UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Autor: Natalija Panić

O donošenju odluka u fazi okruženju

Master rad

Mentor: Ivana Štajner-Papuga

Novi Sad, 2024.

Predgovor

Fuzzy skupovi predstavljaju dobro definisan alat kojim je moguće matematički predstaviti i modelirati neodređenosti i nepreciznosti koja je prisutna u svakodnevnom životu. Reč fazi (eng. fuzzy) je engleskog porekla i označava neodređen, neprecizan pojam, a prvi put se kao takav javlja u delu „Fuzzy sets" Loftija Zadeha iz 1965.godine. Zahvaljujući fazi skupovima i fazi logici omogućeno je modelovanje pojave da neki objekti ne moraju u potpunosti da pripadaju ili ne pripadaju nekom skupu, kao što to je to sličaj kod klasičnih, skupova već mogu sa nekim stepenom, tj. u određenoj meri, pripadati nekom skupu. U kojoj merui neki objekat pripada fazi skupu je određen funkcijom pripadnosti koja uzima neku od realnih vrednosti iz zatvorenog intervala [0,1]. Zahvaljujući tome, fazi skupovi se lakše prilagođavaju modelovanju realnih problema u uslovima neodređenosti.

Tema ovog rada pripada savremenoj matematičkoj oblasti koja je bavi primenom fazi skupova u modelovanju svakodnevnih problema i situacija, odnosno donošenju odluka na osnovu predstavljenih modela. Kako je proces donošenja odluka otežan neodređenim, subjektivnim i nepreciznim podacima, matematički modeli zasnovani na fazi skupovima su odličan izbor za predstavljanje svakodnevnih situacija. U ovom master radu biće prikazan prosec donošenja odluka u fazi okruženju koji baziran na sledeća dva pristupa:

- primeni fazi aritmetike i fazi brojeva,
- primena operacija sa fazi skupovima.

Potupak donošenja odluka za oba navedena pristupa je ilustrovan originalnim primerima koji reflektuju aktuealna interesovanja studenata i nastavnika.

Na početku rada dat je pregled osnovnih pojmova potrebnih za razumevanje rada u celini. Između ostalog, to su fazi skupovi kao i operacije sa fazi skupovima zasnovane na trougaonim normama. Dati je prikaz osnovnih pojmova vezanih za specijalne fazi skupovi poznate kao fazi brojevi, sa naglaskom na trougaone i trapezoidne fazi brojeve koji imaju široku primenu u različitim oblastima. Literatura korišćena za izradu ovog dela rada je [1,2,5,6,8,9,11,13,14,15,17,18,20,21].

U drugom delu rada prikazan je princip usrednjavanja za fazi vrednosti, tj. određivanja srednjih vrednosti za fazi brojeve. Naime, ispitivanje i analiza komplikovanih situacija podrazumeva angažovanje velikog broja stručnjaka, čime se dolazi do velikog broja različitih mišljenja koja se moraju obraditi da bi se došlo do finalne odluke. Upravo fazi skupovi na prirodan način opisuju ova različita mišljenja jer dozvoljavaju određenu dozu nepreciznosti koja je uvek prisutna u stvarnom životu, te je u nekim situacijam potrebno pronaći pokazatelj centralne tendencije. Sama primena ovog principa prikazana je kroz Fazi Delfi metod (eng. Fuzzy Delphi Method). Takođe u ovom delu rada prikazan je proces defazikacije kojim se iz rezultujućeg fazi podataka ekstrakuje reprezentativna realna vrednost potrebna za dalju analizu i obradu. Literatura koja je korišćena u ovom delu rada je [2,6,9,10,19,20,21].

U trećem delu rada prikazan je proces odlučivanja koji se zasniva na preseku fazi skupova. Fazi skupovima se modeluju ciljevi i ograničenja koji utiču na proces odlučivanja, te njihovim presekom se dolazi do odluke, odnosno reprezentativne vrednosti, koja je u formi fazi skupa. Primenom defazikacije postiže se krajnja odluka, odnosno, rešenje problema. Kako su u prvom delu rada dat prikaz osnovnih pojmova vezanih za trougaone norme i trougaone konorme, kao njihova primena pri uopštavanju operacija preseka i unije fazi skupov, u ovom delu su dati orginalni primeri koji ilustruju tu generalizaciju. Urađena je i komparacija dobijenih rezultata spram toga koja trougaona norma je korišćena za modelovanje preseka fazi skupova. Literatura konsultovana za izradu ovog dela je [2,7,16,19].

* * *

Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru prof. dr Ivani Štajner-Papuga na velikoj pomoći prilikom pisanja ovog rada, kao i na ukazanom poverenju. Takođe, zahvaljujem se članovima komisije, prof. dr Andreji Tepavčević i prof. dr Zagorki Lozanov- Crvenković, koje su takođe izdvojile vreme za ovaj rad. Na kraju, zahvaljujem se svojoj porodici kao najvećoj podršci tokom studiranja.

Novi Sad 18. oktobar 2024.

Natalija Panić

Sadržaj

Glava 1

Uvodni pojmovi

Na samom početku rada napravićemo jasnu razliku između fazi skupova i skupova u klasičnom smislu. Cilj ovog poglavlja je da pruži jasnu sliku o prirodi fazi skupova. Prikazane su razlike u karakteristikama funkcija koje definišu pripadnost elemenata ovi različitim tipovima skupova (klasični i fazi skup). U ovom poglavlju su predstavljene i operacije sa fazi skupovima, te posebne klasa fazi skupova poznata kao fazi brojevi. Takođe, dat je i prikaz osnova fazi aritmetike. Literatura korišćena pri izradi ovog poglavlje je [2,5,6,8,9].

1.1 Fazi skupovi

Kao što znamo, skup je jedan od osnovnih pojmova matematike koji opisujemo kao mnoštvo objekata koje karakteriše neka zajednička osobina ili svojstvo (videti npr. [2]). Pravilo pripadnosti koje karakteriše elemente (članove) klasičnog skupa A koji je podskup univerzuma U, $A \subset U$, dato je *karakterističnom funkcijom* $\chi_A(x)$ koja uzima samo dve vrednosti, 1 i 0, što ukazuje da li elementi univerzuma imaju željenu osobinu, tj. $x \in U$ je član skupa A, ili nije:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x \in A, \\ 0 & \text{za } x \notin A. \end{cases}$$

Dakle, $\chi_A(x) \in \{0,1\}$. Obrnuto, ako je funkcija $\chi_A(x)$ definisana na gore naveden način, onda je ona karakteristična funkcija za skup $A \subset U$ u smislu da A sadrži elemente $x \in U$ za koje je $\chi_A(x)$ jednako 1. Drugim rečima, svaki skup je jedinstveno određen svojom karakterističnom funkcijom. Univerzalni skup U ima funkciju pripadnosti $\chi_U(x)$ za koju važi $\chi_U(x) = 1$ za svako $x \in U$. Prazan skup $\emptyset$ je u potpunosti opisan funkcijom pripadnosti $\chi_\emptyset(x) = 0$ za svako $x \in U$.

Primer 1. *Neka je dat univerzum $U = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$ koji predstavlja skup studenata master studija nekog univerziteta. Neka je $A = \{S_1, S_4, S_6\} \subset U$, podskup studenata master studija koji imaju prosek preko 9.00.*

Samo tri od šest elemenata iz U pripadaju skupu A. Ovako definsanom poskupu odgovara sledeća karakteristična funkcija:

$$\begin{aligned} \chi_A(S_1) &= 1, & \chi_A(S_2) &= 0, \\ \chi_A(S_3) &= 0, & \chi_A(S_4) &= 1, \\ \chi_A(S_5) &= 0, & \chi_A(S_6) &= 1. \end{aligned}$$

Odnosno, karakteristična funkcija skupa A je

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x = S_1, S_4, S_6, \\ 0, & \text{za } x = S_2, S_3, S_5. \end{cases}$$

Takođe, skup A može biti predstavljen kao skup uređenih parova pri čemu druga vrednost označava da li njemu pridruženi element pripada datom skupu A (pridružena 1) ili ne pripada skupu A (pridružena 0):

$$A = \{(S_1, 1), (S_2, 0), (S_3, 0), (S_4, 1), (S_5, 0), (S_6, 1)\}.$$

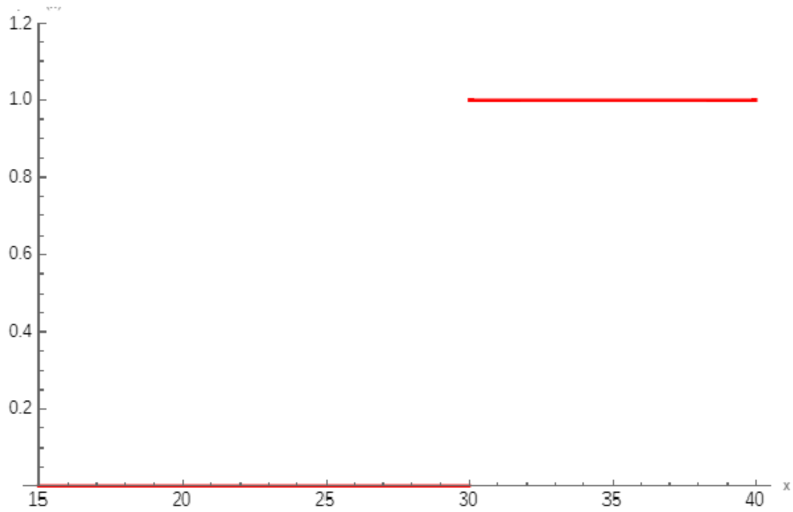
□

Primer 2. *U ovom primeru biće prikazan klasičan skup koji opisuje pojam vezan za vremenske uslove "vrućina je". Neka je univerzalni skup U dat kao skup svih izmerenih temperatura vazduha u letnjem periodu (temperature od bar 15 stepeni). Smatramo da je veoma toplo napolju ako je izmerena temperatura 30 ili više stepeni inače je napolju prijatno, tj. nije vruće. Karakteristična funkcija skupa A = "vrućina je "je data na sledeći način:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & za\ 30 \leq x \\ 0, & za\ 15 \leq x < 30. \end{cases}$$

Karakteristična funkcija ovako definisanog klasičnog skupa data je grafikom 1.1, gde je univerzum na datom grafiku $U = \{x|15 \leq x \leq 40\}$.

Očigledno je da ovakav opis pojave "vrućine je"nije zadovoljavajući jer ne omogućava postojanje nijansi. Pojam "vrućina je"podleže različitim subjektivnim interpretacijama, pa nije precizno definisana. Na primer, ako je napolju izmerena temperatura 29, to znači prema fukciji pripadnosti da je napolju prijatno, kao što to isto važi i za temperaturu od 15 stepeni, a drastična je razlika u tim temperaturama. Takođe, gornja definicija uvodi drastičnu razliku između temperatura od 29 stepeni i 30 stepeni, te ova karakteristična funkcija skupa A ne uspeva realistično opisati prelazne slučajeve. □



Slika 1.1: Grafik karakteristične funkcije skupa A iz Primera 2.

Nedoslednost koja se vidi u prethodnom primeru može da se reši preleskom na funkciju koja uzima vrednosti iz celog jediničnog intervala, a ne samo 0 ili 1. Na ovaj način koncept pripadnosti skupu više nije oštar (ili 1 ili 0), već postaje postepen u smislu delimičnog pripadanja.

Definicija 1. [2] Neka je U neprazan univerzum. Fazi podskup A univerzuma U je

$$A = \{(x, \mu_A(x))|x \in U, \mu_A(x) \in [0, 1]\} \tag{1.1}$$

gde je $\mu_A : U \to [0, 1]$ funkcija pripadnosti.

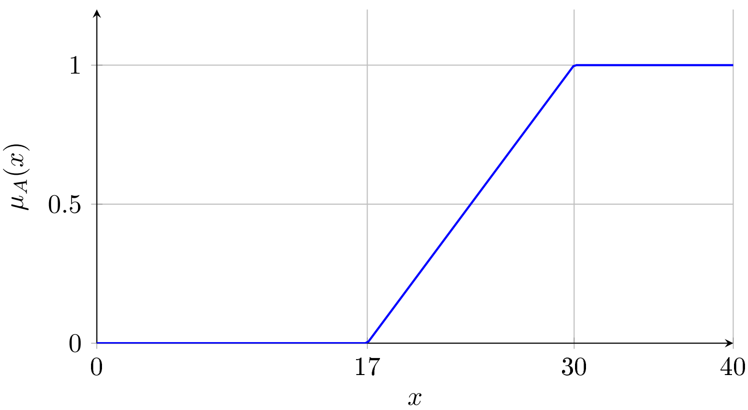
Primer 3. *Pojava "vrućina je"koja je u Primeru 2 opisana klasičnim skupom se može opisati i fazi skupom u smislu Definicije 1. Funkcija pripadnosti za fazi skup A="vrućina je"može bit data na sledeći način*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & za\ 0 \leq x \leq 17 \\ \frac{x-17}{30-17}, & za\ 17 < x \leq 30\ . \\ 1, & 30 \leq x \end{cases}$$

Grafik funkcije pripadnosti μ_A je pirikazan na Slici 1.2.

Ovako definisani fazi skup realnije opisuje (modeluje) shvatanje donosioca odluke (ispitanika) o temperaturi vazduha. Prelazak je postepen, nema jasnog reza i dozvoljava ispitaniku da izrazi svoje mišljenje da npr. temperatura od 29.5 stepeni nije "ne vruće "vepripada skupu "vrućinaša stepenom pripadnosti 0.96.

Na primer, za vrednost temperature od 25 stepeni funkcija pripadnosti iznosi $\mu_A(25) = 0.61$ dok za temperaturu od 19 stepeni funkcija pripadnosti iznosi $\mu_A(19) = 0.15$. □



Slika 1.2: Grafik funkcije pripadnosti $\mu_A(x)$ iz Primera 3.

Već na osnovu prethodnog primera moguć e je primetiti značajnu ulogu fazi skupova u opisivanju nepreciznih i subjektivnik pojava i pojmova. Funkcija pripadnosti je prilagodljiva mišljenju donosioca odluke, tj. različiti donosoci odluke moglu formirati različite funkcije pripadnosti za isti pojam ili pojavu.

Drugim rečima, za neki fazi skup A funkcija pripadnosti $\mu_A(x)$ određuje stepen ili nivo pripadnosti elementa x posmatranom fazi skupu A. Svakom elementu x skupa A se pridružuje broj $\mu_A(x)$ iz intervala [0,1].

Fazi skupovi se označavaju velikim latiničnim slovima A, B, C,..., a odgovarajuće funkcije pripadnosti sa $\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)$,..

Elementi sa stepenom pripadnosti nula se obično ne navode, te kada se govori o elementima nekog fazi skupa A podrazumevaju se oni elemnti iz univerzalnog skupa za koje je funkcija pripadnosti μ_A striktno veća od nule.

Treba primetiti i da je moguće klasični skup posmatrati kao poseban slučaj fazi skupova za koji su svi stepeni pripadnosti elemenata iz posmatranog skupa baš 1.

Primer 4. *Nakon uspešne pripreme ispita iz kursa Analiza 1, student treba da posavetuje kolegu koji tek planira da spremi taj isti ispit ali za kraći vremenski period. Prvi student je koristio 7 različitih knjiga za pripremu ispita i položio je ispit. Drugi student mora da položi taj isti ispit ali nema vremena da pročita sve knjige, pa je zamolio kolegu da mu preporuči koja od datih knjiga je najbolja za spremanje ispita, odnosno, koja pokriva ceo kurs i da može da stigne da je nauči za deset dana. Student iznosi svoje mišljenje u kojoj meri date knjige, označene kao K_i , $i = 1, .., 7$, pokrivaju ceo kurs Analize 1. Drugi rečima, prvi student formira fazi skup*

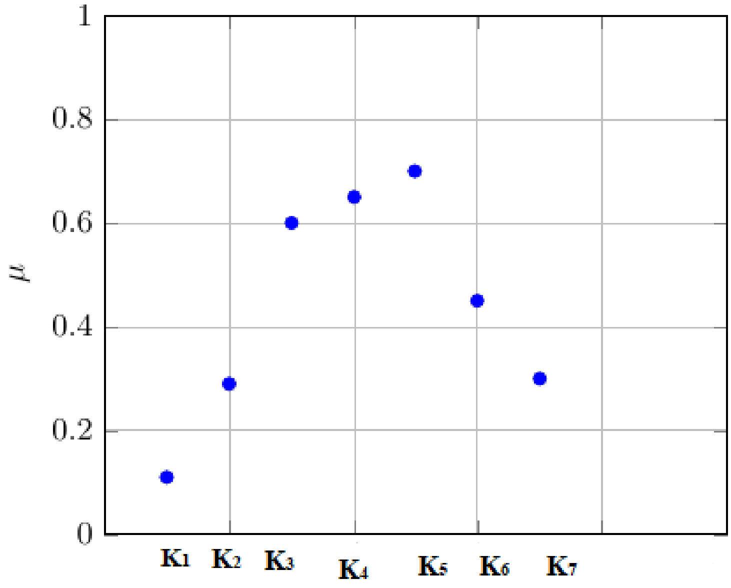
$$A = \text{"}\textit{Dobra literatura za pripremu ispita iz Analize 1}\text{"}.$$

U Tabeli 1.1 su date vrednosti funkcije pripadnosti za skup A koje opisuju mišljenje prvog studenta.

Tabela 1.1: Vrednosti funkcije pripadnosti koje odgovaraju elementima fazi skupa A.

knjiga	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
$\mu(A)$	0.11	0.29	0.60	0.65	0.70	0.45	0.30

Na slici 1.3 prikazan je grafik funkcije pripadnosti skupa A. Apscisa prikazuje knjige koje su dostupne, a ordinata prikazuje vrednosti funkcije pripadnosti kojim je definisan fazi skup A. $\square$



Slika 1.3: Grafik funkcije pripadnosti fazi skupa A iz Primera 4.

Primetimo da je u prethodnom primeru univerzum U bio diskretan i obuhvatao sedam knjiga, dok je u Primeru 3 univerzum U bio podinterval skupa realnih brojeva. Ukoliko je univerzum U neprebrojiv, npr. podinterval skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$, tada imamo neprekidnu funkciju pripadnosti. Diskretan slučaj podrazumeva najviše prebrojiv univerzum.

Kao što je već napomenjeno, fazi skup je uvek dat svojom funkcijom pripadnosti. U diskretnom slučaj, i to kada posmatrani fazi skup ima konačno mnogo elemenat, fazi skup je moguće zapisati i kao skup uređenih parova gde je na prvoj poziciji element skupa, a na drugoj stepen pripadnosti tog elementa posmatranom fazi skupu, tj. vrednost funkcije pripadnosti za taj element:

$$A = \{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \ldots, (x_n, \mu_A(x_n))\}.$$

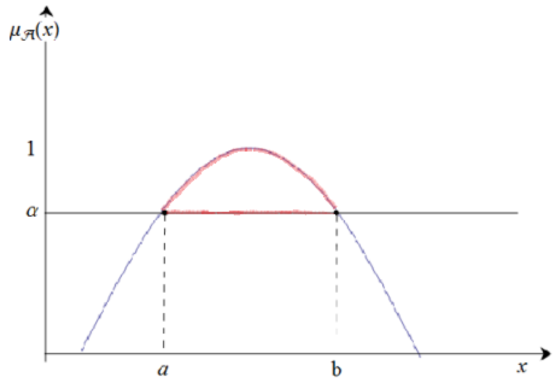
U tom smislu, skup fazi skup iz Primera 4 je moguće zapisati na sledeći način:

$$A = \{(K_1, 0.11), (K_2, 0.29), (K_3, 0.6), (K_4, 0.65), (K_5, 0.7), (K_6, 0.45), (K_7, 0.3)\}.$$

Naredni pojam koji je neophodan za potpuno razumevanje fazi skupova i njihove veze sa klasičnim skupovima je pojam α-preseka.

Definicija 2. [2] Naka je A fazi podskup nepraznog univerzuma U dat funkcijom pripadnosti μ_A. α - presek fazi skupa A je

$$[A]^\alpha = \{x \mid x \in U, \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1].$$



Slika 1.4: [21] α-presek fazi skupa A.

Alfa presek je skup u klasičnom smislu koji sadrži one elemante fazi skupa A čija je vrednost funkcije pripadnosti veća ili jednaka α.

Primer 5. *Neka je dat sledeći diskretan fazi skup*

$$A_1 = \{(x_1, 0.9), (x_2, 0.5), (x_3, 0.2), (x_4, 0.3)\}$$

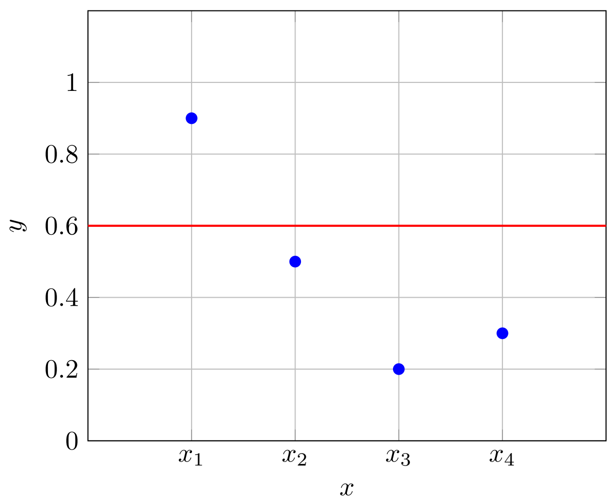
Tada je α-presek za skup $\alpha = 0.6$, u oznaci $[A]^{0.6}$, skup onih elemenata skupa A_1 čija je funkcija pripadnosti μ_{A_1} veća ili jednaka $\alpha = 0.6$, tj.

$$[A]^{0.6} = \{x_1\}.$$

Ako je A_2 fazi skup dat sa

$$A_2 = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.5), (x_3, 0.8), (x_4, 0.7)\}$$

i $\alpha = 0.2$, tada je $[A]^{0.2} = \{x_2, x_3, x_4\}$. □



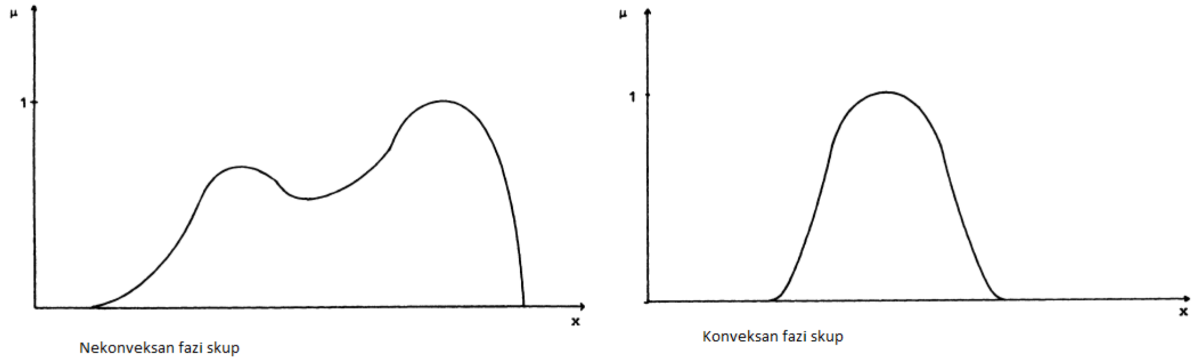
Slika 1.5: α presek na nivou 0.6 iz Primera 6.

Sledi pregled pojmova koji su neophodni za dalji rad.

Definicija 3. [2, 6] Fazi skup A je konveksan ako važi

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, \quad x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1]$$

Takođe, fazi skup je konveksan ako i samo ako su svi α-preseci konveksni



Slika 1.6: [21]Konveksnost fazi skupa A.

Definicija 4. [6] Fazi skup se naziva *normalizovanim* ako barem jedan element tog skupa dostiže maksimalni stepen pripadnosti 1.

Definicija 5. [6] Nosač fazi skupa A u oznaci supp(A) je

$$\mathrm{supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

Ovako definisan skup supp(A) je klasičan skup svih elemenata $x \in U$ za koje je vrednost funkcije pripadnosti striktno veća od nule.

Definicija 6. [6] Jezgro fazi skupa A, u oznaci $core(A)$, je

$$core(A) = \{x \in A | \mu_A(x) = 1\}$$

Jezgro fazi skupa je klasičan skup elemenata univerzuma U ža koje su vrednosti funkcije pripadnosti jednake jedinici.

1.2 Operacije sa fazi skupovima

U ovom poglavlju je dat pregled osnovnih operacija sa fazi skupovima. Operacije koje se definišu u daljem radu su zapravo proširenje operacija istog imena koje su primenjive u klasičnoj teoriji skupova. Može se uočiti analogija sa klasičnim skupovima, a opet s druge strane može se lepo videti i razlika.

Posmatrajmo fazi skupove A i B u univerzumu U,

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U \text{ i } \mu_A(x) \in [0, 1]\},$$

$$B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in U \text{ i } \mu_B(x) \in [0, 1]\}.$$

Operacije sa A i B uvode se putem operacija sa njihovim funkcijama pripadnosti $\mu_A(x)$ i $\mu_B(x)$.

Definicija 7. $[2, 6]$ Fazi skupovi A i B su jednaki, u oznaci $A = B$, ako za svako $x \in U$ važi:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x).$$

Definicija 8. $[2, 6]$ Fazi skup A je podskup fazi skupa B, u oznaci $A \subseteq B$, ako za svako $x \in U$ vazi:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

Definicija 9. $[2, 6]$ Fazi skup A naziva se pravim podskupom fazi skupa B, označeno sa $A \subset B$, ako je A podskup od B i $A \neq B$, tj.

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ za svaki } x \in U$$

i

$$\mu_A(x) < \mu_B(x) \text{ za barem jedan } x \in U.$$

Definicija 10. [2, 6] Fazi skupovi A^C je komplementi fazi skup A ako za svako $x \in U$ važi:

$$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Definicija 11. [2, 6] Presek dva fazi skupa A i B je novi fazi skup u oznaci $A \cap B$ dat funkcijom pripadnosti:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad x \in U.$$

Definicija 12. [2, 6] Unija dva fazi skupa A i B je novi fazi skup u oznaci $A\cup B$ dat funkcijom pripadnosti:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad x \in U.$$

Primer 6. *Posmatrajmo univerzum $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ koji predstavlja skup od pet predmeta u školi. Neka su dati fazi skupovi $A =$ "zanimljiv predmet" i $B =$ "težak predmet" svojim funkcijama pripadnosti čije vrednosti su date u Tabeli 1.2*

Tabela 1.2: Vrednosti funkcija pripadnosti za fazi skupove A i B.

x	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mu_A(x)$	0.2	0.7	1	0
$\mu_B(x)$	0.5	0.3	1	0.1

Koristeći definicije 11 i 12 dobijamo sledeće:

Tabela 1.3: Vrednosti funkcija pripadnosti za fazi skupove $A \cap B$ i $A \cup B$

x	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mu_{A\cap B}(x)$	0.2	0.3	1	0
$\mu_{A\cup B}(x)$	0.5	0.7	1	0.1

Dakle, fazi skupovi dobijeni presekom i unijom početnih fazi skupova A i B su

$$A \cap B = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.3), (x_3, 1), (x_4, 0)\}$$

$$A \cup B = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.7), (x_3, 1), (x_4, 0.1)\}.$$

□

Ka što je poznato, za klasične skupove važi **zakon isključenog trećeg**, odnosno $A \cap A^c = \emptyset$ i $A \cup A^c = U$. Jedna od zanimljivih razlika između klasičnih i fazi skupova se ogleda upravo u tome što zakon isključenog trećeg ne važi za fazi skupove, tj. $A \cap A^c \neq \emptyset$.

U teoriji fazi skupova α-presci su od velike važnosti. Jedna od lepih osobina ovih skupova jeste da, kako su oni klasični skupovi, sa njima možemo odraditi sve operacije koje smo do sada sreli u teoriji klasičnih skupova i tom prilikom dobijamo α-preseke rezultujućih fazi skupova. Lako se može proveriti da je ispunjeno

$$[A \cup B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$$

i

$$[A \cap B]^\alpha = [A]^\alpha \cap [B]^\alpha$$

gde su A i B proizvoljni fazi skupovi. Kako je svaki fazi skup moguće rekonstruisati pomoću α-preseka, što je i dato sledećom teoremom, iz rezultujućih α-preseka može se formirati rezultujući fazi skup.

Teorema 1.2.1. [9] Za svaki fazi skup A važi

$$A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha[A]^\alpha$$

gde su $\alpha[A]^\alpha$ fazi skupovi dati funkcijom pripadnosti

$$\mu_{\alpha[A]^\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{za } x \in [A]^\alpha, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dokaz. Neka je x proizvoljan fiksirani element iz U. Označimo sa $\mu_A(x) = r$. Tada je

$$\mu_{\cup_{\alpha\in[0,1]}\alpha[A]_\alpha}(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \mu_{\alpha[A]_\alpha}(x) = \max(\sup_{\alpha\in[0,r]} \mu_{\alpha[A]_\alpha}(x), \sup_{\alpha\in(r,1]} \mu_{\alpha[A]_\alpha}(x)).$$

Kako je za $\alpha \in [0,r]$ uvek $\mu_A(x) = r \geq \alpha$, to je $\mu_{\alpha[A]_\alpha}$, a za $\alpha \in (r,1]$ uvek je $\mu_A(x) = r \leq \alpha$ pa je $\mu_{\alpha[A]_\alpha} = 0$, te važi

$$\mu_{\cup_{\alpha\in[0,1]}\alpha[A]_\alpha}(x) = \sup_{\alpha\in[0,r]} \alpha = r = \mu_A(x).$$

□

Primer 7. *Neka je dat fazi skup A na sledeći način*

$$A = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.5), (x_3, 0.7), (x_4, 1)\}.$$

Kako je A diskretan fazi skup, posmatramo sledeće α-preseke $[A]^{0.4}, [A]^{0.5}, [A]^{0.7}, [A]^1$. Primetimo da važi sledeće

$$\alpha \in (0, 0.4] \quad \Rightarrow \quad [A]^\alpha = [A]^{0.4} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$
$$\alpha \in (0.4, 0.5] \quad \Rightarrow \quad [A]^\alpha = [A]^{0.5} = \{x_2, x_3, x_4\},$$
$$\alpha \in (0.5, 0.7] \quad \Rightarrow \quad [A]^\alpha = [A]^{0.7} = \{x_3, x_4\},$$
$$\alpha \in (0.7, 1] \quad \Rightarrow \quad [A]^\alpha = [A]^1 = \{x_4\}.$$

Sada možemo konstruisati sledeće specijalne fazi skupove označene kao $\alpha[A]^\alpha$:

$$0.4[A]^{0.4} = \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.4), (x_3, 0.4), (x_4, 0.4)\},$$
$$0.5[A]^{0.5} = \{(x_1, 0), (x_2, 0.5), (x_3, 0.5), (x_4, 0.5)\},$$
$$0.7[A]^{0.7} = \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0.7), (x_4, 0.7)\}.$$
$$1[A]^1 = \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 1)\}.$$

Ako posmatramo uniju ovako formiranih fazi skupova datu Definicijom 12 dobijamo polazni fazi skup A

$$A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha[A]^\alpha = 0.4[A]^{0.4} \cup 0.5[A]^{0.5} \cup 0.7[A]^{0.7} \cup 1[A]^1,$$

tj.

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \mu_{\alpha[A]^\alpha}(x) = \max\{\mu_{0.4[A]^{0.4}}(x), \mu_{0.5[A]^{0.5}}(x), \mu_{0.7[A]^{0.7}}(x), \mu_{1[A]^1}(x)\}.$$

□

Primer 8. *Neka je dat fazi skup A određen neprekidnom funkcijom pripadnosti:*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x - 1 & \textit{ako } x \in [1,5] \\ 9 - x & \textit{ako } x \in [5,9] \\ 0 & \textit{inače.} \end{cases}$$

Za svako $\alpha \in [0,1]$, α- presek skupa A u ovom primeru je zatvoren interval:

$$[A]^\alpha = [\alpha + 1, 9 - \alpha],$$

Specijalni fazi skup $\alpha[A]^\alpha$ definisan je funkcijom pripadnosti:

$$\mu_{\alpha[A]^\alpha} = \begin{cases} \alpha & \textit{ako } x \in [\alpha + 1, 9 - \alpha] \\ 0 & \textit{inače.} \end{cases}$$

Prema Teoremu 1.2.1, skup A se može rekonstruisati kao unija fazi skupova $\alpha[A]^\alpha$ za sve $\alpha \in [0,1]$. □

1.3 Trougaone norme i konorme

U prethodnom poglavlju presek i unija fazi skupova su opisani idempotentnim operatorima, min i max. Navedeni pristup je vremenom proširen uvođenjem novih operatora koji modeluju presek i uniju fazi skupova, a to su trougaone norme i trougaone konorme. Trougaona norma (t-norma) i trougaona konorma (t-konorma) potiču iz istraživanja probabilističkih metričkih prostora [12,15], u kojima su nejednakosti trougla proširene korišćenjem t-normi. Korišćenje trougaonih normi i trougaonih konormi za modelovanje preseka i unije fazi skupova seže u 70-te godine [8]. U ovom odeljku ćemo se koncentrisati na osnovne četiri t-norme i t-konorme i njihovu primenu u teoriji fazi skupova.

1.3.1 Trougaone norme

Presek dva fazi skupa A i B sada ćemo definisati funkcijom:

$$i : [0,1] \times [0,1] \to [0,1].$$

Za svaki element x univerzalnog skupa, ova funkcija kao argument uzima par koji se sastoji od stepena pripadnosti elementa skupu A i skupu B i daje stepen pripadnosti tog elementa skupu koji predstavlja presek A i B:

$$(A \cap B)(x) = i(A(x), B(x))$$

za svako $x \in X$.

Da bi funkcija i ovog oblika bila kvalifikovana kao fazi presek, ona mora posedovati odgovarajuća svojstva koja osiguravaju da fazi skupovi dobijeni pomoću i budu intuitivno prihvaćeni kao smisleni fazi preseci bilo koja dva fazi skupova. Zapravo, klasa fazi preseka se sada opšte prihvata kao ekvivalentna klasi trougaonih normi [12,15], čija definicija sledi:

Definicija 13. [9] Trougaona norma T (t-norma) je funkcija $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ takva da za svako x, y ,$z \in [0,1]$ važe sledeće osobine:

(T1) **Komutativnost**: $T(x,y) = T(y,x)$,

(T2) **Asocijativnost**: $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$,

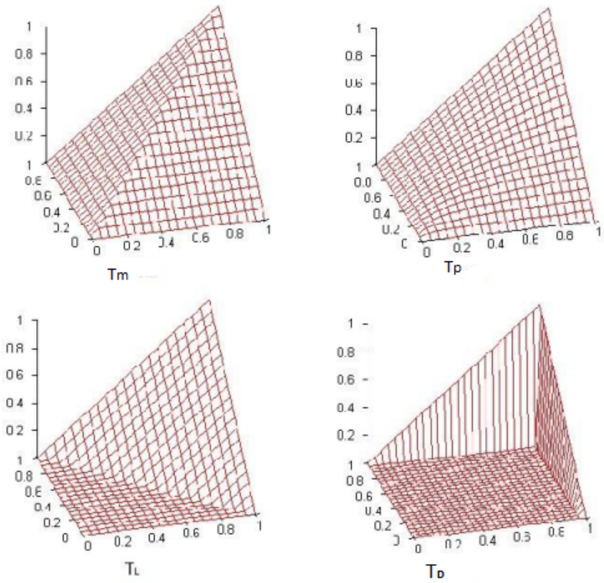
(T3) **Monotonost**: $T(x,y) \leq T(x,z)$ za $y \leq z$,

(T4) **Rubni uslovi**: $T(x,1) = T(1,x) = x$.

Monotonost i komutativnost izražavaju prirodan zahtev da smanjenje stepena preipadnosti u skupu A ili B ne može dovesti do povećanja stepena pripadnosti u preseku. Komutativnost osigurava da je fazi presek simetričan, tj. indiferentan prema redosledu u kojem se razmatraju skupovi koji treba da se kombinuju. Asocijativnost osigurava da možemo uzeti presek bilo kog broja skupova u bilo kom redosledu parnog grupisanja koji želimo. Osobina asocijativnosti nam omogućava da proširimo operaciju fazi preseka na više od dva skupa.

Četiri elementarne t-norme su: minimum T_M, algebarski proizvod T_P, Lukašijevičeva (Lukasiewicz) t-norma $\mathrm{T_L}$ i drastični presek (eng. Drastic intersection) $\mathrm{T_D}$:

1. $\mathrm{T}_M(x,y) = \min(x,y)$,
2. $\mathrm{T}_P(x,y) = x \cdot y$,
3. $\mathrm{T_L}(x,y) = \max(0, x+y-1)$,
4. $\mathrm{T_D}(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & \text{ako je } \max(x,y) = 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$



Slika 1.7: [21] Četiri elementarne t-norme.

Sledi pregled rezultata iz [5,8] neophodni za bolje razumevanje prirode trougaonih normi.

Teorema 1.3.1. [8] Za svaku t-normu važi sledeće:

$$T(x, y) \leq \min(x, y)$$

Dokaz. Koristeći monotonost (T3) i aksiom (T4), za svako $x, z \in [0, 1]$ imamo $T(x, y) \leq T(x, 1) = x$, a koristeći komutativnost imamo $T(x, y) \leq T(1, y) = y$. Tako, $T(x, y) \leq \min(x, y)$. □

Na osnovu prethodne teoreme može se doneti zaključak da svaka trougaona norma daje rezultat ispod minimalnog argumenta, te se t-norme mogu koristiti u modelovanju pesimističkih pristupa.

Često je poželjno ograničiti klasu fazi preseka (t-normi) razmatranjem različitih dodatnih uslova:

- T je neprekidna funkcija,
- $T(a, a) < a$ (subidempotentnost),
- Ako je $a_1 < a_2$ i $b_1 < b_2$, onda $T(a_1, b_1) < T(a_2, b_2)$ (stroga monotonost).

S obzirom na to da važi osobina asocijativnosti za trougaone norme , one se mogu proširiti na n-arne operacije $T_{i=1}^{n} : [0, 1]^n \to [0, 1]$ i to po sledećem pravilu [8]:

$$T_{i=1}^{n} x_i = T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = \cdots = T(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Sledeće n-arne operacije su proširenje elementarnih t-normi:

1. $T_M(x_1, \ldots, x_n) = \min(x_1, \ldots, x_n)$,
2. $T_P(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$,
3. $T_L(x_1, \ldots, x_n) = \max\left(0, \sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1)\right)$,
4. $T_D(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_i, & \text{ako je } x_j = 1 \text{ za } i \neq j, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

Takođe, operacija T se može proširiti i na beskonačnu operaciju $T_{i=1}^{\infty}$:

$$T_{i=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \to \infty} T_{i=1}^{n} x_i,$$

gde je $\{x_n\}$ niz iz intervala $[0, 1]$.

Definicija 14. [8] Trougaona norma T_1 je slabija od trougaone norme T_2, u oznaci $T_1 \leq T_2$, ako je

$$T_1(x,y) \leq T_2(x,y), \text{ za svako } (x,y) \in [0,1]^2.$$

Takođe se može reći da je T_2 jača od T_1.

Teorema 1.3.2. [8] Za svaku t-normu T i za sve $(x,y) \in [0,1]^2$ važi:

$$T_D(x,y) \leq T(x,y) \leq T_M(x,y).$$

Dokaz. Neka su dati $x, y \in [0,1]$ i neka je $T(x,y)$ proizvoljna t-norma. Koristeći činjenicu da je $y \leq 1$ i osobine $(T3)$ i $(T4)$ dobija se $T(x,y) \leq T(x,1) = x$. Ako se iskoristi da je i $x \leq 1$, kao i osobine $(T1)$, $(T3)$ i $(T4)$, redom, dobija se $T(x,y) = T(y,x) \leq T(y,1) = y$. Dakle, $T(x,y) \leq x$ i $T(x,y) \leq y$, te odatle sledi $T(x,y) \leq \min(x,y) = T_M$.

Dalje, za $x = 1$ se dobija $T(x,y) = T(1,y) = y = T_D(x,y)$, a za $y = 1$ se dobija $T(x,y) = T(x,1) = x = T_D(x,y)$. Za $x = 0$ ili $y = 0$ važi $T(x,y) = T_D(x,y) = 0$ tj. obe t-norme su jednake. Sledi da je $T(x,y)$ jednako sa $T_D(x,y)$ na rubu. Ako je $x, y \neq 0$ tada je $T(x,y) \geq 0$ i $T_D(x,y) = 0$ pa se ponovo zaključuje da je $T(x,y) \geq T_D(x,y)$. □

Teorema 1.3.3. [8] Trougaona norma T_M je jedina trougaona norma koja zadovoljava

$$T(x,x) = x \text{ za sve } x \in (0,1).$$

Dokaz. Neka za trougaonu normu važi $T(x,x) = x$ za sve $x \in (0,1)$. Onda za neko $y \leq x < 1$, zbog monotonosti i zbog toga što je svaka trougaona norma slabija od norme T_M, sledi da je:

$$y = T(y,y) \leq T(x,y) \leq T_M = \min(x,y) = y,$$

gde na osnovu komutativnosti i rubnog uslova sledi da je $T = T_M$. □

Teorema 1.3.4. [8] Trougaona norma T_D je jedina trougaona norma za koja važi

$$T(x,x) = 0 \text{ za sve } x \in (0,1).$$

Dokaz. Neka za trougaonu normu važi $T(x,x) = 0$ za sve $x \in (0,1)$. Tada za svako y, $0 \leq y < x$ važi

$$0 \leq T(x,y) \leq T(x,x) = 0,$$

iz čega sledi da je $T = T_D$. □

Definicija 15. [8] Trougaona norma T je striktna ako je neprekidna (u smislu neprekidna kao funkcija dve promenljive) i važi:

$$T(x,y) < T(x,z) \text{ kad god je } x > 0 \text{ i } y < z.$$

1.3.2 Trougaone konorme

Analogno t-normama, u ovom delu rada uvodi se operator koji modeluje uniju fazi skupova. Kao što je slučaj sa fazi presekom, fazi uniju dva fazi skupa A i B možemo izraziti funkcijom:

$$u : [0,1] \times [0,1] \to [0,1].$$

Argument ove funkcije je par koji se sastoji od stepena pripadnosti nekog elementa x fazi skupu A i stepena pripadnosti istog elementa fazi skupu B. Funkcija vraća stepen pripadnosti elementa u skupu $A \cup B$:

$$(A \cup B)(x) = u(A(x), B(x)),$$

za sve $x \in X$.

Osobine koje funkcija u mora ispunjavati da bi bila intuitivno prihvaćena kao fazi unija su tačno iste kao osobine funkcija koje su u literaturi poznate kao t-konorme.

Definicija 16. [9] Trougaona konorma S (t-konorma) je funkcija $S : [0,1]^2 \to [0,1]$, takva da za svako $x, y, z \in [0,1]$ važi:

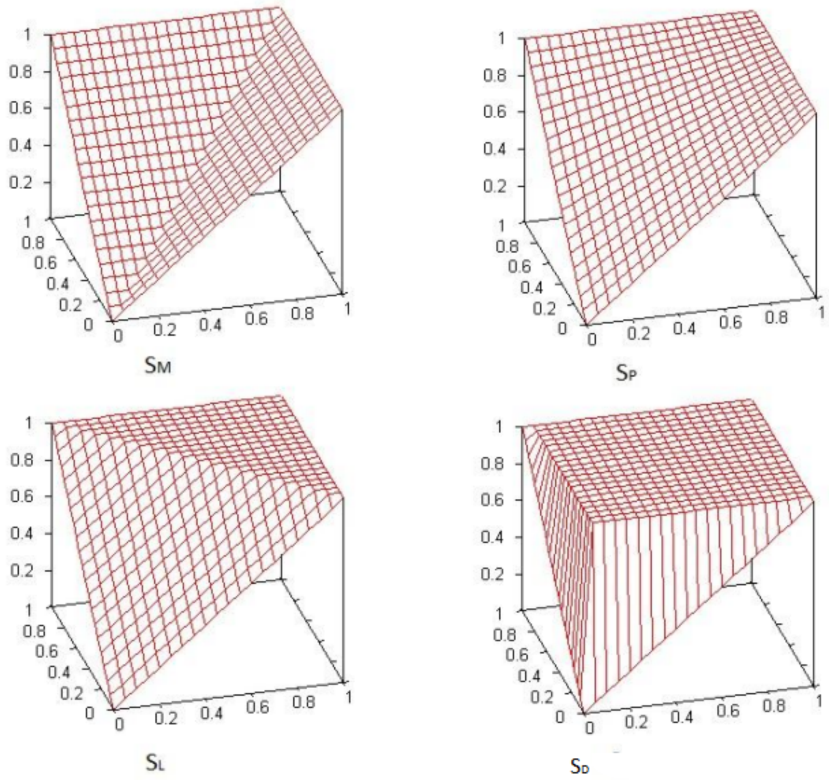
(S1) **Komutativnost**: $S(x,y) = S(y,x)$, (S2) **Asocijativnost**: $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$,

(S3) **Monotonost**: $S(x, y) \leq S(x, z)$ kada je $y \leq z$,

(S4) **Rubni uslov**: $S(x, 0) = x$.

Sa aksiomatske tačke gledišta, t-norme i t-konorme se razlikuju samo po neutralnom elementu. Analogno kao kod trougaonih normi, i ovde se navode četiri elementarne trougaone konorme:

1. $S_M(x, y) = \max(x, y)$,
2. $S_P(x, y) = x + y - x \cdot y$,
3. $S_L(x, y) = \min(1, x + y)$,
4. $S_D(x, y) = \begin{cases} \max(x, y), & \text{za } \min(x, y) = 0, \\ 1, & \text{inače.} \end{cases}$



Slika 1.8: [21] Četiri elementarne t-konormi.

Trougaone norme i trougaone konorme su dualni operatori, što se i vidi iz naredne teoreme.

Teorema 1.3.5. [8] Funkcija $S : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ je trougaona konorma ako i samo ako postoji trougaona norma T takva da za sve $(x, y) \in [0, 1]^2$ važi

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y).$$

Dokaz. **($\Rightarrow$)** Neka je S trougaona konorma i neka je preslikavanje $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ definisano sa

$$T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y).$$

Treba pokazati da je ovako definisano preslikavanje trougaona norma, tj. treba pokazati da su osobine (T1) – (T4) iz Definicije (13) zadovoljene:

1. (T1) $T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y) = 1 - S(1-y, 1-x) = T(y,x)$ – važi zbog pretpostavke da je S trougaona konorma, a ona ima osobinu komutativnosti.

2. (T2)

$$
\begin{aligned}
T(x, T(y,z)) &= 1 - S(1-x, 1-T(y,z)) \\
&= 1 - S\left(1-x, 1-(1-S(1-y,1-z))\right) \\
&= 1 - S\left(1-x, 1-1+S(1-y,1-z)\right) \\
&= 1 - S(1-x, S(1-y,1-z)) \\
&= 1 - S(S(1-x,1-y), 1-z) \\
&= 1 - S\left(1-1+S(1-x,1-y), 1-z\right) \\
&= 1 - S(1-T(x,y), 1-z) \\
&= T(T(x,y), z)
\end{aligned}
$$

   ovo sve važi zbog toga što S kao trougaona konorma ima osobinu asocijativnosti.

3. (T3) Neka je $y \leq z$. Onda važi i da je $1-y \geq 1-z$ (*). Iz (*) i iz osobine monotonosti za trougaone konorme, važi da je
$$S(1-x, 1-y) \geq S(1-x, 1-z)$$
   iz čega sledi
$$1 - S(1-x, 1-y) \leq 1 - S(1-x, 1-z)$$
   i onda imamo
$$T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y) \leq 1 - S(1-x, 1-z) = T(x,z).$$

4. (T4)

$$
\begin{aligned}
T(x,1) &= 1 - S(1-x, 1-1) = 1 - S(1-x, 0) = 1 - (1-x) = x, \\
T(x,0) &= 1 - S(1-x, 1-0) = 1 - S(1-x, 1) = 1 - 1 = 0.
\end{aligned}
$$

(⇐) Sada se pretpostavlja da je T trougaona norma takva da za svako $x, y \in [0,1]$ važi

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y).$$

Na analogni način kao što je pokazano da važi smer (⇒), pokazuje se da je preslikavanje S trougaona konorma. □

Teorema 1.3.6. [8] Za svaku trougaonu konormu S i svako $x, y \in [0,1]$ važi:

$$S_M(x,y) \leq S(x,y) \leq S_D(x,y)$$

Dokaz. Dokaz sledi iz analognog tvrđenja za trougaone norme i dualnosti. □

Iz prethodne teoreme sledi da svaka trougaona konorma daje rezultat koji je uvek veći od maksimalnog ulaznog argumenta. Njihova primena može biti u situacijama u kojim je potrebno modelovati optimističke postupke.

1.3.3 Operacije sa fazi skupovima zasnovane na t-normama i t-konormama

U ovom poglavlju biće predstavljene definicije preseka i unije fazi skupova koje se baziraju na trougaonim normama i trougaonim konormama.

Definicija 17. [8] Neka je T proizvoljna trougaona norma. T - presek fazi skupova A i B je fazi skup u oznaci $A \cap B$ dat sledećom funkcijom pripadnosti

$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad \text{za svako } x \in U.$$

Primer 9. *Neka su dati fazi skupovi A i B i neka su date njihove funkcije pripadnosti respektivno:*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & za\ x \notin [-1,1], \\ 1-x^2, & za\ x \in [-1,1], \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0, & za\ x \notin [0,2], \\ 1-(1-x)^2, & za\ x \in [0,2]. \end{cases}$$

Neka su date četiri elementarne trougaone norme iz poglavlja 1.3.1. Funkcije pripadnosti preseka fazi skupova A i B prema Definiciji 17 su

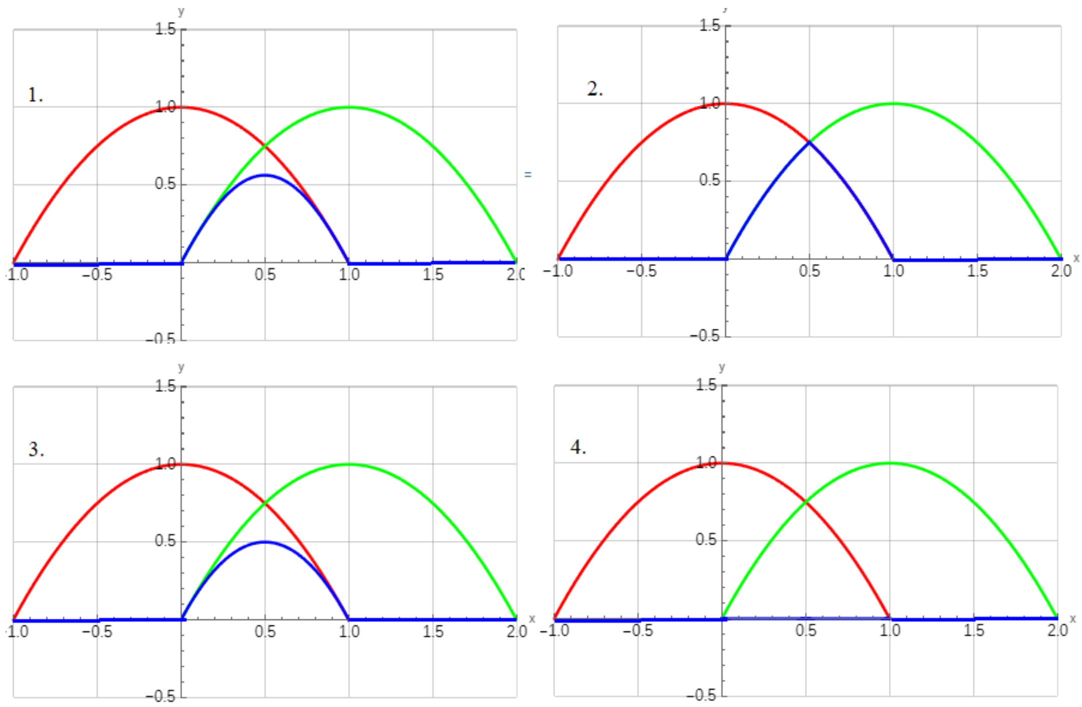
$$T_p(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \mu_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 0, & za\ x \notin [0,1], \\ (1-x^2)\cdot(1-(1-x)^2), & za\ x \in [0,1], \end{cases}$$

$$T_M(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \mu_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 0, & za\ x \notin [0,1], \\ \min(1-x^2, 1-(1-x)^2), & za\ x \in [0,1], \end{cases}$$

$$T_L(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \mu_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 0, & za\ x \notin [0,1], \\ \max(0, 1-x^2-(1-x)^2), & za\ x \in [0,1], \end{cases}$$

$$\mathrm{T_D}(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \begin{cases} \min(1-x^2, 1-(1-x)^2), & ako\ je\ \max(1-x^2, 1-(1-x)^2) = 1\ i\ x \in [0,1], \\ 0, & inače. \end{cases}$$

□



Slika 1.9: Grafici funkcija $\mu_{A\cap B}$ iz Primera 9.

Definicija 18. [8] Neka je S proizvoljna trougaona konorma. S - unija fazi skupova A i B je fazi skup u oznaci $A \cup B$ dat sledećom funkcijom pripadnosti

$$\mu_{A\cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad \text{za svako } x \in U.$$

Primer 10. *Neka su dati fazi skupovi A i B kao u prethodnom primeru. Posmatrajmo četiri elementarne trougaone konorme iz poglavlja 1.3.2. Funkcije pripadnosti unije fazi skupova A i B prema Definiciji 18 su*

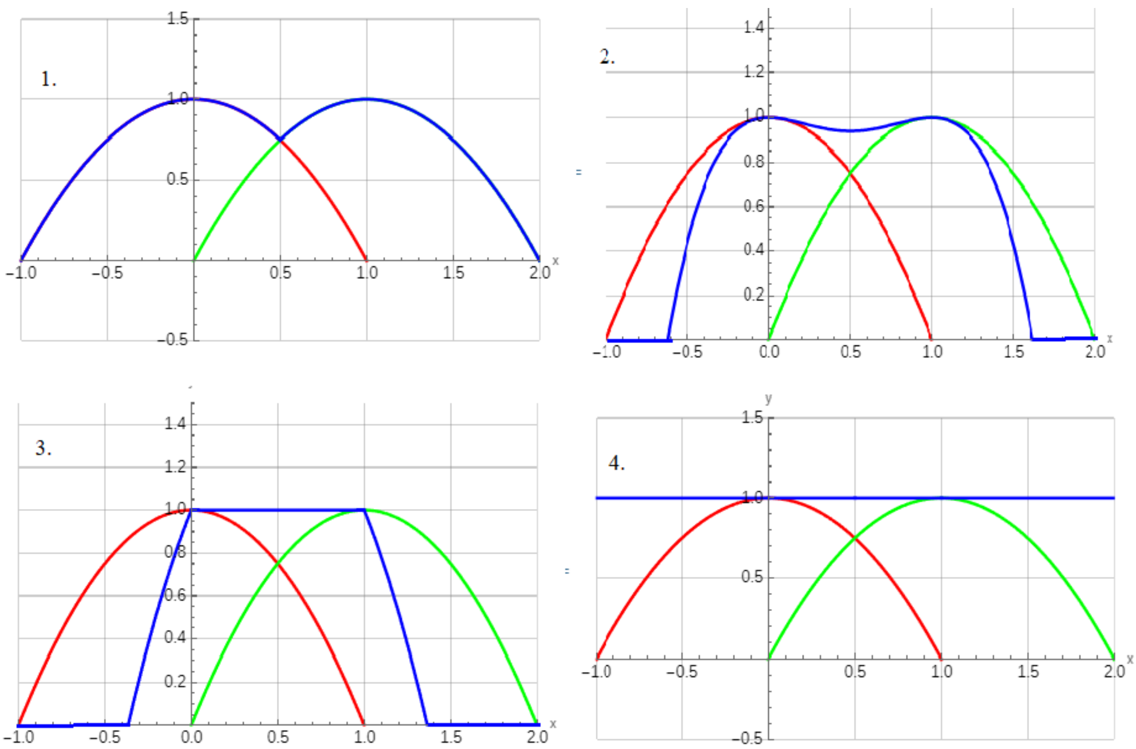
$$S_M(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_{A\cup B(x)} = \begin{cases} 0, & \textit{za } x \notin [-1,2], \\ \max(1-x^2, 1-(1-x)^2), & \textit{za } x \in [-1,2], \end{cases}$$

$$S_P(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_{A\cup B(x)} = \begin{cases} 0, & \textit{za } x \notin [-1,2], \\ 1-x^2+1-(1-x)^2-(1-x^2)\cdot(1-(1-x)^2), & \textit{za } x \in [-1,2], \end{cases}$$

$$S_L(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_{A\cup B(x)} = \begin{cases} 0, & \textit{za } x \notin [-1,2], \\ \min(1, 1-x^2+1-(1-x)^2), & \textit{za } x \in [-1,2], \end{cases}$$

$$S_D(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \begin{cases} \max(1-x^2, 1-(1-x)^2), & \textit{za } \min(1-x^2, 1-(1-x)^2) = 0,\ x \in [-1,2], \\ 1, & \textit{inače.} \end{cases}$$

□



Slika 1.10: Grafici funkcija $\mu_{A\cup B}$ iz Primera 10.

1.4 Fazi brojevi

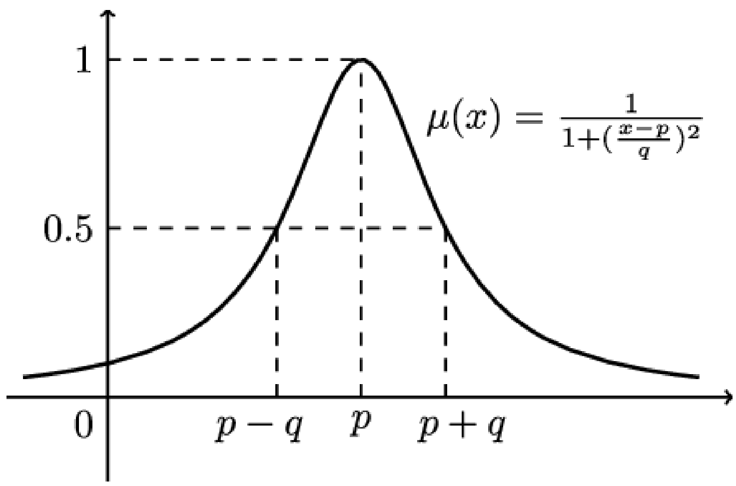
Specijalni fazi skupovi definisani na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$, poznati kao fazi brojevi, imaju poseban značaj u teoriji fazi skupova. U ovom delu rada sledi prikaz osnovnih pojmova vezanih za fazi brojeve iz [2,6,9].

Definicija 19. [6] Fazi podskup P skupa realnih brojeva je fazi broj ako važi sledeće:

1. P je normalizovan fazi skup,
2. P je konveksan,
3. postoji tačno jedno $\bar{x} \in \mathbb{R}$ takvo da je $\mu_{\mathcal{P}}(\bar{x}) = 1$,
4. funkcija pripadnosti $\mu_{\mathcal{P}}(x)$ za $x \in \mathbb{R}$ je po delovima neprekidna.

Modalna vrednost fazi broja P je vrednost $\bar{x}$ kojoj odgovara maksimalan stepen pripadnosti.

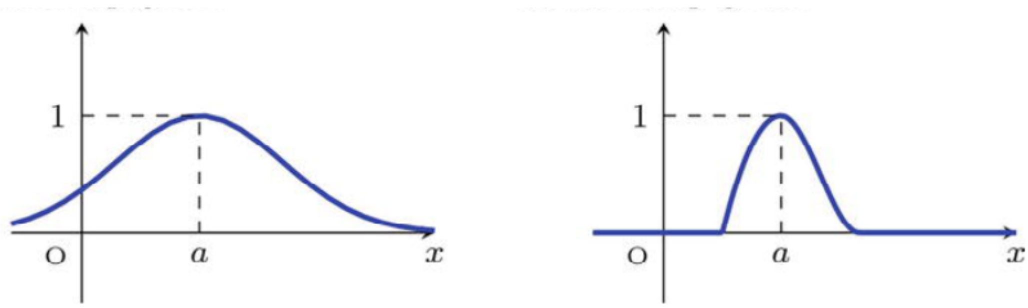
Definicija 20. [6] Fazi broj P je simetričan ako njegova funkcija pripadnosti zadovoljava $\mu_P(\bar{x} + x) = \mu_P(\bar{x} - x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$.



Slika 1.11: [21] Funkcija pripadnosti simetričnog fazi broja.

Definicija 21. [6] Fazi broj je strogo pozitivan, tj. $P > 0$, ako i samo ako nosač tog fazi broja, $supp(P) \subseteq (0, \infty)$, odnosno strogo negativan, tj. $P < 0$, ako i samo ako $supp(P) \subseteq (-\infty, 0)$.

Definicija 22. [6] Fazi broj je fazi-nula broj, u oznaci $\text{sgn}(P) = 0$, ako nije ni pozitivan ni negativan, tj. ako $0 \in \text{supp}(P)$.



Slika 1.12: [21] Funkcija pripadnosti fazi nula broja (levo) i strogo pozitivnog fazi broja (desno)

Zbog konveksnosti fazi brojeva, α-preseci ovih specijalnih fazi skupova su **zatvoreni** intervali. Ova osobina je posebno istaknuta jer omogućava uvođenje aritmetičkih operacija sa fazi brojevima o kojima će nešto kasnije biti reči.

U zavisnosti od oblika funkcije pripadnosti, razlikujemo više tipova fazi brojeva. Zadeh je klasifikovao ove funkcije u dve kategorije: linearne i nelinearne. Najčešće vrste funkcija pripadnosti, odnosno fazi brojeva su (videti [6]):

- trougaoni fazi broj,
- trapezoidni fazi broj,

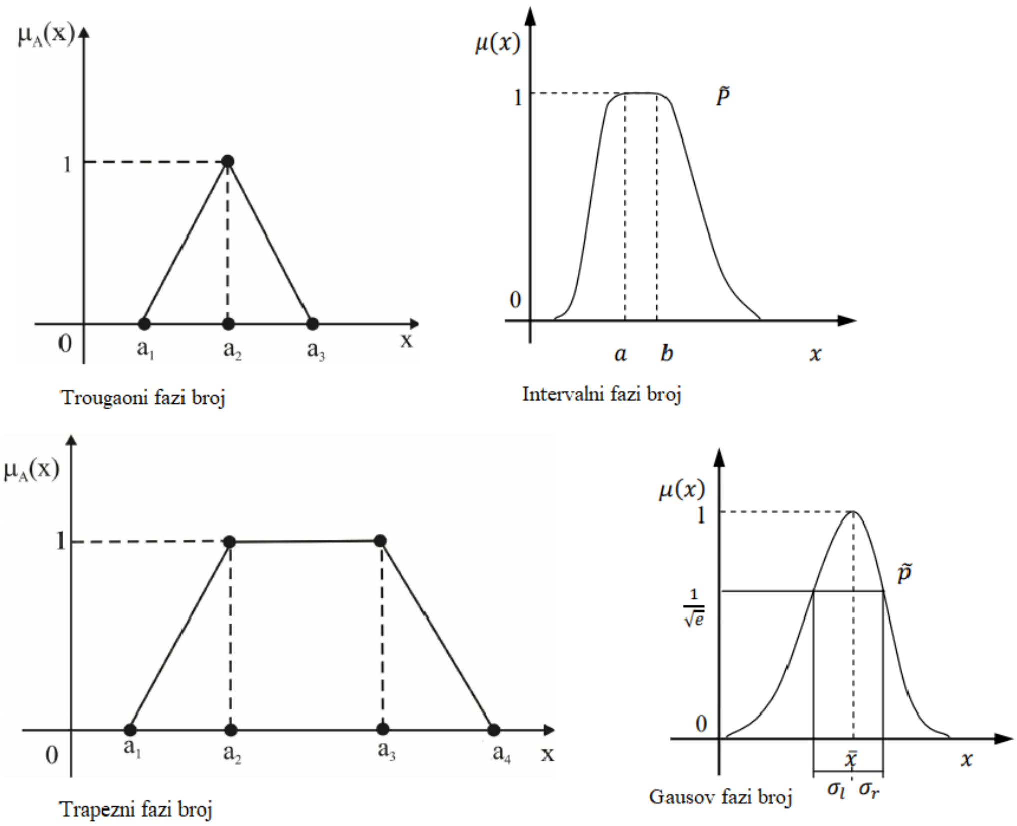
- intervalni fazi broj,
- Gausov fazi broj.

Trougaoni fazi brojevi imaju linearnu funkciju pripadnosti odnosno grafik funkcije pripadnosti sastoji se iz dva linerna dela koja se presecaju u modalnoj vrednosti koja je jedinstvena.

Ukoliko neki fazi skup ne ispunjava treći uslov iz Definicije 19. tj. ukoliko se njegovo jezgro može izraziti preko zatvorenog intervala $[a, b] = core(A)$, $a < b$, odnosno nema jedinstvenu modalnu vrednost takav fazi skup se naziva fazi interval.

Trapezoidni fazi broj je podvrsta fazi intervala. Funkcija pripadnosti trapezoidnog fazi broja sastoji od dva linerana dela koja su povezana zatvorenom duži. Ta duž je slika jezgra funkcije. Trapezoidni fazi broj se izdvaja iz grupe fazi intervala zbog linearnosti funkcije pripadnosti, dakle fazi interval u opštem slučaju pripada kategoriji nelinearnih fazi brojeva.

Funkcija pripadnosti Gausovog fazi broja je definisana normalizovanom i asimetričnom Gausovom funkcijom i ona pripada kategoriji nelinearnih fazi brojeva. Gausov fazi broj označavamo $\tilde{p} = (\bar{x}, \sigma_l, \sigma_r)$ čiju funkciju pripadnosti vidimo na slici 1.13.



Slika 1.13: [21] Grafici funkcija pripadnosti različitih fazi brojeva.

Napomena. Neki autori traže postojanje tačno jedne modalne vrednosti $\bar{x}$, a neki bar jedno $\bar{x}$. Ako postoji tačno jedno $\bar{x}$ onda fazi interval nije fazi broj nego nov pojam, ukoliko je bar jedno $\bar{x}$ onda fazi interval je podslučaj fazi broja.

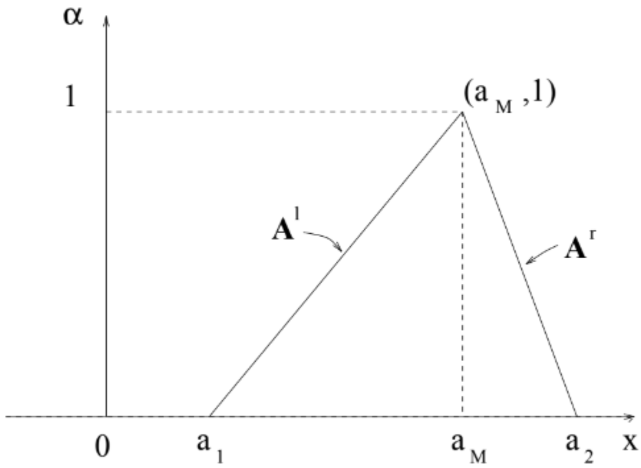
U nastavku ćemo se baviti trougaonim i trapeznim fazi brojevima, jer se najčešće susreću u praksi.

1.4.1 Trougaoni fazi brojevi

Definicija 23. [2,6] Trougaoni fazi broj A je fazi skup dat funkcijom pripadnosti $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ oblika:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_M-a_1}, & \text{za } a_1 \leq x \leq a_M, \\ \frac{x-a_2}{a_M-a_2}, & \text{za } a_M \leq x \leq a_2, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Interval $[a_1, a_2]$ zatvaranje nosač trougaonog fazi broja A, a tačka $(a_M, 1)$ je vrh posmatranog fazi broja (videti sliku 1.14).



Slika 1.14: [21] Trougaoni fazi broj.

Ako se tačka $a_M \in (a_1, a_2)$ nalazi na sredini intervala, tj. $a_M = \frac{a_1+a_2}{2}$, u tom slučaju je fazi broj simetričnan i njegova funkcija pripadnosti je definisana na sledeći način:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a_1)}{a_2-a_1}, & \text{za } a_1 \leq x \leq \frac{a_1+a_2}{2}, \\ \frac{2(x-a_2)}{a_1-a_2}, & \text{za } \frac{a_1+a_2}{2} \leq x \leq a_2, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

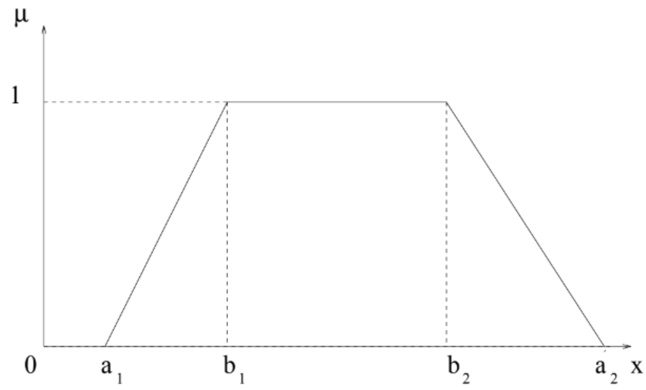
Možemo primetiti da je funkcija pripadnosti trougaonih fazi brojeva linearna funkcija, pri čemu se sastoji od dva linearna dela koja se spajaju u tački $(a_M, 1)$ koja predstavlja maksimum. Trougaone fazi broje kraće zapisujemo kao uređenu trojku $A = (a_1, a_M, a_2)$.

1.4.2 Trapezoidni fazi brojevi

Definicija 24. [2,6] Trapezoidni broj A dat je fazi skup dat funkcijom pripadnosti $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ oblika:

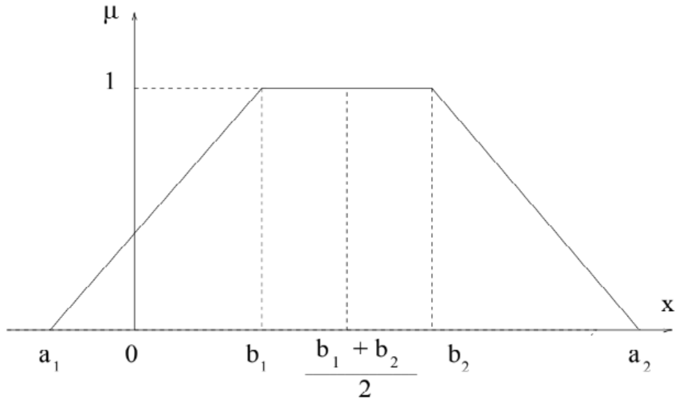
$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{b_1-a_1}, & \text{za } a_1 \leq x \leq b_1, \\ 1 & \text{za } b_1 \leq x \leq b_2 \\ \frac{x-a_2}{b_2-a_2}, & \text{za } b_2 \leq x \leq a_2 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Četiri vrednosti a_1, a_2, b_1 i b_2 iz prethodne definicije u potpunosti određuju trapezoidni fazi broj, pa ga možemo kraće zapisati kao $A = (a_1, a_2, b_1, b_2)$.



Slika 1.15: [21] Trapezni fazi broj

Ako je $b_1 = b_2 = a_M$, trapezoidni broj postaje trougaoni fazi broj i označava se sa (a_1, a_M, a_M, a_2). Odnosno, trougaoni broj (a_1, a_M, a_2) se može izraziti u obliku trapezoidnog fazi broja kao (a_1, a_M, a_M, a_2).



Slika 1.16: [21] Simetričan trapezoidni fazi broj

Ako je $[a_1, b_1] = [b_2, a_2]$, trapezoidni fazi broj je simetričan u odnosu na liniju $x = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$ i naziva se simetričnim trapezoidnim fazi brojem (pogledajte sliku 1.16).

1.5 Aritmetičke operacije sa fazi brojevima

Ono što je potrebno još jednom napomenuti pre uvođenja aritmetičkih operacija na skupu fazi brojeva jestu sledeće dve osobine fazi brojeva. Prva osobina jeste da se svaki fazi skup, kao i svaki fazi broj, može na jedinstven način napisati kao unija specijalnih fazi skupova koji su definisani poreko α- preseka (Teorema 1.2.1). Druga osobina je da su, zbog konveksnosti fazi brojeva, α-preseci fazi brojeva isključivo zatvoreni intervali, što ne važi generalno za fazi skupove. Ova dva svojstva fazi brojeva omogućava da se definišu aritmetičke operacije fazi brojeva preko operacija na njihovim α-presecima, tačnije sa zatvorenim intervalima.

Neka sa A i B dva fazi brojeva, i neka je sa $*$ označena bilo koja od četiri osnovne aritmetičke operacije na skupu realnih brojeva. Operaciju $*$ je mioguće proširiti na skup fzi brojeva na sledeći način:

$$[A * B]^\alpha = [A]^\alpha * [B]^\alpha,$$

za svako $\alpha \in [0, 1]$, gde je $[A * B]^\alpha$ α-presek rezultujućeg fazi broja. Iz Teoreme 1.2.1 sledi

$$A * B = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha [A * B]^\alpha.$$

Više o ovoj temi može se pronaći u [9].

Podsetimo se osnovnih aritmetičkih operacija na zatvorenim intervalima.

$$[a,b]+[d,e]=[a+d,b+e]$$

$$[a,b]-[d,e]=[a-e,b-d]$$

$$[a,b]\cdot[d,e]=[\min(ad,ae,bd,be),\max(ad,ae,bd,be)] \text{ pod uslovom da } 0\notin[d,e]$$

$$[a,b]/[d,e]=[a,b]\cdot[1/e,1/d]=[\min(a/d,a/e,b/d,b/e),\max(a/d,a/e,b/d,b/e)]$$

.

Primer 11. [9] *Neka su dati fazi brojevi A i B određeni funkcijama pripadnosti*

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, & za\ x\le -1\ i\ x>3,\\ \frac{x+1}{2}, & za\ -1<x\le 1,\\ \frac{3-x}{2}, & za\ 1<x\le 3,\end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}0, & za\ x\le 1\ i\ x>5,\\ \frac{x-1}{2}, & za\ 1<x\le 3,\\ \frac{5-x}{2}, & za\ 3<x\le 5.\end{cases}$$

Njihove α-preseke određujemo računajući za koje vrednosti x važe sledeće nejednakosti

$$\frac{x+1}{2}\ge\alpha \quad i \quad \frac{-x+3}{2}\ge\alpha,$$

tj.

$$x\ge 2\alpha-1 \quad i \quad -x\ge 2\alpha-3.$$

Iz prethodnog dobijamo

$$[A]^\alpha=[2\alpha-1,3-2\alpha].$$

Analogno se dobija i drugi α-presek

$$[B]^\alpha=[2\alpha+1,5-2\alpha].$$

Korišćenjem gore opisanih operacija na zatvorenim intervalima dobijamo nove zatvorene intervale koji odgovaraju α-presecima rezultujućih fazi brojeva:

$$[A+B]^\alpha=[4\alpha,8-4\alpha] \quad za\ \alpha\in(0,1],$$

$$[A-B]^\alpha=[4\alpha-6,2-4\alpha] \quad za\ \alpha\in(0,1],$$

$$[A\cdot B]^\alpha=\begin{cases}[-4\alpha^2+12\alpha-5,4\alpha^2-16\alpha+15], & za\ \alpha\in(0,0.5]\\ [4\alpha^2-1,4\alpha^2-16\alpha+15], & za\ \alpha\in(0.5,1]\end{cases}$$

$$[A/B]^\alpha=\begin{cases}[(2\alpha-1)/(2\alpha+1),(3-2\alpha)/(2\alpha+1)], & za\ \alpha\in(0,0.5]\\ [(2\alpha-1)/(5-2\alpha),(3-2\alpha)/(2\alpha+1)], & za\ \alpha\in(0.5,1]\end{cases}$$

Rezultirajući fazi brojevi $A+B, A-B, A\cdot B, A/B$ su određeni sledećim funkcijama pripadnosti respektivno:

$$\mu_{A+B}(x)=\begin{cases}0, & za\ x\le 0\ i\ x>8,\\ \frac{x}{4}, & za\ 0<x\le 4,\\ \frac{8-x}{4}, & za\ 4<x\le 8,\end{cases}$$

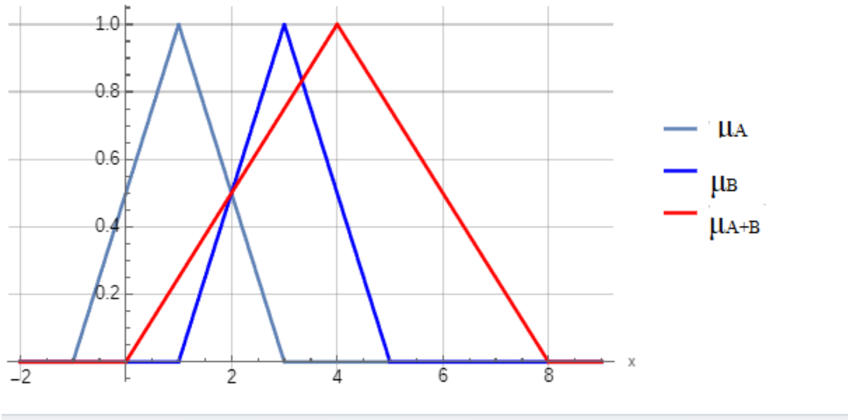
$$\mu_{A-B}(x)=\begin{cases}0, & za\ x\le -6\ i\ x>2,\\ \frac{x+6}{4}, & za\ -6<x\le -2,\\ \frac{2-x}{4}, & za\ -2<x\le 2,\end{cases}$$

$$\mu_{A\cdot B}(x)=\begin{cases}0, & za\ x<-5\ i\ x\ge 15,\\ [3-(4-x)^{1/2}]/2, & za\ -5\le x<0,\\ (1+x)^{1/2}/2, & za\ 0\le x<3,\\ [4-(1+x)^{1/2}]/2, & za\ 3\le x<15,\end{cases}$$

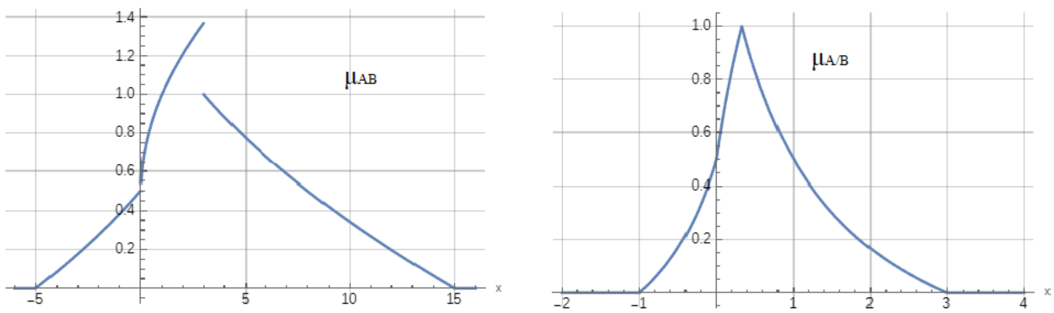
$$\mu_{A/B}(x) = \begin{cases} 0, & za\ x < -1\ i\ x \geq 3, \\ \frac{x+1}{2-2x}, & za\ -1 \leq x < 0, \\ \frac{5x+1}{2x+2}, & za\ 0 \leq x < 1/3, \\ \frac{3-x}{2x+2}, & za\ 1/3 \leq x < 3. \end{cases}$$

□

Može se primeti da zbir i razlika trougaonih (trapezoidnih) brojeva ostaje trougaoni (trapezoidni) broj (Slika 1.17), dok to nije slučaj za proizvod i količnik dva trougaona (trapezoidna) broja (Slika 1.18).



Slika 1.17: Zbir trougaonih brojeva A i B iz Primera 11.



Slika 1.18: Proizvod i količnik trougaonih brojeva A i B iz Primera 11.

1.5.1 Zadehov princip proširenja

Do aritmetičkih operacija sa fazi brojevima je moguće doći i na drugi način, primenom Zadehovog principa proširenja, te ih i uopštiti priemnom trougaonih normi. Još 1975. godine (videti [17]) Zadeh je predložio tzv. princip proširenja, koji je postao važan alat u teoriji fuzzy skupova i njenim primenama. Glavna ideja Zadehovog principa proširenja je da svaka realna funkcija $f : X \to Y$ indukuje drugu funkciju analogne prirode koja je primenljiva na fazi skupove.

Ako je A fazi skup na univerzumu U i $f : U \to \mathbf{R}$ realna funkcija, po Zadehovom principu proširenja, f indukuje funkciju F definisanu na skupu fazi skupova koja kao sliku fazi skupa A daje novi fazi skup $F(A)$ sledeće funkcije pripadnosti:

$$\mu_{F(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), & y \in range(f), \\ 0, & y \notin range(f). \end{cases}$$

Ako je fokus na fazi brojevima i osnovne četiri aritmetičke operacije kao u prethodnom poglavlju, Zadehov princip proširenja se svodi na sledeće ([18]):

$$\mu_{A*B}(x) = \sup_{x=y*z} \min\{\mu_A(y), \mu_B(z)\},$$

gde su A i B fazi brojevi, $* \in \{+, -, \cdot, /\}$, a $A * B$ rezultujući fazi broj.

Ovako date aritmetičke operacije sa fazi brojevima su ekvivalentne operacijama baziranim na α-presecima koje su predstavljene u prethodnom poglavlju.

Generalizovani Zadehov princip proširenja se dobija kada se u prethodnom zapisu operator min, tj trougaona norma T_M, zameni proizvoljnom trougaonom normom T :

$$\mu_{A *_T B}(x) = \sup_{x = y * z} T(\mu_A(y), \mu_B(z)),$$

gde su A i B fazi brojevi, $* \in \{+, -, \cdot, /\}$, T proizvoljna trougaona norma, a $A *_T B$ rezultujući fazi broj.

1.5.2 Aritmetičke operacije sa trougaonim i trapezoidnim fazi brojevima

Iz prethodnog, a zbog njihove specifičnosti koja se ogleda u po delovima linernim funkcijama pripadnost, sledi i jednostavniji zapis za sabiranje trougaonih i trapezoidnih fazi brojeva.

Suma dva trougaona fazi broja $A_1 = (a_1^1, a_M^1, a_2^1)$ i $A_2 = (a_1^2, a_M^2, a_2^2)$ je takođe trougaoni fazi broj

$$A_1 + A_2 = (a_1^1, a_M^1, a_2^1) + (a_1^2, a_M^2, a_2^2) = (a_1^1 + a_1^2, a_M^1 + a_M^2, a_2^1 + a_2^2) \tag{1.2}$$

Iz prethodnog sledi i da je proizvod trougaonog fazi broja i realnog broja takođe trougaoni fazi broj

$$r \cdot A = r \cdot (a_1, a_M, a_2) = (r \cdot a_1, r \cdot a_M, r \cdot a_2) \tag{1.3}$$

Analogni važi i za trapezoidne fazi brojeve:

- Suma dva trapezoidna fazi broja $A_1 = (a_1^1, b_1^1, b_2^1, a_2^1)$ i $A_2 = (a_1^2, b_1^2, b_2^2, a_2^2)$ je trapezoidni fazi broj

$$A_1 + A_2 = (a_1^1, b_1^1, b_2^1, a_2^1) + (a_1^2, b_1^2, b_2^2, a_2^2) = (a_1^1 + a_1^2, b_1^1 + b_1^2, b_2^1 + b_2^2, a_2^1 + a_2^2). \tag{1.4}$$

- Proizvod trapezoidnog fazi broja realnim brojem r je trapezoidni fazi broj:

$$r \cdot A = (a_1, b_1, b_2, a_2) r = (r \cdot a_1, r \cdot b_1, r \cdot b_2, r \cdot a_2). \tag{1.5}$$

Primetimo da kako trougaoni fazi broj $A_1 = (a_1^1, a_M^1, a_2^1)$ uvek možemo prikazati kao trapezoidni fazi broj $A_1 = (a_1^1, a_M^1, a_M^1, a_2^1)$, moguće je sabirati trougaone i trapezoidne fazi brojeve. Ako je $A_2 = (a_1^2, b_1^2, b_2^2, a_2^2)$ trapezoidni fazi broj, tada je zbir trougaonog fazi broja A_1 i trapezoidnog fazi broja A_2 novi trapezoidni fazi broj:

$$A_1 + A_2 = (a_1^1 + a_1^2, a_M^1 + b_1^2, a_M^1 + b_2^2, a_2^1 + a_2^2). \tag{1.6}$$

Generalizovani Zadehov princip proširenja daje različite rezultujuće fazi brojeve u zavisnosti od izbora trougaone norme. Rezultati dati sa (1.2) i (1.4) se poklapaju sa osnovnim Zadehovim principom proširenja (tj. generalizovani princip proširenja za $T = T_M$). Forma rezultujućeg fazi u zavisnosti od izbora trougaone norme je ispitana u [3], a za ovaj rad je interesantan rezultat dobijen za $T = T_D$ jer u tom slučaju, kao i za $T = T_M$, rezultujući fazi broj zadržava početnu formu, tj. ostaje trougaon (trapezoidan) fazi broj.

Teorema 1.5.1. [3] Neka su $A_i = (a_1^i, b_1^i, b_2^i, a_2^i)$, $i = 1, \ldots, n$, trapezoidni fazi brojevi. Zbir datih trapezoidnih fazi brojeva dobijen primenom generalizovanog Zadehovog principa proširenja za $T = T_D$ je novi trapezoidnih fazi broj $\bigoplus_{i=1}^n A_i$ dat sa

$$\bigoplus_{i=1}^n A_i = \left(\sum_{i=1}^n b_1^i - \max\{b_1^i - a_1^i\}, \sum_{i=1}^n b_1^i, \sum_{i=1}^n b_2^i, \sum_{i=1}^n b_2^i + \max\{a_2^i - b_2^i\} \right).$$

Jasno, ako na isti način sabiramo n trougaonih fazi brojeva $A_i = (a_1^i, a_M^i, a_2^i)$, $i = 1, \ldots, n$,, po prehodnoj teoremi zbir je novi trougaoni fazi broj oblika:

$$\bigoplus_{i=1}^n A_i = \left(\sum_{i=1}^n a_M^i - \max\{a_M^i - a_1^i\}, \sum_{i=1}^n a_M^i, \sum_{i=1}^n a_M^i + \max\{a_2^i - a_M^i\} \right).$$

Glava 2

Fazi aritmetika u procesu donošenja odluka

Kao što je već rečeno, mogućnost predviđanja i procene budućih događaja često zahteva proučavanje nepreciznih podataka koji dolaze iz okruženja. Modelovanje takvih podataka je zadatak za koji je fazi logika bolje prilagođena nego klasične matematičke metode. Analiza složenih situacija zahteva mišljenja mnogih stručnjaka. Mišljenja su više ili manje slična ili više ili manje kontradiktorna, te se moraju kombinovati, tj. agregirati kako bi se proizveo jedan zaključak. U ovom poglavlju je dat prikaz metodologije zasnovane na operacijama sa fazi brojevima (videti [2]).

2.1 Fazi usrednjavanje

Jedan od osnovnih pojmova u statistici je prosek ili srednja vrednost n merenja izraženih realnim brojevima $r_1, ..., r_n$, tj.

$$r_{ave} = \frac{r_1 + ... + r_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n} \tag{2.1}$$

Ovako dobijene aritmatička srednina spada u *mere centralne tendencije* ([9]).

Ako merenja $r_1, ..., r_n$ imaju različite važnosti izražene brojevima $\lambda_1, ..., \lambda_n$, tada se koncept težinskog proseka ili težinske srednje vrednosti uvodi formulom:

$$r_{ave}^{w} = \frac{\lambda_1 r_1 + ... + \lambda_n r_n}{\lambda_1 + ... + \lambda_n} = w_1 r_1 + ... + w_n r_n = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i \tag{2.2}$$

gde su w_i težine, pri čemu važi

$$w_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + ... + \lambda_n}, i = 1, .., n, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1. \tag{2.3}$$

Težinsak srednja vrednost se naziva i ponderisana srednja vrednost, a težine odražavaju relativnu važnost, odnosno, snagu merenja r_i.

U ovom delu rada biće prikazano proširenje klasične aritmetičke sredine na fazi brojeve. Kao što je ranije naglašeno, u primenama najčešće koriste trougaoni i trapezoidni fazi brojevi, te zato u daljem radu pojmovi koji se definišu odnosiće se samo na te tipove fazi skupova. Primenom prethodno opisanih aritmetičkih operacija, u [2] su date naredne definicije.

Definicija 25. [2] Neka su $A_i = (a_1^i, a_M^i, a_2^i)$, $i = 1, ..., n$, trougaoni fazi brojevi. Trougaona srednja vrednost u oznaci A_{ave} je:

$$A_{ave} = \frac{A_1 + ... + A_n}{n} = \frac{(a_1^1, a_M^1, a_2^1) + ... + (a_1^n, a_M^n, a_2^n)}{n} = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} a_1^i, \sum_{i=1}^{n} a_M^i, \sum_{i=1}^{n} a_2^i) \tag{2.4}$$

Lako se može pokazati da je ovako dobijena srednja vrednosti takođe trougaoni broj i to sledeće forme:

$$A_{ave} = (m_1, m_M, m_2) = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_M^i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2^i) \tag{2.5}$$

Analogno klasičnom slučaju moguće je uvesti i ponderisanu srednju vrednost fazi brojeva.

Definicija 26. [2] Neka realni brojevi λ_i za $i = 1, ..., n$ predstavljaju važnost (težinu) trougaonih fazi brojeva $A_i = (a_1^i, a_M^i, a_2^i)$, $i = 1, ..., n$. Tada, trougaona ponderisana sredina, u oznaci A_{ave}^w, je data na sledeći način:

$$\begin{aligned} A_{ave}^w &= \frac{\lambda_1 A_1 + ... + \lambda_n A_n}{\lambda_1 + ... + \lambda_n} \\ &= w_1(a_1^1, a_M^1, a_2^1) + ... + w_n(a_1^n, a_M^n, a_2^n) \\ &= (w_1 a_1^1, w_1 a_M^1, w_1 a_2^1) + ... + (w_n a_1^n, w_n a_M^n, w_n a_2^n) \\ &= (w_1 a_1^1 + ... + w_n a_1^n, w_1 a_M^1 + ... + w_n a_M^n, w_1 a_2^1 + ... + w_n a_2^n). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Kao u prethodnom slučaju ponderisana aritmetička sredina je nov trougaoni fazi broj i to sledećeg oblika:

$$A_{ave}^w = (m_1^w, m_M^w, m_2^w) = (\sum_{i=1}^{n} w_i a_1^i, \sum_{i=1}^{n} w_i a_M^i, \sum_{i=1}^{n} w_i a_2^i) \tag{2.7}$$

gde su w_i zadati kao u (2.3).

Analogne definicije su date i za trapezoidne fazi brojeve.

Definicija 27. [2] Neka $A_i = (a_1^i, b_1^i, b_2^i, a_2^i)$, $i = 1, .., n$, trapezoidni fazi brojevi. Trapezoidna srednja vrednost datih trapezoidnih fazi brojeva je

$$A_{ave} = \frac{(a_1^1, b_1^1, b_2^1, a_2^1) + ... + (a_1^n, b_1^n, b_2^n, a_2^n)}{n} = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} a_1^i, \sum_{i=1}^{n} b_1^i, \sum_{i=1}^{n} b_2^i, \sum_{i=1}^{n} a_2^i). \tag{2.8}$$

Definicija 28. [2] Neka su $A_i = (a_1^i, b_1^i, b_2^i, a_2^i)$, $i = 1, .., n$, trapezoidni fazi brojevi i neka su date njihove težine λ_i, $i = 1, 2, .., n$. Tada, trapezoidna ponderisana aritmetička sredina datih trapezoidnih brojeva je

$$A_{ave}^w = w_1(a_1^1, b_1^1, b_2^1, a_2^1) + ... + w_n(a_1^n, b_1^n, b_2^n, a_2^n) = (\sum_{i=1}^{n} w_i a_1^i, \sum_{i=1}^{n} w_i b_1^i, \sum_{i=1}^{n} w_i b_2^i, \sum_{i=1}^{n} w_i a_2^i) \tag{2.9}$$

gde su w_i zadati kao u (2.3).

2.2 Proces defazikacije

Na samom početku rada navedeno je da su fazi skupovi uvedeni kao dobar matematički alat kojim je moguće modelovati pojave iz realnog života. Pri odlučivanju na osnovu modela baziranog na fazi skupovima, izlaznu vrednost, tj. odgovor, je često u formi fazi skupa. Osnovna ideja procesa defazikacije jeste transformacija fazi izlazne vrednosti u reprezentativnu realnu vrednost. Ako posmatramo fazi skup na nekom intervalu, on nam prikazuje ponašanje pojave u odnosu na realni svet (univerzum). Ukoliko nam je potrebna jedinstvena vrednost iz univerzuma koja nam daje najbolji odgovor za datu pojavu koju posmatramo, postupkom defazikacije dolazimo do nje. U daljem radu prikazano je nekoliko metoda defazikacije (videti [2,20]).

2.2.1 Defazikacija trougaonog fazi broja

Neka je dat trougaoni fazi broj $A = (a_1, a_M, a_2)$ koji modeluje neku pojavu. Forma trougaonog fazi broja je opisana intervalom $[a_1, a_2]$ u kojima je vrednost funkcije pripadnosti veća od nula, tj. zatvaranjem skupa $Supp(A)$. Donosiocu odluke je potrebna jedna reprezentativna vrednost iz intervala $[a_1, a_2]$ koja daje najbolji odgovor za posmatrani problem. Za $x = a_M$ funkcija pripadnosti je jednaka jedinici, odnosno vrednosti x u potpunosti pripada datom specijalnom fazi skupi. Može se smatrati da upravo vrednost x jeste relevantan odgovor. Ta vrednost se obeležava sa x_{max} i naziva **maksimizirajućom vrednosti**.

Prethodno opisana postupak za određivanje maksimizirajuće vrednosti nije jedina migućnost za defazifikaciju, jt. operacija defazikacije nije jedinstveno određena. Proizvoljan trougaoni fazi broj $A = (a_1, a_M, a_2)$ se može defazikovati i na sledeće načine:

1. $x^1_{max} = \frac{a_1+a_M+a_2}{3}$

2. $x^2_{max} = \frac{a_1+2a_M+a_2}{4}$

3. $x^3_{max} = \frac{a_1+4a_M+a_2}{6}$

Za razliku od $x_{max} = a_M$, vrednosti x^i_{max} , $i = 1, 2, 3$ uzimaju u obzir doprinos i a_1 i a_2 i različitu težinu vrednosti a_M. Najčešće primenjivana u praksi metoda defazikacije trougaonog fazi broja jeste $x_{max} = a_M$. Ukoliko trougaoni broj A u formi centralnog trougaonog broja, što znači da je a_M na sredini intervala $[a_1, a_2]$, tada sve četiri formule koje smo naveli za defazikaciju trougaonog fazi broja daju isto rešenje.

Defazifikacija trapezoidnog fazi broja $A = (a_1, a_{M_1}, a_{M_2}, a_2)$ može se izvršiti na sledeći način:

Maksimizirajuća vrednost x_{max} je tačka koja predstavlja sredinu intervala $[a_{M_1}, a_{M_2}]$ na maksimalnom nivou $\alpha = 1$, odnosno

$$x_{max} = \frac{a_{M_1} + a_{M_2}}{2} \tag{2.10}$$

Kao što ni defazikacija trougaonog fazi broja nije jedinstveno određena, tako ni defazikaciju trapezoidnog broja nije jedistvena, te možemo formulu (2.10) zameniti sledećim formulama:

$$x^1_{max} = \frac{a_1 + \frac{a_{M_1}+a_{M_2}}{2} + a_2}{3} \tag{2.11}$$

$$x^2_{max} = \frac{a_1 + a_{M_1} + a_{M_2} + a_2}{4} \tag{2.12}$$

$$x^3_{max} = \frac{a_1 + 2(a_{M_1} + a_{M_2}) + a_2}{6} \tag{2.13}$$

Primena prethodno definisanog fazi proseka, u odeljku 2.2, biće predstavljena u deljem radu. Agregacija trougaonom ili trapezoidnom prosečnom vrednosti daje rezultujući realan broj primenom prethodno opisanih pristupa defazikaciju trougaonog (trapezoidnog) fazi broja.

Primer 12. *Procena vremena potrebnog za spremanje ispita primenom fazi usrednjavanja i ponderisanog fazi usrednjavanja.*

Neka su dati fazi skupovi A = *"vreme koje je potrebno da student pređe dobar deo gradiva "i* B = *"vreme do pojave umora". Ove fazi skupove predstavićemo kao trapezoidne brojeve prikazane na Slici 2.1, odnosno*

$$A = (1, 5, 8, 8) \quad i \quad B = (0, 0, 2, 6).$$

- *Fazi usrednjavanje.*

  Koristeći Definiciju 27. za trapezoidno usrednjavanje, dobija se

  $$C = A_{ave} = \frac{A + B}{2} = \frac{(1, 5, 8, 8) + (0, 0, 2, 6)}{2} = \frac{(1, 5, 10, 14)}{2} = (0.5, 2.5, 5, 7).$$

  Dobijen je nov trapeozidni broj koji je predstavljen na Slici 2.1 Primenom defazikacijom fazi dobijamo krajnji rezultat $x_{max} = 3.75$. *Naime, sve vrednosti sa gornje osnovice trapezoida na intervalu [2.5, 5] imaju maksimalnu vrednost funkcije pripadnosti, pa se maksimizirajuća odluka definiše kao sredina tog intervala, tj.*

  $$x_{max} = \frac{2.5 + 5}{2} = 3.75$$

- *Ponderisano fazi usrednjavanje.*

  Student sada smatra da je važnije da sve što nauči bude potkovano pravim znanjem i razumevanjem, od toga da nauči sve pa makar bilo napamet i bez razumevanja. Tako da na osnovu ovako postavljenog pristupa datom problemu on dodeljuje različiti značaj skupu A *i skupu* B. *Neka je značaj* A, $w_G = 0.4$, *a značaj* B, $w_C = 0.6$. *Na osnovu Definicije 28*

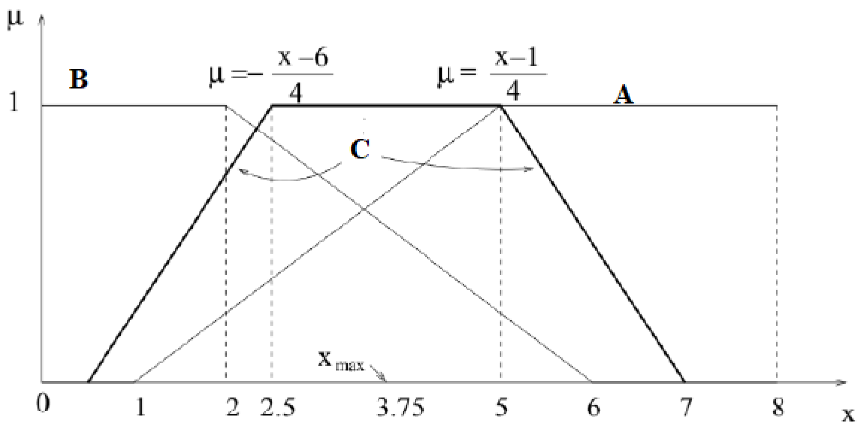
  $$C = A_{ave_w} = 0.4 \cdot G + 0.6 \cdot C = 0.4 \cdot (1, 5, 8, 8) + 0.6 \cdot (0, 0, 2, 6) = (0.4, 2, 4.4, 6.8).$$

  Rezultat je trapezoidni fazi broj čija je gornja osnovica nad intervalom $[2, 4.4]$, *pa sledi*

  $$x_{max} = \frac{2 + 4.4}{2} = 3.2.$$

Može se primetiti da je ovako dobijena vrednost manja od 3.75 sati kada nije bilo različite značajnosti. Student ovo rešenje može da shvati kao vreme u kom efektivnije uči jer je naglasio da mu je važnije da vreme utrošeno u učenju rezultira pravim znanjem a ne pukim prelaskom gradiva bez garancije razumevanja.

□



Slika 2.1: [2] Grafici funkcija μ_A, μ_B i μ_C.

2.2.2 Druge tehnike defazikacije

U ovom odeljku prikazaćemo još četiri metode defazikacije iz [6, 20]:

1. Metoda α-preseka
2. Metode maksimuma
3. Metode centroida
4. Metoda ponderisanog proseka

1. **Metoda α- preseka:**

   U ovoj metodi koristi se α-presek označen sa $[A]^\alpha$, tj. klasičan skup koji smo definisali u poglavlju 1.1.

   Neka je dat fazi skup A i vrednost α iz intervala $[0, 1]$. Relevantni podaci na unapred definisanom nivou α, koji su dobijeni ovom metodom kao realne vrednosti za dalju analizu, su elementi skupa $[A]^\alpha$. Ovaj postupak defazikacije primenjuje se u slučajevima kada je potrebno pronaći više reprezentativnih vrednosti koje ispunjavaju zahtev opisan skupom α-preseka.

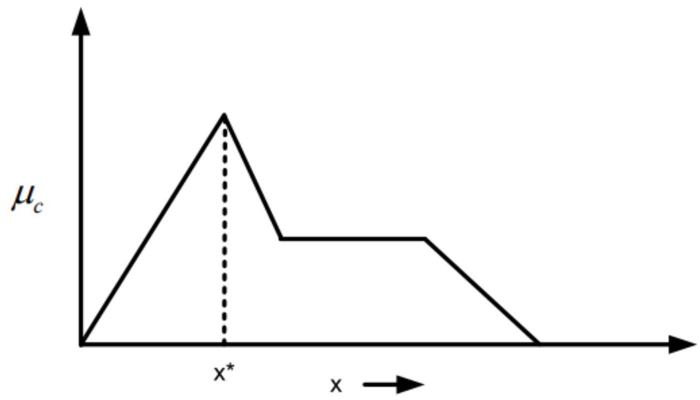
2. **Metoda maksimalnih vrednosti:**

   (a) Metod visine

   Metod visine se zasniva na principu maksimalne pripadnosti i definiše se na sledeći način:

   $$(\exists x^* \in U) \text{ tako da } \mu_C(x^*) \geq \mu_C(x) \text{ za sve } x \in X.$$

   Ovde parametar x^* predstavlja **visinu** fazi skupa C. Ova metoda je primenjiva kada $x^* \in U$, tj. vrednost za koju je vrednost funkcije pripadnosti maksimalna, postoji i jedinstvena je (slika 2.2).

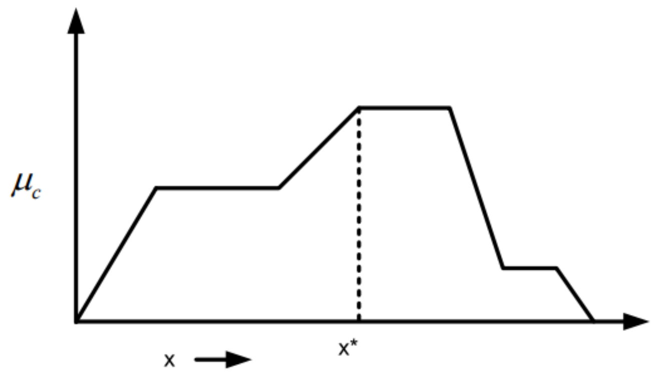


Slika 2.2: [21] Metod visine.

(b) Prva od maksimalnih (FoM):

$$x^* = \min\{x \mid \mu_C(x) = \max_w \mu_C(w)\}$$

Ovaj metod određuje $x^* \in U$ kao najmanju vrednost $x \in U$ za koju je funkcija pripadnosti $\mu_C(x)$ maksimalna (slika 2.3).

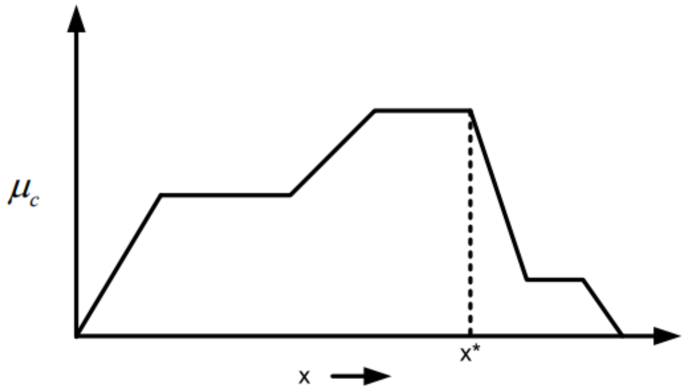


Slika 2.3: [21] FoM metod.

(c) Poslednja od maksimalnih (LoM):

$$x^* = \max\{x \mid \mu_C(x) = \max_w \mu_C(w)\}$$

Ovaj metod koji se koristi za određivanje vrednosti x^* kao najveće vrednosti x za koju je funkcija pripadnosti $\mu_M(x)$ maksimalna (slika 2.4).



Slika 2.4: [21] LoM metod.

(d) Srednja vrednost maksimalnih (MoM):

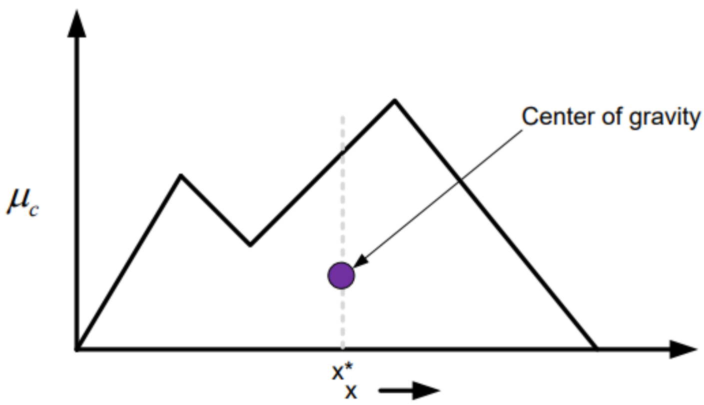
$$x^* = \frac{\sum_{x_i \in M} x_i}{|M|}$$

gde je $M = \{x_i \mid \mu(x_i) = h(C)\}$, pri čemu je $h(C)$ visina fazi skupa C.
Ova metoda daje vrednost x^* kao srednju vrednost svih x_i za koje je vrednost funkcije pripadnosti jednaka visini (vrednosti x_i kojima odgovara maksimalna pripadnost) fazi skupa C.

3. **Metode centroida:**

(a) Metod centra gravitacije (CoG):
Osnovni princip u metodi centra gravitacije (CoG) je određivanje tačke x^* kroz koju bi vertikalna linija podelila površinu ispod funkcije pripadnosti na dva jednaka dela (slika 2.5). Matematički, CoG se može izraziti na sledeći način:

$$x^* = \frac{\int x \cdot \mu_C(x)\, dx}{\int \mu_C(x)\, dx}$$



Slika 2.5: [21] CoG metod.

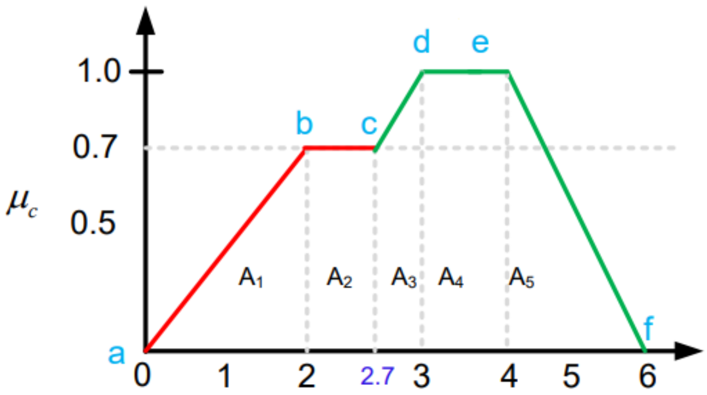
Vrednost $x^* \in U$ je x-koordinata centra gravitacije.
Ako je fazi skup C dat diskretnom funkcijom pripadnosti, onda se CoG može izraziti kao:

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mu_C(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_C(x_i)}.$$

Primer 13. *Neka je dati fazi skup C čija je funkcija pripadnosti data sa:*

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0.35x, & za\ 0 \leq x < 2, \\ 0.7, & za\ 2 \leq x < 2.7, \\ x-2, & za\ 2.7 \leq x < 3, \\ 1, & za\ 3 \leq x < 4, \\ -0.5x+3, & za\ 4 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Oznake A_i , $i = 1,2,3,4,5$ određuju površinu ispod linearnih segmenata koji su dobijeni na sledeći način:
Za A_1: $y - 0 = \frac{0.7}{2}(x-0)$, *ili* $y = 0.35x$
Za A_2: $y = 0.7$
Za A_3: $y - 0 = \frac{1-0}{3-2}(x-2)$, *ili* $y = x-2$
Za A_4: $y = 1$
Za A_5: $y - 1 = \frac{0-1}{6-4}(x-4)$, *ili* $y = -0.5x+3$



Slika 2.6: [21] Funkcija pripadnosti μ_C.

Prema formuli metode centra gravitacije izvodjićemo imenilac i brojilac i posebno izračunati njihove vrednosti.

$$x^* = \frac{\int x \cdot \mu_C(x)\, dx}{\int \mu_C(x)\, dx} = \frac{N}{D}$$

gde je:

$$N = \int_0^2 0.35x^2\, dx + \int_2^{2.7} 0.7x\, dx + \int_{2.7}^3 (x^2-2x)\, dx + \int_3^4 x\, dx + \int_4^6 (-0.5x^2+3x)\, dx = 10.98$$

i

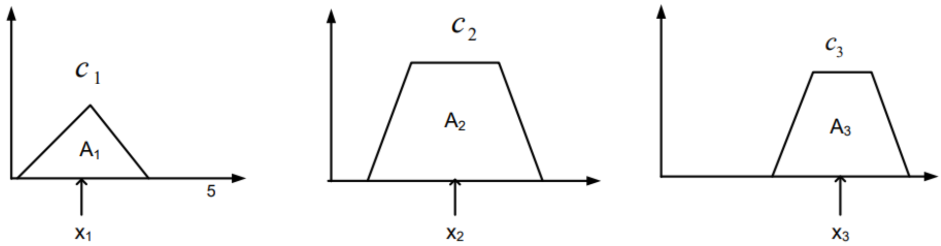
$$D = \int_0^2 0.35x\, dx + \int_2^{2.7} 0.7x\, dx + \int_{2.7}^3 (x-2)\, dx + \int_3^4 1\, dx + \int_4^6 (-0.5x+3)\, dx = 3.445.$$

Dakle, $x^* = \frac{10.98}{3.445} = 3.187.$ □

(b) Metod centra sume (CoS):
Ako je fazi skup predstavljen kao unija $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$, onda se reprezentativan realan broj prema metodi centra sume (CoS) definiše kao

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot A_{c_i}}{\sum_{i=1}^n A_{c_i}},$$

gde A_{c_i} označava površinu područja koje je ograničeno fazi skupom C_i, a x_i je geometrijski centar površine A_{c_i}.



Slika 2.7: [21] Funkcije pripadnosti fazi skupova C_i.

Treba primeniti sledeće:
1. U metodi centra gravitacije (CoG), preklapajuća područja se računaju samo jednom, dok se u metodi centra sume (CoS) preklapanje računa dvaili više puta.

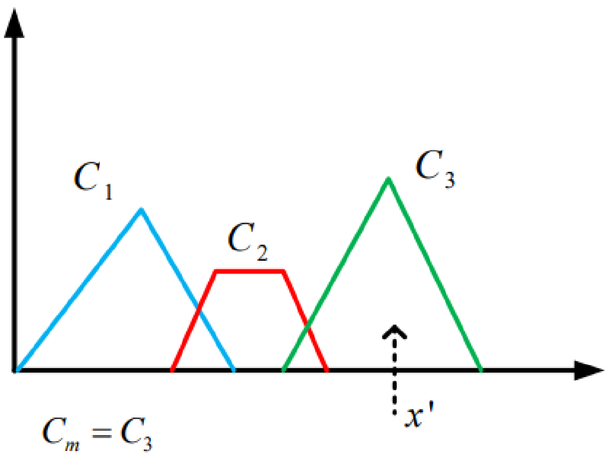
2. U metodi centra sume (CoS), koristimo centar površine, zbog čega se još i zove metoda centra površine.

(c) Metod centra oblasti (CoA):

Ako fazi skup ima više podregiona, onda se centar gravitacije podregiona sa najvećom površinom može koristiti za izračunavanje defazifikovane vrednosti. Matematički, x^* se definiše kao:

$$x^* = \frac{\int \mu_{C_m}(x) \cdot x' \, dx}{\int \mu_{C_m}(x) \, dx},$$

gde je C_m region sa najvećom površinom, a x' je centar gravitacije regiona C_m.



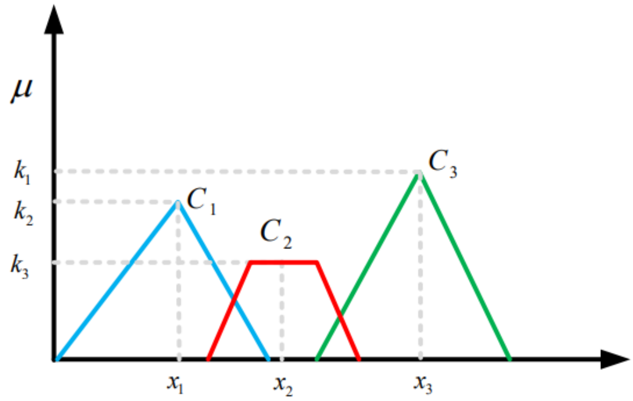
Slika 2.8: [21] Grafički prikaz CoA.

4. **Metoda ponderisanog proseka**

Defazikovana vrednost koju koristimo za dalju analizu prema ovoj metodi se definiše kao:

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_{C_i}(x_i) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_{C_i}(x_i)}$$

gde su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ fazi skupovi, a x_i je geometrijski centar površine ograničene funkcijom pripadnosti fazi skupa C_i. Ova metoda se može primenjivati samo za simetrične funkcije pripadnosti.



Slika 2.9: [21] Funkcije pripadnosti fazi skupova $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

2.3 Fazi Delphi metoda

Fazi Delphi metoda je generalizacija klasične metode za dugoročno prognoziranje u menadžmentu poznate kao Delphi metoda. Razvijena je šezdesetih godina prošlog veka od strane Rand Corporation u Santa Monici, Kalifornija. Naziv potiče od drevnog grčkog proročišta u Delfima poznatog po predviđanju budućnosti. Postupak Delphi metode može se opisati na sledeći način (videti [2]):

1. Stručnjaci koji su angažovani za prognoziranje daju svoje mišljenje. Ono se može zasnivati na iskustvu, intuiciji kao i njihovoj stručnosti za datu oblast. Mišljenja iznosne nezavisno jedan od drugog.

2. Podatke koje dobijamo od svakog stručnjaka su zapravo subjektivna mišljenja, potkovana njihovim znanjima. Mišljenja izražena u prvom koraku su modelovana fazi skupovima, fazi brojevima. U ovmo koraku se računa fazi prosek dobijenih podataka i analizira se krajnji rezultat.

3. Nakon analiziranja prvog dobijenog fazi proseka, stručnjaci iznose nova mišljenja zatim se računa novi fazi prosek i on se opet predaje u dalju analizu.

4. Ovaj proces može biti ponavljan iznova i iznova dok rezultati ne konvergiraju ka razumnom rešenju sa stanovišta menadžera ili upravnog tela. Obično su dovoljne dve ili tri iteracije.

Problemi dugoročnog prognoziranja uključuju neprecizne i nepotpune podatke. Takođe, odluke koje donose stručnjaci oslanjaju se na njihovu individualnu kompetenciju i subjektivnost. Kao što je već pomenuto, te neprecizne podatke moguće je interpretirati matematičkim modelom preko fazi brojeva. Trougaoni brojevi su pogodni za tu svrhu jer njih predstavljamo kao uređenu trojku $A = (a_1, a_M, a_2)$. Ideja koja se proseže u ovoj metodi jeste da trougaoni broj koji modeluje neku pojavu je zapravo uređena trojka koja modelira sledeće vrednosti (najmanje, najverovatnije, najveće) respektivno.

Fazi Delphi metodu su uveli Kaufman i Gupta 1988. godine ([7]), i sastoji se od sledećih koraka:
Korak 1. Stručnjaci $E_i, i = 1, ..., n$, daju svoja mišljena o nekoj pojavi. Mišljenja su data kao trougaoni fazi brojevi $A_i = (a_1^i, a_M^i, a_2^i), i = 1, 2, .., n$.
Korak 2. Prvo se računa prosečna (srednja) vrednost $A_{ave} = (m_1, m_M, m_2)$ svih A_i (2.5). Zatim, za svakog stručnjaka E_i računa se odstupanje između A_{ave} i A_i. To je trougaoni fazi broj definisan na sledeći način:

$$A_{ave} - A_i = (m_1 - a_1^i, m_M - a_M^i, m_2 - a_2^i) = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^i - a_1^i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_M^i - a_M^i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2^i - a_2^i). \quad (2.14)$$

Odstupanje $A_{ave} - A_i$ se šalje stručnjaku E_i na ponovni pregled.
Korak 3. Svaki ekspert E_i predstavlja novi trougaoni fazi broj

$$B_i = (b_1^i, b_M^i, b_2^i), \quad i = 1, ..., n. \quad (2.15)$$

Zatim se računa novi trougaoni prosek B_m prema formuli (2.5). Ako dobijeni rezultat nije približan A_{ave}, generišu se novi trougaoni fazi brojevi $C_i = (c_1^i, c_M^i, c_2^i)$. Proces se može ponavljati iznova i iznova dok dva uzastopna $A_{ave}, B_{ave}, C_{ave}, ...$ ne postanu približno jednaka.

Fazi Delphi metoda je tipičan postupak višeekspertskih prognoza za kombinovanje različitih stavova i mišljenja. Sledi originalni primer koji ilustruje primenu Fazi Delphi metoda.

Primer 14. *Procena vremena potrebnog za spremanje ispita.*

Grupa od 15 studenata je angažovana da da procenu vremena potrebnog za spremanje ispita od osam ESPB bodova. Za procenu vremena potrebnog za pripremu ispita korišćena je metoda Fazi Delphi. Oni su rangirani jednako, stoga njihova mišljenja nose istu težinu. Trougaoni brojevi A_i, $i = 1, ..., 15$ *dati od strane studenata prikazani su u tabeli 2.1 i predstavljaju njihovu procenu vremena za spremanje velikog ispita, gde brojevi* (a_1, a_M, a_2) *predstavljaju sledeće:* a_1 *- najmanje vremena utrošeno za spremanje ispita,* a_M *- najverovatnije vremena utrošeno za spremanje ispita i* a_2 *- najviše vremena utrošeno za spremanje ispita. Vreme koje je utrošeno za spremanje ispita je računato na sledeći način: jedan ESPB bod predstavlja 20h rada na datom ispitu. To znači da za predmet od osam ESPB bodova treba 160h provesti u spremanju ispita. U tih 160h računaju se i sati koji su provedeni na samim predavanjima. Kako na fakultetu predmeti od 8 ESPB nedeljno imaju 3 časa predavanja i 3 časa vežbi po 45 minuta u 12 termina, to znači da je 54h provedeno slušajući taj predemet. Preostalih 106 sati student treba da utorši u učenju. Prema koracima fazi Deplhi metoda studenti su dali svoja mišljena u tabeli 2.1. Sledeći korak jeste da se izračuna* A_{ave}.

$$\sum_{i=1}^{15} a_1^i = 1416, \quad \sum_{i=1}^{15} a_M^i = 1643, \quad \sum_{i=1}^{15} a_2^i = 2022,$$

te primenom formule (2.5) *dobijamo*

$$A_{ave} = (94.4, 109.53, 134.8)$$

što je približno

$$A_{ave}^a = (94, 110, 135).$$

Tabela 2.1: Procene studenata - prva iteracija.

E_i	A_i	a_1^i	a_M^i	a_2^i
E_1	A_1	70	100	106
E_2	A_2	88	108	120
E_3	A_3	100	130	150
E_4	A_4	103	115	135
E_5	A_5	78	99	148
E_6	A_6	100	110	130
E_7	A_7	85	101	118
E_8	A_8	105	115	150
E_9	A_9	130	140	150
E_{10}	A_{10}	107	118	155
E_{11}	A_{11}	78	100	123
E_{12}	A_{12}	80	89	109
E_{13}	A_{13}	112	120	160
E_{14}	A_{14}	100	108	139
E_{15}	A_{15}	80	90	129

U Tabeli 2.2 su prikazana odstupanja mišljenja svakog studenta od prosečnog mišljena. Studenti koji su označeni kao E_4, E_6, E_{14} *imaju najmanja odstupanja, nasuprot njima studenti* $E_1, E_2, E_5, E_9, E_{12}, E_{13}, E_{15}$ *imaju baš velika ostupanja od prosečnog mišljenja. Zbog postojanja velikih odstupanja studenti prave nove trougaone brojeve i daju nove procene vremena za spremanje ispita koja su prikazana u Tabeli 2.3.*

Tabela 2.2: Odstupanja između A^a_{ave} i A_i.

E_i	$m_1 - a^i_1$	$m_M - a^i_M$	$m_2 - a^i_2$
E_1	24	10	29
E_2	6	-2	15
E_3	-6	-20	-15
E_4	-9	-5	0
E_5	16	11	-13
E_6	-6	0	5
E_7	9	9	17
E_8	-11	-5	-15
E_9	-36	-30	-15
E_{10}	-13	-8	-20
E_{11}	16	10	12
E_{12}	14	21	26
E_{13}	-18	-10	-25
E_{14}	-6	2	-4
E_{15}	14	20	6

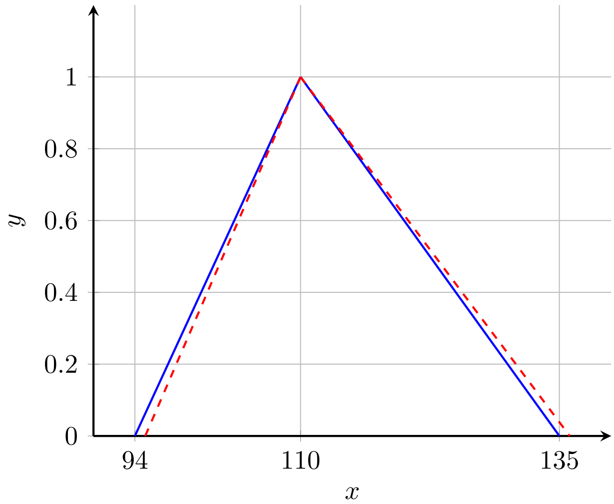
Tabela 2.3: Procene studenata - druga iteracija.

E_i	B_i	b^i_1	b^i_M	b^i_2
E_1	B_1	80	102	108
E_2	B_2	90	108	122
E_3	B_3	100	130	150
E_4	B_4	102	116	135
E_5	B_5	80	100	149
E_6	B_6	100	111	135
E_7	B_7	87	105	120
E_8	B_8	105	115	150
E_9	B_9	128	143	149
E_{10}	B_{10}	106	120	155
E_{11}	B_{11}	80	101	125
E_{12}	B_{12}	78	85	112
E_{13}	B_{13}	112	115	160
E_{14}	B_{14}	100	110	139
E_{15}	B_{15}	80	91	132

Studenti E_3 i E_8 nisu promenili svoju prvu procenu, dok su ostali napravili su vrlo male promene. Korišćenjem ponovo formule (2.5), *ovaj put za pronalaženje B_{ave}, dobijamo*

$$B_{ave} = (95.2, 110.13, 136.06)$$

što je približno $B^a_{ave} = (95, 110, 136)$.



Slika 2.10: Funkcija pripadnosti za $A^a_{ave}(x)$ (plave boje) i $B^a_{ave}(x)$ (crvene boje).

Odbor koji je angažova studente je zadovoljan što su A_{ave} i B_{ave}, kao i A^a_{ave} i B^a_{ave}, vrlo blizu (vidi sliku 2.10). Ovde se zaustavlja postupak Fazi Delphi metoda i prihvata trougaoni broj B_{ave} kao kombinovani zaključak studenata.

Na osnovu mišljenja studenata potrebno vreme za pripremu ispita od 8 ESPB je broj iz intervala $[95h, 136h]$. Defazikacija metodom maksimizirajuće vrednosti daje da je vreme potrebno za spremanje ispita 110h. □

2.4 Ponderisani Fazi Delphi metod

U poslovanju, finansijama, menadžmentu i naučnim disciplinama, znanje, iskustvo i stručnost nekih stručnjaka često se preferiraju u odnosu na znanje, iskustvo i stručnost drugih stručnjaka. To se izražava težinama w_i dodeljenim stručnjacima. U prethodnom primeru svi ispitanici smatrani su jednako važnim, pa nije bilo potrebe za uvođenjem težina. Sada razmatramo slučaj kada mišljenja studenata nose različite težine. To vodi do ponderisane fazi Delphi metode.

Pretpostavimo da je svakom studentu $E_i, i = 1, ..., n$, pridružena težina $w_i, i = 1, ..., n$, gde je $w_1 + + w_n = 1$. Četiri koraka u fazi Delphi metodi ostaju suštinski nepormenjena s nekim manjim modifikacijama. Naime, u Koracima 2, 3 i 4 umesto trougaonog proseka koristi se ponderisani trougaoni proseck.

Primer 15. *Ponderisana procena vremena potrebnog za spremanje ispita.*

Posmatrajmo ponovo problem iz primera 14. Pretpostavlja se sada da su studenti E_1, E_2, E_5, E_8 i E_{13} rangirani više (težina 0.1) od ostalih (težina 0.05). Zbir svih težina je jednaka jedinici. Odluku o težinama mišljenja studenata doneo je odbor na osnovu ocena studenata. Kako bismo olakšali račun ponderisanog trougaonog proseka, konstruišemo Tabelu 2.4.

Tabela 2.4: Ponderisanje procena A_i.

E_i	w_i	$w_i * a_1^i$	$w_i * a_M^i$	$w_i * a_2^i$
E_1	0.1	7	10	10.6
E_2	0.1	8.8	10.8	12
E_3	0.05	5	6.5	7.5
E_4	0.05	5.15	5.75	6.75
E_5	0.1	7.8	9.9	14.8
E_6	0.05	5	5.5	6.5
E_7	0.05	4.25	5.05	5.9
E_8	0.1	10.5	11.5	15
E_9	0.05	6.5	7	7.5
E_{10}	0.05	5.35	5.9	7.75
E_{11}	0.05	3.9	5	6.15
E_{12}	0.05	4	4.45	5.45
E_{13}	0.1	11.2	12	16
E_{14}	0.05	5	5.4	6.95
E_{15}	0.05	4	4.5	6.45
Ukupno	1	93.45	109.25	135.3

Kada se podaci iz Tabele 2.4 uvrste u formulu (2.7)*, dobija se ponderisani trougaoni prosek* $A_{ave} = (93.45, 109.25, 135.3)$*, što je približno* $A_{ave}^{wa} = (93, 109, 135)$.

Rezultat je gotovo isti kao i u Primeru 14. Defazifikacija A_{ave}^{wa} *prema (2.10) daje da je potrebno utrošiti 109h na spremanju ispita od 8 ESPB boda.* □

U narednom primeru primenjuje se Fazi Delphi metoda za predviđanje potražnje za određenim studijskim smerom, odnosno predviđanje broja studenata u novoj školskoj godini datog usmerenja.

Primer 16. *Pet stručnjaka je angažovano da iznesu svoja mišljenje o očekivanom broju studenata koji planiraju da upišu određeni fakultet. Njihov zadatak je da daju po tri vrednosti,* a_1 *koji modeluje najmanje očekivani broj studenata,* a_m *koji modeluje najverovatniji broj upisanih studenata i* a_2 *koji modeluje najveći broj ošekivanih studenata, koje su iskorišćeni za formiranje trougaonih brojeva* $A_i = (a_1, a_m, a_2)$*. Mišljenja stručnjaka prikazana su u Tabeli 2.5.*

Tabela 2.5: Mišljenja stručnjaka.

E_i	A_i	a_1^i	a_M^i	a_2^i
E_1	A_1	10000	12000	13000
E_2	A_2	11000	13000	15000
E_3	A_3	10000	11000	14000
E_4	A_4	12000	13000	14000
E_5	A_5	11000	12000	13000
Ukupno		54000	61000	69000

Primenom formule (2.5) dobijamo

$$A_{ave} = (10800, 12200, 13800).$$

Postupak se ponavlja, te stužnjaci iznose nove procene u formi trougaonih fazi brojeva $B_i = (b_1^i, b_m^i, b_2^i)$.

Tabela 2.6: Nove procene stručnjaka.

E_i	B_i	b_1^i	b_M^i	b_2^i
E_1	B_1	10100	12029	13000
E_2	B_2	10089	13000	14090
E_3	B_3	10000	11000	14000
E_4	B_4	12000	13000	14000
E_5	B_5	11010	11900	13000
Ukupno		53199	60929	68000

Primenom formule (2.5) dobija se

$$B_{ave} = (10640, 12186, 13618).$$

Kako je odstupanje $A_{ave} - B_{ave}$ *malo, ovde se zaustavlja procena broja studenata. Procesom defazikacije fazi proseka dobija se krajnji rezultat da će novu školsku godinu upisati 12186 studenata.* $\square$

Glava 3

Operacije sa fazi skupovima u procesu donošenja odluka

Odlučivanje je deo procesa rešavanja problema koji rezultira akcijom. To je izbor između različitih načina postizanja cilja. Odlučivanje igra važnu ulogu u svakodnevnom životu. To je težak proces zbog faktora kao što su nepotpune i neodređene informacije, subjektivnost, koji se obično pojavljuju u stvarnim situacijama. Ti faktori ukazuju da se proces donošenja odluka odvija u fazi okruženju. U ovom poglavlju je prikazan Bellman–Zadeh-ov pristup iz 1970. godine ([19]) prema kojem se donošenje odluka definiše kao presek ciljeva i ograničenja opisanih fazi skupovima ([2]).

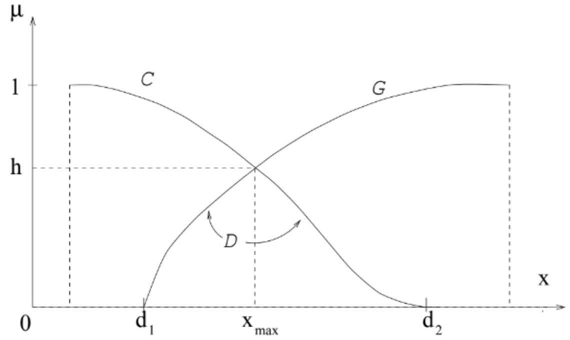
3.1 Odlučivanje kao presek fazi skupova

U procesu donošenja odluka određeni ciljevi moraju biti postignuti, a određena ograničenja moraju biti održana. Model se sastoji od **cilja** opisanog fazi skupom G sa funkcijom pripadnosti $\mu_G(x)$ i **ograničenja** opisanog fazi skupom C sa funkcijom pripadnosti $\mu_C(x)$, gde je x is skupa **alternativa** A_{alt}.

Definicija 29. [2] Fazi skup odluke, u oznaci D, je presek fazi skupova G i C

$$D = G \cap C = \{(x, \mu_D(x)) \mid x \in [d_1, d_2], \mu_D(x) \in [0, h \leq 1]\}. \tag{3.1}$$

Dobijena odluka je u formi fazi skupa, pri čemu je $\overline{supp}(D) \subseteq A_{alt}$. Radi jednostavnosti pretpostavljamo da je to zatvaranje baš zatvoreni interval $[d_1, d_2]$. Šematski prikaz dat je na slici 3.1 gde je $x \in A_{alt} \subseteq \mathbb{R}$ i gde su funkcije pripadnosti fazi skupova G i C monotone funkcije.



Slika 3.1: [2] Funkcije pripadnosti fazi skupova G, C i D.

Funkcija pripadnosti rezultujuég fazi skupa odluke je

$$\mu_D(x) = \min(\mu_G(x), \mu_C(x)), \quad x \in A_{\text{alt}}. \tag{3.2}$$

Operacija preseka je komutativna, što znači da s cilj i ograničenje u (3.1) mogu zameniti mesta, tj. $D = G \cap C = C \cap D$. Zaista postoje stvarne situacije u kojima, u zavisnosti od ugla posmatranja, cilj može biti smatran ograničenjem i obrnuto. Donosioci odluka žele konkretan rezultat, odnosno vrednost među elementima skupa $[d_1, d_2] \subseteq A_{alt}$ koji najbolje predstavlja fazi skup odluke D. To zahteva defazifikaciju fazi skupa D. Ako je u tu svrhu izabrana vrednost $x_{\max}$ iz dobijenog intervala $[d_1, d_2]$ sa najvećim stepenom pripadnosti skupa D, tj.

$$x_{\max} = \{x | \max \mu_D(x) = \max \min(\mu_G(x), \mu_C(x))\}, \tag{3.3}$$

ta vrednost se naziva *maksimizirajuća odluka* (slika 3.1)

Formule (3.1) - (3.3) se mogu generalizovati i za modele donošenja odluka sa više ciljeva i ograničenja ([19]). Za n ciljeva G_i, $i = 1, ..., n$, i m ograničenja C_j, $j = 1, ..., m$, odluka je

$$D = G_1 \cap \cdots \cap G_n \cap C_1 \cap \cdots \cap C_m, \tag{3.4}$$

sa funkcijom pripadnosti

$$\mu_D(x) = \min(\mu_{G_1}(x), \ldots, \mu_{G_m}(x), \mu_{C_1}(x), \ldots, \mu_{C_m}(x)). \tag{3.5}$$

Maksimizirajuća odluka se dobija kao

$$x_{\max} = \{x | \mu_D(x) \text{ je maksimum}\}.$$

Kroz dalji rad biće prikazani originalni primeri u kojima donosilac odluke primenjuje metodu Bellmana i Zadeha. Prvi primer daje ilustrativan prikaz Definicije 29.

Primer 17. *Na skupu alternativa $A_{alt} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dati su diskretni fazi skupovi G i C koji predstavljaju cilj i ograničenje, respektivno:*

$$G = \{(1, 0), (2, 0.2), (3, 0.3), (4, 0.39), (5, 0.3), (6, 0)\}$$

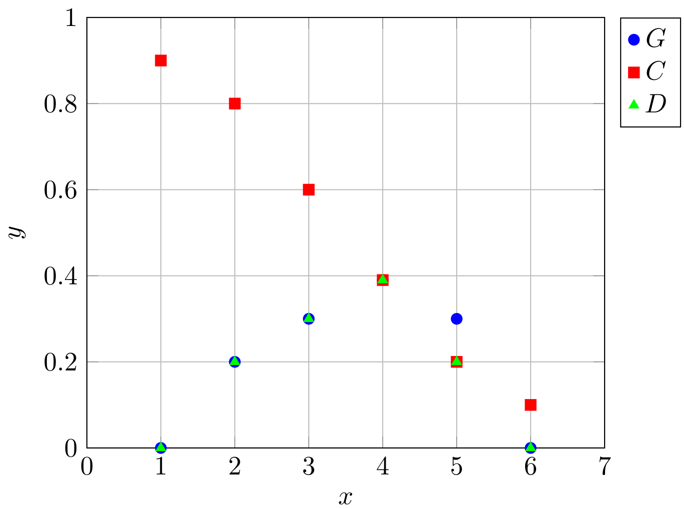
i

$$C = \{(1, 0.9), (2, 0.8), (3, 0.6), (4, 0.39), (5, 0.2), (6, 0.1)\}.$$

Formula (3.1) daje fazi skup

$$D = G \cap C = \{(1, \min(0, 0.9)), (2, \min(0.2, 0.8)), (3, \min(0.3, 0.6)),$$
$$(4, \min(0.39, 0.39)), (5, \min(0.3, 0.2)), (6, \min(0.1, 0))\} =$$
$$\{(1, 0), (2, 0.2), (3, 0.3), (4, 0.39), (5, 0.2), (6, 0)\}.$$

Ovde je $[d_1, d_2] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a $h = 0.39$. Maksimizirajuća odluka (3.3) je $x_{max} = 4$ sa najvišim stepenom pripadnosti od 0.39 u skupu D. □



Slika 3.2: Fazi skupovi G, C i njihov preseka D.

Odluka koju reprezenativno modeluje fazi skup može biti određena diskretnom funkcijom pripadnosti ili neprekidnom funkcijom pripadnosti. U narednim primerima, u zavisnosti od tematike problema, biće prikazane obe varijante.

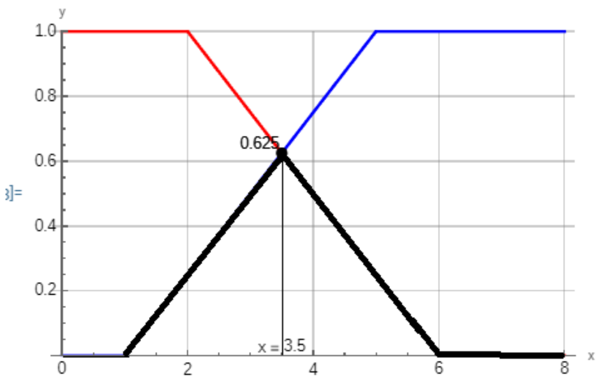
Primer 18. *U toku oktobarskog ispitnog roka jednom studentu je ostalo da položi dva ispita. Pošto nema puno vremena do usmenih ispita, on mora da uči oba ispita svaki dan. Cilj njegovog odlučivanja jeste da vreme koje je potrebno da utroši u spremanju oba ispita bude dovoljno da može da spremi svaki dan dobar deo gradiva. S druge strane, kako je kraj same školske godine i do sada je već dosta ispita položio, umor ga je stigao. Te njegova odluka mora biti ograničena time da vreme koje predviđa za učenje bude "taman"odnosno tako određeno da svaki minut sata bude produktivno potrošen.*

Skup alternativa ovog problema jesu sati spremanja ispita, $A_{alt} = \{x | 0 < x \leq 8\}$*. Fazi skupovi koji opisuju gore navedeno ograničenje i cilj dati sledećim funkcijama pripadnosti:*

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0, & za\ 0 < x \leq 1, \\ \frac{x-1}{4}, & za\ 1 \leq x \leq 5, \\ 1, & za\ 5 \leq x \leq 8 \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 1, & za\ 0 < x \leq 2, \\ -\frac{x-6}{4}, & za\ 2 \leq x \leq 6, \\ 0, & za\ 6 \leq x \leq 8. \end{cases} \tag{3.7}$$

Prema (3.1), fazi skup odluke D predstavljen je svojom funkcijom pripadnosti prikazanom na Slici 3.3. Interval alternativa $[d_1, d_2]$ *je interval* $[1, 6]$*. Tačka preseka pravih linija* $\mu = \frac{x-1}{4}$ *i* $\mu = -\frac{x-6}{4}$ *je (3.5, 0.625), odnosno* $x_{max} = 3.5h$ *i* $h = \max \mu_D(x_{max}) = 0.625$*, pa je konačna odluka 3.5 sati.*



Slika 3.3: Funkcije pripadnosti μ_C, μ_G, μ_D i maksimizirajuća odluka x_{max}.

Ako pri defazifikaciji primenima drugu tehniku, i to Metod centra gravitacije (CoG), dobićemo sledeće:

$$x^* = \frac{\int x \cdot \mu_{C \cup G}(x)\, dx}{\int \mu_{C \cup G}(x)\, dx}$$

odnosno

$$x^* = \frac{\int x \cdot \mu_{C \cup G}(x)\, dx}{\int \mu_{C \cup G}(x)\, dx} = \frac{N}{M},$$

gde je:

$$N = \int_1^{3.5} \frac{x^2 - x}{4}\, dx - \int_{3.5}^{6} \frac{x^2 - 6x}{4}\, dx = 5.4679$$

i

$$M = \int_1^{3.5} \frac{x-1}{x}\, dx + - \int_{3.5}^{6} \frac{x-6}{4}\, dx = 1.5625.$$

Ova tehnika daje rezultat $x_{max} = \frac{5.4679}{1.5625} = 3.499456$.

Dakle, možemo zaključiti da nam obe tehnike defazikacije daju približno jednaka rešenja, te se zato u primeni, zbog jednostavnijeg računa, često koristi baš metod maksimalne vrednosti. □

Primer 19. *Upravni odbor fakulteta planira da uvede novu politiku za studente sa niskim prihodima. Tri alternativna projekta su u razmatranju:* p_1 *(niža cena školarine),* p_2 *(dodatni ispitni rok) i* p_3 *(dostupna menza bez obzira na budžet). Dakle, skup alternativa je* $A_{alt} = \{p_1, p_2, p_3\}$*. Upravni odbor nekon duge analize definiše dva cilja i jedno ograničenje na skupu alternativa.*

$$G_1 ='' \textit{poboljšanje kvaliteta života studentima}'' = \{(p_1, 0.9), (p_2, 0.4), (p_3, 0.8)\},$$

$$G_2 ='' \textit{povećanje broja upisanih studenata}'' = \{(p_1, 0.85), (p_2, 0.67), (p_3, 0.9)\},$$

$$C ='' \textit{veliki novčani gubitak}'' = \{(p_1, 0.8), (p_2, 0, 05), (p_3, 0.72)\}.$$

Odluka dobijamo kao presek definisanih ciljeva i ograničenja

$$D = G_1 \cap G_2 \cap C,$$

odnosno,

$$D = \{(p_1, 0.8), (p_2, 0.05), (p_3, 0.72)\}.$$

Projekat p_1 *je sa najvećim stepenom pripadnosti od 0.8, u odnosu na* p_1 *i* p_2*. Dakle, nova politika za studente sa niskim prihodima je upravo projekat* p_1*.* □

Primer 20. *U ovom primeru pratimo situaciju jednog maturanta. Kako je došao kraj srednje škole, učenik treba da odluči da li će nastaviti školovanje ili neće. Ako nastavlja, on treba da izabere profesiju koju želi za sebe. Učenik je neodlučan jer ne može da se odluči za fakultet, pri čemu su mu na raspolaganju fakulteti označene redom* f_1*,* f_2*,* f_3*. Navedene fakultete lako je odabrao jer sa njima može da ostvari svoja interesovanja, ali on ne može jednostavno da odabere jedan od njih. Napravio sledeću strategiju odlučivanja. Prvo što ga najviše brine školarina, cilj odlučivanja je modelovan fazi skupom G="nije visoka školarina". Školarine su date u tabeli:*

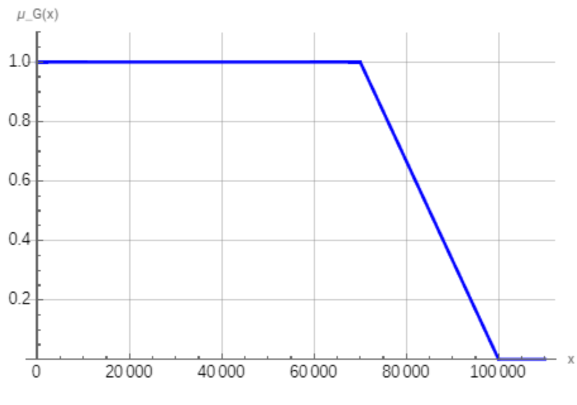
Fakultet	f_1	f_2	f_3
Školarina	*75000*	*85000*	*93000*

Naravno pored školarine bitno mu je da li taj fakultet ima dobru perspektivu, koliko studenata primaju na tom fakultetu i težina prijemnog ispita. Te osobine fakulteta predstavljeni su kao ograničenja koja su modelovana fazi skupovima C_1, C_2, C_3*, respektivno.*

U ovom primeru kombinuju se diskretni fazi skupovi i neprekidni fazi skupovi. Funkcija pripadnosti fazi skupa G je data

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 1, & \textit{za } 0 < x < 70000 \\ \frac{100000-x}{30000}, & \textit{za } 70000 \leq x \leq 100000 \\ 0, & \textit{za } 100000 \leq x \end{cases}$$

Dat je grafički prikaz funkcije pripadnosti fazi cilja.



Slika 3.4: Cilj G "nije visoka školarina".

Diskretni fazi skupovi ograničenja dati su na sledeći način:

$$C_1 = \{(f_1, 0.5), (f_2, 0.7), (f_3, 0.8)\},$$

$$C_2 = \{(f_1, 0.3), (f_2, 0.8), (f_3, 1)\},$$

$$C_3 = \{(f_1, 0.3), (f_2, 0.7), (f_3, 0.5)\},$$

Kako je funkcija pripadnosti fazi skupa G neprekidna funkcija definisana na $\mathbb{R}^+$, a kako su fazi skupovi C_i određeni diskretnom funkcijom pripadnosti nad skupom $\{f_1, f_2, f_3\}$, da bi se mogla primeniti formula za donošenje odluke bazirana na preseku fazi skupa ciljeva i fazi skupa ograničenja, potrebno je zameniti školarine fakulteta f_1, f_2, f_3 u datu funkciju pripadanosti $\mu_G(x)$, odnosno

$$\mu_G(f_1) = \mu_G(75\ 000) = 0.83$$
$$\mu_G(f_2) = \mu_G(85\ 000) = \frac{100000 - 85000}{30000} = 0.5$$
$$\mu_G(f_3) = \mu_G(93\ 000) = \frac{100000 - 93000}{30000} = 0.23.$$

Sada se umesto fazi skupa cilja nad skupom $\mathbb{R}^+$, posmatra fazi skup ciljeva nad skupom alternativa tj, pravimo restrikciju

$$G_{alt} = \{(f_1, 0.83), (f_2, 0.5), (f_3, 0.23)\}.$$

Odluka je

$$D = G_{alt} \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \{(f_1, 0.3), (f_2, 0.5), (f_3, 0.23)\}.$$

Najveću pripadnost skupu D ima drugi fakultet, prema tome ona najbolje ispunjava zahteve i ostvaruje cilj budućeg studenta. □

Primer 21. *U jednoj školi organizovano je takmičenje u kojem učenici mere svoje znanje, svako za sebe. Radili su testove iz prirodnih nauka (matematika, fizika, hemija) i srpskog jezika. Onaj učenik koji ima najbolje rezultate iz svih testova dobija nagradnu. Za to takmičenje prijavilo se pet učenika koji su označeni kao $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Rezultati koje su ostvarili na testovima prikazani su u tabeli.*

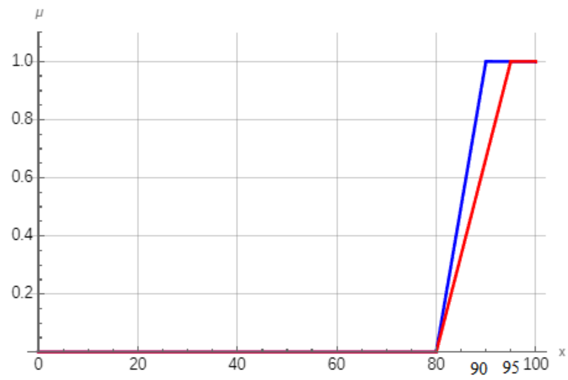
Tabela 3.1: Bodovi ostvareni na testovima.

	Matematika	Fizika	Hemija	Engleski
x_1	86	91	95	93
x_2	98	89	93	90
x_3	90	92	96	88
x_4	96	90	88	89
x_5	90	87	92	94

Nakon analize rezultata, komisija ne može na jednostavan način da izabere pobednika, nego primenjuje sledeće korake. Učenici koji su ušetvovali u ovom takmičenju predstavljaju skup alternativa $A_{alt} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ od kojih jednu biraju kao reprezentativnog pobednika ovog takmičenja. Zatim su definisani sledeći fazi skupovi G_1="postignuće u matematici", G_2="postignuće u fizici", G_3="postignuće u hemiji", G_4="postignuće iz srpskog jezika". Testovi bodovani od 0 do 100. Komisija je napravila dve funkcije pripadnosti. Jedna funkcija se odnosi na prirodne nauke, a druga na srpski jezik:

$$\mu_{PN}(x) = \begin{cases} 0, & za\ 0 \le x \le 80, \\ \frac{x-80}{10}, & za\ 80 \le x \le 90, \\ 1, & za\ 90 \le x \le 100, \end{cases}$$

$$\mu_{SJ}(x) = \begin{cases} 0, & za\ 0 \le x \le 80, \\ \frac{x-80}{15}, & za\ 80 \le x \le 95, \\ 1, & za\ 95 \le x \le 100. \end{cases}$$



Slika 3.5: Grafik funkcjije μ_{PN}(plavi) i grafik funkcije μ_{SJ}(crveni).

Zamenjujući vrednosti bodova svakog učenika iz matematike, fizike i hemije u funkciju pripadnosti $\mu_{PN}(x)$ i vrednosti bodova iz srpskog jezika u funkciju $\mu_{SJ}(x)$, dobijaju se odgovarajući stepeni pripadnosti koji su predstavljeni u Tabeli 3.2.

Tabela 3.2: Stepeni pripadnosti za bodove takmičara.

	Matematika	Fizika	Hemija	Engleski
x_1	0.6	1	1	0.87
x_2	1	0.9	1	0.67
x_3	1	1	1	0.53
x_4	1	1	0.8	0.60
x_5	1	0.7	1	0.93

Vrednosti stepena pripadnosti se uparuju sa odgovarajućim učenicima i tako se dobijaju diskretni fazi skupovi koji su predstavljeni kao ciljevi u procesu donošenja odluke:

$$G_1 = \{(x_1, 0.6), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 1)\},$$

$$G_2 = \{(x_1, 1), (x_2, 0.9), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 0.7)\},$$

$$G_3 = \{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0.8), (x_5, 1)\},$$

$$G_4 = \{(x_1, 0.87), (x_2, 0.67), (x_3, 0.53), (x_4, 0.60), (x_5, 0.93)\}.$$

Sledeći korak jeste formiranje odluke kao novog fazi skup koji je definisan preko preseka fazi skupova G_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$,

$$D = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 = \{(x_1, 0.6), (x_2, 0.67), (x_3, 0.53), (x_4, 0.6), (x_5, 0.7)\}.$$

Sada, posmatranjem maksimalne vrednosti funkcije pripadnosti iz fazi skupa D, zaključujemo da učenik x_5 ima najbolje rezultate, potom x_2, dok x_1 i x_4 imaju iste stepene pripadanja, a najlošije rangiran učenik je x_3. □

Zanimljivo je da ovako dobijen rezultat, kada problem sadrži samo ciljeve, odgovara maxmin kriterijumu iz klasične teorije odlučivanja primenjen na stepene pripadnosti.

Primer 22. *Student Prirodno-matematičkog fakulteta se nalazi u poziciji da treba da odabere izborni predmet koji će slušati. Cilj svakog studenta jeste da sluša predemet koji nije težak ali bi isto tako voleo da predmet bude zanimljiv, da ima zadovoljavajući broj ESPB bodova i da usmeni ispit nije obiman. Ako posmatramo sve ove zahteve možemo ih izraziti preko fazi skupova. Zapravo cilj ovog studenta jeste fazi skup $G =$"predmet koji nije težak ", a ograničenja su zapravo sledeći fazi skupovi: $C_1 =$"zanimljiv predmet", $C_2 =$"odgovarajući broj ESPB bodova"i $C_3 =$"nije obiman usmeni ispit". Skup aletrnativa zapravo predstavlja kolekciju predmeta među kojima student treba da donese odluku, a to su sledeći predmeti:*

1. P_1 - *Matematički mozaik*

2. P_2 - *Poslovna informatika*

3. P_3 - *Mehanika*

4. P_4 - *Bulova algebra i optimizacija*

5. P_5 - *Numeričke metode linearne algebre*

6. P_6 - *Revizija*

Na osnovu iznetih mišljenja starijih starijih kolega, student formira odgovarajuće fazi skupove:

1. $G = \{(P_1, 1), (P_2, 0.9), (P_3, 0.6), (P_4, 0.5), (P_5, 0.8), (P_6, 0.7)\}$,

2. $C_1 = \{(P_1, 1), (P_2, 0.4), (P_3, 0.5), (P_4, 0.9), (P_5, 0.6), (P_6, 0.3)\}$,

3. $C_2 = \{(P_1, 0.4), (P_2, 0.8), (P_3, 1), (P_4, 0.8), (P_5, 1), (P_6, 1)\}$,

4. $C_3 = \{(P_1, 1), (P_2, 0.9), (P_3, 0.4), (P_4, 0.3), (P_5, 0.8), (P_6, 0.5)\}$.

Na osnovu definicije (3.4)

$$D = G \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3,$$

te je odluka $D = \{(P_1, 0.4), (P_2, 0.4), (P_3, 4), (P_4, 0.3), (P_5, 0.6), (P_6, 0.3)\}$. *Najveću vrednost funkcije pripadnosti skupa D ima predmet Numeričke metode linearne algebre, tako da student bira taj predmet.* □

3.2 Generalizacija zasnovana na t-normama

U poglavlju 3.1 govorimo o donošenju odluka putem preseka fazi skupova koji predstavljaju cilj i ograničenja. Kako je operacija preseka fazi skupova definisana preko operatora minimuma, tj. presek je baziran na t-normi $T_{\min}$, postavlja se pitanje kako primena različitih trougaone norme utiče na rezultujuću odluku. U daljem radu ćemo na primerima ispitati kako primena trouganih normi T_P, T_L i T_D utiču na rezultujuću odluku.

U poglavlju 1.3.3 data je Definicija 17 u kojoj je definisan T - presek fazi skupova A i B kao

$$\mu_{A\cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)), \text{ za svako } x \in U.$$

3.2.1 Fazi odluka primenom T_P-preseka

Kako je

$$T_P(x, y) = x \cdot y,$$

funkcija pripadnosti T_P-preseka proizvoljna dva fazi skupa A i B je data sa:

$$\mu_{A\cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x).$$

Definicija 30. Neka je G fazi skup koji opisuje cilj, a fazi skup C opisuje ograničenje. Fazi skup D koji modeluje odluku dobijenu T_P-presekom f je

$$D = G \cap C = \{(x, \mu_D(x)) \mid x \in [d_1, d_2], \mu_D(x) \in [0, h \leq 1]\}$$

gde je funkcija pripadnosti

$$\mu_D(x) = \mu_G(x) \cdot \mu_C(x).$$

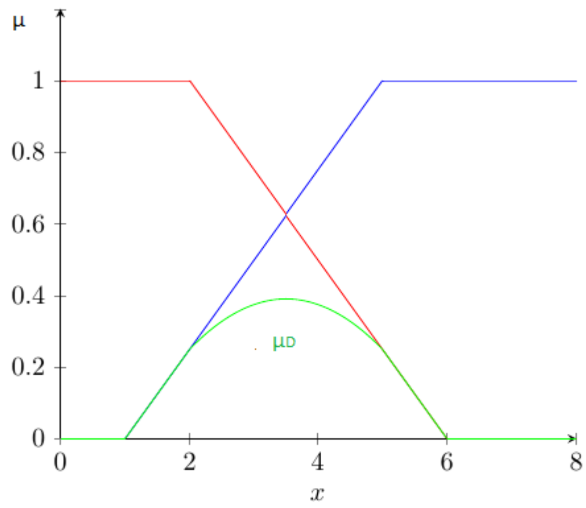
Sada ćemo primeniti datu definiciju na primere 18,19,20,21,22.

Primer 23. *Posmatrajmo ponovo problem iz Primera 18, tj. dati su fazi skupovi G="dovoljno vremena da postigne da pređe celo gradivo" i C="vreme shodno umoru" čije su funkcije pripadnosti (3.6) i (3.7).*

Odredimo sada fazi skup odluke pomoću preseka baziranog na t-normi T_P, tj.

$$D = \{(x, \mu_G(x) \cdot \mu_C(x)), \ 0 \leq x \leq 8\}. \tag{3.8}$$

Tada, odluka je D određena funkcijom pripadnosti čiji grafik možemo videti na Slici 3.6. Primenom defazikacije fazi skupa D, metodom visine, dobijamo da je $x_{\max} = 3.5h$ za tu vrednost x funkcija pripadnosti je jednaka 0.39. Možemo primetiti da $T_{\min}$-presek i T_P-presek daju isti rezultat. □



Slika 3.6: Fazi odluka D primenom T_P-preseka.

Primer 24. *Posmatrajmo problem iz Primera 19 u kome su dati sledeći podaci:* $A_{alt} = \{p_1, p_2, p_3\}$ *gde je* p_1*-niža cena školarine,* p_2*-dodatni ispitni rok i* p_3*-dostupna menza bez obzira na budžet. Na tom skupu definisani su sledeći ciljevi i ograničenje:*

- G_1 = *"poboljšanje kvaliteta života studentima"* $= \{(p_1, 0.9), (p_2, 0.4), (p_3, 0.8)\}$
- G_2 = *"povećanje broja upisanih studenata"*$= \{(p_1, 0.85), (p_2, 0.67), (p_3, 0.9)\}$
- C = *"novčani gubitak"* $= \{(p_1, 0.8), (p_2, 0, 05), (p_3, 0.72)\}$.

Primenom Definicije 30 dobijamo sledći rezultat

$$D = \{(p_1, 0.9 \cdot 0.85 \cdot 0.8), (p_2, 0.4 \cdot 0.67 \cdot 0.05), (p_3, 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.72)\} = \{(p_1, 0.612), (p_2, 0.0134), (p_3, 0.5184)\}.$$

Krajnja odluka jeste ona vrednost iz skupa alternativa u kojoj je vrednost funkcije pripadnosti μ_D *maksimalna. U ovom slučaju to je projekat* p_1 *sa stepenom pripadnosti 0.612. Dakle, upravni odbor fakulteta prihvata da se smanji školarina za učenike sa niskim prihodima. U primeru 19 upravni odbor je doneo istu odluku.* □

Primer 25. *Podmatrajmo problem iz Primera 20 gde je* $A_{alt} = (f_1, f_2, f_3)$ *skup fakulteta i gde su definisani sledeći fazi skupovi:*

- C_1 = "dobra perspektiva" $= \{(f_1, 0.5), (f_2, 0.7), (f_3, 0.8)\}$,
- C_2 = "broj studenata koji primaju" $= \{(f_1, 0.3), (f_2, 0.8), (f_3, 1)\}$,
- C_3 = "težina prijemnog ispita" $= \{(f_1, 0.3), (f_2, 0.7), (f_3, 0.5)\}$,
- G = "nije visoka skolarina" $= \{(f_1, 0.85), (f_2, 0.5), (f_3, 0.23)\}$.

Odluka D *je data kao fazi skup*

$$D = \{(f_i, \mu_{C_1} \cdot \mu_{C_2} \cdot \mu_{C_3} \cdot \mu_G)|i = 1, 2, 3\} = \{(f_1, 0.03825), (f_2, 0.196), (f_3, 0.092)\}.$$

Maksimalnu vrednost funkije pripadnosti u skupu D *ima fakultet* f_2 *odnosno fakultet* f_2 *najbolje ispunjava sve zahteve, što se poklapa sa donetom odlukom u Primeru 20.* □

Primer 26. *U Primeru 21 komisija bira između pet učenika najboljeg kojem žele da dodele stipendiju, dakle* $A_{alt} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$*. Dati ciljevi su*

- G_1 = *"postugnuće u matematici"* $= \{(x_1, 0.6), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 1)\}$,
- G_2 = *"postignuće u fizici"* $= \{(x_1, 1), (x_2, 0.9), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 0.7)\}$,

- G_3 = *"postignuće u hemiji"* $= \{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0.8), (x_5, 1)\}$,
- G_4 = *"postignuće iz srpskog jezika"* $= \{(x_1, 0.87), (x_2, 0.67), (x_3, 0.53), (x_4, 0.60), (x_5, 0.93)\}$.

Primenom Definicije 29 dobija se odluka

$$D = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 = \{(x_1, 0.522), (x_2, 0.603), (x_3, 0.53), (x_4, 0.48), (x_5, 0.651)\}.$$

Primenom trougaone norme T_P, kao i u slučaju T_{min}, komisija bira učenika x_5. Možemo primetiti da je učenik x_3 bio najlošiji u Primeru 21, dok primenom T_P najlošiji učenik je x_4. Dakle, T_{min} i T_P za maksimizirajuće vrednosti daju istu alternativu u ovom primeru, dok za najgoreg rangiranog to nije slučaj. □

Primer 27. *Vratimo se na problem studenta koji se nalazi u situaciji da mora da odabere predmet koji će slušati tokom semstra. U Primeru 22 dati su fazi skupovi G ="predmet nije težak", C_1="zanimljiv predmet", C_2 ="odgovarajući broj ESPB bodova" i C_3 ="nije obiman usmeni ispit". Skup aletrnativa predstavlja kolekciju predmeta koji su mu na raspolaganju.*

Student formira sledeće fazi skupove:

- $G = \{(P_1,1),(P_2,0.9),(P_3,0.6),(P_4,0.5),(P_5,0.8),(P_6,0.7)\}$
- $C_1 = \{(P_1,1),(P_2,0.4),(P_3,0.5),(P_4,0.9),(P_5,0.6),(P_6,0.3)\}$
- $C_2 = \{(P_1,0.4),(P_2,0.8),(P_3,1),(P_4,0.8),(P_5,1),(P_6,1)\}$
- $C_3 = \{(P_1,1),(P_2,0.9),(P_3,0.4),(P_4,0.3),(P_5,0.8),(P_6,0.5)\}$

Na osnovu Definicije 29 dobija se

$$D = G \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \{(x, \mu_G(x) \cdot \mu_{C_1}(x) \cdot \mu_{C_2}(x) \cdot \mu_{C_3}(x)),\ x \in \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}\},$$

tj.

$$D = \{(P_1, 0.4), (P_2, 0.26), (P_3, 0.12), (P_4, 0.108), (P_5, 0.384), (P_6, 0.105)\}.$$

Najveću vrednost funkcija pripadnosti skupa D dostiže za predmet Numeričke metode linearne algebre. Krajnja odluka se poklapa sa Primerom 22. □

3.2.2 Fazi odluka primenom T_L-preseka

Podsetimo se Lukašijevičeve trougaone norme

$$T_L(x, y) = max(0, x + y - 1).$$

Definicija 31. Neka je G fazi skup koji opisuje cilj, a fazi skup C opisuje ograničenje. Fazi skup D koji modeluje odluku dobijenu T_L-presekom je

$$D = G \cap C = \{(x, \mu_D(x)) \mid x \in [d_1, d_2], \mu_D(x) \in [0, 1]\}$$

gde je funkcija pripadnosti

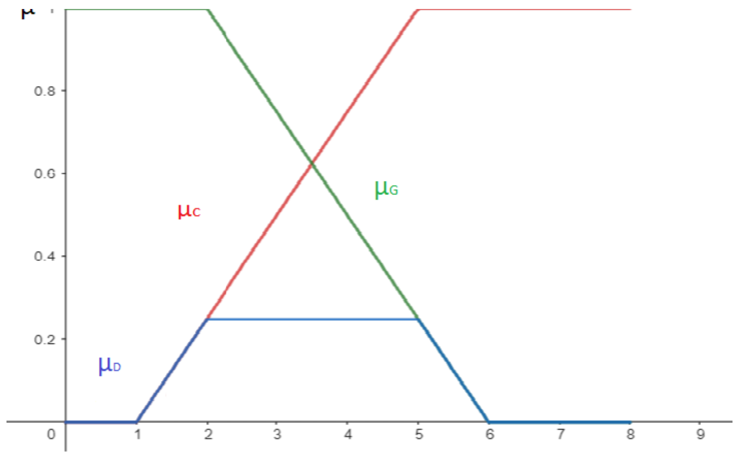
$$\mu_D(x) = T_L(\mu_C(x), \mu_G(x)) = \max(0, \mu_C(x) + \mu_G(x) - 1).$$

Primer 28. *Vratimo se na Primer 18 u kom su dati skupovi G ="dovoljno vremena da postigne da pređe celo gradivo" i ograničenje C="vreme shodno umoru " čije su funkcije pripadnosti date fomrulama (3.6) i (3.7).*

Odluka D dobijena kao presek fazi skupova G i C primenom T-norme T_L je oblika

$$D = \{(x, max(\mu_G(x) + \mu_C(x) - 1, 0)),\ 0 \le x \le 8\}. \tag{3.9}$$

Odluka D je određena funkcijom pripadnosti čiji grafik možemo videti na Slici 3.7. Defazikacijom fazi skupa D, koji je trapezoidnog oblika, dobijamo $\frac{2+5}{2} = 3.5$, odnosno da je $x_{\max} = 3.5h$. Za vrednost $x_{\max}$ funkcija pripadnosti je jednaka 0.25. U ovom primeru primenom T_L-preseka dobijamo ista rešenja kao i primenom $T_{\min}$-preseka i T_P-preseka. □



Slika 3.7: Funkcije pripadnosti fazi skupova C, G i D iz Primera 28.

Primer 29. *U ovom primeru posmatramo skup alternativa* $A_{alt} = \{p_1, p_2, p_3\}$ *iz Primera 19, kao i sledeće ciljeve i ograničenje:*

- G_1 = *"poboljšanje kvaliteta života studentima"* $= \{(p_1, 0.9), (p_2, 0.4), (p_3, 0.8)\}$,
- G_2 = *"povećanje broja upisanih studenata"* $= \{(p_1, 0.85), (p_2, 0.67), (p_3, 0.9)\}$,
- C = *"novčani gubitak"* $= \{(p_1, 0.8), (p_2, 0, 05), (p_3, 0.72)\}$.

Primenom Definicije 31 dobijamo sledći rezultat

$$D = \{(p_1, \max\{\mu_C(p_1) + \mu_{G_1}(p_1) + \mu_{G_2}(p_1) - 2, 0\}), (p_2, \max\{\mu_C(p_2) + \mu_{G_1}(p_2) + \mu_{G_2}(p_2) - 2, 0\}),$$

$$(p_3, \max\{\mu_C(p_3) + \mu_{G_1}(p_3) + \mu_{G_2}(p_3) - 2, 0\})\},$$

odnosno,

$$D = \{(p_1, 0.55), (p_2, 0), (p_3, 0.42)\}.$$

Dakle, upravni odbor fakulteta prihvata da se smanji školarina za učenike sa niskim prihodima, odnosno prihvata se alternativa p_1*. U primerima 19 i 24 primenom* T_P*-preseka i* $T_{\min}$*-preseka upravni odbor je doneo istu odluku.* □

Primer 30. *Podsetimo se problema iz Primera 20 gde su dati sledeći fazi skupovi:*

- C_1 = "dobra perspektiva" $= \{(f_1, 0.5), (f_2, 0.7), (f_3, 0.8)\}$,
- C_2 = "broj studenata koji primaju" $= \{(f_1, 0.3), (f_2, 0.8), (f_3, 1)\}$,
- C_3 = "težina prijemnog ispita" $= \{(f_1, 0.3), (f_2, 0.7), (f_3, 0.5)\}$,
- G = "nije visoka skolarina" $= \{(f_1, 0.85), (f_2, 0.5), (f_3, 0.23)\}$.

PRimenom T_L*-preseka dobija se odluka* D *data kao fazi skup*

$$D = \{(f_i, max\{\mu_G(f_i) + \mu_{C_1}(f_i) + \mu_{C_2}(f_i) + \mu_{C_3}(f_i) - 3, 0\})\} = \{(f_1, 0), (f_2, 0), (f_3, 0)\}.$$

U ovom primeru ne dobijamo jedinstev odgovor. □

Primer 31. *Pozovimo se na Primer 21 u kom je dat skup* $A_{alt} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ *i sledeći fazi skupovi:*

- G_1 = *"postugnuće u matematici"* $= \{(x_1, 0.6), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 1)\}$,
- G_2 = *"postignuće u fizici"* $= \{(x_1, 1), (x_2, 0.9), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 0.7)\}$,
- G_3 = *"postignuće u hemiji"* $= \{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0.8), (x_5, 1)\}$,
- G_4 = *"postignuće iz srpskog jezika"* $= \{(x_1, 0.87), (x_2, 0.67), (x_3, 0.53), (x_4, 0.60), (x_5, 0.93)\}$.

Tada je odluka

$$D = \{(x_i, max\{\mu_{G_4}(x_i) + \mu_{G_3}(x_i) + \mu_{G_2}(x_i) + \mu_{G_1}(x_i) - 3, 0\}) \mid i \in \{1,2,3,4,5\}\},$$

tj.

$$D = \{(x_1, 0.47), (x_2, 0.57), (x_3, 0.53), (x_4, 0.4), (x_5, 0.63)\}.$$

Najveću vrednost funkcije pripadnosti ima učenik x_5, te se odabir poklapa i sa prethodnim načinima. Vidimo da je najmanja vrednost funkcije pripadnsti za učenika x_4, što ukazuje da je imao najgore postignuće u ovom takmičenju. □

Primer 32. *Podsetimo se sledećih fazi skupova iz Primera 22:*

- G =$\{(P_1,1),(P_2,0.9),(P_3,0.6),(P_4,0.5),(P_5,0.8),(P_6,0.7)\}$,
- C_1 =$\{(P_1,1),(P_2,0.4),(P_3,0.5),(P_4,0.9),(P_5,0.6),(P_6,0.3)\}$,
- C_2 =$\{(P_1,0.4),(P_2,0.8),(P_3,1),(P_4,0.8),(P_5,1),(P_6,1)\}$,
- C_3 =$\{(P_1,1),(P_2,0.9),(P_3,0.4),(P_4,0.3),(P_5,0.8),(P_6,0.5)\}$.

Na osnovu Definicije 31 imamo

$$D = G \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \{(p_i, max\{\mu_G(p_i) + \mu_{C_3}(p_i) + \mu_{C_2}(p_i) + \mu_{C_1}(p_i) - 3, 0\}) \mid i \in \{1,2,3,4,5,6\}\},$$

tj.

$$D = \{(P_1, 0.4), (P_2, 0), (P_3, 0), (P_4, 0), (P_5, 0.2), (P_6, 0)\}.$$

Student se u ovom slučaju odlučuje za predmet Matematički mozaik, što se ne poklapa sa prethodim odlukama. □

3.2.3 Fazi odluka premenom T_D-preseka

Na samom kraju podsetićemo se trougaone norme T_D koja je definisana na sledeći način:

$$T_D(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & \text{ako je } \max(x,y) = 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Definicija 32. Neka je G fazi skup koji opisuje cilj, a fazi skup C opisuje ograničenje. Fazi skup D koji modeluje odluku dobijenu T_D-presekom je

$$D = G \cap C = \{(x, \mu_D(x)) \mid x \in [d_1, d_2], \mu_D(x) \in [0, h \leq 1]\}$$

gde je funkcija pripadnosti

$$\mu_D(x) = \begin{cases} \min(\mu_C(x), \mu_G(x)), & \text{ako je } \max(\mu_C(x), \mu_G(x)) = 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primer 33. *Posmatrajmo opet fazi skupove G="dovoljno vremena da postigne da pređe celo gradivo" i C="vreme shodno umoru" čije su funkcije pripadnosti (3.6) i (3.7).*

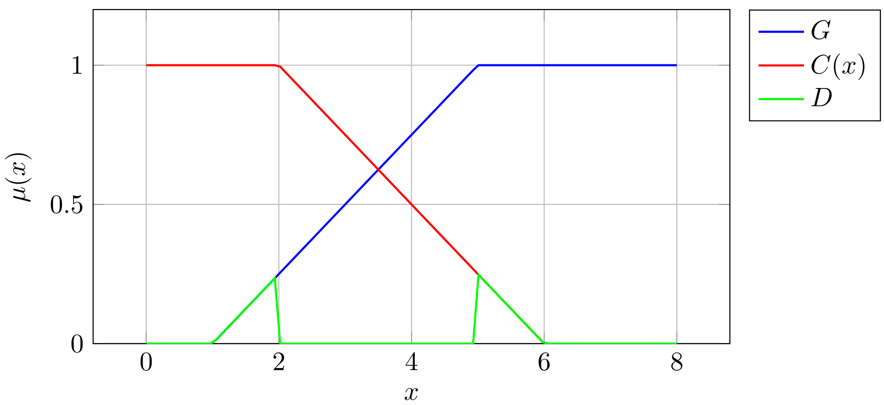
Po Definiciji 32, odluka D je fazi skup

$$D = \{(x, \mu_D(x)), 0 \leq x \leq 8\}, \tag{3.10}$$

gde je

$$\mu_D(x) = \begin{cases} \min(\mu_C(x), \mu_G(x)), & \textit{ako je } \max(\mu_C(x), \mu_G(x)) = 1, \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Odluka D je određena funkcijom pripadnosti čiji grafik možemo videti na Slici 3.8. Maksimiziranu vrednost x_{max} biramo kao $x \in [d_1, d_2]$ za koju funckija pripadnosti dostiže maksimalnu vrednost. U slučaju ove funkcije pripadnosti dobijamo dve maksimizirane odluke, a to su $x^1_{max} = 2h$ ili $x^2_{max} = 5h$. U prethodnim primerima rezultat je $x_{max} = 3.5h$, što se razlikuje od ovde dobijenog zaklju'v cka. □



Slika 3.8: Funkcije $\mu_G(x)$, $\mu_C(x)$ i $\mu_D(x)$ iz Primera 33.

Primer 34. *Posmatrajmo ponovo postavku iz Primera 19. Radi jednostavnijeg zapisa označićemo skup C sa G_3. Fazi skupovi G_1, G_2 i G_3 (C), po Definiciji 32, formiraju skup odluke D čija je funckija pripadnosti data na sledeći način*

$$\mu_D(p_i) = T_D(\mu_{G_1}(p_i), \mu_{G_2}(p_i), \mu_{G_3}(p_i)) = \begin{cases} \mu_{G_j}(p_i) & \textit{kada je } \mu_{G_k}(p_i) = 1 \textit{za svako } k \neq j, \\ 0, & \textit{inače,} \end{cases}$$

odnosno,

$$D = \{(p_1, 0), (p_2, 0), (p_3, 0)\}.$$

Kao što vidimo za svako p_i funkcija pripadnosti uzima vrednost 0, dakle u ovom primeru primenom drastične trougaone norme ne dobijamo krajnje rešenje. □

Primer 35. *Posmatrajmo ponovo fazi skupove iz Primera 20:*

- $C_1 = \{(f_1, 0.5), (f_2, 0.7), (f_3, 0.8)\}$,
- $C_2 = \{(f_1, 0.3), (f_2, 0.8), (f_3, 1)\}$,
- $C_3 = \{(f_1, 0.3), (f_2, 0.7), (f_3, 0.5)\}$,
- $G = \{(f_1, 0.85), (f_2, 0.5), (f_3, 0.23)\}$.

Ako radi jednostavnijeg zapisa skup G označimo sa C_4, fazi skup odluke D je određen funkcijom pripadnosti

$$\mu_D(f_i) = T_D(\mu_{C_1}(f_i), \mu_{C_2}(f_i), \mu_{C_3}(f_i), \mu_{C_4}(f_i)) = \begin{cases} \mu_{C_j}(f_i) & \textit{kada je } \mu_{C_k}(f_i) = 1 \textit{za svako } k \neq j, \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Dobijamo $D = \{(f_1, 0), (f_2, 0), (f_3, 0)\}$, te i u ovom slučaju nemamo krajnji rezultat. □

Primer 36. *Posmatrajmo ponovo fazi skupove iz Primera 21:*

- $G_1 = \{(x_1, 0.6), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 1)\}$,
- $G_2 = \{(x_1, 1), (x_2, 0.9), (x_3, 1), (x_4, 1), (x_5, 0.7)\}$,
- $G_3 = \{(x_1, 1), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0.8), (x_5, 1)\}$,
- $G_4 = \{(x_1, 0.87), (x_2, 0.67), (x_3, 0.53), (x_4, 0.60), (x_5, 0.93)\}$.

Tada je odluka $D = \{(x_i, \mu_D(x_i)) \mid i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ gde je

$$\mu_D(x_i) = T_D(\mu_{G_1}(x_i), \mu_{G_2}(x_i), \mu_{G_3}(x_i), \mu_{G_4}(x_i)) = \begin{cases} \mu_{G_j}(x_i) & \textit{kada je } \mu_{G_k}(x_i) = 1 \textit{za svako } k \neq j, \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Kada uvrstimo vrednosti funkcije pripadnosti za svako x_i, $i \in \{1,2,3,4,5\}$, dobijamo odluku D određenu sledećim uređenim parovima

$$D = \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0.53), (x_4, 0), (x_5, 0)\}.$$

U ovom slučaju učeniku x_3 odgovara maksimalna vrednost funckije pripadnosti, što se ne poklapa sa prethodnim sluąjevima. □

Primer 37. *Dati su cilj i ograničenja predstavljeni fazi skupovima iz Primera 22:*

1. $G = \{(P_1,1),(P_2,0.9),(P_3,0.6),(P_4,0.5),(P_5,0.8),(P_6,0.7)\}$,
2. $C_1 = \{(P_1,1),(P_2,0.4),(P_3,0.5),(P_4,0.9),(P_5,0.6),(P_6,0.3)\}$,
3. $C_2 = \{(P_1,0.4),(P_2,0.8),(P_3,1),(P_4,0.8),(P_5,1),(P_6,1)\}$,
4. $C_3 = \{(P_1,1),(P_2,0.9),(P_3,0.4),(P_4,0.3),(P_5,0.8),(P_6,0.5)\}$.

Na osnovu Definicije 32 dobija se

$$D = G \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \{(P_1, 0.4), (P_2, 0), (P_3, 0), (P_4, 0), (P_5, 0), (P_6, 0)\}.$$

Primenom T_D-preseka dobijamo krajnji rezultat P_1, tj. Matematički mozaik. □

Radi lakše analize, rezultati prethodnih primera prikazani su u Tabeli 3.3. Kao što možemo videti, odluke u nekim primerima se ne poklapaju. Takođe, treba primetiti T_D-presek i T_L-presek ne daju odgovor u primerima 18, 19, 20.

Tabela 3.3: Prikaz dobijenih rezultata.

	T_{min}	T_P	T_L	T_D
primer 18.	$x_{max} = 3.5$, $h = 0.625$	$x_{max} = 0.35$, $h = 0.39$	$x_{max} = 0.35$, $h = 0.25$	$x^1_{max} = 2$, $x^2_{max} = 5$, $h = 0.25$
primer 19.	$x_{max} = p_1$, $h = 0.8$	$x_{max} = p_1$, $h = 0.612$	$x_{max} = p_1$, $h = 0.55$	nema rešenja
primer 20.	$x_{max} = f_2$, $h = 0.5$	$x_{max} = f_2$, $h = 0.196$	nema rešenja	nema rešenja
primer 21.	$x_{max} = x_5$, $h = 0.7$	$x_{max} = x_5$, $h = 0.651$	$x_{max} = x_5$, $h = 0.63$	nema rešenja
primer 22.	$x_{max} = p_5$, $h = 0.6$	$x_{max} = p_5$, $h = 0.384$	$x_{max} = p_1$, $h = 0.4$	$x_{max} = p_1$, $h = 0.4$

Primena trougaonih normi $T_{\min}$ i T_P kao operatora koji modeluju presek fazi skupova je rezultirala jednakim odlukama u svim primerima. Ono što možemo primetiti jeste da je vrednost funkcije pripadnosti odluke D za $x_{\max}$ manja kada je presek modelovan trougaonom normom T_P. Ovo svojsvo važi i za vrednost funckije pripadnosti $\mu_D(x_{\max})$ koja je dobijena primenom T_L u primerima 18,19 i 22, što ukazuje da konačnu odluku $x_{\max}$ najbolje reprezentuje trougaona norma $T_{\min}$, što nam i govori Teorema 1.3.2.

U Primeru 20 trougaona norma T_L ne daje odgovor. Funkcije pripadnosti kojima su opisani ciljevi i ograničenja nemaju velike vrednosti. Može se smatrati da donosilac odluke nije imao tako optimistično mišljenje o postavljenim uslovima za odabrane fakultete. U Primeru 22 primenom T_L-preseka dobijen je rezultat p_1 dok je primenom $T_{\min}$-preseka i T_P-preseka dobijen p_5. Vrednosti funckije pripadnosti za predmet p_1 u svim skupovima ograničenja i ciljeva je jedan, izuzev jednog fazi ograničenja gde je vrednost 0.4, te je 0.4 zapravo pripadnost $x_{\max}$ u fazi skup odluke D.

Drastična trougaona norma ne daje ni jedno rešenje koje se pokla sa rešenjima dobijenim primenom trougaone norme minimum. U Primeru 20 za maksimizirajuću odluku primenom T_D dobijamo dve vrednosti 2 i 5. Ako pogledamo Sliku 3.8, na intervalu $[2, 5]$ funkcija pripadnosti dobijena trougaonom normom T_L ima vrednost jedan. Zapravo vrednosti 2 i 5 su pocetak i kraj intervala na grafiku 3.8, ali kako je dva sata premalo za učenje jednog predmeta, a opet po pet sati je puno prema navedenom zahtevu, ova norma T_D nam vraća drastične odluke, koje ispunjavaju ili jedan zahtev ili drugi, dok su druge t-norme ispunjavale oba zahteva i vraćale rezultate koji su sredina intervala $[2, 5]$. Drastična t-norma ne daje rezultate u primerima 19, 20 i 21. U konstrukciji ove t-norme postavljen je zahtev $\max(\mu_G, \mu_C) = 1$, te ako je to ispunjeno vraća se manja vrednost, inače se vraća nula. U ovim primerima upravo je došlo do slučaja dva, a to je da za svaku vrednost iz skupa alternativa vrednost funkcije pripadnosti je jednaka nuli. To je posledica preslabih pripadnosti u zahtevima koje je definisao donosilac odluke. Takođe, možemo da kažemo da je t-norma T_D pogodna u stiacijama kada je izbor alternativa takav da njihove pripadnosti postavljenih ciljeva i ograničenja su skoro sve jednake jedinici, kao u Primeru 22 gde alternativa p_1 ima pripadnosti jednake jedinici za sve ciljeve i ograničenja izuzev jednog. Rešenja prikazana u tebeli koja odgovaraju datim primerima u saglasnosti su sa relacijom $T_{\min} > T_P > T_L > T_D$.

Zaključak

U ovom radu prikazan je proces donošenja odluka koji je opisan savremenim metodama fazi logike. Kroz zanimljive realne situacije, upotrebljeni su elementi fazi logike koji dalje agregiraju konačnu odluku. Fazi skupovi, koji čine osnovni pojam ove savremene matematike, ističe njihova velika primena. Zbog same strukture ovih skupova koji su definisani preko funckija pripadnosti, njihova primena je mnogo šira nego primena klasičnih skupova. Ideja ovog rada je da postepenim uvođenjem fazi pojmova, sa naglaskom na fazi skupove, dođemo do osnovnih operacija sa fazi skupovima i fazi usrednjavanja koje imaju veliku primenu u procesu donošenja odluka, što je i prikazano u Glavi 3.

U uvodnom delu upoznajemo se sa osnovnim pojmovima. Paralelnim prikazom klasličnih skupova i fazi skupova, dobijamo jasnu razliku između njih i time je izraženo to koliko su klasični skupovi "kruti"i nemaju tu lepu osobinu delimične pripadnosti kojom možemo da opišemo skoro svaku pojavu u realnom svetu. U prvoj glavi opisani su i operatori trougaone norme i trougaone konorme čiju važnost u fazi logici ističemo kroz njihovu ulogu pri modelovanju operacija unije i preseka fazi skupova. Opisani su fazi brojevi, zatim uvedene osnovne aritmetičke operacije koje su potrebne pri implementaciji fazi usrednjavanja.

U drugom delu rada upoznajemo se sa fazi usrednjavanjem koje takođe ima primenu u procesu donošenja odluke. Zatim je uveden nov pojam defazikacije fazi skupova koji je opisan kao prevođenje fazi vrednosti u jednu numeričku vrednost koja najbolje predstavlja početni fazi pojam. Drugi deo rada prikazuje značaj fazi urednjavanja u situacijama kada je potrebno uzeti u obzir više mišljenja o datoj pojavi. Zapravo, trougaonim (trapezoidnim) brojevima eksperti modeluju svoje mišljenje o izučavanoj pojavi koja je neprecizna po svojoj prirodi. Iznošenjem svojih mišljenja izvodi se zaključak kao fazi prosek iznetih fazi brojeva, tj. agregacija svih mišljena predstavlja fazi prosek, model koji opisuje datu pojavu. Iz njega se dalje postupkom dezafikacije dobija jedan rezultat, ukoliko je potrebna jedna vrednost kao reprezentativan odgovor.

Treći deo rada kroz primere ilustruje proces donošenja odluke. Pridruživanjem definisanih pojmova iz prve dve glave dolazimo do metode donošenja odluka, zasnovane na preseku fazi skupova koji opisuju cilj i ograničenje odluke. Kao što je prikazano u datim primerima, situacije u kojima se nalazio donosilac odluke ograničene su pojavama koje nemaju preciznu definiciju. On je na osnovu tuđih mišljenja ili po svom osećaju opisivao posmatrana ograničenja i ciljeve fazi skupovima. Fazi skup koji je dobijen presekom tih fazi skupova, jeste model koji opisuje njegovu odluku. Uzimajući onu alternativu koja ima najveći stepen pripadnsoti u rezultujućem fazi skupu koji opisuju odluku dobija se rešenje problema. Ovaj deo rada daje čitaocu jasnu sliku o mogućnostima primene pojmova definisanih u prve dve glave rada, te pruža uvid u interesantne aspekte procesa donošenja odluka u fazi okruženju u kojem se mi zapravo i nalazimo.

Literatura

[1] Basiura B., Skalna I., Rębiasz B, Gaweł B., Duda J., Opiła J., Pełech-Pilichowski T. *Advances in Fuzzy Decision Making: Theory and Practice*, Springer (2015).

[2] Bojadziev G. i Bojadziev M. *Fuzzy logic for Busniess, Finance, and Menagment* World Scientific, (1999).

[3] De Baets B., Stupňanová A., *Analytical expressions for the addition of fuzzy intervals, Fuzzy Sets and Systems*, (1997).

[4] De Barros L.C., Bassanezi R.C., Lodwick W.A. *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics* Polish Academy of Sciences, (2017).

[5] Detyniecki M. *Fundamentals on Aggregation Operators*, (2001).

[6] Hanss M. *Applied Fuzzy Arithmetic An Introduction with Engineering Applications*, (2005).

[7] Kaufmann A., Gupta M.M. *Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science*, North-Holland, (1988).

[8] Klement E.P., Mesiar R.,Pap E.*Triangular norms*, (2000).

[9] Klir J. G. i Bo Yuan *Fuzzy sets and fuzzy logic, theory and applications*, (1995).

[10] Lozanov-Crvenković Z, *Statistika*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno matematički fakultet Novi Sad, (2012).

[11] Lootsma F.A.; Fuzzy logic for planning and decision making, Springer, 1997.

[12] Menger K., *Statistical metrics*,Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. (1942).

[13] Pap E., Bošnjak Z., Bošnjak S. *Application of fuzzy sets with diferent t-norms in the interpretation of portfolio matrices in strategic management* (2000).

[14] Pap E. *Fazi mere i njihova primena* Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno matematički fakultet, Novi Sad, (1999).

[15] Schweizer B. and Sklar A., *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, Amsterdam, (1983).

[16] Torra V., Narukawa Y.*Modeling Decisions: Information Fusion and Aggregation Operators*, Springer, (2007).

[17] Zadeh L.A.,*The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I*, (1975).

[18] Zadeh L. A. *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Fuzzy Systems Selected Papers*,World Scientific, (1996).

[19] Zadeh L.A, Bellman R.E *Decision Making in a Fuzzy Environment*, (1970).

[20] Zimmermann H.J *Fuzzy Set Theoryand Its Applications*, (2001)

[21] www.wikipedia.org

Biografija

Natalija Panić je rođena 22. januara 1999. godine u Loznici. Pohađala je osnovnu školu „Jovan Cvijić" u Zminjaku, koju je završila 2014. godine, kao nosilac Vukove diplome. Iste godine je upisala Mitrovačku gimnaziju koju je završila 2018. godine. Zatim je iste 2018. godine upisala integrisane akademske studije u trajanju od pet godina na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Master-profesor matematike. Položila je sve ispite predviđene planom i programom u 2024. godini i time stekla pravo na odbranu master rada.

Ključna dokumentacija

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Matster rad
VR

Autor: Natalija Panić
AU

Mentor: Prof. dr Ivana Štajner-Papuga
ME

Naslov rada: O donošenju odluka u fazi okruženju
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2024.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (3/51/21/13/0/36/0)
FOR (broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Primenjena matematika
ND

Predmetne odrednice: fazi skup, fazi broj,funkcija pripadnosti, fazi usrednjavanje,defazikacija
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČS

Važna napomena: nema
VN

Izvod: U ovom radu je dat opis principa donošenja odluka u fazi okruženju. Pre svega objašnjen je pristup u kojem se odluka dobija kao presek fazi skupa ciljeva i ograničenja i pristup po kojem se do odluke dolazi preko fazi usrednjavanja. Na početku, radi uspešnog razumevanja rada u celini, objašnjeni su osnovni pojmovi fazi skupovi, fazi brojevi, a posebna pažnja je posvećena trougaonim fazi brojevima kao i trougaonim normama. Kako bi se sve što jasnije približilo čitaocu, dato je dosta primera koji su iz realnog života, na koje su primenjeni pomenuti principi.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 23.09.2024.
DP

Datum odbrane: oktobar 2024.
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: Prof. Dr Andreja Tepavčević, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu,

Mentor:Prof. Dr Ivana Štajner-Papuga, redovni profesor na Prirodno- matematičkom fakultetu u Novom Sadu,

Član:Prof. Dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor Prirodno- matematičkog fakulteta u Novom Sadu.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Natalija Panić
AU

Mentor: Ivana Štajner-Papuga, PhD
MN

Title: On decision making in a fuzzy environment
Tl

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: serbian / english
LA

Country of publication: : Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2024.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (3/51/21/13/0/36/0)
PD (broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Applied mathematics
SD

Subject key words: fuzzy set, fuzzy number, membership function, fuzzy averaging, defuzzication
SKW

Holding data: In the Library of Department of Mathematics and Informatics, University of Novi Sad
HD

Note
N

Abstract : This paper presents description of the Decision Making process in a Fuzzy environment. Above all, the principle of Decision making by Intersection of Fuzzy Goals and Constraints, and principle of Fuzzy Averaging for Decision Making are described. At the beginning, the basic concept of fuzzy sets, fuzzy numbers are explained, so that the paper can be understand, and special attention is directed to triangular fuzzy numbers and triangular norms. To make it clearer to the reader, a lot of examples from real life, that have been applied the mentioned principles, are given.

Accepted by the Scientific Board on: 23.09.2024.
ASB

Defended: oktobar 2024.
DE

Thesis defend board::
DB
President:PhD Andreja Tepavčević, Full Professor, Faculty of Natural Sciences,
Mentor:PhD Ivana Štajner-Papuga, Full Professor, Faculty of Natural Sciences,
Member:PhD Zagorka Lozanov-Crvenković, Full Professor, Faculty of Natural Sciences.