



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА
МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ



Оливера Делибашић

Декомпозиција матрица са применама у механици

- Мастер рад-

Нови Сад, 2025.

Предговор

Декомпозиција матрица има изузетно широку примену у различитим наукама. У овом раду ћемо се бавити неким од њених примена у механици. Рад се састоји из три дела.

У првом делу ће првобитно бити изложене неке од основних дефиниција везаних за матрице које су неопходне ради разумевања даљег текста. Овај део се потом бави дијагонализацијом матрица и Жордановом декомпозицијом као њеним уопштењем на све квадратне матрице. На послетку, обрађена је и спектрална декомпозиција, као специјални случај дијагонализације матрица.

Други део се односи на примену дијагонализације код малих осцилација механичких система, стога су прво наведени сви појмови потребни за извођење диференцијалних једначина кретања механичких система, као и диференцијалних једначина малих осцилација. Диференцијалне једначине малих осцилација су представљене у матричном облику, где је објашњено какву улогу игра дијагонализација матрица у одређивању њихових решења. У овом делу су обрађена и два примера примене дијагонализације матрица у одређивању диференцијалних једначина малих осцилација механичких система.

У трећем делу је посебно обрађена поларна декомпозиција матрица са применама у механици непрекидних средина. Прво су изложени основни појмови механике непрекидних средина, а потом је доказана теорема о поларној декомпозицији. На послетку су приказана два примера примене ове теореме који се односе на издужење и чисто смицање непрекидне средине.

Садржај

Предговор	3
1 Декомпозиција матрица	7
1.1 Матрице	7
1.2 Дијагонализација и Жорданова декомпозиција	10
1.2.1 Дијагонализација реалних матрица	10
1.2.2 Жорданова декомпозиција	11
1.3 Спектрална декомпозиција	13
2 Мале осцилације механичких система	19
2.1 ДЈ кретања механичких система	19
2.1.1 Кинетичка енергија	19
2.1.2 Генералисане координате	20
2.1.3 Лагранжове једначине друге врсте	22
2.2 Диференцијалне једначине малих осцилација	23
2.2.1 Потенцијална енергија	24
2.2.2 Линеаризација једначина кретања	25
2.2.3 Матрични облик једначина малих осцилација	27
2.2.4 Решење једначина малих осцилација	28
2.2.5 Пример: Удвојено математичко клатно	30
2.3 Нормалне координате	33
2.3.1 Пример	35
3 Поларна декомпозиција матрица	39
3.1 Конфигурација и кретање непрекидне средине	39
3.2 Деформациони градијент	40
3.3 Теорема о поларној декомпозицији	41
3.4 Примери	45
3.4.1 Издужење	45
3.4.2 Чисто смицање	46
Закључак	49

Глава 1

Декомпозиција матрица

У овој глави ће најпре бити изложене дефиниције појмова везаних за матрице које ће нам бити потребне у даљем раду. Затим ће бити анализирана Жорданова декомпозиција реалних матрица. Посебно ће бити анализирана спектрална декомпозиција реалних симетричних матрица, зато што ће нам она бити најинтересантнија у применама. У излагању ћемо се највише ослонити на материјал садржан у књигама [1, 2, 3, 4].

1.1 Матрице

На самом почетку ће бити наведене неке дефиниције које ће нам бити од значаја у даљем тексту. Поћи ћемо од дефиниције *векторског простора*. Са $(V, +)$ ћемо означити комутативну групу. Њене елементе ћемо називати *векторима*. Са $(F, +, \cdot)$ ћемо означити поље. Елементе поља ћемо називати *скаларима*.

Дефиниција 1.1 ([1]). Нека су нам дати комутативна група $(V, +)$ и поље $(F, +, \cdot)$. V је векторски (или линеарни) простор над пољем F , ако је дефинисано пресликавање $F \times V \rightarrow V$, при чему се слика пара (α, a) означава са αa , тако да за свако $\alpha, \beta \in F$ и $a, b \in V$ важи:

$$(i) \quad \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b;$$

$$(ii) \quad (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a;$$

$$(iii) \quad (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a);$$

$$(iv) \quad 1a = a,$$

где је са 1 означен неутрални елемент за множење поља F . Векторски простор V над пољем F ћемо означавати са $V(F)$.

У даљем раду ће нам бити потребне *линеарне трансформације* векторских простора и њихове матрице. Дефиниције ових појмова су дате у наставку текста.

Дефиниција 1.2. Нека су $V_1(F)$ и $V_2(F)$ векторски простори над истим пољем F . Пресликавање $A : V_1 \rightarrow V_2$ такво да важи:

- (i) $(\forall a, b \in V_1) A(a + b) = A(a) + A(b);$
- (ii) $(\forall \alpha \in F)(\forall a \in V_1) A(\alpha a) = \alpha A(a),$

назива се линеарна трансформација векторског простора V_1 у V_2 .

За нас ће бити од значаја линеарне трансформације у којима је $V_1 = V_2$. Такође, у наставку ћемо користити појам *базе векторског простора* као низа вектора који је линеарно независан и који генерише векторски простор. Детаљније се о томе може видети у Глави 1 уџбеника [1].

Дефиниција 1.3. Нека је $V(F)$ векторски простор са базом $\mathcal{B} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Ако је $x \in V$ и

$$x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n,$$

онда се матрица формата $n \times 1$

$$[x] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

назива координатна колона (вектор-колона) вектора x у односу на базу $\mathcal{B}$.

Када нам је дата база векторског простора, свака линеарна трансформација се може приказати помоћу матрице. Дефинисаћемо стога *матрицу линеарне трансформације*.

Дефиниција 1.4. Нека је $V(F)$ векторски простор са базом $\mathcal{B} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и A линеарна трансформација тог векторског простора. Ако је:

$$\begin{aligned} A(a_1) &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \dots + \alpha_{n1}a_n, \\ A(a_2) &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \dots + \alpha_{n2}a_n, \\ &\vdots \\ A(a_n) &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \dots + \alpha_{nn}a_n, \end{aligned}$$

онда се матрица

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

назива матрица линеарне трансформације A у односу на базу $\mathcal{B}$.

Теорема 1.1. Ако је $V(F)$ векторски простор са базом $\mathcal{B} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и A његова линеарна трансформација, онда за свако $x \in V$ важи:

$$[A(x)] = [A][x].$$

Ова Теорема, којом се линеарна трансформација векторског простора приказује помоћу множења матрице линеарне трансформације и вектора-колоне, игра централну улогу у нашој даљој анализи. Доказ Теореме се може видети у Глави 4 уџбеника [1]. У даљем тексту ћемо, ради једноставнијег записа, изостављати угласте заграде у означавању матрица и вектора.

У декомпозицији матрица ослањаћемо се у великој мери на њихове *сопствене вредности* и *сопствене векторе*. Стога ће у наставку бити дефинисани ови појмови.

Дефиниција 1.5. Нека је A линеарна трансформација векторског простора $V(F)$. Ако су $x \in V$, $x \neq 0$ и $\lambda \in F$ такви да је $Ax = \lambda x$, онда се x назива сопствени вектор, а λ сопствена вредност те трансформације (матрице).

Дефиниција 1.6. Скуп свих сопствених вредности линеарне трансформације (матрице) A назива се спектар те линеарне трансформације (матрице) и означава са $\sigma(A)$.

Дефиниција 1.7. Ако је A линеарна трансформација векторског простора $V(F)$, а λ_i једна њена сопствена вредност, онда је $S_A(\lambda_i) = \{x | Ax = \lambda_i x\}$ инваријантни потпростор линеарне трансформације A који одговара сопственој вредности λ_i .

Једнодимензиони инваријантни потпростор се назива и инваријантни правац.

У наставку ће нам бити од значаја посебна класа матрица које се називају *ортогоналним матрицама*. Матрица R је ортогонална ако је њена инверзна матрица R^{-1} једнака транспонованој матрици R^T :

$$R^{-1} = R^T \quad \Rightarrow \quad RR^T = R^T R = I,$$

где је са I означена јединична матрица.

Дефиниција 1.8. Матрице A и B су сличне ако постоји ортогонална матрица R , таква да је $A = RBR^T$.

Дефиниција 1.9. Квадратна матрица A ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

је *позитивно дефинитна* ако за сваки вектор v важи

$$Av \cdot v > 0 \quad \forall v \neq 0, \quad Av \cdot v = 0 \iff v = 0,$$

односно *негативно дефинитна* у случају

$$Av \cdot v < 0 \quad \forall v \neq 0, \quad Av \cdot v = 0 \iff v = 0.$$

Дефинитност квадратне матрице се може проверити помоћу *Силвестровог критеријума*. Он представља довољан услов дефинитности матрице. Нека су за матрицу A из Дефиниције 1.9 матрице Δ_k дефинисане са

$$\Delta_k = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Матрица A је:

- (i) позитивно дефинитна, ако је $\Delta_k > 0$ за све $k = 1, 2, \dots, n$.
- (ii) негативно дефинитна, ако је $(-1)^k \Delta_k > 0$ за све $k = 1, 2, \dots, n$.

1.2 Дијагонализација и Жорданова декомпозиција

Свака квадратна матрица A са линеарно независним сопственим векторима се може дијагонализовати, односно постоји дијагонална матрица која има исте сопствене вредности као матрица A . Да бисмо ово уопштили и на матрице чији сопствени вектори нису линеарно независни, посебно ћемо изложити теорему о Жордановој декомпозицији. У овом делу се ослањамо на резултате изложене у [2] и [3].

1.2.1 Дијагонализација реалних матрица

Теорема 1.2 (декомпозиција сопственим вредностима – дијагонализација). Свака квадратна матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ са линеарно независним сопственим векторима може бити факторисана са:

$$A = X \Lambda X^{-1}$$

где X садржи сопствене векторе матрице A као колоне, а Λ је дијагонална матрица

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где су $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ су сопствене вредности матрице A .

Доказ. Нека је $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, где су $x_1, x_2, \dots, x_n$ линеарно независни сопствени вектори матрице A . Тада је

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, \quad Ax_2 = \lambda_2 x_2, \dots, \quad Ax_n = \lambda_n x_n,$$

односно

$$AX = [Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n] = [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n] = X \Lambda. \quad (\text{a})$$

Како су сопствени вектори $x_1, x_2, \dots, x_n$ линеарно независни, X је инвертибилна матрица, следи да је

$$A = X\Lambda X^{-1}.$$

□

Лема 1.1 (различите сопствене вредности). Нека су све сопствене вредности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ међусобно различите. Тада су њима одговарајући сопствени вектори линеарно независни. Другим речима, свака квадратна матрица са међусобно различитим сопственим вредностима може бити дијагонализована.

Доказ. Нека су сопствене вредности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ све међусобно различите. Претпоставимо супротно, да су сопствени вектори $x_1, x_2, \dots, x_n$ линеарно зависни. Тада, постоји ненула вектор $c = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ такав да је $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i$. Тада имамо

$$\begin{aligned} Ax_n &= A \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i (Ax_i) \\ &= c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 + \dots + c_{n-1} \lambda_{n-1} x_{n-1} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Ax_n &= \lambda_n x_n \\ &= \lambda_n (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_{n-1} x_{n-1}), \end{aligned}$$

одакле следи да је

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i) c_i x_i = 0,$$

што је у контрадикцији са претпоставком да су сопствене вредности међусобно различите. □

Претходни резултати указују да се декомпозиција матрице сопственим вредностима може свести на један алгоритам: ако су сопствене вредности реалне матрице различите, онда су сопствени вектори независни и матрицу можемо дијагонализовати. Међутим, услов који се односи на сопствене вредности имплицира ограничену примену ове декомпозиције. То ће бити разрешено општијом – Жордановом декомпозицијом.

1.2.2 Жорданова декомпозиција

Како нас декомпозиција сопственим вредностима ограничава на матрице чији су сопствени вектори линеарно независни, уводимо Жорданову декомпозицију која је уопштава на све квадратне матрице. Прво ћемо дефинисати Жорданове блокове.

Дефиниција 1.10. Горња троугаона матрица $m \times m$, у ознаци $B(\lambda, m)$, где су свих m дијагоналних елемената иста сопствена вредност λ и сви елементи изнад главне дијагонале јединице, односно

$$B(\lambda, m) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

назива се Жорданов блок.

Дефиниција 1.11. Нека је дата $n \times n$ матрица A . Жорданова форма J за A је блок дијагонална матрица дефинисана са

$$J = \begin{bmatrix} B(\lambda_1, m_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B(\lambda_2, m_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B(\lambda_k, m_k) \end{bmatrix},$$

где су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ сопствене вредности матрице A , а $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$.

Сада коначно можемо изложити и теорему о Жордановој декомпозицији.

Теорема 1.3 (Жорданова декомпозиција). Свака квадратна матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ може бити факторисана са:

$$A = XJX^{-1},$$

где је X регуларна матрица која садржи генерализоване сопствене векторе матрице A као колоне, а J је Жорданова форма матрице $\text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_k)$, где су $B(\lambda_i, m_i) \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ квадратне матрице, m_i број понављања сопствене вредности λ_i и $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. J_i се називају *Жорданови блокови*, а регуларна матрица X се назива матрица генерализованих сопствених вектора матрице A .

Теорему о Жордановој декомпозицији нећемо доказивати, али зато ћемо погледати како можемо тумачити саму декомпозицију. Нека она, на пример, има облик:

$$J = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [\lambda_2] & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} \lambda_3 & 1 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 \\ 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Приметимо да се испод главне дијагонале могу налазити нуле, као и да прва колона сваког блока садржи само одговарајућу сопствену вредност. За пример,

погледајмо први блок $J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$. Можемо закључити да ће првих m_1

колона матрице $AX = XJ$, где је $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, бити:

$$\begin{aligned} Ax_1 &= \lambda_1 x_1 \\ Ax_2 &= \lambda_1 x_2 + x_1 \\ &\vdots \\ Ax_{m_1} &= \lambda_1 x_{m_1} + x_{m_1-1}. \end{aligned}$$

Како је Жорданова декомпозиција осетљива на најмање промене, слабо је заступљена у примени. Довољна је мала промена у матрици да би њени сопствени вектори били линеарно независни, односно да би могла да се дијагонализује.

1.3 Спектрална декомпозиција

Теорема о спектралној декомпозицији тврди да се свака симетрична матрица може дијагонализовати. Како је услов за декомпозицију сопственим вредностима био да су сопствени вектори линеарно независни, показаћемо да су сопствени вектори симетричних матрица увек међусобно ортогонални. Како их све можемо нормирати, матрица чије су колоне нормирани сопствени вектори симетричне матрице ће бити ортогонална матрица. У излагању спектралне декомпозиције следићемо поступак дат у [3].

Теорема 1.4 (Спектрална декомпозиција). Реална матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ је симетрична ако и само ако постоје ортогонална матрица Q и дијагонална матрица Λ таква да је

$$A = Q\Lambda Q^T$$

где су колоне матрице $Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ сопствени вектори матрице A који су међусобно ортогонални и нормирани, а елементи $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ су одговарајуће сопствене вредности матрице A које су реалне. Важе следећа својства:

1. Симетрична матрица има само реалне сопствене вредности.
2. Сопствени вектори су ортогонални.
3. Ранг матрице A је број ненула сопствених вредности.
4. Ако су сопствене вредности различите, онда су и сопствени вектори јединствени.

Свако од својстава наведених у Теорему 1.4 ћемо посебно доказивати.

Лема 1.2. Сопствене вредности симетричне матрице су реалне.

Доказ. Претпоставимо супротно, да је $\lambda = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Тада је $\bar{\lambda} = a - bi$. Такође, за комплексни сопствени вектор $x = c + di$, $c, d \in \mathbb{R}$, важи да је $\bar{x} = c - di$. Сада из $Ax = \lambda x$, када помножимо са леве стране са $\bar{x}^T$, следи да је $\bar{x}^T Ax = \lambda \bar{x}^T x$. С друге стране, из $\bar{x}^T A = \bar{\lambda} \bar{x}^T$, множењем са десне стране са x , добијамо $\bar{x}^T Ax = \bar{\lambda} \bar{x}^T x$. Коначно, из ове две једнакости добијамо $\lambda \bar{x}^T x = \bar{\lambda} \bar{x}^T x$, односно $(\lambda - \bar{\lambda}) \bar{x}^T x = 0$, одакле закључујемо да је $\lambda = \bar{\lambda}$, то јест, λ је реалан број. $\square$

Лема 1.3. Сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вредностима симетричне матрице су ортогонални.

Доказ. Нека је $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ и $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, односно λ_1 и λ_2 су сопствене вредности које одговарају сопственим векторима x_1 и x_2 , редом. Транспонувањем прве једначине добијамо $x_1^T A = \lambda_1 x_1^T$, а затим множењем са x_2 са десне стране, $x_1^T Ax_2 = \lambda_1 x_1^T x_2$. Множењем друге једначине са x_1^T са леве стране добијамо $x_1^T Ax_2 = \lambda_2 x_1^T x_2$. Сада имамо да је $\lambda_1 x_1^T x_2 = \lambda_2 x_1^T x_2$, односно $(\lambda_1 - \lambda_2) x_1^T x_2 = 0$. Како су λ_1 и λ_2 по претпоставци различити, следи да је $x_1^T x_2 = 0$, то јест, вектори x_1 и x_2 су ортогонални. $\square$

Теорема 1.5. Ако матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ има k различитих сопствених вредности, онда је скуп k одговарајућих сопствених вектора линеарно независан.

Доказ. Доказујемо индукцијом по броју сопствених вектора.

Претпоставимо супротно, да постоји $x = [x_1, x_2] \neq 0$ да је $x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0$. Множењем ове једначине са леве стране са A , добијамо

$$x_1 \lambda_1 v_1 + x_2 \lambda_2 v_2 = 0,$$

а множењем исте једначине са λ_2 добијамо

$$x_1 \lambda_2 v_1 + x_2 \lambda_2 v_2 = 0.$$

Из две добијене једначине сада следи да је $x_1(\lambda_2 - \lambda_1)v_1 = 0$. Пошто су по претпоставци сопствене вредности међусобно различите, а $v_1 \neq 0$, следи да је $x_1 = 0$.

Аналогно добијамо да је и $x_2 = 0$, што је у контрадикцији са претпоставком да је $x = [x_1, x_2] \neq 0$.

Претпоставимо сада да су за $j < k$ $v_1, \dots, v_k$ линеарно независни вектори и постоји $x = [x_1, x_2, \dots, x_j] \neq 0$ да:

$$v_{j+1} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots x_j v_j.$$

Множењем са A са леве стране добијамо

$$\lambda_{j+1} v_{j+1} = x_1 \lambda_1 v_1 + x_2 \lambda_2 v_2 + \dots x_j \lambda_j v_j,$$

док множењем исте једначине са λ_j + 1 добијамо

$$\lambda_{j+1} v_{j+1} = x_1 \lambda_{j+1} v_1 + x_2 \lambda_{j+1} v_2 + \dots x_j \lambda_{j+1} v_j.$$

Из последње две једначине следи да је $x_1(\lambda_{j+1} - \lambda_1)v_1 + x_2(\lambda_{j+1} - \lambda_2)v_2 + \dots + x_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)v_j = 0$, па из истих претпоставки као у бази индукције следи да је $x_1 = x_2 = \dots = x_j = 0$, што је у контрадикцији са претпоставком да је $x = [x_1, x_2, \dots, x_j] \neq 0$. $\square$

Последица 1.1. Ако матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ има n различитих сопствених вредности, онда сваки скуп одговарајућих сопствених вектора формира базу за $\mathbb{R}^n$.

Лема 1.4. Ако матрица A има сопствену вредност λ_i чија је вишеструкост $k \geq 2$, онда постоје k ортонормираних вектора који одговарају λ_i .

Доказ. Нека је x_{i_1} један сопствени вектор који одговара λ_i . Можемо изабрати векторе $y_2, y_3, \dots, y_n$ тако да $x_{i_1}, y_2, \dots, y_n$ чине ортонормирану базу. Сада формирамо матрице $Y_1 = [y_2, \dots, y_n]$ и $P_1 = [x_{i_1}, y_2, \dots, y_n]$. Покажимо да је

$$P_1^T A P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & Y_1^T A Y_1 \end{bmatrix}.$$

Како је $AP_1 = A[x_{i_1}, y_2, \dots, y_n] = [\lambda_i x_{i_1}, Ay_2, \dots, Ay_n]$, имамо

$$P_1^T A P_1 = \begin{bmatrix} x_{i_1}^T \\ y_2^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{bmatrix} [\lambda_i x_{i_1}, Ay_2, \dots, Ay_n] = \begin{bmatrix} x_{i_1}^T \lambda_i x_{i_1} & x_{i_1}^T Ay_2 & \dots & x_{i_1}^T Ay_n \\ y_2^T \lambda_i x_{i_1} & y_2^T Ay_2 & \dots & y_2^T Ay_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ y_n^T \lambda_i x_{i_1} & y_n^T Ay_2 & \dots & y_n^T Ay_n \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Како је, по конструкцији, x_{i_1} нормиран, добијамо $x_{i_1}^T \lambda_i x_{i_1} = \lambda_i x_{i_1}^T x_{i_1} = \lambda_i$.

Пошто су вектори $y_2, \dots, y_n$ изабрани тако да буду ортогонални на x_{i_1} , сви елементи прве врсте и прве колоне матрице $P_1^T A P_1$, осим првог, биће једнаки 0. Конкретно

$$y_j^T \lambda_i x_{i_1} = \lambda_i \underbrace{y_j^T x_{i_1}}_0 = 0, j = 2, \dots, n$$

$$x_{i_1}^T Ay_j = \lambda_i \underbrace{x_{i_1}^T y_j}_0 = 0.$$

Коначно,

$$\begin{bmatrix} y_2^T Ay_2 & \dots & y_2^T Ay_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^T Ay_2 & \dots & y_n^T Ay_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2^T \\ y_3^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{bmatrix} [Ay_2, \dots, Ay_n] = Y_1^T A Y_1.$$

Дакле,

$$P_1^T A P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & Y_1^T A Y_1 \end{bmatrix}.$$

P_1 је ортогонална матрица, по конструкцији, то јест $P_1^T P_1 = I_n$ и $A = P_1 P_1^T A P_1 P_1^T$, одакле закључујемо да су и $P_1^T A P_1$ сличне матрице, односно, оне имају једнаке карактеристичне полиноме: $\det(P_1^T A P_1 - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) = (\lambda_i - \lambda)^k P_{n-k}(\lambda)$.

Са друге стране, из једначине (1) следи да је $\det(P_1^T A P_1 - \lambda I_n) = (\lambda_i - \lambda) \det(Y_1^T A Y_1 - \lambda I_{n-1})$. Изједначавањем десних страна претходних једначина добијамо

$$(\lambda_i - \lambda)^k P_{n-k}(\lambda) = (\lambda_i - \lambda) \det(Y_1^T A Y_1 - \lambda I_{n-1}), \quad (1.2)$$

одакле следи карактеристични полином матрице $Y_1^T AY_1$:

$$\det(Y_1^T AY - \lambda I_{n-1}) = (\lambda_i - \lambda)^{k-1} P_{n-k}(\lambda).$$

Можемо закључити да је λ_i сопствена вредност матрице $Y_1^T AY_1$ вишеструкости $k - 1$.

Дефинишимо сада матрицу $B \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$:

$$B = Y_1^T AY_1.$$

Због једначине (2), λ_i је сопствена вредност матрице B са алгебарском вишеструкошћу $k - 1$. Одатле следи да постоји вектор $e \in \mathbb{R}^{n-1}$, такав да важи:

$$(B - \lambda_i I_{n-1})e = 0,$$

односно

$$\ker(B - \lambda_i I_{n-1}) \neq \emptyset.$$

Наш циљ је да покажемо да сопствени вектор e матрице B , који одговара сопственој вредности λ_i , на јединствен начин одређује сопствени вектор x_{i_2} матрице A , који одговара сопственој вредности λ_i и за који важи да је $x_{i_2} \perp x_{i_1}$.

Пођимо од једнакости

$$P_1^T AP_1 = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0^T \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

и дефинишимо вектор $e_n \in \mathbb{R}^n$ на следећи начин:

$$e_n := \begin{bmatrix} z \\ e \end{bmatrix},$$

где је $z \in \mathbb{R}$.

Посматрајмо следећу једнакост:

$$P_1^T AP_1 e_n = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0^T \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ e \end{bmatrix},$$

и помножимо је слева матрицом P_1 :

$$P_1 P_1^T AP_1 e_n = P_1 \begin{bmatrix} \lambda_i & 0^T \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ e \end{bmatrix}.$$

Због асоцијативности множења матрица и ортогоналности матрице P_1 последња једначина се своди на:

$$AP_1 e_n = P_1 \begin{bmatrix} \lambda_i & 0^T \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ e \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Пошто је $AP_1 = [\lambda_i x_{i_1}, Ay_2, \dots, Ay_n]$, лева страна последње једнакости постаје

$$\begin{aligned}
 AP_1 e_n &= [\lambda_i x_{i_1}, Ay_2, \dots, Ay_n] \begin{bmatrix} z \\ e \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda_i x_{i_1}^{(1)} & Ay_2^{(1)} & \dots & Ay_n^{(1)} \\ \lambda_i x_{i_1}^{(2)} & Ay_2^{(2)} & \dots & Ay_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i x_{i_1}^{(n)} & Ay_2^{(n)} & \dots & Ay_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ e^{(2)} \\ \vdots \\ e^{(n)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda_i x_{i_1}^{(1)} z + Ay_2^{(1)} e^{(2)} + \dots + Ay_n^{(1)} e^{(n)} \\ \lambda_i x_{i_1}^{(2)} z + Ay_2^{(2)} e^{(2)} + \dots + Ay_n^{(2)} e^{(n)} \\ \vdots \\ \lambda_i x_{i_1}^{(n)} z + Ay_2^{(n)} e^{(2)} + \dots + Ay_n^{(n)} e^{(n)} \end{bmatrix} \\
 &= \lambda_i z x_{i_1} + [Ay_2, \dots, Ay_n] e \\
 &= \lambda_i z x_{i_1} + AY_1 e.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Десна страна једначине (3) се непосредно израчунава:

$$\begin{aligned}
 P_1 \begin{bmatrix} \lambda_i & O^T \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ e \end{bmatrix} &= [x_{i_1}, y_2, \dots, y_n] \begin{bmatrix} \lambda_i z \\ Be \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} x_{i_1}^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_1}^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i z \\ (Be)^{(2)} \\ \vdots \\ (Be)^{(n)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda_i z x_{i_1}^{(1)} + y_2^{(2)} (Be)^{(2)} + \dots + y_n^{(n)} (Be)^{(n)} \\ \vdots \\ \lambda_i z x_{i_1}^{(n)} + y_2^{(n)} (Be)^{(2)} + \dots + y_n^{(n)} (Be)^{(n)} \end{bmatrix} \lambda_i z x_{i_1} + Y_1 Be \\
 &= \lambda_i z x_{i_1} + \lambda_i y_1 e,
 \end{aligned}$$

јер је сопствени вектор матрице B који одговара сопственој вредности λ_i , $Be = \lambda_i e$.

Изједначавањем последња два резултата добијамо:

$$\lambda_i z x_{i_1} + AY_1 e = \lambda_i z x_{i_1} + \lambda_i Y_1 e,$$

одакле следи: $A(Y_1 e) = \lambda_i (Y_1 e)$. То значи да је $Y_1 e \in \mathbb{R}^n$ сопствени вектор матрице A који одговара сопственој вредности λ_i .

Остаје да покажемо да је $Y_1 e \perp x_{i_1}$. Посматрајмо скаларни производ $(Y_1 e)x_{i_1} = e(Y_1^T)x_{i_1} = 0$ јер је:

$$Y_1^T x_{i_1} = \begin{bmatrix} y_2^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{bmatrix} x_{i_1} = \begin{bmatrix} y_2^T x_{i_1} \\ \vdots \\ y_n^T x_{i_1} \end{bmatrix} = 0,$$

зато што је $y_j \perp x_{i_1}$, по конструкцији, за $j = 2, \dots, n$.

Показали смо да је $x_{i_2} = Y_1 e$, где је e био сопствени вектор матрице B , за сопствену вредност λ_i . Ова процедура се може наставити док се не исцрпе све сопствене вредности λ_i , односно док се не одреде сви сопствени вектори $x_{i_j}, j = 1, \dots, k$, који ће бити узајамно ортогонални. $\square$

Глава 2

Мале осцилације механичких система

Мале осцилације механичког система представљају кретање материјалног система у околини стабилног положаја равнотеже. У случају сложенијих механичких система који се крећу под дејством потенцијалних сила, диференцијалне једначине кретања се могу формирати као Лагранжове једначине друге врсте. На основу њих се диференцијалне једначине малих осцилација добијају линеаризацијом Лагранжових једначина у околини положаја равнотеже. Одређивање решења Лагранжових једначина за мале осцилације се тада своди управо на проблем сопствених вредности и сопствених вектора. Да би се овај проблем могао анализирати, најпре ћемо увести неке појмове неопходне за формирање Лагранжових једначина друге врсте. У томе ћемо се ослонити на материјал изложен у [5, 6]

2.1 Диференцијалне једначине кретања механичких система

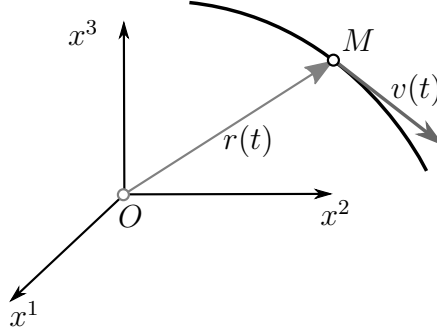
У овом одељку ћемо изложити основне појмове који су неопходни за формирање диференцијалних једначина кретања механичких система. Излагање неће имати строг формални карактер, већ га треба схватити као преглед дефиниција и једначина које су неопходне за описивање кретања механичких система.

2.1.1 Кинетичка енергија

Анализирајмо најпре кретање материјалне тачке масе m . Положај тачке је у сваком тренутку времена $t \geq 0$ одређен вектором положаја $r(t)$, $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Брзина материјалне тачке се дефинише као први извод вектора положаја r по времену t (видети Сliku 2.1):

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt}.$$

Кинетичка енергија материјалне тачке дефинисана је на следећи начин:



Слика 2.1: Положај и брзина материјалне тачке

$$T = \frac{1}{2}m(v, v),$$

где је са (a, b) означен скаларни производ вектора a и b у $\mathbb{R}^3$. Због дефиниције, кинетичка енергија T је ненегативна и једнака је нули акко је брзина тачке једнака нули:

$$T \geq 0; \quad T = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

За материјалну тачку се каже да мирује, односно да се налази у положају равнотеже, ако важи:

$$r(t) = r_0 \in \mathbb{R}^3, \quad \forall t \geq 0.$$

Одавде следи да у положају равнотеже важи $v(t) = 0, \forall t \geq 0$.

Систем материјалних тачака је скуп од N материјалних тачака, чије су масе $m_k, k = 1, \dots, N$, и чији су положаји и брзине редом одређени векторима $r_k(t)$ и $v_k(t)$, $v_k(t) = dr_k(t)/dt$. Кинетичка енергија система материјалних тачака је дефинисана као збир кинетичких енергија тачака које образују систем:

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2}m_k(v_k, v_k) \geq 0, \quad (2.1)$$

и ненегативна је зато што је сваки поједини сабирак ненегативан. Кинетичка енергија ће бити једнака нули акко су брзине свих тачака система једнаке нули:

$$T = 0 \Leftrightarrow v_k = 0, \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

За систем материјалних тачака се каже да мирује, односно да се налази у положају равнотеже, ако важи:

$$r_k(t) = r_{k0} \in \mathbb{R}^3, \quad \forall t \geq 0, \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

Одавде следи да у положају равнотеже важи $v_k(t) = 0, \forall t \geq 0, k \in \{1, \dots, N\}$.

2.1.2 Генералисане координате

Механички системи у општем случају могу бити знатно сложенији од модела система материјалних тачака. Њих могу чинити материјалне тачке и крута тела

чије је кретање узајамно ограничено или је ограничено неким спољашњим везама. Међутим, основни механички појмови се могу на природан начин уопштити и задржати своја основна својства која имају у случају материјалне тачке или система материјалних тачака. Стога ће у наставку бити дат преглед основних појмова у случају општих механичких система, као и одговарајућих диференцијалних једначина кретања.

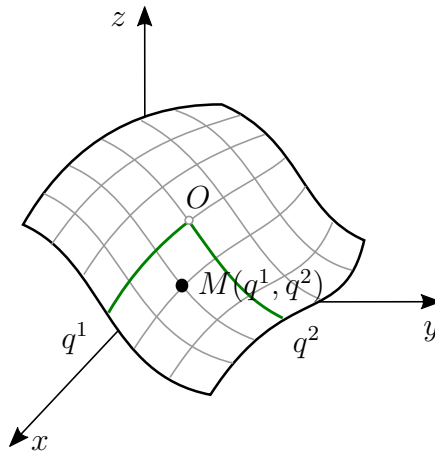
Дефиниција 2.1. *Број степени слободе n је број независних геометријских параметара који једнозначно одређују положај механичког система.*

Дефиниција 2.2. *Генералисане координате су геометријске величине које служе за једнозначно одређивање положаја механичког система. Означавамо их са $q^i, i = 1, \dots, n$, и њихов број је једнак броју степени слободе механичког система.*

Као једноставан илустративни пример генералисаних координата могу послужити криволинијске координате у случају кретања материјалне тачке M по површи у простору. За одређивање положаја слободне материјалне тачке у $\mathbb{R}^3$ потребне су 3 координате (на пример Декартове координате x, y и z). Претпоставимо да је тачка принуђена да се креће по површи која је имплицитно задата једначином

$$f(x, y, z) = 0.$$

Ова једначина се назива једначином везе и она имплицира да Декартове ко-



Слика 2.2: Генералисане координате

ординате нису међусобно независне. Да би се ово превазишло, могу се усвојити криволинијске координате q^1 и q^2 на површи које ће једнозначно одредити положај тачке на њој, што је илустровано на Сlici 2.2. То значи да се Декартове координате могу изразити у функцији q^1 и q^2

$$x = x(q^1, q^2), \quad y = y(q^1, q^2), \quad z = z(q^1, q^2),$$

као и да је једначина везе идентички задовољена

$$f(x(q^1, q^2), y(q^1, q^2), z(q^1, q^2)) \equiv 0.$$

Кретање материјалне тачке се помоћу генералисаних (криволинијских) координата описује параметарским једначинама кретања:

$$q^1 = q^1(t), \quad q^2 = q^2(t).$$

Изводи генералисаних координата по времену се називају генералисаним координатама брзине:

$$\dot{q}^1(t) = \frac{dq^1(t)}{dt}, \quad \dot{q}^2(t) = \frac{dq^2(t)}{dt}.$$

Имајући ово у виду, Декартове координате брзине материјалне тачке се могу изразити преко генералисаних координата брзина:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q^1} \dot{q}^1(t) + \frac{\partial x}{\partial q^2} \dot{q}^2(t), \\ v_y(t) &= \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial y}{\partial q^1} \dot{q}^1(t) + \frac{\partial y}{\partial q^2} \dot{q}^2(t), \\ v_z(t) &= \frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial z}{\partial q^1} \dot{q}^1(t) + \frac{\partial z}{\partial q^2} \dot{q}^2(t). \end{aligned}$$

Приметимо да су Декартове координате брзине линеарне функције генералисаних координата брзине.

2.1.3 Лагранжове једначине друге врсте

Кретање механичког система са n степени слободе је описано функцијама $q^i(t)$, $q^i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, где су q^i генералисане координате. Генералисане координате брзина се дефинишу као изводи генералисаних координата по времену:

$$\dot{q}^i(t) = \frac{dq^i(t)}{dt}.$$

За механички систем се каже да мирује, односно да се налази у положају равнотеже ако важи:

$$q^i(t) = q_0^i \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Одавде следи да у положају равнотеже важи: $\dot{q}^i(t) = 0$, $\forall t \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.

Кинетичка енергија механичког система има следећи облик:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j \geq 0, \quad (2.2)$$

где је искоришћена ознака $q = (q^1, \dots, q^n)$. Ненегативност се обезбеђује трансформацијом кинетичке енергије система материјалних тачака (2.1) и њеним изражавањем помоћу генералисаних координата брзина, што је детаљно показано у [5]. Одатле следе два важна својства:

1. $a_{ij}(q) = a_{ji}(q) \in \mathbb{R}$;
2. $[a_{ij}]_{i,j=1}^n$ је позитивно дефинитна матрица.

Треба напоменути да кинетичка енергија има овај облик у случају механичких система чије је кретање ограничено стационарним везама (које не зависе од времена t).

У наставку ћемо се ограничити на механичке системе који се крећу под дејством потенцијалних сила. Подсетимо се, за поље силе $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ се каже да је потенцијално (конзервативно) ако постоји функција $\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, која се назива *потенцијалном енергијом*, таква да важи:

$$F = -\text{grad } \Pi.$$

У случају механичких система који се крећу по дејством потенцијалних сила, потенцијална енергија описује све силе и може се приказати као функција генералисаних координата, $\Pi = \Pi(q)$. Тада се диференцијалне једначине кретања механичког система могу записати у облику Лагранжових једначина друге врсте:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

Једначине (2.3) представљају систем обичних диференцијалних једначина другог реда и њихов број је једнак броју степени слободе механичког система. То значи да је ред система диференцијалних једначина $2n$.

Важно својство положаја равнотеже описано је следећом Лемом.

Лема 2.1. Ако $q^i(t) = q_0^i \in \mathbb{R}$ положај равнотеже, онда је то и стационарна тачка потенцијалне енергије $\Pi(q)$:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q^i}(q_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Доказ. Доказ Леме следи непосредно из анализе Лагранжових једначина друге врсте (2.3). Наиме, ако је $q^i(t) = q_0^i \in \mathbb{R}$, $\forall t \geq 0$, онда је и $T = 0$, $\forall t \geq 0$. Тада из (2.3) следи тврђење Леме (2.4). $\square$

2.2 Диференцијалне једначине малих осцилација

У даљем тексту ћемо се бавити формирањем и решавањем диференцијалних једначина малих осцилација. У томе ћемо се ослонити на материјал садржан у [5, 6, 7, 8].

Да би систем могао вршити мале осцилације око положаја равнотеже неопходно је да буду испуњени одређени услови, који ће бити наведени у наставку.

Прво, везе које ограничавају кретање система морају бити стационарне, односно не смеју експлицитно да зависе од времена t . Последица овог услова је да је кинетичка енергија (2.2) квадратна форма генералисаних координата брзина и коефицијенти $a_{ij}(q)$ не зависе од времена t .

Друго, механички систем се креће под дејством потенцијалних сила описаних потенцијалном енергијом $\Pi(q)$ која не зависи од времена.

Треће, положај равнотеже $q^i(t) = q_0^i$, у чијој околини се врше мале осцилације, је изолован и стабилан. Одавде следи да тачка q_0 представља тачку локалног минимума функције $\Pi(q)$. Ради једноставности ћемо усвојити да је у даљем тексту $q_0^i = 0$.

2.2.1 Потенцијална енергија

Структура израза за потенцијалну енергију $\Pi(q)$ је веома важна за анализу малих осцилација система у околини положаја равнотеже. Зато ће у наставку бити детаљније анализирана. Претпоставићемо да је $\Pi(q)$ довољно глатка у околини $q = 0$ да је могућ њен развој у Маклоренов полином.

Лема 2.2. У околини положаја равнотеже $q = 0$, потенцијал $\Pi(q)$ се може апроксимирати¹:

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}(0) q^i q^j + o(\|q\|^2), \quad (2.5)$$

где је $c_{ij}(0) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j}(0)$.

Доказ. У општем случају важи:

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q^i}(0) q^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j}(0) q^i q^j + o(\|q\|^2), \quad (a)$$

Пошто се $\Pi(0)$ може изабрати на произвољан начин, усваја се $\Pi(0) = 0$. Како је $q = 0$ положај равнотеже, у њему функција $\Pi(q)$ има стационарну тачку (на основу Леме 2.1), односно важи $\frac{\partial \Pi}{\partial q^i}(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. На тај начин се једначина (a) своди на тражени облик (2.5). $\square$

Напомена. Матрица других парцијалних извода $c_{ij}(q) = \frac{\partial^2 \Pi(q)}{\partial q^i \partial q^j}$ се назива Хесијаном функције $\Pi(q)$.

Један од услова да систем врши мале осцилације око положаја равнотеже је био да је тај положај $q = 0$ изолован и стабилан. Дефинишимо најпре појам стабилности положаја равнотеже. За то је неопходно увести вектор стања $x(t)$ механичког система, дефинисан као

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}.$$

Дефиниција 2.3. Положај равнотеже $q = 0$ је стабилан ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да из $\|x(t_0)\| \leq \delta$ следи да је $\|x(t)\| \leq \varepsilon$, $\forall t \geq t_0$.

Лагранж-Дирихлеова теорема о стабилности положаја равнотеже уводи додатна ограничења у погледу структуре потенцијалне енергије $\Pi(q)$.

Теорема 2.1 (Лагранж-Дирихле). Ако у изолованом положају равнотеже механичког система потенцијална енергија има изоловани локални минимум, онда је тај положај равнотеже стабилан.

¹Са $\|q\|$ је означена норма од q . Она се може дефинисати помоћу унутрашњег производа на многострукости. О овоме се детаљније може видети у [5].

Лагранж-Дирихлеова теорема даје довољан услов стабилности положаја равнотеже. У исто време, њом се захтева да Хесијан функције $\Pi(q)$, односно матрица

$$[c_{ij}(0)]_{i,j=1}^n = \left[\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j}(0) \right]_{i,j=1}^n,$$

буде позитивно дефинитна. Овај услов ће бити пресудан у конструкцији решења једначина малих осцилација.

2.2.2 Линеаризација једначина кретања

Диференцијалне једначине малих осцилација механичког система око стабилног положаја равнотеже се добијају линеаризацијом Лагранжових једначина друге врсте (2.3).

Теорема 2.2. Линеаризоване диференцијалне једначине кретања материјалног система у околини стабилног положаја равнотеже имају облик:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(0)\ddot{q}^j + \sum_{j=1}^n c_{ij}(0)\dot{q}^j = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Доказ. Полазимо од Лагранжових једначина друге врсте за кретање система са потенцијалним силама (2.3):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Полазећи од израза за кинетичку енергију (2.2), добија се:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

На сличан начин имамо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^j + \dot{q}^i \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{q}^k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_k^i \dot{q}^j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}^i \delta_k^j \end{aligned} \quad (a)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}^j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ik} \dot{q}^i \quad (b)$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{kj} \dot{q}^j. \quad (b)$$

У изразу (a) појављује се Кронекеров делта симбол:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

који нам омогућује свођење на израз (6). Поред тога, због симетричности коефицијената a_{ij} и могућности преименовања немих индекса, добија се коначан облик (в). Даље имамо:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{da_{kj}}{dt} \dot{q}^j + a_{kj} \ddot{q}^j \right),$$

где је:

$$\frac{da_{kj}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial q^i} \dot{q}^i,$$

па се коначно добија:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}(q) \ddot{q}^j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial q^i} \dot{q}^i \dot{q}^j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^k}. \quad (2.7)$$

Под линеаризацијом једначине (2.7) се подразумева њена линеарна апроксимација у околини положаја равнотеже $q^i = 0$. То значи да се задржавају само чланови првог степена по q^i , $\dot{q}^i$ и $\ddot{q}^i$, а да се чланови другог и виших степена занемарују. То значи да важе следеће апроксимације:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{kj}(q) \ddot{q}^j &\approx \sum_{j=1}^n a_{kj}(0) \ddot{q}^j, \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{kj}(q)}{\partial q^i} \dot{q}^i \dot{q}^j &\approx 0, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}(q)}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j \approx 0. \end{aligned}$$

На основу Леме 2.2 имамо да је:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial q^k} &\approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}(0) \left(\frac{\partial q^i}{\partial q^k} q^j + q^i \frac{\partial q^j}{\partial q^k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}(0) (\delta_k^i q^j + q^i \delta_k^j) \\ &= \sum_{i=1}^n c_{kj}(0) q^j. \end{aligned}$$

Коришћењем ових апроксимација, једначина (2.7) се своди на:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}(0) \ddot{q}^j = - \sum_{j=1}^n c_{kj}(0) q^j,$$

а заменом слободног индекса k индексом i добијамо тражени облик (2.6). $\square$

Једначине (2.6) представљају диференцијалне једначине малих осцилација око стабилног положаја равнотеже $q = 0$.

2.2.3 Матрични облик једначина малих осцилација

За примену теорије матрица у анализи малих осцилација потребно је једначине (2.6) записати у матричном облику.

Лема 2.3. Ако важе претпоставке о малим осцилацијама, онда са тачношћу до малих величина другог реда кинетичка и потенцијална енергија имају следећи облик:

$$T \approx \frac{1}{2} \dot{q}^T T_0 \dot{q} \quad (2.8)$$

$$\Pi \approx \frac{1}{2} q^T \Pi_0 q \quad (2.9)$$

где је $q = [q^1, \dots, q^n]^T$ вектор-колона генерализаних координата, а T_0 и Π_0 су симетричне матрице реда n са константним елементима.

Доказ. Како је кинетичка енергија

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad a_{ij}(q) = a_{ji}(q),$$

када коефицијенте апроксимирамо првим чланом у развоју у Маклоренов ред, $a_{ij}(q) \approx a_{ij}(0)$, добијамо

$$T \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(0) \dot{q}^i \dot{q}^j = \frac{1}{2} \dot{q}^T T_0 \dot{q},$$

где је $T_0 = [a_{ij}(0)]_{i,j=1}^n$.

На основу Леме 2.2, за потенцијалну енергију важи

$$\Pi \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}(0) q^i q^j = \frac{1}{2} q^T \Pi_0 q$$

где је $\Pi_0 = [c_{ij}(0)]_{i,j=1}^n$. □

Теорема 2.3. Лагранжове једначине друге врсте за материјални систем описан кинетичком и потенцијалном енергијом имају облик

$$T_0 \ddot{q} + \Pi_0 q = 0 \quad (2.10)$$

и представљају матрични запис диференцијалних једначина малих осцилација.

Доказ. Полазећи од кинетичке енергије (2.8) и потенцијалне енергије (2.9) добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n a_{ik}(0) \dot{q}^i \right) \\ &= \frac{d}{dt} ([T_0 \dot{q}]_k) \\ &= [T_0 \ddot{q}]_k, \end{aligned} \quad (a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^k} = 0, \quad (б)$$

односно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}^k} &= \sum_{i=1}^n c_{ik}(0) \dot{q}^i \\ &= [\Pi_0 \dot{q}]_k,\end{aligned}\tag{в}$$

где $[\]_k$ означава k -ту компоненту вектора. Коришћењем (а), (б) и (в), из Лагранжових једначина (2.3) следе диференцијалне једначине кретања

$$[T_0 \ddot{q}]_k + [\Pi_0 \dot{q}]_k = 0,$$

које представљају матрични запис линеаризованих једначина кретања (2.6). $\square$

2.2.4 Решење једначина малих осцилација

Решавање једначина малих осцилација (2.6), односно (2.10), се своди на проблем сопствених вредности.

Теорема 2.4. Решења Лагранжових једначина за мале осцилације имају облик

$$q(t) = \alpha \cos(\omega t + \theta), \quad \alpha \in \mathbb{R}^n, \theta \in \mathbb{R},\tag{2.11}$$

где ω и α задовољавају матричну једначину

$$(\Pi_0 - \omega^2 T_0) \alpha = 0.\tag{2.12}$$

Доказ. Претпоставимо решење једначина малих осцилација (2.10) у облику (2.11). Одатле следи

$$\ddot{q}(t) = -\omega^2 \alpha \cos(\omega t + \theta).\tag{а}$$

Уврштавањем (2.11) и (а) у једначину (2.10)

$$T_0 \ddot{q} + \Pi_0 \dot{q} = 0,$$

добива се

$$-\omega^2 T_0 \alpha \cos(\omega t + \theta) + \Pi_0 \alpha \cos(\omega t + \theta) = 0.\tag{б}$$

Пошто је $\cos(\omega t + \theta) = 0$ само за изоловане вредности t , једначина (б) ће у општем случају бити задовољена ако важи

$$(\Pi_0 - \omega^2 T_0) \alpha = 0,$$

чиме је тврђење доказано. $\square$

Уочимо да из једначине (2.12) следи

$$\Pi_0 \alpha = \omega^2 T_0 \alpha,$$

па множењем са T_0^{-1} са леве стране добијамо

$$T_0^{-1} \Pi_0 \alpha = \omega^2 \alpha.$$

Може се закључити да су α сопствени вектори, а ω^2 сопствене вредности матрице $T_0^{-1} \Pi_0$. Својства сопствених вектора и сопствених вредности следе из својстава матрица T_0 и Π_0 , што је исказано у следећој Леми.

Лема 2.4. Ако су кинетичка и потенцијална енергија позитивно дефинитне квадратне форме, онда су све сопствене вредности у проблему $(\Pi_0 - \omega^2 T_0)\alpha = 0$ реалне и позитивне.

Доказ. Претпоставимо да постоји комплексна сопствена вредност

$$\omega^2 = \lambda = \lambda' + i\lambda'',$$

којој одговара комплексни сопствени вектор

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'', \quad i^2 = -1.$$

Тада имамо

$$(\Pi_0 - \lambda T_0)\alpha = (\Pi_0 - \lambda' T_0)\alpha' + \lambda'' T_0 \alpha'' + i[(\Pi_0 - \lambda' T_0)\alpha'' - \lambda'' T_0 \alpha'] = 0$$

одакле следи

$$(\Pi_0 - \lambda' T_0)\alpha' + \lambda'' T_0 \alpha'' = 0$$

и

$$(\Pi_0 - \lambda' T_0)\alpha'' - \lambda'' T_0 \alpha' = 0.$$

Ако прву једначину помножимо са леве стране са α''^T , а другу једначину са $-\alpha'^T$, а затим их саберемо добијамо

$$\alpha''^T (\Pi_0 - \lambda' T_0) \alpha' + \alpha''^T \lambda'' T_0 \alpha'' - \alpha'^T (\Pi_0 - \lambda' T_0) \alpha'' + \alpha'^T \lambda'' T_0 \alpha' = 0.$$

Како је, због позитивне дефинитности матрица Π_0 и T_0 :

$$\alpha''^T (\Pi_0 - \lambda' T_0) \alpha' = \alpha'^T (\Pi_0 - \lambda' T_0) \alpha'',$$

добија се

$$\lambda'' (\alpha''^T T_0 \alpha'' + \alpha'^T T_0 \alpha') = 0.$$

Пошто је за $\alpha \neq 0$, због позитивне дефинитности матрице T_0 , имамо

$$\alpha''^T T_0 \alpha'' > 0$$

или

$$\alpha'^T T_0 \alpha' > 0$$

одакле следи

$$\alpha''^T T_0 \alpha'' + \alpha'^T T_0 \alpha' \neq 0,$$

односно $\lambda'' = 0$, то јест, сопствена вредност λ је реална.

Даље, за $\alpha \neq 0$, из једначине $(\Pi_0 - \lambda T_0)\alpha = 0$ следи

$$\alpha^T (\Pi_0 - \lambda T_0) = 0,$$

односно

$$\lambda \alpha^T T_0 \alpha = \alpha^T \Pi_0 \alpha.$$

Како је, због позитивне дефинитности потенцијалне енергије

$$\alpha^T \Pi_0 \alpha > 0,$$

следи да је

$$\lambda \alpha^T T_0 \alpha > 0.$$

Коначно, због позитивне дефинитности матрице T_0 имамо да је $\lambda > 0$, то јест сопствена вредност λ је позитивна. $\square$

Решења облика $q(t) = \alpha \cos(\omega t + \theta)$ се називају модовима осциловања, а ω фреквенцијама осциловања. Како се ω и α добијају решавањем проблема сопствених вредности, на основу претходне Леме закључујемо да независних мода осциловања има онолико колико систем има степени слободе. Приметимо да Лема 2.4 представља уопштење резултата за основни проблем сопствених вредности, са јединичном матрицом, који је доказан у Леми 1.2.

2.2.5 Пример: Удвојено математичко клатно

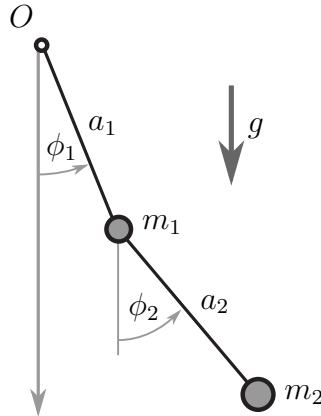
Удвојено математичко клатно је систем који чине два надовезана математичка клатна која се крећу у истој равни. Нека су m_1 и m_2 масе, a_1 и a_2 дужине клатна, а ϕ_1 и ϕ_2 углови које клатна образују са вертикалном осом усмереном као Земљина тежа. Систем је приказан на Слици 2.3.

Кинетичка енергија удвојеног математичког клатна је

$$T = \frac{1}{2} \left((m_1 + m_2) a_1^2 \dot{\phi}_1^2 + 2m_2 a_1 a_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + m_2 a_2^2 \dot{\phi}_2^2 \right).$$

Како су генералисане координате $q^1 = \phi_1$ и $q^2 = \phi_2$, на основу израза за кинетичку енергију добијамо:

$$\begin{aligned} a_{11}(q) &= (m_1 + m_2) a^2 = \text{const.} \\ a_{12}(q) &= m_2 a_1 a_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \\ a_{22}(0) &= m_2 a_2^2 = \text{const.} \end{aligned}$$



Слика 2.3: Удвојено математичко клатно

Да би се формирале диференцијалне једначине малих осцилација потребно је апроксимирати израз за кинетичку енергију

$$T \approx \frac{1}{2} a_{ij}(0) \dot{q}^i \dot{q}^j = \frac{1}{2} \left(a_{11}(0) \dot{\phi}_1^2 + 2a_{12}(0) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + a_{22}(0) \dot{\phi}_2^2 \right).$$

С обзиром на структуру коефицијената $a_{ij}(q)$ у нашем случају имамо

$$\begin{aligned} a_{11}(0) &= (m_1 + m_2) a^2, \\ a_{12}(0) &= m_2 a_1 a_2 \cos(0 - 0) = m_2 a_1 a_2 \cos 0 = m_2 a_1 a_2, \\ a_{22}(0) &= m_2 a_2^2. \end{aligned}$$

Коначно можемо формирати матрицу

$$T_0 = [a_{ij}(0)]_{i,j=1}^2 = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)a^2 & m_2a_1a_2 \\ m_2a_1a_2 & m_2a_2^2 \end{bmatrix},$$

тако да важи $T \approx \frac{1}{2}\dot{\phi}^T T_0 \dot{\phi}$, где је $\dot{\phi} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix}$.

Потенцијална енергија удвојеног математичког клатна је дата са:

$$\Pi = -m_1ga_1 \cos \phi_1 - m_2ga_1 \cos \phi_1 - m_2ga_2 \cos \phi_2.$$

Како је $\Pi_0 = [c_{ij}(0)]_{i,j=1}^2$, где је $c_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial q^i \partial q^j}$, потребно је одредити парцијалне изводе $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \phi_1^2}$, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \phi_1 \partial \phi_2}$ и $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \phi_2^2}$. Како су први парцијални изводи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_1} &= m_1ga_1 \sin \phi_1 + m_2ga_1 \sin \phi_1, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_2} &= m_2ga_2 \sin \phi_2, \end{aligned}$$

добијамо да је

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \phi_1^2} &= m_1ga_1 \cos \phi_1 + m_2ga_1 \cos \phi_1, \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \phi_2^2} &= m_2ga_2 \cos \phi_2, \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} &= 0. \end{aligned}$$

Одатле следи

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial \phi_1^2} = m_1ga_1 \cos 0 + m_2ga_1 \cos 0 = (m_1 + m_2)ga_1, \\ c_{22} &= \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial \phi_2^2} = m_2ga_2 \cos 0 = m_2ga_2, \\ c_{12} &= c_{21} = \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial \phi_1 \partial \phi_2} = 0. \end{aligned}$$

Сада имамо да је матрица Π_0

$$\Pi_0 = [c_{ij}(0)]_{i,j=1}^2 = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)ga_1 & 0 \\ 0 & m_2ga_2 \end{bmatrix},$$

па се потенцијална енергија може апроксимирати на следећи начин

$$\Pi \approx \Pi(0) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^T \Pi_0 \dot{\phi},$$

где је $\dot{\phi} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix}$.

Диференцијалне једначине малих осцилација (2.6), односно (2.10), у случају удвојеног математичког клатна гласе

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)a_1\ddot{\phi}_1 + m_2a_2\ddot{\phi}_2 + (m_1 + m_2)g\phi_1 &= 0 \\ m_2a_2a_1\ddot{\phi}_1 + m_2a_2^2\ddot{\phi}_2 + m_2a_2g\phi_2 &= 0\end{aligned}\tag{2.13}$$

Анализа малих осцилација помоћу једначина које су управо изведене је погодна са физичког аспекта. Генералисане координате ϕ_1 и ϕ_2 имају очигледан физички смисао – представљају углове отклона клатна у односу на вертикалну осу. Међутим, решавање самих једначина се у математичком смислу може значајно упростити ако се оне сведу на дијагонални облик.

Да бисмо дошли до једначина удвојеног математичког клатна у дијагоналном облику потребно је трансформисати једначину (2.10), $T_0\ddot{q} + \Pi_0q = 0$. Множењем ове једначине слева са T_0^{-1} добијамо једначину

$$\ddot{q} + Aq = 0,$$

где је $A = T_0^{-1}\Pi_0$.

У случају удвојеног математичког клатна имамо

$$T_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^2m_1} & -\frac{1}{a_1a_2m_1} \\ -\frac{1}{a_1a_2m_1} & \frac{1}{a_2^2m_1m_2} \end{bmatrix}$$

одакле следи матрица A

$$A = T_0^{-1}\Pi_0 = \begin{bmatrix} \frac{g(m_1+m_2)}{a_1m_1} & -\frac{gm_2}{a_1m_1} \\ -\frac{g(m_1m_2)}{a_2m_1} & \frac{g(m_1+m_2)}{a_2m_1} \end{bmatrix}.$$

У наставку ћемо, ради једноставности, анализирати специјални случај када је $m_1 = m_2 = m$ и $a_1 = a_2 = a$. Тада имамо

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2g}{a} & -\frac{g}{a} \\ -\frac{2g}{a} & \frac{2g}{a} \end{bmatrix}.$$

Једначина $\ddot{q} + Aq = 0$ јесте дијагонална у односу на вектор других извода генералисаних координата $\ddot{q}$, али није у односу на вектор q . Да би се цела једначина свела на дијагонални облик увешће се линеарна трансформација координата

$$q = D\theta,$$

где је у општем случају $\theta = \begin{bmatrix} \theta^1 \\ \vdots \\ \theta^n \end{bmatrix}$, а $D \in M_{n \times n}$, матрица трансформације са константим елементима. Диференцирањем се добија

$$\ddot{q} = D\ddot{\theta}.$$

Убацавањем у претходну једначину добија се

$$D\ddot{\theta} + AD\theta = 0,$$

одакле множењем једначине слева са D^{-1} следи

$$\ddot{\theta} + \Lambda\theta = 0,$$

где је $\Lambda = D^{-1}AD$. На основу Теореме 1.2 последња једначина ће имати дијагоналан облик ако је Λ дијагонална матрица чији су елементи сопствене вредности матрице A . Стога матрица D треба да буде матрица чије су колоне сопствени вектори матрице A . У случају удвојеног математичког клатна сопствене вредности матрице A су

$$\lambda_1 = (2 + \sqrt{2})\frac{g}{a}, \quad \lambda_2 = (2 - \sqrt{2})\frac{g}{a},$$

а одговарајући сопствени вектори су

$$e_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица D и њен инверз D^{-1} имају облик

$$D = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

Матрица Λ тада гласи

$$\Lambda = D^{-1}AD = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 + \sqrt{2})\frac{g}{a} & 0 \\ 0 & (2 - \sqrt{2})\frac{g}{a} \end{bmatrix}.$$

Како је у овом примеру $q = \phi$, из једначина $\phi = D\theta$ и $\ddot{\theta} + \Lambda\theta = 0$, где је $\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$ и $\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$, коначно добијамо једначине удвојеног математичког клатна у дијагоналном облику

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \lambda_1\theta_1 &= 0, \\ \ddot{\theta}_2 + \lambda_2\theta_2 &= 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

и лако можемо изразити координате ϕ као линеарну трансформацију координата θ

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\theta_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\theta_2, \\ \phi_2 &= \theta_1 + \theta_2. \end{aligned}$$

2.3 Нормалне координате

Пример удвојеног математичког клатна наговештава могућности које нам пружа матрична алгебра у примени на диференцијалне једначине малих осцилација. Генералисане координате $q = \phi$ имале су јасан физички смисао. Лагранжове једначине малих осцилација у односу на њих имају облик $T_0\ddot{q} + \Pi_0q = 0$,

односно (2.13) који је у математичком смислу сложен зато што су једначине спрегнуте. Са друге стране, координате θ , уведене линеарном трансформацијом $q = D\theta$, немају очигледну геометријску интерпретацију, али нас доводе до диференцијалних једначина (2.14) које су независне, односно имају дијагонални матрични облик. Овакве координате се у литератури називају *нормалним координатама*. Процедура трансформације диференцијалних једначина малих осцилација на дијагонални облик се може формализовати, што је приказано наредном Теоремом.

Теорема 2.5. Нека су T_0 и Π_0 реалне симетричне $n \times n$ матрице и T_0 је позитивно дефинитна. Онда постоји регуларна матрица B таква да је $B^T T_0 B$ јединична и $\Lambda = B^T \Pi_0 B$ дијагонална матрица.

Доказ. Како је T_0 симетрична матрица, на основу Теореме 1.4 постоји ортогонална матрица H таква да је

$$H^T T_0 H = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & k_n \end{bmatrix}.$$

Пошто је T_0 позитивно дефинитна матрица, онда су и сви $k_1, k_2, \dots, k_n$ позитивни.

Нека је M дијагонална матрица дефинисана са

$$M = \begin{bmatrix} k_1^{-\frac{1}{2}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & k_2^{-\frac{1}{2}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & k_n^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.$$

Тада имамо да је

$$M^T H^T T_0 H M = I,$$

јер множењем ових матрица добијамо да су сви недијагонални елементи једнаки нули, док су елементи на дијагонали једнаки $k_i^{-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}} = k_i^0 = 1$, за $i = 1, \dots, n$.

Посматрајмо сада матрицу Π_0 . Како је Π_0 симетрична матрица, тада је и $S = M^T H^T \Pi_0 H M$ симетрична матрица јер је

$$S^T = M^T H^T \Pi_0^T H M = M^T H^T \Pi_0 H M = S.$$

На основу теореме (1.4) тада постоји ортогонална матрица N таква да је $N^T S N$ дијагонална матрица.

Нека је $\Lambda = N^T S N$ и $B = H M N$. Тада је матрица B регуларна као производ регуларних матрица. Пошто смо показали да је $M^T H^T T_0 H M = I$, а $N^T S N$ је дијагонална матрица, коначно добијамо

$$\begin{aligned} B^T T_0 B &= N^T M^T H^T T_0 H M N = N^T N = I, \\ B^T \Pi_0 B &= N^T M^T H^T \Pi_0 H M N = N^T S N = \Lambda. \end{aligned}$$

□

Користећи претходну теорему можемо прећи на нормалне координате и добити жељене Лагранжове једначине. Полазећи од једначине

$$q = B\theta,$$

где је $\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$, а B матрица добијена на начин описан у доказу претходне теореме, диференцирањем добијамо

$$\ddot{q} = B\ddot{\theta}.$$

Сада диференцијалне једначине малих осцилација имају облик

$$T_0 B \ddot{\theta} + \Pi_0 B \theta = 0,$$

одакле се множењем слева са B^T добија

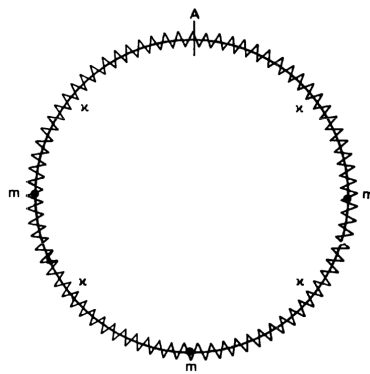
$$B^T T_0 B \ddot{\theta} + B^T \Pi_0 B \theta = 0,$$

што је на основу претходне теореме еквивалентно са

$$\ddot{\theta} + \Lambda \theta = 0.$$

2.3.1 Пример

Примену претходне теореме можемо показати на примеру три тела масе m повезана опругом која се крећу по кружници. Овај механички систем има три степена слободe, а генерализане координате q^1 , q^2 и q^3 представљају лучне помераје тачака у односу на равнотежне положаје приказане на Слици 2.4.



Слика 2.4: Механички систем са три степена слободe

Кинетичка енергија T и потенцијална енергија Π овог система у случају малих осцилација имају облик:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}c(q_1^2 + (q_2 - q_1)^2 + (q_3 - q_2)^2 + q_3^2),$$

где је c крутост опруге. Диференцијалне једначине малих осцилација су:

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + c(2q_1 - q_2) &= 0, \\ m\ddot{q}_2 + c(-q_1 + 2q_2 - q_3) &= 0, \\ m\ddot{q}_3 + c(-q_2 + 2q_3) &= 0. \end{aligned}$$

одакле имамо да је

$$T_0 = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix},$$

и

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 2c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & 2c \end{bmatrix}.$$

Пређимо сада на трансформацију система на нормалне координате. Како је матрица T_0 дијагонална са троструком сопственом вредности m , било која три међусобно ортогонална вектора ће одговарати овим сопственим вредностима, тако да можемо изабрати базу $\mathbb{R}^3$. На тај начин, ће матрица H , чије су колоне сопствени вектори матрице T_0 , бити јединична матрица, односно,

$$H = I.$$

Такође, врло очигледно добијамо да је

$$M = \begin{bmatrix} m^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & m^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & m^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.$$

Сада је потребно одредити матрицу $S = M^T H^T \Pi_0 H M$. Можемо закључити да је

$$HM = H^T M^T = (HM)^T = M^T H^T = m^{-\frac{1}{2}} I.$$

Сада је

$$S = M^T H^T \Pi_0 H M = m^{-\frac{1}{2}} I \Pi_0 m^{-\frac{1}{2}} I = m^{-1} \Pi_0 = \begin{bmatrix} 2\frac{c}{m} & -\frac{c}{m} & 0 \\ -\frac{c}{m} & 2\frac{c}{m} & -\frac{c}{m} \\ 0 & -\frac{c}{m} & 2\frac{c}{m} \end{bmatrix}.$$

Сопствене вредности матрице S су

$$\lambda_1 = 2\frac{c}{m} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \lambda_2 = 2\frac{c}{m}, \quad \lambda_3 = 2\frac{c}{m} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right),$$

а сопствени вектори

$$e_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Како је N ортогонална матрица чије су колоне сопствени вектори матрице S , потребно је претходно нормирати ове векторе, који су сви интензитета $\sqrt{2}$, па добијамо

$$N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Сада, коначно можемо одредити матрицу B :

$$B = H M N = I \begin{bmatrix} m^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & m^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & m^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = m^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Како је $q = B\theta$, сада имамо

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2m^{\frac{1}{2}}}\theta_1 + \frac{\sqrt{2}}{2m^{\frac{1}{2}}}\theta_2 + \frac{1}{2m^{\frac{1}{2}}}\theta_3 \\ q_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2m^{\frac{1}{2}}}\theta_1 - \frac{\sqrt{2}}{2m^{\frac{1}{2}}}\theta_3 \\ q_3 &= \frac{1}{2m^{\frac{1}{2}}}\theta_1 - \frac{\sqrt{2}}{2m^{\frac{1}{2}}}\theta_2 + \frac{1}{2m^{\frac{1}{2}}}\theta_3, \end{aligned}$$

Диференцијалне једначине малих осцилација у односу на нормалне координате гласе

$$\ddot{\theta} + \Lambda\theta = 0,$$

где је $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Глава 3

Поларна декомпозиција матрица

Механика непрекидних средина је грана механике која је бави проучавањем кретања и деформације тела. Основни математички објекти који се при томе користе су вектори и тензори. Конкретно, под тензорима другог реда се подразумевају линеарна пресликавања векторског простора у векторски простор. Да би се обухватили сви потребни аспекти понашања непрекидне средине, користе се методи векторске и тензорске алгебре и анализе.

Када се тензори другог реда изразе у односу на ортонормирану базу, могу се представити у виду матрица. Отуда посебне врсте матрица и њихова својства налазе непосредну примену у механици непрекидних средина.

У овом поглављу ће се изложити основни појмови којима се описује деформација непрекидне средине и доказаће се Теорема о поларној декомпозицији. Ова теорема је занимљива и са математичког аспекта, због нетривијалне декомпозиције регуларних матрица, и са аспекта механике, због њене јасне физичке интерпретације. Теорема ће бити примењена на два карактеристична примера деформације – издужење и чисто смицање.

У даљем тексту ће бити изложени само основни појмови механике непрекидних средина који су неопходни за формулисање Теореме о поларној декомпозицији. У томе ћемо се ослонити на материјал садржан у [9, 10].

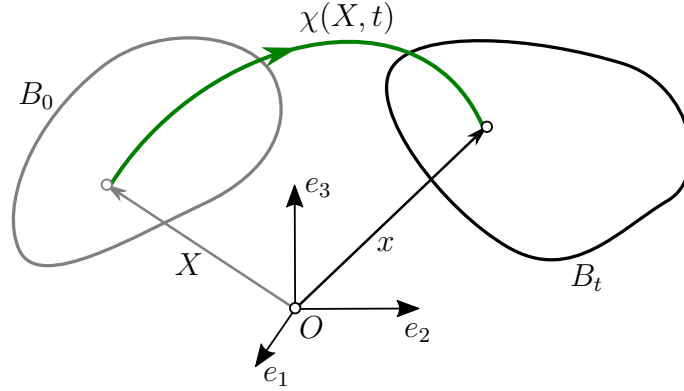
3.1 Конфигурација и кретање непрекидне средине

Приликом описивања кретања непрекидне средине посматрамо област простора коју непрекидно испуњава материја. Свакој честици материје се додељује једна тачка у простору, а област простора коју то тело заузима у неком тренутку називамо конфигурацијом тог тела. Конфигурацију тела у почетном тренутку $t = 0$ означимо са B_0 , а конфигурацију тела у тренутку $t > 0$ са B_t , где су $B_0, B_t \subset \mathbb{R}^3$. Нека је P_0 репрезентативна тачка у B_0 , а P њој одговарајућа тачка у B_t . Вектор положаја тачке P_0 обележимо са $X = (X_1, X_2, X_3)$, а вектор положаја тачке P са $x = (x_1, x_2, x_3)$, што је приказано на Слици 3.1. Са X_i и x_i , $i = 1, 2, 3$ су означене координате вектора у односу на стандардну базу. Кретање непрекидне средине се описује положајем тачака у тренутној конфигурацији

B_t , односно функцијама

$$x = \chi(X, t),$$

које могу бити изражене по координатама



Слика 3.1: Кретање непрекидне средине

$$x_i = \chi_i(X_1, X_2, X_3, t) = \chi_i(X_A, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad A = 1, 2, 3.$$

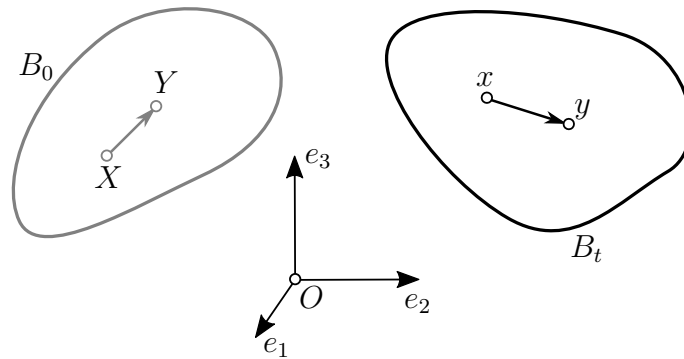
Ове функције одређују положај било које тачке у B_t , ако је позната њој одговарајућа тачка у почетној конфигурацији B_0 .

3.2 Деформациони градијент

Ако су дате тачке $X, Y \in B_0$, њима одговарајуће тачке у B_t ће бити $x = \chi(X, t)$ и $y = \chi(Y, t)$, редом (видети Сliku 3.2). Тада ће растојање између $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ бити одређено разликама координата

$$y_i - x_i = \chi_i(Y, t) - \chi_i(X, t).$$

Даље можемо апроксимирати функцију χ_i у тачки Y и посматрати само први



Слика 3.2: Деформациони градијент

члан у њеном развоју у Тејлоров полином:

$$\begin{aligned}\chi_i(Y, t) - \chi_i(X, t) &= \chi_i(X, t) + \sum_{A=1}^3 \frac{\partial \chi_i(X, t)}{\partial X_A} (Y_A - X_A) + \cdots - \chi_i(X, t) \\ &\approx \sum_{A=1}^3 \frac{\partial \chi_i(X, t)}{\partial X_A} (Y_A - X_A).\end{aligned}$$

Коефицијент

$$F = \frac{\partial \chi(X, t)}{\partial X},$$

који изражен по компонентама гласи

$$F = [F_{iA}]_{i,A=1}^3, \quad F_{iA}(X, t) = \frac{\partial \chi_i(X, t)}{\partial X_A},$$

називамо деформациони градијент јер нам он говори о промени растојања између тачака.

На овом месту ћемо увести допунски захтев физичког карактера, а то је да током кретања не долази до преклапања делова тела. Другим речима, ма које две различите тачке из почетне конфигурације B_0 не смеју бити пресликане у исту тачку тренутне конфигурације B_t . Да би се то обезбедило, функција кретања $\chi(X, t)$ мора да буде инјекција:

$$X, Y \in B_0, \quad X \neq Y \quad \Rightarrow \quad \chi(X, t) \neq \chi(Y, t).$$

Одатле следи да је $\chi(X, t)$ барем локално инвертибилна, односно да је F регуларна матрица, па имамо:

$$J = \det F \neq 0 \quad \forall X \in B_0, \quad \forall t \geq 0.$$

Други услов је да је функција кретања глатка, одакле имамо да је F најмање непрекидна, па како је у почетном тренутку

$$F(X, 0) = I,$$

односно

$$J(X, 0) = \det F(X, 0) = 1,$$

из услова $J \neq 0$ и непрекидности функције F добијамо

$$J(X, t) = \det F(X, t) > 0.$$

3.3 Теорема о поларној декомпозицији

Нека је S позитивно дефинитна матрица, чије су компоненте дате у односу на ортонормирану базу e_i . Тада постоји скуп ортонормираних вектора d_i тако

да S може бити дијагонализована са свим позитивним сопственим вредностима. Ако је R матрица ротације која трансформише e_i у $d_i = Re_i$, имамо

$$S = RS'R^T \quad S' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ сопствене вредности матрице S . Како су све оне позитивне можемо дефинисати матрицу

$$C' = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Очигледно је да је

$$C'^2 = S'.$$

Дефинишемо квадратни корен матрице S као позитивно дефинитну матрицу C дату са

$$C = RC'R^T.$$

Заиста,

$$C^2 = RC'R^T RC'R^T = RC'^2 R^T = RS'R^T = S.$$

У даљој анализи ће нам бити значајна следећа Лема.

Лема 3.1. Нека је матрица A дефинисана као $A = F^T F$, где је F регуларна матрица. Тада је матрица A симетрична и позитивно дефинитна.

Доказ. Матрица A је симетрична јер је

$$A^T = (F^T F)^T = F^T F = A.$$

Позитивно дефинитна је јер је:

$$Av \cdot v = (F^T F)v \cdot v = F^T(Fv) \cdot v = Fv \cdot Fv = (Fv)^2.$$

□

Формулишимо и докажимо сада Теорему о поларној декомпозицији.

Теорема 3.1. Нека је F матрица таква да је $\det F > 0$. Тада увек постоје јединствене матрице R , U , и V , такве да је R матрица ротације, U и V су позитивно дефинитне и важи:

$$F = RU = VR.$$

Доказ. На основу претходне леме, знамо да је матрица $S = F^T F$ симетрична и позитивно дефинитна. Она тада задовољава услове да матрицу U можемо дефинисати као

$$U^2 = S = F^T F.$$

Покажимо прво да је матрица R , таква да је $F = RU$, односно $R = FU^{-1}$, матрица ротације. Имамо

$$R^T R = (FU^{-1})^T FU^{-1} = U^{-1} F^T FU^{-1} = U^{-1} U^2 U^{-1} = I,$$

што значи да је матрица R ортогонална. Да би била матрица ротације мора важити $\det R = 1$. Из $R = FU^{-1}$ следи

$$\det R = \det(FU^{-1}) = \det F \det U^{-1} = \frac{\det F}{\det U}.$$

Како је $\det U^2 = \det(F^T F)$ имамо

$$(\det U)^2 = \det F^T \det F = (\det F)^2$$

односно

$$(\det U - \det F)(\det U + \det F) = 0,$$

одакле, како је $\det F, \det U > 0$ имамо

$$\det U = \det F$$

и коначно

$$\det R = \frac{\det F}{\det F} = 1.$$

Како је R ортогонална матрица, на основу Теореме 1.4 постоји матрица V таква да је $V = RUR^T$. Тада је V позитивно дефинитна матрица и имамо

$$VR = RUR^T R = RU = F.$$

Овим је Теорема доказана. □

Теорема о поларној декомпозицији је занимљива и са математичке и са механичке тачке гледишта. У математичком смислу, њен доказ је конструктиван: ако је задата матрица F , онда се једнозначно одређује најпре матрица U , затим R , а на крају V .

Са аспекта механике, поларном декомпозицијом се показује да се произвољна деформација добија као слагање издужења и ротације. Избор различите декомпозиције матрице F одређује редослед извршавања ротације и издужења. Покажимо ово.

Нека су λ и d сопствена вредност и њој одговарајући сопствени вектор матрице U , односно

$$Ud = \lambda d.$$

Множењем ове једнакости сдесна матрицом ротације R добијамо:

$$R(Ud) = \lambda Rd,$$

па је због асоцијативности

$$(RU)d = \lambda(Rd),$$

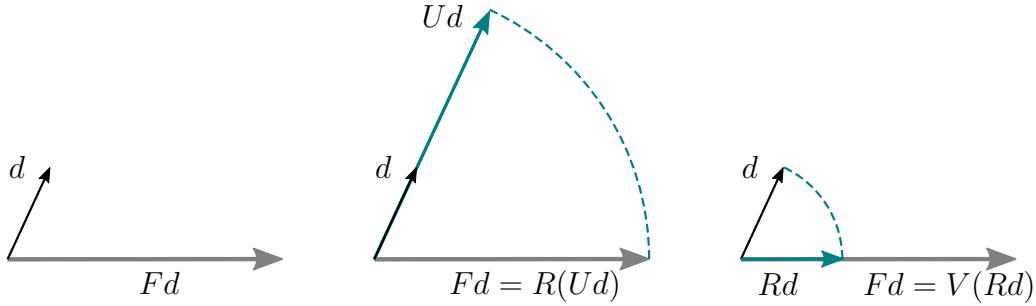
што је на основу претходне теореме еквивалентно

$$(VR)d = \lambda(Rd),$$

где коначно поновном применим закона асоцијативности добијамо

$$V(Rd) = \lambda(Rd),$$

то јест, λ је сопствена вредност и матрице V , а Rd њој одговарајући сопствени вектор.



Слика 3.3: Поларна декомпозиција

Посматрајмо сада прво дејство матрице F на вектор d разлагањем матрице F у облику $F = RU$. Имамо

$$\begin{aligned} Fd &= (RU)d \\ &= R(Ud) \\ &= R(\lambda d) \\ &= \lambda(Rd), \end{aligned}$$

одакле се јасно види да је прво дошло до издужења вектора d , а потом је извршена ротација вектора λd , да би се на крају добио вектор $\lambda(Rd)$.

С друге стране, уколико посматрамо декомпозицију матрице F као $F = VR$, тада имамо

$$\begin{aligned} Fd &= (VR)d \\ &= V(Rd) \\ &= \lambda(Rd), \end{aligned}$$

где можемо да закључимо да је прво извршена ротација вектора d , а затим издужење вектора Rd . На крају се добио исти резултат, вектор $\lambda(Rd)$. Ова примена поларне декомпозиције је илустрована на Слици 3.3.

Теорема о поларној декомпозицији се може посматрати и као матрично уопштење експоненцијалног облика комплексног броја. Ако је $z \in \mathbb{C}$, онда се он може приказати као $z = re^{i\theta}$, где је $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $i^2 = -1$, а $e^{i\theta}$ је модула 1. Такође, Теорема о поларној декомпозицији се може уопштити и на произвољне матрице, које не морају бити квадратне. Више се о овде наведеним аспектима може пронаћи у књизи [4].

3.4 Примери

У овом одељку ће бити анализирана два примера примене Теореме о поларној декомпозицији. Први ће се односити на издужење непрекидне средине, а други на чисто смицање.

3.4.1 Издужење

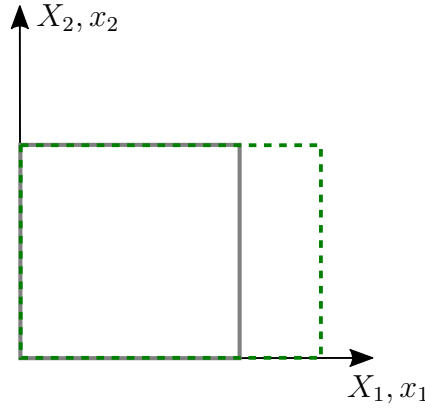
Хомогене деформације тела се дефинишу као:

$$x_i = \sum_{A=1}^3 F_{iA} X_A + k_i \quad i, A = 1, 2, 3 \quad F_{iA}, k_i \in \mathbb{R}.$$

Како је

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_A} = F_{iA} \in \mathbb{R},$$

деформациони градијент ће бити константна матрица.



Слика 3.4: Издужење тела

Издужење тела је деформација описана са:

$$x_1 = \alpha X_1 \quad x_2 = X_2 \quad x_3 = X_3,$$

где је $\alpha \in \mathbb{R}$, што је на Слици 3.4 илустровано за $\alpha > 1$. Тада имамо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} &= \alpha, \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} = \frac{\partial x_1}{\partial X_3} = \frac{\partial x_2}{\partial X_1} = \frac{\partial x_2}{\partial X_3} = \frac{\partial x_3}{\partial X_1} = \frac{\partial x_3}{\partial X_2} &= 0, \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_2} = \frac{\partial x_3}{\partial X_3} &= 1, \end{aligned}$$

односно

$$F = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Како је матрица F дијагонална, она је и симетрична, односно $F = F^T$. Да бисмо применили поларну декомпозицију, прво формирамо матрицу $S = F^T F = U^2$.

$$S = F^T F = F^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U^2.$$

Одавде лако закључујемо да је

$$U = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = F.$$

Сада конструишемо матрицу $R = FU^{-1}$:

$$R = FU^{-1} = FF^{-1} = I.$$

Коначно имамо

$$V = RUR^T = IUI^T = U.$$

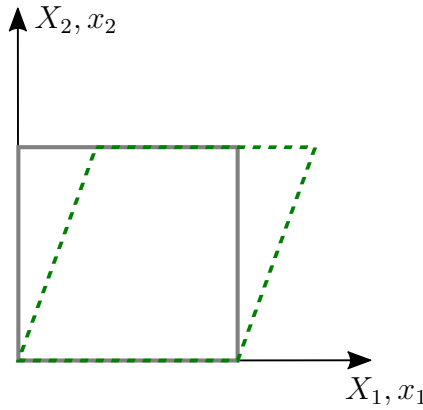
Како је матрица ротације јединична матрица, видимо да код издужења тела уопште не долази до ротације, односно, као што се види и из дефиниције ове деформације, померање се дешава само по једном правцу.

3.4.2 Чисто смицање

Сада ћемо погледати један мало сложенији пример хомогене деформације тела, познат као „чисто смицање”. Деформација је дата са:

$$x_1 = X_1 + \kappa X_2 \quad x_2 = X_2 \quad x_3 = X_3,$$

где $\kappa \in \mathbb{R}$, што је илустровано на Слици 3.5. Тада имамо:



Слика 3.5: Чисто смицање тела

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} &= \frac{\partial x_2}{\partial X_2} = \frac{\partial x_3}{\partial X_3} = 1, \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} &= \kappa, \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_3} &= \frac{\partial x_2}{\partial X_1} = \frac{\partial x_2}{\partial X_3} = \frac{\partial x_3}{\partial X_1} = \frac{\partial x_3}{\partial X_2} = 0, \end{aligned}$$

па је матрица F :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ради лакшег израчунавања, приказаћемо поларну декомпозицију матрице F у случају када је $\kappa = 1$, односно

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Први корак је одређивање матрице $S = F^T F$, где имамо

$$S = F^T F = F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Како S није дијагонална матрица, потребно је извршити дијагонализацију, односно спектралну декомпозицију користећи резултате Теореме 1.4. Карактеристични корени матрице S су:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ \lambda_3 &= 1, \end{aligned}$$

а карактеристични вектори који им одговарају:

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ e_2 &= \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ e_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ове векторе морамо нормирати, тако да добијемо матрицу Q чије колоне чине нормирани вектори v_1, v_2, v_3 , односно:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+1} & -\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+1} & 0 \\ \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+1} & \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Спектралном декомпозицијом матрице S , на основу Теореме 1.4, добијамо матрицу:

$$S' = Q^T S Q = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

односно матрицу U' такву да је $U'^2 = S'$:

$$U' = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сада коначно можемо да израчунамо матрицу U :

$$\begin{aligned} U &= Q U' Q^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{[\frac{\sqrt{5}-1}{2}]^2+1} & -\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{[\frac{\sqrt{5}+1}{2}]^2+1} & 0 \\ \frac{1}{[\frac{\sqrt{5}-1}{2}]^2+1} & \frac{1}{[\frac{\sqrt{5}+1}{2}]^2+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{[\frac{\sqrt{5}-1}{2}]^2+1} & \frac{1}{[\frac{\sqrt{5}-1}{2}]^2+1} & 0 \\ -\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{[\frac{\sqrt{5}+1}{2}]^2+1} & \frac{1}{[\frac{\sqrt{5}+1}{2}]^2+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{3\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Како тражимо декомпозицију $F = RU$, имамо:

$$\begin{aligned} R &= F U^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Множењем матрица се лако може потврдити да је R матрица ротације, односно да важи $RR^T = R^T R = I$. Коначно, како је $F = RU = VR$, добијамо:

$$\begin{aligned} V &= R U R^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{3\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

чиме смо завршили израчунавање свих матрица неопходних за поларну декомпозицију F . Множењем матрица се може проверити да заиста важи $F = RU = VR$.

Закључак

У овом раду обрађене су неке од декомпозиција матрица са њиховим применама у механици.

Први део се бави дијагонализацијом матрица, где су изложене и Жорданова и спектрална декомпозиција. У другом делу је описана њихова примена код малих осцилација механичких система са примерима. Трећи део се посебно бави поларном декомпозицијом и њеним применама у механици непрекидних средина, где су изложени и примери примене теореме о поларној декомпозицији.

Овај рад нам пружа увид да иза теорије о матрицама и њиховим декомпозицијама, које делују веома апстрактно, стоје врло интересантне примене са сликовитим примерима.

Литература

- [1] Z. Stojaković, I. Bošnjak, *Elementi linearne algebre*, Symbol, Novi Sad, 2010.
- [2] Lj. Cvetković, *Numela I*, FTN, Novi Sad, 2015.
- [3] J. Lu, *Matrix Decomposition and Applications*, arXiv:2201.00145
- [4] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [5] A. Bakša, S. Simić, *Racionalna mehanika*, PMF, Novi Sad, 2021.
- [6] N.M.J. Woodhose, *Introduction to Analytical Dynamics*, Springer-Verlag London, 2009.
- [7] M. Kojić, M. Mićunović, *Teorija oscilacija*, Naučna knjiga, Beograd, 1991.
- [8] J. Вуковић, А. Обрадовић, *Линеарне осцилације механичких система*, Машински факултет Београд, 2007.
- [9] T. Ruggeri, *Introduction to the Thermomechanics of Continua and Hyperbolic Systems*, Springer Nature, Cham, 2024.
- [10] M.E. Gurtin, E. Fried, L. Anand, *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

Биографија

Оливера Делибашић (рођ. Момчиловић) рођена је 13.12.1995. у Новом Саду. Основну школу "Соња Маринковић" завршава 2010. као носилац Вукове дипломе. Исте године завршава и основну музичку школу "Јосип Славенски" у Новом Саду, одсек клавир. Гимназију "Светозар Марковић" завршава 2014. са одличним успехом. Основне академске студије на Природно-математичком факултету, смер Дипломирани професор математике, уписује 2016. године. Пребацује се на интегрисане студије, смер Мастер професор математике, на истом факултету 2020. године. Положивши последњи испит у октобру 2024. године, стекла је право на одбрану овог рада. Мајка је два сина од десет и шест година.

**UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA
INFORMACIJA**

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materija

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Olivera Delibašić

AU

Mentor: dr Srboljub Simić

MN

Naslov rada: Dekompozicija matrica sa primenama u mehanici

NR

Jezik publikacije: srpski (ćirilica)

JP

Jezik izvoda: engleski

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2025.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Trg
Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (3/49/11/0/9/0/0)
(broj poglavlja/strana/lit citata/tabela/slika/grafika/priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Primenjena matematika

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Dekompozicija matrica, dijagonalizacija, spektralna
dekompozicija, polarna dekompozicija, male oscilacije, mehanika kontinuuma

PO

UDK

Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad

CU

Važna napomena:

VN

Izvod: U ovom radu obrađene su neke vrste dekompozicija matrica sa njihovim
primenama u mehanici. Prvi deo se bavi dijagonalizacijom matrica, gde su izložene
i Žordanova i spektralna dekompozicija. U drugom delu je opisana njihova primena
kod malih oscilacija mehaničkih sistema sa primerima. Treći deo se posebno bavi
polarnom dekompozicijom i njenim primenama u mehanici neprekidnih sredina, gde
su izloženi i primeri primene teoreme o polarnoj dekompoziciji.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 21. oktobar 2025.

DP

Datum odbrane: 27. novembar 2025.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Rozalija Madaras Silađi, redovni profesor, Prirodno-matematički

fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Ernest Šanca, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: dr Srboľjub Simić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION**

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Olivera Delibašić

AU

Mentor: Srboljub Simić, Ph.D.

MN

Title: Matrix decomposition with applications to mechanics

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2025.

PY

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (3/49/11/0/9/0/0)
(number of sections/pages/references/tables/pictures/graphs/appendices)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Applied Mathematics

SD

Subject/Key words: Matrix decomposition, eigenvalue decomposition, spectral decomposition, polar decomposition, small oscillations, continuum mechanics

SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics,
Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: The subject of this thesis is matrix decomposition with its applications to mechanics. Chapter 1 contains eigenvalue decomposition, along with Jordan decomposition and spectral decomposition. In Chapter 2 we analyze their applications to the analysis of small oscillations of mechanical systems with examples. Chapter 3 contains polar decomposition and its role in continuum mechanics, along with examples of application of the polar decomposition theorem.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 21 October 2025

ASB

Defended: 27 November 2025

DE

Thesis defend board:

DB

President: Rozália Madarász Szilágyi, PhD, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Ernest Šanca, PhD, assistant professor, Faculty of Sciences, University

of Novi Sad

Mentor: dr Srboljub Simić, PhD, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad