



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i
informatiku



Tanja Avramović

Spektralna svojstva nekih regularnih grafova

-završni rad-

Mentor:
dr Anna Slivková

Novi Sad, 2025

Predgovor

Grafovi su osnovni matematički objekti koji se koriste za modelovanje raznovrsnih struktura u prirodi, tehnologiji i društvu. Među njima, regularni grafovi imaju posebno značajnu ulogu jer su definisani jednakim stepenom svih svojih čvorova, što omogućava jednostavniju analizu njihovih svojstava. Jedan od bitnih alata za razumevanje strukture regularnih grafova jeste spektar njihove matrice susedstva, koji pruža važne informacije o povezanosti, simetriji i dinamičkim osobinama grafa.

U uvodnom delu ćemo upoznati osnovne oznake i pojmove koji će nam služiti dalje u radu. Zatim, u drugom odeljku su navedene neke osnovne definicije i tvrđenja iz teorije grafova koji su potrebni za razumevanje rada. Takođe, ova tema zahteva poznavanje mnogih teorema iz linearne algebre te su one navedene u ovom odeljku, a zatim ćemo istaknuti matrice susedstva i prikazati njihove osobine kao i osobine grafova kod čijeg ispitivanja nam ove matrice pomažu.

Nakon toga, fokusiraćemo se na specifične klase regularnih grafova i njihove spektre. U narednom, trećem poglavlju, definišemo osnovne regularne grafove kao što su kompletni, kompletni bipartitni grafovi i konture, određujemo njihove spektre i prateće osobine tih grafova.

U četvrtom odeljku ćemo se upoznati sa jednim od najpoznatijih regularnih grafova – Petersenovim grafom. Analiziraćemo njegove osnovne strukturalne i spektralne karakteristike, a zatim ćemo proučiti spektre generalizovanih Petersenovih grafova, koji predstavljaju proširenje osnovnog modela kroz parametre $P(n, k)$.

Peto poglavlje je posvećeno Mooreovim grafovima, čiji je akcenat stavljen na spektre grafova čiji je dijametar 2, a najveći takav graf jeste Hoffman-Singletonov graf. U ovom poglavlju ćemo dokazati i jednu od važnijih teorema teorije grafova - Hoffman-Singletonova teorema.

Posebnu pažnju u šestom poglavlju ćemo posvetiti hiperkockama i njihovim spektrima, koje imaju široku primenu u teoriji algoritama i paralelnom računarstvu.

U sedmom, poslednjem odeljku, analiziraćemo Platonove grafove i njihove spektralne osobine, kao i grafove dobijene odsecanjem pravilnih poliedara. Na kraju je navedena kratka biografija, i literatura na kojoj se bazira ovaj rad.

PREDGOVOR

Iskreno se zahvaljujem svom mentoru, dr Anni Slivkovej, na nesebičnoj podršci, strpljenju i stručnom vođenju tokom izrade ovog rada. Njeni saveti, sugestije i posvećenost značajno su doprineli kvalitetu mog istraživanja.

Zahvalnost dugujem i članovima komisije, dr Ivici Bošnjaku i dr Vladu Uljareviću, na izdvojenom vremenu, korisnim komentarima i objektivnoj oceni mog rada.

Posebnu zahvalnost upućujem svojim roditeljima i sestrama, čija su bezuslovna podrška, motivacija i vera u mene bili ključni u mom obrazovanju i akademskom napredovanju.

Novi Sad, februar 2025

Tanja Avramović

Sadržaj

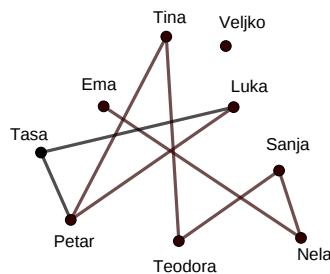
1	Uvod	4
2	Osnovni pojmovi grafa	5
2.1	Linearna algebra	10
3	Osnovni regularni grafovi	19
3.1	Kompletan graf	19
3.2	Kompletan bipartitni graf	21
3.3	Kontura	25
4	Generalizovani Petersenovi grafovi	28
4.1	Petersenov graf	28
4.2	Spektar generalizovanih Petersenovih grafova	32
5	Mooreovi grafovi	36
5.1	Mooreovi grafovi dijametra 2	39
5.2	Hoffman-Singletonova teorema	40
5.3	Hoffman-Singletonov graf	43
6	Hiperkocka	46
6.1	Spektar hiperkocke	50
7	Pravilni poliedri i odsecanje grafova	54
7.1	Odsecanje grafa	54
7.2	Platonovi grafovi	56
7.3	Odsecanje kubnih grafova	59
	Zaključak	63
	Literatura	64
	Biografija	66

1 Uvod

Teorija grafova je relativno mlada nauka. Godina 1936, kada je Deneš Kenig objavio knjigu Teorija konačnih i beskonačnih grafova smatra se godinom zasnivanja teorije grafova kao posebne matematičke discipline. Tada počinju i prva veća istraživanja u ovoj grani matematike. Nekoliko decenija kasnije matematičari uviđaju prednost korišćenja aparata linearne algebre pri izučavanju problema sa grafovima. Tako je proučavanje grafova uz pomoć karakterističnih korena i karakterističnih vektora matrica koje su im pridružene označilo nastanak spektralne teorije grafova, jedne od najekspanzivnijih i široko primenljivih teorija.

Pojam grafa se pojavljuje u mnogim naučnim disciplinama, i, uopšte, u čovekovim delatnostima. Poseban značaj ovaj pojam ima u elektrotehnici, računarstvu i nauci o organizaciji rada. Grafovi se obično prikazuju preko tačaka koje predstavljaju objekte i linija koje ih spajaju, a te linije predstavljaju binarnu relaciju među datim objektima.

Na primer, mogućnost kretanja vozila kroz neki grad može se predstaviti grafom, gde raskrsnice predstavljaju čvorove grafa, a ulice grane. Isto tako, različiti odnosi između pojedinaca u nekoj grupi se mogu predstaviti grafom. Tada bi pojedinci predstavljali čvorove, a grane bi označavale odnose pojedinaca kao što je simpatija, poznanstvo, uticaj itd.



Slika 1: Prijateljstva u grupi ljudi prikazana pomoću grafa

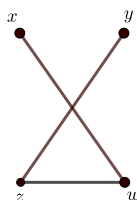
Ova oblast matematike u poslednjim decenijama doživljava veliku ekspanziju. Veliki broj istraživanja u teoriji grafova rezultat je velike primenljivosti teorije grafova. Uz nova istraživanja nastajale su i razvijale se sopstvene i originalne metode i još svestranije ostvarivale veze sa pojedinim matematičkim disciplinama, tako da danas teorija grafova predstavlja glavni alat u rešavanju mnogih problema u računarstvu, bioinformatici, hemiji, elektrotehnici itd.

2 Osnovni pojmovi grafa

Graf G (prost graf) je uređeni par $G = (V, E)$, gde je V konačan neprazan skup, a E podskup skupa svih dvoelementnih podskupova skupa V . Elemente skupa V nazivamo *čvorovi*, a elemente skupa E nazivamo *grane*. Često kada govorimo o nekom grafu G njegov skup čvorova označavamo i sa $V(G)$ a skup grana sa $E(G)$.

Graf možemo prikazati tako što ćemo predstaviti čvorove kao tačke, a grane kao linije koje povezuju dva čvora, pri čemu su čvorovi a i b povezani linijom ako i samo ako $\{a, b\} \in E$.

Primer 2.1. Neka je dat graf čiji je skup čvorova $V = \{x, y, z, w\}$ a skup grana $E = \{\{x, w\}, \{y, z\}, \{z, w\}\}$. Ovaj graf možemo predstaviti kao na slici dole:



Za grane se obično koriste kraći zapisi, te tako granu $\{x, w\}$ kraće označavamo i sa xw , pa su krajnji čvorovi ove grane x i w .

Bitno je napomenuti da grafičko predstavljanje grafa nije jedinstveno određeno.

Red grafa G , u oznaci $n(G)$, jeste broj njegovih čvorova, a *veličina grafa* G , u oznaci $m(G)$, je broj njegovih grana.

Dva čvora u i v grafa G se nazivaju *susednim* ako je uv grana grafa G . Ako je $e = uv$ grana grafa G , onda kažemo da su čvorovi u i v *incidentni* sa granom e i da je e *incidentno* sa čvorovima u i v . Dve grane su *susedne grane* ako su incidentne sa istim čvorom.

Skup susednih čvorova čvora v se naziva *susedstvo čvora* v i označava se sa $N(v)$.

Stepen čvora v je broj njegovih suseda u grafu G i oznaka je $d_G(v)$, ili samo

$d(v)$ ukoliko je jasno u kom se grafu posmatra. Dakle, $d(v) = |N(v)|$. Čvor koji nema susede, to jest stepena 0, nazivamo *izolovan čvor*. Čvor stepena 1 nazivamo *viseći čvor*. Viseća grana je grana incidentna sa visećim čvorom.

Za naredne dve teoreme dokaz se može pronaći u [15].

Teorema 2.2. Zbir svih stepena čvorova grafa jednak je dvostrukom broju njegovih grana.

Često bitnu ulogu igraju stepeni čvorova koji su minimalni odnosno maksimalni u datom grafu. Sa $\delta(G)$ označavamo *minimalan*, a sa $\Delta(G)$ *maksimalan stepen* čvorova grafa G tj.

$$\delta(G) = \min_{u \in V(G)} d(u) \text{ i } \Delta(G) = \max_{u \in V(G)} d(u).$$

Teorema 2.3. Za graf G sa n čvorova ispunjeno je

$$0 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq n - 1.$$

Vratimo se na primer 2.1.

Njegov red i veličina su $n(G) = 4$ i $m(G) = 3$. Jedan par susednih čvorova su z i w . Primer susednih grana je yz i zw . Čvor w je incidentan sa granama xw i zw . Na ovom grafu se vidi da je $d(x) = 1$, $d(y) = 1$, $d(z) = 2$, $d(w) = 2$, pa primetimo da su x i y viseći. Zbir svih stepena čvorova grafa jednak je dvostrukom broju njegovih grana. Primetimo i da je $\delta(G) = 1$ i $\Delta(G) = 2$.

Posebno se izdvajaju grafovi koji imaju specifične stepene čvorova.

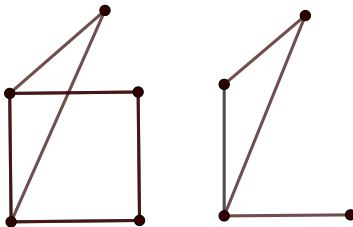
Regularan graf je graf čiji su svi čvorovi istog stepena. Ako je taj stepen r , onda kažemo još i r -regularan.

Poluregularan graf je graf čiji je skup stepena čvorova dvoelementan. Kažemo i da je (p, q) -regularan ako je $\{p, q\}$ skup stepena čvorova.



Slika 2: 3-regularan, 4-regularan, 5-regularan graf

Graf $G' = (V', E')$ je *podgraf* grafa $G = (V, E)$, u oznaci $G' \subseteq G$ ako važi $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$. Takođe, tada se G naziva *nadgraf* grafa G' .



Slika 3: Graf G i podgraf G'

Podgrafovi zapravo nastaju višestrukom primenom lokalnih operacija na grafu. To su:

- *odstranjivanje (brisanje) čvora $G - v$* – kada brišemo čvor v i sve grane incidentne sa njim;
- *odstranjivanje (brisanje) grane $G - e$* – kada brišemo samo granu e .

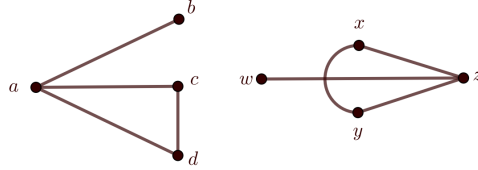
Pokrivajući (razapinjući) podgraf H grafa G je podgraf čiji su čvorovi svi čvorovi grafa G tj. $V(H) = V(G)$.

Često su u teoriji grafova zanimljive osobine grafa koje zavise samo od apstraktne definicije, a ne od njegovog označavanja čvorova i konkretnog predstavljanja. Zbog toga, razlikujemo sledeće definicije.

Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su:

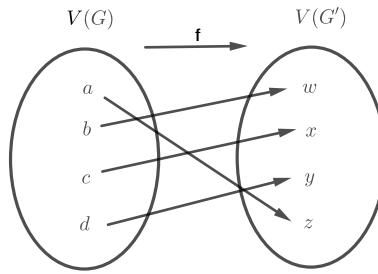
- *jednaki*, u oznaci $G_1 = G_2$ – ako važi $V_1 = V_2$ i $E_1 = E_2$;
- *izomorfni*, u oznaci $G_1 \cong G_2$ – ako postoji bijekcija $f : V_1 \rightarrow V_2$ tako da $uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2$, tj. očuvana je susednost.

Primer 2.4. Da li su grafovi sa slike 3 izomorfni?



Slika 4: Izomorfni grafovi

Jesu, a izomorfizam $f : V(G) \rightarrow V(G')$ je definisan na sledeći način:



Grane u G	Grane u G'
$\{a, b\}$	$\{z, w\} = \{g(a), g(b)\}$
$\{a, c\}$	$\{z, x\} = \{g(a), g(c)\}$
$\{a, d\}$	$\{z, y\} = \{g(a), g(d)\}$
$\{c, d\}$	$\{x, y\} = \{g(c), g(d)\}$

Tabela 1: Tabela grana grafa G i njihovih slika u G'

Postoje različite podele i različiti tipovi grafova.

Osnovna podela grafova je na *neorijentisane* i *orijentisane* grafove. Do sad smo prikazivali *neorijentisane grafove*. Kod *orijentisanog* grafa ili *digrafa* su sve grane $e = (u, v)$ orijentisane tj. bitan je redosled čvorova. Za granu $e = (u, v)$ kažemo da vodi iz čvora u u čvor v .

Bitni pojmovi za definisanje različitih tipova grafova su:

- *šetnja* - konačan neprazan niz $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ u kome se naizmenično smenjuju čvorovi i grane, pri čemu su v_{i-1} i v_i krajnji čvorovi grane e_i ;
- *petlja* - grana koja ima i početak i kraj u istom čvoru;
- *put* - niz različitih čvorova $v_1, \dots, v_s$ tog grafa takav da su v_i i v_{i+1} susedni za sve $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$;
- *kontura* - put u kojem se prvi i poslednji čvor poklapaju.

Obim grafa je dužina njegove najkraće konture. Ukoliko graf ne sadrži konturu, onda kažemo da je beskonačnog obima.

Naredne dve teoreme navodimo bez dokaza, a dokaz se može pronaći u [15]:

Teorema 2.5. Broj čvorova r -regularnog grafa sa neparnim opsegom $g = 2d + 1$ (gde je $d \in \mathbb{Z}^+$) je n , tako da važi

$$n \geq 1 + \sum_{i=0}^{d-1} r(r-1)^i.$$

Slična teorema za grafove koji imaju paran opseg:

Teorema 2.6. Broj čvorova r -regularnog grafa sa opsegom $g = 2d$ (gde je $d \geq 2$) je n , tako da važi

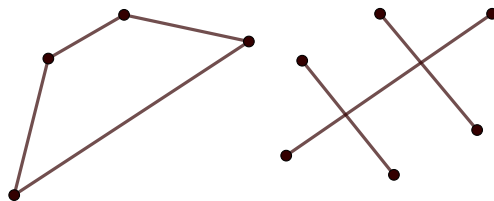
$$n \geq 1 + (r-1)^{d-1} + \sum_{i=0}^{d-2} r(r-1)^i = 2 \sum_{i=0}^{d-1} (r-1)^i.$$

Prost graf je neorijentisan graf bez petlji i višestrukih grana, a *multigraf* je graf kod kojeg se između dva čvora može nalaziti više od jedne grane.

Graf je *povezan* ako za svaka dva čvora postoji put koji ih povezuje. *Komponenta povezanosti* grafa je njegov podgraf koji je povezan i koji nije

povezan putem ni sa jednim čvorom van ovog podgrafa.

Spomenimo još povezanost čvorova i povezanost grana. *Povezanost čvorova* grafa G je najmanji broj čvorova koje je potrebno ukloniti iz G da bi on postao nepovezan ili trivijalan, nju označavamo sa $\kappa(G)$. *Povezanost grana* grafa G je najmanji broj grana koje je potrebno ukloniti iz G kako bi on postao nepovezan ili trivijalan, oznaka je $\kappa'(G)$.



Slika 5: Primer povezanog (levo) i nepovezanog grafa (desno)

Rastojanje između dva čvora u grafu je dužina najkraćeg puta koji ih povezuje. Rastojanje između čvorova u i v označavamo sa $d(u, v)$.

Neka je $G = (V, E)$ povezan graf. *Ekscentricitet* čvora u je rastojanje čvora u od njemu najudaljenijeg čvora: $e_G(u) = \max\{d_G(u, v) : v \in V\}$. *Poluprečnik grafa* G je najmanji ekscentricitet čvora u grafu: $r(G) = \min\{e_G(u) : u \in V\}$, a *dijametar grafa* G je najveći ekscentricitet čvora u grafu: $D(G) = \max\{e_G(u) : u \in V\}$.

2.1 Linearna algebra

Kako se rad bavi spektralnom teorijom grafova, pored osnovnih pojmova o grafovima, moramo se upoznati i sa pojmovima linearne algebre, tačnije sa nekim vrstama matrica, karakterističnim polinomom i karakterističnim korijenima.

Kvadratnu matricu A zvaćemo *simetričnom*, ako je jednaka svojoj transponovanoj matrici.

Minor M_{ij} date kvadratne matrice je determinanta podmatrice koja se dobija kada iz matrice uklonimo i -tu vrstu i j -tu kolonu. *Minor reda* k je determinanta podmatrice dimenzije k .

Glavni minor k -tog reda matrice A je determinanta podmatrice dimenzije k koja sadrži k elemenata glavne dijagonale.

Na ovaj način uklanjanje se vrši po glavnoj dijagonali.

Neka je V konačno-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $A : V \rightarrow V$ linearna transformacija.

Definicija 2.7. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ i nenula vektor $v \in V$ se nazivaju *karakterističan koren* i *karakterističan vektor* za transformaciju $A : V \rightarrow V$ ako je $Av = \lambda v$.

Definicija 2.8. Neka je $A \in \mathbb{F}^{n,n}$. Ako su $x \in \mathbb{F}^{n,1}$, $x \neq 0$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ takvi da je $Ax = \lambda x$, onda je x karakteristični vektor matrice A , a λ karakteristični koren te matrice.

S obzirom na to da je $Ax = \lambda x$ ekvivalentno sa $(A - \lambda E)x = 0$, sledi da karakteristične korene matrice A možemo naći kao rešenja karakteristične jednačine matrice A :

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

pri čemu je polinom

$$\det(A - \lambda E)$$

karakteristični polinom matrice A .

S obzirom na to da je karakteristični polinom matrice A n -tog stepena, sledi da matrica A ima n karakterističnih korena nad poljem kompleksnih brojeva, gde svaki od njih brojimo onoliko puta kolika mu je višestrukost. Ovu višestrukost nazivamo *algebarska višestrukost*.

Geometrijska višestrukost za karakteristični koren λ je jednaka $n - \text{rang}(\lambda E - A)$, gde je n red kvadratne matrice A . Algebarska višestrukost je uvek veća ili jednaka geometrijskoj višestrukosti.

Skup svih karakterističnih korena matrice A naziva se *spektar* te matrice i označava se sa $\sigma(A)$.

Definicija 2.9. Kvadratne matrice A i B su slične ako postoji regularna matrica P takva da važi $B = P^{-1}AP$.

Definicija 2.10. Kvadratna matrica A je dijagozabilna, tj. A se može dijagonalizovati, ako je slična nekoj dijagonalnoj matrici; to jest, ako postoji regularna matrica P takva da je $P^{-1}AP$ dijagonalna.

Definicija 2.11. Vektori $u, v \in \mathbb{R}^n$ su *ortogonalni* kada je

$$u \cdot v = 0,$$

što označavamo $u \perp v$.

Takođe, skup vektora je ortogonalan ako je svaki par različitih vektora iz tog skupa međusobno ortogonalan, odnosno njihov skalarni proizvod iznosi nula.

Sledeće teoreme će nam biti potrebne u daljem radu.

Teorema 2.12. Skup karakterističnih vektora koji odgovaraju različitim karakterističnim korenima simetrične matrice A je ortogonalan skup.

Dokaz. Neka su v i w dva karakteristična vektora simetrične matrice A sa pridruženim karakterističnim korenima, redom λ i μ , pri čemu je $\lambda \neq \mu$. Važi:

$$\begin{aligned} v^T(Aw) &= v^T(\mu w) = \mu(v^T w), \\ (v^T A^T)w &= (Av)^T w = \lambda(v^T w). \end{aligned}$$

Budući da je $A = A^T$, iz ovoga sledi

$$\mu(v^T w) = \lambda(v^T w) \implies (\mu - \lambda)v^T w = 0 \implies v^T w = 0,$$

jer je $\lambda \neq \mu$, a karakteristični vektori nisu nula vektori. Iz ovoga zaključujemo da su v i w međusobno ortogonalni, a kako smo ih birali proizvoljno, tvrđenje je dokazano. □

Dokazi sledećih teorema se mogu pronaći u [1].

Teorema 2.13. Neka je A kvadratna matrica. Matrica A se može dijagonalizovati ako i samo ako je geometrijska višestrukost svakog karakterističnog korena jednaka algebarskoj višestrukosti.

Teorema 2.14. Neka je A kvadratna matrica reda n . Tada je

$$\text{rang}(A) + d(A) = n,$$

gde je $\text{rang}(A)$ rang, a $d(A)$ defekt¹ od A .

Sada, kada smo se upoznali sa osnovnim pojmovima linearne algebre, prikazaćemo njenu vezu sa grafovima.

Svaki graf je moguće predstaviti matricom susedstva ili matricom inciden-
cije, čiji karakteristični polinom i karakteristične korene možemo odrediti i
obrnuto, na osnovu tih karakterističnih korena moguće je odrediti broj petlji
grafa, broj n -touglova, grana, bipartitnost itd.

Definicija 2.15. *Matrica susedstva* grafa G sa n čvorova je kvadratna ma-
trica $[a_{ij}]$ reda n , čiji su elementi a_{ij} jednaki 1 ako postoji grana od čvora v_i
do čvora v_j , dok ostali elementi imaju vrednost 0.

Elementi matrice susedstva prostog grafa mogu biti samo 0 i 1, i to je
definisano na sledeći način:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako su } v_i \text{ i } v_j \text{ susedni,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primetimo još neke osobine ove matrice.

- Matrica susedstva je simetrična, jer je susedstvo simetrična relacija
(čvor i susedan čvoru j ako i samo ako je čvor j susedan čvoru i .)
- Ako je graf G bez petlji, tada su svi elementi na glavnoj dijagonali
matrice $A(G)$ jednaki nuli. U suprotnom ako postoji petlja u čvoru v_i
tada elementu a_{ii} dodeljuje se vrednost 1.
- U grafu G , stepen čvora v_i je jednak zbiru elemenata u i -toj koloni,
odnosno vrsti matrice $A(G)$. Stoga, ako je graf G r -regularan, zbir
elemenata svake kolone, odnosno vrste, iznosi r .

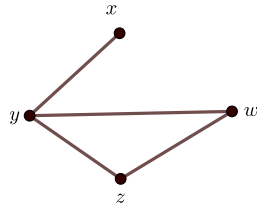
Definicija 2.16. Karakterističan koren (vektor) grafa G je karakterističan
koren (vektor) njegove matrice susedstva A .

¹Defekt matrice A , u oznaci d je: $d(A) = \dim(\ker(A))$, gde je $\ker(A)$ skup svih vektora
 x koji zadovoljavaju $Ax = 0$.

Definicija 2.17. *Spektar grafa* G , u oznaci $\sigma(G)$, je spektar matrice susedstva A sa svim njegovim višestrukostima. Ako su $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}$ različiti karakteristični koreni i njihove višestrukosti redom $k_0, k_1, \dots, k_{s-1}$, onda pišemo:

$$\sigma(G) = \sigma(A) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{s-1} \\ k_0 & k_1 & \dots & k_{s-1} \end{pmatrix}.$$

Primer 2.18. Odrediti matricu susedstva za sledeći graf:



Slika 6: Graf G

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sledeća teorema će nam biti potrebna u daljem radu, a njen dokaz se može pronaći u [1].

Teorema 2.19. Suma svih karakterističnih korena prostog grafa je jednaka nuli.

Teorema 2.20. Neka je G regularan graf stepena k . Tada:

- (1) k je karakterističan koren grafa G ;
- (2) ako je G povezan, onda je višestrukost korena k jednaka 1;
- (3) za bilo koji karakterističan koren λ od G , važi $|\lambda| \leq k$.

Dokaz. (1) Neka je $u = [1, 1, \dots, 1]^t$. Tada, ako je A matrica susedstva grafa G , imamo $Au = ku$, jer svaka vrsta u A ima tačno k jedinica. Stoga je k karakterističan koren grafa G .

- (2) Neka je $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t$ bilo koji nenula vektor za koji važi $Ax = kx$, i pretpostavimo da je x_j komponenta vektora x s najvećom apsolutnom vrednošću. Budući da važi $(Ax)_j = kx_j$, imamo:

$$\sum' x_i = kx_j,$$

gde $\sum'$ označava sumu preko onih k čvorova v_i koji su susedi v_j . Svo-
jstvom maksimalnosti x_j sledi da je $x_i = x_j$ za sve ove čvorove. Ako
je G povezan, možemo nastaviti s ovim postupkom, korak po korak, i
konačno pokazati da su sve komponente od x jednake. Tako je x skalarni
umnožak vektora u , a prostor karakterističnih vektora povezanih s
karakterističnim korenom k ima dimenziju 1.

- (3) Pretpostavimo da $Ay = \lambda y$, gde je $y \neq 0$, i neka y_j označava kompo-
nentu vektora y s najvećom apsolutnom vrednošću. Kao u prethodnom
argumentu, imamo $\sum' y_i = \lambda y_j$, pa važi:

$$|\lambda| |y_j| = |\sum' y_i| \leq \sum' |y_i| \leq k |y_j|,$$

pa važi:

$$|\lambda| \leq k.$$

□

Nije teško videti da važi sledeće tvrđenje.

Teorema 2.21. Neka je A matrica susedstva grafa G reda n , gde je n broj čvorova grafa G . Karakteristični koreni matrice A su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sa višestrukostima $m_1, m_2, \dots, m_k$, $1 \leq k \leq n$. Tada važi

$$\sum_{i=1}^k m_i = n.$$

Teorema 2.22. Neka je A realna simetrična matrica reda n sa karakterističnim korenima $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Tada za svako $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ važi:

$$\lambda_k = \max_{\substack{S \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{y \in S \setminus \{0\}} \frac{y^T A y}{y^T y} = \min_{\substack{T \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(T)=n-k+1}} \max_{y \in T \setminus \{0\}} \frac{y^T A y}{y^T y},$$

gde se maksimizacija i minimizacija vrše preko potprostora S i T prostora $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Dokazaćemo prvu jednakost, a druga se dokazuje analogno. Neka $x_1, x_2, \dots, x_n$ bude ortonormirana baza karakterističnih vektora matrice A koja odgovara karakterističnim korenima $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Najpre, proverimo da li se λ_k može dostići. Neka je S potprostor generisan vektorima $x_1, x_2, \dots, x_k$. Kako je $x_1, x_2, \dots, x_k$ ortonormirana baza, za svaki vektor $y \in S$ postoje realni koeficijenti $a_1, a_2, \dots, a_k$ tako da je

$$y = \sum_{i=1}^k a_i x_i.$$

U tom slučaju važi

$$\begin{aligned} y^T A y &= \left(\sum_{i=1}^k a_i x_i \right)^T A \left(\sum_{i=1}^k a_i x_i \right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^k a_i x_i \right)^T \left(\sum_{i=1}^k a_i \lambda_i x_i \right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^k a_i a_i \lambda_i x_i^T x_i \right) = \sum_{i=1}^k a_i^2 \lambda_i. \end{aligned}$$

Na osnovu ove jednačine, dobijamo sledeće:

$$\frac{y^T A y}{y^T y} = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i^2}{\sum_{i=1}^k a_i^2} \geq \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_k a_i^2}{\sum_{i=1}^k a_i^2} = \lambda_k.$$

Stoga,

$$\min_{y \in S \setminus \{0\}} \frac{y^T A y}{y^T y} \geq \lambda_k.$$

Da bismo pokazali da je ovo zaista maksimum, dokazaćemo da za sve potprostore S dimenzije k važi:

$$\min_{y \in S \setminus \{0\}} \frac{y^T A y}{y^T y} \leq \lambda_k.$$

Neka je T potprostor vektora $x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$. Kako T ima dimenziju $n - k + 1$ svaki potprostor S dimenzije k u preseku sa T daje potprostor

dimenzije najmanje 1. Prema tome,

$$\min_{y \in S} \frac{y^T A y}{y^T y} \leq \min_{y \in S \cap T} \frac{y^T A y}{y^T y} \leq \min_{y \in T} \frac{y^T A y}{y^T y}.$$

Svako $y \in T$ može se predstaviti kao $y = \sum_{i=k}^n a_i x_i$.

Prema tome, za svako $y \in T$ važi:

$$\frac{y^T A y}{y^T y} = \frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i a_i^2}{\sum_{i=k}^n a_i^2} \leq \frac{\sum_{i=k}^n \lambda_k a_i^2}{\sum_{i=k}^n a_i^2} = \lambda_k.$$

Odavde dobijamo:

$$\min_{y \in S} \frac{y^T A y}{y^T y} \leq \lambda_k.$$

Dakle,

$$\max_{\substack{S \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{y \in S \setminus \{0\}} \frac{y^T A y}{y^T y} = \lambda_k.$$

□

Teorema 2.23. Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$, $n = |V_1| = |V_2|$ su izomorfni ako i samo ako su njihove matrice susedstva $A(G_1)$ i $A(G_2)$ permutaciono slične, tj. ako i samo ako važi $A(G_2) = P A(G_1) P^{-1}$, gde je P permutaciona matrica.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako su grafovi G_1 i G_2 izomorfni, njihova matrica susedstva povezana je permutacijom vrsta i kolona tj. $A(G_2) = P A(G_1) P^{-1}$, gde je P permutaciona matrica. Množenje matrice $A(G_1)$ sa leve strane matricom P permutuje njene vrste, dok množenje sa desne strane matricom P^{-1} permutuje njene kolone.

($\Leftarrow$) Neka važi $A(G_2) = P A(G_1) P^{-1}$ i neka su čvorovi grafa G_1 označeni sa $\{v_1, \dots, v_n\}$ i čvorovi grafa G_2 označeni sa $\{w_1, \dots, w_n\}$. Tada postoji preslikavanje $f : G_1 \rightarrow G_2$ takvo da je $(v_i, v_k) \in E_1$ akko $(f(v_i), f(v_k)) \in E_2$, što je definicija izomorfizma grafova. □

Sledeća teorema nam daje odgovor na pitanje koliki je broj šetnji dužine k između dva proizvoljna čvora.

Teorema 2.24. Neka je $A(G)$ matrica susedstva grafa $G = (V, E)$. Tada je broj šetnji dužine k između čvorova $v_i, v_j \in V$ jednak elementu a_{ij}^k , tj. elementu na poziciji (i, j) u matrici $A(G)^k$.

Dokaz. Dokažimo teoremu indukcijom.

Neka je A matrica susedstva grafa G . Element a_{ij} matrice A predstavlja broj šetnji dužine 1 između čvorova v_i i v_j , a ovo tvrđenje važi po definiciji matrice susedstva: $a_{ij} = 1$ ako postoji grana između v_i i v_j .

Pretpostavimo da u matrici A^k element v_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, predstavlja broj puteva dužine k od v_i do v_j .

Pokazaćemo da ovo tvrđenje važi za $k + 1$. Šetnja dužine $k + 1$ između v_i i v_j može se podeliti na šetnju dužine k od v_i do nekog čvora v_l i šetnju dužine 1 od v_l do v_j . Tada dobijamo element

$$\sum_{l=1}^n v_{il}^k v_{lj}$$

koji predstavlja broj šetnji dužine $k + 1$ od v_i do v_j , odnosno predstavlja element v_{ij}^{k+1} u matrici A^{k+1} , što je i trebalo da se dokaže. $\square$

Postoji veza između koeficijenata karakterističnog polinoma i osobina grafa koji posmatramo. Koeficijenti p_0 i p_1 svakog prostog grafa jednaki su $(-1)^n$ i 0. Ako znamo koeficijente p_2 i p_3 , znamo i broj grana i obrnuto. Prikažimo ovu vezu.

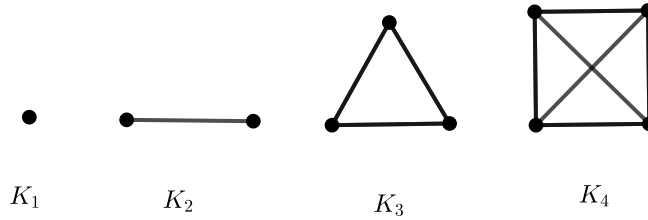
- Trag matrice A koji označavamo sa $tr(A)$, tj. broj petlji u grafu jednak je $(-1)^{1-n}p_1$, gde je p_1 koeficijent koji stoji uz λ^{n-1} .
- Trag matrice jednak je sumi svih karakterističnih korena matrice, odnosno $tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Pošto u radu govorimo o prostim grafovima, onda je trag matrice susedstva jednak nuli. Samim tim koeficijent p_1 i suma karakterističnih korena su jednaki nuli.
- Ako je p_2 koeficijent koji stoji uz λ^{n-2} , onda je $(-1)^{2-n}p_2$ jednako zbiru glavnih minora drugog reda matrice susedstva, odnosno je jednako $(-1)^{3-n}p_2$ broju grana u grafu.
- Proizvod $(-1)^{3-n}p_3$ je jednak zbiru glavnih minora trećeg reda matrice susedstva, odnosno dvostrukom broju trouglova u grafu.
- Slobodan član karakterističnog polinoma bilo kog grafa jednak je determinanti matrice susedstva.

3 Osnovni regularni grafovi

Regularni grafovi igraju značajnu ulogu u teoriji grafova, jer omogućavaju analizu strukture i svojstava grafova sa uniformnom povezanošću. U ovom odeljku razmatramo tri važna tipa regularnih grafova: kompletan graf, kompletan bipartitni graf i konturu, pri čemu posebnu pažnju posvećujemo njihovim spektrima.

3.1 Kompletan graf

Definicija 3.1. *Kompletan (potpun) graf sa n čvorova, u oznaci K_n je prost graf u kom su svaka dva čvora susedna.*



Slika 7: Kompletne grafovi

Iz definicije grafa K_n sledi da svaki čvor ima stepen jednak $n - 1$, pa je stoga zbir svih stepena jednak $n(n - 1)$, a broj grana $\frac{n(n-1)}{2}$.

Napomena 3.2. Komplement kompletnog grafa K_n ima n čvorova i nema grane, pa se naziva *prazan graf reda n* .

Matrica susedstva kompletnog grafa K_n je oblika

$$A(K_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} = J - E.$$

Pronađimo karakteristične korene ove matrice, tj. nule karakterističnog polinoma:

$$p_{A(K_n)}(\lambda) = \det(\lambda E - A(K_n)) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \lambda & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \lambda \end{vmatrix}.$$

Odmah vidimo da je $\lambda = -1$ jedan karakterističan koren, jer je $\det(-E - A(K_n)) = 0$. Odredimo mu višestrukost.

Kako je $A(K_n)$ simetrična matrica, ona se može dijagonalizovati pa je prema teoremi 2.13 algebarska višestrukost svakog karakterističnog korena jednaka geometrijskoj višestrukosti. Koristeći sada teoremu 2.14 o rang i defektu, imamo

$$r(\lambda E - A) + d(\lambda E - A) = n.$$

Znamo da je $d(\lambda E - A) = \dim(\text{Ker}(\lambda E - A)) = \gamma_A(\lambda)$ geometrijska višestrukost karakterističnog korena λ .

Za $\lambda = -1$ dobijamo

$$\gamma_A(-1) = n - r(-E - A) = n - 1,$$

pa je višestrukost karakterističnog korena $\lambda = -1$ jednaka $n - 1$. Kako je trag matrice $A(K_n)$ jednak sumi karakterističnih korena, to je

$$(n - 1)(-1) + \lambda = 0,$$

tj. $\lambda = n - 1$ je drugi karakterističan koren višestrukosti 1. Zaključujemo da je karakteristični polinom ¹ matrice susedstva oblika

$$p_{K_n}(\lambda) = (\lambda - (n - 1))(\lambda + 1)^{n-1},$$

a spektar je $\sigma(K_n) = \begin{pmatrix} -1 & n - 1 \\ n - 1 & 1 \end{pmatrix}$.

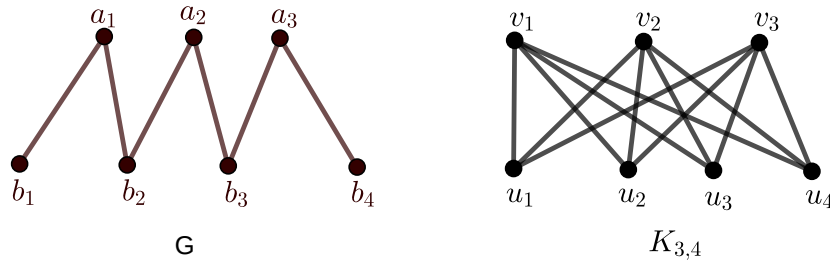
¹Karakterističan polinom smo mogli dobiti direktnim računanjem determinante tako što se ista svede na gornju trougaonu.

3.2 Kompletan bipartitni graf

Definicija 3.3. Graf sa bar dva čvora je *bipartitan* ako se njegov skup čvorova može podeliti na dva podskupa, X i Y , tako da svaka grana ima jedan kraj u X i jedan kraj u Y .

- Takva podela (X, Y) naziva se *biparticija grafa*, a X i Y su njegovi delovi.
- Bipartitni graf G sa bipartijom (X, Y) označavamo kao $G[X, Y]$.

Definicija 3.4. Ako je $G[X, Y]$ prost i svaki čvor u X povezan je sa svakim čvorom u Y , tada se G naziva *kompletan bipartitni graf*.



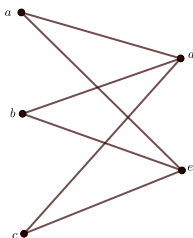
Slika 8: Bipartitni G i kompletan bipartitni graf $K_{3,4}$

- Ako je $G[X, Y]$ kompletan sa $|X| = r$ i $|Y| = s$, tada se $G[X, Y]$ označava kao $K_{r,s}$.
- Broj čvorova u $K_{r,s}$ je $r + s$.
- Broj grana u $K_{r,s}$ je $r \cdot s$.
- Svi čvorovi u X imaju stepen s , a svi čvorovi u Y imaju stepen r .

Napomena 3.5. Svaki kompletan bipartitni graf nije kompletan graf. Primer je sledeća slika:

Teorema 3.6. Ako je G bipartitni graf i biparticija G je X i Y , tada važi:

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v).$$



Dokaz. Svaka grana u grafu G povezuje jedan čvor iz X i jedan čvor iz Y . S obzirom na ovu strukturu, svaka grana u grafu doprinosi stepenima oba čvora. Zato, kada saberemo stepene svih čvorova u particiji X dobijamo ukupan broj pojavljivanja svih grana koje počinju iz X . Isto tako, zbir stepena svih čvorova u Y takođe predstavlja ukupan broj pojavljivanja svih grana koje završavaju u Y .

Međutim, budući da svaka grana povezuje jedan čvor iz X i jedan čvor iz Y , broj grana u grafu jednak je i zbiru stepena čvorova iz X i zbiru stepena čvorova iz Y , odnosno

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v) = |E|,$$

gde je $|E|$ broj grana u grafu G . □

Bipartitni grafovi imaju vrlo korisnu karakterizaciju koja je data u narednom tvrđenju čiji se dokaz može naći u [15].

Teorema 3.7. Graf sa bar dva čvora je bipartitan ako i samo ako ne sadrži neparne konture.

Iz definicije regularnosti grafa sledi da je kompletan graf sa n čvorova $(n - 1)$ -regularan.

Teorema 3.8. Ako je G k -regularan bipartitan, $k > 0$, graf i biparticija grafa G je X i Y , tada je broj elemenata u X jednak broju elemenata u Y .

Dokaz. Primetimo, $\sum_{v \in X} d(v) = k \cdot |X|$ i $\sum_{v \in Y} d(v) = k \cdot |Y|$. Na osnovu Teoreme 3.1. sledi $k \cdot |X| = k \cdot |Y| \Rightarrow |X| = |Y|$. □

Teorema 3.9. Karakterističan polinom matrice susedstva kompletnog bipartitnog grafa ima oblik

$$p_{K_{m,n}}(\lambda) = \frac{\lambda^m \lambda^n}{\lambda^2} (\lambda^2 - mn).$$

tj. njegov spektar je $\sigma(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{mn} & -\sqrt{mn} \\ m+n-2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dokaz. Matrica susedstva $A(K_{m,n})$ ima oblik:

$$A(K_{m,n}) = \begin{bmatrix} 0 & J \\ J^T & 0 \end{bmatrix},$$

gde je J matrica $m \times n$ čiji su svi elementi jednaki jedan.

Rang matrice $A(K_{m,n})$ je dva. Prema tome nulitet matrice $A(K_{m,n})$ je $m+n-2$, te je geometrijska višestrukost karakterističnog korena $\lambda = 0$ jednaka $m+n-2$. Zato $A(K_{m,n})$ ima bar $m+n-2$ karakterističnih korena jednakih nuli. Znači najviše dva karakteristična korena su različita od nule. Na osnovu teoreme 2.19 karakteristični koreni matrice $A(K_{m,n})$, koji su različiti od nule, imaju oblik λ i $-\lambda$.

Vrednost karakterističnog korena λ dobijamo rešavanjem karakteristične jednačine $A(K_{m,n})x = \lambda x$. Važi

$$\begin{aligned} A(K_{m,n})x &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m} \\ \vdots \\ x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sledi, vektor x možemo napisati pomoću n komponenti α i m komponenti β , te imamo:

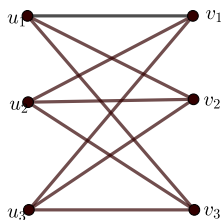
$$m\beta = \lambda\alpha \quad \text{i} \quad n\alpha = \lambda\beta.$$

Iz čega sledi:

$$\lambda = \pm\sqrt{mn}.$$

□

Primer 3.10. Odredimo spektar grafa $K_{3,3}$.



Slika 9: Kompletan bipartitni graf $K_{3,3}$

$$\sigma(K_{3,3}) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3 \cdot 3} & -\sqrt{3 \cdot 3} \\ 3 + 3 - 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{9} & -\sqrt{9} \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Koristeći narednu lemu, koja je dokazana u [3], dokazaćemo teoremu vezanu za matricu susedstva grafa $K_{r,r}$.

Lema 3.11. Za svaki ceo broj $r > 1$, jedini r -regularan graf G koji ima obim $g = 4$ i tačno $2r$ čvorova je kompletan bipartitni graf $K_{r,r}$.

Teorema 3.12. Neka je G r -regularan graf sa opsegom četiri i $2r$ čvorova, i neka je A matrica susedstva grafa G . Tada važi sledeća jednakost:

$$A^2 + rA = rE.$$

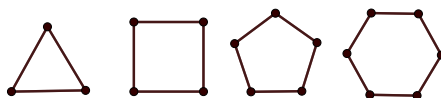
Dokaz. Neka su i i j čvorovi u G . Pošto je G kompletan bipartitni graf, i i j imaju r zajedničkih suseda ako i nije susedno sa j i nemaju zajedničkih suseda ako je i susedno sa j . Dakle, A^2 ima nule tamo gde A ima jedinice, i r -ove gde A ima nule. Dakle,

$$A^2 + rA = rE.$$

□

3.3 Kontura

Podsetimo se da je kontura put čiji se prvi i poslednji čvor poklapaju. Mi ćemo konturu sa n čvorova označavati C_n i govoriti da je to kontura dužine n .

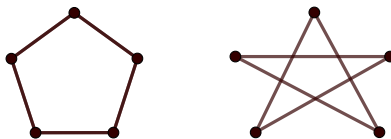


Slika 10: Konture C_3, C_4, C_5, C_6

Prikažimo neke bitne osobine ovog grafa:

- Broj čvorova (n) u C_n jednak je broju grana ($n \geq 3$).
- Svaki čvor je stepena 2, tj. svaki čvor ima tačno dve grane koje su incidentne sa tim čvorom.
- Kontura C_n je 2-regularan graf.
- Graf C_n je povezan graf.
- Na osnovu teoreme 3.7 znamo da važi: ako je n -paran, onda je graf C_n bipartitan.

Graf C_5 je specifičan, jer je jedina kontura koja je samokomplementarna, odnosno $C_5 \cong \overline{C_5}$.



Slika 11: Kontura C_5 i njegov komplement

Konture su vrlo zanimljivi grafovi, a iako se ubrajaju u najjednostavnije tipove grafova, proučavanje njihove matrice susedstva nije nimalo jednostavan zadatak. U nastavku ćemo formulisati i dokazati teoremu koja u potpunosti karakterizuje spektar matrice susedstva kontura C_n .

Matrica susedstva konture C_n je:

$$A(C_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sledeća teorema nam daje spektar matrice $A(C_n)$.

Teorema 3.13. Spektar matrice susedstva konture C_n je:

$$\sigma(C_n) = \{2 \cos(\frac{2\pi l}{n}) : l = 1, \dots, n\}.$$

Dokaz. Neka je W kvadratna matrica reda n za koju važi da je svaka naredna vrsta dobijena od prethodne tako što se svaki element pomakne za jedno mesto udesno, a poslednji element dolazi na prvo mesto, odnosno:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za proizvoljan celi broj k , matrica W^k je permutacijska matrica koja u prvom redu na poziciji $k+1$ ima jedinicu, svi ostali elementi su nule, a svaki sledeći red nastao je od prethodnog pomeranjem svakog elementa udesno za jednu poziciju. Ovo je smisleno za proizvoljno k , s obzirom da za $k > n$ uzimamo brojeve kongruentne sa k po modulu n umesto k . Stoga za matricu susedstva kontura važi:

$$A(C_n) = W + W^{-1}.$$

Pomoću karakterističnih korena matrice W ćemo odrediti karakteristične korene matrice $A(C_n)$. Matrica W deluje na proizvoljan vektor tako da mu elemente pomeri za jedno mesto gore, a prvi element stavi na zadnje mesto. Dakle, ako je $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$ karakterističan vektor od W kome odgovara karakterističan koren λ , onda važi:

$$v_1 = \lambda v_n = \lambda^2 v_{n-1} = \dots = \lambda^n v_1.$$

Dobijamo $\lambda^n = 1$. Ova jednačina ima n međusobno različitih kompleksnih korena. Prema de Moivreovoj formuli ² za korenovanje kompleksnih brojeva, korene broja 1 možemo zapisati kao w^l pri čemu je $w = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n})$, $l = 0, 1, \dots, n-1$. Zaista, svaki od karakterističnih korena $\lambda_l = w^l$ ima višestrukost 1, jer ako izaberemo $v_1 = 1$, prethodna jednakost nam daje vektor:

$$u_l = (1, w^l, w^{2l}, \dots, w^{(n-1)l})^t.$$

Sledi da spektar matrice W^k sadrži jednostruke karakteristične korene, pri čemu su koreni stepeni broja w .

Budući da je karakterističan koren za λ_k matrice W^k nezavisan od k , lako možemo dobiti karakteristične korene od C_n :

$$A(C_n)u_l = Wu_l + W^{-1}u_l = (w^l + w^{-l})u_l.$$

Sledi:

$$w^l + w^{-l} = \cos(\frac{2\pi l}{n}) + i \sin(\frac{2\pi l}{n}) + \cos(\frac{2\pi l}{n}) - i \sin(\frac{2\pi l}{n})$$

$$w^l + w^{-l} = 2 \cos(\frac{2\pi l}{n}), l = 0, 1, \dots, n-1.$$

□

²De Moivreova formula je ključna za rešavanje problema povezanih sa kompleksnim brojevima, posebno kada se radi o potencijama i korenima. Ona glasi $(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$. Za kompleksne brojeve u obliku $z = e^{ix}$, formula se direktno koristi.

4 Generalizovani Petersenovi grafovi

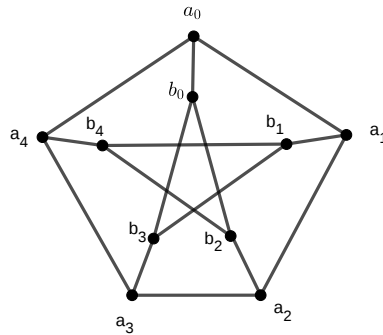
Petersenov graf je jedan od najpoznatijih i najčešće proučavanih grafova u teoriji grafova zbog svojih jedinstvenih svojstava i širokog spektra primena. On se često koristi kao kontraprimer u dokazima mnogih teorema i hipoteza u teoriji grafova. Kao uopštenje Petersenovog grafa se definišu generalizovani Petersenovi grafovi, ali pre nego što njih definišemo, najpre se pozabavimo samim Petersenovim grafom.

4.1 Petersenov graf

U nastavku ovog odeljka ćemo se baviti nekim istaknutim svojstvima Petersenovog grafa i istaći ćemo tvrđenja koja se tiču spektra ovog grafa.

Prvo ćemo definisati i opisati ovaj oblik Petersenovog grafa.

Definicija 4.1. Petersenov graf (u oznaci $P(5, 2)$) je prost graf čiji su čvorovi 2-elementni podskupovi skupa sa 5 elemenata, a grane su parovi disjunktih 2-elementnih podskupova.



Slika 12: Petersenov graf

Ovaj graf ima 10 čvorova i 15 grana. Možemo primetiti da je sačinjen od dve konture dužine 5, gde imamo još grane koje povezuju odgovarajuće čvorove „unutrašnjeg” i „spoljašnjeg” kontura. Videćemo u narednom odeljku na koji način je ovo povezano sa uopštenjem.

Da bismo izračunali karakteristične korene Petersenovog grafa koristimo sledeću činjenicu: svaki čvor ima isti stepen (3) i svaki par čvorova $(u, v) \in E$ deli isti broj zajedničkih suseda (0), a svaki par čvorova $(u, v) \notin E$ deli isti broj zajedničkih suseda (1). U terminima matrice susedstva A , ovo se može izraziti na sledeći način:

- $(A^2)_{ij} = \sum_k a_{ik}a_{kj}$ je broj suseda koji su zajednički za i i j .
- Za $i = j$, $(A^2)_{ij} = 3$.
- Za $i \neq j$, $(A^2)_{ij} = 1 - a_{ij}$; ili 0 ili 1, u zavisnosti od toga da li $(i, j) \in E$.

U sažetom obliku, ovo se može napisati kao:

$$A^2 + A - 2E = J.$$

Uzmimo bilo koji karakterističan vektor x , pa važi $Ax = \lambda x$. Odavde vidimo da je jedan karakterističan vektor sigurno $\mathbf{1}$ i njemu odgovarajući karakterističan koren je 3. Osim toga, svi karakteristični vektori su ortogonalni sa $\mathbf{1}$, što takođe znači $Jx = 0$. Tada imamo:

$$(A^2 + A - 2E)x = \lambda^2 x + \lambda x - 2x = 0.$$

Ovo znači da svaki karakterističan koren, osim najvećeg, mora zadovoljavati kvadratnu jednačinu:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Stoga ova jednačina ima dva rešenja 1 i -2 .

Na kraju, računamo višestrukost svakog korena iz uslova $\sum \lambda_i = 0$. Najveći karakteristični koren ima višestrukost 1 (očigledno je da svaki vektor koji zadovoljava $Ax = 3x$ ima višestrukost 1). Ako pretpostavimo da karakterističan koren 1 ima višestrukost a i karakterističan koren -2 ima višestrukost b , onda dobijamo $3 + a \cdot 1 + b \cdot (-2) = 0$ i $a + b = 9$, odakle sledi da je $a = 5$ i $b = 4$.

Zaključujemo da je spektar Petersenovog grafa sledeći:

$$\sigma(P(5, 2)) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Posmatrajmo Petersenov graf $P(5, 2)$ sa slike 12. Prikažimo njemu odgovarajuću matricu susedstva.

Dakle, to je graf sa 10 čvorova i 15 grana, gde je svaki čvor povezan sa tri druga čvora. Njegova matrica susedstva A je kvadratna matrica 10×10 , i ona izgleda ovako:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prikažimo primenu karakterističnih korena na sledeće pitanje. Da li je moguće podeliti skup grana kompletnog grafa K_{10} na tri disjunktne podskupa tako da svaki podskup indukuje graf izomorfan Petersenovom grafu? Graf K_{10} ima 45 grana, 9 na svakom čvoru, dok Petersenov graf ima 15 grana, 3 na svakom čvoru. Sledeća teorema daje odgovor na ovo pitanje.

Teorema 4.2. Ne postoji dekompozicija grana grafa K_{10} na tri disjunktne kopije Petersenovog grafa.

Dokaz. Dokazujemo svođenjem na kontradikciju.

Pretpostavimo da skup grana grafa K_{10} može biti razložen u tri disjunktne kopije Petersenovog grafa, odnosno da se matrice susedstva Petersenovog grafa mogu sabrati u matricu susedstva grafa K_{10} . Neka je P matrica susedstva Petersenovog grafa.

Prema našoj pretpostavci,

$$A(K_{10}) = J - E = P + Q + R,$$

gde su $Q = S_1 P S_1^{-1}$ i $R = S_2 P S_2^{-1}$ za različite permutacione matrice S_1 i S_2 . Pošto su Q i R slične matrici P , njihovi karakteristični koreni su takođe 3, 1 i -2 . Pored toga, e je karakterističan vektor koji odgovara karakterističnom

korenu 3 matrice P .

Posmatrajmo sada karakteristične prostore W_P i W_Q koji odgovaraju karakterističnom korenu 1 za matrice P i Q :

$$W_P = \{x \in \mathbb{R}^{10} : Px = x\}, \quad W_Q = \{y \in \mathbb{R}^{10} : Qy = y\}.$$

Kako je višestrukost korena 1 za Petersonov graf 5, sledi $\dim(W_P) = 5$ i $\dim(W_Q) = 5$.

Takođe, za svako $x \in W_P \cup W_Q$, imamo $e^T x = 0$ (pošto su P i Q simetrične matrice, njihovi karakteristični vektori mogu biti izabrani tako da budu ortogonalni), tj. $x \in e^\perp$.

Međutim, $\dim(e^\perp) = 9$, pa sledi da je $\dim(W_P \cap W_Q) \geq 1$.

S druge strane, dokažimo da je $W_P \cap W_Q$ nula prostor, što će nas dovesti do kontradikcije. Naime, ako $z \in W_P \cap W_Q$, tada:

$$e^T z = 0,$$

jer je e karakterističan vektor.

Tada dobijamo:

$$Rz = (J - E - P - Q)z = (0 - 1 - 1 - 1)z = -3z,$$

te pošto -3 nije karakterističan koren matrice R , sledi da z mora biti jedino 0.

□

4.2 Spektar generalizovanih Petersenovih grafova

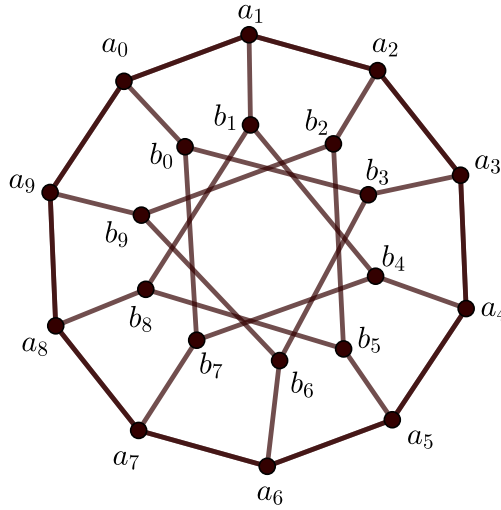
Generalizovan Petersenov graf $P(n, k)$ ima čvorove i grane definisane kao

$$V(P(n, k)) = \{a_i, b_i \mid 0 \leq i \leq n-1\},$$

$$E(P(n, k)) = \{a_i a_{i+1}, a_i b_i, b_i b_{i+k} \mid 0 \leq i \leq n-1\},$$

gde su indeksi izraženi kao celi brojevi po modulu n ($n \geq 5$), a k je „preskok”. Neka su $A(n, k)$ (odnosno $B(n, k)$) podgraf $P(n, k)$ koji se sastoji od čvorova $\{a_i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ (odnosno $\{b_i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$) i grana $\{a_i a_{i+1} \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ (odnosno $\{b_i b_{i+k} \mid 0 \leq i \leq n-1\}$).

Nazvaćemo $A(n, k)$ (odnosno $B(n, k)$) *spoljašnjim* (odnosno *unutrašnjim*) podgrafom $P(n, k)$. Prikažimo graf $P(10, 3)$.



Slika 13: Petersenov graf $P(10, 3)$

Svaki graf iz klase $P(n, k)$ je 3-regularan, bez obzira na vrednosti n i k .

Kao što smo pomenuli u prethodnom odeljku, Petersenov graf je specijalan slučaj generalizovanog Petersenovog grafa i njegovi parametri su $n = 5$ i $k = 2$, gde je:

- n - broj čvorova u spoljašnjoj konturi,
- k - „skok” koji određuje kako su unutrašnji čvorovi međusobno povezani.

Objasnimo malo detaljnije pomenuti „skok”: Svaki čvor b_i je povezan sa čvorom b_{i+k} , pri čemu se računa po modulu n (što znači da se indeksi vraćaju na početak konture nakon što pređu $n - 1$).

Primer 4.3. Posmatrajmo sliku 12. To je prikaz Petersenovog grafa $P(5, 2)$. Spoljašnja kontura ima $n = 5$ čvorova $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$. Unutrašnja kontura spaja b_i sa b_{i+2} po modulu 5 (b_0 sa b_2 , b_1 sa b_3 itd.).

Opišimo sada spektar generalizovanih Petersenovih grafova $P(n, k)$. Matricu susedstva generalizovanog Petersenovog grafa $P(n, k)$ označavamo sa $A(P(n, k))$. Neka $\lambda_0 = 3 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{2n-1}$ bude niz karakterističnih korena grafa $P(n, k)$.

Matricu cirkulacije³ reda $n \times n$ označićemo sa $circ(a_1, a_2, \dots, a_n)$, ako je oblika:

$$circ(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Lema 4.4. Matrica susedstva reda $2n \times 2n$ generalizovanog Petersenovog grafa $P(n, k)$ je blok matrica:

$$\begin{pmatrix} C_k^n & E_n \\ E_n & C^n \end{pmatrix},$$

gde je E_n jedinična matrica reda $n \times n$, C^n i C_k^n matrice cirkulacije reda n , pri čemu:

$$C^n = circ(0, 1, 0, 0, \dots, 0, 1) \text{ i } C_k^n = circ(\overbrace{0, \dots, 0}^{k \text{ puta}}, 1, 0, \dots, 0, 1, \overbrace{0, \dots, 0}^{k-1 \text{ puta}})$$

s tim što se k -puta 1 pomera u C_k^n . C^n i C_k^n su matrice susedstva za $A(n, k)$ i $B(n, k)$ redom. Prema tome, C^n je matrica susedstva cikličnog grafa sa n čvorova C_n , dok je C_k^n unija d cikličnih grafova $C_{\frac{n}{d}}$ sa $\frac{n}{d}$ čvorova, gde je $d = nzd(n, k)$.

³Matrica cirkulacije je kvadratna matrica u kojoj su svi vektori vrsta sastavljeni od istih elemenata i svaki vektor vrsta je pomeren za jedan element udesno u odnosu na prethodni vektor vrsta.

Dokaz. Spoljašnji podgraf (čija je matrica susedstva C^n) grafa $P(n, k)$ je ciklični graf C_n , dok unutrašnji podgraf (čija je matrica susedstva C_k^n) ima d povezanih komponenti, od kojih je svaka izomorfna sa $C_{\frac{n}{d}}$. Takođe, matrica susedstva (koja zavisi od oznaka) ima oblik u kojem su oznake korišćene u spoljašnjem podgrafu uzastopno $1, 2, \dots, n$, a u unutrašnjem podgrafu susedne oznake su $i, i+k, i+2k, \dots$ (gde se $i+sk$ računa kao $1+(i-1+sk) \pmod{n}$). Primetimo da je čvor b_0 susedan čvoru b_k i čvoru označenom b_{n-k} u podgrafu $B(n, k)$, pa je:

$$C_k^n = \text{circ}(\overbrace{0, \dots, 0}^{k \text{ puta}}, 1, 0, \dots, 0, 1, \overbrace{0, \dots, 0}^{k-1 \text{ puta}}).$$

□

Primetili smo da je generalizovan Petersenov graf usko povezan sa cikličnim grafom, pa će nam za dokazivanje njegovih karakterističnih korena biti potreban spektar matrice susedstva cikličnog grafa koji smo definisali u teoremi 3.13.

Teorema 4.5. Karakteristični koreni grafa $P(n, k)$, označimo ih sa δ_j i δ_{j+1} , su svi koreni kvadratne jednačine:

$$\delta^2 - (\alpha_j + \beta_j)\delta + \alpha_j\beta_j - 1 = 0, \quad (1)$$

gde su $\alpha_j = 2 \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$ i $\beta_j = 2 \cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right)$, za $0 \leq j \leq n-1$, karakteristični koreni grafa C i C_k , redom.

Dokaz. Razmatramo najpre slučaj kada je $d = nzd(n, k) = 1$. Pošto je $d = 1$, tada je C_k matrica susedstva cikličnog grafa izomorfno grafu C_n , pa je slična matrici C . To znači da postoji permutaciona matrica P takva da važi $P^{-1}C_kP = C$. Ovo implicira da ove dve matrice imaju iste karakteristične korene i karakteristične vektore. Stoga su α_j, β_j karakteristični koreni koji odgovaraju istom karakterističnom vektoru $v_j = (1, \zeta_n^j, \zeta_n^{2j}, \dots, \zeta_n^{(n-1)j})^T$.

Tražimo karakterističan vektor za matricu $A(P(n, k))$ oblika $w_j = (a_j v_j, v_j)^T$, gde će a_j biti određen kasnije. Ako se nađu dve različite vrednosti za a_j , za neko $0 \leq j \leq n-1$, tada završavamo pretragu za karakteristične korene/karakteristične vektore.

Za vektor w_j nam je potrebna vrednost δ (u zavisnosti od j) takva da

$$\begin{pmatrix} C_k & E_n \\ E_n & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j v_j \\ v_j \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} a_j v_j \\ v_j \end{pmatrix}.$$

Iz ovoga dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} a_j C_k v_j + v_j = \delta a_j v_j &\iff a_j \beta_j v_j + v_j = \delta a_j v_j \\ a_j v_j + C v_j = \delta v_j &\iff a_j v_j + \alpha_j v_j = \delta v_j \end{aligned}$$

što implicira:

$$\begin{aligned} a_j(\delta - \beta_j)v_j &= v_j \\ (\delta - \alpha_j)v_j &= a_j v_j. \end{aligned}$$

Iz ovoga sledi da:

$$(\delta - \beta_j)(\delta - \alpha_j) = 1,$$

što dokazuje tvrđenje za ovaj slučaj, tj. δ mora zadovoljiti kvadratnu jednačinu: $\delta^2 - (\alpha_j + \beta_j)\delta + \alpha_j\beta_j - 1 = 0$.

Slučaj kada je $d > 1$ radi se na sličan način. Karakteristični vektori w_j moraju biti oblika $w_j = (a_1 v'_j, a_2 v'_j, \dots, a_d v'_j, v_j)^T$, gde je v_j prethodno definisano i $v'_j = (1, \zeta_n^j, \dots, \zeta_n^{(n'-1)j})^T$, $n' = n/d$, za neke odgovarajuće množioce a_j . Sličan sistem se dobija kao u slučaju $d = 1$, a interesantno je da će se dobiti isti polinom čiji su koreni karakteristični koreni λ_i . Ovim je teorema dokazana. □

Koristeći kvadratnu formulu (1), dobijamo sledeću teoremu:

Teorema 4.6. Karakteristični koreni grafa $P(n, k)$ dati su formulom

$$\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right) \pm \sqrt{\left(\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right)\right)^2 + 1},$$

gde $0 \leq j \leq n - 1$.

Najveći karakteristični koren grafa $P(n, k)$, $\lambda_0 = 3$, jedan je od dve vrednosti dobijene za $j = 0$ u prethodnom tvrđenju.

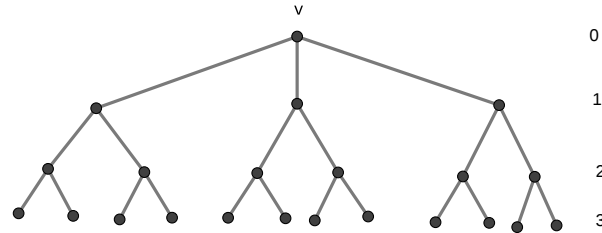
5 Mooreovi grafovi

Mooreov graf je specijalan tip grafa koji ima maksimalan broj čvorova za dati stepen regularnosti i dati dijametar. Prvo ćemo videti kako se ovi grafovi konstruišu, a zatim ćemo ispitati spektre Mooreovih grafova koji su dijametra 2. Pored Petersenovog grafa, u Mooreove grafove spada i Hoffman-Singletonov graf, čiju ćemo strukturu i spektar takođe ispitati, a pre toga ćemo dokazati jednu od važnijih teorema u teoriji grafova.

Pojam Mooreovih grafova ćemo uvesti koristeći specijalno stablo koje se zove *BFS* (Breadth First Search⁴) stablo. Pretpostavimo da postoji povezan k -regularan graf s n čvorova i dijametra d . Za zadat graf G i određeni početni čvor v , BFS prolazi kroz grane grafa G kako bi pronašao svaki čvor koji se može posetiti počevši od čvora v . Zanima nas najveći broj čvorova (n) koji može imati takav graf.

Slučaj $k = d = 1$ je trivijalan, odnosno jedini 1-regularan graf dijametra 1 je kompletan graf K_2 pa je $n = 2$.

Sada, pretpostavimo $k \geq 2$ i $d \geq 2$. Konstruišemo BFS stablo.



Slika 14: Mooreov graf tipa $(3, 3)$

Ideja je da se iz čvora v prvo posete svi susedni čvorovi, a nakon toga svi „susedi suseda” itd. sve dok se ne posete svi čvorovi dostupni iz čvora v . BFS računa i udaljenost (najmanji broj grana) od v do svih dostupnih čvorova. Čvor v je na nivou 0 (udaljenost od samog sebe je 0). Čvorovi na nivou

⁴BFS stablo prikazuje način na koji se može dosegnuti svaki čvor u grafu počevši od jednog čvora, dok se prolazi sloj po sloj, tj. udaljenost po udaljenost.

1 su susedi čvora v . Čvorovi na nivou 2 su susedi čvorova na nivou 1, ali se isključuju čvorovi koji su već posećeni (v se ne računa ponovo), pa na ovom nivou imamo najviše $k \cdot (k - 1)$ čvorova. Na nivou 3 ($d = 3$) su susedi čvorova sa nivoa 2, ali se opet isključuju prethodno posećeni čvorovi. Ovde ima najviše $k \cdot (k - 1)^2$ čvorova.

Na osnovu ove priče, dobijamo ukupan broj čvorova koje možemo dosegnuti iz čvora v :

$$n \leq 1 + k + k(k - 1) + k \cdot (k - 1)^2 + \dots + k \cdot (k - 1)^{d-1} = 1 + k \sum_{i=0}^{d-1} (k - 1)^i.$$

Desna strana nejednačine se zove *Mooreova granica*, u oznaci $n_{k,d}$. Moore-ovi grafovi su uvek k -regularni, a njihova posebnost je u tome što su retki. Za Mooreove grafove stepena k i dijametra d kažemo da su *Mooreovi grafovi tipa (k, d)* .

Mooreove grafove su prvi proučavali A.J. Hoffman i R.R. Singleton 1960. godine u kojem su se bavili grafovima dijametra 2 i 3. Dokazali su postojanje i jedinstvenost za $k = 2, 3, 7$, dok je za 57 postojanje takvog grafa i dalje otvoren problem. O osobinama i spektralnim svojstvima ovih grafova ćemo pričati u nastavku poglavlja.

Dokažimo teoremu koja povezuje matricu susedstva i dijametar.

Teorema 5.1. Za $k, D \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definišemo polinome $F_i(x)$ rekursivno na sledeći način:

$$F_{i+1}(x) = xF_i(x) - (k - 1)F_{i-1}(x),$$

$$F_1(x) = x + 1,$$

$$F_0(x) = 1.$$

Ako je A matrica susedstva Mooreovog grafa tipa (k, D) , onda je $F_D(A) = J$, pri čemu je J kvadratna matrica čiji su svi elementi jednaki 1.

Dokaz. Za fiksne k i D pretpostavimo da postoji Mooreov graf tipa (k, D) i označimo ga sa $G = (V, E)$. Za $0 \leq m \leq D$ i $x, y \in V$ pokazaćemo da važi:

$$[F_m(A)]_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{ako postoji put od } x \text{ do } y \text{ udaljenosti najviše } m, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (2)$$

Drugim rečima, element u matrici $F_m(A)$ koji se nalazi u koloni koji odgovara čvoru x i u vrsti koja odgovara čvoru y jednak je 1 ako postoji (x, y) -put i ako važi $d(x, y) \leq m$. U suprotnom je element matrice jednak nuli.

Ovo tvrđenje ćemo dokazati metodom matematičke indukcije po broju m .

Za $m = 0$ imamo $F_0(A) = E$, jer put udaljenosti 0 postoji samo između čvorova koji su identični, pa polinom F_0 izjednačen u matrici A daje jediničnu matricu E .

Za $m = 1$ posmatramo sve puteve udaljenosti nula ili jedan između čvorova u G . Jasno je da je u tom slučaju $F_1(A) = A + E$. Pretpostavimo da za $2 \leq m \leq d$ važi (2).

Prema definiciji proizvoda dve matrice, imamo

$$[AF_m(A)]_{x,y} = \sum_{z \in V} A_{x,z} [F_m(A)]_{z,y}.$$

Bez umanjavanja opštosti, možemo pretpostaviti da je y početni čvor. Neka se čvor x nalazi na udaljenosti j . Razmatrajmo sledeće slučajeve:

1. slučaj: $0 \leq j < m$

S obzirom na to da je x na udaljenosti j , znamo da postoji put od y do x , a kako je $j < m$, to prema pretpostavci važi $[F_{m-1}(A)]_{x,y} = 1$.

Dalje, $A_{x,z} [F_m(A)]_{z,y} = 1$ ako i samo ako $zx \in E$. Zaista, ako su x i z susedi, onda se z nalazi ili na udaljenosti $j - 1$ ili na udaljenosti $j + 1$. Kako je $d(x, y) = j < m$ važi da je $[F_m(A)]_{z,y} = 1$ pa je $A_{x,z} [F_m(A)]_{z,y} = 1$.

Obratno, ako je $A_{x,z} [F_m(A)]_{z,y} = 1$, onda su oba faktora različita od 0 odnosno jednaka 1 pa su x i z susedni čvorovi.

Postoji tačno k takvih $z \in V$ pa je suma jednaka k . Koristeći definiciju polinoma $F_i(x)$ zaključujemo da važi

$$[F_{m+1}(A)]_{x,y} = k - (k - 1) = 1,$$

a to smo i trebali pokazati.

2. slučaj: $m \leq j \leq m + 1$

Sada je udaljenost između čvorova x i y najmanje m pa mora važiti $[F_{m-1}(A)]_{x,y} = 0$. Slično kao u prvom slučaju, $A_{x,z} [F_m(A)]_{z,y} = 1$ ako i samo ako $zx \in E$ i

dodatno važi da je z na udaljenosti $j - 1$. Kada bi z bio na udaljenosti $j + 1$, onda bi udaljenost između z i y bila veća od m pa bismo imali $[F_m(A)]_{z,y} = 0$. No, tada postoji samo jedan čvor $z \in V$ koji omogućava put dužine $m + 1$ do y pa je suma jednaka 1. Dakle,

$$[F_{m+1}(A)]_{x,y} = 1,$$

što smo i trebali pokazati.

3. slučaj: $j > m + 1$

Čvor x je udaljen za više od $m+1$ od čvora y . Stoga mora važiti $[F_{m-1}(A)]_{x,y} = 0$. No, tada je i $A_{x,z}[F_m(A)]_{z,y} = 0$ za svaki $z \in V$, jer ako su x i z susedi, onda je z na udaljenosti koja je manja od $m + 1$. Dobijamo da je

$$[F_{m+1}(A)]_{x,y} = 0.$$

Dokaz indukcijom je završen. Budući da je graf G dijametra D , to između svaka dva čvora postoji put dužine manje ili jednake D , pa važi $F_D(A) = J$. $\square$

5.1 Mooreovi grafovi dijametra 2

Neka je G Mooreov graf tipa $(k, 2)$ i neka je A matrica susedstva od G . Tada iz Mooreove granice dobijamo

$$n = n_{k,d} = 1 + k + k(k - 1) = 1 + k^2. \quad (3)$$

Prema teoremi 5.1, matrica susedstva A zadovoljava jednačinu:

$$A^2 + A - (k - 1)E = J.$$

U nastavku ćemo opisati spektar matrice susedstva grafa G . Sa $\mathbf{1}$ ćemo označiti vektor čije su sve komponente jednake 1.

Teorema 5.2. Matrica susedstva Mooreovog grafa G ima tačno 3 različita karakteristična korena. Jedan je k , a ostala dva su data jednačinama

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4k - 3}}{2}. \quad (4)$$

Višestrukost karakterističnog korena k je 1.

Dokaz. Iz (3) imamo:

$$A^2 + A - (k - 1)E = J. \quad (5)$$

Budući da je J polinom od A , A i J imaju zajednički skup karakterističnih vektora. Jedan od tih vektora je $\mathbf{1}$: $J \cdot \mathbf{1} = n \cdot \mathbf{1}$ i $A \cdot \mathbf{1} = k \cdot \mathbf{1}$. Primetimo da je jedan karakterističan koren matrice A je k . Kako je G k -regularan graf, na osnovu teoreme 2.20 zaključujemo da karakterističan koren k od A ima višestrukost 1.

Pretpostavimo $v \neq \mathbf{1}$ karakterističan vektor matrice A koji odgovara karakterističnom korenu λ . Prema teoremi 2.12, sledi $\mathbf{1}^T v = 0$, pa zaključujemo da je suma svih komponentata vektora v jednaka nuli. Sledi $Jv = 0$. Množeći (5) sa $v \neq 0$ dobijamo:

$$\begin{aligned} A^2 v + Av - (k - 1)v &= Jv \\ A(Av) + Av - (k - 1)v &= 0 \\ \lambda(Av) + \lambda v - (k - 1)v &= 0 \\ \lambda^2 v + \lambda v - (k - 1)v &= 0 \\ v(\lambda^2 + \lambda - (k - 1)) &= 0 \\ \lambda^2 + \lambda - (k - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4k - 3}}{2}.$$

□

5.2 Hoffman-Singletonova teorema

Hoffman-Singletonova teorema predstavlja jedno od značajnijih dostignuća u teoriji grafova. Ona otkriva specifične karakteristike određenih grafova i omogućava dublje razumevanje njihove strukture. Analizom grafova koji dele zajedničke osobine, kao što su grafovi dijametra 2, otkrivene su nove osobine i zanimljivi zaključci koji su doprineli razvoju algebarske kombinatorike.

Teorema tvrdi da Mooreovi grafovi tipa $(k, 2)$ postoje samo za $k = 2, 3, 7, 57$, a to ćemo sada i dokazati.

Teorema 5.3. Ako postoji r -regularan graf G čiji je dijametar 2 takav da broj čvorova n zadovoljava jednakost $n = r^2 + 1$, tada $r \in \{2, 3, 7, 57\}$.

Dokaz. Neka je A matrica susedstva grafa G . Prema teoremi (5.1) važi

$$A + A^2 - (r - 1)E = J. \quad (6)$$

Suma elemenata svake vrste matrice A jednaka je r , stoga:

$$A \cdot \mathbf{1} = \begin{bmatrix} r \\ r \\ \vdots \end{bmatrix},$$

gde je $\mathbf{1}$ vektor svih jedinica. Dakle, imamo $A \cdot \mathbf{1} = r \cdot \mathbf{1}$, što implicira da je $\mathbf{1}$ karakterističan vektor matrice A sa karakterističnim korenom r . Zaključujemo da A ima ortogonalnu bazu karakterističnih vektora, $v_1, v_2, \dots, v_n$. To jest, $v_i \cdot v_j = 0$ za sve parove $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gde je $i \neq j$. Dakle, $v_1 = \mathbf{1}$, a v_i su ortogonalni na $\mathbf{1}$ za $i \geq 2$. Tako, za $i \geq 2$, imamo:

$$Jv_i = \begin{bmatrix} v_i \cdot \mathbf{1} \\ \vdots \\ v_i \cdot \mathbf{1} \end{bmatrix} = 0.$$

Množenjem jednačine (6) sa v_i (za $i \geq 2$) sa desne strane, dobijamo:

$$(A^2 + A - (r - 1)E)v_i = Jv_i = 0. \quad (7)$$

Znamo da je $Av_i = \lambda_i v_i$, pa $A^2 v_i = \lambda_i^2 v_i$, tako da jednačina (7) postaje:

$$\lambda_i^2 v_i + \lambda_i v_i - (r - 1)v_i = 0,$$

odnosno

$$\lambda_i^2 + \lambda_i - (r - 1) = 0. \quad (8)$$

Kako je ovo kvadratna jednačina, znamo da može imati najviše dva korena. Dakle, A može imati najviše tri karakteristična korena; nazovimo ih r, μ_1 i μ_2 , sa višestrukostima 1, m_1 i m_2 , redom.

μ_1 i μ_2 moraju biti koreni jednačine (8), pa imamo:

$$\mu_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(r - 1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4r - 3}}{2}.$$

Neka je $s = \sqrt{4r - 3}$, pa je tada $s^2 = 4r - 3$ ili

$$r = \frac{s^2 + 3}{4}. \quad (9)$$

Pošto je A matrica reda n , imamo:

$$1 + m_1 + m_2 = n. \quad (10)$$

Takođe znamo da je suma karakterističnih korena jednaka tragu matrice, pa:

$$r + m_1\mu_1 + m_2\mu_2 = 0. \quad (11)$$

Pošto je $n = r^2 + 1$, možemo zapisati jednačinu (10) kao:

$$m_1 + m_2 = r^2. \quad (12)$$

Znamo da je:

$$\mu_{1,2} = \frac{-1 \pm s}{2}.$$

Bez umanjenja opštosti, neka je:

$$\mu_1 = \frac{-1 + s}{2} \quad \text{i} \quad \mu_2 = \frac{-1 - s}{2}.$$

Sada možemo napisati jednačinu (11) kao:

$$r + m_1 \frac{-1 + s}{2} + m_2 \frac{-1 - s}{2} = 0,$$

ili

$$2r + s(m_1 - m_2) - (m_1 + m_2) = 0. \quad (13)$$

Razmotrimo slučaj kada je s iracionalan broj. Tada $m_1 - m_2 = 0$ (jer su m_1, m_2 i r celi brojevi), i imamo:

$$2r - (m_1 + m_2) = 0,$$

odnosno:

$$2r - r^2 = 0,$$

po jednačini (12). Pošto $r \neq 0$, ova jednačina implicira da je $r = 2$. Ovaj broj se zaista pojavljuje u teoremi kao moguća vrednost broja r .

Od sada ćemo pretpostaviti da je s racionalan, i stoga da je s ceo broj (pošto je kvadratni koren celog broja).

Zamenom jednačine (12) u jednačinu (13), imamo:

$$2r + s(m_1 - m_2) - r^2 = 0$$

$$2\frac{s^2 + 3}{4} + s(m_1 - m_2) - \frac{(s^2 + 3)^2}{16} = 0.$$

Pojednostavlјivanjem, dobijamo:

$$s^4 - 2s^2 - 16(m_1 - m_2)s - 15 = 0.$$

Dakle, s mora biti delilac broja 15. To jest, $s \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$. Tako, prema jednačini (9), imamo $r \in \{3, 7, 57\}$. Slučaj $r = 1$ nema smisla, jer tako dobijamo granu koja nije dijametra 2. Uključujući slučaj kada je s iracionalan, dodajemo 2 kao moguću vrednost broja r , što nas dovodi do zaključka da je $r \in \{2, 3, 7, 57\}$. $\square$

Sumirajući ovaj dokaz, mogu postojati Mooreovi grafovi koji su:

- 2-regularni, to je kontura C_5 sa $5 = 2^2 + 1$ čvorova;
- 3-regularni, to je Petersenov graf $P(5, 2)$ sa $10 = 3^2 + 1$ čvorova;
- 7-regularni, to je Hoffman-Singletonov graf sa $50 = 7^2 + 1$ čvorova (čiju konstrukciju dajemo u narednom odeljku);
- 57-regularni, gde je postojanje ovog grafa još uvek otvoren problem, iako je dokazano da je on aritmetički izvodiv.

Jedinstvenost ovih grafova je pokazana u [14].

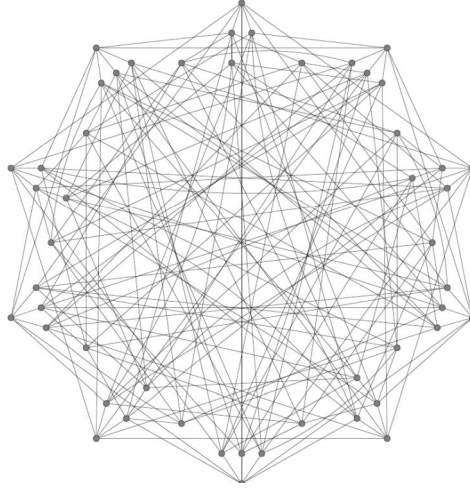
5.3 Hoffman-Singletonov graf

Hoffman-Singletonov graf je Mooreov graf tipa $(7, 2)$ koji je 7-regularan graf s 50 čvorova i 175 grana. On zadovoljava Mooreovu granicu koja određuje najveći broj čvorova za Mooreov graf sa dijametrom 2 i stepenom k . Ova granica je data kao:

$$n \leq 1 + k + k(k - 1).$$

Za $k = 7$, dobijamo $n \leq 50$, što Hoffman-Singletonov graf dostiže.

Konstruisali su ga A. Hoffman i R. Singleton, dok su pokušavali razvrstati sve Mooreove grafove. To je najveći Mooreov graf (u smislu broja čvorova) koji je uspešno konstruisan.

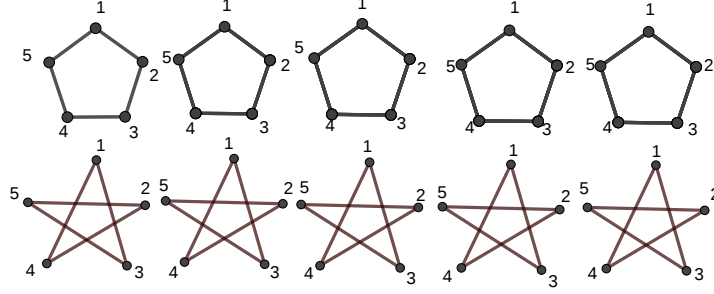


Slika 15: Hoffman-Singletonov graf

Objasnićemo vrlo jednostavnu konstrukciju Hoffman-Singletonovog grafa koju je sproveo Niel Robertson, a reprezentovao Paul R. Hafner [12]:

Svih 50 čvorova tog grafa razložićemo u 10 podgrafova sa po 5 čvorova. Pet podgrafova su prikazani kao petouglovi, a drugih pet kao pentagrami. Čvorovi moraju biti označeni tako da je odmah uočljivo da su petouglovi i pentagrami komplementi jedno drugome, kao što je prikazano na sledećoj slici.

Treba dodati još 125 grana. To ćemo učiniti na sledeći način: za i -ti čvor, $1 \leq i \leq 5$, u petouglu P_j , $1 \leq j \leq 5$, postoji čvor u pentagramu Q_k , $1 \leq k \leq 5$, označen sa $i + jk \pmod{5}$ kojeg ćemo granom spojiti sa čvorom i . (Za $i + jk = 5$ uzmemo čvor 5). Na taj način smo dodali sve preostale grane, pretpostavka o stepenu 5 nije narušena, a treba primetiti da nema grana koje spajaju čvorove iz dva različita petougla ili dva različita pentagrama. Dobijeni graf je 7-regularan, dijametra 2 i obima 5. Dakle, dobili smo Hoffman-Singleton graf.



Slika 16: Konstrukcija Hoffman-Singletonov grafa

Za određivanje spektra ovog grafa oslanjamo se na rezultate dokazane na početku ovog odeljka. S obzirom na to da je graf 7-regularan, njegov najveći karakterističan koren iznosi 7, sa višestrukošću 1. Preostala dva karakteristična korena, sa višestrukostima m_1 i m_2 , grafa odredićemo primenom teoreme 5.2.

Primenjujemo formulu:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4 \cdot 7 - 3}}{2} = \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2},$$

i dobijamo

$$\lambda_1 = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{-1 - 5}{2} = -3.$$

Sada ćemo odrediti višestrukost svakog korena koristeći sledeće uslove: $\sum \lambda_i = 0$ i $\sum m_i = n$, gde n predstavlja broj čvorova u grafu. Pojednostavljujući ove formule, dobijamo:

$$7 + m_1 \cdot 2 + m_2 \cdot (-3) = 0$$

$$m_1 + m_2 = 49.$$

Iz ovog sistema sledi da je $m_1 = 28$ i $m_2 = 21$.

Ukratko, spektar Hoffman-Singletonov grafa može se predstaviti kao:

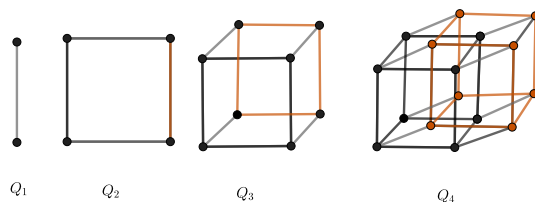
$$\sigma(HS) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 21 & 28 & 1 \end{pmatrix}.$$

6 Hiperkocka

U području geometrije, hiperkocka se posmatra kao n -dimenzionalni ekvivalent kvadrata ($n = 2$), odnosno kocke ($n = 3$). Radi se, dakle, o višedimenzionalnom objektu kojeg je teško zamisliti u 4 ili više dimenzija s obzirom da živimo u trodimenzionalnom ($3D$) prostoru. Pokušajmo sada objasniti strukturu hiperkocke u proizvoljnom nD prostoru, $n \geq 0$. U $0D$ prostoru hiperkocka je jedinstvena tačka. U $1D$ prostoru, hiperkocka je duž. U ravni, dakle u $2D$ prostoru, to će biti kvadrat, odnosno površina omeđena sa četiri $1D$ hiperkocki, tj. jednakih duži. U $3D$ prostoru imaćemo kocku, površina omeđena sa šest kvadrata, odnosno $2D$ hiperkocki od kojih je svaka preko četiri $1D$ hiperkocke spojena sa četiri druga kvadrata. U $4D$ prostoru hiperkocku ćemo zvati još i tesseract koji je telo sastavljeno od osam $3D$ hiperkocki, od kojih svaka pomoću svojih šest kvadratnih stranica dodiruje po šest drugih $3D$ hiperkocki. Možemo reći da se tesseract odnosi prema kocki kao kocka prema kvadratima, odnosno kao kvadrati prema dužima. Ova pojašnjenja služe za shvatanje nD hiperkocke $n \geq 1$ kao objekta sastavljenih od hiperkocki nižih dimenzija.

U nastavku ćemo govoriti o grafu hiperkocke kao 1-skeletonu hiperkocke. 1-skeleton nekog n -dimenzionalnog objekta je topološki graf tog objekta, tj. reprezentacija tog objekta u ravni tako da su mu čvorovi predstavljeni tačkama ravni, a grane Žordanovim lukovima koji spajaju parove tih tačaka. Na ovaj način smo se iz geometrije i geometrijskog shvatanja hiperkocke pomakli u područje teorije grafova.

Graf hiperkocke ćemo radi jednostavnosti zvati n -dimenzionalnom hiperkockom, odnosno kraće n -kockom i označavaćemo je sa Q_n , $n \geq 1$.



Slika 17: Hiperkocka Q_n za $n = 1, 2, 3, 4$

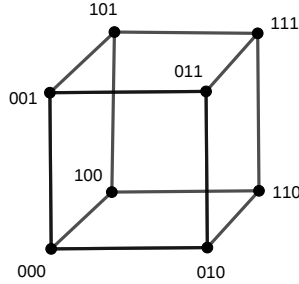
Na ovoj slici su crnom i braon bojom označene $(n - 1)$ -kocke Q_{n-1} koje se pojavljuju u Q_n kao njeni podgrafovi, a sivom bojom označene su grane koje spajaju te dve kopije. Iz ovakvog prikaza je jasno da se Q_n sastoji od dve kopije $(n - 1)$ -kocki, pri čemu je svaki čvor jedne kopije spojen granom sa odgovarajućim čvorom iz druge kopije.

Pre nego što formalno definišemo n -kocku, potrebno je uvesti neke pojmove i oznake. Neka je e_i , $i \in \mathbb{N}$, jedinični vektor u $\mathbb{Z}_2^n$ sa jedinicom na i -toj koordinati. Za $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ i $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ broj $d_H(u, v)$ označava Hemingovo rastojanje vektora u i v , a predstavlja broj koordinata u kojima se ta dva vektora razlikuju:

$$d_H(u, v) = |\{i \in \mathbb{N} | u_i \neq v_i\}|.$$

Definicija 6.1. n -dimenzionalna hiperkocka Q_n je graf sa skupom čvorova $V(Q_n) = \mathbb{Z}_2^n = \{0, 1\}^n$ i skupom grana $E(Q_n) = \{uv \mid u \oplus v = e_i \text{ za neki } i \in \{1, \dots, n\}\} = \{uv \mid d_H(u, v) = 1\}$, gde je $\oplus$ oznaka za sumiranje u $\mathbb{Z}_2^n$.

Zaključujemo iz definicije da su dva čvora susedna ako se odgovarajuće n -torke razlikuju u tačno jednoj koordinati. Sledeća slika ilustruje ovakav način označavanja čvorova.



Slika 18: Graf Q_3

n -kocku možemo definisati i pomoću Dekartovog proizvoda grafova. Dekartov proizvod $G \square H$ grafova G i H je graf sa skupom čvorova $V(G) \times V(H)$, pri čemu su dva čvora (u, u') i (v, v') susedna u $G \square H$ ako i samo ako važi

$$(u = v \text{ i } u'v' \in E(H)) \text{ ili } (u' = v' \text{ i } uv \in E(G)).$$

Sada n -dimenzionalnu hiperkocku Q_n , $n \geq 1$, možemo definisati rekurzivno pomoću Dekartovog proizvoda dva grafa kako sledi:

$$\begin{aligned} Q_1 &= K_2, \\ Q_2 &= K_2 \square Q_1, \\ &\vdots \\ Q_n &= K_2 \square Q_{n-1}. \end{aligned}$$

Istaknimo još neke osobine ovog grafa.

S obzirom da je svaki čvor n -kocke Q_n uređena n -torka nula i jedinica, broj čvorova u Q_n jednak je broju svih takvih n -torki. Dakle, na svaku od n pozicija možemo staviti 0 ili 1 i pa imamo 2 načina za izbor broja na jednoj poziciji. Kako imamo ukupno n pozicija, prema principu proizvoda, imamo ukupno 2^n načina za izbor broja na svih n -pozicija pa dobijamo $|V(Q_n)| = 2^n$.

Za brojanje grana koristićemo teoremu 2.2.

Proizvoljan čvor u Q_n sused je svim čvorovima koji se od njega razlikuju u tačno jednoj koordinati. To znači da mu je jedan sused čvor koji se od njega razlikuje u prvoj koordinati, drugi sused se razlikuje od njega u drugoj koordinati, $\dots$, n -ti sused se od njega razlikuje u poslednjoj n -toj koordinati. Sledi da je stepen svakog čvora u Q_n jednak n , odnosno Q_n je n -regularan graf. Dakle, niz stepena u Q_n je $\{n, n, \dots, n\}$ pa je

$$|E(Q_n)| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2^n} n = \frac{1}{2} n 2^n = n 2^{n-1}.$$

U prvom delu ovog rada smo definisali povezanost čvorova (κ) i povezanost grana (κ'). Dovedimo u vezu ove povezanosti sa najmanjim stepenom grafa (δ):

Teorema 6.2. (Whitney) Za proizvoljan graf G važi

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G).$$

Dokaz ove teoreme se može pronaći u [17].

Kako je hiperkocka Q_n n -regularan graf, važi da je $\delta(Q_n) = n$, pa sledi:

$$\kappa(Q_n) \leq \kappa'(Q_n) \leq n.$$

Dokažimo jače tvrđenje:

Teorema 6.3. Za hiperkocku Q_n važi:

$$\kappa(Q_n) = \kappa'(Q_n) = n.$$

Dokaz. Dokazaćemo da je $\kappa(Q_n) = n$. Time će dokaz teoreme biti završen, jer kombinovanjem ovog tvrđenja sa Whitneyevom teoremom odmah sledi i $\kappa'(Q_n) = n$. Ako iz Q_n uklonimo n suseda nekog proizvoljno odabranog čvora v , dobićemo graf u kojem je v izolovan čvor, tj. graf koji je nepovezan, što se zaključuje takođe iz prethodne teoreme. Stoga odmah znamo da važi $\kappa(Q_n) \leq n$.

Ostaje da pokažemo da $\kappa(Q_n) \geq n$. To ćemo učiniti tako što pokažemo da je svaki razdvajajući skup⁵ S grafa Q_n kardinalnosti najmanje n . Koristićemo indukciju po n .

Za $n \in \{0, 1\}$, Q_n je kompletan graf sa $n + 1$ čvora pa je $\kappa(Q_n) = n$. Pretpostavimo da važi za Q_{n-1} , $n \geq 2$, tj. $\kappa(Q_{n-1}) = n - 1$, pa dokažimo za Q_n .

Koristićemo strukturu hiperkocke Q_n kao grafa nastalog od dve kopije $(n - 1)$ -kocki, Q_{n-1}^1 i Q_{n-1}^2 , pri čemu je svaki čvor podgraфа Q_{n-1}^1 spojen granom sa odgovarajućim čvorom iz podgraфа Q_{n-1}^2 , kao što je vidljivo na slici 17. Neka je S razdvajajući skup u Q_n . Ako je $Q_{n-1}^1 - S$ povezan i $Q_{n-1}^2 - S$ povezan, tada je i $Q_n - S$ povezan, osim ako S ne sadrži bar jedan čvor svake od grana koje povezuju Q_{n-1}^1 i Q_{n-1}^2 . Ovo zahteva da $|S| \geq 2^{n-1}$, ali $2^{n-1} \geq n$ za $n \geq 2$. Stoga možemo pretpostaviti da je $Q_{n-1}^1 - S$ nepovezan, što znači da S sadrži bar $n - 1$ čvorova u Q_{n-1}^1 , prema pretpostavci. Ako S ne sadrži nijedan čvor iz Q_{n-1}^2 , tada je $Q_{n-1}^2 - S$ povezan, a svi čvorovi iz $Q_{n-1}^1 - S$ imaju susede u $Q_{n-1}^2 - S$, pa je $Q_n - S$ povezan. Dakle, S mora sadržati i neki čvor iz Q_{n-1}^2 . Ovo daje $|S| \geq n$, što je i bilo potrebno dokazati. $\square$

Još jedna zanimljiva osobina hiperkocke je bipartitnost. Rekli smo da je graf bipartitan ako se skup čvorova može razdvojiti u dva podskupa tako da svaka grana ima krajeve koji se nalaze u različitim particijama.

Pokazaćemo da je Q_n bipartitan graf. Za proizvoljan čvor iz Q_n ćemo reći da je paran (neparan) ako je suma njegovih koordinata paran (neparan) broj. Svojstvo bipartitnosti graфа Q_n možemo pokazati tako što ćemo na neki način biparticionisati skup $V(Q_n)$. To možemo tako da u jedan skup biparticije

⁵Razdvajajući skup graфа G je podskup $S \subset V(G)$ takav da je $G - S$ nepovezan graf, tj. on je skup čvorova čije uklanjanje dovodi do nepovezanosti graфа.

stavimo sve parne, a u drugi skup sve neparne čvorove. U tom slučaju neće biti susednih čvorova iste parnosti jer bi to podrazumevalo spajanje granom neka dva čvora koji se razlikuju u više od jedne koordinate. Primitimo da su skupovi ovakve bipartitije iste kardinalnosti, tj. u Q_n imamo polovinu parnih i polovinu neparnih čvorova.

6.1 Spektar hiperkocke

Prikažaćemo posebno matrice susedstva za hiperkocke Q_1 , Q_2 i Q_3 . Hiperkocka Q_1 ima $2^1 = 2$ čvora, pa je njoj pridružena matrica susedstva reda 2 i izgleda ovako:

$$A(Q_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ako pogledamo matricu susedstva hiperkocke Q_2 , onda je jasno da njenom podelom na blokove 2×2 dobijamo matrice susedstva od Q_1 na glavnoj dijagonali, dok su na sporednoj jedinične matrice reda 2:

$$A(Q_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} A(Q_1) & & & \\ & E & & \\ \hline & & A(Q_1) & \\ & & & E \end{array} \right].$$

Za hiperkocku Q_3 matrica susedstva je oblika:

$$A(Q_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} A(Q_2) & & & & & & & \\ & E & & & & & & \\ \hline & & & & A(Q_2) & & & \\ & & & & & E & & \end{array} \right].$$

Dakle, matrica susedstva grafa Q_3 je reda $2^3 = 8$, a posmatrana kao blok matrica reda 2 na glavnoj dijagonali sadrži matrice susedstva grafa Q_2 , a na sporednoj jedinične matrice reda $2^2 = 4$. Matrica susedstva hiperkocke Q_4 je reda $2^4 = 16$, a može se prikazati kao blok matrica reda 2 s matricama $A(Q_3)$ na glavnoj i jediničnim reda $2^3 = 8$ na sporednoj dijagonali. Možemo

zaključiti da se $A(Q_n)$ može dobiti rekurzivno iz $A(Q_{n-1})$, tj.

$$A(Q_n) = \left[\begin{array}{c|c} A(Q_{n-1}) & E \\ \hline E & A(Q_{n-1}) \end{array} \right],$$

pri čemu je E reda 2^{n-1} .

Karakteristične korene određujemo kao korene karakteristične jednačine $\det(\lambda E - A) = 0$, pa za Q_1 važi

$$\det(\lambda E - A(Q_1)) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0,$$

iz čega sledi $\lambda^2 = 1$, pa su karakteristični koreni od $A(Q_1)$ jednaki $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Za Q_2 dobijamo

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0,$$

pa su karakteristični koreni od $A(Q_2)$ 0, 2, -2 sa višestrukostima redom 2, 1, 1.

Istim principom se dobijaju i karakteristični koreni matrica susedstva grafova Q_3, Q_4, Q_5 i one su navedene u sledećoj tabeli.

n	1	2	3	4	5
λ	1,-1	2,0,-2	3,1,-1,-3	4,2,0,-2,-4	5,3,1,-1,-3,-5
višestrukosti	1,1	1,2,1	1,3,3,1	1,4,6,4,1	1,5,10,10,5,1

Tabela 2: Karakteristični koreni i višestrukosti matrice susedstva n -kocke

Teorema 6.4. Za $n \geq 1$ hiperkocka Q_n ima $n + 1$ različitih karakterističnih korena

$$\sigma(Q_n) = \begin{pmatrix} -n & -n+2 & -n+4 & \dots & n-4 & n-2 & n \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Dokaz. Dokažimo ovo indukcijom po n .

Za $n \in \{1, 2\}$, spektri su već prikazani u prethodnoj tabeli, a do njih smo došli rešavanjem odgovarajućih karakterističnih jednačina. Pretpostavimo da hiperkocka Q_{n-1} ima sledeće karakteristične korene sa odgovarajućim višestrukostima

$$\sigma(Q_{n-1}) = \begin{pmatrix} -n+1 & -n+3 & \dots & n-3 & n-1 \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix},$$

pa pronađimo spektar za Q_n .

Za hiperkocku Q_n matrica susedstva je

$$A(Q_n) = \left[\begin{array}{c|c} A(Q_{n-1}) & E \\ \hline E & A(Q_{n-1}) \end{array} \right],$$

gde je jedinična matrica E reda 2^{n-1} . Neka je $p_n(\lambda) = \det(\lambda E - A(Q_n))$ karakterističan polinom n -kocke.

Ako je proizvoljna matrica $X(A)$ dimenzije $2m \times 2m$ oblika

$$\begin{bmatrix} A & E \\ E & A \end{bmatrix},$$

gde su A i E matrice dimenzija $m \times m$. Kako je $AE = EA$, za determinantu blok matrice $X(A)$ važi

$$\det X(A) = \det(A^2 - E) = \det(A - E) \det(A + E).$$

Primenimo to na $A(Q_n) - \lambda E$ i odmah dobijamo:

$$p_n(\lambda) = p_{n-1}(\lambda + 1)p_{n-1}(\lambda - 1).$$

Ako su karakteristični koreni za $(n-1)$ -dimenzionalnu hiperkocku $-n+1, -n+3, \dots, n-1$ sa odgovarajućim višestrukostima

$$\binom{n-1}{0}, \binom{n-1}{1}, \dots, \binom{n-1}{n-1},$$

tada su karakteristični koreni za n -dimenzionalnu hiperkocku:

$$-n = (-n + 1) - 1, \quad -n + 2 = (-n + 3) - 1, \quad \dots,$$

$$n - 2 = (n - 3) + 1 \quad n = (n - 1) + 1.$$

sa višestrukostima:

$$1 = \binom{n}{0}, \quad \binom{n}{1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}, \quad \dots,$$

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}, \quad \binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n}.$$

□

7 Pravilni poliedri i odsecanje grafova

Politop je ograničen presek konačno mnogo hiperravnini, odnosno ravni u višim dimenzijama. Dvodimenzionalni politopi se nazivaju poligoni (mnogouglovi), a trodimenzionalni se nazivaju poliedri. Poliedri se mogu posmatrati kao grafovi. To radimo tako što temena poliedra predstavljamo kao čvorove, a ivice koje povezuju temena kao grane grafa incidente sa odgovarajućim čvorovima. Pravilni poliedri, odnosno Platonova tela, tako daju Platonove grafove koji su regularni.

Odsecanje politopa je operacija u bilo kojoj dimenziji koja odseca temena politopa, stvarajući novu stranu na mestu svakog temena. Kod rezultujućeg odsečenog poliedra svaka tri temena imaju barem jedan zajednički put koji ih povezuje. Ovo je bila glavna operacija koju je koristio Arhimed pri izgradnji svojih poznatih 13 tela. Slično kao kod Platonovih tela, od Arhimedovih tela dobijamo Arhimedove grafove, koji su takođe regularni grafovi.

7.1 Odsecanje grafa

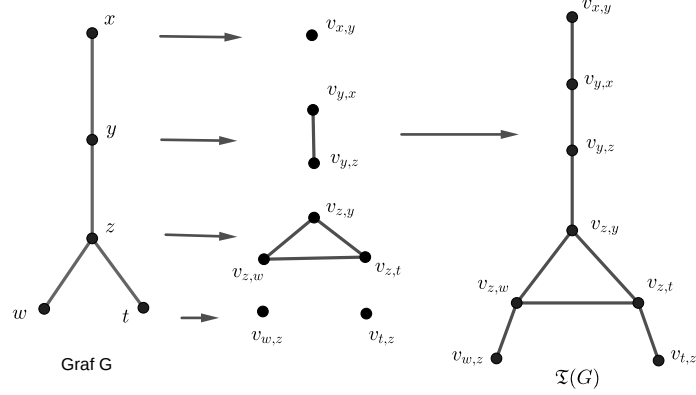
Definicija 7.1. Neka je G povezan graf bez čvorova stepena 1 i 2. Odsecanje grafa G , u oznaci $\mathfrak{T}(G)$, jeste graf koji se dobija od grafa G na sledeći način:

- svaki čvor $x \in V(G)$ zamenjujemo konturom $C_{d(x)}$, tj. sa novih $d(x)$ čvorova i $d(x)$ grana, gde čvor $v_{x,y}$ odgovara grani $xy \in E(G)$,
- pored grana dodatih kontura, grane grafa $\mathfrak{T}(G)$ su još i $v_{x,y}v_{y,x}$.

Obično se odsecanje definiše samo za povezane grafove bez čvorova stepena 1 i 2, jer je ova operacija na grafovima inspirisana odsecanjem politopa. Ponekad se ova definicija proširuje i za sve povezane grafove, gde po dogovoru viseći čvor i njemu incidentnu granu ne diramo, dok čvor stepena 2 zamenimo novom granom. To bi značilo da će u gornjoj definiciji „kontura dužine 1” biti jedan čvor, tj. K_1 , a „kontura dužine 2” graf K_2 .

Prikažimo odsecanje na grafu koji ima čvorove stepena 1, 2 i 3.

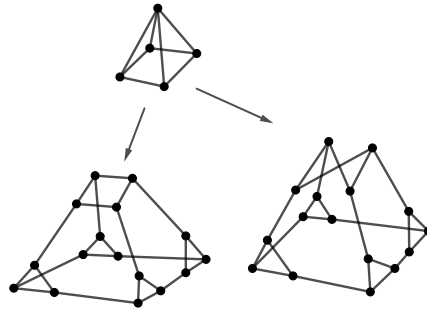
Na slici 19 je dat detaljan prikaz odsecanja grafa G . Primetimo da graf G ima čvorove stepena 1 ($d(x) = d(w) = d(t) = 1$), stepena 2 ($d(y) = 2$) i stepena 3 ($d(z) = 3$). Svaki čvor grafa G zamenjujemo konturom čija dužina odgovara stepenu čvora, što je prikazano u drugom koraku. Kako smo svakom čvoru odredili konturu odgovarajuće dužine, u sledećem koraku spajamo čvorove tako da prethodne grane budu očuvane. Posmatrajmo čvor



Slika 19

y , kako je on stepena 2, njega ćemo zameniti sa K_2 , odnosno novom granom, čiji će početni čvor $v_{y,x} \in V(\mathfrak{T}(G))$ odgovarati grani $yx \in E(G)$, dok će krajnji čvor $v_{y,z} \in V(\mathfrak{T}(G))$ odgovarati grani $yz \in E(G)$. Viseći čvorovi su nepromenljivi, jer predstavljaju konturu dužine 1, dok će se čvor z zameniti konturom dužine 3, jer je on stepena 3.

Napomena 7.2. Ukoliko je čvor stepena bar 4, onda kontura koja ga zamenjuje nije jedinstveno određena ukoliko nema dodatnih uslova. Na slici 19 možemo videti da se bez dodatnih uslova mogu dobiti neizomorfni grafovi dobijeni odsecanjem. Postoji više načina kako se to može rešiti, no pošto ćemo se baviti samo odsecanjem kubnih grafova, taj problem izlazi van okvira ovog rada.



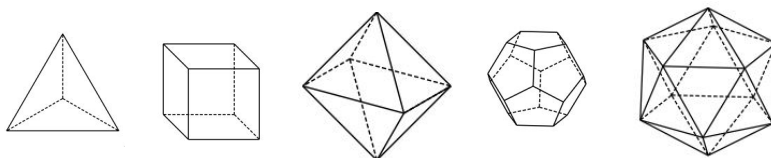
Slika 20

U daljem radu odsecanje ćemo se baviti samo 3-regularnim grafovima.

7.2 Platonovi grafovi

Platonova tela su posebna klasa konveksnih pravilnih poliedara, čije su sve strane jednaki pravilni poligoni i svi uglovi između strana su jednaki. Postoji tačno pet takvih tela:

- *tetraedar* (4 trougaone strane);
- *heksaedar* (kocka) (6 kvadratnih strana);
- *oktaedar* (8 trougaonih strana);
- *dodekaedar* (12 petougaoih strana);
- *ikosaedar* (20 trougaonih strana).



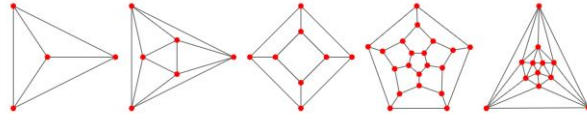
Slika 21: *Platonova tela* - tetraedar, heksaedar, oktaedar, dodekaedar, ikosaedar

Svaki poliedar može se posmatrati kao graf. Za Platonova tela, dobijamo planarne grafove, jer ih možemo „razvući” na ravnu površinu bez presecanja grana. Jedan od načina da se razvije Platonov graf je pomoću Schlegelovog grafa⁶ tako što se izabere jedna strana poliedra i postavi kao spoljašnja oblast u ravni, a zatim se projektuju ostala temena i ivice unutar te oblasti tako da svi odnosi ostanu očuvani.

Prikažimo Platonove grafove pomoću Schlegelovog grafa:

Primetimo da su Platonovi grafovi regularni, odnosno tetraedar, heksaedar i dodekaedar su 3-regularni, oktaedar je 4-regularan i ikosaedar je

⁶Schlegelov graf je planarna projekcija trodimenzionalnog poliedra na ravan, pri čemu su čvorovi, koji predstavljaju temena poliedra, i grane, koje predstavljaju njegove ivice, sačuvani tako da se očuvaju sva susedstva.



Slika 22: *Platonovi grafovi* - tetraedar, oktaedar, heksaedar, dodekaedar, ikosaedar

5-regularan.

Oni su posebni po svojoj simetriji i pravilnosti, ali neki od njih su izomorfni drugim poznatim grafovima u teoriji grafova. Kako izomorfni grafovi imaju iste spektre, koristićemo prethodno dokazane tvrdnje.

Matrica susedstva grafa tetraedra je:

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Platonov graf tetraedra je izomorfan sa kompletnim grafom K_4 , pa ćemo iskoristiti njegov spektar.

$$\sigma(K_4) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

odavde sledi da je spektar Platonovog grafa tetraedra trostruki koren -1 i jednostruki koren 3 .

Najpoznatije Platonovo telo je kocka, odnosno heksaedar. Kao jedan od oblika hiperkocke, tj. Q_3 , njegov spektar nam je već poznat:

$$\sigma(Q_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica susedstva grafa kocke je:

$$A_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jedini Platonov graf koji je 4-regularan jeste oktaedar i on ima 6 čvorova i 12 grana. Njegova matrica susedstva je sledeća:

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kada znamo kako izgleda matrica susedstva, lako možemo izvesti karakterističan polinom:

$$p_{A_o}(\lambda) = \det(\lambda E - A_o) = (\lambda - 4)\lambda^3(\lambda + 2)^2,$$

odakle sledi da su karakteristični koreni 4, 0, -2 sa višestrukostima 1, 3 i 2, redom.

Četvrto Platonovo telo je dodekaedar, čiji se graf može prikazati kao generalizovan Petersenov graf $P(10, 2)$. Znamo da su Petersenovi grafovi 3-regularni, pa isto važi i za dodekaedar.

Njegova matrica susedstva je reda 20, a spektar dodekaedra je

$$\sigma_d = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{5} & 1 & 0 & -2 & -\sqrt{5} \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Graf ikosaedra ima 12 čvorova i 30 grana. Iako graf ikosaedra nije izomorfan Petersenovom grafu, on sadrži Petersenov graf kao indukovani podgraf.

To znači da ako izaberemo određeni podskup temena i ivica u grafu ikosaedra, dobijamo strukturu Petersenovog grafa.

Matrica susedstva ovog grafa je dimenzije 12×12 , a njegov spektar je:

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{5} & -1 & -\sqrt{5} \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

7.3 Odsecanje kubnih grafova

Neka $G = (V, E)$ bude prost graf sa skupom čvorova V i skupom grana E ($|V| = n; |E| = m$). Ako graf G nema viseće grane, označimo sa $\mathfrak{T}(G)$ odsecanje grafa G . Sledeća tehnička lema je očigledna:

Lema 7.3. Neka je $\mathfrak{T}(G)$ odsecanje grafa G bez čvorova stepena 1 i 2. Tada,

$$|V[\mathfrak{T}(G)]| = 2m \quad \text{i} \quad |E[\mathfrak{T}(G)]| = 3m,$$

gde je m broj grana u grafu G .

Potpodela $S(G)$ grafa G dobija se ubacivanjem jednog čvora stepena 2 u svaku granu grafa G . Prema tome, ova operacija zamenjuje jednostavan put dužine 2 umesto svake grane. Uopšteno, k -ta ($k \in \mathbb{N}$) potpodela $S^k(G)$ grafa G je graf dobijen ubacivanjem k novih čvorova stepena 2 u svaku granu grafa G , gde se definiše:

$$S^0(G) := G, \quad S^1(G) := S(G), \quad \text{i} \quad S^j[S^k(G)] := S^{k+j(k+1)}(G) \quad (j, k \in \mathbb{N}).$$

Linijski graf $L(G)$ grafa G je graf čiji skup čvorova $V[L(G)]$ predstavlja skup $E(G)$ grana grafa G , a dva čvora iz $L(G)$ su susedna ako i samo ako su odgovarajuće grane grafa G incidentne. Takođe, $L_2(G)$ označava rezultat uzastopnih primena prethodne i linijske operacije na grafu G ; to jest,

$$L_2(G) := L[S(G)].$$

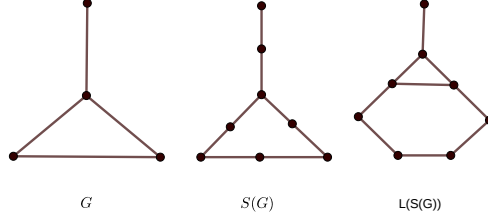
Uopšteno, $L_{k+1}(G) := L[S^k(G)]$.

Ovde navodimo još jednu tehničku lemu.

Lema 7.4. Neka $\mathfrak{T}(Q)$ bude odsecanje prostog kubnog grafa Q . Tada,

$$\mathfrak{T}(Q) \equiv L[S(Q)],$$

dok $\mathfrak{T}(H) \neq L[S(H)]$ za bilo koji nekubni graf H .


 Slika 23: Graf G , potpodela $S(G)$, linijski graf potpodele $L(S(G))$

Dokaz. Odsecanje grafa Q podrazumeva zamenu svakog čvora sa stepenom 3 (kubni graf) sa trostranom stranom (troughlom), a svaka grana se samo „skrati”.

Potpodela grafa Q (označeno kao $S(Q)$) postiže se dodavanjem novog čvora na svaku granu Q . Linijski graf $L(S(Q))$ je graf čiji čvorovi predstavljaju grane grafa $S(Q)$, a dve grane su susedne ako dele zajednički čvor u $S(Q)$. Primetimo ekvivalenciju između ova dva pojma. U slučaju kubnog grafa Q , svaka grana nakon potpodele je incidentna sa dva čvora: jedan iz originalnog grafa i jedan dodati. Linijski graf $L(S(Q))$ će imati čvorove koji predstavljaju ove nove grane, a susednost će biti određena zajedničkim čvorovima u $S(Q)$. Ovo odgovara strukturi koja se dobija odsecanjem grafa Q , gde su novi čvorovi povezani na isti način.

Za grafove koji nisu kubni, tj. čvorovi nemaju stepen 3, struktura nakon odsecanja i linijskog grafa potpodele neće biti identična zbog različitih stepena čvorova i rezultujućih veza. $\square$

Neka $p_H(x)$ označava karakteristični polinom (matrice susedstva) grafa H . Cvetković je dokazao važan spektralni rezultat [7]:

Teorema 7.5. Ako je G regularan graf stepena r sa n čvorova i $m = nr/2$ grana, tada:

$$p_{L_2(G)}(x) = [x(x+2)]^{m-n} p_G(x^2 - (r-2)x - r). \quad (14)$$

Prema ovoj teoremi, ako je G regularan stepena r i ima karakteristične korene $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, tada graf $L_2(G)$ ima karakteristične korene -2 i 0 višestrukosti $m-n$, i sledećih $2n$ karakterističnih korena:

$$\lambda_{1,2}^{(j)} = \frac{1}{2} \left(r - 2 \pm \sqrt{r^2 + 4\mu_j + 4} \right) \quad (j \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

Na osnovu leme 7.4, poslednja teorema ima sledeću posledicu, koja je važna za našu temu:

Posledica 7.6. Ako je Q kubni graf sa n čvorova i $m = 3n/2$ grana, tada:

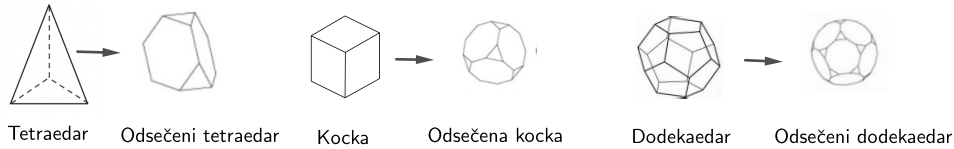
$$p_{\mathfrak{T}(Q)}(x) = [x(x+2)]^{n/2} p_Q(x^2 - x - 3).$$

Dakle, $\mathfrak{T}(Q)$ ima karakteristične korene -2 i 0 višestrukosti $n/2$, i sledeće karakteristične korene:

$$\lambda_{1,2}^{(j)} = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{4\mu_j + 13}) \quad (\mu_j = \mu_j(Q); j \in \{1, 2, \dots, n\}). \quad (15)$$

Iz poslednje formule takođe sledi da se višestrukosti karakterističnih korena -2 i 0 povećavaju za jedan ako Q ima karakteristične korene 3 (što Q uvek ima) i -3 (što je tačno za ako i samo ako je Q bipartitan). Dakle, za bipartitni kubni graf Q' , $\mathfrak{T}(Q')$ ima karakteristične korene -2 i 0 višestrukosti $n/2 + 1$.

Prethodna tvrđenja su za nas značajna, jer pomoću njih možemo odrediti spektar Arhimedovih grafova koji nastaju odsecanjem 3-regularnih pravilnih poliedara. Tako se dobijaju odsečeni tetraedar, odsečena kocka i odsečeni dodekaedar.



Slika 24: Arhimedova tela nastaju odsecanjem Platonovih tela

Kako su grafovi tetraedra, heksaedra i dodekaedra kubni grafovi, korišćićemo posledicu 7.6 da bismo odredili spektre odsečenog tetraedra, heksaedra i dodekaedra.

Napomenimo još jednom da se višestrukost karakteristični korena -2 i 0 kubnog grafa, koji ima karakteristične korene 3 i -3 , povećava za jedan, odnosno njihova višestrukost se računa $\frac{n}{2} + 1$. Zatim, višestrukost drugih

karakterističnih korena Arhimedovih tela jednaka je višestrukosti karakterističnih korena odgovarajućeg Platonovog tela.

Na osnovu formule (15) možemo odrediti ostale karakteristične korene, pa dobijamo sledeće spektre:

- spektar odsečenog tetraedra $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;
- spektar odsečenog heksaedra

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) & 2 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17}) & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 5 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix};$$

- spektar odsečenog dodekaedra

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17}) & \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{13}) & \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \\ 11 & 10 & 5 & 4 & 4 \\ \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4\sqrt{5} + 13}) & \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-4\sqrt{5} + 13}) & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osim toga, zapažamo još jednu teoremu za k -tu potpodelu grafa, koja je korisna u slučaju molekularnih grafova homeomorfnih mapama poliedra [7]:

Teorema 7.7. Imamo

$$p_{S_k(G)}(x) = \left[U_k \left(\frac{x}{2} \right) \right]^{m-n} \det \left[x U_k \left(\frac{x}{2} \right) E - U_{k-1} \left(\frac{x}{2} \right) D - A \right],$$

gde je $p_{S_k(G)}(x)$ karakteristični polinom k -te potpodele $S_k(G)$, A je matrica susedstva grafa G , E je jedinična matrica, D je (dijagonalna) matrica stepena grafa G , a $U_k(z)$ je k -ti Čebišev polinom drugog reda.

Zaključak

U ovom radu proučavana su spektralna svojstva različitih klasa regularnih grafova, uključujući kompletne i kompletne bipartitne grafove, Petersenov graf, Hoffman-Singletonov graf, hiperkocku, kao i grafove koji predstavljaju Platonova i Arhimedova tela. Analizom njihovih spektara dobili smo uvid u važne osobine ovih grafova, kao što su povezanost, regularnost i dijametar.

Posebna pažnja posvećena je primeni spektralne teorije u analizi strukture grafova. Spektralna analiza omogućava dublje razumevanje svojstava grafova bez potrebe za njihovim eksplicitnim iscrtavanjem ili konstrukcijom, što je od velikog značaja u proučavanju velikih mreža i kompleksnih sistema.

Rad pruža osnovu za dalja istraživanja u oblasti spektralne teorije grafova, uključujući ispitivanje drugih specijalnih klasa grafova i njihovu primenu u savremenim naučnim i inženjerskim disciplinama.

Literatura

- [1] H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra*, Anton Textbooks, Inc., 2014.
- [2] B. Alspach, E. Dobson, *On automorphism groups of graph truncations*, *Ars Math. Contemp.* 8(1), (2015) 215–223.
- [3] N. Biggs, Norman, *Algebraic Graph Theory*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge UP, 1993.
- [4] A.E. Brouwer, W.H. Haemers, *Spectra of graphs*, Springer Science and Bussines Media, 2011.
- [5] P.J. Cameron, Strongly regular graphs, *Topics in algebraic graph* 102 (200): 203–221.
- [6] D. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs* (3rd ed.), Johann Ambrosius Barth, 1995.
- [7] D. Cvetković, *Spectra of graphs formed by some unary operations*, Publ. Inst. Math., 1975.
- [8] D. Cvetković, M. Doob, I. Gutman, A. Torgašev, *Recent Results in the Theory of Graph Spectra*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [9] M.V. Diudea, V.R. Rosenfeld, The truncation of a cage graph, *Journal of Mathematical Chemistry*, 55, (2017) 1014–1020.
- [10] R. Gera, P. Stanica, *The spectrum of generalized Petersen graphs*, *Australas. J Comb.* 49, (2011) 39–46.
- [11] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic graph theory*, Springer-Verlag New York, New York, 2001.
- [12] P. R. Hafner, The Hoffman-Singleton Graph and its Automorphisms, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 18, 7–12, 2003.
- [13] F. Harary, J. P. Hayes, H. Wu, *A survey of the theory of hypercube graphs*, *Computers Mathematics with Applications*, 1988.
- [14] A. J. Hoffman, R. R. Singleton, Moore graphs with diameter 2 and 3, *IBM Journal of Research and Development*, 5 (1960) 497–504.

LITERATURA

- [15] V. Petrović, *Teorija grafova*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1998.
- [16] P. Van Mieghem, *Graph Spectra for Complex Networks*, Cambridge University Press, 2023.
- [17] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, 2000.

Biografija

Tanja Avramović je rođena 24. 4. 2000. godine u Loznici. Nakon završene osnovne škole „Kadinjača” u Loznici, upisala je Gimnaziju „Vuk Karadžić” u Loznici koju je završila 2019. godine. Iste godine upisala je integrisane akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, na studijskom programu Master profesor matematike. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom integrisanih studija u septembru 2024. godine i time stekla pravo na odbranu master rada.



Novi Sad, avgust 2025 Tanja Avramović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Tanja Avramović

AU

Mentor: dr Anna Slivková

MN

Naslov rada: Spektralna svojstva nekih regularnih grafova

NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s/en

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2025

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 3

MA

Fizički opis rada (broj poglavlja/strana/lit.citata/
tabela/slika/grafika/priloga): (7/73/17/2/24/0/0)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Teorija grafova

ND

Predmetne odrednice, ključne reči: graf, regularni grafovi,
matrica susedstva, spektr grafa, Petersenov graf, hiperkocka,
Platonovi grafovi, Arhimedovi grafovi

PO**UDK**

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Rad se bavi određivanjem spektra nekih regularnih grafova, kao i ispitivanjem njihovih osobina. Na početku rada je dat pregled osnovnih pojmova i njihove osobine iz teorije grafova i linearne algebre potrebne za rad, zatim smo posebno istakli matrice susedstva i njene osobine.

U nastavku je akcenat na spektre regularnih grafova. Prvenstveno su predstavljeni neki osnovni regularni grafovi i njihovi spektri, kao što je kompletan, kompletan bipartitni graf i kontura. Zatim smo se upoznali sa Petersenovim, Mooreovim i Hoffman-Singletonovim grafovima i njihovim spektrima. Takođe, tu smo prikazali i neke zanimljive osobine grafova korišćenjem spektra grafa. U šestom poglavlju definišemo hiperkocku u n -dimenzionalnom prostoru i izučavamo njihove spektre.

Poslednje poglavlje je posvećeno Platonovim telima i grafovima dobijenim odsecanjem, kao i njihovim spektrima.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 3. decembar 2024.

DP

Datum odbrane: 2025.

DO

Članovi komisije: Predsednik: dr Ilica Bošnjak, redovni profesor Prirodno-

matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Vlado Uljarević, docent Prirodno-matematičkog
fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Anna Slivková, vanredni profesor Prirodno-
matematičkog fakulteta u Novom Sadu

KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Acession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents code: Master thesis

CC

Author: Tanja Avramović

AU

Mentor: Dr Anna Slivková

MN

Title: Spectral properties of some regular graphs

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: s/en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2025

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 3

PP

Physical description

(chapters/pages/references/tables/
pictures/charts/supplements): (7/73/17/2/24/0/0)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Graph theory

SD

Subject, key words: graph, regular graphs adjacency matrix,
spectra of graphs, Petersen graph, hypercube, Platonic graphs,
Arhimedeian graphs

SKW

UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and
Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: The paper focuses on determining the spectrum of certain regular graphs and examining their properties. At the beginning of the paper, an overview of basic concepts and their properties from graph theory and linear algebra necessary for the work is provided, followed by a particular emphasis on the adjacency matrix and its properties.

The following sections focus on the spectra of several regular graphs: complete graphs, complete bipartite graphs, cycles, the Petersen graph, the Hoffman-Singleton graph. Additionally, we explore some interesting graph properties using their spectra. In the sixth chapter, the hypercube in an n -dimensional space is defined, and its spectrum is studied. The final chapter is dedicated to Platonic solids and their truncations, as well as their spectra.

AB

Accepted on Scientific board on: December 3rd 2024

AS

Defended: September 2025

DE

Thesis Defend board: President: Dr. Ivica Bošnjak, full professor, Faculty
of Science, Novi Sad
Member: Dr. Vlado Uljarević, assistant professor, Faculty
of Science, Novi Sad

DB

Mentor: Dr. Anna Slivková, associate professor,
Faculty of Science, Novi Sad