



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku



Stefan Miletić

Analiza broja čuvara u nekim varijantama problema umetničke galerije

Master rad

Mentor:
dr Ivica Bošnjak

2025, Novi Sad

Predgovor

Problem galerije predstavlja klasičan problem u oblasti geometrije koji se bavi određivanjem najmanjeg broja potrebnih čuvara za obezbeđivanje prostorijske galerije umetnosti koja ima n zidova. Motivacija istraživanja problema galerije zasnovana je na praktičnim potrebama za efikasnim sistemima nadzora u muzejima, galerijama i sličnim prostorima. Problem galerije doprinosi izučavanju teorije grafova i geometrije, povezujući svojstva poligona i grafova, kao i razvoju algoritama za optimizaciju.

U prvom delu rada predstavljeni su osnovni pojmovi iz teorije grafova i geometrije. Na samom početku definisani su osnovni pojmovi, a nakon toga uvodne leme i teoreme iz teorije grafova i geometrije koje su potrebne za nastavak rada.

U drugom delu rada predstavljeni su istorijski pregled, definicija i osnovni rezultati problema galerije. Posmatrana je sledeća postavka problema galerije: čuvari su postavljeni na pozicijama tako da je svaki deo galerije nadgledan od strane čuvara, zidovi galerije su standardni „pravi“ zidovi istih visina i domen pogleda čuvara je 360 stepeni. Kako je domen pogleda svakog čuvara 360 stepeni, ako je data prazna galerija, odnosno galerija koja ne sadrži predmete, problem galerije se posmatra kao geometrijski problem: za dati poligon odrediti minimalni pokrivajući skup tačaka poligona. Stranice poligona P predstavljaju zidove galerije i svaka tačka pokrivajućeg skupa poligona P predstavlja čuvara u problemu galerije. Ako je data neprazna galerija sa h objekata, na sličan način je posmatran problem galerije, kao geometrijski problem nad poligonom sa h rupa. Predstavljeni su Hvatalov i Fiskov dokaz: maksimalna vrednost kardinalnosti minimalnih pokrivajućih skupova tačaka svakog poligona sa n stranica jednaka je $\lfloor n/3 \rfloor$. Na sličan način, dokazano je da postoji pokrivajući skup tačaka za svaki poligon P sa n stranica i h rupa kardinalnosti $\lfloor (n + 2h)/3 \rfloor$. Ukoliko čuvar u problemu galerije može da se kreće između dva ugla prostorijske dovoljno brzo, tako da se smatra da je svaki deo prostorijske koji može da se vidi sa bilo kojeg mesta duž kretanja čuvara obezbeđen, ovakav tip čuvara nazivamo mobilan čuvar. Problem galerije sa mobilnim čuvarima posmatran je kao geometrijski problem: za dati poligon, odrediti minimalni pokrivajući skup (*kombinatornih*) duži sadržanih u datom poligonu čiji su krajevi temena poligona. Predstavljen je O'Rourke-ov dokaz da je maksimalna vrednost kardinalnosti minimalnih pokrivajućih skupova (*kombinatornih*) duži svakog poligona P sa n stranica jednaka $\lfloor n/4 \rfloor$. Na kraju drugog poglavlja predstavljen je O'Rourke-ov dokaz da je $\lceil n/2 \rceil$ čuvara uvek dovoljno a nekada i neophodno za obezbeđivanje spoljašnosti galerije koja ima n zidova.

Treći deo rada bavi se primenom pokazanih rezultata na primeru realne galerije, izvršavajući program napisan u *python* programskom jeziku, koji je sadržan u dodatku A.

Sadržaj

1	Osnovni pojmovi iz teorije grafova i geometrije	4
1.1	Osnovni pojmovi iz teorije grafova	4
1.2	Osnovni pojmovi i elementi poligona	14
1.2.1	Poligoni sa rupama	23
2	Problem galerije	25
2.1	Koreni i definicija problema galerije	25
2.2	Problemi prazne i neprazne galerije	28
2.2.1	Alati	28
2.2.2	Rezultati	37
2.3	Problem galerije sa mobilnim čuvarima	40
2.3.1	Definicije	40
2.3.2	Alati	40
2.3.3	Rezultati	48
2.4	Problem galerije nad praznom okolinom	49
2.4.1	Alati	49
2.4.2	Rezultati	49
3	Primeri	52
3.1	Početni primer nad četvorouglo	52
3.2	Primer realne galerije	53
4	Dodatak A	56
5	Zaključak	60

1 Osnovni pojmovi iz teorije grafova i geometrije

U prvom delu rada uvedeni su osnovni pojmovi iz oblasti teorije grafova i geometrije koji su neophodni za razumevanje nastavka rada. Definisani su grafovi i poligoni, kao i njihove važne karakteristike. Proučava se i povezanost između poligona i grafova, što omogućava rešavanje geometrijskih problema primenom tehnika iz teorije grafova.

1.1 Osnovni pojmovi iz teorije grafova

Definicija 1.1.1 ([2]). *Graf G je uređeni par $(V(G), E(G))$ gde:*

- $V(G)$ je konačan neprazan skup elemenata koje nazivamo **čvorovi**,
- $E(G)$ je konačan skup 2-elementnih podskupova skupa V koje nazivamo **grane**.

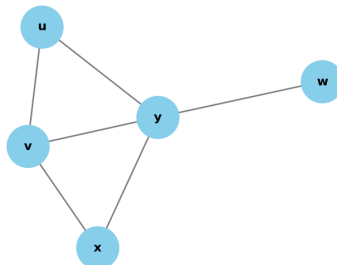
*Graf G nazivamo i **prost graf**.*

Granu $\{u, v\}$ skupa $E(G)$ gde su u i v čvorovi, označavamo sa uv ili vu . Za granu uv kažemo da povezuje čvor u sa čvorom v u grafu G . Čvorovi u i v su krajevi grane uv .

Graf G prikazujemo pomoću dijagrama gde je svaki čvor grafa G predstavljen tačkom, a linija između dve tačke postoji ako tačke predstavljaju čvorove koji su povezani u grafu G .

Primer 1.1.2. *Na dijagramu 1 prikazan je graf G sa:*

- skupom čvorova $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$,
- skupom grana $E(G) = \{uv, uy, vx, vy, wy, xy\}$.



Dijagram 1: Graf G

Definicija 1.1.3 ([2]). *Čvorovi u i v grane uv grafa G su **susedni čvorovi**. Kažemo da je u sused čvoru v . Skup suseda čvora v grafa G označavamo sa $N_G(v)$. Dve različite grane uv i vw grafa G koje imaju zajednički čvor v nazivamo **susednim granama**.*

Koristimo termin **incidentan** da opišemo pripadnost čvora grani grafa. U grafu G za čvor u kažemo da je incidentan grani uv . Slično, čvor v je incidentan grani uv .

Na dijagramu 1 možemo videti da su čvorovi u i v grafa G susedni, dok čvorovi u i x nisu susedni. Takođe, grane uv i vx su susedne grane grafa G jer je čvor v incidentan sa granama uv i vx . Grane vx i wy nisu susedne. Čvor v je incidentan grani uv i nije incidentan grani wy .

Definicija 1.1.4 ([2]). *Broj čvorova grafa G je **red grafa** G . Broj grana grafa G je **veličina grafa** G .*

Na dijagramu 1 prikazan je graf reda 5 i veličine 6.

Graf reda 1 nazivamo **trivijalan graf**, a graf reda 2 ili više nazivamo **netrivijalan graf**. Graf veličine 0 nazivamo **prazan graf**, a graf veličine 1 ili više nazivamo **neprazan graf**.

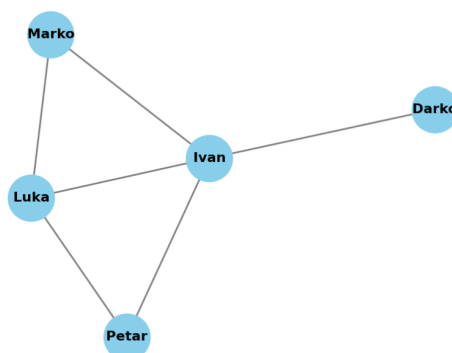
Primer 1.1.5. *Prikažemo poznanstva između 5 osoba pomoću grafa, gde:*

- Marko poznaje Ivana i Luku,
- Ivan poznaje Marka, Petra, Darka i Luku,
- Luka poznaje Marka, Ivana i Petra,
- Petar poznaje Ivana i Luku,
- Darko poznaje samo Ivana.

Osobe predstavljamo preko čvorova, a poznanstva preko grana grafa. Grana grafa povezuje dva čvora ukoliko dati čvorovi predstavljaju osobe koje se poznaju. Na dijagramu 2 prikazan je graf G_P sa:

- skupom čvorova $V(G_P) = \{\text{Marko}, \text{Ivan}, \text{Luka}, \text{Petar}, \text{Darko}\}$,
- skupom grana

$$\begin{aligned} E(G_P) &= \{\{\text{Marko}, \text{Ivan}\}, \{\text{Marko}, \text{Luka}\}, \\ &\quad \{\text{Ivan}, \text{Marko}\}, \{\text{Ivan}, \text{Petar}\}, \{\text{Ivan}, \text{Darko}\}, \{\text{Ivan}, \text{Luka}\}, \\ &\quad \{\text{Luka}, \text{Marko}\}, \{\text{Luka}, \text{Ivan}\}, \{\text{Luka}, \text{Petar}\}, \\ &\quad \{\text{Petar}, \text{Ivan}\}, \{\text{Petar}, \text{Luka}\}, \\ &\quad \{\text{Darko}, \text{Ivan}\}\} \\ &= \{\{\text{Ivan}, \text{Marko}\}, \{\text{Ivan}, \text{Petar}\}, \{\text{Ivan}, \text{Darko}\}, \{\text{Ivan}, \text{Luka}\}, \\ &\quad \{\text{Luka}, \text{Marko}\}, \{\text{Luka}, \text{Petar}\}\}. \end{aligned}$$



Dijagram 2: Graf G_P

Na sličan način možemo predstaviti bilo koji vid povezanosti među objektima putem grafa. Nakon toga pomoću tehnika iz teorije grafova možemo proučavati razne probleme.

Primetimo na dijagramu 1, ukoliko oznake u, v, x, y, w zamenimo redom imenima Marko, Luka, Petar, Ivan i Darko, dobijamo dijagram (poznanstva) iz primera 1.1.5.

Definicija 1.1.6 ([2]). *Stepen čvora v grafa G predstavlja broj suseda čvora v u grafu G .*

Stepen čvora v grafa G jednak je kardinalnosti skupa $N_G(v)$. Drugim rečima stepen čvora predstavlja broj grana sa kojima je incidentan čvor v . Označavamo ga sa $\deg_G(v)$ ili $\deg(v)$ ukoliko znamo da radimo sa grafom G . U odnosu na stepen čvora u grafu definišemo:

- **izolovan čvor** ukoliko je stepen čvora 0,
- **list ili viseći čvor** ukoliko je stepen čvora 1.

Definicija 1.1.7 ([2]). *Najveći stepen svih čvorova grafa G nazivamo **maksimalni stepen** grafa G i označavamo ga sa $\Delta(G)$. Najmanji stepen svih čvorova grafa G nazivamo **minimalni stepen** grafa G i označavamo ga sa $\delta(G)$.*

Za dati graf G reda n i proizvoljni čvor u grafa G važi

$$0 \leq \delta(G) \leq \deg(u) \leq \Delta(G) \leq n - 1$$

U grafu G koji je prikazan dijagramom 1, čvorovi su sledećeg stepena:

1. $\deg(w) = 1 = \delta(G)$,
2. $\deg(u) = \deg(x) = 2$,
3. $\deg(v) = 3$,
4. $\deg(y) = 4 = \Delta(G)$.

Čvor w predstavlja list, dok je čvor y povezan sa svim ostalim čvorovima, pa je stepena $n - 1$ u grafu G reda $n = 5$. Za dati graf G važi $\delta(G) = 1$ i $\Delta(G) = 4$. Graf G nema izolovanih čvorova.

Definicija 1.1.8 ([2]). *Za grafove G i H kažemo da imaju istu strukturu ako postoji bijektivna funkcija $\rho : V(G) \rightarrow V(H)$ za koju važi: dva čvora u i v grafa G su susedna u grafu G ako i samo ako su čvorovi $\rho(u)$ i $\rho(v)$ susedni u grafu H . Funkcija ρ je izomorfizam između grafova G i H i kažemo da je graf G izomorfan grafu H , u oznaci $G \cong H$.*

Ukoliko ne postoji funkcija ρ koja je izomorfizam između grafova G i H , tada kažemo za grafove G i H da su neizomorfni grafovi i označavamo $G \not\cong H$.

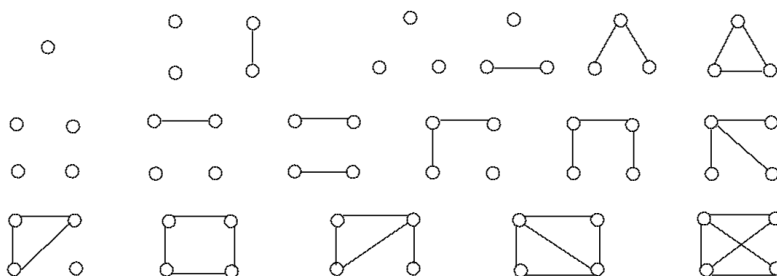
Za grafove G i G_P koji su predstavljeni u primerima 1.1.2 i 1.1.5, možemo definisati funkciju $\rho : V(G) \rightarrow V(G_P)$ koja je izomorfizam između grafova G i G_P , tako da:

- $\rho(u) = \text{Marko}$,
- $\rho(y) = \text{Ivan}$,

- $\rho(v) = \text{Luka}$,
- $\rho(x) = \text{Petar}$,
- $\rho(w) = \text{Darko}$.

Da li je ρ jedini izomorfizam između grafova G i G_P ? Kako Ivan poznaje sve ostale, definišemo $\rho(y) = \text{Ivan}$ jer $\deg_G(y) = \Delta(G)$. Slično kako Darko poznaje samo Ivana definišemo $\rho(w) = \text{Darko}$ jer $\deg_G(w) = 1$. Preostali čvorovi u, x i v su redom stepena 2, 2 i 3 pa definišemo i $\rho(v) = \text{Luka}$ jer samo Luka poznaje tačno 3 osobe. Sada preostaju čvorovi stepena 2. Kako Petar i Marko poznaju Luku i Ivana, zaključujemo da postoje dva izomorfizma između G i G_P , jedan koji smo definisali u prethodnoj listi i jedan gde definišemo $\rho(u) = \text{Petar}$ i $\rho(x) = \text{Marko}$.

Postoji samo jedan graf reda 1. Na dijagramu 3 možemo videti sve međusobno neizomorfne grafove reda 1, 2, 3 i 4.



Dijagram 3: Međusobno neizomorfni grafovi reda 1, 2, 3 i 4. [2]

Definicija 1.1.9 ([2]). Graf H je **podgraf** grafa G ako $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$. Podgraf H grafa G označavamo sa $H \subseteq G$ i kažemo da graf G sadrži podgraf H .

Za podgraf $H \subseteq G$, ako važi $V(H) = V(G)$ tada kažemo da je H **pokrivajući podgraf** grafa G . Ako $H \not\cong G$, tada je H **pravi podgraf** grafa G .

Primetimo da za $H \subseteq G$ važi:

1. $\Delta(H) \leq \Delta(G)$,
2. $\delta(H) \leq \delta(G)$.

Definicija 1.1.10 ([2]). Za graf G i $\emptyset \neq S \subseteq V(G)$ definišemo **podgraf indukovani čvorovima** skupa S u oznaci $G[S]$ gde:

- $V(G[S]) = S$,
- čvorovi $u, v \in V(G[S])$ su susedni u grafu $G[S]$ ako i samo ako su susedni u grafu G .

Definicija 1.1.11 ([2]). Za graf G i $\emptyset \neq T \subseteq E(G)$ definišemo **podgraf indukovani granama** skupa T u oznaci $G[T]$ gde:

- $E(G[T]) = T$,
- ako je čvor $u \in G$ incidentan sa granom iz skupa T tada $u \in V(G[T])$.

Za graf G važi:

- $G[V(G)] = G$,
- $G[E(G)] = G$ ako i samo ako G nema izolovanih čvorova.

Definicija 1.1.12 (Uklanjanje čvora ili grane iz grafa [2]). Za čvor u i granu e grafa G definišemo:

- graf $G - u$ koji je indukovani podgraf $G[V(G) \setminus \{u\}]$ grafa G ,
- graf $G - e$ koji je pokrivajući podgraf grafa G sa skupom grana $E(G - e) = E(G) \setminus \{e\}$.

Definicija 1.1.13 (Uklanjanje skupa čvorova ili grana iz grafa [2]). Za podskup U skupa čvorova i podskup T skupa grana grafa G definišemo:

- graf $G - U$ koji je indukovani podgraf $G[V(G) \setminus U]$ grafa G ,
- graf $G - T$ koji je pokrivajući podgraf grafa G sa skupom grana $E(G - T) = E(G) \setminus T$.

Definicija 1.1.14 ([2]). **Unija** grafova $G_1, G_2, \dots, G_n$ je graf G sa:

1. skupom čvorova: $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) \cup \dots \cup V(G_n)$,
2. skupom grana: $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \dots \cup E(G_n)$.

Definicija 1.1.15 ([2]). Graf reda $n \geq 2$ i veličine $n - 1$, čiji su čvorovi označeni $u_1, u_2, \dots, u_n$ gde između čvorova u_i i u_{i+1} postoji grana za $i = 1, 2, \dots, n - 1$, nazivamo **put** između čvorova u_1 i u_n . Označavamo ga sa P_n ili $P_n(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Čvorove u_1 i u_n grafa P_n redom nazivamo početak i kraj puta P_n . Za put P_n kažemo da je dužine $n - 1$ i da povezuje čvorove u_1 i u_n .

Primitimo da čvorovi u_1 i u_n koji su početak i kraj puta P_n , su stepena 1 u grafu P_n .

Definicija 1.1.16 ([2]). Za podgraf P grafa G koji predstavlja put najvećeg reda, kažemo da je **najduži put u grafu G** .

Definicija 1.1.17 ([2]). Graf reda $n \geq 3$ i veličine n , čiji su čvorovi označeni $u_1, u_2, \dots, u_n$ gde između čvorova u_i i u_{i+1} postoji grana za $i = 1, 2, \dots, n - 1$, kao i grana između čvorova u_n i u_1 , nazivamo **kontura** i označavamo sa C_n ili $C_n(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Za konturu C_n kažemo da je dužine n .

Definicija 1.1.18 ([2]). Ako za svaka dva čvora u i v netrivijskog grafa G postoji podgraf P_i grafa G koji je put gde je u početak, a v kraj puta P_i , tada graf G nazivamo **povezan graf**.

Definicija 1.1.19 ([2]). Netrivijsalan graf koji nije povezan nazivamo **nepovezan graf**.

Definicija 1.1.20 ([2]). Graf koji ne sadrži podgraf koji predstavlja konturu nazivamo **aciklični graf**.

Definicija 1.1.21 ([2]). Graf koji je povezan i acikličan nazivamo **stablo**.

Definicija 1.1.22 ([2]). Za graf G kažemo da je **regularan** ako su stepeni čvorova grafa G jednaki. Graf G je **k -regularan** ako je stepen svakog čvora grafa G jednak k .

Drugim rečima, ako u grafu G svaki čvor ima isti broj suseda kažemo za graf G da je regularan. U regularnim grafovima važi $\delta(G) = \Delta(G)$.

Definicija 1.1.23 ([2]). *Komplement $\overline{G}$ grafa G je graf sa:*

- skupom čvorova $V(\overline{G}) = V(G)$,
- skupom grana $E(\overline{G}) = \{uv | u, v \in V(G), uv \notin E(G)\}$.

Komplement $\overline{G}$ grafa G je graf sa skupom čvorova $V(G)$ tako da su dva čvora susedna u $\overline{G}$ ako i samo ako nisu susedna u G . Prema definiciji izomorfnosti grafova 1.1.8 za proizvoljne grafove G i H posledično sledi, $G \cong H$ ako i samo ako $\overline{G} \cong \overline{H}$.

Definicija 1.1.24 ([2]). *Kompletnan graf K_n je $(n - 1)$ -regularan graf reda n .*

U grafu K_n svaki čvor je sused svakog drugog čvora pa je $\overline{K_n}$ prazan graf reda n .

Definicija 1.1.25 ([1]). *Žordanova kriva u ravni je slika obostrano-jednoznačnog i obostrano-neprekidnog preslikavanja kružnice. Ovakvu krivu nazivamo **prosta zatvorena kriva**.*

Definicija 1.1.26. *Žordanov luk (ili samo luk) u ravni je slika obostrano-jednoznačnog i obostrano-neprekidnog preslikavanja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ovakvu krivu nazivamo i **prosta otvorena kriva**. Tačke $\gamma(0)$ i $\gamma(1)$ su krajnje tačke luka. Tačke $\{\gamma(x) : 0 < x < 1\}$ su unutrašnje tačke luka.*

Definicija 1.1.27 ([5]). *Dva različita luka α, α' su **unutrašnje disjunktni** ako su im skupovi unutrašnjih tačaka disjunktni.*

Definicija 1.1.28 ([5]). *Predstavljanje grafa G u ravni nazivamo **planarno predstavljanje** ako:*

1. čvorove predstavljamo tačkama,
2. između dve tačke postoji luk ako tačke predstavljaju susedne čvorove u grafu G ,
3. svaka dva različita luka su unutrašnje disjunktni.

Definicija 1.1.29 ([5]). *Ako graf G možemo planarno predstaviti tada graf G nazivamo **planaran graf**.*

Žordanova teorema tvrdi da svaka prosta zatvorena kriva $\mathcal{K}$ deli ravan na dva skupa koja nazivamo **oblastima** ([1], [5]). Ove oblasti imaju sledeće osobine:

1. Svake dve tačke iz iste oblasti mogu biti povezane prostom otvorenom krivom koja u potpunosti leži unutar te oblasti i ne seče krivu $\mathcal{K}$.
2. Svaka prosta otvorena kriva koja povezuje dve tačke iz različitih oblasti preseca krivu $\mathcal{K}$ u bar jednoj tački.

Jedna oblast je ograničena, a druga je neograničena. Ograničenu oblast nazivamo unutrašnjost posmatrane krive, dok neograničenu oblast nazivamo spoljašnost posmatrane krive ([5], str. 176). Sledeće dve teoreme navedene su bez dokaza. Čitaoca upućujemo na rad *Kombinatorna geometrija* ([1]), odeljak 1.2.

Teorema 1.1.30 (Žordanova teorema [1]). *Prosta zatvorena kriva deli skup tačaka ravni bez tačaka same krive na tačno dve oblasti.*

Teorema 1.1.31 ([1]). Ako su O_1 i O_2 redom ograničena i neograničena oblast određene prostom zatvorenom krivom $\mathcal{K}$ i $\mathcal{F} = \mathcal{K} \cup O_1$ je ograničena dvodimenzionalna figura određena krivom $\mathcal{K}$ tada je

$$Bd(\mathcal{F}) = \mathcal{K}, In(\mathcal{F}) = O_1, Ex(\mathcal{F}) = O_2$$

Definicija 1.1.32. Predstavljanje grafa G u ravni nazivamo **planarno predstavljanje sa pravim linijama** ako:

1. čvorove predstavljamo tačkama,
2. između dve tačke postoji duž ako tačke predstavljaju susedne čvorove u grafu G ,
3. svake dve različite duži su unutrašnje disjunktne.

Definicija 1.1.33 ([2]). Izolovan čvor grafa G ili povezan podgraf H grafa G koji nije pravi podgraf nekog povezanog podgraфа grafa G , predstavlja **komponentu** grafa G .

Postulat 1.1.34. Dva čvora pripadaju različitim komponentama grafa ako i samo ako ne postoji put koji ih povezuje u grafu.

Definicija 1.1.35 ([2]). Za graf G **bojenje čvorova grafa** predstavlja definisanje funkcije bojenja $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ koja dodeljuje svakom čvoru prirodan broj.

Definicija 1.1.36 ([2]). **Pravilno bojenje čvorova grafa** G je bojenje čvorova grafa G sa funkcijom bojenja c gde za dva susedna čvora u i v grafa G važi $c(u) \neq c(v)$.

Drugim rečima, pravilno bojenje čvorova grafa G je dodeljivanje brojeva iz skupa $\mathbb{N}$ čvorovima grafa G , tako da dva susedna čvora grafa G nemaju isti dodeljeni broj. Označimo sa C skup dodeljenih brojeva u bojenju čvorova grafa G funkcijom bojenja c . Skup C nazivamo **skup dodeljenih boja** i element skupa C nazivamo **boja**.

Pravilno bojenje čvorova grafa G sa skupom dodeljenih boja kardinalnosti k nazivamo **k -bojenje** grafa G . Za graf G kažemo da je **k -oboјiv** ako postoji m -bojenje grafa G gde je $m \leq k$.

U nastavku rada posmatraćemo pravilna bojenja čvorova grafova i njih ćemo nazivati samo bojenje čvorova grafova.

Neka je dato k -bojenje grafa G gde je $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ skup dodeljenih boja. Skup $V_i \subseteq V(G)$ gde $1 \leq i \leq k$, nazivamo **klasom bojenja** c_i , ako sadrži sve čvorove grafa G kojima je dodeljena boja c_i i ne sadrži ostale čvorove.

Definicija 1.1.37 ([2]). Najmanji broj k za koji je graf G k -oboјiv nazivamo **hromatski broj** grafa G i označavamo sa $\chi(G)$.

Za graf G sa hromatskim brojem k kažemo da je **k -hromatski**.

Primetimo neke karakteristike hromatskog broja grafa za $n, k \geq 1$:

1. k -hromatski graf je k -oboјiv i nije $(k - 1)$ -oboјiv,
2. graf je k -oboјiv ako i samo ako $\chi(G) \leq k$,
3. za graf reda n važi $1 \leq \chi(G) \leq n$,
4. $\chi(K_n) = n$,
5. $\chi(\overline{K_n}) = 1$,

6. $\chi(P_1) = 1$ i $\chi(P_{k+1}) = 2$,
7. $\chi(C_{2k}) = 2$ i $\chi(C_{2k+1}) = 3$,
8. $C_{2k+1} \subseteq G$ ako i samo ako $\chi(G) \geq 3$,
9. ako $K_k \subseteq G$ tada $\chi(G) \geq k$.

Definicija 1.1.38 ([2]). Podgraf grafa G koji je kompletan nazivamo **klika** grafa G .

Definicija 1.1.39 ([2]). Red klike H grafa G najvećeg reda, nazivamo **red klike** grafa G i označavamo sa $\omega(G)$.

Teorema 1.1.40 ([2]). Ako su dva grafa G i H izomorfna tada imaju isti red i veličinu, dok je familija stepena čvorova grafa G jednaka familiji stepena čvorova grafa H .

Dokaz. Prema definiciji izomorfности grafova 1.1.8, G i H imaju isti red, veličinu i postoji bijektivna funkcija $\rho : V(G) \rightarrow V(H)$. Neka je u proizvoljan čvor grafa G i $\deg_G(u) = k$. Tada važi da čvor u ima k suseda $u_1, u_2, \dots, u_k$ u grafu G . Kako je ρ izomorfizam koji očuvava susede, važi da su susedi čvora $\rho(u)$ u grafu H tačno čvorovi $\rho(u_1), \rho(u_2), \dots, \rho(u_k)$. Sledi $\deg_H(\rho(u)) = k$. $\square$

Prema dokazu teoreme 1.1.40 dolazimo do zaključka da izomorfizam između dva grafa G i H , preslikava svaki čvor grafa G u čvor istog stepena grafa H .

Lema 1.1.41. Svako stablo ima barem dva lista.

Dokaz. U stablu reda 2 postoje dva lista. Posmatrajmo stablo T reda $n \geq 3$. Stablo T sadrži barem jedan list l_1 jer u suprotnom sadrži konturu što je u kontradikciji sa definicijom stabla. Neka je P najduži put koji počinje čvorom l_1 u stablu T . Pretpostavimo suprotno, da je čvor l_2 koji predstavlja kraj puta P stepena većeg od 1 u stablu T . Tada put P nije najduži put u stablu T jer stablo T ne sadrži konture. Kontradikcija, sledi pronašli smo dva različita lista l_1 i l_2 stabla T . $\square$

Lema 1.1.42. Svako stablo G reda n je veličine $m = n - 1$.

Dokaz. Pokazujemo indukcijom po redu stabla G .

Indukcijska baza: Za $n = 2$ graf G je put reda 2 i dužine $m = n - 1$. Sledi tvrđenje.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrđenje važi za svako stablo koje ima barem dva čvora, a najviše $n - 1$ čvorova.

Indukcijski korak: Neka je G stablo sa n čvorova. Neka je čvor u list u grafu G koji je incidentan sa granom e . Posmatramo graf $G - e$ koji predstavlja stablo reda $n - 1$. Prema indukcijskoj pretpostavici graf $G - e$ ima $n - 2$ grane. Sledi graf G ima $n - 1$ granu. $\square$

Lema 1.1.43 ([5]). Neka je G planaran povezan graf reda n i veličine m . Ako graf G ima r oblasti tada važi:

$$n - m + r = 2$$

Dokaz. Pokazujemo indukcijom po veličini grafa G .

Indukcijska baza: Za $m = 1$ važi $G = P_2$. Graf P_2 je reda 2 i ima 1 oblast (spoljašnu oblast). Sledi tvrđenje.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki povezan graf koji ima barem jednu granu i najviše $m - 1$ grana.

Indukcijski korak: Posmatramo slučajeve:

- (a) G je stablo veličine $m = n - 1$. Graf G ima 1 oblast. Sledi $n - m + r = n - (n - 1) + 1 = 2$.
- (b) G nije stablo. Kako je G povezan i nije stablo sledi, postoji kontura u grafu G i grana e koja pripada konturi. Grana e sadržana je u dve oblasti grafa G . Posmatramo graf $G - e$ koji je reda n i veličine $m - 1$. Graf $G - e$ ima $r - 1$ oblast. Prema indukcijskoj pretpostavci važi $n - (m - 1) + (r - 1) = 2$, odnosno $n - m + r = 2$.

□

Teorema 1.1.44 ([5]). *U svakom planarnom predstavljanju planarnog povezanog grafa G postoji isti broj oblasti.*

Dokaz. Posledica leme 1.1.43.

□

Teorema 1.1.45 ([2]). *Ako $H \subseteq G$ tada $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Dokaz. Neka je $\chi(G) = k$, tada postoji k -bojenje grafa G . Ako su dva čvora susedna u podgrafu $H \subseteq G$, ona su susedna i u grafu G . Sledi, H je k -obojev, odnosno $\chi(H) \leq k = \chi(G)$.

□

Lema 1.1.46 ([2]). *Za graf G važi $\omega(G) \leq \chi(G)$.*

Dokaz. Prema teoremi 1.1.45 sledi tvrđenje.

□

Teorema 1.1.47 ([2]). *Za graf G važi $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$.*

Dokaz. Pokazujemo indukcijom po broju čvorova grafa G . Neka je $|V(G)| = n$.

Indukcijska baza: Za $n = 1$ važi $\Delta(G) = 0$ i $\chi(G) = 1$.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki netrivialan graf koji ima manje od n čvorova.

Indukcijski korak:

- Neka je v proizvoljan čvor grafa G .
- Neka je G' graf $G - v$ reda $n - 1$.
- Prema indukcijskoj pretpostavci važi $\chi(G') \leq 1 + \Delta(G')$. Sledi graf G' je $(1 + \Delta(G'))$ -obojev.
- Kako važi $\Delta(G') \leq \Delta(G)$ jer je G' podgraf grafa G , sledi graf G' je $(1 + \Delta(G))$ -obojev sa skupom dodeljenih boja C .

- Primitimo $\deg_G(v) \leq \Delta(G) < \Delta(G) + 1$. Na osnovu zapažanja $\deg_G(v) < \Delta(G) + 1$, postojaće boja h koju možemo dodeliti čvoru v u bojenju čvorova grafa G tako da je skup dodeljenih boja $C \cup \{h\}$ kardinalnosti ne veće od $\Delta(G) + 1$.
- Graf G je $(\Delta(G) + 1)$ -obojiv, sledi $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$.

□

Primer 1.1.48. Funkciju bojenja c za bojenje čvorova grafa $C_{2k}(v_1, v_2, \dots, v_{2k})$ definišemo

$$c(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } i \text{ neparno} \\ 2 & \text{ako je } i \text{ parno} \end{cases}$$

Primer 1.1.49. Funkciju bojenja c za bojenje čvorova grafa $C_{2k+1}(v_1, v_2, \dots, v_{2k+1})$ definišemo

$$c(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } i \text{ neparno, gde } 1 \leq i < 2k + 1 \\ 2 & \text{ako je } i \text{ parno} \\ 3 & \text{ako je } i = 2k + 1 \end{cases}$$

1.2 Osnovni pojmovi i elementi poligona

Definicija 1.2.1. Dve duži koje imaju tačno jednu zajedničku krajnju tačku su *nadovezane duži*.

Definicija 1.2.2. Tri tačke koje se ne nalaze na istoj pravi su *nekolinearne tačke*.

Definicija 1.2.3. Za skup tačaka $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ u ravni kažemo da je *skup međusobno nekolinearnih tačaka* ako su svake tri različite tačke iz skupa $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ nekolinearne.

Definicija 1.2.4. *Izlomljena linija* $I(p_1, p_2, \dots, p_n)$ gde $n \geq 3$, je kolekcija nadovezanih duži sa krajevima iz skupa tačaka $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ tako da važi:

- tačka p_2 je zajednička tačka nadovezanih duži p_1p_2 i p_2p_3 i tačke p_1, p_2, p_3 su nekolinearne,
- ...
- tačka p_{n-1} je zajednička tačka nadovezanih duži $p_{n-2}p_{n-1}$ i $p_{n-1}p_n$ i tačke p_{n-2}, p_{n-1}, p_n su nekolinearne.

Nadovezane duži na osnovu kojih definišemo izlomljenu liniju nazivamo *stranicama izlomljene linije* i njihove krajnje tačke nazivamo *temenima izlomljene linije*. Izlomljena linija $I(p_1, p_2, \dots, p_n)$ je *otvorena* ako ne sadrži duž p_1p_n , a *zatvorena* ako sadrži duž p_1p_n i tačke p_{n-1}, p_n, p_1 su nekolinearne.

Definicija 1.2.5. Dva temena stranice izlomljene linije nazivamo *susednim temenima* izlomljene linije.

Definicija 1.2.6. Dve stranice $p_{u_1}p_{u_2}$ i $p_{u_2}p_{u_3}$ izlomljene linije $I(p_1, p_2, \dots, p_n)$, nazivamo *susednim stranicama* izlomljene linije $I(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ako tačka p_{u_1} nije jednaka tački p_{u_3} .

Definicija 1.2.7. Za temena p_i, p_j i p_k izlomljene linije $I(p_1, p_2, \dots, p_n)$ kažemo da su *tri uzastopna temena* izlomljene linije $I(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ako temena p_i, p_j i p_k predstavljaju temena dve susedne stranice izlomljene linije $I(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Definicija 1.2.8. Za temena $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}$ gde $m \geq 3$, izlomljene linije $I(p_1, p_2, \dots, p_n)$, kažemo da su *uzastopna temena* izlomljene linije $I(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ako su $p_{i_k}, p_{i_{k+1}}$ i $p_{i_{k+2}}$ tri uzastopna temena za svako $1 \leq k \leq m - 2$.

Definicija 1.2.9. Za kolekciju temena p_k izlomljene linije $I(p_1, p_2, \dots, p_n)$ gde $k \equiv_m 0$, kažemo da je *kolekcija svakog m-tog temena* izlomljene linije $I(p_1, p_2, \dots, p_n)$ gde je $2 \leq m \leq n$.

Definicija 1.2.10. Tačku u kojoj se seku dve ili više različitih stranica izlomljene linije i koja nije zajedničko teme susednih stranica, nazivamo *tačkom samopresecanja* izlomljene linije.

Definicija 1.2.11. Zatvorenu izlomljenu liniju u ravni bez tačaka samopresecanja, nazivamo *mnogougonom linijom*.

Definicija 1.2.12. Skup tačaka dela ravni koju čini unutrašnja oblast određena mnogougonom linijom l , čija temena su međusobno različita, zajedno sa mnogougonom linijom l nazivamo *mnogougao* ili *poligon* P . Mnogougona linija l je *mnogougona linija poligona* P .

Definicija 1.2.13. *Temena poligona P su temena mnogougone linije poligona P . Stranice poligona P su stranice mnougone linije poligona P .*

Primetimo, poligon sadrži barem tri temena. Poligon sa tri temena nazivamo trougao, sa četiri temena četvorougao i tako dalje.

Definicija 1.2.14. *Dva temena poligona P su susedna temena poligona ako su temena stranice poligona P .*

Definicija 1.2.15. *Dve stranice poligona P su susedne stranice poligona ako su susedne stranice mnogougone linije poligona P .*

Definicija 1.2.16. *Tačke poligona P koje ne pripadaju mnogougonoj liniji poligona P nazivamo unutrašnje tačke poligona P .*

Definicija 1.2.17. *Skup svih tačaka ravni koje ne pripadaju poligonu P nazivamo spoljašnost poligona P .*

Definicija 1.2.18. *Za poligon H kažemo da je sadržan u poligonu P ako poligon P sadrži sve tačke poligona H . Označavamo sa $H \subseteq P$.*

Definicija 1.2.19. *Za dva različita poligona kažemo da su stranično nadovezana ako imaju zajedničku stranicu i disjunktno su unutrašnjosti.*

Definicija 1.2.20. *Duž koja povezuje dva nesusedna temena poligona P nazivamo dijagonalom poligona P .*

Definicija 1.2.21. *Dijagonalu poligona P koja je sadržana u poligonu P nazivamo unutrašnjom dijagonalom poligona P .*

Definicija 1.2.22. *Za tačku x poligona P kažemo da vidi tačku y poligona P ako $xy \subseteq P$.*

Definicija 1.2.23. *Za tačku x poligona P definišemo domen pogleda tačke x kao skup tačaka poligona P koje tačka x vidi.*

Definicija 1.2.24 ([1]). *Za skup tačaka u ravni kažemo da je konveksan ako za proizvoljne dve tačke tog skupa važi da cela duž koja ih povezuje pripada tom skupu.*

Definicija 1.2.25. *Ako svaka tačka poligona P vidi svaku drugu tačku poligona P tada za poligon P kažemo da je konveksan.*

Definicija 1.2.26 ([1]). *Konveksni pokrivač proizvoljnog nepraznog skupa A je najmanji konveksan skup koji sadrži skup A .*

Definicija 1.2.27. Za poligon P sa skupom temena $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ definišemo **konveksni omotač** kao najmanji konveksni poligon H koji:

1. sadrži poligon P ,
2. sadrži duži između svaka dva temena iz skupa $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$,
3. temena poligona H su temena poligona P .

Definicija 1.2.28. Za skup tačaka $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ poligona P kažemo da **pokriva poligon P** ako je unija domena pogleda svih tačaka skupa $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ jednaka skupu tačaka poligona P . Tada za poligon P kažemo da je **pokriven** skupom tačaka $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ koji nazivamo **pokrivajući skup tačaka poligona P** .

Definicija 1.2.29. Pokrivajući skup tačaka poligona P najmanje kardinalnosti nazivamo **minimalni pokrivajući skup tačaka poligona P** .

Definicija 1.2.30. Pokrivajući skup tačaka $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ poligona P nazivamo **pokrivajući skup nad temenima poligona P** , ako sve tačke skupa $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ su temena poligona P .

Definicija 1.2.31. Kažemo da je za poligon P **dovoljno k čuvara nad temenima** ako postoji pokrivajući skup nad temenima poligona P koji je kardinalnosti ne veće od k .

Definicija 1.2.32. Kažemo da je za poligon P **neophodno k čuvara nad temenima** ako kardinalnost svakog pokrivajućeg skupa nad temenima poligona P nije manja od k .

Definicija 1.2.33. Za tačku x poligona P kažemo da **nije pokrivena** skupom tačaka $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ poligona P ako tačka x ne pripada uniji domena pogleda svih tačaka skupa $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Definicija 1.2.34. Za duž ab koja je sadržana u poligonu P kažemo da **vidi** tačku y poligona P ako postoji tačka x koja pripada duži ab tako da $xy \subseteq P$.

Definicija 1.2.35. Za duž ab poligona P definišemo **domen pogleda duži** kao skup tačaka poligona P koje duž ab vidi.

Definicija 1.2.36. Za skup duži $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sadržanih u poligonu P kažemo da **pokriva poligon P** , ako je unija domena pogleda svih duži skupa $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ jednaka skupu tačaka poligona P .

Definicija 1.2.37. Ako skup duži $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ poligona P pokriva poligon P tada kažemo za poligon P da je **pokriven** skupom duži $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Definicija 1.2.38. Skup duži $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ poligona P koji pokriva poligon P nazivamo **pokrivajući skup duži poligona P** .

Definicija 1.2.39. Duž koja predstavlja unutrašnju dijagonalu ili stranicu poligona nazivamo **kombinatorna duž poligona** ([6], str. 82).

Definicija 1.2.40. Skup kombinatornih duži $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ poligona P koji pokriva poligon P nazivamo **pokrivajući skup kombinatornih duži**.

Definicija 1.2.41. Kažemo da je za poligon P **dovoljno k kombinatornih duži** ako postoji pokrivajući skup kombinatornih duži poligona P koji je kardinalnosti ne veće od k .

Definicija 1.2.42. Kažemo da je za poligon P **neophodno** k **kombinatornih duži** ako kardinalnost svakog pokrivajućeg skupa kombinatornih duži poligona P nije manja od k .

Definicija 1.2.43. Pokrivajući skup kombinatornih duži poligona P najmanje kardinalnosti nazivamo **minimalni pokrivajući skup kombinatornih duži** poligona P .

Definicija 1.2.44. Za tačku x poligona P kažemo da **nije pokrivena** skupom duži $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ poligona P ako tačka x ne pripada uniji domena pogleda svih duži skupa $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Definicija 1.2.45. Za podskup $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ skupa temena poligona P kažemo da **pokriva spoljašnost** poligona P ako za svaku tačku x spoljašnosti poligona P postoji p_i iz skupa $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ tako da su sve unutrašnje tačke duži xp_i sadržane u spoljašnosti poligona P .

Definicija 1.2.46. Ako podskup $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ skupa temena poligona P pokriva spoljašnost poligona P tada kažemo za spoljašnost poligona P da je **pokrivena** skupom tačaka $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$.

Definicija 1.2.47. Podskup $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ skupa temena poligona P koji pokriva spoljašnost poligona P nazivamo **pokrivajući skup spoljašnosti** poligona P .

Definicija 1.2.48. Pokrivajući skup spoljašnosti poligona P najmanje kardinalnosti nazivamo **minimalni pokrivajući skup spoljašnosti** poligona P .

Definicija 1.2.49. Ugao α koji formiraju dve susedne stranice ab i bc poligona P gde za svaku unutrašnju tačku x_1 duži ab i svaku unutrašnju tačku x_2 duži bc postoji izlomljena linija $I(x_1, \dots, x_2)$ čije stranice pripadaju uglu α i poligonu P , nazivamo **unutrašnji ugao** poligona P .

Definicija 1.2.50. Za poligon P sa barem 4 temena kažemo da sadrži **uvo** ako postoje tri uzastopna temena p_1, p_2 i p_3 poligona P tako da je trougao T sa temenima p_1, p_2 i p_3 sadržan u poligonu P . Trougao T je **uvo** poligona P .

Definicija 1.2.51. Za dva trougla kažemo da su **nepreklapajuća** ako su po unutrašnjosti disjunktne.

Definicija 1.2.52. Za skup $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ duži kažemo da je **skup zajedničkih stranica** poligona iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ ako:

1. svaki poligon P_i iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ ima zajedničku stranicu koja pripada skupu $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ sa poligonom P_j iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ za neko $j \neq i$,
2. svaka stranica iz skupa $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ je zajednička stranica dva različita poligona iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

Definicija 1.2.53. Poligon H je **slepljivanje** poligona iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ ako:

1. skup stranica poligona H je razlika skupa stranica poligona $P_1, P_2, \dots, P_n$ i skupa zajedničkih stranica poligona $P_1, P_2, \dots, P_n$,
2. svaki poligon P_i iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ je stranično nadovezan sa nekim poligonom P_j iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ za neko $j \neq i$,
3. unija skupova tačaka poligona $P_1, P_2, \dots, P_n$ jednaka je skupu tačaka poligona H ,
4. svaka dva poligona iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ su po unutrašnjosti disjunktna.

Za skup poligona $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ kažemo da je **skup slepljivanja poligona H** .

Definicija 1.2.54. Neka $P' = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ predstavlja skup slepljivanja poligona P . Tada za P' kažemo da je **particija** poligona P sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

Definicija 1.2.55. Za dijagonalu d poligona P kažemo da **deli poligon P** na skup poligona D gde svaki poligon ima stranicu d , ako postoji particija poligona P sa skupom delova D .

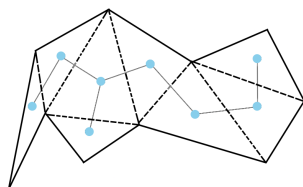
Definicija 1.2.56. Particija poligona P sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ gde je svaki poligon iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ trougao, je **triangulacija poligona P** sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

Definicija 1.2.57. Za teme x poligona P kažemo da je **centar triangulacije** poligona P ako postoji triangulacija poligona P sa skupom delova $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ tako da je x teme svakog trougla $T_1, T_2, \dots, T_n$.

Definicija 1.2.58. Za skup temena $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ poligona P kažemo da je **centralizator triangulacije** ako postoji particija poligona P sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ gde je svaka tačka skupa $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ centar triangulacije tačno jednog poligona iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

Definicija 1.2.59. Ako postoji triangulacija poligona P sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, **slabi dualni graf** poligona P je graf G_P gde:

- trouglove iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ predstavljamo preko čvorova,
- grana grafa povezuje dva čvora ukoliko dati čvorovi predstavljaju trouglove koji imaju zajedničku stranicu.



Dijagram 4: Slabi dualni graf poligona

Definicija 1.2.60. Ako postoji triangulacija poligona P sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, **dualni graf nad temenima** poligona P je graf G_P^t gde:

- temena poligona P predstavljamo preko čvorova,
- grana grafa povezuje dva čvora ukoliko dati čvorovi predstavljaju temena stranice trougla iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

Za G_P^t kažemo da je **dualni graf nad temenima poligona P sa skupom delova** $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

Lema 1.2.61. Slabi dualni graf G_P i dualni graf nad temenima G_P^t poligona P su povezani grafovi.

Dokaz. Posmatramo prvo dualni graf nad temenima G_P^t i pretpostavimo suprotno da G_P^t nije povezan. Sledi, postoje dva različita čvora u i v grafa G_P^t za koje ne postoji put koji ih povezuje u grafu G_P^t . Kako u i v predstavljaju različita temena poligona dolazimo do kontradikcije. Sada posmatramo slabi dualni graf G_P . Pretpostavimo suprotno da G_P nije povezan. Sledi, postoje dva različita čvora u i v grafa G_P za koje ne postoji put u grafu G_P koji ih povezuje. Neka čvor u pripada komponenti U grafa G_P i predstavlja trougao sa temenima u_1, u_2, u_3 , a čvor v pripada različitoj komponenti V grafa G_P i predstavlja trougao sa temenima v_1, v_2, v_3 . Kako za čvorove iz različitih komponenti ne postoji put u grafu, a $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ predstavljaju temena poligona, dolazimo do kontradikcije. □

Lema 1.2.62 ([6]). Slabi dualni graf G_P poligona P je stablo i važi $\Delta(G_P) \leq 3$.

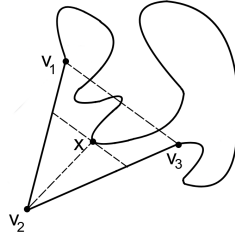
Dokaz. Kako svaki trougao ima tri stranice, svaki čvor u grafu G_P biće stepena najviše 3. Pretpostavimo sada da graf G_P nije stablo. Kako je G_P povezan, a nije stablo, sledi da graf G_P sadrži konturu C , odnosno postoji teme poligona P koje je unutrašnja tačka poligona P što je u kontradikciji sa definicijom poligona. □

Lema 1.2.63. Svaki poligon P sa barem 4 temena sadrži unutrašnju dijagonalu.

Dokaz.

1. Neka su v_1, v_2 i v_3 tri uzastopna temena poligona P , gde je v_1v_3 dijagonala poligona P .
2. Posmatramo duž v_1v_3 i u odnosu na sadržanost u poligonu P posmatramo slučajeve:
 - (a) Ako je duž v_1v_3 sadržana u poligonu P , tada je v_1v_3 unutrašnja dijagonala.
 - (b) Ako duž v_1v_3 ne pripada poligonu P (slika 5), neka je x teme poligona P koje:
 - * pripada pravi koja je paralelna sa pravom v_1v_3 koja ima najmanju udaljenost od tačke v_2 ,
 - * nalazi se sa iste strane prave v_1v_3 kao teme v_2 .

Tada je v_2x unutrašnja dijagonala. □



Slika 5: Dijagonala $d = v_2x$

Lema 1.2.64. *Svaka unutrašnja dijagonala poligona P koji ima barem 4 temena, deli poligon P na tačno 2 poligona.*

Lema 1.2.65 (Postojanje triangulacije poligona [6]). *Za poligon P sa n temena postoji triangulacija sa skupom delova kardinalnosti $n - 2$.*

Dokaz. Pokazujemo indukcijom po broju temena poligona P . Neka poligon P sadrži n temena.

Indukcijska baza: Za $n = 3$ tvrđenje važi.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki poligon koji ima više od 3, a manje od n temena.

Indukcijski korak:

- Prema lemi 1.2.63 i lemi 1.2.64 postoji dijagonala uv poligona P koja deli poligon P na poligone P_1 i P_2 koji imaju manje od n temena. Označimo sa n_1 i n_2 redom broj temena poligona P_1 i P_2 . Važi $n_1 + n_2 = n + 2$ jer oba poligona P_1 i P_2 sadrže temena u i v .
- Prema indukcijskoj pretpostavici postoji triangulacija poligona P_1 sa skupom delova T_{P_1} kardinalnosti $n_1 - 2$ i triangulacija poligona P_2 sa skupom delova T_{P_2} kardinalnosti $n_2 - 2$. Triangulacija poligona P_1 i P_2 sa skupovima delova T_{P_1} i T_{P_2} predstavlja triangulaciju poligona P sa skupom delova $T_{P_1} \cup T_{P_2}$. Kako važi $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = n - 2$, sledi postoji triangulacija poligona P sa skupom delova kardinalnosti $n - 2$.

□

Posledica 1.2.66. *Zbir svih unutrašnjih uglova poligona sa n temena je $(n - 2)\pi$.*

Dokaz. Prema lemi 1.2.65 zbir svih unutrašnjih uglova je $(n - 2)\pi$.

□

Lema 1.2.67. *Svaki poligon sadrži unutrašnji ugao koji je manji od opruženog ugla.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno da postoji poligon čiji je svaki unutrašnji ugao jednak ili veći od opruženog ugla. Tada je zbir svih unutrašnjih uglova barem $n \cdot \pi$, što je u kontradikciji sa posledicom 1.2.66.

□

Lema 1.2.68. *Za svaki poligon P postoji slabi dualni graf G_P i dualni graf nad temenima G_P^t .*

Dokaz. Prema lemi 1.2.65 postoji triangulacija poligona P sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Prema definiciji postoje slabi dualni graf G_P i dualni graf nad temenima G_P^t poligona P . $\square$

Lema 1.2.69. *U svakom slabom dualnom grafu G_P poligona P , list grafa G_P je uvo poligona P .*

Dokaz. Kako je slabi dualni graf G_P stablo (lema 1.2.62), prema lemi 1.1.41 graf G_P sadrži list l_1 za koji važi $\deg_{G_P}(l_1) = 1$. Neka su u_1, u_2 i u_x temena trougla koji list l_1 predstavlja, gde su u_1 i u_2 susedna temena poligona P . Pretpostavimo suprotno da temena u_1, u_2 i u_x nisu uzastopna temena poligona P . Primetimo, duži u_1u_x i u_2u_x su unutrašnje dijagonale poligona P . Prema lemi 1.2.64 duži u_1u_x i u_2u_x redom dele poligon P na po 2 poligona. Sledi $\deg_{G_P}(l_1) \geq 2$, kontradikcija. $\square$

Lema 1.2.70. *Svaki poligon P sa barem 4 temena sadrži barem dva nepreklapajuća uva.*

Dokaz. Prema lemi 1.2.68 postoji slabi dualan graf G_P poligona P . Kako je slabi dualni graf G_P stablo, prema lemi 1.1.41 graf G_P sadrži dva različita lista l_1 i l_2 . Prema lemi 1.2.69 listovi l_1 i l_2 predstavljaju dva različita uva T_1 i T_2 poligona P . Prema definiciji slabog dualnog grafa, trouglovi T_1 i T_2 su dva nepreklapajuća uva poligona P . $\square$

Lema 1.2.71. *Neka je P poligon sa barem 4 temena. Za svaku triangulaciju poligona P sa skupom delova T' postoji trougao koji pripada skupu T' i koji predstavlja uvo poligona P .*

Dokaz. Prema definiciji 1.2.59 postoji slabi dualni graf G_P sa skupom delova T' . Kako je slabi dualni graf G_P stablo (lema 1.2.62), prema lemi 1.1.41 graf G_P sadrži list l_1 koji je uvo. $\square$

Lema 1.2.72. *Slabi dualni graf G_P poligona P je 2-obojev.*

Dokaz. Pokazujemo indukcijom po broju čvorova grafa G_P . Neka je $|V(G_P)| = n$.

Indukcijska baza: Za $n = 1$, G_P je 2-obojev.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki slabi dualni graf koji ima manje od n čvorova.

Indukcijski korak:

- Prema lemi 1.1.41, graf G_P sadrži list v .
- Neka je G' graf $G_P - v$ reda $n - 1$.
- Prema lemi 1.2.69 čvor v grafa G_P predstavlja uvo poligona P . Sledi graf G' je slabi dualni graf.
- Prema indukcijskoj pretpostavci graf G' je 2-obojev sa skupom dodeljenih boja C .
- Na osnovu zapažanja $\deg_{G_P}(v) = 1$ postojaće boja h koju možemo dodeliti čvoru v u bojenju čvorova grafa G_P tako da je skup dodeljenih boja $C \cup \{h\}$ kardinalnosti ne veće od 2. Sledi graf G_P je 2-obojev.

$\square$

Lema 1.2.73. *Ako je G_P^t dualni graf nad temenima poligona P tada je $\chi(G_P^t) \geq 3$.*

Dokaz. Prema definiciji dualnog grafa nad temenima važi $\chi(G_P^t) \geq 3$. □

Lema 1.2.74. *Ako je G_P^t dualni graf nad temenima poligona P tada je $\chi(G_P^t) \leq 3$.*

Dokaz. Pokazujemo indukcijom prema broju čvorova grafa G_P^t . Neka je $|V(G_P^t)| = n$.

Indukcijska baza: Za $n = 3$, dualni graf nad temenima G_P^t je graf sa 3 čvora, sledi $\chi(G_P^t) \leq 3$.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki dualni graf nad temenima koji ima barem 3 čvora, a manje od n čvorova.

Indukcijski korak:

- Neka je G_P^t dualni graf nad temenima poligona P sa skupom delova K .
- Prema lemi 1.2.71 skup delova K sadrži trougao P_1 koji je *uvo* poligona P .
- Neka su u_1, u_2 i u_3 temena trougla P_1 , gde je $u_1 u_3$ unutrašnja dijagonala poligona P . Neka su u'_1, u'_2 i u'_3 čvorovi grafa G_P^t koji predstavljaju redom temena u_1, u_2 i u_3 . Primetimo $\deg_{G_P^t}(u'_2) = 2$.
- Posmatramo dualni graf nad temenima $G_P^{t'} = G_P^t - u'_2$.
- Kako je dualni graf nad temenima $G_P^{t'}$ graf reda $n - 1$ prema indukcijskoj pretpostavci važi $\chi(G_P^{t'}) \leq 3$.
- Znamo da je $G_P^{t'}$ podgraf grafa G_P^t 3-obojev sa skupom dodeljenih boja C kardinalnosti ne veće od 3.
- Na osnovu zapažanja da je čvor u'_2 u grafu G_P^t stepena 2, postojaće boja h koju možemo dodeliti čvoru u'_2 u bojenju čvorova grafa G_P^t tako da je skup dodeljenih boja $C \cup \{h\}$ kardinalnosti ne veće od 3.
- Sledi $\chi(G_P^t) \leq 3$.

□

Lema 1.2.75. *Za G_P^t dualni graf nad temenima poligona P važi $\chi(G_P^t) = 3$.*

Dokaz. Prema lemapa 1.2.73 i 1.2.74, sledi tvrđenje. □

1.2.1 Poligoni sa rupama

Definicija 1.2.76. Skup H nazivamo **poligon sa rupama** $P_1, P_2, \dots, P_n$, ako predstavlja skup tačaka dela ravni koju čini unutrašnja oblast određena mnogougaonom linijom l , čija temena su međusobno različita, zajedno sa mnogougaonom linijom l , bez unije skupova svih unutrašnjih tačaka poligona $P_1, P_2, \dots, P_n$ gde:

1. $P_1, P_2, \dots, P_n$ su poligoni čije su tačke sadržane u unutrašnjoj oblasti koja je određena mnogougaonom linijom l ,
2. svaka dva poligona iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ su disjunktna.

Temena poligona sa rupama su temena mnogougaone linije l i temena poligona $P_1, P_2, \dots, P_n$. **Stranice poligona sa rupama** su stranice mnogougaone linije l i stranice poligona $P_1, P_2, \dots, P_n$. Poligone $P_1, P_2, \dots, P_n$ nazivamo **rupe**. Dva temena poligona sa rupama su **susedna** ako su susedna temena nekog poligona $P_1, P_2, \dots, P_n$ ili mnogougaone linije l . Dve stranice poligona sa rupama su **susedne** ako su susedne stranice nekog poligona $P_1, P_2, \dots, P_n$ ili mnogougaone linije l . Za temena p_i, p_j i p_k poligona sa rupama P kažemo da su **tri uzastopna temena** ako su tri uzastopna temena nekog od poligona $P_1, P_2, \dots, P_n$ ili mnogougaone linije l .

Definicija 1.2.77. Duž koja povezuje dva nesusedna temena poligona sa rupama P nazivamo **dijagonalom** poligona sa rupama P .

Definicija 1.2.78. Dijagonalu poligona sa rupama P koja je sadržana u poligonu sa rupama P nazivamo **unutrašnjom dijagonalom** poligona sa rupama P .

Definicija 1.2.79. Skup svih tačaka ravni koje ne pripadaju poligonu sa rupama P i ne pripadaju rupama poligona sa rupama P nazivamo **spoljašnost poligona sa rupama** P .

Definicija 1.2.80. Ugao α koji formiraju dve susedne stranice ab i bc poligona sa rupama P gde za svaku unutrašnju tačku x_1 duži ab i svaku unutrašnju tačku x_2 duži bc postoji izlomljena linija $I(x_1, \dots, x_2)$ čije stranice pripadaju uglu α i poligonu sa rupama P , nazivamo **unutrašnji ugao** poligona sa rupama P .

Definicija 1.2.81. Za tačku x poligona sa rupama P kažemo da **vidi** tačku y poligona sa rupama P ako je duž xy sadržana u poligonu sa rupama P .

Definicija 1.2.82. Za tačku x poligona sa rupama P definišemo **domen pogleda tačke** x kao skup tačaka poligona sa rupama P koje tačka x vidi.

Definicija 1.2.83. Za skup tačaka $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ poligona sa rupama P kažemo da **pokriva** poligon sa rupama P ako je unija domena pogleda svih tačaka skupa $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ jednaka skupu tačaka poligona sa rupama P . Tada za poligon sa rupama P kažemo da je **pokriven** skupom tačaka $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ koji nazivamo **pokrivajući skup tačaka** poligona sa rupama P .

Definicija 1.2.84. Poligon sa rupama H je **slepljivanje** poligona iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ ako:

1. skup stranica poligona sa rupama H je razlika skupa stranica poligona $P_1, P_2, \dots, P_n$ i skupa zajedničkih stranica poligona $P_1, P_2, \dots, P_n$,

2. svaki poligon P_i iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ je stranično nadovezan sa nekim poligonom P_j iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ za neko $j \neq i$,
3. unija skupova tačaka poligona $P_1, P_2, \dots, P_n$ je jednaka skupu tačaka poligona sa rupama H ,
4. svaka dva poligona iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ su po unutrašnjosti disjunktna.

Za skup poligona $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ kažemo da je **skup slepljivanja** poligona sa rupama H .

Definicija 1.2.85. Neka je $P' = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ skup slepljivanja poligona sa rupama P . Tada za P' kažemo da je **particija** poligona sa rupama P sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

Definicija 1.2.86. Za dijagonalu d poligona sa rupama P kažemo da **deli** poligon sa rupama P na poligone ili poligone sa rupama P_1 i P_2 koji imaju stranicu d ako postoji:

- particija P_1 i P_2 redom sa skupovima delova P_1^t i P_2^t ,
- particija poligona sa rupama P sa skupom delova P^t gde su $P^t = P_1^t \cup P_2^t$, $|P^t| = |P_1^t| + |P_2^t|$ i $P_1^t \cap P_2^t = \emptyset$.

Definicija 1.2.87. Particija poligona sa rupama P sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ gde je svaki poligon iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ trougao, je **triangulacija poligona sa rupama** P sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

Definicija 1.2.88. Ako postoji triangulacija poligona sa rupama P sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, **dualni graf nad temenima** poligona sa rupama P je graf G_P^t gde:

- temena poligona sa rupama P predstavljamo preko čvorova,
- grana grafa povezuje dva čvora ukoliko dati čvorovi predstavljaju temena stranice trougla iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

Za G_P^t kažemo da je **dualni graf nad temenima poligona sa rupama** P sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

Definicija 1.2.89. Ako postoji triangulacija poligona sa rupama P sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, **slabi dualni graf** poligona sa rupama P je graf G_P gde:

- trouglove iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ predstavljamo preko čvorova,
- grana grafa povezuje dva čvora ukoliko dati čvorovi predstavljaju trouglove koji imaju zajedničku stranicu.

Definicija 1.2.90. Za tačku x poligona sa rupama P kažemo da **vidi stranicu** e poligona sa rupama P ako svaka duž, koja ima jedan kraj x i drugi kraj koji pripada stranici e , je sadržana u poligonu sa rupama P .

Definicija 1.2.91. Za teme x poligona sa rupama P koje vidi stranicu e poligona sa rupama P definišemo **skup domena pogleda temena** x **prema stranici** e kao skup tačaka duži koje imaju jedan kraj x i drugi kraj koji pripada stranici e .

Lema 1.2.92. Svaki poligon sa rupama sadrži unutrašnji ugao koji je manji od opruženog ugla čije teme ne pripada rupi.

Dokaz. Sledi iz leme 1.2.67. □

2 Problem galerije

2.1 Koreni i definicija problema galerije

- Viktor Kle (1925 - 2007.) bio je američki matematičar i profesor na Univerzitetu Vašington u Sijetlu (SAD). Njegove uže oblasti istraživanja bile su teorija skupova, funkcionalna analiza, analiza algoritama, optimizacija i kombinatorika. Napisao je više od 240 istraživačkih radova. Pored problema galerije, koji ćemo uskoro opisati i istraživati, postavio je i ostale probleme među kojima je i Kleov problem mere iz 1977. godine: za datu kolekciju intervala na realnoj osi, koliko brzo možemo pronaći dužinu unije datih intervala?
- Stiv Fisk (1946 - 2010.) bio je američki matematičar poznat po svom radu u kombinatorici i teoriji grafova. Nakon što je u srednjoj školi dobio stipendiju Westinghouse Science Talent Search, pohađao je Univerzitet Kalifornije u Berkliju (SAD). Doktorske studije završava 1972. godine na Univerzitetu Harvard u Kembridžu, najstarijem univerzitetu u SAD. Godine 1977. pridružio se fakultetu na Bowdoin koledžu u Mejnu (SAD), gde je bio cenjen profesor. Njegove uže matematičke oblasti istraživanja su diskretna matematika, teorija grafova, geometrijska kombinatorika i analiza algoritama. Jedan od njegovih najpoznatijih doprinosa je elegantan dokaz problema galerije.
- Vašek Hvatal rođen je 1946. godine u Pragu, gde je završio studije matematike na Karlovom univerzitetu, jednom od najstarijih evropskih univerziteta. Doktorske studije završava na Univerzitetu Vaterloa, Ontario (Kanada). Trenutno je profesor emeritus na Univerzitetu Konkordija u Montrealu (Kanada). Njegove uže oblasti istraživanja su teorija grafova, kombinatorika i optimizacija.
- Joseph O'Rourke je američki profesor i istraživač u oblasti računarstva, poznat po svom radu na geometrijskim algoritmima. Godine 1988. pridružio se fakultetu na Smith koledžu u Northamptonu (SAD). O'Rourke je poznat po svojim knjigama i publikacijama koje su postale ključni resursi za istraživače i studente u oblasti geometrije. Poznat je i po knjizi "Art Gallery Theorems and Algorithms" iz 1987. godine ([6]).

Viktor Kle postavio je problem galerije 1973. godine.

Problem 2.1.1 (Problem galerije, Viktor Kle, 1973 [6]). *Odrediti najmanji broj potrebnih čuvara za obezbeđivanje prostorije galerije umetnosti koja ima n zidova.*

U ovom radu posmatramo sledeću postavku problema galerije:

1. čuvare postavljamo na pozicijama tako da je svaki deo galerije nadgledan od strane čuvara,
2. zidovi galerije su standardni "pravi" zidovi istih visina,
3. domen pogleda čuvara je 360 stepeni.

Kako je domen pogleda svakog čuvara 360 stepeni, ako je data prazna prostorija, odnosno prostorija koja ne sadrži predmete, tada problem galerije za datu prostoriju možemo posmatrati kao geometrijski problem: za dati poligon P , odrediti minimalni pokrivaјуći skup tačaka poligona P . Stranice poligona P predstavljaju zidove

prostorije i svaka tačka pokrivajućeg skupa poligona P predstavlja čuvara u problemu galerije.

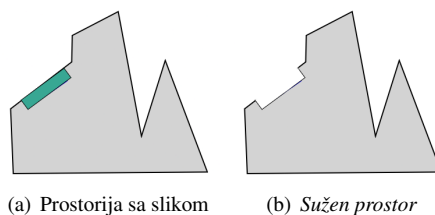
Problem galerije nad praznom prostorijom nazivaćemo *problem prazne galerije*. Kasnije 1975. Hvatall je dao odgovor na problem prazne galerije.

Teorema 2.1.2 (Problem prazne galerije, Hvatall, 1975 [6]). $\lfloor n/3 \rfloor$ čuvara je uvek dovoljno a nekada i neophodno za obezbeđivanje prostorije galerije umetnosti koja ima n zidova.

Problem 2.1.3 (Problem prazne galerije - definisan preko poligona [6]). Neka je $G(P)$ kardinalnost minimalnog pokrivajućeg skupa poligona P sa n stranica i neka je $g(n)$ maksimalna vrednost $G(P')$ nad svim poligonima P' sa n stranica. Odrediti $g(n)$.

Teorema 2.1.4 (Problem prazne galerije, Hvatall, 1975 - definisan preko poligona [6]). Maksimalna vrednost kardinalnosti minimalnih pokrivajućih skupova svakog poligona P sa n temena jednaka je $\lfloor n/3 \rfloor$. Drugim rečima, $g(n) = \lfloor n/3 \rfloor$ gde je g oznaka iz problema 2.1.3.

Ukoliko u prostoriji postoje samo objekti za koje pretpostavljamo da su *beskonačno* malo udaljeni od zida, tada prostoriju posmatramo kao *sužen prostor* - prostor bez tih objekata.



Posmatraćemo i prostorije u kojima se nalazi h objekata za koje pretpostavljamo da imaju oblik prave prizme, visine iste kao zidovi prostorije, koji nisu *beskonačno* malo udaljeni od zidova. Problem galerije nad prostorijom koja nije prazna nazivaćemo *problem neprazne galerije*.

Teorema 2.1.5 (Problem neprazne galerije, O'Rourke [6]). $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor$ čuvara je uvek dovoljno za obezbeđivanje prostorije galerije umetnosti koja ima n zidova i ukupno h objekata.

Ako je data prostorija u problemu galerije u kojoj se nalazi h objekata, tada problem galerije za datu prostoriju možemo posmatrati kao geometrijski problem: za dati poligon sa rupama P odrediti minimalni pokrivajući skup tačaka ako P ima h rupa. Svaka tačka pokrivajućeg skupa predstavlja čuvara i rupe predstavljaju objekte koji se nalaze u prostoriji.

Teorema 2.1.6 (Problem neprazne galerije, O'Rourke - definisan preko poligona sa rupama [6]). Za dati poligon sa rupama P koji ima n temena i h rupa, postoji pokrivajući skup tačaka kardinalnosti ne veće od $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor$.

Pretpostavimo da čuvar u problemu galerije može da se kreće između dva ugla prostorije dovoljno brzo tako da smatramo da je svaki deo prostorije koji može da se vidi sa bilo kojeg mesta duž kretanja čuvara obezbeđen. Ovakav tip čuvara nazivamo

mobilan čuvar. Problem galerije sa mobilnim čuvarima posmatramo kao geometrijski problem: za dati poligon P , odrediti minimalni pokrivajući skup *kombinatornih duži*¹. Stranice poligona P predstavljaju zidove prostorije i svaka duž iz pokrivajućeg skupa predstavlja mobilnog čuvara. Problem galerije sa mobilnim čuvarima nad praznom prostorijom nazivaćemo *problem prazne galerije sa mobilnim čuvarima*.

Teorema 2.1.7 (Problem prazne galerije sa mobilnim čuvarima, O'Rourke [6]). $\lfloor n/4 \rfloor$ mobilnih čuvara je uvek dovoljno a nekada i neophodno za obezbeđivanje prostorije u problemu prazne galerije sa mobilnim čuvarima.

Problem 2.1.8 (Problem prazne galerije sa mobilnim čuvarima - definisan preko poligona [6]). Neka je $G(P)$ kardinalnost minimalnog pokrivajućeg skupa kombinatornih duži poligona P sa n stranica i neka je $g(n)$ maksimalna vrednost $G(P')$ nad svim poligonima P' sa n stranica. Odrediti $g(n)$.

Teorema 2.1.9 (Problem prazne galerije sa mobilnim čuvarima, O'Rourke - definisan preko poligona [6]). Maksimalna vrednost kardinalnosti minimalnih pokrivajućih skupova kombinatornih duži svakog poligona P sa n temena jednaka je $\lfloor n/4 \rfloor$. Drugim rečima, $g(n) = \lfloor n/4 \rfloor$ gde je g oznaka iz problema 2.1.8.

Da li možemo i spoljašnost prostorije da obezbedimo? Ako posmatramo spoljašnost prostorije u problemu galerije za koju pretpostavljamo da je prazna tada problem galerije za datu prostoriju nazivamo *problem galerije nad praznom okolinom*.

Teorema 2.1.10 (Problem galerije nad praznom okolinom, O'Rourke i Wood, 1983 [6]). $\lceil n/2 \rceil$ čuvara je uvek dovoljno a nekada i neophodno za obezbeđivanje spoljašnosti prostorije galerije umetnosti koja ima n zidova.

Problem 2.1.11 (Problem galerije nad praznom okolinom - definisan preko poligona [6]). Neka je $G(P)$ kardinalnost minimalnog pokrivajućeg skupa spoljašnosti poligona P sa n stranica i neka je $g(n)$ maksimalna vrednost $G(P')$ nad svim poligonima P' sa n stranica. Odrediti $g(n)$.

Teorema 2.1.12 (Problem galerije nad praznom okolinom, O'Rourke i Wood - definisan preko poligona [6]). Maksimalna vrednost kardinalnosti minimalnih pokrivajućih skupova spoljašnosti svakog poligona P sa n temena jednaka je $\lceil n/2 \rceil$. Drugim rečima, $g(n) = \lceil n/2 \rceil$ gde je g oznaka iz problema 2.1.11.

¹Definicija 1.2.39

2.2 Problemi prazne i neprazne galerije

U ovom odeljku proučava se razlika između nadgledanja prostora koji nema objekte (prazne galerije) i prostora koji ima objekte (neprazne galerije).

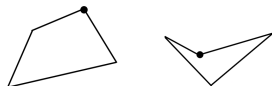
2.2.1 Alati

Primer 2.2.1 ([6]). *Posmatrajmo početne primere problema prazne galerije definisane nad poligonima sa malim brojem stranica:*

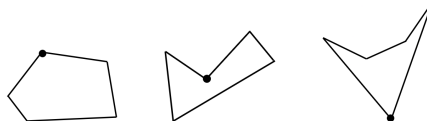
- Za pokrivanje prikazanog trougla dovoljan je pokrivaјуći skup tačaka kardinalnosti 1.



- Za pokrivanje prikazanih četvorouglova dovoljni su pokrivaјуći skupovi tačaka kardinalnosti 1.



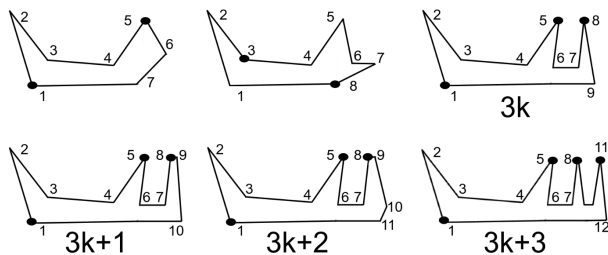
- Za pokrivanje prikazanih petouglova dovoljni su pokrivaјуći skupovi tačaka kardinalnosti 1.



- Za pokrivanje prikazanih šestouglova neophodni su pokrivaјуći skupovi tačaka kardinalnosti 2.



Primetimo na sličan način za svako $n \geq 7$ možemo konstruisati primer poligona sa n temena (čevalj) za koji je neophodan skup tačaka kardinalnosti $\lfloor n/3 \rfloor$ za pokrivanje.



Iz primera 2.2.1 primećujemo da je $g(n) \geq \lfloor n/3 \rfloor$ gde je g oznaka iz problema 2.1.3 i n broj stranica poligona, pa smo već pokazali da je *nekada neophodan* skup tačaka kardinalnosti $\lfloor n/3 \rfloor$ za pokrivanje poligona sa n stranica.

Lema 2.2.2 ([6]). *Ako poligon P ima $n \geq 6$ temena, za svaku triangulaciju poligona P sa skupom delova $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ postoji unutrašnja dijagonala d koja deli poligon P na poligone P_1 i P_2 od kojih barem jedan ima tačno 4, 5 ili 6 zajedničkih stranica sa poligonom P , gde je dijagonala d stranica trougla iz skupa $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$.*

Dokaz.

1. Na osnovu lema 1.2.70 i 1.2.71 u poligonu P postoji dijagonala d koja deli poligon P na dva poligona P_1 i P_2 gde:

- P_1 je uvo poligona P i sadržan je u skupu $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$,
- P_2 ima barem 4 zajedničke stranice sa poligonom P i postoji triangulacija poligona P_2 sa skupom delova $\{T_1, T_2, \dots, T_m\} \setminus \{P_1\}$,
- dijagonala d je stranica trougla iz skupa $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$.

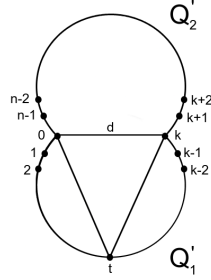
2. Neka je $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ skup unutrašnjih dijagonala poligona P za koji važi da svaki element d_i , za $1 \leq i \leq k$, deli poligon P na poligone F_1^i i F_2^i tako da:

- poligon F_1^i ima barem 4 zajedničke stranice sa poligonom P ,
- dijagonala d_i je stranica trougla iz skupa $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$.

Neka je $\mathcal{F}$ skup poligona $\{F_1^1, F_1^2, \dots, F_1^k\}$, a $\mathcal{F}'$ familija skupova poligona $\{\{F_1^1, F_2^1\}, \dots, \{F_1^k, F_2^k\}\}$.

3. Neka je F poligon skupa $\mathcal{F}$ koji ima najmanje stranica.
4. Neka je $\{Q_1, Q_2\}$ element familije $\mathcal{F}'$ gde je poligon Q_1 jednak poligonu F ili poligon Q_2 jednak poligonu F .
5. Označimo sa Q'_1 poligon među poligonima Q_1 i Q_2 koji je jednak poligonu F .
6. Označimo sa Q'_2 poligon među poligonima Q_1 i Q_2 koji nije jednak poligonu F .
7. Neka je $k+1$ broj temena poligona Q'_1 . Važi $k \geq 4$. Označimo redom $0, 1, \dots, k$ temena poligona Q'_1 .
8. Dijagonala d je stranica trougla $T \subseteq P$ čija su temena $0, k$ i t , gde t pripada skupu $\{1, 2, \dots, k-1\}$. Posmatramo dijagonale $d_{0,t}$ i $d_{k,t}$ gde dijagonala $d_{0,t}$ povezuje temena 0 i t poligona Q'_1 i dijagonala $d_{k,t}$ povezuje temena k i t poligona Q'_1 (slika 6).

Među svim dijagonalama $d_{0,t}$ i $d_{k,t}$ gde $0 < t < k$ neka su $d_{0,t}$ i $d_{k,t}$ dijagonale koje su stranice trougla iz skupa $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$. Dijagonala $d_{0,t}$ deli poligon P na par poligona u kojem postoji poligon koji ima t zajedničkih stranica sa poligonom P . Dijagonala $d_{k,t}$ deli poligon P na par poligona u kojem postoji poligon koji ima $k-t$ zajedničkih stranica sa poligonom P . Prema minimalnosti broja k , sledi $t \leq 3$ i $k-t \leq 3$. Zaključujemo $t + (k-t) \leq 3 + 3$ odnosno $k \leq 6$. Sledi $4 \leq k \leq 6$.



Slika 6: Dijagonale $d_{0,t}$ i $d_{k,t}$ poligona Q'_1

□

Lema 2.2.3 ([6]). *Za svaki poligon P sa n temena postoji centralizator triangulacije kardinalnosti $f(P) \leq \lfloor n/3 \rfloor$.*

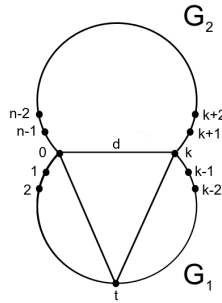
Dokaz. Primetimo prvo prema lemi 1.2.65, da za svaki poligon postoji triangulacija. Pokazujemo indukcijom po broju temena poligona P . Neka poligon P sadrži n temena.

Indukcijska baza: Za $n = 3$ tvrđenje važi. Primetimo da i za $n = 4, 5$ važi tvrđenje (primer 2.2.1).

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki poligon koji ima više od 3 i manje od n temena.

Indukcijski korak:

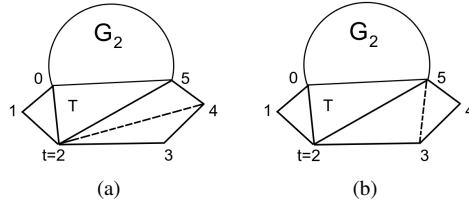
- Posmatramo $n \geq 6$. Neka je d dijagonala poligona P data prema lemi 2.2.2, a G_1 i G_2 poligoni na koje dijagonala d deli poligon P (slika 7).



Slika 7: Poligoni G_1 i G_2 na koje dijagonala d deli poligon P

- Dijagonala d deli poligon P na poligone G_1 i G_2 koji redom imaju $k + 1$ i $(n - k) + 1$ temena gde je k minimalan broj dat prema navedenoj lemi ($k \geq 4$). Neka su redom $0, 1, \dots, k$ temena poligona G_1 .
- Prema indukcijskoj pretpostavci za poligone G_1 i G_2 postoje redom centralizatori triangulacije S_1 i S_2 kardinalnosti $|S_1| = f(G_1) \leq \lfloor (k + 1)/3 \rfloor$ i $|S_2| = f(G_2) \leq \lfloor (n - k) + 1)/3 \rfloor$. Kako je $k \geq 4$ važi $f(G_2) \leq \lfloor (n - 3)/3 \rfloor = \lfloor n/3 \rfloor - 1$. Posmatramo slučajeve u odnosu na broj temena poligona G_1 :

- * Slučaj ($k = 4$): Poligon G_1 je petougao za koji smo primetili da uvek postoji centralizator triangulacije kardinalnosti 1. Sledi postoji centralizator triangulacije poligona P kardinalnosti $f(P) \leq f(G_2) + f(G_1) \leq (\lfloor n/3 \rfloor - 1) + 1 = \lfloor n/3 \rfloor$.
- * Slučaj ($k = 5$): Poligon G_1 je šestougao. Dijagonala d je stranica trougla $T \subseteq G_1$ čija su temena 0, k i t , gde je $1 \leq t \leq k - 1$. Ako je $t = 1$ tada dijagonala $(5, t)$ deli poligon P na par poligona u kojem postoji poligon koji ima 4 zajedničkih stranica sa poligonom P što je u kontradikciji sa osobinom minimalnosti broja $k = 5$. Analogno važi kontradikcija i za slučaj $t = 4$. Slučajevi $t = 2$ i $t = 3$ su simetrični. Neka je $t = 2$.



Slika 8: Poligon G_1 je šestougao

Posmatramo četvorougao $M \subseteq G_1$ sa temenima 2, 3, 4 i 5. Za četvorougao M postoje dve različite triangulacije (slika 8):

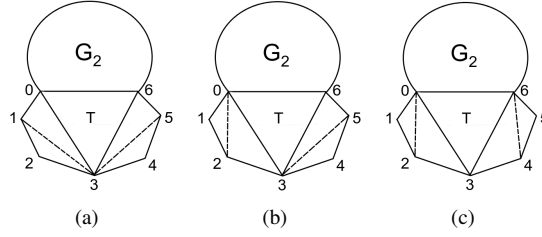
[dijagonala 24]: Ukoliko neki trougao iz skupa delova triangulacije poligona P sadrži stranicu čiji su krajevi temena 2 i 4, tada teme 2 poligona G_1 predstavlja centar triangulacije poligona G_1 . Sledi $|S_1| = f(G_1) = 1$ pa zaključujemo $f(P) \leq f(G_1) + f(G_2) \leq 1 + \lfloor (n/3) - 1 \rfloor = \lfloor n/3 \rfloor$.

[dijagonala 35]: Ukoliko neki trougao iz skupa delova triangulacije poligona P sadrži stranicu čiji su krajevi temena 3 i 5, posmatramo poligon $G_0 \subseteq P$ dobijen slepljivanjem trougla T i poligona G_2 . Poligon G_0 sadrži $(n - 5) + 2 = n - 3$ stranice. Prema indukcijskoj pretpostavci zaključujemo da postoji centralizator triangulacije G_0^t poligona G_0 kardinalnosti ne veće od $f(G_0) \leq \lfloor (n - 3)/3 \rfloor = \lfloor n/3 \rfloor - 1$. Primetimo da neko teme F trougla T pripada skupu G_0^t . U odnosu na teme F trougla T posmatramo slučajeve:

- (a) F predstavlja teme 0 ili teme 2 poligona G_1 tada posmatramo:
 - i. Trougao $X_1 \subseteq G_1$ sa temenima 0, 1, 2. Teme F pripada skupu G_0^t i predstavlja centar triangulacije trougla X_1 .
 - ii. Poligon $X_2 \subseteq G_1$ sa temenima 2, 3, 4 i 5. Teme 3 je centar triangulacije poligona X_2 .
 Zaključujemo $f(P) \leq f(G_0) + |\{3\}| \leq \lfloor n/3 \rfloor$.
- (b) F predstavlja teme 5 poligona G_1 tada posmatramo:
 - i. Trougao $X_1 \subseteq G_1$ sa temenima 0, 1, 2. Teme 2 je centar triangulacije poligona X_1 .
 - ii. Poligon $X_2 \subseteq G_1$ sa temenima 2, 3, 4 i 5. Teme F pripada skupu G_0^t i predstavlja centar triangulacije poligona X_2 .

Zaključujemo $f(P) \leq f(G_0) + |\{2\}| \leq \lfloor n/3 \rfloor$.

* Slučaj ($k = 6$): Poligon G_1 je sedmougao (slika 9). Primetimo kao u slučaju $k = 5$, ako t pripada skupu $\{1, 2, 4, 5\}$ tada postoji dijagonala d_t sa temenima 0 i t ili 6 i t koja deli poligon P na par poligona u kojem postoji poligon koji ima ima $4 \leq k < 6$ zajedničkih stranica sa poligonom P , što je u kontradikciji sa osobinom minimalnosti broja k . Sledi $t = 3$.



Slika 9: Poligon G_1 je sedmougao

Dijagonala d je stranica trougla $T \subseteq G_1$ čija su temena 0, k i $t = 3$. Neka je poligon $G_0 \subseteq P$ dobijen slepljivanjem trougla T i poligona G_2 . Poligon G_0 sadrži $(n - 6) + 2 = n - 4$ stranice. Prema indukcijskoj pretpostavci zaključujemo da postoji centralizator triangulacije G_0^t poligona G_0 kardinalnosti ne veće od $f(G_0) \leq \lfloor (n - 4)/3 \rfloor \leq \lfloor n/3 \rfloor - 1$.

Posmatramo:

1. Poligon $X_1 \subseteq G_1$ sa temenima 0, 1, 2 i 3.
2. Poligon $X_2 \subseteq G_1$ sa temenima 3, 4, 5 i 6.

Neka je triangulacija poligona P sa skupom delova $T' = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$. U odnosu na različite triangulacije poligona P posmatramo slučajeve:

* [dijagonale 13, 35]: Dijagonala d_1 poligona X_1 sa temenima 1 i 3 je stranica trougla iz skupa T' i dijagonala d_2 poligona X_2 sa temenima 3 i 5 je stranica trougla iz skupa T' . Teme 3, koje je ujedno teme poligona X_1 i poligona X_2 , je centar triangulacije poligona X_1 i X_2 . Sledi $f(P) \leq f(G_0) + |\{3\}| \leq \lfloor n/3 \rfloor$.

* [dijagonale 02, 35]: Dijagonala d_1 poligona X_1 sa temenima 0 i 2 je stranica trougla iz skupa T' i dijagonala d_2 poligona X_2 sa temenima 3 i 5 je stranica trougla iz skupa T' . Posmatramo poligon G_0H koji predstavlja slepljivanje poligona G_0 i trougla $H \subseteq P$ sa temenima 0, 2 i 3.

Poligon G_0H sadrži $(n - 6) + 2 + 1 = n - 3$ temena. Prema indukcijskoj pretpostavci zaključujemo da postoji centralizator triangulacije G_0H^t poligona G_0H kardinalnosti ne veće od $f(G_0H) \leq \lfloor (n - 3)/3 \rfloor = \lfloor n/3 \rfloor - 1$. Primetimo da neko teme F trougla H pripada skupu G_0H^t . U odnosu na teme F trougla H posmatramo slučajeve:

1. F predstavlja teme 0 ili teme 2 poligona G_1 tada posmatramo:

- (a) Trougao $X_1 \subseteq G_1$ sa temenima 0, 1, 2. Teme F pripada skupu G_0H^t i predstavlja centar triangulacije trougla X_1 .
 - (b) Poligon $X_2 \subseteq G_1$ sa temenima 3, 4, 5 i 6. Teme 3 je centar triangulacije poligona X_2 .
- Zaključujemo $f(P) \leq f(G_0H) + |\{3\}| \leq \lfloor n/3 \rfloor$.
2. F predstavlja teme 3 poligona G_1 tada posmatramo:
- (a) Trougao $X_1 \subseteq G_1$ sa temenima 0, 1, 2. Teme 2 je centar triangulacije poligona X_1 .
 - (b) Poligon $X_2 \subseteq G_1$ sa temenima 3, 4, 5 i 6. Teme F pripada skupu G_0H^t i predstavlja centar triangulacije poligona X_2 .
- Zaključujemo $f(P) \leq f(G_0H) + |\{2\}| \leq \lfloor n/3 \rfloor$.
- * [dijagonale 13, 46]: Dijagonala d_1 poligona X_1 sa temenima 1 i 3 je stranica trougla iz skupa T' i dijagonala d_2 poligona X_2 sa temenima 4 i 6 je stranica trougla iz skupa T' . Ovaj slučaj je simetričan prethodnom slučaju.
- * [dijagonale 02, 46]: Dijagonala d_1 poligona X_1 sa temenima 0 i 2 je stranica trougla iz skupa T' i dijagonala d_2 poligona X_2 sa temenima 4 i 6 je stranica trougla iz skupa T' . Primitimo da neko teme F trougla T pripada skupu G_0^t . U odnosu na teme F trougla T posmatramo slučajeve:
1. F predstavlja teme 0 poligona G_1 tada posmatramo:
 - (a) Poligon $X_1 \subseteq G_1$ sa temenima 0, 1, 2, 3. Teme F pripada skupu G_0^t i predstavlja centar triangulacije poligona X_1 .
 - (b) Poligon $X_2 \subseteq G_1$ sa temenima 3, 4, 5 i 6. Teme 6 je centar triangulacije poligona X_2 .

Zaključujemo $f(P) \leq f(G_0) + |\{6\}| \leq \lfloor n/3 \rfloor$.
 2. F predstavlja teme 6 poligona G_1 . Ovaj slučaj je simetričan prethodnom slučaju.
 3. F predstavlja teme 3 poligona G_1 . Kako je F centar triangulacije tačno jednog trougla, trougla T , zaključujemo da umesto temena F možemo posmatrati teme 0 trougla T kao centar triangulacije trougla T . Na osnovu prvog slučaja sledi tvrđenje.

□

Lema 2.2.4 (Postojanje triangulacije poligona sa rupama [6]). *Za svaki poligon sa rupama P koji ima n temena i h rupa postoji triangulacija.*

Dokaz. Pokazujemo indukcijom primarno po broju rupa i sekundarno po broju temena poligona sa rupama P .

Indukcijska baza: Prema lemi 1.2.65 tvrđenje važi za $h = 0$ i bilo koje n jer tada P predstavlja poligon.

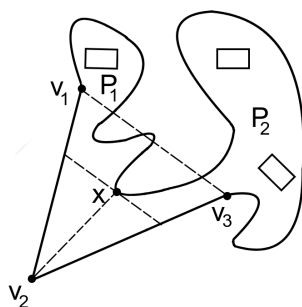
Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki poligon sa rupama koji ima:

- proizvoljan broj temena i $1 \leq h' < h$ rupa,
- ili $3 \leq n' < n$ temena i h rupa.

Indukcijski korak:

- Prema lemi 1.2.92, postoji v_2 teme unutrašnjeg ugla poligona sa rupama P koji je manji od opruženog ugla, a koje ne pripada rupi. Neka su v_1, v_2 i v_3 tri uzastopna temena poligona sa rupama P , gde je v_1v_3 dijagonala.
- Posmatramo duž v_1v_3 i u odnosu na sadržanost u poligonu sa rupama P posmatramo slučajeve:
 1. Ako je duž v_1v_3 sadržana u poligonu sa rupama P , označimo sa $d = v_1v_3$ unutrašnju dijagonalu.
 2. Ako duž v_1v_3 ne pripada poligonu sa rupama P , neka je x teme poligona sa rupama P koje:
 - * pripada pravi koja je paralelna sa pravom v_1v_3 koja ima najmanju udaljenost od tačke v_2 ,
 - * nalazi se sa iste strane prave v_1v_3 kao teme v_2 .

Označimo sa $d = v_2x$ unutrašnju dijagonalu.



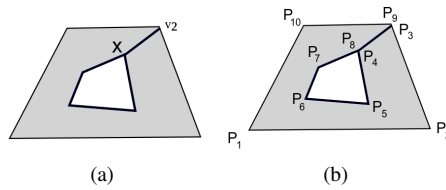
Slika 10: Dijagonala $d = v_2x$

Ako unutrašnja dijagonala d ne sadrži teme rupe, kako poligon sa rupama P ima barem jednu rupu, dijagonala d deli poligon sa rupama P na:

- * poligon P_1 i poligon sa rupama P_2 koji imaju manje od n temena,
- * ili poligon sa rupama P_1 i poligon sa rupama P_2 koji imaju manje od n temena.

Prema indukcijskoj pretpostavci i lemi 1.2.65 postoji triangulacija P_1 i P_2 . Iz postojanja triangulacija poligona P_1 i P_2 sledi postojanje triangulacije poligona sa rupama P .

Ako dijagonala d sadrži teme rupe, posmatramo *rasečen* poligon (ili poligon sa rupama) *sa mestom rasecanja* d , sa kojim proširujemo pojam triangulacije poligona sa rupama, tako što od svih triangulacija poligona sa rupama P , posmatramo one čiji skup delova sadrži trougao koji ima stranicu d (slika 11a). U takvom posmatranju dozvoljavamo da se neke stranice ponavljaju (slika 11b). *Drugim rečima, beskonačno malo razdvajamo po duži d u cilju smanjenja broja rupa, dodavajući dva nova temena.*



Slika 11: Dijagonala xv_2

Neka je x teme rupe poligona sa rupama P koje sadrži dijagonala d . U odnosu na broj rupa h , posmatramo slučajeve:

1. Ako je $h = 1$, tada posmatramo *rasečen* poligon P' sa mestom rasecanja v_2x koji ima $n + 2$ temena i nema rupu prema poligonu sa rupama P .
2. Ako je $h \geq 2$, tada posmatramo *rasečen* poligon sa rupama P' sa mestom rasecanja v_2x koji ima $n + 2$ temena i $h - 1$ rupu prema poligonu sa rupama P .

U odnosu na definisanost P' posmatramo slučajeve:

1. P' je *rasečen* poligon. Prema lemi 1.2.65 postoji triangulacija *rasečenog* poligona P' . Iz postojanja triangulacije *rasečenog* poligona P' sledi postojanje triangulacije poligona sa rupama P .
2. P' je *rasečen* poligon sa rupama. Kako *rasečen* poligon sa rupama P' ima $n + 2$ temena i $h - 1$ rupu prema indukcijskoj pretpostavci za P' postoji triangulacija. Iz postojanja triangulacije *rasečenog* poligona sa rupama P' sledi postojanje triangulacije poligona sa rupama P .

□

Lema 2.2.5. Neka je dat poligon sa rupama P sa n temena i h rupa i neka postoji triangulacija poligona sa rupama P sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_f\}$. Ako je e kardinalnost unije skupova stranica trouglova $P_1, P_2, \dots, P_f$ tada važi:

$$n - e + (f + 1 + h) = 2$$

Dokaz. Neka je G_P^t dualni graf nad temenima poligona sa rupama P sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_f\}$. Prema definiciji particije poligona sa rupama P , G_P^t je planaran graf. Kako je G_P^t povezan graf reda n , veličine e i ima $f + h + 1$ oblast, prema lemi 1.1.43 važi $n - e + (f + h + 1) = 2$. □

Teorema 2.2.6. *Kardinalnost skupa delova triangulacije poligona sa rupama P koji ima n temena i h rupa je $n + 2h - 2$.*

Dokaz.

1. Prema lemi 2.2.4 postoji triangulacija poligona sa rupama P sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_f\}$.
2. Neka je U unija skupova stranica trouglova kolekcije $\{P_1, P_2, \dots, P_f\}$ i $e = |U|$. Svaki trougao kolekcije sadrži 1 stranicu i 2 unutrašnje dijagonale poligona sa rupama P ili 2 stranice i 1 unutrašnju dijagonalu poligona sa rupama P . Primetimo, svaka posmatrana unutrašnja dijagonala predstavlja stranicu dva trougla kolekcije. Sledi $e = \frac{3f}{2} + \frac{n}{2}$.

Prema lemi 2.2.5 važi:

$$\begin{aligned} n - e + (f + 1 + h) &= 2 \\ n - \frac{3f + n}{2} + (f + 1 + h) &= 2 \\ f &= n + 2h - 2 \end{aligned}$$

□

Posledica 2.2.7. *Za triangulaciju poligona sa rupama P sa n temena i h rupa sa skupom delova $\{P_1, P_2, \dots, P_f\}$, broj unutrašnjih dijagonala poligona sa rupama P koje predstavljaju stranice trouglova iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_f\}$ jednak je $n + 3h - 3$.*

Dokaz.

1. Neka je e kardinalnost unije skupova stranica trouglova $P_1, P_2, \dots, P_f$. Primetimo da je $e = \frac{3f}{2} + \frac{n}{2}$.
2. Prema teoremi 2.2.6 važi $f = n + 2h - 2$. Sledi $e = 2n + 3h - 3$.
3. Broj unutrašnjih dijagonala poligona sa rupama P koje su stranice trouglova iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_f\}$ jednak je $e - n$.

□

2.2.2 Rezultati

Teorema 2.1.4 (Problem prazne galerije, Hvatal, 1975 - definisan preko poligona [6]). *Maksimalna vrednost kardinalnosti minimalnih pokrivajućih skupova svakog poligona P sa n temena jednaka je $\lfloor n/3 \rfloor$. Drugim rečima, $g(n) = \lfloor n/3 \rfloor$ gde je g oznaka iz problema 2.1.3.*

Hvatalov dokaz teoreme 2.1.4 ([6]):

Prema lemi 2.2.3 za proizvoljan poligon P postoji centralizator triangulacije $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ gde je $m \leq \lfloor n/3 \rfloor$. Skup $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ je pokrivajući skup tačaka poligona P kardinalnosti ne veće od $\lfloor n/3 \rfloor$. Kako smo posmatrali proizvoljan poligon P sa n temena sledi i $g(n) \leq \lfloor n/3 \rfloor$ gde je g oznaka iz problema 2.1.3. Iz primera 2.2.1 primećujemo da je $g(n) \geq \lfloor n/3 \rfloor$ gde je g oznaka iz problema 2.1.3, pa smo dokazali da je *uvek dovoljan a nekada i neophodan* skup tačaka kardinalnosti $\lfloor n/3 \rfloor$ za pokrivanje poligona P sa n stranica, odnosno $g(n) = \lfloor n/3 \rfloor$. $\square$

Tri godine nakon Hvatalovog dokaza teoreme 2.1.4, Stiv Fisk daje *elegantniji* dokaz 1978. godine.

Fiskov dokaz teoreme 2.1.4 ([6]):

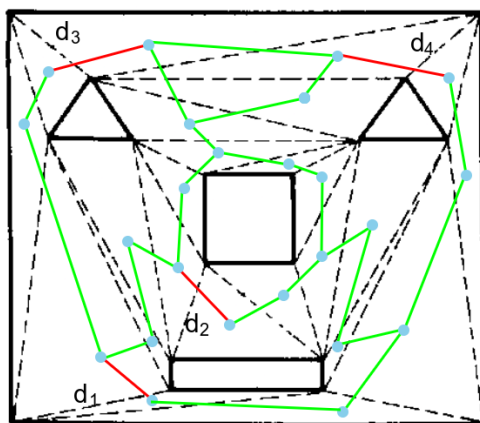
1. Neka je $n \geq 6$. Za $n = 3, 4, 5$ primetili smo da tvrdjenje važi (primer 2.2.1).
2. Prema lemi 1.2.65 za poligon P postoji triangulacija sa skupom delova T_P .
3. Neka je G_P^t dualni graf nad temenima poligona P sa skupom delova T_P .
4. Prema lemi 1.2.75 važi $\chi(G_P^t) = 3$ i postoji 3-bojenje grafa G_P^t sa skupom dodeljenih boja C .
5. Dokazaćemo da postoji boja iz skupa C koja je dodeljena najviše $\lfloor n/3 \rfloor$ broju čvorova u grafu G_P^t .
6. Neka su a, b i c boje iz skupa C tako da je boja a dodeljena a' broju čvorova, boja b dodeljena b' broju čvorova i boja c dodeljena c' broju čvorova grafa G_P^t , gde $a' \leq b' \leq c'$. Važi $a' + b' + c' = n$.
7. Ukoliko je $a' > n/3$, tada $a' + b' + c' > n$. Sledi $a' \leq \lfloor n/3 \rfloor$.
8. Neka je U skup čvorova grafa G_P^t kojima je dodeljena boja a u bojenju sa skupom dodeljenih boja C .
9. Neka je U' skup temena poligona P koje predstavljaju čvorovi iz skupa U .
10. Primetimo da u svakom bojenju konture sa 3 čvora, neophodne su tri boje.
11. Čvorovi svake konture grafa G_P^t dužine 3 predstavljaju temena tačno jednog trougla i svaka kontura dužine 3 sadrži čvor koji je obojen bojom a . Sledi da skup U' predstavlja pokrivajući skup nad temenima poligona P kardinalnosti ne veće od $\lfloor n/3 \rfloor$.
12. Kako smo posmatrali proizvoljan poligon P sa n temena, sledi i $g(n) \leq \lfloor n/3 \rfloor$ gde je g oznaka iz problema 2.1.3. Iz primera 2.2.1 primećujemo da je $g(n) \geq \lfloor n/3 \rfloor$ gde je g oznaka iz problema 2.1.3, pa smo dokazali da je *uvek dovoljan a nekada i neophodan* skup tačaka kardinalnosti $\lfloor n/3 \rfloor$ za pokrivanje poligona P sa n stranica.

□

Teorema 2.1.6 (Problem neprazne galerije, O'Rourke - definisan preko poligona sa rupama [6]). *Za dati poligon sa rupama P koji ima n temena i h rupa, postoji pokrivajući skup tačaka poligona sa rupama P kardinalnosti ne veće od $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor$.*

Dokaz.

1. Na osnovu leme 2.2.4 znamo da postoji triangulacija poligona sa rupama P sa skupom delova $\{T_1, T_2, \dots, T_f\}$.
2. Neka je G_P slabi dualni graf poligona sa rupama P . Primetimo:
 - Graf G_P ima h oblasti $F_1, \dots, F_h$ koje čine rupe poligona sa rupama P i spoljašnu oblast F_0 .
 - Postoji grana e_i grafa G_P , za koju važi da je $G_P - \{e_i\}$ povezan planaran graf koji ima $h - 1$ oblast $F_1, \dots, F_{i-1}, F_{i+1}, \dots, F_h$ koje čine rupe poligona sa rupama P i spoljašnu oblast F'_0 .



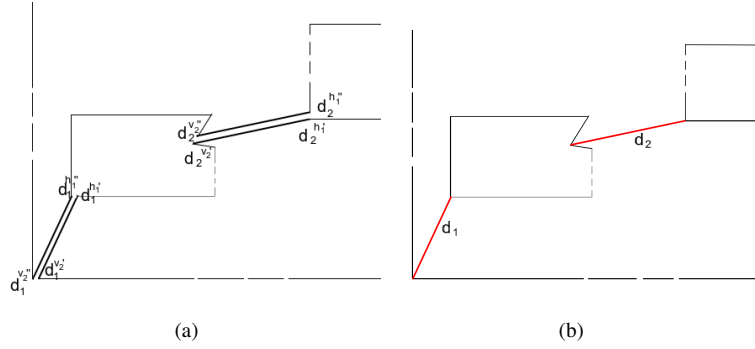
Slika 12: Slabi dualni graf G_P

3. Neka je d_i unutrašnja dijagonala poligona sa rupama P koja je zajednička stranica trouglova predstavljenih čvorovima grane e_i .
4. Iterativno ponavljamo postupak i nalazimo dijagonale $d_1, \dots, d_h$.

5. U odnosu na broj rupa h posmatramo slučajeve (slika 13):

- (a) Ako je $h = 1$, tada posmatramo *rasečen* poligon P' sa mestom rasecanja d_1 koji ima $n + 2$ temena i 0 rupa prema poligonu sa rupama P .
- (b) Ako je $h \geq 2$, tada posmatramo *rasečen* poligon sa rupama P'_{h-1} sa mestom rasecanja d_1 koji ima $n + 2$ temena i $h - 1$ rupu prema poligonu sa rupama P . Dalje, iterativno, za $1 < i < h$, posmatramo *rasečen* poligon sa rupama P'_{h-i} sa mestom rasecanja d_i koji ima $n + 2i$ temena i $h - i$ rupa prema poligonu sa rupama P'_{h-i+1} .

Rasečen poligon P'_0 sa mestom rasecanja d_h prema poligonu sa rupama P'_1 ima $n + 2h$ temena.



Slika 13: Rasecanje poligona sa rupama

- 6. Prema lemi 2.2.3 za *rasečen* poligon P'_0 postoji centralizator triangulacije $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ gde je $m \leq \lfloor (n + 2h)/3 \rfloor$.
- 7. Skup $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ je pokrivajući skup tačaka *rasečenog* poligona P'_0 kardinalnosti ne veće od $\lfloor (n + 2h)/3 \rfloor$.
- 8. Zaključujemo, postoji traženi skup kardinalnosti ne veće od $\lfloor (n + 2h)/3 \rfloor$.

□

2.3 Problem galerije sa mobilnim čuvarima

U ovom odeljku istražuje se problem galerije u kojoj čuvari nisu statični već mogu da se kreću između dva ugla prostorije. Njihova brzina je dovoljna da se smatra da je svaki deo prostorije koji je vidljiv sa bilo kojeg mesta duž putanje kretanja čuvara obezbeđen.

2.3.1 Definicije

Definicija 2.3.1 ([6]). Za G_P^t dualni graf nad temenima poligona P i stranicu e poligona P gde čvorovi u i v predstavljaju temena stranice e , **kontrakcija stranice** e u grafu G_P^t je indukovani podgraf $G_P^t[V(G_P^t) \setminus \{u, v\}]$ sa novim čvorom x i novim granama $\{xy : y \in N_{G_P^t}(v) \setminus \{u\}\} \cup \{xy : y \in N_{G_P^t}(u) \setminus \{v\}\}$.

Drugim rečima, uklonili smo čvorove u i v i dodali novi čvor x koji je susedan sa svim čvorovima sa kojima su bili susedni čvorovi u i v , osim njih samih. (slika 14, str. 41).

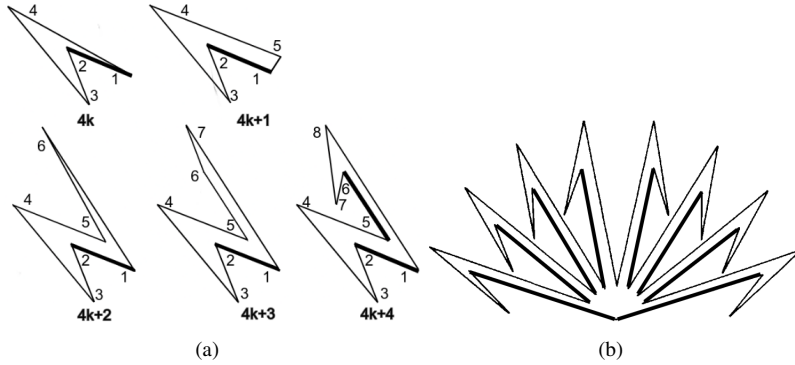
Definicija 2.3.2 ([6]). Za podskup V' skupa čvorova dualnog grafa nad temenima G_P^t poligona P sa skupom delova T' , kažemo da **dominira** graf G_P^t ako svaki trougao iz skupa T' ima barem jedno teme predstavljeno čvorom iz skupa V' .

Definicija 2.3.3 ([6]). Za podskup E' skupa grana dualnog grafa nad temenima G_P^t poligona P sa skupom delova T' , kažemo da **dominira** graf G_P^t ako svaki trougao iz skupa T' ima barem jedno teme predstavljeno elementom para iz skupa E' .

Definicija 2.3.4 ([6]). Za podskup V' skupa čvorova i podskup E' skupa grana dualnog grafa nad temenima G_P^t poligona P sa skupom delova T' , kažemo da **dominiraju** graf G_P^t ako svaki trougao iz skupa T' ima barem jedno teme predstavljeno čvorom iz skupa V' ili elementom para iz skupa E' .

2.3.2 Alati

Primer 2.3.5 ([6]). Crtanjem šiljaka za svako $n \geq 4$ možemo konstruisati primer poligona sa n temena za koji je neophodan skup duži kardinalnosti $\lfloor n/4 \rfloor$ za pokrivanje.



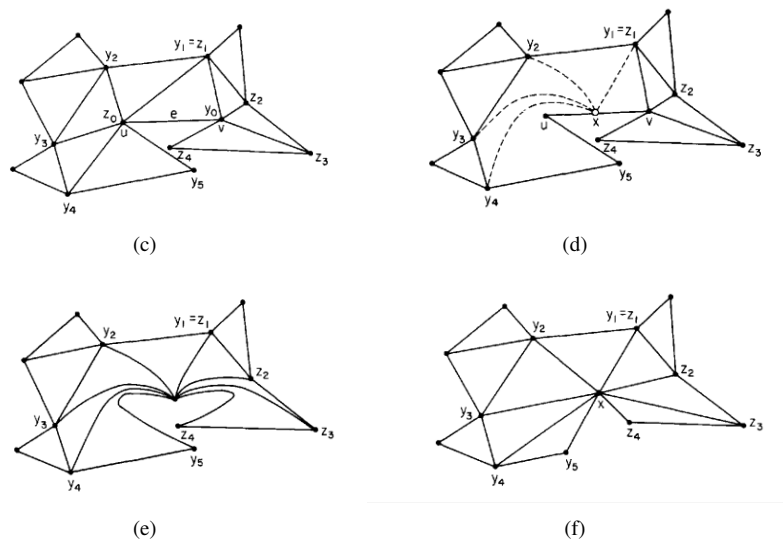
Iz primera 2.3.5 primećujemo da je $g(n) \geq \lfloor n/4 \rfloor$ gde je g oznaka iz problema 2.1.8 i n broj stranica poligona, pa smo pokazali da je *nekada neophodan* skup duži kardinalnosti $\lfloor n/4 \rfloor$ za pokrivanje poligona P sa n stranica.

Teorema 2.3.6 (Farijeva teorema [6]). Ako se graf G može planarno predstaviti, tada se može i planarno predstaviti sa pravim linijama.

Lema 2.3.7 ([6]). *Neka je G_P^t dualni graf nad temenima poligona P sa skupom delova $\{T_1, T_2, \dots, T_f\}$ i G' graf koji dobijamo kontrakcijom stranice e poligona P u grafu G_P^t . Tada postoji poligon P' tako da je G' dualni graf nad temenima poligona P' .*

Dokaz.

1. Neka je P_t figura nacrtana u ravni prema triangulaciji poligona P sa skupom delova $T_{P_t} = \{T_1, T_2, \dots, T_f\}$. Neka su tačke u i v temena stranice e poligona P (slika 14a).
2. Neka su (slika 14a):
 - $y_0, y_1, \dots, y_i$ temena stranica trouglova iz skupa delova T_{P_t} čija je druga krajnja tačka u , gde je $y_0 = v$, poređana suprotno smeru kretanja kazaljke na satu počev od y_0 , u odnosu na stranicu e trougla sa temenima u, v i y_1 ,
 - $z_0, z_1, \dots, z_j$ temena stranica trouglova iz skupa delova T_{P_t} čija je druga krajnja tačka v , gde je $z_0 = u$, poređana prema smeru kretanja kazaljke na satu počev od z_0 , u odnosu na stranicu e trougla sa temenima u, v i z_1 ,
 - $y_1 = z_1$.



Slika 14: Kontrakcija stranice u dualnom grafu nad temenima [6]

3. Pravimo novu planarnu figuru na osnovu figure P_t (slika 14):
 - (a) Uvodimo novu tačku x na stranici e .
 - (b) Primitimo na slici 14a, y_1 je teme trougla sa temenima u, v i y_1 . Kako se x nalazi na stranici e , ne postoji dijagonala koja seče duž xy_1 . Povezujemo temena x i y_1 i uklanjamo dijagonalu uy_1 .
 - (c) Povezujemo teme y_2 sa temenom x . Linija koja povezuje temena y_2 i x može biti kriva ali neće se javiti presecanje. Uklanjamo dijagonalu uy_2 .

- (d) Nastavljamo iterativno postupak sve dok svaka tačka $y_1, y_2, \dots, y_i$ nije povezana sa temenom x . Analogno ponavljamo postupak nad temenima $z_1, \dots, z_j$.
- (e) Brišemo stranicu e zajedno sa tačkama u i v .
- (f) Rezultat je planarna figura P'_t nacrtana u ravni gde:
 - i. ne postoje dve linije koje se seku,
 - ii. povezanost između dva temena ista je kao povezanost između čvorova koja ta dva temena predstavljaju u grafu G' .
- (g) Pomoću teoreme 2.3.6 nalazimo poligon P' prema figuri P'_t , gde je G' dualni graf nad temenima poligona P' .

□

Lema 2.3.8 ([6]). *Pretpostavimo da je $f(n)$ grana dovoljno za dominiranje dualnog grafa nad temenima G_P^t poligona P reda n . Tada je dovoljan jedan fiksiran čvor i $f(n-1)$ grana za dominiranje grafa G_P^t .*

Dokaz.

1. Neka važi (slika 14a):
 - (a) T je skup delova grafa G_P^t .
 - (b) Čvor grafa G_P^t koji predstavlja teme u poligona P je fiksiran čvor.
 - (c) e je stranica poligona P čija su temena u i v .
2. Neka je G' kontrakcija stranice e u grafu G_P^t . Prema lemi 2.3.7 graf G' je dualni graf nad temenima poligona P' reda $n-1$ sa novim čvorom x . Prema pretpostavci graf G' je dominiran sa skupom grana D kardinalnosti $f(n-1)$.
3. Neka teme u pokriva trougao T_1 iz skupa T . Posmatramo slučajeve:
 - (a) Čvor x nije incidentan sa nekom granom iz skupa D . Tada $f(n-1)$ grana grafa G_P^t predstavljaju kombinatorne duži koje pokrivaju trouglove iz skupa $T \setminus T_1$.
 - (b) Čvor x je incidentan sa granom $\{x, x'\}$ iz skupa D . Tada grana $\{v, x'\}$ ili $\{u, x'\}$ zajedno sa $f(n-1) - 1$ granom grafa G_P^t , predstavljaju kombinatorne duži koje pokrivaju trouglove iz skupa $T \setminus T_1$.

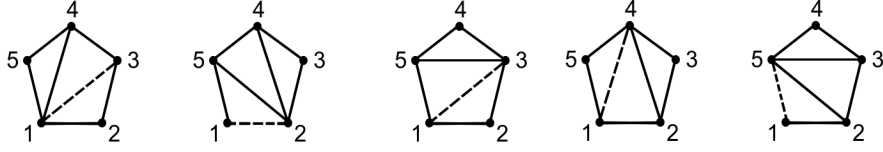
Sledi, jedan fiksiran čvor i $f(n-1)$ grana dominiraju graf G_P^t .

□

Lema 2.3.9 ([6]). *Dualni graf nad temenima G_P^t poligona P reda 5 može biti dominiran granom uv gde je u fiksiran čvor grafa G_P^t .*

Dokaz. Na slici 15 prikazane su sve triangulacije poligona P sa temenima 1, 2, 3, 4 i 5. Primetimo, pri svakoj od različitih triangulacija poligona P sa skupom delova T , u dualnom grafu nad temenima G_P^t poligona P sa skupom delova T , postoji grana $\{1, k\}$ koja dominira graf G_P^t , gde je k iz skupa $\{2, 3, 4, 5\}$. Na slici 15 odgovarajuće dijagonale prikazane su isprekidanim linijama.

□



Slika 15: Primeri različitih triangulacija poligona sa 5 temena ([6])

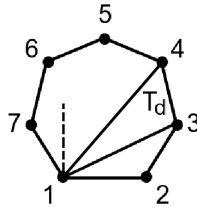
Lema 2.3.10 ([6]). *Dualni graf nad temenima G_P^t poligona P reda 7 može biti dominiran granom.*

Dokaz. Temena poligona P označena su redom 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7. Neka je G_P^t graf sa skupom delova T . Posmatramo proizvoljnu dijagonalu d poligona P koja je stranica trougla iz skupa T . Dijagonala d deli poligon P na dva poligona P_1 i P_2 koji imaju redom dve i pet ili tri i četiri zajedničke stranice sa poligonom P . U odnosu na broj zajedničkih stranica posmatramo slučajeve:

1. (P_1 i P_2 imaju dve i pet zajedničkih stranica): Neka je d dijagonala čiji su krajevi teme 1 i teme 3. Dijagonala d je stranica trougla T_d iz skupa T . U odnosu na temena trougla T_d posmatramo slučajeve:

- (a) (Temena trougla T_d su 1, 3 i 4)

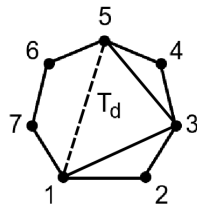
Prema lemi 2.3.9 dualni graf nad temenima G_H^t poligona $H \subseteq P_2$ sa temenima 1, 4, 5, 6 i 7 može biti dominiran sa jednom granom $\{1, k\}$ gde je k iz skupa $\{4, 5, 6, 7\}$. Takođe, grana $\{1, k\}$ dominira i graf G_P^t .



Slika 16: Trougao T_d sa temenima 1, 3 i 4

- (b) (Temena trougla T_d su 1, 3 i 5)

Grana $\{1, 5\}$ dominira graf G_P^t .



Slika 17: Trougao T_d sa temenima 1, 3 i 5

- (c) Slučajevi gde su temena trougla T_d 1, 3, 6 ili 1, 3, 7 analogni su prethodnim slučajevima.

2. (P_1 i P_2 imaju tri i četiri zajedničke stranice): Neka je d dijagonala čiji su krajevi temena 1 i 4. Primetimo, postoji grana koja dominira graf G_P^t (slika 16).

□

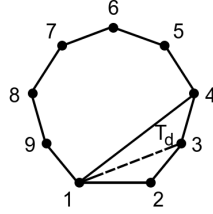
Lema 2.3.11 ([6]). *Dualni graf nad temenima G_P^t poligona P reda 9 može biti dominiran sa dve grane $\{v, x_1\}$ i $\{x_2, x_3\}$ gde je v fiksiran čvor grafa G_P^t .*

Dokaz. Neka je G_P^t graf sa skupom delova T . Temena poligona P označena su redom 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Neka je $v = 1$ i neka je d dijagonala čiji je jedan kraj v i koja je stranica trougla iz skupa T . Dijagonala d deli poligon P na dva poligona P_1 i P_2 koji imaju sa poligonom P sledeći broj zajedničkih stranica: dve i sedam ili tri i šest ili četiri i pet stranica. U odnosu na broj stranica posmatramo slučajeve:

1. (P_1 i P_2 imaju dve i sedam zajedničkih stranica): Neka je d dijagonala čiji su krajevi teme $v = 1$ i teme 3. Dijagonala d je stranica trougla T_d iz skupa T čije treće teme pripada skupu $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. U odnosu na temena trougla T_d posmatramo slučajeve:

- (a) (Temena trougla T_d su 1, 3 i 4):

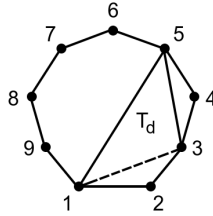
Prema lemi 2.3.10 dualni graf nad temenima G_H^t poligona $H \subseteq P_2$ sa temenima 1, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 može biti dominiran sa jednom granom d' . Grana d' i grana koja predstavlja stranicu d dominiraju graf G_P^t .



Slika 18: Trougao T_d sa temenima 1, 3 i 4

- (b) (Temena trougla T_d su 1, 3 i 5)

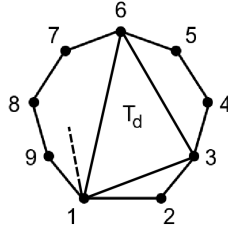
Prema lemi 2.3.10 dualni graf nad temenima G_H^t poligona $H \subseteq P_2$ sa temenima 1, 3, 5, 6, 7, 8 i 9 može biti dominiran sa jednom granom d' . Grana d' i grana koja predstavlja stranicu d dominiraju graf G_P^t .



Slika 19: Trougao T_d sa temenima 1, 3 i 5

(c) (Temena trougla T_d su 1, 3 i 6)

- i. Prema lemi 2.3.9 dualni graf nad temenima $G_{H_1}^t$ poligona $H_1 \subseteq P_2$ sa temenima 1, 6, 7, 8, 9 može biti dominiran sa jednom granom $d_1 = \{1, k_1\}$ gde je k_1 iz skupa $\{6, 7, 8, 9\}$.
- ii. Primetimo element grane $d_2 = \{1, 6\}$ ili $d_2 = \{1, 3\}$ dominira dualni graf nad temenima $G_{H_2}^t$ poligona $H_2 \subseteq P_2$ sa temenima 3, 4, 5, 6.
- iii. Grane d_1 i d_2 dominiraju graf G_P^t .



Slika 20: Trougao T_d sa temenima 1, 3 i 6

(d) Ostali slučajevi su analogni prethodnim.

2. (P_1 i P_2 imaju tri i šest zajedničkih stranica): Neka je d dijagonala čiji su krajevi teme 1 i teme 4. Ukoliko je dijagonala čiji su krajevi temena 1 i 3 stranica trougla iz skupa T , tada je slučaj identičan slučaju 1a (slika 18). U suprotnom dijagonala sa temenima 2 i 4 je stranica trougla iz skupa T . Prema lemi 2.3.10 postoji grana koja zajedno sa granom koja predstavlja stranicu d dominira graf G_P^t .
3. (P_1 i P_2 imaju četiri i pet zajedničkih stranica): Neka je d dijagonala čiji su krajevi teme 1 i teme 6. Ovaj slučaj je analogan slučaju 1c (slika 20).

□

Lema 2.3.12 ([6]). *Ako poligon P ima $n \geq 10$ temena, za svaku triangulaciju poligona P sa skupom delova $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ postoji unutrašnja dijagonala d koja deli poligon P na poligone P_1 i P_2 od kojih barem jedan ima 5, 6, 7 ili 8 zajedničkih stranica sa poligonom P , gde je dijagonala d stranica trougla iz skupa $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$.*

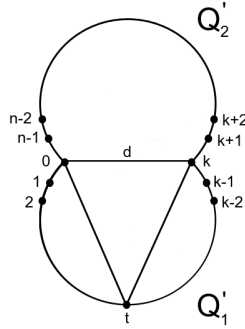
Dokaz.

1. Na osnovu lema 1.2.70 i 1.2.71 u poligonu P postoji unutrašnja dijagonala d koja deli poligon P na dva poligona P_1 i P_2 gde:
 - P_1 je uvo poligona P i sadržan je u skupu $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$,
 - P_2 ima barem 5 zajedničkih stranica sa poligonom P i postoji triangulacija poligona P_2 sa skupom delova $\{T_1, T_2, \dots, T_m\} \setminus \{P_1\}$,
 - dijagonala d je stranica trougla iz skupa $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$.
2. Neka je $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ skup svih dijagonala poligona P za koji važi da svaki element d_i , za $1 \leq i \leq k$, deli poligon P na poligone F_1^i i F_2^i tako da:

- poligon F_1^i ima barem 5 zajedničkih stranica sa poligonom P ,
- dijagonala d_i je stranica trougla iz skupa $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$.

Neka je $\mathcal{F}$ skup poligona $\{F_1^1, F_1^2, \dots, F_1^k\}$, a $\mathcal{F}'$ familija skupova poligona $\{\{F_1^1, F_2^1\}, \dots, \{F_1^k, F_2^k\}\}$.

3. Neka je F poligon skupa $\mathcal{F}$ koji ima najmanje stranica.
4. Neka je $\{Q_1, Q_2\}$ element familije $\mathcal{F}'$ gde je poligon Q_1 jednak poligonu F ili poligon Q_2 jednak poligonu F .
5. Označimo sa Q'_1 poligon među poligonima Q_1 i Q_2 koji je jednak poligonu F .
6. Označimo sa Q'_2 poligon među poligonima Q_1 i Q_2 koji nije jednak poligonu F .
7. Neka je k broj temena poligona Q'_1 . Važi $k \geq 5$. Neka su redom $0, 1, \dots, k$ temena poligona Q'_1 .
8. Dijagonala d je stranica trougla $T \subseteq P$ čija su temena $0, k$ i t , gde t pripada skupu $\{1, 2, \dots, k-1\}$. Posmatramo dijagonale $d_{0,t}$ i $d_{k,t}$ gde dijagonala $d_{0,t}$ povezuje temena 0 i t poligona Q'_1 i dijagonala $d_{k,t}$ povezuje temena k i t poligona Q'_1 .



Slika 21: Dijagonale $d_{0,t}$ i $d_{k,t}$ poligona Q'_1

Među svim dijagonalama $d_{0,t}$ i $d_{k,t}$ gde $0 < t < k$ neka su $d_{0,t}$ i $d_{k,t}$ dijagonale koje su stranice trougla iz skupa $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$. Dijagonala $d_{0,t}$ deli poligon P na par poligona u kojem postoji poligon koji ima t zajedničkih stranica sa poligonom P . Dijagonala $d_{k,t}$ deli poligon P na par poligona u kojem postoji poligon koji ima $k-t$ zajedničkih stranica sa poligonom P . Prema minimalnosti broja k sledi $t \leq 4$ i $k-t \leq 4$. Zaključujemo $t + (k-t) \leq 4 + 4 \iff k \leq 8$. Sledi $5 \leq k \leq 8$.

□

Lema 2.3.13 (O'Rourke, 1983 [6]). *Dualni graf nad temenima G_P^t poligona P reda $n \geq 4$ može biti dominiran sa $\lfloor n/4 \rfloor$ grane.*

Dokaz. Pokazujemo indukcijom po broju temena poligona P . Neka poligon P sadrži n temena.

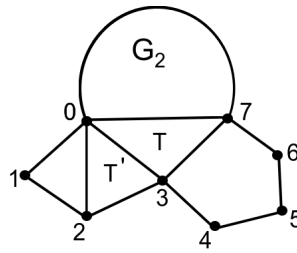
Indukcijska baza: Za $5 \leq n \leq 9$ prema lemapa 2.3.9, 2.3.10 i 2.3.11 važi tvrđenje.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki poligon koji ima barem 10, a manje od n temena.

Indukcijski korak: Posmatramo $n \geq 10$. Neka je $T_{G_P^t}$ skup delova grafa G_P^t i d dijagonala poligona P koja je stranica trougla iz skupa $T_{G_P^t}$ data prema lemi 2.3.12. Dijagonala d deli poligon P na poligone G_1 i G_2 koji redom imaju k i $n - k$ zajedničkih stranica sa poligonom P gde je $5 \leq k \leq 8$. Neka su redom $0, 1, \dots, k$ temena poligona G_1 i neka je $G_{G_1}^t$ njegov dualni graf nad temenima. U odnosu na definisanost broja k posmatramo slučajeve:

- Slučaj ($k = 5$ ili $k = 6$): Poligon G_1 ima $k + 1 \leq 7$ stranica. Prema lemi 2.3.10 postoji grana koja dominira dualni graf nad temenima $G_{G_1}^t$ poligona G_1 . Poligon G_2 ima $n - k + 1 \leq n - 5 + 1 = n - 4$ stranice. Prema indukcijskoj pretpostavci dualni graf nad temenima $G_{G_2}^t$ poligona G_2 može biti dominiran sa $\lfloor (n - 4)/4 \rfloor = \lfloor n/4 \rfloor - 1$ granom. Sledi, graf G_P^t može biti dominiran sa $\lfloor n/4 \rfloor$ grane.
- Slučaj ($k = 7$): Poligon G_1 ima $k + 1 = 8$ stranica. Ukoliko bi postojala dijagonala d' čiji su krajevi temena 0 i 6 ili 0 i 5 ili 1 i 7 ili 2 i 7 koja je stranica trougla iz skupa $T_{G_P^t}$, tada dijagonala d' deli poligon P na par poligona u kojem postoji poligon koji ima 5 ili 6 zajedničkih stranica sa poligonom P što je u kontradikciji sa osobinom minimalnosti broja $k = 7$. Dijagonala d je stranica trougla $T \subseteq G_1$ čija su temena 0, k i t gde t pripada skupu $\{3, 4\}$. Neka je $t = 3$ (analogno sledi za $t = 4$), posmatramo poligon $H \subseteq G_1$ sa temenima 0, 1, 2 i 3 (slika 22). Poligon H ima dve različite triangulacije:

- (a) Postoji dijagonala poligona P čiji su krajevi temena 0 i 2 i koja je stranica trougla iz skupa $T_{G_P^t}$. Neka je $T' \subseteq G_1$ trougao sa temenima 0, 2, 3. Posmatramo $Q \subseteq P$ poligon dobijen slepljivanjem poligona G_2 , trougla T i trougla T' .



Slika 22: Poligon H

Poligon Q ima $n - 7 + 3 = n - 4$ stranice. Prema indukcijskoj pretpostavci dualni graf nad temenima G_Q^t može biti dominiran sa $\lfloor (n - 4)/4 \rfloor = \lfloor n/4 \rfloor - 1$ granom. Pomoću leme 2.3.9, zaključujemo da $(\lfloor n/4 \rfloor - 1) + 1 = \lfloor n/4 \rfloor$ grane dominiraju graf G_P^t .

- (b) Postoji dijagonala poligona P čiji su krajevi temena 1 i 3 i koja je stranica trougla iz skupa $T_{G_P^t}$. Za dualni graf nad temenima G_H^t ,

poligona $H' \subseteq G_1$ sa temenima 3, 4, 5, 6 i 7, prema lemi 2.3.9 postoji grana $\{3, v\}$ gde je v iz skupa $\{4, 5, 6, 7\}$ koja dominira $G_{H'}^t$. Primetimo, grana $(3, v)$ dominira i graf $G_{G_1}^t$. Poligon G_2 ima $n - 7 + 1 = n - 6$ temena. Prema indukcijskoj pretpostavci dualni graf nad temenima $G_{G_2}^t$ može biti dominiran sa $\lfloor (n - 6)/4 \rfloor \leq \lfloor n/4 \rfloor - 1$ granom. Sledi, graf G_P^t može biti dominiran sa $\lfloor n/4 \rfloor$ grane.

- Slučaj ($k = 8$): Poligon G_1 ima $k + 1 = 9$ stranica.
 - * Prema lemi 2.3.11 dualni graf nad temenima $G_{G_1}^t$ je dominiran sa dve grane $\{v, x_1\}$ i $\{x_2, x_3\}$ gde je $v = 0$.
 - * Poligon G_2 ima $n - k + 1 = n - 7$ stranica. Prema lemi 2.3.8 dualni graf nad temenima $G_{G_2}^t$ poligona G_2 je dominiran sa fiksnim čvorom koji predstavlja teme 0 zajedno sa $f(n - 7 - 1) = f(n - 8)$ grana. Prema indukcijskoj pretpostavci važi $f(n - 8) = \lfloor (n - 8)/4 \rfloor = \lfloor n/4 \rfloor - 2$.
 - * Zaključujemo, dualni graf nad temenima G_P^t poligona P može biti dominiran sa $2 + (\lfloor n/4 \rfloor - 2) = \lfloor n/4 \rfloor$ grane.

□

2.3.3 Rezultati

Teorema 2.1.9 (Problem prazne galerije sa mobilnim čuvarima, O'Rourke - definisan preko poligona [6]). *Maksimalna vrednost kardinalnosti minimalnih pokrivajućih skupova kombinatornih duži svakog poligona P sa n temena jednaka je $\lfloor n/4 \rfloor$. Drugim rečima, $g(n) = \lfloor n/4 \rfloor$ gde je g oznaka iz problema 2.1.8.*

Dokaz. Prema lemi 2.3.13 za dualni graf nad temenima G_P^t poligona P sa skupom delova $T_{G_P^t}$ postoje $\lfloor n/4 \rfloor$ grane koje dominiraju graf G_P^t . Primetimo, grane koje dominiraju graf G_P^t predstavljaju kombinatorne duži koje pokrivaju poligon P . Sledi, postoji pokrivajući skup kombinatornih duži kardinalnosti ne veće od $\lfloor n/4 \rfloor$ za svaki poligon P sa n temena, odnosno $g(n) \leq \lfloor n/4 \rfloor$ gde je g oznaka iz problema 2.1.8. Iz primera 2.3.5 primećujemo da je $g(n) \geq \lfloor n/4 \rfloor$ gde je g oznaka iz problema 2.1.8, pa smo dokazali da je *uvek dovoljan a nekada i neophodan* skup kombinatornih duži kardinalnosti $\lfloor n/4 \rfloor$ za pokrivanje poligona P sa n stranica, odnosno $g(n) = \lfloor n/4 \rfloor$.

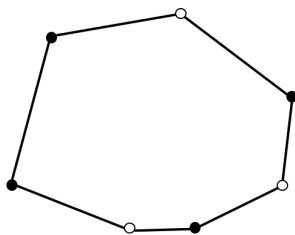
□

2.4 Problem galerije nad praznom okolinom

Ovaj odeljak se bavi problemom nadgledanja galerije gde čuvari pokrivaju spoljašnost galerije a ne njenu unutrašnjost.

2.4.1 Alati

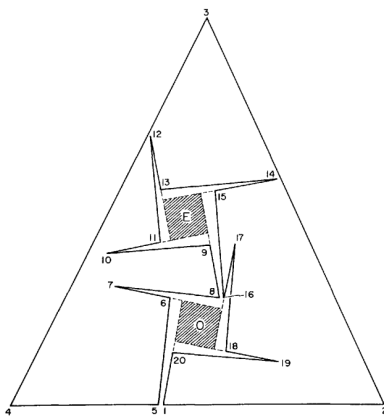
Primer 2.4.1 ([6]). *Posmatrajmo početni primer konveksnog poligona sa 7 temena gde je $\lceil 7/2 \rceil = 4$ kardinalnost minimalnog pokrivajućeg skupa spoljašnosti.*



Slika 23: Primer konveksnog poligona sa 7 temena gde su crnom bojom obojena temena minimalnog pokrivajućeg skupa spoljašnosti.

Iz primera 2.4.1 (*konstruisanje konveksnog poligona*) primećujemo da je $g(n) \geq \lceil n/2 \rceil$ gde je g oznaka iz problema 2.1.11 i n broj stranica poligona, pa smo pokazali da je *nekada neophodan* pokrivajući skup spoljašnosti kardinalnosti $\lceil n/2 \rceil$, za pokrivanje spoljašnosti poligona P sa n stranica.

Da li svako drugo teme poligona čini minimalni pokrivajući skup spoljašnosti? Na slici 24, primetimo da skup koji čine parno označena temena ne pokriva deo spoljašne oblasti označen sa E . Slično skup koji čine neparno označena temena ne pokriva deo spoljašne oblasti označen sa O .



Slika 24: Primer poligona sa 20 temena [6]

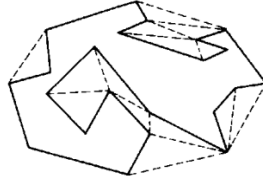
2.4.2 Rezultati

Teorema 2.1.12 (Problem galerije nad praznom okolinom, O'Rourke i Wood - definisan preko poligona [6]). *Maksimalna vrednost kardinalnosti minimalnih*

pokrivajućih skupova spoljašnosti svakog poligona P sa n temena jednaka je $\lceil n/2 \rceil$.
 Drugim rečima, $g(n) = \lceil n/2 \rceil$ gde je g oznaka iz problema 2.1.11.

Dokaz.

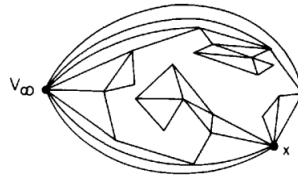
1. Neka je H konveksni omotač poligona P i $\mathcal{A} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ skup poligona za koji važi:
 - H sadrži poligone $P_1, P_2, \dots, P_m$,
 - unutrašnje tačke poligona $P_1, P_2, \dots, P_m$ pripadaju spoljašnosti poligona P ,
 - temena svakog poligona iz skupa $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ su temena poligona P ,
 - konveksni omotač H je slepljivanje poligona $P, P_1, P_2, \dots, P_m$.
2. Neka je $\mathcal{A}^{G_P^t}$ skup dualnih grafova nad temenima poligona iz skupa $\mathcal{A}$.



Slika 25: Triangulacija *razlike* konveksnog omotača i poligona [6]

3. Neka je $I = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$ razlika skupa temena poligona P i skupa temena poligona $P_1, P_2, \dots, P_m$.
4. Neka G' predstavlja uniju grafova iz skupa $\mathcal{A}^{G_P^t}$.
5. Označimo sa G'_∞ graf G' sa novim čvorovima:
 - (a) Za svaki element I_i skupa I dodajemo čvor v_{I_i} za koji važi:
 - i. čvor v_{I_i} predstavlja teme I_i poligona P ,
 - ii. susedan je sa čvorom v u grafu G'_∞ , ako teme koje predstavlja čvor v i teme I_i su susedna temena poligona P .
 - (b) Čvor v_∞ , koji predstavlja spoljašnost konveksnog omotača H i susedan je sa svim čvorovima koji predstavljaju temena konveksnog omotača H .

Primetimo da je graf G'_∞ povezan graf reda $n + 1$. Neka je x čvor grafa G'_∞ koji predstavlja teme konveksnog omotača H (slika 26).

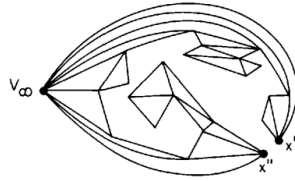


Slika 26: Graf G'_∞ [6]

6. Definišemo novi graf G'' reda $n + 2$ gde biramo skupove X' i X'' (slika 27):

- $\emptyset \neq X' \subset N_{G'_\infty}(x)$,
- $\emptyset \neq X'' \subset N_{G'_\infty}(x)$,
- $X' \cap X'' = \emptyset$ i $X' \cup X'' = N_{G'_\infty}(x)$,

tako da je G'' indukovani podgraf $G'_\infty[V(G'_\infty) \setminus \{x\}]$ sa novim čvorovima x' i x'' i novim granama $\{x'y : y \in X'\} \cup \{x''y : y \in X''\}$ koji je planaran.



Slika 27: Graf G'' [6]

7. Prema teoremi 2.3.6 nalazimo poligon P' na osnovu grafa G'' . *Drugim rečima, možemo udaljiti čvor v_∞ dovoljno daleko tako da linije postanu prave.*
8. Prema lemi 1.2.75 za dualni graf nad temenima $G_{P'}^t$, poligona P' , važi $\chi(G_{P'}^t) = 3$ i $G_{P'}^t$ je 3-bojiv sa skupom dodeljenih boja C .
9. Neka su a, b i c boje iz skupa C tako da je boja a dodeljena a' broju čvorova, boja b dodeljena b' broju čvorova i boja c dodeljena c' broju čvorova grafa $G_{P'}^t$, gde $a' \leq b' \leq c'$. Važi: $a' + b' + c' = n + 2$.
10. Ukoliko važi $a' > (n + 2)/3$ tada je $a' + b' + c' > n + 2$. Sledi $a' \leq \lfloor (n + 2)/3 \rfloor$.
11. Kako važi $a' \geq 1$ i $b' + c' \leq n + 1$, sledi $b' \leq \lfloor (n + 1)/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil$.
12. Neka su U_a, U_b i U_c skupovi čvorova grafa $G_{P'}^t$, kojima su redom dodeljene boje a, b i c .
13. Skup U_a je kardinalnosti ne veće od $\lfloor (n + 2)/3 \rfloor$.
14. Skup U_b je kardinalnosti ne veće od $\lceil n/2 \rceil$.
15. Primetimo, pokrivajući skup nad temenima poligona P' predstavlja pokrivajući skup spoljašnjosti poligona P .
16. Ako čvor x_∞ ne pripada skupu U_a tada temena poligona P' koja su predstavljena čvorovima iz skupa U_a čine pokrivajući skup nad temenima poligona P' kardinalnosti ne veće od $\lfloor (n + 2)/3 \rfloor$.
17. Ako čvor x_∞ pripada skupu U_a tada temena poligona P' koja su predstavljena čvorovima iz skupa U_b čine pokrivajući skup nad temenima poligona P' kardinalnosti ne veće od $\lceil n/2 \rceil$.
18. Kako smo posmatrali proizvoljan poligon P sa n temena sledi $g(n) \leq \lceil n/2 \rceil$ gde je g oznaka iz problema 2.1.11. Iz primera 2.4.1 primećujemo da je $g(n) \geq \lceil n/2 \rceil$.

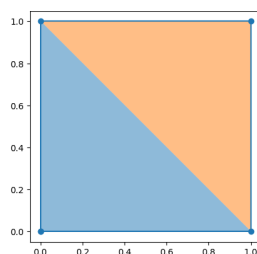
□

3 Primeri

U ovom poglavlju predstavljena je primena pokazanih rezultata na primeru realne galerije. Algoritam triangulacije koji se koristi zasniva se na uklanjanju trouglova koji predstavljaju *uvo*. Prilikom primene triangulacije prema uklanjanju trouglova koji predstavljaju *uvo*, pretpostavlja se da je skup temena poligona skup međusobno nekolinearnih tačaka.

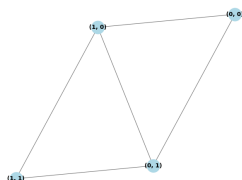
3.1 Početni primer nad četvorouglo

1. Predstavljamo četvorougao u koordinatnom sistemu i pomoću algoritma koji je dat u dodatku A izvršavamo triangulaciju. Algoritam za triangulaciju poligona zasniva se na uklanjanju trouglova koji predstavljaju *uvo*.



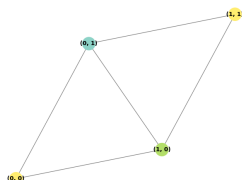
Slika 28: Triangulacija četvorougla

2. Definišemo dualni graf nad temenima za dati četvorougao.



Slika 29: Dualni graf nad temenima četvorougla

3. Znamo da možemo dualni graf nad temenima obojiti u tri boje (0 = žuta, 1 = plava, 2 = zelena) na osnovu leme 1.2.75. Na početku, dodeljujemo žutu boju proizvoljnom čvoru, a nakon toga bojimo susede sa dve različite boje. Postupak nastavljamo iterativno.

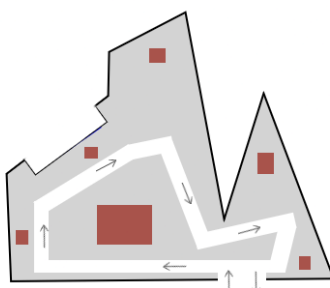


Slika 30: Bojenje dualnog grafa nad temenima četvorougla

4. Nalazimo skup čvorova V' kojima je dodeljena boja koja je najmanje korišćena pri bojenju svih čvorova. Znamo da čvorovi skupa V' predstavljaju temena koja čine pokrivajući skup tačaka četvorougla, kardinalnosti ne veće od $\lfloor 4/3 \rfloor = 1$.
5. Zaključujemo, za prostoriju koja je predstavljena četvorougлом potreban je 1 čuvar u problemu galerije.

3.2 Primer realne galerije

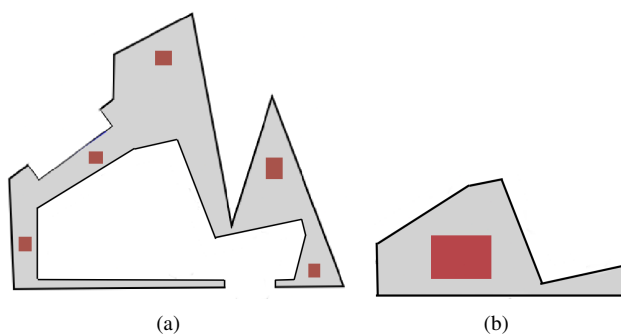
Na slici 31 prikazan je primer realne galerije umetnosti sa ukupno 7 objekata: jedan objekat koji predstavlja stazu za posetioce i ostalih 6 objekata obojenih crvenom bojom koji predstavljaju izložene umetnosti.



Slika 31: Primer realne galerije umetnosti

Primetimo:

1. Objekat koji predstavlja stazu deli posmatranu prostoriju na dve manje prostorije:



Slika 32: Razlaganje prostorije

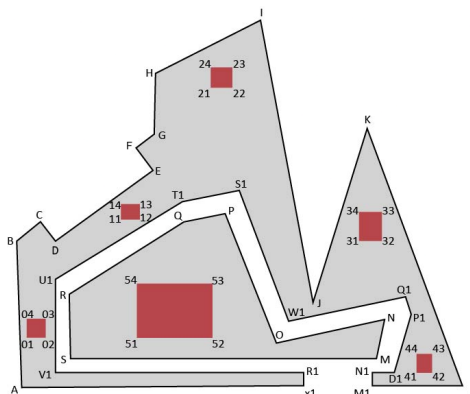
2. Zbir broja dovoljnih čuvara za manje prostorije predstavlja broj dovoljnih čuvara za početnu prostoriju.

Pretpostavimo da nije neophodno i stazu za posetioce da obezbedimo.

Zadatak je pronaći broj čuvara za obezbeđivanje prostorije prema teoremi 2.1.6.

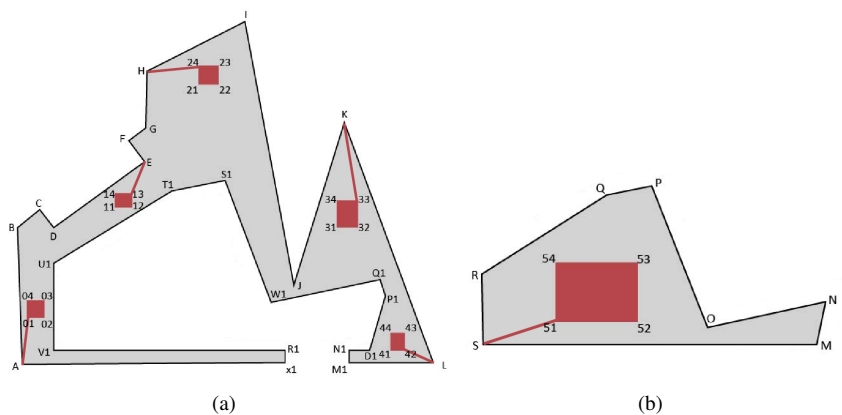
Rešenje:

1. Predstavljamo prostoriju u koordinatnom sistemu (slika 33).



Slika 33: Označeni uglovi

2. Posmatramo poligon A i poligon B predstavljeni na slici 34, koji sadrže odgovarajuće stranice u cilju smanjenja broja rupa.

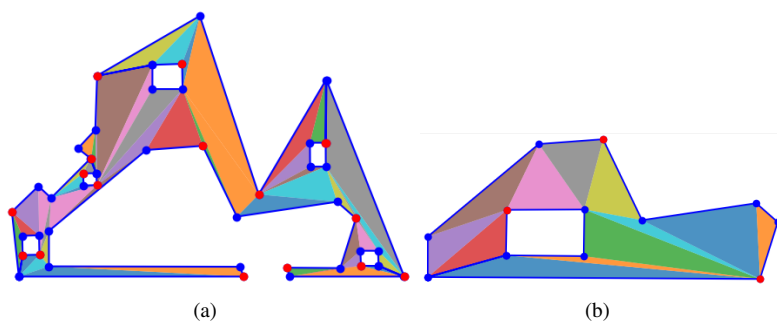


Slika 34: Poligon A i poligon B

3. Poligon A konstruišemo na osnovu poligona sa rupama koji ima $n_1 = 44$ temena i $h_1 = 5$ rupa.
4. Poligon B konstruišemo na osnovu poligona sa rupama koji ima $n_2 = 11$ temena i $h_2 = 1$ rupa.
5. Pomoću algoritma koji je dat u dodatku A izvršavamo triangulacije.
6. Definišemo dualne grafove nad temenima G_A^t i G_B^t koji su reda $44 + 2 * 5 = 54$ i $11 + 2 * 1 = 13$.
7. Bojimo dualne grafove nad temenima u tri boje.

8. Nalazimo skup čvorova V_A grafa G_A^t kojima je dodeljena boja koja je najmanje korišćena pri bojenju svih čvorova grafa G_A^t .
9. Nalazimo skup čvorova V_B grafa G_B^t kojima je dodeljena boja koja je najmanje korišćena pri bojenju svih čvorova grafa G_B^t .
10. Znamo da čvorovi skupa V_A predstavljaju temena koja čine pokrivaјуći skup tačaka poligona A kardinalnosti ne veće od $\lfloor 54/3 \rfloor = 18$. Takođe, čvorovi skupa V_B predstavljaju temena koja čine pokrivaјуći skup tačaka poligona B kardinalnosti ne veće od $\lfloor 13/3 \rfloor = 4$.

Izvršavanjem *python* koda koji je predstavljen u dodatku A nad označenom prostorijom koja je data prema slici 33, zaključujemo da je dovoljno $16 + 3$ čuvara za obezbeđivanje čije su pozicije predstavljene crvenom bojom na slici 35.



Slika 35: Čvorovi skupova V_A i V_B obojeni crvenom

4 Dodatak A

Python kod

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx
from collections import Counter

from networkx.algorithms.coloring import greedy_color

class Poligon:
    temena = []
    def broj_temena(self):
        return len(self.temena)

def da_li_je_konkavan_ugao(na_levo, A, B, C):
    if na_levo:
        Z = A
        A = C
        C = Z
    v1 = np.array([B[0] - A[0], B[1] - A[1]])
    v2 = np.array([C[0] - B[0], C[1] - B[1]])
    vektorski_proizvod = np.cross(v1, v2)
    return vektorski_proizvod > 0

def da_li_je_unutar_trougla(P, A, B, C):
    if (C[1] - A[1]) == 0:
        Z = C
        C = B
        B = Z
    w_1 = (A[0] * (C[1] - A[1]) + (P[1] - A[1]) *
           (C[0] - A[0]) - P[0] * (C[1] - A[1])) /
           ((B[1] - A[1]) * (C[0] - A[0]) - (B[0] - A[0]) *
            (C[1] - A[1]))
    w_2 = (P[1] - A[1] - w_1 * (B[1] - A[1])) /
           (C[1] - A[1])
    return w_1 >= 0 and w_2 >= 0 and (w_1 + w_2) <= 1

def da_li_je_uvo(P, i):
    prethodni_indeks_modulo = (i - 1) % len(P)
    naredni_indeks_modulo = (i + 1) % len(P)

    prethodni_indeks = P[prethodni_indeks_modulo]
    trenutni_indeks = P[i]
    naredni_indeks = P[naredni_indeks_modulo]

    for j in range(len(P)):
        if j == prethodni_indeks_modulo or
           j == i or j == naredni_indeks_modulo:
```

```

        continue
    if da_li_je_unutar_trougla(P[j],
        prethodni_indeks, trenutni_indeks,
        naredni_indeks):
        return False

    return True

def triangulacija(P, na_levo):
    temena_kolekcija = np.array(P.temena)
    rezultat = []

    if P.broj_temena() < 3:
        return rezultat

    V = np.arange(len(temena_kolekcija))

    while len(V) > 3:
        for i in range(len(V)):
            prethodni_indeks = V[(i - 1) % len(V)]
            trenutni_indeks = V[i]
            naredni_indeks = V[(i + 1) % len(V)]
            if da_li_je_konkavan_ugao(na_levo,
                temena_kolekcija[prethodni_indeks],
                temena_kolekcija[trenutni_indeks],
                temena_kolekcija[naredni_indeks]) == False:
                continue
            if da_li_je_uvo(temena_kolekcija[V], i):
                rezultat.append([
                    temena_kolekcija[prethodni_indeks],
                    temena_kolekcija[trenutni_indeks],
                    temena_kolekcija[naredni_indeks]])
                V = np.delete(V, i)
                break

    rezultat.append([temena_kolekcija[V[0]],
        temena_kolekcija[V[1]], temena_kolekcija[V[2]]])
    return rezultat

def crtaj_poligon_i_trouglove(poligon,
    trouglovi, obojena_temena):
    plt.figure()

    # Crtanje poligona
    plt.plot(
        *zip(*(poligon.temena + [poligon.temena[0]])),
        marker='o', color='blue')

```

```

# Crtanje obojenih temena
if obojena_temena is not None:
    for teme in obojena_temena:
        plt.plot(teme[0], teme[1], 'ro')

# Crtanje trouglova
for trougao in trougovi:
    trougao = np.array(trougao)
    plt.fill(*zip(*trougao), alpha=0.8)

plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
plt.show()

def generisi_dualni_graf(trougovi):
    # Kreiraj prazan graf
    G = nx.Graph()

    # Dodaj čvorove u graf (temena)
    for trougao in trougovi:
        for teme in trougao:
            if tuple(teme) not in G.nodes:
                G.add_node(tuple(teme))

    # Dodaj grane u graf
    for trougao in trougovi:
        for i in range(3):
            for j in range(i + 1, 3):
                # Dodaj liniju između dva temena ako su
                # u istom trouglu
                G.add_edge(tuple(trougao[i]),
                           tuple(trougao[j]))

    return G

def bojenje_grafa(G):
    boje = greedy_color(G, strategy='smallest_last')
    unique_colors = len(set(boje.values()))

    return boje

# Primer upotrebe:
P = Poligon()
P.temena = [] # definisati temena

```

```

rezultat = triangulacija(P, True)

G = generisi_dualni_graf(rezultat)
boje = bojenje_grafa(G)
color_counts = Counter(boje.values())

najmanje_ucestala_boja =
    min(color_counts, key=color_counts.get)

temena_sa_najmanje_ucestalom_bojom =
    [node for node, color in boje.items()
     if color == najmanje_ucestale_boja]

crtaj_poligon_i_trouglove(P, rezultat,
    temena_sa_najmanje_ucestalom_bojom)

```

5 Zaključak

U ovom radu proučavan je problem galerije iz ugla geometrije i teorije grafova. Kroz posmatranje osnovnih i proširenih varijanata problema galerije korišćenjem poligona sa i bez rupa, prikazani su ključni rezultati prema rezultatima Hvatala, Fiska i O'Rourke-a.

Posebna pažnja posvećena je i varijantama problema u kojima čuvari mogu da se kreću, kao i potrebnom broju čuvara za obezbeđivanje spoljašnosti galerije. Takođe, kroz praktičnu primenu računarskog programa, rezultati su realizovani na primeru realne galerije, što omogućava uvid u primenu teorije u stvarnim uslovima.

Ovaj rad doprinosi razumevanju geometrijskih problema u vezi pokrivanja prostora i primenama u sistemima nadzora, sa mogućnostima za unapređenje u oblasti optimizacije, kao i analizi velikih kompleksnih sistema. Dalja istraživanja mogu uključivati proširenje na složenije modele galerija i dodatne varijante problema galerije, što predstavlja osnovu za dalji razvoj teorije i algoritama.

Literatura

- [1] Bodroža-Pantić, O. (2000). Kombinatorna geometrija. Univerzitet u Novom Sadu.
- [2] Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2016). Graphs & Digraphs. CRC Press. ISBN: 978-1498735766
- [3] Chvátal, V. (1975). A combinatorial theorem in plane geometry. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 18(1), 39–41. DOI: 10.1016/0095-8956(75)90061-1
- [4] Fisk, S. (1978). A short proof of Chvátal's Watchman Theorem. Journal of Combinatorial Theory. Series B, 24(3), 374. DOI:10.1016/0095-8956(78)90059-X
- [5] Mašulović, D. (2007). Odabrane teme diskretne matematike. Prirodno-matematički fakultet.
- [6] O'Rourke, J. (1987). Art Gallery Theorems and Algorithms. Oxford University Press. ISBN 0-19-503965-3.
- [7] Vuich, M. (2019). Exploring Topics of the Art Gallery Problem. Senior Independent Study Theses. The College of Wooster. Lokacija: <https://openworks.wooster.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=11317&context=independentstudy>
Vreme pristupa: 14.10.2025.

Biografija

Autor ovog rada je Stefan Miletić, rođen 31.07.1997. u Paraćinu. Nakon završenih osnovnih studija na Departmanu za računarske nauke, Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, smer Računarske nauke, upisao je 2020. godine na Departmanu za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer Master profesor matematike. Poslednji predmet predviđen planom i programom za smer Master profesor matematike položio je školske 2023/24.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa:

Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada:

Master rad

VR

Autor:

Stefan Miletić

AU

Mentor:

Dr Ivica Bošnjak

MN

Naslov rada:

Analiza broja čuvara u nekim varijantama problema umetničke galerije

NR

Jezik publikacije:

srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda:

srpski/engleski

JI

Zemlja publikovanja:

Srbija

ZP

Uže geografsko područje:

Vojvodina

UGP

Godina:

2025

GO

Izdavač:

Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa:

Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

MA

Fizički opis rada:

broj poglavlja/broj strana/broj citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga

FO

4/66/7/0/50/0/1

Naučna oblast:

Matematika

NO

Naučna disciplina:

Teorija grafova

ND

Predmetna odrednica/ ključne reči:

graf, problem galerije, čuvanje galerije, nadzor, Hvatalov dokaz, Fiskov dokaz, O'Rourke-ov dokaz, poligon sa rupama, geometrija, teorija grafova, poligon, mobilni čuvar, pokrivaajući skup, računarska primena, minimum čuvara

PO

UDK

Čuva se:

Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, PMF-a u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

nema

VN

Izvod:

IZ

Ovaj rad se bavi problemom galerije, koji razmatra minimalan broj čuvara potrebnih za nadgledanje prostorije sa n zidova. Motivacija za proučavanje ovog problema potiče iz praktičnih potreba za efikasnim sistemima nadzora u muzejima, galerijama i sličnim prostorima. Rad obuhvata teorijsku osnovu iz geometrije i teorije grafova. Detaljno su prikazani Hvatalov i Fiskov dokaz da je maksimalna kardinalnost pokrivajućeg skupa tačaka uvek manja ili jednaka $\lfloor n/3 \rfloor$, kao i proširenje za poligone sa h rupama gde je ova vrednost $\lfloor (n+2h)/3 \rfloor$. Takođe, pažnja je posvećena i mobilnim čuvarima, koji se kreću između dva ugla prostorije. Prema dokazu O'Rourke-a, pokazuje se da je dovoljno ne više od $\lfloor n/4 \rfloor$ mobilnih

čuvara. Razmatran je i slučaj kada se obezbeđuje spoljašnost galerije, gde se pokazuje da je $\lceil n/2 \rceil$ čuvara uvek dovoljno, a ponekad i neophodno.

Datum prihvatanja teme od NN veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik:

dr Olga Bodroža-Pantić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član:

dr Vlado Uljarević, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član, mentor:

dr Ivica Bošnjak, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

Monograph publication

DT

Type of record:

Textual printed material

TR

Content code:

Master's thesis

CC

Author:

Stefan Miletić

AU

Mentor/comentor:

Dr Ivica Bošnjak

MN

Title:

Analysis of the number of guards in some variants of the art gallery problem

TI

Language of text:

Serbian (Latin)

LT

Language of abstract:

Serbian / English

LA

Country of publication:

Serbia

CP

Locality of publication:

Vojvodina

LP

Publication year:

2025

PY

Publisher:

Author's reprint

PU

Publication place:

Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

PP

Physical description:

(4/66/7/0/50/0/1)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)

PD

Scientific field:

Mathematics

SF

Scientific discipline:

Graph theory

SD

Subject/ Key words:

Graph, art gallery problem, gallery guarding, surveillance, Chvátal's proof, Fisk's proof, O'Rourke's proof, polygon with holes, geometry, graph theory, polygon, mobile guard, covering set, minimum number of guards
Library of Department of Mathematics and Informatics, Trg Dositeja Obradovića 4

SKW

UC

Holding data:

HD

Note:

none

N

Abstract:

AB

This paper deals with the art gallery problem, which examines the minimum number of guards required to monitor a room with n walls. The motivation for studying this problem arises from practical needs for efficient surveillance systems in museums, galleries and similar spaces. The work covers the theoretical foundation from geometry and graph theory. Chvátal's and Fisk's proofs are presented in detail, showing that the maximum cardinality of a point covering set is always less than or equal to $\lfloor n/3 \rfloor$, as well as the extension for polygons with h holes, where the bound becomes $\lfloor (n+2h)/3 \rfloor$. Special attention is also given to mobile guards, who move between two corners of the room. According to O'Rourke's proof, it is shown that no more than $\lfloor n/4 \rfloor$ mobile guards are

sufficient. Finally, the case of guarding the exterior of the gallery is considered, where it is proven that $\lceil n/2 \rceil$ guards are always sufficient and sometimes necessary.

06.09.2024.

Accepted by the Scientific Board:

ASB

Defended on:

DE

Thesis defend board:

DB

President:

Member:

Member, mentor:

Dr Olga Bodroža-Pantić, full professor at Faculty of Science in Novi Sad

Dr Vlado Uljarević, assistant professor at Faculty of Science in Novi Sad

Dr Ivica Bošnjak, full professor at Faculty of Science in Novi Sad