potpunosti zadana oznakama ℓ i planarnim poretkom u T, a sve simetrije sakupljenog stabla $\widehat{T}$ identifikuju se u orbiti $\mathcal{C}/\sim$, preslikavanje β je dobro definisano.

6. Dobro definisanost preslikavanja α i β

Preslikavanja α i β su dobro definisana.

Dokaz smo već dali u tačkama (4) i (5): α ne zavisi od izbora predstavnika orbite, a β ne zavisi od izbora reprezentacije oznaka unutar blokova. Oba preslikavanja poštuju strukturu orbita u $\mathcal{C}/\sim$.

7. Inverznost preslikavanja

Preslikavanja α i β su međusobno inverzna.

Dokažimo da je $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \beta = \mathrm{id}$.

(1) $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$ **na** $\mathcal{C}/\sim$**.** Polazimo od klase $[T, w]$. Konstrukcija α razvija šetnju w u uređeno stablo $\widetilde{T}$ sa blokovima po m (Korak A1–A2). Potom β ponovo kolapsira te blokove u izvorne grane stabla T i iz njih rekonstruše w kao $a_T^{(m)}$-šetnju (Korak B1–B2). Razlike usled automorfizama upadaju u odnos $\sim$. Dakle, $\beta(\alpha([T, w])) = [T, w]$.

(2) $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$ **na** $\mathcal{A}_{mn+1}$**.** Polazimo od $(T, \ell) \in \mathcal{A}_{mn+1}$. Preslikavanje β prvo kolapsira blokove od m potomaka u jedno dete i gradi izvorno stablo $\widehat{T}$, a zatim formira $a_{\widehat{T}}^{(m)}$-šetnju $\widehat{w}$. Primena α ponovo rastavlja te blokove na m potomaka u uređenom poretku i vraća upravo originalno (T, ℓ).

Time su oba kompozita identiteti, pa su α i β međusobni inverzi.

8. Zaključak

Kombinovanjem (4.1) i bijekcije

$$\mathcal{C}/\sim \longleftrightarrow \mathcal{A}_{mn+1}$$

dobijamo da broj elemenata interpretacije (i) iznosi

$$|\mathcal{A}_{mn+1}| = C_n^{(m)},$$

što završava dokaz Teoreme 4.13 za interpretaciju (i). □

Naredno tvrđenje posledica je teoreme 4.13.

Tvrđenje 4.14 *Za svaki $n \geq 0$ važi*

$$C_n = \sum_{T \in \mathscr{T}_{n+1}} \sum_{v \in V(T)} \frac{a_T(v)}{|\Gamma(T)|},$$

gde je $\mathscr{T}_{n+1}$ skup predstavnika izomorfijskih klasa nenumerisanih stabala sa $n+1$ temena, $V(T)$ skup temena stabla T, $\Gamma(T)$ grupa automorfizama stabla T, a $a_T(v)$ broj zatvorenih hodova koji na grafu dobijenom udvostrucivanjem svake grane stabla T počinju u v, koriste svaku (kopiju) grane tačno jednom (otuda svaku originalnu granu tačno dva puta) i završavaju se u v.

Zaključak

U ovom radu proučavali smo tri važne klase posebnih brojeva u kombinatorici: Stirlingove brojeve, harmonijske brojeve i Katalanove brojeve, kao i njihove

generalizacije. Svaka od ovih numeričkih nizova igra značajnu ulogu u različitim granama matematike – od teorije skupova i funkcija, preko analize i teorije brojeva, do kombinatornih struktura i algoritama.

Stirlingovi brojevi prvog i drugog reda omogućavaju elegantne interpretacije raznih problema prebrojavanja, posebno onih koji se odnose na permutacije i particije. Harmonijski brojevi pojavljuju se u analizi i teoriji redova, ali i u izražavanju vrednosti pojedinih suma i koeficijenata. Katalanovi brojevi, koji se pojavljuju u velikom broju kombinatornih problema, predstavljeni su i kroz svoje klasične i kroz generalizovane oblike.

Poseban fokus rada bio je na generalizaciji Katalanovih brojeva, odnosno na tzv. m-Katalanovim brojevima $C_n^{(m)}$, čija se kombinatorna bogatost ogleda kroz različite interpretacije: planarna stabla, Dyck-ovi putevi, izborni nizovi, triangulacije i binarna stabla. Kroz detaljnu analizu i konstrukciju bijekcija pokazali smo ekvivalenciju ovih interpretacija, čime je dodatno osvetljena njihova strukturalna koherentnost.

Pored pregleda poznatih rezultata, rad sadrži i konstruktivne dokaze koji povezuju različite modele i osvetljavaju unutrašnju logiku generalizovanih Katalanovih brojeva. Ovi rezultati ne samo da produbljuju razumevanje klasičnih kombinatornih objekata, već otvaraju prostor za dalje istraživanje – bilo u pravcu daljih generalizacija, bilo u pronalaženju novih aplikacija u teoriji grafova, enumerativnoj kombinatorici i računarstvu.

Literatura

[1] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume 2*, Cambridge University Press, 1999.

[2] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1994.

[3] K. H. Rosen (ed.), *Applications of Discrete Mathematics*, McGraw-Hill, 1988.

[4] P. E. Gunnells, *Generalized Catalan Numbers from Hypergraphs*, Department of Mathematics and Statistics, University of Massachusetts, Amherst, 2021.

[5] S. Roman, *An Introduction to Catalan Numbers*, Birkhäuser, Cham, 2015.

[6] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume 1*, Cambridge University Press, 2012.

[7] R. P. Stanley, *Catalan Numbers*, Cambridge University Press, 2015.

[8] P. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2009.

[9] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*, Reidel, 1974.

[10] N. G. de Bruijn, B. Morselt, *A note on plane trees*, Nieuw Arch. Wisk., 15 (1967), 38–40.

[11] E. Deutsch, *Dyck paths and Catalan numbers*, Discrete Mathematics, 204 (1999), 167–202.

[12] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I*, Wiley, 1968.

[13] M. Christodoulakis, M. Christou, M. Crochemore, C. S. Iliopoulos, "Abelian borders in binary words", *Discrete Applied Mathematics* **171** (2014), 141–146.

[14] D. Berend, J. E. Harmse, "On some arithmetical properties of middle binomial coefficients", *Acta Arithmetica* **84** (1998), 31–41.

[15] T. Edgar, M. Z. Spivey, "Multiplicative functions, generalized binomial coefficients, and generalized Catalan numbers", *Journal of Integer Sequences* **19** (2016), Article 16.1.6.

[16] C. Pomerance, "Divisors of the middle binomial coefficient", *American Mathematical Monthly* **121** (2014), 1–18.

[17] A. Z. Broder, "The r-Stirling numbers", *Discrete Mathematics* **49** (1984), 241–259.

Biografija

Vladimir Milošević rođen je 28. novembra 1989. godine u Šapcu. Osnovnu školu "Dositej Obradović" u Volujcu završio je 2004. godine, nakon čega je 2008. godine završio Ekonomsko-trgovinsku školu "Stana Milanović" u Šapcu. Iste godine upisuje osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika (M1).
Diplomirao je 2013. godine, nakon čega počinje da radi kao profesor matematike u osnovnoj školi "Laza K. Lazarević" u Šapcu. Godine 2019. upisao je integrisane osnovne i master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, na smeru master profesor matematike (M5). Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom, čime je stekao pravo na odbranu ovog rada.
Vladimir je 2019. godine sklopio brak sa Aleksandrom Petrović, s kojom ima dvoje dece: Milicu (rođenu 11. juna 2019. godine) i Ognjena (rođenog 13. jula 2021. godine).

u Novom Sadu, dana 20. juna 2025.

Vladimir Milošević

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: (RBR):

Identifikacioni broj: (IBR):

Tip dokumentacije: (TD): Monografska dokumentacija

Tip zapisa: (TZ): Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada: (VR): Master rad

Autor: (AU): Vladimir Milošević

Mentor: (MN): dr Samir Zahirović

Naslov rada: (NR): Posebni brojevi u kombinatorici: Stirlingovi, harmonijski i Katalanovi brojevi

Jezik publikacije: (JP): Srpski (latinica)

Jezik izvoda: (JI): srpski / engleski

Zemlja publikovanja: (ZP): Republika Srbija

Uže geografsko područje: (UGP): Vojvodina

Godina: (GO): 2025.

Izdavač: (IZ): Autorski reprint

Mesto i adresa: (MA): Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

Fizički opis rada: (FO): (4/80/17/4/12/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)

Naučna oblast: (NO): Matematika

Naučna disciplina: (ND): Kombinatorika

Predmetna odrednica/Ključne reči: (PO): Stirlingovi brojevi, harmonijski brojevi, Katalanovi brojevi, generalizovani Katalanovi brojevi, kombinatorne interpretacije, planarna stabla, Dyck-ovi putevi, izborni nizovi, triangulacije, hipergraf

UDK:

Čuva se: (ČU): Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-

matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Važna napomena: (VN):

Izvod: (IZ): Ovaj rad proučava tri važna niza brojeva u kombinatorici: Stirlingove brojeve, harmonijske brojeve i Katalanove brojeve, kao i njihove generalizacije. U okviru rada prikazane su osnovne definicije i osobine Stirlingovih brojeva prvog i drugog reda, uključujući rekurzivne formule i tabelarne vrednosti. Takođe su predstavljeni Harmonijski brojevi, njihova veza sa sumama recipročnih vrednosti i pojavnost u teoriji brojeva. Poseban deo rada posvećen je Katalanovim brojevima, njihovim klasičnim interpretacijama i bogatoj strukturi koja se javlja u različitim oblastima diskretne matematike. U poslednjem poglavlju analiziramo generalizovane Katalanove brojeve $C_n^{(m)}$, dajući više kombinatornih interpretacija i konstruišemo formalne dokaze njihove ekvivalencije pomoću bijektivnih metoda.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: (DP):

Datum odbrane: (DO):

Članovi komisije: (KO):

Predsednik: dr Petar Đapić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Samir Zahirović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Kristina Ago, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: (ANO):

Identification number: (INO):

Document type: (DT): Monograph type

Type of record: (TR): Printed text

Contents code: (CC): Master's thesis

Author: (AU): Vladimir Milošević

Mentor: (MN): dr Samir Zahirović PhD

Title: (TI): Numbers in Combinatorics: Stirling, harmonic, and Catalan Numbers

Language of text: (LT): Serbian (latin)

Language of abstract: (LA): Serbian and English

Country of publication: (CP): Republic of Serbia

Locality of publication: (LP): Vojvodina

Publication year: (PY): 2025.

Publisher: (PU): Author's reprint

Publ. place: (PP): Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

Physical description: (PD): 4/80/17 /4/12/0/0

Scientific field: (SF): Mathematics

Scientific discipline: (SD): Combinatorics

Subject/Key words: (SKW): Stirling numbers, harmonic numbers, Catalan numbers, generalized Catalan numbers, combinatorial interpretations, plane trees, Dyck paths, ballot sequences, triangulations, hypergraph

UC:

Holding data: (HD): The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Note: (N):

Abstract: (AB): This paper explores three important sequences of numbers in combinatorics: Stirling numbers, harmonic numbers, and Catalan numbers, as well as their generalizations. The work presents fundamental definitions and properties of the Stirling numbers of the first and second kind, including recursive formulas and tabulated values. Harmonic numbers are also introduced, along with their connection to sums of reciprocal values and their appearance in number theory. A special section is devoted to Catalan numbers, their classical interpretations, and the rich structure they exhibit across various fields of discrete mathematics. In the final chapter, we analyze the generalized Catalan numbers $C_n^{(m)}$, providing multiple combinatorial interpretations and constructing formal proofs of their equivalence through bijective methods.

Accepted by the Scientific Board on: (ASb):

Defended: (DE):

Thesis defend board: (DB):

President: dr Petar Đapić, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: dr Samir Zahirović, docent, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, advisor

Member: dr Kristina Ago, docent, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad