UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Sara Nastasijević

O Nelsonovim algebrama

- Master rad -

Mentor

dr Rozália Sz. Madarász

2025, Novi Sad

Sadržaj

PREDGOVOR **3**

1. UVOD **5**

1.1 O NELSONOVOJ LOGICI 5
1.2 O MREŽAMA 6
1.3 BROUWEROVE I HEYTINGOVE MREŽE 12
1.4 MALO TOPOLOGIJE 13

2. NELSONOVE ALGEBRE **14**

2.1 NELSONOVA LOGIKA 14
2.2 NELSONOVE ALGEBRE KAO REZIDUACIONE MREŽE 15
2.3 N3-MREŽE KAO SPECIJALNE N4-MREŽE 24
2.4 N3-MREŽE KAO KLEENEJEVE ALGEBRE 25

3. ROUGH SKUPOVI **29**

3.1 ROUGH SKUPOVI DEFINISANI POMOĆU RELACIJA EKVIVALENCIJA 29
3.2 ROUGH SKUPOVI DEFINISANI POMOĆU KVAZIUREĐENJA 31
3.3 NELSONOVE ALGEBRE KAO ROUGH SKUPOVI 39

4. JOŠ NEKE STRUKTURE POVEZANE SA NELSONOVIM ALGEBRAMA **47**

4.1 N3-MREŽE KAO TWIST STRUKTURE 47
4.2 VEZA SA DRUGIM ALGEBRAMA NEKLASIČNIH LOGIKA 48

LITERATURA **52**

BIOGRAFIJA **54**

Predgovor

Baveći se logikama, pogotovo klasičnim logikama, često smo koristili kontradikcije da bismo dokazali neku tvrdnju. Ali šta ako imamo tvrdnju takvu da tačnost njene negacije ne isključuje tačnost same tvrdnje? U životu se srećemo sa takvim tvrdnjama, u normalnom razgovoru retko dolazimo do apsolutne istine. U svakoj raspravi ili debati uglavnom ima istine i sa jedne i sa druge strane. Klasična logika tu nailazi na problem, jer kako dve tvrdnje koje su u negaciji jedna sa drugom mogu obe biti tačne? Tu se pojavljuje intuicionistička i konstruktivna logika. U njima se ne dokazuje pomoću kontradikcija, nego se zahteva da se konstruiše dokaz da nešto jeste ili nije tačno.

U ovom master radu bavićemo se jednom takvom logikom. Proučavaćemo konstruktivnu logiku — pod nazivom Nelsonova logika — i neka njena algebarska predstavljanja. Rad je podeljen na četiri glave.

U prvoj glavi upoznaćemo se sa biografijom Davida Nelsona, tvorcem Nelsonovih logika, kao i sa istorijskim kontekstom koji je doveo do njihovog razvoja. Uvešćemo i osnovne pojmove o mrežama koji će nam biti potrebni za dalji rad. Dodatno ćemo prestaviti i Brouwerove i Heytingove algebre, kao i topologiju Alexandrova, pomoću kojih ćemo kasnije definisati druge pojmove.

Druga glava počinje motivacijom za uvođenje Nelsonove logike, posle čega se uvode aksiome Nelsonove N3 logike. Nakon toga uvodimo neke karakterizacije Nelsonovih logika. Prvo ćemo predstaviti Nelsonove algebre kao reziduacione mreže i prikazati koji sve uslovi mogu da se koriste da se okarakteriše Nelsonova algebra kao reziduaciona mreža. Nakon toga ćemo uvesti N4-mreže koje su definisane na uopštenju Nelsonove logike i prikazati kako preko njih možemo da okarakterišemo N3-mreže, koje se definišu na Nelsonovoj logici. Na kraju glave ćemo prikazati još jednu karakterizaciju N3-mreži, ovog puta preko Kleenejevih algebri.

U trećoj glavi uvodimo novu strukturu, strukturu rough skupova. Prvo ih definišemo pomoću relacija ekvivalencije i prikazujemo neke rezultate koji su dobijeni za tako definisane rough skupove. Zatim ćemo prikazati definiciju rough skupova preko kvaziuređenja i neke osobine takvih rough skupova. Ovu glavu završavamo predstavljanjem Nelsonovih algebri preko rough skupova.

U četvrtoj, ujedno i poslednjoj glavi, predstavljamo neke zanimljivosti. Prvo ćemo prikazati twist strukturu koja predstavlja N3-mreže. Nakon toga ćemo prikazati neke neklasične logike i njihove veze sa Nelsonovim algebrama.

Veoma sam zahvalna mentoru, dr Rozaliji Sz. Madaras za ogromnu podršku i pomoć u odabiru teme za rad, kao i na velikoj pomoći i mnogo strpljenja tokom izrade rada i čitavog školovanja. Takođe, želim da se zahvalim dr Anni Slivkovoj i dr Samiru Zahiroviću što su prihvatili da budu članovi komisije, na svemu što su me naučili tokom studiranja i na svim savetima i sugestijama prilikom pisanja ovog rada.

Za kraj, najviše želim da se zahvalim mojoj porodici, roditeljima Tatjani i Dušanu, bratu Igoru, babi Radojki i dedi Rafaelu na ogromnoj podršci i svoj pomoći koju su mi pružili tokom školovanja. Takođe, hvala mom dragom Nikoli na svom strpljenju i svoj podršci koju mi je pružio tokom celokupnog studiranja.

Novi Sad, 2025. godine Sara Nastasijević

1. Uvod

1.1 O Nelsonovoj logici

Razvoj Nelsonove logike je krenuo u periodu logičkog pluralizma sredinom 20. veka. Tada se dominacija klasične logike dovodi u pitanje, naročito od strane intuicionista koji su bili predvođeni Luitzenom Egbertusom Janom Brouwerom i Arendom Heytingom. Oni su zagovarali logiku zasnovanu na konstruktivnim dokazima.

Glavni problem je predstavljala klasična negacija, koja podrazumeva da je svaka tvrdnja ili istinita ili neistinita. Klasična negacija nije dozvoljavala razlikovanje „nedokazanosti“ i „dokazane neistinitosti“.

U ovom radu ćemo se baviti takozvanim Nelsonovim logikama, odnosno njihovim algebarskih ekvivalentima, Nelsonovim algebrama.

David Nelson je bio američki matematičar i logičar. Rođen je u Cape Girardeau, Missouri, 2. januara 1918. Osnovne i master studije je završio 1939. i 1940. na Univerzitetu Wisconsin-Madison, gde je 1946. odbranio doktorsku disertaciju *Recursive functions and intuitionistic number theory* pod mentorstvom Stephena Colea Kleeneja, čiji je bio prvi doktorant. Za vreme doktorskih studija je predavao na Amherst koledžu od 1942. do 1946. kao asistent. Nakon završetka doktorskih studija, dobija posao docenta na Departmanu za matematiku na Univerzitetu George Washington u Washington D. C. Zvanje profesora je dobio 1958. i tu je ostao do penzije 1986. Bio je i rukovodilac Departmana za matematiku od 1956. do 1967. Pored zaduženja na fakultetu, bio je i član Izvršnog komiteta *Association for Symbolic Logic* od 1949. do 1953. Radio je i kao konsultant za *National Research Council* od 1960. do 1963. Do kraja života je živeo u stanu blizu Kennedy Centra i Smithsonian muzeja, koje je često posećivao. Umro je 22. avgusta 2003.

Logiku sa jakom negacijom je uveo David Nelson u svom radu [22] i dalje proširio u radu [23], koja je kasnije postala poznata pod nazivom N3 logika. U Nelsonovoj logici negacija je dobila novo značenje i više nije značila samo „nedokazivost“ tvrdnje, nego da postoji konstruktivan dokaz neistinitosti tvrdnje – takozvana refutacija. N3 je tako postao prvi sistem koji kombinuje konstruktivnu logiku i negaciju koja ne vodi odmah do trivijalnosti.

Kasnije, proširujući N3 logiku, 1974. Nelson uvodi logiku N4, u kojoj se negacija ponaša još slobodnije, jer ne zahteva da tvrdnja i njena negacija budu u kontradikciji.

Posle toga se u istraživanje Nelsonovih logika uključuju i drugi naučnici. U sedamdesetim i osamdesetim godinama 20. veka Helena Rasiowa i Andrzej Sendlewski razvijaju algebarske modele Nelsonove logike, pomoću takozvanih Nelsonovih algebri ili N3- i N4-mreža i struktura baziranih na Heytingovim algebrama sa dodatkom jakih negacija. Njihov rad je omogućio dalju formalizaciju Nelsonovih ideja kao i primenu u savremenim logičkim sistemima. Konkretno je napravljen formalni most između sintaktičke logike i algebarske semantike, posebno u kontekstu reziduacionih mreža i kasnije teorije rough skupova.

U istom periodu, nezavisno su Dimiter Vakarelov [31] i Manuel M. Fidel [9] uveli drugačiju reprezentaciju za N3-mreže pomoću twist struktura, ali je kategoričnu ekvivalenciju uradio tek Sendlewski 1990. godine [27].

Tokom dvehiljaditih godina Sándor Radeleczki i Jouni Järvinen [12] uvode nove strukture ekvivalentne Nelsonovoj algebri pomoću rough skupova, tako što koriste kvaziuređene skupove, kako bi formirali semantičke okvire u kojima se Nelsonova logika može prirodno interpretirati.

1.2 O mrežama

Kako bismo istraživali Nelsonove logike uvodimo osnovne pojmove koje ćemo kasnije koristiti, pratimo notacije i definicije iz [14],[19] i [30].

Definicija 1.1: Neka je $\langle P, \leq \rangle$ uređen skup, i $A \subseteq P$. Ako među gornjim ograničenjima skupa *A* postoji najmanji element, zovemo ga *supremum* od *A* i obeležavamo ga sa *supA* ili $\bigvee A$. Analogno, ako među donjim ograničenjima postoji najveći element zovemo ga *infimum* od *A* i obeležavamo ga sa *infA* ili $\bigwedge A$.

Definicija 1.2: Neka je $\langle P, \leq \rangle$ uređen skup i $b \in P$.

- Element b je *najmanji* u P ako je ispunjeno:

$$(\forall x \in P)(b \leq x).$$

- Dualno, b je *najveći* u P, ako važi:

$$(\forall x \in P)(x \leq b).$$

Ako postoji, najmanji element je jedinstven i zove se *nula* uređenog skupa, i označava se sa 0. Slično, ako postoji najveći element u uređenom skupu, on je jedinstven i zove se *jedinica*, u oznaci 1.

Definicija 1.3: *Mreža* je uređeni skup $\langle L, \leq \rangle$ u kome za svaka dva elementa *a* i *b* postoji infimum u oznaci $inf\{a, b\}$ ili $a \wedge b$ i supremum u oznaci $sup\{a, b\}$ ili $a \vee b$.

Definicija 1.4: Neka je L neprazan skup, a $\wedge$ ili $\vee$ binarne operacije na njemu. Tada je uređena trojka $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ *mreža* (kaže se i *mreža kao algebarska struktura*), ako važe sledeći identiteti:

i. $x \wedge y = y \wedge x$,
ii. $x \vee y = y \vee x$,
iii. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,
iv. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,
v. $x \wedge (x \vee y) = x$,
vi. $x \vee (x \wedge y) = x$.

Može se dokazati [30]: svaki uređeni skup $\langle L, \leq \rangle$ koji je mreža je ujedno i mreža kao algebarska struktura $\langle L, \wedge, \vee \rangle$, kao i obrnuto.

Definicija 1.5: *Kompletna mreža* je uređeni skup u kome svaki podskup ima infimum i supremum.

Definicija 1.6:

(1) *Filter* u mreži $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ je njen neprazni podskup *F* koji ispunjava uslove:
   (i) ako $a, b \in F$ onda i $a \wedge b \in F$,
   (ii) ako $a \in F$ i $a \leq c$ onda $c \in F$.
(2) Neka je $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ proizvoljna mreža i $F \subseteq L$ filter mreže L takav da $F \neq L$. Tada F zovemo *pravi filter*.

(3) *Glavni filter* u mreži $\boldsymbol{L}$, generisan elementom $a \in L$, definiše se na sledeći način:

$$\uparrow a = \{x \in L \mid a \leq x\}.$$

(4) Za pravi filter F mreže L kažemo da je *prost filter* ako za sve $a, b \in L$, iz uslova $a \vee b \in F$ sledi $a \in F$ ili $b \in F$.

Definicija 1.7: Kompletna mreža je $\boldsymbol{L}$ je *kompletno distributivna* ako za bilo koji dvostruko indeksiran podskup $\{a_{i,j}\}_{i \in I, j \in J}$ od L, imamo:

$$\bigwedge_{i \in I} \left(\bigvee_{j \in J} a_{i,j} \right) = \bigvee_{f: I \to J} \left(\bigwedge_{i \in I} a_{i,f(i)} \right)$$

to jest, svaki infimum supremuma je jednak supremumu svih mogućih elemenata dobijenih infimumom elemenata $a_{i,k}$, gde je $i \in I$ i k zavisi od i.

Definicija 1.8: Mreža $\langle L_1, \wedge, \vee \rangle$ je *podmreža* mreže $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ ako je $L_1 \subseteq L$, a operacije na L_1su restrikcije operacija iz L.

Definicija 1.9: Za podmrežu L_1kompletne mreže L kažemo da je njena *kompletna podmreža* ako su $supA$ i $infA$ za sve $A \subseteq L_1$ elementi skupa L_1.

Kompletna podmreža kompletno distributivne mreže je kompletno distributivna.

Definicija 1.10: Neka je $\boldsymbol{L}$ kompletna mreža i neka je $k \in L$. Element k je *kompaktan* ako za svaki podskup $S \subseteq L$

$$k \leq \bigvee S \text{ implicira } k \leq \bigvee F \text{ za neki konačan podskup } F \subseteq S.$$

Skup kompaktnih elemenata L se označava sa $\mathcal{K}(\boldsymbol{L})$. Kompletna mreža $\boldsymbol{L}$ je *algebarska*, ako za svako $a \in L$

$$a = \bigvee \{k \in \mathcal{K}(\boldsymbol{L}) \mid k \leq a\}.$$

Definicija 1.11: *Direktan proizvod* mreža $\langle L_1, \leq_1 \rangle$ i $\langle L_2, \leq_2 \rangle$ je mreža $\langle L_1 \times L_2, \leq \rangle$ takva da je

$$L_1 \times L_2 = \{(a, b) \mid a \in L_1, b \in L_2\} \text{ i}$$

$$(a, b) \leq (c, d) \text{ ako i samo ako } a \leq_1 c \text{ i } b \leq_2 d \text{ za } a, b \in L_1 \text{ i } c, d \in L_2.$$

Može se dokazati da je direktan proizvod algebarskih mreža algebarska mreža.

Definicija 1.12: Element j kompletne mreže **L** je *kompletno* $\vee$*-nesvodljiv* ako

$$j = \bigvee S \text{ implicira } j \in S,$$

za svaki podskup $S \subseteq L$.

Napomenimo da ako najmanji element 0 u mreži postoji, tada on nije kompletno $\vee$-nesvodljiv, zato što je $0 = \bigvee \emptyset$ i $0 \notin \emptyset$ ([30]). Skup kompletno $\vee$-nesvodljivih elemenata L se označava sa $\mathcal{J}(\boldsymbol{L})$ ili samo sa $\mathcal{J}$, ako se zna koja mreža se posmatra.

Definicija 1.13: Kompletna mreža **L** je *prostorna* (*spatial*) ako za svako $a \in L$

$$a = \bigvee\{j \in \mathcal{J} \mid j \leq a\}.$$

Ako je **L** algebarska mreža, onda su njeni kompletno ∨-nesvodljivi elementi kompaktni.

Neka je mreža **L** algebarska i prostorna. Pošto svaki kompaktan element može biti napisan kao konačni supremum i svaki konačni supremum kompaktnih elemenata je kompaktan, kompaktni elementi $\boldsymbol{L}$ su tačno oni koji mogu biti zapisani kao konačni supremumi kompletno ∨-nesvodljivih elemenata.

Boolova mreža se definiše kao distributivna mreža u kojoj svaki element x ima *komplement*, u oznaci x'. Što znači da za svako x važi:

$$x \wedge x' = 0 \text{ i } x \vee x' = 1.$$

Naravno, ima i najmanji i najveći element 0 i 1. Sa tim u vidu, definiše se nova algebra, tako da se skup osnovnih operacija mreže ($\wedge$ i $\vee$) proširuje sa unarnom operacijom *komplementiranja* ' i sa dve konstante 0 i 1. Mrežne osobine komplementiranja i konstanti se definišu pomoću aksioma na sledeći način:

Definicija 1.14: *Boolova algebra* je uređena šestorka $\boldsymbol{B} = \langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$, gde je *B* neprazni skup, ∧ i ∨ su binarne, ' je unarna operacija, a 0 i 1 su konstante, tako da važe sledeći uslovi

b1: $x \wedge y = y \wedge x$,
b2: $x \vee y = y \vee x$,
b3: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
b4: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,
b5: $x \wedge 1 = x$,
b6: $x \vee 0 = x$,
b7: $x \wedge x' = 0$,
b8: $x \vee x' = 1$,
b9: $0 \neq 1$.

Definicija 1.15: Neka je $\langle P, \leq\rangle$ uređen skup i $x, y \in P$. Tada se definiše relacija $\prec$, koja se naziva *relacija pokrivanja,* na sledeći način:

$$x \prec y \text{ ako i samo ako je } x < y \text{ i } iz\ x \leq z \leq y \text{ sledi } z = x \text{ ili } z = y;$$

ili ekvivalentno

$$x \prec y \text{ ako i samo ako } x < y \text{ i } \neg(\exists z)(x < z < y).$$

Kaže se da je x *pokriveno* sa y, ili da x *prethodi* y.

Definicija 1.16: Neka je $\boldsymbol{P} = \langle P, \leq\rangle$ uređen skup sa najmanjim elementom 0. Element $a \in P$ je *atom* ako *a* pokriva 0, to jest, $0 \prec a$. Skup svih atoma uređenog skupa $\boldsymbol{P}$ ćemo označavati sa $At(\boldsymbol{P})$. Uređeni skup $\boldsymbol{P}$ je *atomaran* ako je svaki element $b > 0$ atom ili postoji atom a tako da je $a < b$, a $\boldsymbol{P}$ je *atomarno generisan*, ako je svaki element iz P supremum atoma ispod njega.

Booleova algebra je kompletna ako je kompletna kao mreža.

Teorema 1.1: Za kompletnu Booleovu algebru $\boldsymbol{B}$, sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $\boldsymbol{B}$ je atomarna,
(ii) $\boldsymbol{B}$ je atomarno generisana,
(iii) $\langle B, \leq \rangle$ je kompletno distributivna mreža,
(iv) $\boldsymbol{B}$ je izomorfna $\langle \wp(U), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, U \rangle$ za neki skup U.

Dokaz: Pokazaćemo sledeće implikacije $(iv) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (i) \Longrightarrow (iv)$.

$(iv) \Longrightarrow (iii)$: Ako je $\boldsymbol{B} \cong \wp(U)$ za neki skup U, onda posmatramo skupovnu algebru. Supremum i infimum postaju unije i preseci, a za te operacije znamo da su distributivne. Čak i kad posmatramo proizvolju familiju skupova distributivnost i dalje važi, što nam i treba za kompletnu distributivnost. Sada znamo da je $\wp(U)$ kompletno distributivna, a kako izomorfizam čuva uređenje i sve operacije, onda je i $\boldsymbol{B}$ kompletno distributivna.

$(iii) \Longrightarrow (ii)$: Pretpostavimo da je $\boldsymbol{B}$ kompletno distributivna Boolova algebra. U svakoj kompletnoj distributivnoj mreži svaki element je supremum nekih kompletno $\vee$-nesvodljivih elemenata. U Boolovoj algebri takvi elementi su upravo atomi. Dakle, svaki $b \in B$ je supremum atoma ispod sebe. To jest,

$$b = \bigvee \{a \in At(\boldsymbol{B}) \mid a \leq b\},$$

gde je $At(\boldsymbol{B})$ skup svih atoma iz $\boldsymbol{B}$. Time smo dobili tačno definiciju atomarne generisanosti, što znači da je $\boldsymbol{B}$ atomarno generisana.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Ako je svaki element supremum atoma ispod sebe, onda svaki nenula element iz $\boldsymbol{B}$ ima bar jedan atom ispod sebe. Dakle $\boldsymbol{B}$ je atomarna.

$(i) \Longrightarrow (iv)$: Pretpostavimo da je $\boldsymbol{B}$ atomarna. Uzmimo da je $U \coloneqq At(\boldsymbol{B})$ i definišemo preslikavanje

$$\phi: \boldsymbol{B} \to \wp(U), \qquad \phi(b) = \{a \in U \mid a \leq b\}.$$

Pokazaćemo da je ϕ izomorfizam.

- Homomorfizam:
  - $\phi(x \vee y) = \{a \in U | a \leq x \vee y\} = \{a \in U \mid a \leq x \text{ ili } a \leq y\}$
    $= \{a \in U \mid a \leq x\} \cup \{a \in U \mid a \leq y\} = \phi(x) \cup \phi(y)$
  - $\phi(x \wedge y) = \{a \in U | a \leq x \wedge y\} = \{a \in U \mid a \leq x \text{ i } a \leq y\}$
    $= \{a \in U \mid a \leq x\} \cap \{a \in U \mid a \leq y\} = \phi(x) \cap \phi(y)$
  - $\phi(1) = \{a \in U \mid a \leq 1\} = U$
  - $\phi(0) = \{a \in U \mid a \leq 0\} = \emptyset$
  - Komplement: $U = \phi(1) = \phi(x \vee x') = \phi(x) \cup \phi(x')$ odakle je $\phi(x') = U \setminus \phi(x) = \phi(x)^c$.

Dakle ϕ čuva sve Boolove operacije.

- Injektivnost:
  Ako je $\phi(x) = \phi(y)$, onda je $X \coloneqq \phi(x) = \{a \in U \mid a \leq x\} = \{a \in U \mid a \leq y\} = \phi(y) =: Y$, a kako znamo $x = \bigvee X$ i $y = \bigvee Y$, da su X i Y jednaki i da je supremum skupa jedinstven, dobijamo $x = y$. Odakle sledi da je ϕ injektivna.
- Sirjektivnost:

Neka je $S \subseteq U$ proizvoljan. Definišemo $x_S \coloneqq \bigvee S$ (ovaj superemum postoji, jer je $\boldsymbol{B}$ kompletna). Za svaki atom $a \in At(\boldsymbol{B})$ važi: $a \leq x_S$ samo ako je $a \in S$. Dakle, $\phi(x_S) = S$. Čime smo dobili da je ϕ sirjektivna.

Dobili smo da je ϕ bijektivni homomorfizam, što znači da je $\boldsymbol{B} \cong \wp(U)$. □

Definicija 1.17: U mreži $\boldsymbol{L} = \langle L; \wedge, \vee, 0 \rangle$ sa najmanjim elementom 0, element $a \in L$ ima *pseudokomplement* ako postoji element $a^* \in L$ takav da za svako $b \in L$ važi

$$a \wedge b = 0 \text{ ako i samo ako } b \leq a^*.$$

Ako takav element postoji, onda je on jedinstven. Mreža **L** je *pseudokomplementarna* ako svaki element iz *L* ima pseudokomplement. Svaka pseudokomplementarna mreža ima najveći element $1 = 0^*$, koji onda može biti dodat kao konstanta u algebru.

U pseudokomplementarnoj mreži $\boldsymbol{L}$ element *a* je *gust* ako $a^* = 0$. Filter *F* je *gust* ako sadrži sve guste elemente $\boldsymbol{L}$.

Definicija 1.18: Za preslikavanje $C: \wp(A) \to \wp(A)$ kažemo da je *operator zatvaranja* na A ako za sve $X, Y \subseteq A$ važi:

(1) $X \subseteq C(X)$,
(2) $X \subseteq Y \Longrightarrow C(X) \subseteq C(Y)$,
(3) $C\big(C(X)\big) = C(X)$.

Teorema 1.2: Neka je $\boldsymbol{L} = \langle L; \wedge, \vee, *, 0, 1 \rangle$ pseudokomplementarna mreža. Sledeće važi za svako $a, b \in L$:

(i) $a \leq b$ implicira $b^* \leq a^*$,
(ii) preslikavanje $a \longmapsto a^{**}$ je operator zatvaranja,
(iii) $a^* = a^{***}$,
(iv) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$,
(v) $(a \wedge b)^* \geq a^* \vee b^*$.

Dokaz: $(\boldsymbol{i})$**:** Pretpostavimo da je $a \leq b$. Po definiciji pseudokomplementa, znamo da je b^*najveći element sa svojstvom $b \wedge b^* = 0$. Kako je $a \leq b$ imamo

$$a \wedge b^* \leq b \wedge b^* = 0,$$

to jest, dobijamo da je $a \wedge b^* = 0$. A kako znamo da je a^* najveći element sa tom osobinom sledi da je $b^* \leq a^*$.

$(\boldsymbol{ii})$**:** Treba pokazati tri osobine da bi $a \longmapsto a^{**}$ bio operator zatvaranja.

(1) $a \leq a^{**}$,
(2) $a \leq b \Longrightarrow a^{**} \leq b^{**}$,
(3) $(a^{**})^{**} = a^{**}$.

(1): Znamo, po definiciji pseudokomplementa, da važi $a \wedge a^* = 0$. Ako primenimo definiciju pseudokomplementa na a^* dobijamo

$$x \wedge a^* \Leftrightarrow x \leq a^{**}.$$

Kako znamo da je $a \wedge a^* = 0$, uzmimo da je $x \coloneqq a$. Tada na osnovu gornje ekvivalencije dobijamo da je $a \leq a^{**}$.

(2): Ako je $a \leq b$ možemo na primenimo rezultat iz (i) i tako dobijamo $b^* \leq a^*$. Sad opet primenimo rezultat iz (i) samo na $b^* \leq a^*$ i time se dobija traženi rezultat $a^{**} \leq b^{**}$.

(3): Ako rezultat iz (1) primenimo na a^{**} dobijamo $a^{**} \leq (a^{**})^{**}$. Sada pokazujemo drugu nejednakost. Ako primenimo rezultat iz (1) na a^* dobijamo da važi nejednakost $a^* \leq a^{***}$. Ako sada na tu nejednakost primenimo rezultat iz (i) imamo $(a^{***})^* \leq a^{**}$, a kako znamo da je $(a^{***})^* = (a^{**})^{**}$, dobili smo da je $(a^{**})^{**} \leq a^{**}$. Kako važe obe nejednakosti, sledi da je $(a^{**})^{**} = a^{**}$.

Sada iz (1), (2) i (3) sledi da je $a \longmapsto a^{**}$ operator zatvaranja.

$(\boldsymbol{iii})$**:** Koristimo rezultate iz (i) i (ii). Iz (ii)(1) primenjenog na a^* dobijamo $a^* \leq a^{***}$. Drugu nejednakost ćemo dobiti tako što (i) primenimo da nejednakost $a \leq a^{**}$, za koju znamo da važi na osnovu (ii)(1). Tako dobijamo $(a^{**})^* \leq a^*$, to jest, $a^{***} \leq a^*$. Kako važe obe nejednakosti sledi da je $a^* = a^{***}$.

$(\boldsymbol{iv})$**:** Prvo pokazujemo $a^* \wedge b^* \leq (a \vee b)^*$. Posmatrajmo izraz $(a \vee b) \wedge (a^* \wedge b^*)$. Na osnovu distributivnosti dobijamo:

$$(a \vee b) \wedge (a^* \wedge b^*) = (a \wedge a^* \wedge b^*) \vee (b \wedge a^* \wedge b^*).$$

U prvoj zagradi dobijenog izraza imamo $a \wedge a^*$ što znamo da je jednako nuli po definiciji pseudokomplementa. Isto važi i za $b \wedge b^*$ u drugoj zagradi. Dakle, dobili smo da je desna strana jednakosti jednaka nuli, što znači da je i $(a \vee b) \wedge (a^* \wedge b^*)$ jednako nuli. Odavde, po definiciji pseudokomplementa, dobijamo $a^* \wedge b^* \leq (a \vee b)^*$.

Pokažimo sada drugu nejednakost: $(a \vee b)^* \leq a^* \wedge b^*$.

Neka je $y = (a \vee b)^*$. Po definiciji je $(a \vee b) \wedge y = 0$. Iz te jednakosti sledi $a \wedge y = 0$ i $b \wedge y = 0$ (jer je $a \wedge y \leq (a \vee b) \wedge y$ i $b \wedge y \leq (a \vee b) \wedge y$). Sada, po definiciji pseudokomplementa, dobijamo da je $y \leq a^*$ i $y \leq b^*$. Dakle $y \leq a^* \wedge b^*$, odnosno $(a \vee b)^* \leq a^* \wedge b^*$.

Kombinovanjem dve nejednakosti dobijamo $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$.

$(\boldsymbol{v})$**:** Pokazaćemo da je $(a^* \vee b^*) \wedge (a \wedge b) = 0$, odakle na osnovu definicije pseudokomplementa dobijamo traženu nejednakost.

$$(a^* \vee b^*) \wedge (a \wedge b) = (a^* \wedge a \wedge b) \vee (b^* \wedge a \wedge b).$$

Kao i u (iv) $a \wedge a^* = 0$ i $b \wedge b^* = 0$, pa je desna strana jednakosti jednaka nuli. Odakle je i $(a^* \vee b^*) \wedge (a \wedge b) = 0$. Dakle, $(a \wedge b)^* \geq a^* \vee b^*$. □

Definicija 1.19: Distributivna pseudokomplementarna mreža $\boldsymbol{L}$ je *Stoneova algebra* ako zadovoljava Stoneov identitet:

$$x^* \vee x^{**} \approx 1.$$

U Stoneovoj algebri $\boldsymbol{L}$, sledeći identiteti su takođe zadovoljeni:

$$(x \wedge y)^* \approx x^* \vee y^* \text{ i } (x \vee y)^{**} \approx x^{**} \vee y^{**}.$$

Dualizacijom dobijamo koncepte *dualnog pseudokomplementa*, *dualno pseudokomplementarne mreže* i *dualne Stoneove algebre*. *Duplo pseudokomplementarna mreža* je pseudokomplementarna mreža koja je takođe i dualno pseudokomplementarna. Slično *dupla Stoneova algebra* je Stoneova

algebra koja je takođe i dualna Stoneova algebra. Svaka dupla Stoneova algebra zadovoljava $x^* \leq x^+$, gde $^+$ predstavlja dualni pseudokomplement.

Definicija 1.20: *Kvazi-identitet* je identitet ili formula oblika

$$p_1 \approx q_1 \wedge \ldots \wedge p_n \approx q_n \text{ implicira } p \approx q.$$

Kažemo da je dupla Stoneova algebra *regularna* ako zadovoljava kvazi-identitet:

$$x^* \approx y^* \text{ i } x^+ \approx y^+ \text{ implicira } x \approx y.$$

Ovde naziv regularna potiče od kongruencijske regularnosti. Algebra je kongruencijsko regularna ako je svaka kongruencija određena bilo kojom svojom klasom: dve kongruencije su jednake ako imaju zajedničku klasu.
Zna se da je u svakoj duploj Stoneovoj algebri uslov regularnosti ekvivalentan sa:

$$(\forall x, y)\ x \wedge x^+ \leq y \vee y^*.$$

Primer: Neka je $\boldsymbol{B} = \langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ Boolova algebra. Označimo:

$$B^{[2]} := \{(a, b) \in B^2 | a \leq b\}$$

Sada je $B^{[2]}$ regularna dupla Stoneova algebra sa operacijama:

$$(a, b) \vee (c, d) := (a \vee c, b \vee d), \quad (a, b) \wedge (c, d) := (a \wedge c, b \wedge d),$$
$$(a, b)^* := (b', b'), \quad (a, b)^+ := (a', a')$$

Opštije, ako je F filter mreže $\boldsymbol{B}$, onda

$$(B, F) := \{(a, b) \in B^2 \mid a \leq b \ i \ a \vee b' \in F\}$$

formira regularnu duplu Stoneovu algebru u kojoj su operacije definisane kao u $B^{[2]}$.

1.3 Brouwerove i Heytingove mreže

Brouwerove i Heytingove mreže će se puno koristiti u nastavku ovog rada, tako da je ovde izdvojen deo da se one definišu i navedu neke njihove osobine koje će kasnije biti korišćene.

Definicija 1.21: Algebra $\langle A, \vee, \wedge, \Longrightarrow, 0, 1\rangle$ sa tri binarne operacije i dve konstante je *Heytingova algebra* ako zadovoljava

H1: $\langle H, \vee, \wedge\rangle$ je distributivna mreža,
H2: $x \wedge 0 \approx 0;\ x \vee 1 \approx 1,$
H3: $x \Longrightarrow x \approx 1,$
H4: $(x \Longrightarrow y) \wedge y \approx y;\ \ x \wedge (x \Longrightarrow y) \approx x \wedge y,$
H5: $x \Longrightarrow (y \wedge z) \approx (x \Longrightarrow y) \wedge (x \Longrightarrow z);\ \ (x \vee y) \Longrightarrow z \approx (x \Longrightarrow z) \wedge (y \Longrightarrow z).$

U prethodnoj definiciji 0 se tumači kao najmanji element, a 1 kao najveći element.

Definicija 1.22: *Brouverova algebra* je Heytingova algebra bez najmanjeg elementa.

Brouwerove algebre možemo da posmatramo kao univerzalne algebre $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \Rightarrow, 1\rangle$ tipa $\langle 2,2,2,0\rangle$ i Heytingove algebre kao algebre $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ tipa $\langle 2,2,2,0,0\rangle$.

Neka je $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ mreža i $a, b \in L$. Ako postoji najveći element $c \in L$ takav da $a \wedge c \leq b$, onda se taj element *c* naziva *relativni pseudokomplement a u odnosu na b* i označava se sa $a \Rightarrow b$. Ako $a \Longrightarrow b$ postoji, onda je jedinstveno.

Kompletna mreža **L** zadovoljava $\vee$-beskonačni distributivni zakon (JID) ako za bilo koje $S \subseteq L$ i $a \in L$

$$a \wedge \left(\bigvee S\right) = \bigvee \{a \wedge b \mid b \in S\}.$$

Svaka kompletna Brouwerova mreža $\boldsymbol{L} = \langle L, \leq \rangle$ zadovoljava (JID). Tada važi, za sve $a, b \in L$

$$a \Rightarrow b = \bigvee \{c \in L \mid a \wedge c \leq b\}.$$

1.4 Malo topologije

Definicija 1.23: *Topologija Alexandrova* $\mathcal{T}$ na skupu *U* je topologija u kojoj su i preseci proizvoljne familije otvorenih skupova otvoreni, ili ekvivalentno, svaka tačka $x \in U$ ima najmanju okolinu $N(x) \in \mathcal{T}$. Za topologiju Alexandrova $\mathcal{T}$, najmanja okolina tačke x je $N(x) = \bigcap \{B \in \mathcal{T} \mid x \in B\}$.

Sledeća propozicija je rezultat iz knjige [8] B. Daveya i H. Priestley iz 2002., koju ćemo dati bez dokaza.

Propozicija 1.3: Sledeći uslovi za kompletnu mrežu **L** su ekvivalentni

(Alex1) **L** je izomorfna mreži svih otvorenih skupova u topologiji Alexandrova
(Alex2) **L** je algebarska i kompletno distributivna
(Alex3) **L** je distributivna i dvostruko algebarska (to jest algebarska i duplo algebarska)
(Alex4) **L** je prostorna i zadovoljava (JID)

2. Nelsonove algebre

2.1 Nelsonova logika

Kako bi razumeli razliku između klasične logike i Nelsonove logike ([22]) posmatrajmo $\exists x A(x)$ i $\neg\forall x \neg A(x)$. U klasičnoj logici ova dva izraza su ekvivalentna, dok intuicionistički $\neg\forall x \neg A(x)$ ne implicira uvek $\exists x A(x)$. Tačnost tih izraza se dokazuje na različite načine. Izraz sa egzistencijalnim kvantifikatorom traži metod za pronalaženje n tako da je $A(n)$ tačno, dok se za izraz sa univerzalnim kvantifikatorom pokazuje da je izraz $\neg\forall x \neg A(x)$ tačan.

Slično se pojavljuje i kad posmatramo $\neg A$. U klasičnoj i u intuicionističkoj interpretaciji, za elementarnu formulu A bez slobodnih promenljivih, važi da je $\neg A$ tačno samo ako je A netačno. Takođe se slažu da za konstantnu formulu F koja je netačna[1] važi: za bilo koju formulu A, $\neg A$ je tačno samo ako je $A \to F$ tačno. Ali isto kao i gore za izraz $\neg\forall x A(x)$ razlikujemo dve metode dokaza. Jedan daje metod da se konstruiše n tako da je $\neg A(n)$ tačno, dok drugi demonstrira da $\forall x A(x)$ implicira apsurd.

Iz ugla konstruktabilnosti, razlika u metodama dokaza dozvoljava razliku u značenju izraza $\neg\forall x A(x)$ i $\forall x A(x) \to F$, gde je F netačno. Zbog toga Nelson u svom radu [22], u kom je prvi put i predstavljena Nelsonova logika, definiše konstruktivnu istinu za koju je $\neg\forall x A(x)$ tačno samo u slučaju kada je $\neg A(n)$ istinito za neko n koje se može dobiti efektivnom metodom. Takođe uvodi i koncept konstruktivne neistine koji traži dokaz da je nešto neistinito, a ne samo da se dolazi do kontradikcije.

Kako je Nelsonova logika konstruktivna logika, u Nelsonovom radu se traže i pronalaze uslovi kada je neku formulu moguće dokazati, odnosno konstruisati dokaz da je formula netačna, odakle i dolazi naziv konstruktivna logika.

Nelson je u svom radu predstavio neke aksiome svoje logike, ali one nisu bile formalno ispisane i razvijale su se kroz dalja istraživanja dok nisu dobile formalni zapis.

Sledeće aksiome ([14]), zajedno sa pravilom izvođenja modus ponens, definišu Nelsonovu, tj. N3, logiku sa operacijama $\{\wedge, \vee, \to, \sim\}$, gde je $\to$ *slaba implikacija*, a $\sim$ *jaka negacija*:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
(A2) $(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$
(A3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
(A4) $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
(A5) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \gamma) \to \big(\varphi \to (\psi \wedge \gamma)\big))$
(A6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
(A7) $\psi \to (\varphi \vee \psi)$
(A8) $(\varphi \to \gamma) \to ((\psi \to \gamma) \to \big((\varphi \vee \psi) \to \gamma\big))$
(A9) $\sim\sim \varphi \leftrightarrow \varphi$
(A10) $\sim (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\sim \varphi \wedge \sim \psi)$
(A11) $\sim (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\sim \varphi \vee \sim \psi)$
(A12) $\sim (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \sim \psi)$
(A13) $\varphi \to (\sim \varphi \to \psi)$

[1] F predstavlja *konstruktivnu neistinu*, odnosno traži dokaz da je neistina, što nije isto kao „false“ iz klasične logike

2.2 Nelsonove algebre kao reziduacione mreže

Kroz dalje istraživanje je od predstavljanja preko aksioma došlo do otkrića da se Nelsonove logike mogu predstaviti kao mreže i algebre. Jedan od tih načina predstavljanja je kao specijalni tip reziduacionih mreža, pratimo notaciju iz [14].

Definicija 2.1: *Komutativna reziduaciona mreža* (CRL) je algebra **A** = $\langle A,\wedge,\vee,*,\Rightarrow,1\rangle$ tipa $\langle 2,2,2,2,0\rangle$, takva da

i. $\langle A,\wedge,\vee\rangle$ je mreža (sa uređenjem ≤);
ii. $\langle A,*,1\rangle$ je komutativni monoid;
iii. Za sve $a,b,c \in A$, imamo da važi $a * b \leq c$ akko $a \leq b \Rightarrow c$.

Poslednja osobina je poznata kao *reziduacija*. Klasu reziduacionih mreža je moguće definisati i pomoću identiteta.

Komutativna reziduaciona mreža **A** = $\langle A,\wedge,\vee,*,\Rightarrow,1\rangle$ je *integralna* kad se konstanta 1 interpretira kao najveći element mreže **A** = $\langle A,\wedge,\vee\rangle$, a *ograničena* je kad **A** = $\langle A,\wedge,\vee\rangle$ ima i najmanji element, koji obeležavamo 0, i koja je obično tada dodata na algebarski jezik kao konstanta.

Komutativne integralne reziduacione mreže skraćeno nazivamo CIRL, a komutativne integralne ograničene reziduacione mreže CIBRL.
Na svakoj CI(B)RL **A** = $\langle A,\wedge,\vee,*,\Rightarrow,1\rangle$ se definiše negacija na sledeći način: $\sim x := x \Rightarrow 0$.

Pomoću ovog skraćenog zapisa se uvode dve ključne osobine N3 mreža: involutivnost i Nelsonov identitet.

Definicija 2.2: CI(B)RL je *involutivna* ako zadovoljava identitet duple negacije: $\sim\sim x \approx x$.

Jedna nejednakost $x \leq \sim\sim x$ (koja je skraćenica zapisa: $x \approx x \wedge \sim\sim x$) je zadovoljena u svakoj CI(B)RL.

Definicija 2.3: *Nelsonov identitet* se definiše na sledeći način:

$$\big(x \Rightarrow (x \Rightarrow y)\big) \wedge \big(\sim y \Rightarrow (\sim y \Rightarrow \sim x)\big) \approx x \Rightarrow y.$$

Kao i kod involutivnosti jedna nejednakost je uvek zadovoljena:

$$x \Rightarrow y \leq \big(x \Rightarrow (x \Rightarrow y)\big) \wedge \big(\sim y \Rightarrow (\sim y \Rightarrow \sim x)\big).$$

Definicija 2.4: Nelsonove reziduacione mreže se definišu kao komutativne integralne ograničene reziduacione mreže koje zadovoljavaju involutivnost i Nelsonov identitet. To jest, Nelsonove reziduacione mreže su komutativne integralne ograničene reziduacione mreže koje zadovoljavaju uslov involutivnosti i Nelsonov identitet.

Izraz $x \Rightarrow (x \Rightarrow y)$ koji se pojavljuje sa leve strane Nelsonovog identita definiše slabu implikaciju na sledeći način:

$$x \rightarrow y := x \Rightarrow (x \Rightarrow y).$$

Sa ovom definicijom Nelsonov identitet može biti zapisan i na sledeći način:

$$x \Rightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (\sim y \rightarrow \sim x)$$

Dodatno, mogu da se definišu operacije ekvivalencije: slaba ekvivalencija, data sa $\leftrightarrow$, se definiše na sledeći način:

$$x \leftrightarrow y := (x \to y) \wedge (y \to x).$$

Jaka ekvivalencija, data sa $\Leftrightarrow$, se definiše na sledeći način:

$$x \Leftrightarrow y := (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x).$$

Sada znamo šta CIBRL mora da zadovoljava da bi bila Nelsonova reziduaciona mreža. U sledećim propozicijama, predstavljenim u [21], će biti prikazano koji uslovi mogu da zamene Nelsonov identitet i koji uz involutivnost karakterišu N3-mrežu.

Neka je $\boldsymbol{A} = \langle A, \wedge, \vee, *, \Rightarrow, 1, 0 \rangle$ kompatibilna involutivna CIBRL, to jest, takva da zadovoljava identitete $x \Rightarrow y \approx \sim y \Rightarrow \sim x$ i $\sim\sim x \approx x$ (gde je, kao i ranije $\sim x := x \Rightarrow 0$). Ako definišemo $x^2 := x * x$ i $x^3 := x * x * x$, možemo da zapišemo identitet 3-potentnosti na sledeći način:

$$x^3 \approx x^2.$$

Na svakoj CIBRL važi identitet ([21])

$$x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \approx (x * y) \Rightarrow z.$$

Takođe ćemo uvesti skraćeni zapis $x \to y := x^2 \Rightarrow y$. Posmatrajmo i relaciju $\preccurlyeq$ definisanu za svako $a, b \in A$ tako da $a \preccurlyeq b$ akko $a \to b = 1$. Na CIBRL **A** možemo ekvivalentno da definišemo $a \preccurlyeq b$ ako i samo ako $a^2 \leq b$. Ako je **A** dodatno i 3-potentna, tada je $\preccurlyeq$ kvaziuređenje koje može da se koristi da se dobije količnik Heytingove algebre.

Lema 2.1: Na svakoj CIBRL važi $a \Rightarrow a = 1$.

Dokaz: Rezultat se dobija direktno iz osobine reziduacije. Znamo da je $a \leq a$, pa je onda i $1 * a \leq a$. Dalje pomoću reziduacije dobijamo da je $1 \leq a \Rightarrow a$, a kako je CIBRL integralna tada je 1 najveći element, pa sledi $a \Rightarrow a = 1$. □

Lema 2.2: Na svakoj CIBRL važi $a *\sim a = 0$.

Dokaz: Jasno je da važi $0 \leq a *\sim a$, jer je 0 najmanji element. Sada znamo da važi $a \leq a$, pa na osnovu definicije $\sim$ dobijamo $a \leq \sim a \Rightarrow 0$. Na datu nejednakost primenimo reziduaciju i dobijamo $a *\sim a \leq 0$. Dakle važe obe nejednakosti, pa važi $a *\sim a = 0$. □

Na svakoj kompatibilnoj involutivnoj CIRL važi

$$x \leq y \text{ implicira } \sim y \leq \sim x, \tag{1}$$

$$x \Rightarrow y \approx \sim y \Rightarrow \sim x, \tag{2}$$

$$x \Rightarrow y \approx \sim (x *\sim y), \tag{3}$$

$$x * y \approx \sim (x \Rightarrow \sim y), \tag{4}$$

$$(x \vee y) * z \approx (x * z) \vee (y * z). \tag{5}$$

Lema 2.3 ([21])**:** Neka je $\langle A, \leq \rangle$ parcijalno uređen skup i neka je $*$ binarna operacija na A koja je kompatibilna sa $\leq$ za sve $a, b, c \in A$. Tada za sve $a, b \in A$ i svako $n > 1$ ako $a \leq b$ tada $a^n \leq b^n$.

Lema 2.4 ([21])**:** Svaka 3-potentna CIRL $\boldsymbol{A}$ zadovoljava identitete:

(1) $(x \wedge y)^2 \approx (x^2 \wedge y^2)^2$,
(2) $(x \vee y)^2 \approx x^2 \vee (x * y) \vee y^2$.

Lema 2.5: U svakoj 3-potentnoj CIRL A za svako $a \in A$ važi $a^2 = (a^2)^2$.

Dokaz: Uz pomoć osobina operacija mreže i osobine (1) iz leme 2.4 (2) imamo

$$a^2 = (a \wedge 1)^2 = (a^2 \wedge 1^2)^2 = (a^2 \wedge 1)^2 = (a^2)^2. \qquad \square$$

Lema 2.6 ([21])**:** Svaka 3-potentna kompatibilna involutivna CIRL A zadovoljava identitete:

(1) $x * y \leq (x \vee y)^2$,
(2) $(x \vee y)^2 \approx x^2 \vee y^2$,
(3) $(x \wedge \sim x)^2 \approx 0$.

Propozicija 2.7 ([21]): Neka je **A** kompatibilna involutivna CIBRL. Sledeće je ekvivalentno:

a) **A** je Nelsonova reziduaciona mreža,
b) **A** je 3-potentna i zadovoljava kvazi-identitet: ako $x^2 \approx y^2$ i $(\sim x)^2 \approx (\sim y)^2$ tada $x \approx y$.

Propozicija 2.8 ([21])**:** Za kompatibilnu involutivnu CIBRL **A** (sa uređenjem mreže $\leq$) na kojoj je $\preccurlyeq$ dato kao gore, sledeće je ekvivalentno:

a) **A** je Nelsonova reziduaciona mreža,
b) za sve $a, b \in A$ važi da $a \preccurlyeq b$ i $\sim b \preccurlyeq \sim a$ akko $a \leq b$.

Propozicija 2.9: Neka je **A** 3-potentna kompatibilna involutivna CIBRL (sa uređenjem mreže $\leq$), i neka je $\preccurlyeq$ dato kao gore. Dodatno definišemo $a \preccurlyeq' b$ akko $\sim b \preccurlyeq \sim a$ za sve $a, b \in A$. Sledeće je ekvivalentno:

a) **A** je N3-mreža,
b) relacija $\preccurlyeq \cap \preccurlyeq'$ je parcijalno uređenje koje se poklapa sa $\leq$,
c) relacija $\preccurlyeq \cap \preccurlyeq'$ je parcijalno uređenje,
d) relacija $\preccurlyeq \cap \preccurlyeq'$ je antisimetrična,
e) za sve $a, b \in A$ ako $a^2 = b^2$ i $(\sim a)^2 = (\sim b)^2$ onda $a = b$.

Dokaz: a) $\Rightarrow$ b) Ako pretpostavimo da važi tvrđenje pod a), na osnovu propozicije 2.8, sledi da važi tvrđenje iz propozicije 2.8 pod b). Zatim na osnovu definicije relacije $\preccurlyeq'$ važi tvrđenje b).
b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) je jasno.
d) $\Rightarrow$ e) Pretpostavimo da je $\preccurlyeq \cap \preccurlyeq'$ antisimetrično. Pretpostavimo $a^2 = b^2$ i $(\sim a)^2 = (\sim b)^2$. Pošto za svako $c, d \in A$ imamo da

$$c \preccurlyeq d \Leftrightarrow c^2 \leq d \Leftrightarrow c^2 \leq d^2 \text{ i } c \preccurlyeq' d \Leftrightarrow (\sim d)^2 \leq \sim c \Leftrightarrow (\sim d)^2 \leq (\sim c)^2. \qquad (6)$$

Po našim pretpostavkama da je $a^2 = b^2$ i $(\sim a)^2 = (\sim b)^2$, znamo da važe i nejednakosti $a^2 \leq b^2$ i $(\sim b)^2 \leq (\sim a)^2$. Dakle, prema (6) dobijamo da je $a \preccurlyeq b$ i $a \preccurlyeq' b$, odavde važi i $a \preccurlyeq \cap \preccurlyeq' b$. Analogno, dobijamo i $b \preccurlyeq \cap \preccurlyeq' a$. Sada po antisimetriji važi $a = b$. Dakle, za sve $a, b \in A$, ako $a^2 = b^2$ i $(\sim a)^2 = (\sim b)^2$ tada $a = b$.
e) $\Rightarrow$ a) Ovo sledi na osnovu hipoteze i propozicije 2.7. $\square$

Lema 2.10: Neka je $\boldsymbol{A}$ kompatibilna involutivna CIBRL. Tada na $\boldsymbol{A}$ važi:

(i) $\sim x * (x \wedge y) \approx 0$
(ii) $(x \vee \sim y) * y \approx x * y$
(iii) $(x \vee \sim y) * y^2 \approx x * y^2$
(iv) $(x \vee \sim y)^2 * y \approx x^2 * y$

Dokaz: Za (i) posmatramo

$$\begin{aligned} a \wedge b &\leq a \\ &= 1 \Longrightarrow a && \text{(reziduacija)} \\ &= \sim a \Longrightarrow \sim 1 && \big((2)\big) \\ &= \sim a \Longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Odnosno, po reziduaciji

$$(a \wedge b) * \sim a \leq 0.$$

A kako je 0 najmanji element sledi $\boldsymbol{A} \vDash \sim x * (x \wedge y) \approx 0$.

Za (ii), primetimo

$$\begin{aligned} (a \vee \sim b) * b &= (a * b) \vee (\sim b * b) && \big((5)\big) \\ &= (a * b) \vee 0 && \text{(lema 2.2)} \\ &= a * b. \end{aligned}$$

Dakle, $\boldsymbol{A} \vDash (x \vee \sim y) * y \approx x * y$.

Za (iii), primetimo

$$\begin{aligned} (a \vee \sim b) * b^2 &= \big((a \vee \sim b) * b\big) * b \\ &= (a * b) * b && ((ii)) \\ &= a * b^2. \end{aligned}$$

Dakle, $\boldsymbol{A} \vDash (x \vee \sim y) * y^2 \approx x * y^2$.

Za (iv), posmatramo

$$\begin{aligned} (a \vee \sim b)^2 * b &= (a \vee \sim b) * \big((a \vee \sim b) * b\big) \\ &= (a \vee \sim b) * (a * b) && ((ii)) \\ &= \big((a \vee \sim b) * b\big) * a \\ &= (a * b) * a && ((ii)) \\ &= a^2 * b. \end{aligned}$$

Dakle $\boldsymbol{A} \vDash (x \vee \sim y)^2 * y \approx x^2 * y$. □

Propozicija 2.11: Neka je **A** kompatibilna involutivna CIBRL. Sledeće je ekvivalentno:

a) **A** je Nelsonova reziduaciona mreža,
b) **A** zadovoljava $x * y \approx (x^2 * y) \vee (x * y^2)$,
c) **A** zadovoljava $x \approx x^2 \vee (x \wedge \sim x)$.

Dokaz: Dokazujemo prvo $a) \Leftrightarrow b)$. Po pretpostavci u $a)$ $\boldsymbol{A}$ je N3-mreža što znači da na $\boldsymbol{A}$ važi Nelsonov identitet

$$\big(x \Rightarrow (x \Rightarrow y)\big) \wedge \big(\sim y \Rightarrow (\sim y \Rightarrow \sim x)\big) \approx x \Rightarrow y.$$

Neka je sada $a, b \in A$. Po hipotezi važi

$$\big(a \Rightarrow (a \Rightarrow \sim b)\big) \wedge \big(\sim\sim b \Rightarrow (\sim\sim b \Rightarrow \sim a)\big) \approx a \Rightarrow \sim b,$$

pa pošto znamo da važi (2) i zakon duple negacije dobijamo

$$\sim (a \Rightarrow \sim b) \approx \sim \Big(\big(a \Rightarrow (a \Rightarrow \sim b)\big) \wedge \big(b \Rightarrow (b \Rightarrow \sim a)\big)\Big). \tag{7}$$

Tada imamo

$$\begin{aligned}
a * b &= \sim (a \Rightarrow \sim b) && ((4))\\
&= \sim \Big(\big(a \Rightarrow (a \Rightarrow \sim b)\big) \wedge \big(b \Rightarrow (b \Rightarrow \sim a)\big)\Big) && ((7))\\
&= \sim \big(a \Rightarrow (a \Rightarrow \sim b)\big) \vee \sim \big(b \Rightarrow (b \Rightarrow \sim a)\big)\\
&= \big(a * \sim (a \Rightarrow \sim b)\big) \vee \big(b * \sim (b \Rightarrow \sim a)\big) && ((4))\\
&= \big(a * (a * b)\big) \vee \big(b * (b * a)\big) && ((4))\\
&= (a^2 * b) \vee (b^2 * a).
\end{aligned}$$

Dakle, na **A** važi $x * y \approx (x^2 * y) \vee (y^2 * x)$.

Sada dokazujemo $b) \Rightarrow a)$. Odnosno imamo pretpostavku da na $\boldsymbol{A}$ važi

$$x * y = (x^2 * y) \vee (y^2 * x).$$

Tada za $a, b \in A$ važi

$$a * \sim b \approx (a^2 * \sim b) \vee ((\sim b)^2 * a).$$

Odavde, po (2), dobijamo

$$\sim \big((a^2 * \sim b) \vee ((\sim b)^2 * a)\big) \approx \sim (a * \sim b). \tag{8}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\big(a \Rightarrow (a \Rightarrow b)\big) \wedge \big(\sim b \Rightarrow (\sim b \Rightarrow \sim a)\big) &= \sim \big(a * \sim (a \Rightarrow b)\big) \wedge \sim \big(\sim b * \sim (\sim b \Rightarrow \sim a)\big) && ((4))\\
&= \sim \big(a * (a * \sim b)\big) \wedge \sim \big(\sim b * (\sim b * a)\big) && ((4))
\end{aligned}$$

$$=\sim (a^2 *\sim b) \wedge \sim ((\sim b)^2 * a)$$

$$=\sim ((a^2 *\sim b) \vee ((\sim b)^2 * a))$$

$$=\sim (a *\sim b) \qquad ((8))$$

$$= a \Rightarrow b. \qquad ((4))$$

Dakle, važi Nelsonov identitet, a kako je $\boldsymbol{A}$ involutivna CIBRL, znamo da je $\boldsymbol{A}$ Nelsonova reziduaciona mreža.

Sada ćemo pokazati ekvivalenciju $a)$ i $c)$.

Prvo pokazujemo $a) \Rightarrow c)$. Na osnovu propozicije 2.7 znamo da za svaki N3-mrežu važi da je 3-potentna i zadovoljava kvazi-identitet: $x^2 \approx y^2$ i $(\sim x)^2 \approx (\sim y)^2$ implicira $x \approx y$. Neka je sada $a, b \in A$, pokazaćemo

$$a^2 = \left(a^2 \vee (a \wedge \sim a)\right)^2 \text{ i } (\sim a)^2 = \left(\sim \left(a^2 \vee (a \wedge \sim a)\right)\right)^2$$

i onda ćemo primeniti gornji kvazi-identitet.

Da bismo pokazali da je $a^2 = \left(a^2 \vee (a \wedge \sim a)\right)^2$, posmatramo

$$a^2 = (a^2)^2 \qquad \text{(lema 2.5)}$$

$$= (a^2)^2 \vee 0$$

$$= (a^2)^2 \vee (a \wedge \sim a)^2$$

$$= \left(a^2 \vee (a \wedge \sim a)\right)^2. \qquad \text{(lema 2.6 (2))}$$

Treba još da se pokaže $(\sim a)^2 = \left(\sim \left(a^2 \vee (a \wedge \sim a)\right)\right)^2$. Dokaz ćemo podeliti na dva dela.

Prvo ćemo pokazati $(\sim a)^2 \leq \left(\sim \left(a^2 \vee (a \wedge \sim a)\right)\right)^2$.

Iz $a^2 \leq a$ i osobine (1) dobijamo $\sim a \leq \sim (a^2)$, odakle na osnovu leme 2.3 za $n = 2$ imamo

$$(\sim a)^2 \leq \left(\sim (a^2)\right)^2.$$

Takođe, iz osobine (1)

$$\text{iz } a \wedge \sim a \leq a \text{ imamo } \sim a \leq \sim (a \wedge \sim a),$$

pa dalje, primenom leme 2.3, $(\sim a)^2 \leq \left(\sim (a \wedge \sim a)\right)^2$.

Spajanjem nejednakosti dobijamo $(\sim a)^2 \leq (\sim (a^2))^2 \wedge (\sim (a \wedge \sim a))^2$.

Dalje, na osnovu leme 2.3 za $n = 2$ i leme 2.4 (1), važi

$$((\sim a)^2)^2 \leq \left(\left(\sim (a^2)\right)^2 \wedge \left(\sim (a \wedge \sim a)\right)^2\right)^2 = \left(\sim (a^2) \wedge \sim (a \wedge \sim a)\right)^2.$$

Odakle $(\sim a)^2 \leq \left(\sim (a^2) \wedge \sim (a \wedge \sim a)\right)^2$, po lemi 2.5.

Ali, onda, po De Morganovim zakonima važi:

$$(\sim a)^2 \leq \left(\sim \left(a^2 \vee (a \wedge \sim a)\right)\right)^2.$$

Sada pokazujemo $\left(\sim \left(a^2 \vee (a \wedge \sim a)\right)\right)^2 \leq (\sim a)^2$.

Iz $a \vee \sim a \leq 1$ i leme 2.1, imamo

$$\sim (a^2) \wedge (a \vee \sim a) \leq 1 = a \Rightarrow a.$$

Nakon što primenimo reziduaciju dobijamo

$$\left(\sim (a^2) \wedge (a \vee \sim a)\right) * a \leq a. \tag{9}$$

Takođe važi, na osnovu (4)

$$\sim (a^2) \wedge (a \vee \sim a) \leq \sim (a^2) = a^2 \Rightarrow 0 = (a * a) \Rightarrow 0 = \sim (a \Rightarrow \sim a) \Rightarrow 0 = a \Rightarrow \sim a,$$

Primenom reziduacije dobijamo

$$\left(\sim (a^2) \wedge (a \vee \sim a)\right) * a \leq \sim a. \tag{10}$$

Dakle, na osnovu (9) i (10)

$$\left(\sim (a^2) \wedge (a \vee \sim a)\right) * a \leq a \wedge \sim a. \tag{11}$$

Ali tada važi i

$$\left(\sim (a^2) \wedge (a \vee \sim a)\right) * a \leq a^2 \vee (a \wedge \sim a)$$

jer $\left(\sim (a^2) \wedge (a \vee \sim a)\right) * a$ more da bude manje od supremuma a^2 i $a \wedge \sim a$. Ako je $a \wedge \sim a$ supremum, na osnovu (11) znamo da nejednakost važi, a ko je a^2 supremum, to znači da je $a \wedge \sim a \leq a^2$, pa na osnovu te nejednakosti i (11) mora važiti gornja nejednakost. Primenimo dodatno reziduaciju i dobijamo

$$\sim (a^2) \wedge (a \vee \sim a) \leq a \Rightarrow \left(a^2 \vee (a \wedge \sim a)\right).$$

Dalje, na osnovu (1) imamo

$$\sim (a^2) \wedge (a \vee \sim a) \leq \sim \left(a^2 \vee (a \wedge \sim a)\right) \Rightarrow \sim a,$$

pa na osnovu De Morganovih zakona

$$\sim \left(a^2 \vee (a \wedge \sim a)\right) \leq \sim \left(a^2 \vee (a \wedge \sim a)\right) \Rightarrow \sim a.$$

Ako opet primenimo reziduaciju dobijamo

$$\left(\sim \left(a^2 \vee (a \wedge \sim a)\right)\right)^2 \leq \sim a.$$

Odakle, na osnovu leme 2.3 za $n = 2$, važi

$$\left(\left(\sim\left(a^2 \vee (a \wedge\sim a)\right)\right)^2\right)^2 \leq (\sim a)^2,$$

pa se, na osnovu leme 2.5, dobija

$$\left(\sim\left(a^2 \vee (a \wedge\sim a)\right)\right)^2 \leq (\sim a)^2,$$

što smo i hteli da pokažemo.

Pokazali smo da važi

$$a^2 = \left(a^2 \vee (a \wedge\sim a)\right)^2 \text{ i } (\sim a)^2 = \left(\sim\left(a^2 \vee (a \wedge\sim a)\right)\right)^2,$$

Pa na osnovu kvazi-identiteta iz propozicije 2.7 važi $a = a^2 \vee (a \wedge\sim a)$.

Dakle, $\boldsymbol{A} \vDash x^2 \vee (x \wedge\sim x) \approx x$.

Pokažimo sada $c) \Rightarrow a)$. Pretpostavimo da važi identitet iz $c)$. Da bismo pokazali da je $\boldsymbol{A}$ Nelsonova reziduaciona mreža dovoljno je pokazati

$$\boldsymbol{A} \vDash (x^2 * y) \vee (y^2 * x) \approx x * y.$$

Da bismo dokazali da taj identitet važi, proveravamo da na $\boldsymbol{A}$ važe sledeći identiteti u datom redosledu:

(i) $x^2 \vee\sim x \approx x \vee\sim x$
(ii) $x * (x \wedge y) \approx x * (x * y)$
(iii) $x^2 \vee \left(x \wedge (y \vee\sim x)\right) \approx x$
(iv) $(x^2 * y) \vee (y^2 * x) \approx x * y$

Za (i) je dovoljno posmatrati

$$a \vee\sim a = \left(a^2 \vee (a \wedge\sim a)\right) \vee\sim a = a^2 \vee \left((a \wedge\sim a) \vee\sim a\right) = a^2 \vee\sim a,$$

gde prva jednakost važi na osnovu pretpostavke da važi identitet iz $c)$, i konačna jednakost važi na osnovu apsorpcije. Dakle,

$$\boldsymbol{A} \vDash x^2 \vee\sim x \approx x \vee\sim x.$$

Za (ii), posmatramo

$$\begin{aligned} a * (a \wedge b) &= \left(a * (a \wedge b)\right) \vee 0 \\ &= \left(a * (a \wedge b)\right) \vee \left(\sim a * (a \wedge b)\right) && \text{(lema 2.10 (i))} \\ &= (a \vee\sim a) * (a \wedge b) && ((5)) \\ &= (a^2 \vee\sim a) * (a \wedge b) && ((i)) \\ &= \left(a^2 * (a \wedge b)\right) \vee \left(\sim a * (a \wedge b)\right) && ((5)) \end{aligned}$$

$$= \left(a^2 * (a \wedge b)\right) \vee 0 \qquad \text{(lema 2.10 (i))}$$

$$= a^2 * (a \wedge b)$$

$$\leq a^2 * b. \qquad \text{(kompatibilnost)}$$

Sa druge strane, na osnovu leme 2.1 i reziduacije znamo da važi $a * b \leq a$ i $a * b \leq b$, pa je onda $a * b \leq a \wedge b$. Sada, kako je operacija $*$ kompatibilna sa uređenjem $\leq$ dobijamo

$$a * (a * b) \leq a * (a \wedge b).$$

Dakle,

$$\boldsymbol{A} \vDash x * (x \wedge y) \approx x^2 * y.$$

Za (iii), iz $\sim a \leq \sim a \vee b$ imamo $a \wedge \sim a \leq a \wedge (\sim a \vee b)$. Dalje dobijamo

$$a^2 \vee (a \wedge \sim a) \leq a^2 \vee \left(a \wedge \sim (a \vee b)\right).$$

Ali, $a^2 \vee (a \wedge \sim a) = a$, po pretpostavci da važi identitet iz c), pa

$$a \leq a^2 \vee \left(a \wedge (\sim a \vee b)\right).$$

Da bi dobili drugu nejednakost: iz $a^2 \leq a$ i $a \wedge (\sim a \vee b) \leq a$ dobijamo

$$a^2 \vee \left(a \wedge (\sim a \vee b)\right) \leq a \vee a = a.$$

Dakle,

$$\boldsymbol{A} \vDash x^2 \vee \left(x \wedge (\sim x \vee y)\right) \approx x.$$

Za (iv) stavimo $\alpha \coloneqq a \vee \sim b$ i $\beta \coloneqq b$. Tada

$$a * b = (a \vee \sim b) * b \qquad \text{(lema 2.10 } (ii))$$

$$= (a \vee \sim b) * \left(b^2 \vee \left(b \wedge (a \vee \sim b)\right)\right) \qquad ((iii))$$

$$= \alpha * \left(\beta^2 \vee (\beta \wedge \alpha)\right)$$

$$= (\alpha * \beta^2) \vee \left(\alpha * (\beta \wedge \alpha)\right) \qquad ((5))$$

$$= (\alpha * \beta^2) \vee \left(\alpha * (\alpha * \beta)\right) \qquad ((ii))$$

$$= (\alpha * \beta^2) \vee (\alpha^2 * \beta)$$

$$= \left((a \vee \sim b) * b^2\right) \vee ((a \vee \sim b)^2 * b)$$

$$= (a * b^2) \vee (a^2 * b). \qquad \text{(lema 2.10 } (iii) \text{ i } (iv))$$

Dakle,

$$\boldsymbol{A} \vDash (x^2 * y) \vee (y^2 * x) \approx x * y.$$

Time smo dokazali traženi identitet i na osnovu dokaza $a) \Leftrightarrow b)$ imamo da je $\boldsymbol{A}$ Nelsonova reziduaciona mreža. □

Propozicija 2.12 ([21]): Neka je **A** kompatibilna involutivna CIBRL. Sledeće je ekvivalentno:

a) **A** je Nelsonova reziduaciona mreža,
b) **A** zadovoljava kvazi-identitet: ako $x^2 \leq y$ i $(\sim y)^2 \leq \sim x$ tada $x \leq y$.

2.3 N3-mreže kao specijalne N4-mreže

David Nelson je N4 logiku uveo posle N3 logike kao njeno uopštenje. Ali moguće je i obrnuto, uvesti N4 logiku, odnosno N4-mrežu, i onda preko nje uvesti N3 logiku, odnosno N3-mrežu, kao logiku sa dodatnim aksiomama, odnosno mrežu sa dodatnim osobinama. Kako je N3 logika već uvedena u ovom radu, u ovom delu će biti samo prikazano kako se N3-mreže mogu definisati preko N4-mreža.

Definicija 2.5: *De Morganova mreža* je algebra $\langle A,\wedge,\vee,\sim\rangle$ takva da je $\langle A,\wedge,\vee\rangle$ distributivna mreža i operacija $\sim$ predstavlja negaciju koja zadovoljava zakon dvostruke negacije

$$\sim\sim x \approx x$$

kao i dva De Morganova zakona

$$\sim (x \vee y) \approx \sim x \wedge \sim y \qquad \sim (x \wedge y) \approx \sim x \vee \sim y.$$

De Morganova algebra je De Morganova mreža sa dodatim konstantama 0 i 1.

Koristimo $|a|$ kao skraćeni zapis za $a \to a$, za svako $a \in A$. Slično ako imamo izraz φ, onda je $|\varphi| := \varphi \to \varphi$.

Definicija 2.6: Algebra $\boldsymbol{A} = \langle A,\wedge,\vee,\to,\sim\rangle$ tipa $\langle 2,2,2,1\rangle$ je *N4-mreža* ako:

(N4.i) Redukt $\langle A,\wedge,\vee,\sim\rangle$ je De Morganova mreža sa mrežnim uređenjem $\leq$.
(N4.ii) Relacija $\preccurlyeq$ na A je kvaziuređenje, gde je $\preccurlyeq$ za svako $a, b \in A$ definisano sa
$$a \preccurlyeq b \text{ ako i samo ako } a \to b = |a \to b|.$$
(N4.iii) Relacija $\Xi := \preccurlyeq \cap (\preccurlyeq)^{-1}$ je kongruencija na reduktu $\langle A,\wedge,\vee,\to\rangle$ i količnička algebra $\langle A; \wedge,\vee,\to\rangle/\Xi$ je Brouwerova mreža.
(N4.iv) Za sve $a, b \in A$ važi $\sim (a \to b) \equiv a \wedge \sim b \ (mod\ \Xi)$.
(N4.v) Za sve $a, b \in A$ važi $a \leq b$ akko $a \preccurlyeq b$ i $\sim b \preccurlyeq \sim a$.

Pišemo $x \preccurlyeq y$ kao skraćeni zapis za $x \to y \approx |x \to y|$.

Definišemo *jaku implikaciju* na N4-mreži $\boldsymbol{A}$ za sve $a, b \in A$ sa

$$a \Longrightarrow b := (a \longrightarrow b) \wedge (\sim b \longrightarrow \sim a).$$

Sledeća propozicija predstavlja sakupljene rezultate rada sa N3- i N4-mrežama, spojeno kao jedna propozicija koja karakteriše N3-mreže preko N4-mreža i tako predstavljena u [14].

Propozicija 2.13: Za svaku N4-mrežu **A** sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

a) **A** je N3-mreža,
b) unarni izraz $|x|$ je konstanta na **A,**
c) unarni izraz $x \Rightarrow x$ je konstanta na **A,**

d) **A** $\models x \wedge \sim x \preccurlyeq y$,
e) **A** $\models x \leq y \Rightarrow x$,
f) **A** $\models x * y \leq x$ gde je $x * y := \sim (x \Rightarrow \sim y)$.

Može se dokazati da je pojam reziduacione mreže ekvivalentan sa pojmom N3-mreže. Moguće je lako preći sa jedne definicije na drugu. Da bi prešli sa reziduacionih mreža na N4-mreže dovoljno je definisati sledeće:

$$x \to y := x \Rightarrow (x \Rightarrow y)$$

$$\sim x := x \Rightarrow 0$$

A za prelazak u drugom smeru je dovoljno definisati:

$$x \Rightarrow y := (x \to y) \wedge (\sim y \to \sim x)$$

$$x * y := \sim (x \Rightarrow \sim y)$$

$$1 := |x|$$

$$0 := \sim 1$$

2.4 N3-mreže kao Kleenejeve algebre

Uvodimo još jedan način predstavljanja N3-mreža preko Kleenejevih algebri, ali pre toga moramo da definišemo šta je tačno Kleenejeva algebra. Kako postoji više definicija Kleenejeve algebre, ovde uvodimo definiciju kakva nam odgovara za dalji rad koja je data u [26].

Definicija 2.7: *Kleenejeva algebra* je De Morganova mreža $\langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1 \rangle$ koja zadovoljava

$$x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y.$$

Kako znamo da su Boolove algebre specijalne Kleenejeve algebre interesantno je prikazati Kleenejevu algebru koja nije Boolova, što je i prikazano u sledećem primeru.

Primer: Najpoznatiji primer Kleenejeve algebre, koja nije Boolova, je Kleenejeva 3-vrednosna logika ([16]). U toj logici Kleene je uveo treću istinitosnu vrednost $\frac{1}{2}$ i protumačio je kao „nedefinisano“. Svaka parcijalna relacija se onda može predstaviti svojom trovrednosnom karakterističnom funkcijom R tako da $R(y) = 0$ znači da je R definisana i netačna (F) za y, $R(y) = 1$ znači da je R definisana i tačna (T) za y, a $R(y) = \frac{1}{2}$ znači da je R nedefinisana (N) za y. Kleene je definisao istinitosne funkcije kao:

$\boldsymbol{P}$	$\neg \boldsymbol{P}$
$\boldsymbol{T}$	F
$\boldsymbol{N}$	N
$\boldsymbol{F}$	T

$\boldsymbol{P \wedge Q}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{T}$	T	N	F
$\boldsymbol{N}$	N	N	F
$\boldsymbol{F}$	F	F	F

$\boldsymbol{P \vee Q}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{T}$	T	T	T
$\boldsymbol{N}$	T	N	N
$\boldsymbol{F}$	T	N	F

$\boldsymbol{P \to Q}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{T}$	T	N	F
$\boldsymbol{N}$	T	N	N
$\boldsymbol{F}$	T	T	T

$\boldsymbol{P \leftrightarrow Q}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{T}$	T	N	F
$\boldsymbol{N}$	N	N	N
$\boldsymbol{F}$	F	N	T

Do sad smo videli pojmove Nelsonove reziduacione mreže i N3-mreže koje su ekvivalenti. Još jedan ekvivalentan pojam je definicija N3-mreži preko Kleenejevih algebri. Sledeću definiciju, do koje je došla nadogradnjom rada Antonia Monteira, dala je Diana Brignole [1] i ona nam prikazuje vezu N3-mreži i Kleenejevih algebri.

Definicija 2.8: N3-mreža je algebra $\boldsymbol{A} = \langle A; \wedge, \vee, \to, \sim, 1\rangle$ tipa $\langle 2,2,2,1,0\rangle$ koja zadovoljava sledeće identitete:

(N3.i) $x \vee 1 \approx 1$,
(N3.ii) $x \wedge (x \vee y) \approx x$,
(N3.iii) $x \wedge (y \vee z) \approx (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
(N3.iv) $\sim\sim x \approx x$,
(N3.v) $\sim (x \wedge y) \approx \sim x \vee \sim y$,
(N3.vi) $x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$,
(N3.vii) $x \to x \approx 1$,
(N3.viii) $\sim x \vee y \leq x \to y$,
(N3.ix) $x \wedge (\sim x \vee y) \approx x \wedge (x \to y)$,
(N3.x) $x \to (y \wedge z) \approx (x \to y) \wedge (x \to z)$,
(N3.xi) $x \to (y \to z) \approx (x \wedge y) \to z$.

Gornji identiteti uz definiciju $0 \coloneqq \sim 1$ povlače da je struktura $\langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ Kleenejeva algebra. Na osnovu definicija mreže kao algebarske strukture, De Morganove algebre, Kleenejeve algebre i definicije iznad vidimo da se Nelsonova algebra može definisati kao Kleenejeva algebra strukturalno proširena sa binarnim veznikom $\to$ (slaba implikacija) koji zadovoljava identitete (N3.vii) do (N3.xi) (duali identiteta se lako dokazuju pomoću duple negacije). Sledeći primer prikazuje jednu Nelsonovu algebru koja je nadograđena od Kleenejeve.

Primer ([7])**:** Uvedimo prvo pojam five-valued Nelson algebri. Kažemo da je Nelson algebra A *five-valued* ako za sve $x, y, z \in A$ važi sledeća jednačina:

$$\big((x \to z) \to y\big) \to \Big(\big((y \to x) \to y\big) \to y\Big) = 1.$$

Sada dajemo primer Nelsonove algebre koja zadovoljava datu jednačinu. Za bilo koje $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definišemo skup

$$C_n = \left\{\frac{j}{n-1} : 0 \leq j \leq n-1\right\}.$$

Ovaj skup sa uređenjem $\leq$ je ograničena distributivna mreža, gde je 0 najmanji element, a 1 najveći. Ako definišemo da je $\sim \frac{j}{n-1} = 1 - \frac{j}{n-1} = \frac{n-1-j}{n-1}$ za $0 \leq j \leq n-1$, tada je C_n Kleenejeva algebra. Primetimo da važi da ako je j neparno i $j = \frac{n-1}{2}$ tada je $\sim \frac{j}{n-1} = \frac{j}{n-1}$. Definišimo još za $x, y \in C_n$:

$$x \to y = \begin{cases} 1, \text{ako je } x \leq y \text{ ili } x \leq \sim x \\ \sim x \vee y, \qquad \text{inače} \end{cases}.$$

Sa ovom definicijom slabe implikacije C_n je Nelsonova algebra.

Prikažimo sada konkretne primere C_n za $n = 6$ i $n = 7$.

$$C_6 = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\} \text{ i } C_7 = \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right\}.$$

Ako posmatramo $x = \frac{3}{5}$ iz C_6 dobijamo da je $\sim x = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Računajmo sada kako će izgledati $x \to y$, gde ćemo za y uzimati sve vrednosti iz C_6.

$$\frac{3}{5} \to 0 = \sim\frac{3}{5} \vee 0 = \frac{2}{5} \vee 0 = \frac{2}{5},$$

koristimo drugo pravilo iz definicije, jer ne važi ni da je $\frac{3}{5} \leq 0$ ni da je $\frac{3}{5} \leq \sim \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Isto važi i za $y = \frac{1}{5}$ i $y = \frac{2}{5}$, pa dobijamo:

$$\frac{3}{5} \to \frac{1}{5} = \sim \frac{3}{5} \vee \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \vee \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \text{ i } \frac{3}{5} \to \frac{2}{5} = \sim \frac{3}{5} \vee \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \vee \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Kada posmatramo $y \in \left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right\}$, tada nam važi da je $x \leq y$, pa primenjujemo prvo pravilo i dobijamo da je $x \to y = 1$. Analogno se računa i za ostale vrednosti x, kao i za sve vrednosti iz C_7. U C_7 možemo primetiti da za $x = \frac{1}{2}$, važi da je $j = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$, pa važi pravilo koje smo primetili za negaciju, odnosno $\sim x = x = \frac{1}{2}$. Predstavimo sada sve rezultate:

$\to$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\sim x$
0	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{1}{5}$	1	1	1	1	1	1	$\frac{4}{5}$
$\frac{2}{5}$	1	1	1	1	1	1	$\frac{3}{5}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	1	1	$\frac{2}{5}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	1	$\frac{1}{5}$
1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0

Proverimo da li važi uslov da je five-valued, na primer za $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{5}$ i $z = \frac{3}{5}$:

$$((x \to z) \to y) \to (((y \to x) \to y) \to y) = \left(\left(\frac{1}{5} \to \frac{3}{5}\right) \to \frac{2}{5}\right) \to \left(\left(\left(\frac{2}{5} \to \frac{1}{5}\right) \to \frac{1}{5}\right) \to \frac{1}{5}\right)$$

$$= \left(1 \to \frac{2}{5}\right) \to \left(\left(1 \to \frac{2}{5}\right) \to \frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{2}{5} \to \left(\frac{2}{5} \to \frac{2}{5}\right)$$

$$= \frac{2}{5} \to 1 = 1$$

$\to$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1	$\sim x$
0	1	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{1}{6}$	1	1	1	1	1	1	1	$\frac{5}{6}$
$\frac{1}{3}$	1	1	1	1	1	1	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{3}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1	0

3. Rough skupovi

U ovom delu uvodimo još jednu strukturu pomoću koje mogu da se predstave Nelsonove algebre. Tačnije uvodimo strukturu rough skupova i to na dva načina, preko relacija ekvivalencija i preko kvaziuređenja.

3.1 Rough skupovi definisani pomoću relacija ekvivalencija

Definicija 3.1: Neka je *E* ekvivalencija na skupu *U*. Za svako $x \in U$ definišemo ${}^{x}/_{E}$ klasu ekvivalencije x. Za svaki podskup $X \subseteq U$ neka je:

$$X^{\blacktriangledown} \coloneqq \{x \in U \mid {}^{x}/_{E} \subseteq X\} \text{ i } X^{\blacktriangle} \coloneqq \{x \in U \mid X \cap {}^{x}/_{E} \neq \emptyset\}.$$

Skupovi $X^{\blacktriangledown}$ i $X^{\blacktriangle}$ se redom zovu *donja* i *gornja aproksimacija X*. Skup $B(X) \coloneqq X^{\blacktriangle} \setminus X^{\blacktriangledown}$ je *granica* X.

Primer: Posmatrajmo skup $U = \mathbb{N}$ i neka je

$$X = \{x \in U \mid x \equiv 0 \ (mod\ 3)\} \cup \{x \in U \mid x \equiv 0 \ (mod\ 4)\} \cup \{5,7,17,19\}$$

I neka imamo ekvivalenciju ρ takvu da $a\rho b$ ako i samo ako $a \equiv b \ (mod\ 12)$. Tada dobijamo ukupno 12 klasa ekvivalencije: $[0]_\rho, [1]_\rho, [2]_\rho, \dots, [11]_\rho$. Napravimo sad gornju i donju aproksimaciju. Očigledno je $X^{\blacktriangledown} \subseteq X^{\blacktriangle}$ pa će sve klase koje su u donjoj aproksimaciji biti i u gornjoj. Donjoj aproksimaciji pripadaju klase koje su u potpunosti u X, dok gornjoj pripadaju klase koje imaju bar jedan element u X. Posmatrajmo sad redom klase.

Klasi $[i]_\rho$ pripadaju brojevi oblika $i + 12k$, za $k \in \mathbb{N}$, tada vidimo da je klasa $[0]_\rho$ u donjoj aproksimaciji, jer su brojevi oblika $0 + 12k$ deljivi i sa 3 i sa 4, pa pripadaju X. Za klasu $[3]_\rho$ isto lako vidimo da pripada, jer su brojevi oblika $3 + 12k$ svi deljivi sa 3 pa se nalaze u X, slično i za klasu $[4]_\rho$, jer su tu svi brojevi deljivi sa 4. Te tri klase onda pripadaju i gornjoj aproksimaciji.

Posmatrajmo sada klasu $[1]_\rho$, gde su brojevi oblika $1 + 12k$, to nam ne govori mnogo, ali možemo da vidimo da je ta klasa skup $\{1,13,25,37, \dots\}$ i lako se vidi da ti brojevi nisu deljivi ni sa 3, ni sa 4, i ne nalaze se među četiri dodata broja, pa klasa $[1]_\rho$ ne pripada ni jednoj aproksimaciji. Isto važi i za klasu $[2]_\rho = \{2,14,26,38, \dots\}$ pa ni ona ne pripada ni jednoj aproksimaciji.

Sledeće posmatrajmo klasu $[5]_\rho = \{5,17,29, \dots\}$ elementi te klase nisu deljivi ni sa 3, ni sa 4 pa cela klasa ne može da pripada X, ali među dodatim brojevima se nalaze 5 i 17 koji pripadaju ovoj klasi, pa X ima presek sa ovom klasom što znači da ona pripada gornjoj aproksimaciji. Isto važi i za klasu $[7]_\rho$, jer njoj pripadaju 7 i 19, pa i ona pripada gornjoj aproksimaciji.

Sada posmatramo klasu $[6]_\rho$, u njoj se nalaze brojevi oblika $6 + 12k$ iz čega se jasno vidi da su svi deljivi sa 3, a neki i sa 4, tako da i ta klasa pripada donjoj aproksimaciji, pa i gornjoj.

Za klasu $[8]_\rho$ imamo elemente oblika $8 + 12k$ koji su svi deljivi sa 4 i isto za klasu $[9]_\rho$ imamo elemente oblika$9 + 12k$ koji su svi deljivi sa 3, pa one obe pripadaju i donjoj i gornjoj aproksimaciji.

Ostale su nam još klase $[10]_\rho$ i $[11]_\rho$ koje su redom $\{10,22,34,46, \dots\}$ i $\{11,23,35,47, \dots\}$ gde vidimo da ni jedan element ne pripada X, pa one nisu ni u jednoj aproksimaciji.

Konačno, donja i gornja aproksimacija su:

$$X^{\blacktriangledown} = [0]_\rho \cup [3]_\rho \cup [4]_\rho \cup [6]_\rho \cup [8]_\rho \cup [9]_\rho$$

$$X^{\blacktriangle} = [0]_\rho \cup [3]_\rho \cup [4]_\rho \cup [5]_\rho \cup [6]_\rho \cup [7]_\rho \cup [8]_\rho \cup [9]_\rho$$

$$B(X) = X^{\blacktriangle} \setminus X^{\blacktriangledown} = [5]_\rho \cup [7]_\rho. \qquad \square$$

Gornje definicije znače da $x \in X^{\blacktriangle}$ ako postoji element u *X* koji je u istoj klasi ekvivalencije E kao i x. Slično $x \in X^{\blacktriangledown}$ ako se svi elementi sa kojima je x u istoj klasi ekvivalencije E nalaze u *X*. Dalje, $x \in B(X)$ ako i u *X* i van *X* postoje elementi koji su u istoj klasi ekvivalencije kao i x. Ako je $B(X) = \emptyset$ za neko $X \subseteq U$, to znači da svako $x \in U$ možemo sigurno znati da li $x \in X$ ako znamo u kojoj klasi ekvivalencije E je x.

Skup *X* se zove *definabilan* ako je $X^{\blacktriangledown} = X^{\blacktriangle}$. Definišemo kao *Def(E)* kao skup svih definabilnih skupova relacije E. Kada se zna koja ekvivalencija se posmatra onda možemo umesto *Def(E)* da pišemo samo *Def*. Jasno je da $X \in Def(E)$ ako i samo ako $B(X) = \emptyset$.

Kompletna Boolova algebra je Boolova algebra čija je mreža u nosaču kompletna. Ako je data kompletna Boolova algebra **B** i podalgebra $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$, kažemo da je **A** *kompletna Boolova podalgebra* algebre **B** ako je $\langle A;\ \leq\rangle$ kompletna podmreža mreže $\langle B;\ \leq\rangle$. Familija *Def* formira kompletnu Boolovu podalgebru algebre $\langle \wp(U), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, U\rangle$. Zbog toga, kompletna mreža $\boldsymbol{Def} = \langle Def;\ \subseteq\rangle$ je kompletno distributivna. Štaviše, ***Def*** je atomarna i atomarno generisana, i njeni atomi su *E*-klase. Tačnije, aproksimacije su definabilne i za bilo koje $X \subseteq U$:

$$X^{\blacktriangledown} = \bigcup\{A \in Def \mid A \subseteq X\} \text{ i } X^{\blacktriangle} = \bigcap\{A \in Def \mid X \subseteq A\}$$

Definišemo binarnu relaciju $\equiv$ na $\wp(U)$ tako što je $X \equiv Y$ ako je $X^{\blacktriangledown} = Y^{\blacktriangledown}$ i $X^{\blacktriangle} = Y^{\blacktriangle}$. Klase ekvivalencije relacije $\equiv$ se zovu *rough skupovi*. Po definiciji, svaki rough skup je jedinstveno određen parom $(X^{\blacktriangledown}, X^{\blacktriangle})$. Obeležimo sa *RS(E)* kolekciju $\{\ (X^{\blacktriangledown}, X^{\blacktriangle}) | X \subseteq U\}$ svih rough skupova određenih sa *E*. Označavaćemo *RS(E)* samo sa *RS* ako ne postoji mogućnost zabune. Skup *RS* je prirodno uređen sa $(X^{\blacktriangledown}, X^{\blacktriangle}) \leq\ (Y^{\blacktriangledown}, Y^{\blacktriangle})$ ako $X^{\blacktriangledown} \subseteq Y^{\blacktriangledown}$ i $X^{\blacktriangle} \subseteq Y^{\blacktriangle}$. Par $(\emptyset, \emptyset)$ je najmanji, a (U, U) je najveći rough skup.

Sledeća teorema je data bez dokaza, a dokazana je u radu [25] J. Pomykała i J.A. Pomykała iz 1988.

Teorema 3.1: Za bilo koju ekvivalenciju, *RS* formira kompletnu Stoneovu mrežu tako da za sve $(A, B) \in RS$ i $\{(A_i, B_i)\}_{i \in I} \subseteq RS$

$$\bigvee_{i \in I} (A_i, B_i) = \left(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i\right)$$

$$\bigwedge_{i \in I} (A_i, B_i) = \left(\bigcap_{i \in I} A_i, \bigcap_{i \in I} B_i\right)$$

$$(A, B)^* = (B^c, B^c).$$

Sledeća teorema je prikazana u radu [6] S.D. Comera iz 1995., a mi ćemo je dati bez dokaza.

Teorema 3.2: Svaka kompletna atomarna regularna dupla Stoneova algebra je izomorfna nekom rough skupu duple Stoneove algebre koji je određen ekvivalencijom.

3.2 Rough skupovi definisani pomoću kvaziuređenja

Definicija 3.2: Neka je $\lesssim$ kvaziuređenje na *U*, tačnije, $\lesssim$ je refleksivna i tranzitivna binarna relacija na skupu *U*. Označimo sa $[x) = \{y \in U \mid x \lesssim y\}$. Definišemo sledeće rough aproksimacione operatore za neko $X \subseteq U$:

$$X^{\blacktriangle} \coloneqq \{x \in U \mid [x) \cap X \neq \emptyset\}, \qquad X^{\blacktriangledown} \coloneqq \{x \in U \mid [x) \subseteq X\}$$

Po definiciji operatora vidimo da važi:

$$X^{\blacktriangledown c} = X^{c\blacktriangle}, \quad X^{\blacktriangle c} = X^{c\blacktriangledown}$$

Kvaziuređenje $\lesssim$ može da se interpretira kao uređenje specijalizacije, gde se $x \lesssim y$ čita „y je specijalizacija x“. Tada, u ovoj interpretaciji, $x \in X^{\blacktriangle}$ znači da postoji makar jedna specijalizacija y u X.

Definicija 3.3: Neka je $\lesssim$ kvaziuređenje na U tada je *rough skup od* X par $\mathcal{A}(X) = (X^{\blacktriangledown}, X^{\blacktriangle})$ i skup svih rough skupova je:

$$RS(\lesssim) = \{\mathcal{A}(X) \mid X \subseteq U\}.$$

Rough skup $\mathcal{A}(X) = (X^{\blacktriangledown}, X^{\blacktriangle})$ se naziva *egzaktan element* skupa RS ako $X^{\blacktriangledown} = X = X^{\blacktriangle}$.

Svaka topologija Alexandrova $\mathcal{T}$ na *U* definiše kvaziuređenje $\lesssim_{\mathcal{T}}$ na *U* tako što je $x \lesssim_{\mathcal{T}} y$ ako i samo ako $y \in N(X)$ za sve $x, y \in U$. Sa druge strane, kvaziuređenje $\lesssim$ na *U*, skup svih $\lesssim$-zatvorenih podskupova *U*, koji se takođe zovu up-skupovi $\langle U, \lesssim \rangle$, formira topologiju Alexandrova $\mathcal{T}_{\lesssim}$. Zbog toga, $B \in \mathcal{T}_{\lesssim}$ ako i samo ako $x \in B$ i $x \lesssim y$ implicira $y \in B$. Korespodencije $\mathcal{T} \longmapsto \lesssim_{\mathcal{T}}$ i $\lesssim \longmapsto \mathcal{T}_{\lesssim}$ su uzajamno invertibilne bijekcije između klasa svih topologija Alexandrova i svih kvaziuređenja na skupu *U*.

Takođe imamo da je:

$$\mathcal{T}_{\lesssim} = \{X^{\blacktriangledown} \mid X \subseteq U\}$$

$$\mathcal{T}_{\gtrsim} = \{X^{\blacktriangle} \mid X \subseteq U\}$$

Teorema 3.3 [15]: Za svako kvaziuređenje $\lesssim$, $\langle RS(\lesssim), \leq \rangle$ formira kompletnu mrežu tako da za sve $\{(A_i, B_i)\}_{i \in I} \subseteq RS(\lesssim)$ važi:

$$\bigvee_{i \in I} (A_i, B_i) = \left(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i \right)$$

i

$$\bigwedge_{i \in I} (A_i, B_i) = \left(\bigcap_{i \in I} A_i, \bigcap_{i \in I} B_i \right).$$

Propozicija 3.4 [12]: Neka je $\lesssim$ neko kvaziuređenje na U. Tada je

$$\boldsymbol{RS} = \langle RS(\lesssim), \wedge, \vee, \sim, (\emptyset, \emptyset), (U, U) \rangle$$

Kleenejeva algebra takva da je $\sim(X^{\blacktriangledown}, X^{\blacktriangle}) = (X^{c\blacktriangledown}, X^{c\blacktriangle})$.

De Morganova mreža je *centrirana* ako postoji element takav da je $c = \sim c$; taj element *c* se zove *centar* **A**. Takođe uvodimo oznaku $\mathcal{S} \coloneqq \{x \in U \mid [x) = \{x\}\}$ za skup svih elemenata iz U za koje važi da je $[x)$ singlton.

Neka je *R* binarna relacija na *U* koja je tranzitivna. *Naslednik* elementa $x \in U$ je element $y \in U$ takav da je xRy. Neka je $X \subseteq Y \subseteq U$. Tada, *X* je *kofinalan u Y* ako svaki $x \in Y$ ima naslednika u *X*.

Takođe kažemo da je skup kofinalan ako je kofinalan u *U*.

Propozicija 3.5:Neka je $\lesssim$ neko kvaziuređenje na U. Tada je Kleenejeva algebra **RS** centrirana ako i samo ako je skup $\mathcal{S}$ prazan.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{S} = \emptyset$, tada za svaki element $x \in U$ važi da ima bar dva naslednika. Na osnovu toga se U može podeliti na dva disjunktna kofinalna podskupa X i Y. Kako svako $x \in U$ ima naslednika u X, dobijamo da je $X^{\blacktriangle} = U$. Pretpostavimo da je $X^{\blacktriangledown} \neq \emptyset$. Tada, po definiciji donje aproksimacije, sledi da postoji $x \in U$ takav da $x \in [x) \subseteq X$. Ali to nije moguće, jer je Y kofinalan u U, što znači da x ima naslednika u Y, i znamo da su X i Y disjunktni. Sledi da je $X^{\blacktriangledown} = \emptyset$ i $(\emptyset, U)$ je jedinstveni centar.

Pretpostavimo sada da je $(C^{\blacktriangledown}, C^{\blacktriangle})$ centar u **RS**. Tada

$$(C^{\blacktriangledown}, C^{\blacktriangle}) = (C^{\blacktriangledown}, C^{\blacktriangle}) \wedge\sim (C^{\blacktriangledown}, C^{\blacktriangle}) = (C^{\blacktriangledown} \cap C^{\blacktriangle c}, C^{\blacktriangle} \cap C^{\blacktriangledown c}),$$

odavde dobijamo $C^{\blacktriangledown} = C^{\blacktriangledown} \cap C^{\blacktriangle c} \subseteq C^{\blacktriangledown} \cap C^{\blacktriangledown c} = \emptyset$.

Analogno,

$$(C^{\blacktriangledown}, C^{\blacktriangle}) = (C^{\blacktriangledown}, C^{\blacktriangle}) \vee\sim (C^{\blacktriangledown}, C^{\blacktriangle}) = (C^{\blacktriangledown} \cup C^{\blacktriangle c}, C^{\blacktriangle} \cup C^{\blacktriangledown c}),$$

na osnovu čega dobijamo $C^{\blacktriangle} = C^{\blacktriangle} \cup C^{\blacktriangledown c} \supseteq C^{\blacktriangledown} \cup C^{\blacktriangledown c} = U$.

Dakle, mora da važi da je $(C^{\blacktriangledown}, C^{\blacktriangle}) = (\emptyset, U)$. Ako sada pretpostavimo da $\mathcal{S} \neq \emptyset$, tada znamo da postoji $x \in U$ takav da je $[x) = \{x\}$. Znamo da je $x \in C^{\blacktriangle} = U$ odakle, po definiciji gornje i donje aproksimacije, dobijamo da je $x \in C$, pa onda i $x \in C^{\blacktriangledown}$. Ali to nije moguće, jer je $C^{\blacktriangledown} = \emptyset$. Dakle, $\mathcal{S} = \emptyset$. □

Teorema 3.6 ([11]): Za svako kvaziuređenje $\lesssim$ na skupu U,

$$RS(\lesssim) = \{(A, B) \in \mathcal{T}_{\lesssim} \times \mathcal{T}_{\gtrsim} \mid A \subseteq B \ i \ A \cap \mathcal{S} = B \cap \mathcal{S}\}.$$

Ekvivalentno možemo da zapišemo:

$$RS(\lesssim) = \{(A, B) \in \mathcal{T}_{\lesssim} \times \mathcal{T}_{\gtrsim} \mid A \subseteq B \ i \ \mathcal{S} \subseteq A \cup B^c\}.$$

Definicija 3.4: Neka je $\lesssim$ kvaziuređenje na *U*. Dualna relacija relaciji $\lesssim$ je $\gtrsim$. Označimo sa $(x] = \{y \in U | x \gtrsim y\}$. Definišemo sledeće rough aproksimacione operatore:

$$X^{\triangle} \coloneqq \{x \in U \mid (x] \cap X \neq \emptyset\}, \qquad X^{\triangledown} \coloneqq \{x \in U \mid (x] \subseteq X\}.$$

Po definiciji operatora vidimo da važi:

$$X^{\triangledown c} = X^{c\triangle}, \quad X^{\triangle c} = X^{c\triangledown}$$

Jari Kortelainen je u radu [18] dokazao:

$$X^{\blacktriangle\triangledown} = X^{\blacktriangle}, \qquad X^{\triangle\blacktriangledown} = X^{\triangle}, \qquad X^{\blacktriangledown\triangle} = X^{\blacktriangledown}, \qquad X^{\triangledown\blacktriangle} = X^{\triangledown}$$

Propozicija 3.7: Za rough skupove (A, B) i (C, D) određene kvaziuređenjem $\lesssim$ važi:

$$(A, B) \Rightarrow (C, D) = ((A^c \cup C)^{\blacktriangledown} \cap (B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown}, (B^c \cup D)^{\triangledown})$$

Dokaz: Da bi pokazali traženu jednakost moramo da pokažemo da je

$$((A^c \cup C)^{\blacktriangledown} \cap (B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown}, (B^c \cup D)^{\triangledown})$$

rough skup, odnosno da pripada skupu iz teoreme 3.6, i da je relativni pseudokomplement, odnosno da je najveći element koji zadovoljava $(A, B) \wedge (X, Y) \leq (C, D)$.

Znamo da je $A^c \cup C \subseteq U$ i $(B^c \cup D)^{\triangledown} \subseteq B^c \cup D \subseteq U$, pa na osnovu definicija dobijamo da je

$$(A^c \cup C)^{\blacktriangledown}, (B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown} \subseteq \mathcal{T}_{\lesssim},$$

pa onda i

$$(A^c \cup C)^{\blacktriangledown} \cap (B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown} \subseteq \mathcal{T}_{\lesssim}.$$

Prema osobinama aproksimacija znamo da je $(B^c \cup D)^{\triangledown} = (B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangle}$. Ponovo, kako znamo da je $(B^c \cup D)^{\triangledown} \subseteq U$, tada je $(B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangle} \subseteq \mathcal{T}_{\gtrsim}$, odnosno$(B^c \cup D)^{\triangledown} \subseteq \mathcal{T}_{\gtrsim}$. Takođe znamo da je

$$(B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown} \subseteq (B^c \cup D)^{\triangledown},$$

pa možemo zaključiti da je $(A^c \cup C)^{\blacktriangledown} \cap (B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown} \subseteq (B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown} \subseteq (B^c \cup D)^{\triangledown}$. Neka je sada $x \in \mathcal{S}$ proizvoljno takvo da je $x \in (B^c \cup D)^{\triangledown}$. Pošto je $x \in \mathcal{S}$, onda je $[x) = \{x\}$, odakle sledi da $x \in (B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown}$. Dodatno, (A, B) je rough skup pa je $A \subseteq B$, što znači da možemo iz

$$x \in (B^c \cup D)^{\triangledown} \subseteq B^c \cup D$$

da zaključimo $x \in A^c \cup D$. Dalje, kako je (C, D) roug skup, imamo da je $C \cap \mathcal{S} = D \cap \mathcal{S}$, pa možemo za naše posmatrano x da zaključimo da iz $x \in A^c \cup D$ sledi $x \in A^c \cup C$. Pošto znamo da je$[x) = \{x\}$, onda važi i $x \in (A^c \cup C)^{\blacktriangledown}$. Dakle, dobili smo da je

$$((A^c \cup C)^{\blacktriangledown} \cap (B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown}, (B^c \cup D)^{\triangledown})$$

rough skup.

Sada još pokazujemo da je relativni pseudokomplement. Pokažimo prvo da zadovoljava traženu inkluziju:

$$\begin{aligned}
(A, B) \wedge ((A^c \cup C)^{\blacktriangledown} \cap (B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown}, (B^c \cup D)^{\triangledown}) &= (A \cap (A^c \cup C)^{\blacktriangledown} \cap (B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown}, B \cap (B^c \cup D)^{\triangledown}) \\
&\subseteq \Big(A \cap \big((A^c \cup C) \cap (B^c \cup D)\big), B \cap (B^c \cup D)\Big) \\
&\subseteq \big(A \cap (A^c \cup C), B \cap (B^c \cup D)\big) \\
&= \big((A \cap A^c) \cup (A \cap C), (B \cap B^c) \cup (B \cap D)\big) \\
&= (A \cap C, B \cap D) \subseteq (C, D).
\end{aligned}$$

Time smo dokazali da je inkluzija zadovoljena, odnosno da je zadovoljen uslov relativnog pseudokomplementa. Sada još treba pokazati da je najveći koji zadovoljava taj uslov.

Pretpostavimo da za neki rough skup (X,Y) važi $(A,B) \wedge (X,Y) \leq (C,D)$. Tada je $A \cap X \subseteq C$ i $B \cap Y \subseteq D$, odakle dobijamo

$$X \subseteq A^c \cup C \text{ i } Y \subseteq B^c \cup D.$$

Na osnovu toga, znamo da je $X \in \mathcal{T}_{\lesssim}$ i $Y \in \mathcal{T}_{\gtrsim}$, i imamo

$$X = X^{\blacktriangledown} \subseteq (A^c \cup C)^{\blacktriangledown} \text{ i } Y = Y^{\triangledown} \subseteq (B^c \cup D)^{\triangledown}.$$

Kako je (X,Y) rough skup znamo da je $X \subseteq Y$, pa možemo dobiti

$$X = X^{\blacktriangledown} \subseteq Y^{\blacktriangledown} \subseteq (B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown}.$$

Spajanjem dobijenih rezultata imamo

$$X \subseteq (A^c \cup C)^{\blacktriangledown} \cap (B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown}.$$

Sa ovim smo dobili

$$(X,Y) \leq ((A^c \cup C)^{\blacktriangledown} \cap (B^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown}, (B^c \cup D)^{\triangledown})$$

čime je dokaz završen. □

Propozicija 3.8 ([15])**:** Neka je $\lesssim$ kvaziuređenje na *U*. Tada je

$$\mathcal{J} = \{(\emptyset, \{x\}^{\blacktriangle}) \mid card([x)) \geq 2\} \cup \{(\{x\}^{\triangle}, \{x\}^{\triangle\blacktriangle}) \mid x \in U\}$$

skup kompletno ∨-nesvodljivih elemenata na U.

Za svaku binarnu relaciju *R* na *U*, skup *C* se zove *povezana komponenta* od *R*, ako je *C* klasa ekvivalencije najmanje relacije ekvivalencije koja sadrži *R*. Označimo sa $C_0(R)$ skup svih R-povezanih komponenti. Možemo kraće da zapišemo samo C_0 ako znamo na koju relaciju se odnosi. Neka je $\lesssim$ kvaziuređenje. Za svaku povezanu komponentu $C \in C_0$ i $x \in U$, $[x) \cap C \neq \emptyset$ implicira $x \in C$, i $x \in C$ implicira $[x) \subseteq C$. Zbog toga $C^{\blacktriangle} \subseteq C \subseteq C^{\blacktriangledown}$. Kako, iz definicija, znamo da važi $C^{\blacktriangledown} \subseteq C^{\blacktriangle}$ sledi da je $C^{\blacktriangledown} = C = C^{\blacktriangle}$ za svaku povezanu komponentu *C*.

Obeležavamo za svako $C \in C_0$ sa $RS(C)$ skup rough skupova na komponenti *C* koji je određen restrikcijom $\lesssim$ na *C*. Binarna relacija *R* je *levo-totalna* ako za svako $x \in U$ postoji $y \in U$ tako da je xRy i uvodimo oznaku $R(x) \coloneqq \{y \in U \mid xRy\}$. Napomenimo da je svaka refleksivna relacija levo-totalna.

Lema 3.9: Ako je R levo-totalna relacija na U, onda važe sledeća tvrđenja

(i) Ako je $\{C_i \mid i \in I\} \subseteq C_0$ podskup povezanih komponenti R, tada je za bilo koju familiju $\{(X_i^{\blacktriangledown}, X_i^{\blacktriangle}) \in RS(C_i) \mid i \in I\}$ par $(\bigcup_{i\in I} X_i^{\blacktriangledown}, \bigcup_{i\in I} X_i^{\blacktriangle})$ rough skup na U.

(ii) Ako je $(X^{\blacktriangledown}, X^{\blacktriangle})$ rough skup na U, tada je par $(X^{\blacktriangledown} \cap C, X^{\blacktriangle} \cap C)$ rough skup na C za bilo koju povezanu komponentu $C \in C_0$.

Dokaz: (i) Jasno je da važi $(\bigcup_{i\in I} X_i)^{\blacktriangle} = \bigcup_{i\in I} X_i^{\blacktriangle}$. Pokazaćemo da važi i $(\bigcup_{i\in I} X_i)^{\blacktriangledown} = \bigcup_{i\in I} X_i^{\blacktriangledown}$. Kako znamo da je $X_i^{\blacktriangledown} \subseteq (\bigcup_{i\in I} X_i)^{\blacktriangledown}$, za sve $i \in I$, možemo da zaključimo da važi $\bigcup_{i\in I} X_i^{\blacktriangledown} \subseteq (\bigcup_{i\in I} X_i)^{\blacktriangledown}$. Za drugu inkluziju posmatrajmo proizvoljno $x \in (\bigcup_{i\in I} X_i)^{\blacktriangledown}$. Na osnovu definicije, znamo da je

$$\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)^{\blacktriangledown} = \left\{x \in U \,\middle|\, R(x) \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i\right\},$$

što znači da je, za naše posmatrano x, $R(x) \neq \emptyset$ i $R(x) \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i \subseteq \bigcup_{i\in I} C_i$. Zbog toga, sledi da postoji $k \in I$ i $y \in C_k$ tako da xRy. Dakle, kako je C_k povezana komponenta, $x \in C_k$ i $R(x) \subseteq C_k$. To implicira

$$R(x) \subseteq C_k \cap \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \bigcup_{i\in I} (C_k \cap X_i) = X_k,$$

jer je $X_k \subseteq C_k$ i $X_i \cap C_k = \emptyset$ za sve $i \in I \setminus \{k\}$. Gornjom inkluzijom smo dobili $x \in X_i^{\blacktriangledown} \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i^{\blacktriangledown}$, a kako smo posmatrali $x \in (\bigcup_{i\in I} X_i)^{\blacktriangledown}$ dobili smo traženu inkluziju, pa i jednakost $(\bigcup_{i\in I} X_i)^{\blacktriangledown} = \bigcup_{i\in I} X_i^{\blacktriangledown}$. Dakle,

$$\mathcal{A}\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) = \left(\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)^{\blacktriangledown}, \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)^{\blacktriangle}\right) = \left(\bigcup_{i\in I} X_i^{\blacktriangledown}, \bigcup_{i\in I} X_i^{\blacktriangle}\right)$$

je rough skup na U.

(ii) Neka je $C \in C_0$. Želimo da pokažemo da je $(X^{\blacktriangledown} \cap C, X^{\blacktriangle} \cap C)$ rough skup na C za bilo koji rough skup $(X^{\blacktriangledown}, X^{\blacktriangle})$ na U. Da bi to pokazali dovoljno je da pokažemo da je $(X^{\blacktriangledown} \cap C, X^{\blacktriangle} \cap C)$ jednak sa

$$\mathcal{A}(X \cap C) = ((X \cap C)^{\blacktriangledown}, (X \cap C)^{\blacktriangle}),$$

Odnosno da je $(X \cap C)^{\blacktriangledown} = X^{\blacktriangledown} \cap C$ i $(X \cap C)^{\blacktriangle} = X^{\blacktriangle} \cap C$. Na osnovu definicije donje aproksimacije i osobina povezanih komponenti sledi

$$(X \cap C)^{\blacktriangledown} = X^{\blacktriangledown} \cap C^{\blacktriangledown} = X^{\blacktriangledown} \cap C.$$

Znamo da važi $(X \cap C)^{\blacktriangle} \subseteq X^{\blacktriangle}$ i $(X \cap C)^{\blacktriangle} \subseteq C^{\blacktriangle} = C$, na osnovu čega zaključujemo

$$(X \cap C)^{\blacktriangle} \subseteq X^{\blacktriangle} \cap C.$$

Za drugu inkluziju, neka je $x \in X^{\blacktriangle} \cap C$, tada znamo da važi $R(x) \cap X \neq \emptyset$ i $R(x) \subseteq C$. To implicira da

$$(x) \cap (X \cap C) = (R(x) \cap C) \cap X = R(x) \cap X \neq \emptyset,$$

odnosno da $x \in (X \cap C)^{\blacktriangle}$, čime smo dobili drugu inkluziju.

Dakle, $(X \cap C)^{\blacktriangle} = X^{\blacktriangle} \cap C$, to jest $(X^{\blacktriangledown} \cap C, X^{\blacktriangle} \cap C)$ je rough skup na C. □

Posledica 3.10: Ako je R levo-totalna relacija, onda za svaki podskup $\mathcal{H} \subseteq C_0$ povezanih komponenti R, rough skup $\mathcal{A}(\bigcup \mathcal{H})$ je egzaktan element RS.

Dokaz: Neka je $\mathcal{H} \subseteq C_0$. Prema dokazu leme 3.9 (i)

$$\left(\bigcup \mathcal{H}\right)^{\blacktriangledown} = \bigcup_{C\in\mathcal{H}} C^{\blacktriangledown} = \bigcup \mathcal{H} = \bigcup_{C\in\mathcal{H}} C^{\blacktriangle} = \left(\bigcup \mathcal{H}\right)^{\blacktriangle}$$

□

Propozicija 3.11 ([15]): Ako je R kvaziuređenje na nepraznom skupu U, tada su i $RS(R)$ i njegov dual pseudokomplementarne mreže.

Kada posmatramo kvaziuređenje $R \subseteq U \times U$, najmanja ekvivalencija koja sadrži R je $R \vee R^{-1}$, gde $\vee$ predstavlja supremum u mreži svih kvaziuređenja na U uređenih sa relacijom skupovne inkluzije $\subseteq$. Osim toga, $R \vee R^{-1}$ je jednako tranzitivnom zatvorenju relacije $R \cup R^{-1}$. Dakle, povezane komponente R su klase ekvivalencije $R \vee R^{-1}$ ([15]).

Propozicija 3.12: Neka je R kvaziuređenje na U. Tada su sledeće tvrdnje ekvivalentne za bilo koje $X \subseteq U$:

(i) Rough skup $\mathcal{A}(X)$ ima svoj komplementaran element u $RS(R)$.
(ii) $\mathcal{A}(X)$ je egzaktan element $RS(R)$.
(iii) X je unija nekih klasa ekvivalencije $R \vee R^{-1}$.

Dokaz: $(i) \Longrightarrow (ii)$: Pretpostavimo da postoji skup $Y \subseteq U$ takav da je $\mathcal{A}(Y)$ komplement $\mathcal{A}(X)$. Tada $X^{\blacktriangle} \cap Y^{\blacktriangle} = \emptyset$ i $X^{\blacktriangledown} \cup Y^{\blacktriangledown} = U$. Dakle, imamo

$$Y^c \subseteq Y^{\blacktriangledown c} \subseteq X^{\blacktriangledown} \subseteq X \subseteq X^{\blacktriangle} \subseteq Y^{\blacktriangle c} \subseteq Y^c$$

Što dokazuje $X^{\blacktriangledown} = X = X^{\blacktriangle} = Y^c$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: Jasno je da (ii) implicira $X^{\blacktriangledown} = X$ i $X^{\triangledown} = X^{\blacktriangle\triangledown} = X^{\blacktriangle} = X$. Dakle, za bilo koje $x \in X$, imamo $(R \cup R^{-1})(x) \subseteq X$, to jest, X je zatvoren u odnosu na relaciju $R \cup R^{-1}$. Tada, X mora biti zatvoren u odnosu na tranzitivno zatvorenje $R \cup R^{-1}$ koje je $R \vee R^{-1}$, to jest, $(R \vee R^{-1})(x) \subseteq X$ za sve $x \in X$. Ovo implicira

$$X = \bigcup \{(R \vee R^{-1})(x) \mid x \in X\}$$

$(iii) \Longrightarrow (i)$: Pretpostavimo da je $X = \bigcup \mathcal{H}$, gde je $\mathcal{H}$ skup nekih klasa ekvivalencije $R \vee R^{-1}$. Pošto je za svako $C \in \mathcal{H}$ skup C povezana komponenta R, $X^{\blacktriangledown} = X^{\blacktriangle} = X$ po posledici 3.10. Tada,

$$X^{c\blacktriangledown} = X^{\blacktriangle c} = X^c = X^{\blacktriangledown c} = X^{c\blacktriangle}$$

to jest, $\mathcal{A}(X^c)$ je takođe egzaktan element RS. Pošto je

$$\mathcal{A}(X) \wedge \mathcal{A}(X^c) = (X \cap X^c, X \cap X^c) = (\emptyset, \emptyset) = \mathcal{A}(\emptyset)$$

i

$$\mathcal{A}(X) \vee \mathcal{A}(X^c) = (X \cup X^c, X \cup X^c) = (U, U) = \mathcal{A}(U)$$

Sledi da $\mathcal{A}(X)$ ima svoj komplement u $RS(R)$. □

Propozicija 3.13 ([15])**:** Neka je R kvaziuređenje na U. Tada u mreži $RS(R)$ za svako $X \subseteq U$ važi

$$\mathcal{A}(X)^* = \mathcal{A}(X^{\blacktriangle\triangle c}).$$

Napomena: Ako je pretpostavka prethodne propozicije zadovoljena, tada iz argumenata dokaza dobijamo da je $\mathcal{A}(X)$ egzaktan ako i samo ako je $\mathcal{A}(X^c)$ egzaktan.

Teorema 3.14: Neka je R kvaziuređenje na U. Tada je $RS(R)$ Stoneova mreža ako i samo ako

$$R^{-1} \circ R = R \vee R^{-1}.$$

Dokaz: Pretpostavimo da je RS Stoneova mreža. Tada, za svako $X \subseteq U$ znamo da rough skup $\mathcal{A}(X)^* = \mathcal{A}(X^{\blacktriangle\triangle c})$ ima svoj komplement u RS. Sada, na osnovu propozicije 3.12 i gornje napomene, možemo da zaključimo da je $\mathcal{A}(X^{\blacktriangle\triangle c})$, kao i njegov komplement $\mathcal{A}(X^{\blacktriangle\triangle})$, egzaktan element RS. Posmatrajmo proizvoljno $x \in U$ i skup $X = \{x\}$. Tada se lako vidi $X^{\blacktriangle\triangle} = (R^{-1} \circ R)(x)$. Po propoziciji 3.12 znamo da je $X^{\blacktriangle\triangle}$ unija nekih klasa ekvivalencije $R \vee R^{-1}$, a kako je $X^{\blacktriangle\triangle} = (R^{-1} \circ R)(x)$ dobili smo da je $(R^{-1} \circ R)(x) \subseteq (R \vee R^{-1})(x)$, a pošto ti važi za svako $x \in U$ onda je $R^{-1} \circ R \subseteq R \vee R^{-1}$. Znamo da je $R \vee R^{-1}$ najmanja ekvivalencija koja sadrži R, što znači da mora da važi $R \vee R^{-1} \subseteq R^{-1} \circ R$. Dakle,

$$R^{-1} \circ R = R \vee R^{-1}.$$

Sa druge strane, pretpostavimo da važi $R^{-1} \circ R = R \vee R^{-1}$. Tada znamo, na osnovu teoreme 3.3 i propozicije 3.11, da je RS distributivna pseudokomplementarna kompletna mreža. Treba još da pokažemo da $\mathcal{A}(X)^*$ ima svoj komplementaran element u RS, za svako $X \subseteq U$. Posmatrajmo $X \subseteq U$, i neka je $x \in X^{\blacktriangle\triangle}$ i $y \in (R \vee R^{-1})(x)$. Tada, na osnovu definicije $X^{\blacktriangle\triangle}$, možemo da zaključimo da postoje $z \in R^{-1}(x) \cap X^{\blacktriangle}$ i $v \in R(z) \cap X$. To znači da je $xR^{-1}z$ i zRv, pa pomoću kompozicije dobijamo da je $(x, v) \in R^{-1} \circ R$ za $v \in X$. Dakle, po hipotezi, $(v, x) \in R \vee R^{-1}$, pa možemo zaključiti, na osnovu tranzitivnosti, da $(x, y) \in R \vee R^{-1}$ implicira $(v, y) \in R \vee R^{-1}$. To znači da je

$$y \in (R \vee R^{-1})(v) = (R^{-1} \circ R)(v) = \{v\}^{\blacktriangle\triangle} \subseteq X^{\blacktriangle\triangle}.$$

Kako smo posmatrali proizvoljno $y \in (R \vee R^{-1})(x)$, sledi $(R \vee R^{-1})(x) \subseteq X^{\blacktriangle\triangle}$ za sve $x \in X^{\blacktriangle\triangle}$. Dakle, $X^{\blacktriangle\triangle}$ je unija nekih klasa $R \vee R^{-1}$. Stoga, na osnovu propozicije 3.12, imamo da $\mathcal{A}(X^{\blacktriangle\triangle})$ ima svoj komplementaran element u RS i da je egzaktam element u RS. Tada je, prema gornjoj napomeni, i komplement $\mathcal{A}(X^{\blacktriangle\triangle})$, to jest $\mathcal{A}(X)^* = \mathcal{A}(X^{\blacktriangle\triangle c})$ egzaktan i ima svoj komplementaran element u RS. Dakle, RS je Stoneova mreža. □

Na osnovu prethodne teoreme dobijamo sledeću posledicu za specijalan slučaj kvaziuređenja.

Posledica 3.15: Neka je $\lesssim$ kvazi uređenje na U. Sledeće je ekvivalentno:

(a) $\langle RS(\lesssim), \vee, \wedge, {}^*, {}^+, (\emptyset, \emptyset), (U, U)\rangle$ je (dupla) Stoneova mreža,
(b) $\gtrsim \circ \lesssim$ je jednaka najmanjoj ekvivalenciji koja sadrži $\lesssim$.

Teorema 3.16: Za svako kvaziuređenje

$$\langle RS, \leq\rangle \cong \langle \prod_{C \in C_0} RS(C), \leq\rangle.$$

Dokaz: Dokaz radimo u opštijem slučaju, kada imamo relaciju R koja je levo-totalna. Dokazaćemo da između RS i $\prod_{C \in C_0} RS(C)$ postoji izomorfizam.

Pretpostavimo da je $C_0 = \{C_i | i \in I\}$. Posmatraćemo preslikavanja

$$\phi: RS \to \prod_{i \in I} RS(C_i) \qquad \text{i} \qquad \psi: \prod_{i \in I} RS(C_i) \to RS$$

Koja su definisana na sledeći način

$$\phi(\mathcal{A}(X)) = \left((X^{\blacktriangledown} \cap C_i, X^{\blacktriangle} \cap C_i)\right)_{i\in I}$$

i

$$\psi\left(\left((X_i^{\blacktriangledown}, X_i^{\blacktriangle})\right)_{i\in I}\right) = \left(\bigcup_{i\in I} X_i^{\blacktriangledown}, \bigcup_{i\in I} X_i^{\blacktriangle}\right)$$

za bilo koje $\mathcal{A}(X) = (X^{\blacktriangledown}, X^{\blacktriangle}) \in RS$ i $\left((X_i^{\blacktriangledown}, X_i^{\blacktriangle})\right)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} RS(C_i)$.

Na osnovu leme 3.9 znamo da su preslikavanja dobro definisana i lako se proverava da ϕ i ψ čuvaju uređenje. Dakle, treba još da se pokaže da su ϕ i ψ bijekcije, a za to će biti dovoljno pokazati da su međusobno inverzna preslikavanja.

Posmatrajmo proizvoljno $\mathcal{A}(X) = (X^{\blacktriangledown}, X^{\blacktriangle}) \in RS$, tada, po definicijama preslikavanja i po definiciji povezanih komponenti, dobijamo

$$\begin{aligned}
\psi\left(\phi(\mathcal{A}(X))\right) &= \psi\left(\left((X^{\blacktriangledown} \cap C_i, X^{\blacktriangle} \cap C_i)\right)_{i\in I}\right) \\
&= \left(\bigcup_{i\in I}(X^{\blacktriangledown} \cap C_i), \bigcup_{i\in I}(X^{\blacktriangle} \cap C_i)\right) \\
&= \left(X^{\blacktriangledown} \cap \left(\bigcup_{i\in I} C_i\right), X^{\blacktriangle} \cap \left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)\right) \\
&= (X^{\blacktriangledown}, X^{\blacktriangle}) = \mathcal{A}(X).
\end{aligned}$$

Sa druge strane ako krenemo od proizvoljnog $\left((X_i^{\blacktriangledown}, X_i^{\blacktriangle})\right)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} RS(C_i)$, imamo

$$\begin{aligned}
\phi\left(\psi\left(\left((X_i^{\blacktriangledown}, X_i^{\blacktriangle})\right)_{i\in I}\right)\right) &= \phi\left(\left(\bigcup_{j\in I} X_j^{\blacktriangledown}, \bigcup_{j\in I} X_j^{\blacktriangle}\right)\right) \\
&= \left(\left(\left(\bigcup_{j\in I} X_j^{\blacktriangledown}\right) \cap C_i, \left(\bigcup_{j\in I} X_j^{\blacktriangle}\right) \cap C_i\right)\right)_{i\in I}.
\end{aligned}$$

Pošto znamo da je $(X_j^{\blacktriangledown}, X_j^{\blacktriangle}) \in RS(C_j)$ za svako $j \in I$, to znači da su $X_j^{\blacktriangledown}$ i $X_j^{\blacktriangle}$ podskupovi C_j. Dodatno, na osnovu definicije povezanih komponenti važi da za bilo koje $i, j \in I$ tako da $i \neq j$ važi $C_i \cap C_j = \emptyset$. Sada, pomoću ovih činjenica dobijamo

$$\left(\bigcup_{j\in I} X_j^{\blacktriangledown}\right) \cap C_i = \left(\bigcup_{j\in I} X_j^{\blacktriangledown} \cap C_i\right) = X_i^{\blacktriangledown}$$

i

$$\left(\bigcup_{j\in I} X_j^{\blacktriangle}\right) \cap C_i = \left(\bigcup_{j\in I} X_j^{\blacktriangle} \cap C_i\right) = X_i^{\blacktriangle}$$

za svako $i \in I$. Kada ove rezultate iskoristimo u računu gore dobijamo da je

$$\phi\left(\psi\left(\left(\left(X_i^{\blacktriangledown}, X_i^{\blacktriangle}\right)\right)_{i\in I}\right)\right) = \left(\left(X_i^{\blacktriangledown}, X_i^{\blacktriangle}\right)\right)_{i\in I}.$$

Na osnovu gornjih jednakosti možemo zaključiti da su ϕ i ψ međusobno inverzna preslikavanja koja čuvaju uređenje, odnosno izomorfizmi. Dakle, $\langle RS, \leq\rangle$ i $\langle \prod_{C\in C_0} RS(C), \leq\rangle$ su izomorfni. □

Kao i u slučaju ekvivalencija, kažemo da je $X \subseteq U$ definabilan s obzirom na $\lesssim$ ako $X^{\blacktriangledown} = X^{\blacktriangle}$. Jasno je da su $\emptyset$ i U definabilni.

Propozicija 3.17 ([14]): Za kvaziuređenje $\lesssim$ definabilni skupovi su unije povezanih komponenti kvaziuređenja $\lesssim$ i praznog skupa.

3.3 Nelsonove algebre kao rough skupovi

Definicija 3.5: *Kvazi-Nelsonova* algebra je Kleenejeva algebra

$$\boldsymbol{A} = \langle A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$$

takva da za sve $a, b \in A$ postoji *slab relativan pseudokomplement a* s obzirom na *b*

$$a \to b \coloneqq a \Rightarrow (\sim a \vee b).$$

Ovo znači da svaka Kleenejeva algebra čija je osnovna mreža Heytingova algebra, i, tačnije, bilo koja Kleenejeva algebra definisana na algebarskoj mreži, formira kvazi-Nelsonovu algebru.

Kažemo da je De Morganova algebra $\boldsymbol{A}$ *kompletno distributivna* ako je mreža *A* kompletno distributivna. U tom sličaju, za sve $\vee$-nesvodljive $j \in \mathcal{J}$ definišemo element

$$g(j) = \bigwedge\{a \in A \mid a \nleq \sim j\}. \tag{1}$$

Navedimo neke osobine $g(j)$ kad je $\boldsymbol{A}$ kompletno distributivna De Morganova algebra. Prva osobina je

$$(\forall j \in \mathcal{J}) g(j) \nleq \sim j.$$

Dokažimo tu osobinu. Pretpostavimo suprotno da je $g(j) \leq \sim j$, tada dobijamo

$$\sim j = \sim j \vee \bigwedge\{a \in A \mid a \nleq \sim j\} = \bigwedge\{a \vee \sim j \mid a \in A \text{ i } a \nleq \sim j\}.$$

Znamo da je $j \in \mathcal{J}$, pa je onda $\sim j$ $\wedge$-nesvodljiv. To znači da imamo da je $\sim j = a \vee \sim j$, odnosno $a \leq \sim j$ za neko $a \in A$ takvo da je $a \nleq \sim j$, što je kontradikcija.

Sledeća osobina je da za $a \in A$ i $j \in \mathcal{J}$ važi

$$j \nleq \sim a \Leftrightarrow g(j) \leq a. \tag{2}$$

Da bismo potvrdili da osobina važi pretpostavimo $j \nleq \sim a$. Znamo da je to ekvivalentno sa $a \nleq \sim j$, pa na osnovu definicije $g(j)$ direktno dobijamo da je $g(j) \leq a$. Za drugu implikaciju, pretpostavimo da je $g(j) \leq a$ i $j \leq \sim a$, tada dobijamo

$$j \leq \sim a \leq \sim g(j) \text{ odnosno } g(j) \leq \sim j,$$

što je u kontradikciji sa (1). Dakle, mora da važi $j \nleq\sim a$.

Bitno je napomenuti da je, prema definiciji, $g(j)$ najmanji element $\boldsymbol{A}$ koji nije ispod $\sim j$. Pomoću ove činjenice možemo da dokažemo sledeću osobinu $g(j)$ koja kaže da je $g(j)$ $\vee$-nesvodljiv, odnosno $g(j) \in \mathcal{J}$.

Dokažimo tu osobinu. Pretpostavimo suprotno da je $g(j) = \bigvee S$ za neke $S \subseteq A$, tada je $b \leq g(j)$ za sve $b \in S$. Pretpostavimo da je $b < g(j)$ za sve $b \in S$. Tada znamo $b \notin \{a \in A | a \nleq\sim j\}$ i $b \leq\sim j$ za sve $b \in S$, jer je $g(j)$ najmanji element za koji važi suprotno. Dakle, dobili smo da je $g(j) = \bigvee S \leq\sim j$, što je u kontradikciji sa (1). Znači da ne važi $b < g(j)$ za sve $b \in S$. Odnosno mora da važi da je $b = g(j)$ za neko $b \in S$, pa je i $g(j) \in S$. Time smo dobili da je $g(j) \in \mathcal{J}$.

Sa ovim rezultatom vidimo da je g preslikavanje $\mathcal{J} \to \mathcal{J}$, pa za svako $j \in \mathcal{J}$ možemo da napišemo

$$\begin{aligned} g([j)) &= \{a \in A \mid \sim a \in [j)\}^c = \{a \mid j \leq\sim a\}^c = \{\sim a \mid j \leq a\}^c \\ &= \{a \mid a \leq\sim j\}^c = \{a \mid a \nleq\sim j\} = [g(j)) \end{aligned}$$

Na osnovu definicija se lako vidi da je u svakoj distributivnoj mreži $[j)$ prost filter za svako $j \in \mathcal{J}$.

Sledeća osobina je

$$(\forall j \in \mathcal{J}) g\big(g(j)\big) = j. \tag{3}$$

Pomoću definicije imamo da je $g\big(g(j)\big) = \bigwedge\{a \in A | a \nleq\sim g(j)\}$ i znamo da važi $g(j) \nleq\sim j$, odnosno $j \nleq\sim g(j)$ što implicira $g(g(j)) \leq j$. Za drugu nejednakost, pretpostavimo suprotno da $j \nleq g(g(j))$ tada je, na osnovu (2), to ekvivalentno sa $g(j) \leq\sim g(g(j))$, odnosno $g\big(g(j)\big) \leq\sim g(j)$. Kako je $g(j) \in \mathcal{J}$ tada za $g(j)$ važi (1), to jest $g\big(g(j)\big) \nleq\sim g(j)$. Time smo dobili kontradikciju, pa je $j \leq g(g(j))$. Dakle, $j = g(g(j))$.

Neka je sada $j \leq k$ za neke $j, k \in \mathcal{J}$, tada $\sim k \leq\sim j$. Zbog toga znamo da za bilo koje $a \in A$

$$a \leq\sim k \text{ implicira } a \leq\sim j,$$

ili ekvivalentno

$$a \nleq\sim j \text{ implicira } a \nleq\sim k.$$

Odatle vidimo da važi

$$\{a \in A | a \nleq\sim j\} \subseteq \{a \in A | a \nleq\sim k\}$$

i

$$g(j) = \bigwedge\{a \in A | a \nleq\sim j\} \geq \bigwedge\{a \in A | a \nleq\sim k\} = g(k).$$

Dakle, važi sledeća osobina

$$(\forall j, k \in \mathcal{J}) j \leq k \Rightarrow g(j) \geq g(k). \tag{4}$$

Sada, na osnovu (3) i (4) vidimo da je $\mathcal{J}$ samodualan, odnosno da je $(\mathcal{J}, \leq) \cong (\mathcal{J}, \geq)$.

Posmatrajmo sada kompletno distributivnu Kleenejevu algebru $\boldsymbol{A}$. Pretpostavimo da za neko $j \in \mathcal{J}$ važi da $j \nleq g(j)$ i $g(j) \nleq j$. Tada, na osnovu (2) i (3), dobijamo da je $j \leq\sim j$ i $g(j) \leq\sim g(j)$. Kako je posmatrana algebra Kleenejeva važi

$$g(j) = g(j) \wedge\sim g(j) \leq j \vee\sim j =\sim j,$$

što je kontradikcija sa (1). Dakle, pokazali smo da važi

$$(\forall j \in \mathcal{J}) j \leq g(j) \text{ ili } g(j) \leq j.$$

Definišimo tri skupa

$$\mathcal{J}^- \coloneqq \{j \in \mathcal{J} \mid j < g(j)\},$$
$$\mathcal{J}^0 \coloneqq \{j \in \mathcal{J} \mid j = g(j)\},$$
$$\mathcal{J}^+ \coloneqq \{j \in \mathcal{J} \mid j > g(j)\}.$$

Kako smo gore pokazali da su j i $g(j)$ uvek uporedivi imamo da važi

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}^- \cup \mathcal{J}^0 \cup \mathcal{J}^+.$$

Na osnovu definicija je jasno da važi $j \in \mathcal{J}^- \Leftrightarrow g(j) \in \mathcal{J}^+$.

Kleenejeva algebra *ima osobinu interpolacije* ako za bilo koje proste filtere *P* i *Q* takve da je $P, Q \subseteq g(P), g(Q)$ postoji prost filter *F* takav da

$$P, Q \subseteq F \subseteq g(P), g(Q)$$

Teorema 3.18 ([4]): Kvazi-Nelsonova algebra je Nelsonova algebra ako i samo ako ima osobinu interpolacije.

Dokaz: Dokazaćemo samo jedan smer, kako je i prikazano u [4], dok je drugi smer posledica teoreme u [4]. Pretpostavimo da je **A** kvazi-Nelsonova algebra koja ne zadovoljava osobinu interpolacije. Dakle postoje prosti filteri P, Q i elementi a, b iz A sa osobinima

(1) $a \in P \subseteq g(P)$,

(2)$b \in Q \subseteq g(Q)$,

(3) $P \subseteq g(Q)$ i

(4) $a \wedge b \leq \sim a \vee \sim b$.

Iz (4) imamo da

$$(a \wedge b) \to 0 = (a \wedge b) \Rightarrow (\sim a \vee \sim b) = 1$$

pa da bi videli da **A** ne zadovoljava Nelsonov identitet dovoljno je pokazati da

$$a \to (b \to 0) = 1 \in P$$

onda bi uslovi (3) i (4) implicirali $b \to 0 \in g(Q)$. Opet, pošto je $b \wedge (b \to 0) \leq \sim b$, iz (2) i (3) dobijamo $\sim b \in g(Q)$, što je u kontradikciji sa uslovom (2). □

Neka je **A** kompletno distributivna Kleenejeva algebra. Kažemo da $\mathcal{J}$ zadovoljava *osobinu interpolacije* ako za bilo koje $p, q \in \mathcal{J}$ takve da $g(p), g(q) \leq p, q$, postoji $f \in \mathcal{J}$ takav da

$$g(p), g(q) \leq f \leq p, q$$

Za Kleenejevu algebru **A**, definišemo dva skupa

$$A^+ = \{x \vee \sim x \mid x \in A\} \quad i \quad A^- = \{x \wedge \sim x \mid x \in A\}.$$

Znamo da važi $a \in A^-$ akko $a \leq \sim a$ i $a \in A^+$ akko $\sim a \leq a$. ([12])

Neka je $\boldsymbol{A}$ De Morganova algebra i $\mathcal{F}_p$ skup prostih filtera na $\boldsymbol{A}$. Definišemo preslikavanje $h: \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p$ na sledeću način: za $P \in \mathcal{F}_p$ je

$$h(P) = (\sim P)^c.$$

Za svako $P \in \mathcal{F}_p$ važi

$$h\big(h(P)\big) = P$$

i za sve $P, Q \in \mathcal{F}_p$ važi

$$P \subseteq Q \text{ implicira } h(Q) \subseteq h(P).$$

Neka je $\boldsymbol{A}$ Kleenejeva algebra. Za prost filter P važi $g(P) \subseteq P$ ili $P \subseteq g(P)$, pa možemo da definišemo sledeća dva skupa

$$\mathcal{F}_p^+ = \{P \in \mathcal{F}_p \mid P \subseteq g(P)\}$$

$$\mathcal{F}_p^- = \{P \in \mathcal{F}_p \mid g(P) \subseteq P\}$$

Tada, $\mathcal{F}_p = \mathcal{F}_p^+ \cup \mathcal{F}_p^-$.

Lema 3.19 ([15]): Neka je $\boldsymbol{A}$ kompletno distributivna Kleenejeva algebra, tada za sve $j \in \mathcal{J}$ važi

(a) Ako $j \notin A^-$, tada $g(j) \leq j$,
(b) $\mathcal{J}^- = \mathcal{J} \cap A^-$.

Lema 3.20 ([4]): Kleenejeva algebra **A** ima osobinu interpolacije ako i samo ako, za date $P, Q \in \mathcal{F}_p^+$ takve da $P \subseteq h(Q)$

$$a \wedge b \nleq \sim a \vee \sim b$$

za sve $a \in P$ i $b \in Q$.

Teorema 3.21: Ako je $\boldsymbol{A} = \langle A; \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ Kleenejeva algebra definisana na algebraskoj mreži, tada je $\langle A; \wedge, \vee, \sim, \to, 0, 1\rangle$ Nelsonova algebra, gde je operacija $\to$ definisana sa $a \to b \coloneqq a \Rightarrow (\sim a \vee b)$ ako i samo ako $\mathcal{J}$ zadovoljava osobinu interpolacije.

Dokaz: ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je **A** Nelsonova algebra, pa samim tim zadovoljava uslov interpolacije. Dalje neka je za neke $p, q \in \mathcal{J}$ zadovoljeno $g(p), g(q) \leq p, q$. Onda za proste filtere $P = [p)$ i $Q = [q)$ imamo $h(P) = [g(p)), h(Q) = [g(q))$ i $P, Q \subseteq h(P), h(Q)$. Jasno je da $P, Q \in \mathcal{F}_p^+$, $p \in P$ i $q \in Q$. Dakle, prema lemi 3.19 dobijamo uslov

$$p \wedge q \nleq \sim p \vee \sim q \tag{1}$$

Pošto je **A** algebarska mreža i **A** je De Morganova algebra, svaki element x iz A je supremum kompletno $\vee$-nesvodljivih elemenata ispod x. Tada (1) implicira da postoji kompletno $\vee$-nesvodljiv element $f \in \mathcal{J}$ takav da $f \leq p \wedge q$, ali $f \nleq \sim p \vee \sim q$. Sada očigledno $f \leq p$ i $f \leq q$ i $f \nleq \sim p$ i $f \nleq \sim q$, to jest $g(p), g(q) \leq f$ pa osobina interpolacije za $\mathcal{J}$ važi.
($\Leftarrow$) Pretpostavimo da osobina interpolacije za $\mathcal{J}$ važi, ali da **A** ne zadovoljava uslov interpolacije. Onda,

po lemi 3.20, postoje dva prosta filtera P i Q koji zadovoljavaju $P \subseteq h(P), Q \subseteq h(Q)$ i $P \subseteq h(Q)$, kao i elementi $a \in P$ i $b \in Q$ takvi da

$$a \wedge b \leq\sim a \vee\sim b$$

Prvo pokazujemo da za bilo koje $F \in \mathcal{F}_p^+$ i $x \in F$, element

$$x^u = \bigvee\{j \mid j \in J(x) \setminus \mathcal{J}^-\}$$

pripada F. Takođe definišemo element

$$x^d = \bigvee\{j \mid j \in J(x) \cap \mathcal{J}^-\}$$

gde je $J(x) = \{j \in \mathcal{J} | j \leq x\}$.

Jasno je $x = x^u \vee x^d$. Pošto je $x \in F$ i F je prost fiter, imamo da je $x^u \in F$ ili $x^d \in F$.
Sada $x^d \in A^-$, jer je $\mathcal{J}^- \subseteq A^-$. Dakle, $x^d \leq\sim x^d$. Ako $x^d \in F$, onda $\sim x^d \in F$ što je u kontradikciji sa $\sim (x^d) \in\sim F = g(F)^c \subseteq F^c$. Zbog toga, mora da važi $x^d \notin F$ i $x^u \in F$.
Drugo moramo da pokažemo da postoji $p \in J(a) \setminus \mathcal{J}^-$ i $q \in J(b) \setminus \mathcal{J}^-$ takvi da $p \nleq\sim q$. Ako pretpostavimo da za sve $p \in J(a) \setminus \mathcal{J}^-$ i $q \in J(b) \setminus \mathcal{J}^-$, $p \leq\sim q$ važi, onda

$$\begin{aligned} a^u &= \bigvee\{p \mid p \in J(a) \setminus \mathcal{J}^-\} \\ &\leq \bigwedge\{\sim q \mid q \in J(b) \setminus \mathcal{J}^-\} \\ &=\sim \left(\bigvee\{q \mid q \in J(b) \setminus \mathcal{J}^-\}\right) =\sim b^u \end{aligned}$$

Kako je P filter i $a^u \in P$, dobijamo da je $\sim b^u \in P$, što je u kontradikciji sa $\sim b^u \in\sim Q = h(Q)^c \subseteq P^c$. Dakle, $p \nleq\sim q$ za neko $p \in J(a) \setminus \mathcal{J}^-$ i $q \in J(b) \setminus \mathcal{J}^-$.
Konačno, imamo $g(p) \leq p$ i $g(q) \leq q$, i $p \nleq\sim q$ implicira $g(q) \leq p$ po definiciji $g(q)$. Odavde, na osnovu osobina g, dobijamo $g(p) \leq g\big(g(q)\big) = q$. Po našoj originalnoj pretpostavci, postoji element $f \in \mathcal{J}$ takav da

$$g(p), g(q) \leq f \leq p, q$$

Primetimo da ovo direktno implicira $g(p), g(q) \leq g(f) \leq p, q$.
Elementi $a \in P$ i $b \in Q$ zadovoljavaju $a \wedge b \leq\sim a \vee\sim b =\sim (a \wedge b)$. Pošto je $p \leq a$ i $q \leq b$

$$f, g(f) \leq p \wedge q \leq a \wedge b \leq\sim (a \wedge b) \leq\sim f, \sim g(f).$$

Dobili smo da je $f \leq\sim f$ i $g(f) \leq\sim g(f)$, na osnovu čega $f, g(f) \in A^-$ i već znamo da $f, g(f) \in \mathcal{J}$.
Sada, na osnovu leme 3.19 (b), sledi da $f, g(f) \in \mathcal{J}^-$. Ali ovo je nemoguće jer znamo $j \in \mathcal{J}^- \Leftrightarrow g(j) \in \mathcal{J}^+$. Dakle, osobina interpolacije mora da važi. □

Lema 3.22 ([12]): Neka je R kvaziuređenje na nepraznom skupu U, tada važi:

$$\mathcal{J}^- = \{(\emptyset, \{x\}^{\blacktriangle}) \mid |R(x)| \geq 2\},$$

$$\mathcal{J}^0 = \left\{(\{x\}, \{x\}^{\blacktriangle}) \,\middle|\, R(x) = \{x\}\right\},$$

$$\mathcal{J}^+ = \{(R(x), R(x)^{\blacktriangle}) \mid |R(x)| \geq 2\} \text{ i}$$

$$g\Big((\emptyset, \{x\}^{\blacktriangle})\Big) = (R(x), R(x)^{\blacktriangle}) \text{ za bilo koje } (\emptyset, \{x\}^{\blacktriangle}) \in \mathcal{J}^-.$$

Teorema 3.23 ([12])**:** Neka je $\lesssim$ kvaziuređenje na *U*. Tada je

$$\boldsymbol{RS} = \langle RS, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, (\emptyset, \emptyset), (U, U) \rangle$$

Nelsonova algebra.

Za rough skupove (*A,B*) i (*C,D*), operacija → se definiše na sledeći način:

$$\begin{aligned}(A,B) \rightarrow (C,D) &= (A,B) \Rightarrow \big(\sim (A,B) \vee (C,D)\big) \\ &= (A,B) \Rightarrow (B^c \cup C, A^c \cup D) \\ &= ((A^c \cup B^c \cup C)^{\blacktriangledown} \cap (B^c \cup A^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown}, (B^c \cup A^c \cup D)^{\triangledown}) \\ &= ((A^c \cup C)^{\blacktriangledown} \cap (A^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown}, (A^c \cup D)^{\triangledown})\end{aligned}$$

Napomenimo da A^c i *D* pripadaju $\mathcal{T}_{\lesssim}$, što znači da i $A^c \cup D$ je u $\mathcal{T}_{\lesssim}$. Dakle, $(A^c \cup D)^{\triangledown} = A^c \cup D$. Ovo takođe implicira $(A^c \cup C)^{\blacktriangledown} \cap (A^c \cup D)^{\triangledown\blacktriangledown} = (A^c \cup C)^{\blacktriangledown}$. Imamo da je

$$(A,B) \rightarrow (C,D) = ((A^c \cup C)^{\blacktriangledown}, A^c \cup D)$$

Neka je $\boldsymbol{L}$ distributivna mreža i neka je *F* filter mreže $\boldsymbol{L}$. Ekvivalencija

$$\theta_F \coloneqq \{(a,b) \in L \times L \mid (\exists c \in F) a \wedge c = b \wedge c\}$$

je kongruencija na $\boldsymbol{L}$**.**

Ako je $X \in \mathcal{T}_{\lesssim}$ gust onda $\mathcal{S} \subseteq X$. Zaista, ako $x \in \mathcal{S}$, onda $x \in X^{\blacktriangle} = U$ znači $[x) \cap X \neq \emptyset$. Pošto je *x* singlton, imamo da $x \in X$. Ovo daje da ako je $F = \uparrow \mathcal{S}$ glavni filter generisan sa $\mathcal{S}$, onda *F* sadrži filter svih gustih elemenata $\mathcal{T}_{\lesssim}$. Dakle

$$\theta_{\mathcal{S}} = \{(A,B) \in \mathcal{T}_{\lesssim} \times \mathcal{T}_{\lesssim} \mid (\exists Z \in \uparrow \mathcal{S}) A \cap Z = B \cap Z\}$$

je Boolova kongruencija na $\langle \mathcal{T}_{\lesssim}; \cup, \cap \rangle$. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned}(A \cup B)\theta_{\mathcal{S}} U &\Leftrightarrow (\exists Z \in \uparrow \mathcal{S}) Z \cap (A \cup B) = Z \cap U = Z \\ &\Leftrightarrow (\exists Z \in \uparrow \mathcal{S}) Z \subseteq (A \cup B) \Leftrightarrow \mathcal{S} \subseteq A \cup B\end{aligned}$$

Sada je

$$N_{\theta_{\mathcal{S}}} = \{(A,B) \in \mathcal{T}_{\lesssim} \times \mathcal{T}_{\lesssim} \mid A \cap B = \emptyset \ i \ (A \cup B)\theta_{\mathcal{S}} U\}$$

Nelsonova algebra. Ako zamenimo *B* sa njegovim komplementom B^c, sledi da

$$\{(A,B) \in \mathcal{T}_{\lesssim} \times \mathcal{T}_{\gtrsim} \mid A \subseteq B \ i \ \mathcal{S} \subseteq A \cup B^c\}$$

formira Nelsonovu algebru. Inkluzija $\mathcal{S} \subseteq A \cup B^c$ je očigledno ekvivalentna sa $A \cap \mathcal{S} = B \cap \mathcal{S}$ za sve $(A,B) \in \mathcal{T}_{\lesssim} \times \mathcal{T}_{\gtrsim}$ takve da $A \subseteq B$.

Teorema 3.24 ([12]): Neka je $\boldsymbol{A} = \langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 0, 1 \rangle$ Nelsonova algebra definisana na algebarskoj mreži. Tada postoji skup *U* i kvaziuređenje $\lesssim$ na *U* takav da $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{RS}$.

Ideja dokaza: Ako su $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \sim, 0, 1 \rangle$ i $\boldsymbol{K} = \langle K, \wedge, \vee, \sim, 0, 1 \rangle$ De Morganove algebre definisane na algebarskim mrežama i $\varphi: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K}$ je izomorfizam koji čuva uređenje takav da

$$\varphi\big(g(j)\big) = g\big(\varphi(j)\big)$$

za sve $j \in \mathcal{J}$, onda $\boldsymbol{L} \cong \boldsymbol{K}$. Ovo znači da dokaz da je $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{RS}$ može biti sproveden tako što se dokaže da su uređeni skupovi kompletno nesvodljivih elemenata **A** i **RS** izomorfni i φ je kompatibilno sa *g*. □

Prema prethodnoj teoremi svaka Nelsonova algebra je izomorfna nekoj strukturi rough skupova definisanih preko kvaziuređenja.

Propozicija 3.25 ([12]): Ako je $\lesssim$ kvaziuređenje, onda je mreža rough skupova *RS* 3-vrednosna Lukasiewiczeva algebra ako i samo ako je $\lesssim$ ekvivalencija.

Propozicija 3.26 ([14]): Neka je **L** regularna dupla Stoneova algebra. Sledeće je ekvivalentno:

(a) **L** je direktan proizvod lanaca **2** i **3,**
(b) **L** je algebarska,
(c) **L** je kompletna i prostorna,
(d) **L** je kompletna i atomarna.

Bitno je napomenuti da ekvivalentni uslovi prethodne propozicije ne važe ako je **L** atomarno generisana, pošto su atomarno generisane pseudokomplementarne mreže Boolove algebre.

U pogledu diskriminatorskih varijeteta (poddirektno nesvodljive) algebre rough skupova definisane kvaziuređenjem dozvoljavaju diskriminatorski term ako i samo ako je kvaziuređenje ekvivalencija. Ovo je zato što Nelson algebre dopuštaju diskriminatorski term ako i samo ako oni formiraju semiproste varijetete, ovo važi ako i samo ako je relacija ekvivalencija.

Neka je $(X, \leq, g)$ struktura takva da je $(X, \leq)$ uređen skup i *g* preslikavanje na *X* koja zadovoljava sledeće uslove za sve $x, y \in X$:

(J1) ako $x \leq y$ onda $g(y) \leq g(x)$,
(J2) $g\big(g(x)\big) = g(x)$,
(J3) $x \leq g(x)$ ili $g(x) \leq x$,
(J4) ako je $x, y \leq g(x), g(y)$ onda postoji $z \in X$ takav da je $x, y \leq z \leq g(x), g(y)$.

Takve sisteme zovemo *Monteiro prostori*. Pošto je $\leq$ uređenje, topologija Alexandrova $\mathcal{T}_{\leq}$ formira T_0-prostor, to jest, za bilo koje dve različite tačke *x* i *y* postoji otvoren skup u $\mathcal{T}_{\leq}$, koji sadrži jednu od ovih tačaka, ali ne i drugu. Topologiju $\mathcal{T}_{\leq}$ definisanu Monteiro prostorom $(X, \leq, g)$ obeležavamo sa *L(X)*.

Svaki Monteiro prostor $(X, \leq, g)$ definiše Nelsonovu algebru

$$\boldsymbol{L}(X) = \langle L(X), \cup, \cap, \rightarrow, \sim, \emptyset, X \rangle$$

gde su operacije $\sim$ i $\rightarrow$ definisane na sledeći način:

$$\sim A \coloneqq \{x \in X \mid g(x) \notin A\} \text{ i } A \rightarrow B \coloneqq A \Rightarrow (\sim A \cup B)$$

Operacija $\Rightarrow$ je definisana na Heytingovoj algebri $\mathcal{T}_{\leq}$ sa

$$B \Rightarrow C = \{x \in x \mid x \leq y \text{ i } y \in B \text{ implicira } y \in C\}$$

Svaka Nelsonova algebra **A** se može potopiti u Nelsonovu algebru $\boldsymbol{L}(\mathcal{F}_p)$ definisanu Monteiro prostorom $(\mathcal{F}_p, \subseteq, g)$, gde je $\mathcal{F}_p$ skup prostih filtera $\boldsymbol{A} = \langle A, \wedge, \vee \rangle$ i preslikavanje $g: \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{F}_p$ je definisano kao

$$g(P) \coloneqq \{x \in A \mid \sim x \notin P\}.$$

Preslikavanje $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{L}(\mathcal{F}_p)$ se predstavlja na sledeći način:

$$x \mapsto \big\{P \in \mathcal{F}_p \,\big|\, x \in P\big\}.$$

Pošto je indukovana Nelsonova algebra $\boldsymbol{L}(\mathcal{F}_p)$ takva da joj je osnovna mreža algebarska, onda postoji izomorfna Nelsonova algebra rough skupova **RS**.

Teorema 3.27 ([13])**:** Neka je **A** Nelsonova algebra. Postoji skup *U* i kvaziuređenje $\lesssim$ na *U* takavo da je **A** izomorfno podalgebri **RS**.

Teorema 3.28 ([11]): Neka je α formula Nelsonove logike. Sledeće je ekvivalentno:

(a) α je teorema,
(b) α važi u svakoj konačnoj Nelsonovoj algebri zasnovanoj na rough skupovima koja je određena kvaziuređenjem.

4. Još neke strukture povezane sa Nelsonovim algebrama

4.1 N3-mreže kao twist strukture

Twist strukture se koriste za algebraizaciju Nelsonovih logika preko Heytingovih algebri. Takvu vrstu predstavljanja su prvi uveli nezavisno Vakarelov [31] i Fidel u [9], ali se tada još nisu tako nazivale. Iako su oni prvi uveli predstavljanje Nelsonovih logika pomoću twist struktura, pravi dokaz ekvivalencije tih struktura je predstavio Sendlewski tek 1990. u radu [27]. Poslednjih godina su se pojavile twist strukture i drugih srodnih algebri, ali ćemo u ovom radu predstaviti samo twist strukturu za N3-mreže.

Kako smo rekli da je Vakarelov [31] prvi predstavio twist strukturu za N3-mreže, prvo ćemo prikazati njegovu konstrukciju twist strukture preko definicije Nelsonove algebre koju je uvela Rasiowa, a posle toga ćemo prikazati moderniju konstrukciju twist struktura.

Definicija 4.1: Algebra $\boldsymbol{A} = \langle A, 1, \cup, \cap, \rightarrow, \sim, \neg \rangle$ je Nelsonova algebra, gde je $A \neq \emptyset$; $1 \in A$; $\cup, \cap, \rightarrow$ su binarne operacije, i $\sim, \neg$ unarne operacije, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

R1: Neka $a \precsim b \coloneqq a \rightarrow b = 1$. Tada je relacija $\precsim$ refleksivna i tranzitivna.
R2: $\langle A, 1, \cup, \cap, \sim \rangle$ je *kvazi-Boolova algebra*, tj.
  a) $\langle A, 1, \cup, \cap \rangle$ je distributivna mreža sa jedinicom 1,
  b) $\sim(a \cup b) = \sim a \cap \sim b$ i $\sim(a \cap b) = \sim a \cup \sim b$,
  c) $\sim\sim a = a$.
R3: Neka $a \leq b \coloneqq a \cap b = a$. Tada $a \leq b$ ako i samo ako $a \precsim b$ i $\sim b \precsim \sim a$.
R4: Ako $a \precsim c, b \precsim c$ tada $a \cup b \precsim c$.
R5: Ako $c \precsim a, c \precsim b$ tada $c \precsim a \cap b$.
R6: $\sim(a \rightarrow b) \precsim a \cap \sim b$.
R7: $\sim b \cap a \precsim \sim(a \rightarrow b)$.
R8: $a \precsim \sim\neg a$.
R9: $\sim\neg a \precsim a$.
R10: $a \cap \sim a \precsim b$.
R11: $a \cap b \precsim a$ ako i samo ako $a \precsim b \rightarrow c$.
R12: $\neg a = a \rightarrow \sim 1$.

Može se dokazati da je ova struktura ekvivalentna sa N3-mrežama.

Definicija 4.2: Neka je $\boldsymbol{B} = \langle B, 0, 1, \cap, \cup, \Rightarrow, - \rangle$ Heytingova algebra i neka je

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B}) = \{\langle a_1, a_2 \rangle \mid a_1, a_2 \in B \ i \ a_1 \cap a_2 = 0\}.$$

Tada na $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{B})$ definišemo:

(1) $\mathbf{1} = \langle 1, 0 \rangle \ i \ \mathbf{0} = \langle 0, 1 \rangle$,
(2) $\langle a_1, a_2 \rangle \cup \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 \cup b_1, a_2 \cap b_2 \rangle$,
(3) $\langle a_1, a_2 \rangle \cap \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 \cap b_1, a_2 \cup b_2 \rangle$,
(4) $\langle a_1, a_2 \rangle \rightarrow \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 \Rightarrow b_1, a_2 \cap b_2 \rangle$,
(5) $\sim\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_2, a_1 \rangle$,
(6) $\neg\langle a_1, a_2 \rangle = \langle -a_1, a_1 \rangle$,
(7) $\langle a_1, a_2 \rangle \leq \langle b_1, b_2 \rangle$ ako i samo ako $a_1 \leq b_1$ i $b_2 \leq a_2$,

(8) $\langle a_1, a_2\rangle < \langle b_1, b_2\rangle$ ako i samo ako $a_1 \leq b_1$.

Teorema 4.1 [27]: Za svaku Heytingovu algebru $\boldsymbol{B}$ sistem $\langle \boldsymbol{N}(\boldsymbol{B}), \mathbf{1}, \cup, \cap, \rightarrow, \sim, \neg\rangle$ je Nelsonova algebra.

Ovom teoremom završavamo Vakarelovo uvođenje twist struktura, koje još nisu imale taj naziv, i prelazimo na moderniju definiciju datu u [14].

Definicija 4.3: Na svakoj Brouwerovoj mreži $\boldsymbol{B} = \langle B, \wedge, \vee, \rightarrow\rangle$ definišemo skup gustih elemenata $D(\boldsymbol{B}) \coloneqq \{a \vee (a \rightarrow b) : a, b \in B\}$.

Definicija 4.4: Neka je $\boldsymbol{B} = \langle B, \wedge, \vee, \rightarrow\rangle$ Brouwerova mreža, $F \subseteq B$ neki gust filter. *N3 twist struktura* je

$$Tw(\boldsymbol{B}, F) = \langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim\rangle$$

gde je nosač

$$A \coloneqq \{\langle a, b\rangle \in B \times B : a \vee b \in F, a \wedge b = 0\}$$

i operacije su definisane za sve $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle \in B \times B$ na sledeći način

$$\sim \langle a, b\rangle \coloneqq \langle b, a\rangle$$

$$\langle a, b\rangle \wedge \langle c, d\rangle \coloneqq \langle a \wedge c. b \vee d\rangle$$

$$\langle a, b\rangle \vee \langle c, d\rangle \coloneqq \langle a \vee c, b \wedge d\rangle$$

$$\langle a, b\rangle \rightarrow \langle c, d\rangle \coloneqq \langle a \rightarrow c, a \wedge d\rangle$$

Sada kada smo videli i Vakarelovu definiciju i ovu moderniju, lako se može primetiti da postoje neke sintaktičke razlike, ali da je twist struktura u osnovi ista.

Teorema 4.2 [27]: Za svaku Brouwerovu mrežu $\boldsymbol{B}$ struktura $Tw(\boldsymbol{B}, F)$, sa gore definisanim operacijama je N3-mreža.

4.2 Veza sa drugim algebrama neklasičnih logika

U ovom delu ćemo prikazati neke algebre neklasičnih logika koje su term-ekvivalentne. Odnosno one mogu da se definišu preko operacija druge algebre. Nećemo dokazivati ekvivalenciju, nego ćemo samo prikazati ideje dokaza tih ekvivalencija.

Definicija 4.5: Definišemo *3-vrednosnu Lukasiewiczevu algebru* kao algebru $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \sim, \triangledown, 0, 1\rangle$ takva da je $\langle L, \wedge, \vee, \sim, 0, 1\rangle$ De Morganova algebra i $\triangledown$ je unarna operacija, koja se zove operator mogućnosti, koja zadovoljava:

(i) $\sim x \vee \triangledown x \approx 1$,
(ii) $\sim x \wedge x \approx \sim x \wedge \triangledown x$,
(iii) $\triangledown (x \wedge y) \approx \triangledown x \wedge \triangledown y$.

Preslikavanje $x \longmapsto \triangledown x$ je operator zatvorenja ([20]). Dodatno:

$$\triangledown 0 \approx 0 \text{ i } \triangledown (x \vee y) \approx \triangledown x \vee \triangledown y$$

Operator nužnosti je definisan na sledeći način: $\triangle x \coloneqq \sim \triangledown \sim x$. Operacija $\triangle$ je dualna operacija operaciji $\triangledown$. Takođe $\triangle$ i $\triangledown$ su povezani, na primer:

$$\triangle\nabla x \approx \nabla x \text{ i } \nabla\triangle x \approx \triangle x$$

3-vrednosna Lukasiewiczeva algebra zadovoljava princip određivanja (determination principle):

$$\triangle x \approx \triangle y \text{ i } \nabla x \approx \nabla y \text{ implicira } x \approx y.$$

Bilo koja dupla Stoneova algebra $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, {}^*, {}^+, 0, 1\rangle$ definiše 3-vrednosnu Lukasiewiczevu algebru $\langle L; \wedge, \vee, \sim, \nabla, 0, 1\rangle$ tako što definišemo, videti [17]:

$$\nabla x \coloneqq x^{**} \text{ i } \sim x \coloneqq x^* \vee (x \wedge x^+)$$

Slično, svaka 3-vrednosna Lukasiewiczeva algebra $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \sim, \nabla, 0, 1\rangle$ definiše duplu Stoneovu algebru $\langle L, \wedge, \vee, {}^*, {}^+, 0, 1\rangle$ tako što je, videti [17]:

$$x^* \coloneqq \sim\nabla x \text{ i } x^+ \coloneqq \nabla\sim x$$

Ova dupla Stoneova algebra je regularna, tačnije, * i ${}^+$ zadovoljavaju uslov regularnosti. Dodatno, ovi pseudokomplementi određuju jedni druge na sledeći način:

$$\sim x^* \approx (\sim x)^+ \text{ i } \sim x^+ \approx (\sim x)^*$$

Ovo preslikavanje između regularnih duplih Stoneovih algebri i 3-vrednosnih Lukasiewiczevih algebri je injektivno.

U univerzalnoj algebri, algebra ***A*** je prosta ako ima samo identičku i punu relaciju kao svoje kongruencije. ***A*** je semiprosta kad je ***A*** izomorfna poddirektnom proizvodu prostih algebri. Nelsonova algebra $\boldsymbol{A} = \langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 0, 1\rangle$ je semiprosta ako i samo ako $x \vee (x \rightarrow 0) \approx 1$.

Svaka 3-vrednosna Lukasiewiczeva algebra određuje semiprostu Nelsonovu algebru tako što je $x \rightarrow y \coloneqq \nabla\sim x \vee y$, što je pokazano u [5]. Slično, svaka semiprosta Nelsonova algebra indukuje 3-vrednosnu Lukasiewiczevu algebru tako što je $\nabla x \coloneqq \sim x \rightarrow 0$, videti [5].

Lukasiewiczeva 3-vrednosna logika L_3 dozvoljava da propozicije imaju vrednosti 0, $\frac{1}{2}$ i 1 gde se treća logička vrednost $\frac{1}{2}$ može interpretirati kao „mogućnost“. Lukasiewicz je definisao operacije $\sim$ i $\rightarrow$ na sledeći način:

$$\sim a \coloneqq 1 - a \text{ i } a \rightarrow b \coloneqq min\{1, 1 - a + b\}$$

Wajsberg je prezentovao aksiomatizaciju za L_3. Algebarska verzija ove aksiomatizacije se zove Wajsbergova algebra $\boldsymbol{L} = \langle L; \rightarrow, \sim, 1\rangle$ definisana sledećim identitetima:

(W1) $1 \rightarrow x \approx x$,

(W2) $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y)) \approx 1$,

(W3) $((x \rightarrow y) \rightarrow z) \approx ((y \rightarrow x) \rightarrow x)$,

(W4) $(\sim x \rightarrow \sim y) \rightarrow (y \rightarrow x) \approx 1$.

3-vrednosna Lukasiewiczeva algebra $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, \sim, \nabla, 0, 1\rangle$ definiše Wajsbergovu algebru tako što definiše:

$$x \rightarrow y \coloneqq (\nabla\sim x \vee y) \wedge (\nabla y \vee \sim x).$$

Slično Wajsbergova algebra $\boldsymbol{L} = \langle L, \rightarrow, \sim, 1\rangle$ definiše 3-vrednosnu Lukasiewiczevu algebru u kojoj je:

$$x \vee y \coloneqq (x \rightarrow y) \rightarrow y, \quad x \wedge y \coloneqq \sim(\sim x \vee \sim y), \quad \nabla x \coloneqq \sim x \rightarrow x, \quad 0 \coloneqq \sim 1.$$

Definicija 4.6 ([3])**:** MV-algebra je sistem $\langle A, +, *, \neg, 0, 1\rangle$ gde je A neprazan skup elemenata, 0 i 1 različiti konstantni elementi A, + i $*$ binarne operacije i $\neg$ unarna operacija na A koji zadovoljava sledeće aksiome:

(Ax1) $x + y = y + x$,
(Ax2) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
(Ax3) $x + \neg x = 1$,
(Ax4) $x + 1 = 1$,
(Ax5) $x + 0 = x$,
(Ax6) $\neg(x + y) = \neg x * \neg y$,
(Ax7) $x = \neg\neg x$,
(Ax8) $0 = 1$,
(Ax9) $x * y = y * x$,
(Ax10) $x * (y * z) = (x * y) * z$,
(Ax11) $x * \neg x = 0$,
(Ax12) $x * 0 = 0$,
(Ax13) $x * 1 = x$,
(Ax14) $\neg(x * y) = \neg x * \neg y$.

Da bi definisali dodatne aksiome uvodimo narednu definiciju:

Definicija 4.7: $x \vee y = (x * \neg y) + y$ i $x \wedge y = (x + \neg y) * y$.

(Ax15) $x \vee y = y \vee x$,
(Ax16) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,
(Ax17) $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$,
(Ax18) $x \wedge y = y \wedge x$,
(Ax19) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,
(Ax20) $x * (y \vee z) = (x * y) \vee (x * z)$.

MV-algebra definiše Wajsbergovu algebru ([10]) ako $\neg$ i $\sim$ tumačimo kao iste operacije i definišemo

$$x \to y \coloneqq \neg x + y$$

Wajsbergova algebra definiše MV-algebru ([10]) ako $\neg$ i $\sim$ tumačimo kao iste operacije i definišemo

$$x + y \coloneqq \sim x \to y$$

$$x * y \coloneqq \sim(x \to \sim y).$$

Sa ovim završavamo prikazivanje algebri, i predstavili smo ideje dokaza sledeće teoreme.

Teorema 4.3 ([5],[10],[17],[25])**:** Sledeće algebre su term-ekvivalentne

(1) 3-vrednosna Lukasiewiczeva algebra,
(2) regularna dupla Stoneova algebra,
(3) semiprosta Nelsonova algebra,
(4) Wajsbergova algebra,
(5) MV-algebra.

Literatura

[1] Brignole D., Equational characterization of Nelson algebras, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 10, no. 3, 1969.

[2] Burris S. N., Sankappanavar H. P., A Course in Universal Algebra, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 78, Springer-Verlag, 1981.

[3] Chang C. C., Algebraic Analysis of Many Valued Logics, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 88, no. 2, pp. 467–490, 1958.

[4] Cignoli R., The Class of Kleene Algebras Satisfying an Interpolation Property and Nelson Algebras, *Algebra Universalis*, vol. 23, pp. 262–292, 1986.

[5] Cignoli, R.: The algebras of Lukasiewicz many-valued logic: A historical overview. In: Algebraic and Proof-theoretic Aspects of Non-classical Logics. Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 4460, pp. 69–83. Springer, Berlin, 2007.

[6] Comer S.D., Perfect Extensions of Regular Double Stone Algebras, *Algebra Universalis*, vol. 34, pp. 96–109, 1995.

[7] Cornejo J.M., Gallardo A., Monteiro L.F., Viglizzo I., Free five-valued Nelson algebras, aeXiv:2505.15990v1 [math.LO], 2025.

[8] Davey B., Priestly H., *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 2nd ed., 2002.

[9] Fidel M.M., An algebraic study of a propositional system of Nelson. In *Mathematical Logic. Proceedings of the First Brazilian Conference, Campinas 1977* (pp. 99-117), vol. 39 of *Lecture notes in pure and applied mathematics*, Marcel Dekker, 1978.

[10] Font J. M., Rodriguez A. J., Torrens A., Wajsberg Algebras, *Stochastica*, vol. VIII, no. 1, pp. 5–31, 1984.

[11] Järvinen J., Pagliani P., Radeleczki S., Information Completeness in Nelson Algebras of Rough Sets Induced by Quasiorders, *Stadia Logica*, vol. 101, pp. 1073–1092, 2013.

[12] Järvinen J., Radeleczki S., Representation of Nelson Algebras by Rough Sets Determined by Quasiorders, *Algebra Universalis*, vol. 66, art. 163, 2011.

[13] Järvinen J., Radeleczki S**.**, Monteiro Spaces and Rough Sets Determined by Quasiorder Relations: Models for Nelson Algebras, *Fundamenta Informaticae*, vol. 131, pp. 205–215, 2014.

[14] Järvinen J., Radeleczki S., Rivieccio U., Nelson Algebras, Residuated Lattices and Rough Sets: A Survey, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, vol. 34, no. 2–3, pp. 368–428, 2024.

[15] Järvinen J., Radeleczki S., Veres L., Rough Sets Determined by Quasiorders, *Order*, vol. 26, pp. 337–355, 2009.

[16] Jovičić J., Kleenejeve trovalentne logike, master rad, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, 2023.

[17] Katriňák T., Construction of regular double p-algebras, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège,*43, 238-246, 1974.

[18] Kortelainen J., A Topological Approach to Fuzzy Sets, doktorska disertacija, Lappeenranta University of Technology, Lappeenranta, 1999.

[19] Madarász R. Sz., *Od skupova do univerzalnih algebri*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku u Novom Sadu, 2006.

[20] Monteiro A., Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes, *Bulletin Mathématique de la Société Scientifique Mathématique Physique R. P. Roumanie*, 7:3–12, 1963.

[21] Nascimento T., Rivieccio U., Spinks M., Compatibly Involutive Residuated Lattices and the Nelson Identity, *Soft Computing*, vol. 23, pp. 2297–2320, 2019.
[22] Nelson D., Constructible Falsity, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 14, no. 1, pp. 16–26, 1949.
[23] Nelson D., Negation and separation of concepts in constructive system. In A. Heyting (Ed.), *Constructivity in mathematics* (pp. 208-225), North-Holland Publishing Company, 1959.
[24] Pomykała J., Pomykała J. A., The Stone Algebra of Rough Sets, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics*, vol. 36, pp. 495–508, 1988.
[25] Rodriguez A. J., Torrens A., Verdú V., Lukasiewicz logic and Wajsberg algebras, vol. 19/2, pp. 51-55, 1990.
[26] Sankappanavar H. P., De Morgan Algebras: New Perspectives and Applications, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, vol. 75, pp. 21–50, 2012.
[27] Sendlewski A., Nelson Algebras Through Heyting Ones: I, *Studia Logica*, vol. 49, no. 1, pp. 105–126, 1990.
[28] Spinks M., Veroff R., Characteristations of Nelson algebras, *Revista de la Unión Matemática Argentina,* vol. 48, no. 1, 27-39, 2007.
[29] Stojilković A., Mreže, formalna analiza koncepta i primer iz elektronske muzike, master rad, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku u Novom Sadu, 2023.
[30] Šešelja B., Tepavčević A., *Bulove algebre i funkcije*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku u Novom Sadu, 2014.
[31] Vakarelov D., Notes on N-lattices and Constructive Logic with Strong Negation, *Studia Logica*, vol. 36, pp. 109–125, 1977.
[32] https://sh.wikipedia.org/wiki/Modalna_logika
[33] https://en.wikipedia.org/wiki/Nels_David_Nelson
[34] https://www.aslonline.org/files/newsletters/pdfs/sept2004newsletter.pdf

Biografija

Sara Nastasijević je rođena 23.07.1997. u Novom Sadu, gde i živi do 2013. godine kada se seli u Sremske Karlovce. Osnovnu školu „Ivan Gundulić“ je završila 2012. kao odličan učenik. Zatim se upisuje u gimnaziju „Jovan Jovanović Zmaj“ na smer obdareni učenici u matematičkoj gimnaziji, i sa odličnim uspehom kroz celo školovanje maturira 2016. godine. Iste godine upisuje osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu, smer Matematika, modul Matematika finansija. Prebacuje se na integrisane studije 2020. godine, smer Master profesor matematike na istom fakultetu. Položivši poslednji ispit u oktobru 2025. godine, stekla je pravo na odbranu ovog rada.

Novi Sad, novembar 2025. Sara Nastasijević

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani tekst
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Sara Nastasijević
AU
Mentor: dr Rozália Sz. Madarász
MN
Naslov rada: O Nelsonovim algebrama
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2025.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: (4 glave/ 54 strane/ 34 reference/ 2 tabele/ 0 slika/ 0 grafika/ 0 priloga)
(broj poglavlja/stana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Algebra i matematička logika
ND
Predmetna odrednica/ ključne reči: mreža, Nelsonova logika, Nelsonova algebra, N3-mreža, rough skup
PO
UDK
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN
Izvod: Tema ovog master rada je Nelsonova algebra, koja se definiše na neklasičnoj Nelsonovoj logici. Na početku rada se upoznajemo sa istorijskim razvojem istraživanja Nelsonove logike i njenom algebraizacijom. Zatim uvodimo pojmove koje ćemo koristiti kroz dalji rad, kao što su mreža i njene osobine, Brouwerova i Heytingova mreža i topologija Alexandrova. Nakon toga, uvodimo Nelsonovu logiku preko aksioma i predstavljamo nekoliko karakterizacija Nelsonovih algebri. Posle toga prelazimo na strukturu rough skupova, koju definišemo na dva načina i prikazujemo neke osobine rough skupova. Zatim povezujemo rough skupove sa Nelsonovim algebrama. Na kraju predstavljamo neke zanimljivosti, kao što su twist strukture i još neke neklasične logike i kako su povezane sa Nelsonovim algebrama.
IZ
Datum prihvatanja teme od NN veća: 05.09.2025.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Anna Slivkova, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Samir Zahirović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član, mentor: dr Rozália Sz. Madarász, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Content code: Master thesis
CC
Author: Sara Nastasijević
AU
Mentor: Rozália Sz. Madarász, Ph.D.
MN
Title: On Nelson algebras
TI
Language of text: Serbian (latin)
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2025.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publication place: Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: (4 chapters/ 54 pages/ 34 references/ 2 tables/ 0 pictures/ 0 graphs/ 0 apendixes)
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)

PD

Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Algebra and Mathematical Logic
SD
Subject/ Key words: lattice, Nelson logic, Nelson algebra, N3-lattice, rough set
SKW
UC
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences,

University of Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: In this Master's Thesis we deal with Nelson algebra, which is defined on a non-classical Nelson logic. In the beginning we review the historical development of research of Nelson logic and its algebraisation. Then, we present terms that we are going to use later in the paper, for example lattice and its properties, Brouwer and Heyting lattices and Alexandrov topology. After that, we present the axiomatisation of Nelson logic and a few characterisations of Nelson algebras. Subsequently we move on to the structure of rough sets, which we define with two different methods and show some of its properties. Then, we connect rough sets with Nelson algebras. In the end, we show some interesting results, like twist structures and some other non-classical logics and how are they connected with Nelson algebras.
AB
Accepted by the Scientific Board: September 5th, 2025.
ASB
Defended on:
DE
Thesis defend board:
DB
President: Anna Slivkova, Ph.D., Associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Samir Zahirović, Ph.D., Assistant profesor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member, mentor: Rozália Sz. Madarász, Ph.D., Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad