Универзитет у Новом Саду
Пиродно-математички факултет
Департман за математику и информатику

Милан Спајић

Оператори на Хилбертовим просторима

Мастер рад

Ментор:
др Ивана Којновић

2024, Нови Сад

Предговор

Међу својим многобројним доприносима развоју математике, немачки математичар Давид Хилберт (1862 – 1943) познат је по свом пионирском раду у области функционалне анализе. Један од камена темељаца функционалне анализе је појам Хилбертовог простора, настао из Хилбертовог напора да генерализује концепт еуклидског простора на бесконачно димензионални простор. Теорија Хилбертовог простора коју су Хилберт и други развили (а самим тим и операторе на Хилбертовим просторима) не само да је у великој мери обогатила свет математике, већ се показала изузетно корисном у развоју научних теорија, посебно квантне механике. Нпр., способност третирања функција као вектора у Хилбертовом простору, омогућила је квантним физичарима да реше диференцијалне и интегралне једначине коришћењем „само“ рачуна алгебре. Штавише, теорија и нотација Хилбертовог простора толико је постала укорењена у свету квантне механике да се често користи да опише много занимљиве појаве, укључујући ЕПР парадокс и квантну телепортацију.

Рад се састоји из три поглавља.

У првом поглављу бавимо се Хилбертовим простором и овај део је уводног карактера. Уводимо дефиниције скаларног производа и дајемо дефиниције пред–Хилбертовог и Хилбертовог простора. Настављамо геометријом Хилбертовог простора, бавимо се ортогоналношћу. У оквиру ортогоналности доказујемо Питагорину теорему и закон паралелограма. Закон паралелограма је значајан јер је потребан услов да Банахов простор буде Хилбертов простор. Доказујемо теореме о најближем елементу и ортогоналној пројекцији елемента, као и Рисову теорему о представљању. У последњем делу овог поглавља бавимо се ортонормираним базама, изоморфизмом и директним сумама Хилбертовог простора.

У другом поглављу бавимо се операторима на Хилбертовом простору. Дајемо дефиниције и основне особине оператора на Хилбертовом простору. Дефинишемо појам сесквилинеарне форме и показујемо њене особине, која је битна за проучавање оператора. Потом се бавимо адјугованим, хермитским, нормалним и унитарним операторима. За крај овог поглавља уводимо Компактне операторе, појам сопствених вредности оператора и Хилберт–Шмитове операторе и показујемо особине које важе за њих.

У последњем поглављу ћемо показати Лакс–Милграм теорему. Уводимо појам слабих решења диференцијалних једначина и примере једначина које дају мотивацију за увођење слабих решења. На крају приказаћемо примену Лакс–Милграм теореме на доказ постојања и јединствености слабих решења елиптичних проблема.

Захвалност

Прво, желео бих да се захвалим свом ментору др Ивани Војновић, на времену и труду утрошеном на коментарима и сугестијама током израде овог мастер рада. Ваша објашњења и помоћ су били кључни за моје разумевање ове теме и мој раст као математичара. Такође, бих да се захвалим члановима комисије др Маји Јолић и др Бориши Кузељевићу за детаљно читање и предлоге које сте ми дали.

Својој породици изражавам бескрајну захвалност. Мојим родитељима за сву љубав и подршку коју су ми дали, као и веру у своје могућности које су ми усадили.

Нови Сад, 2024.
Милан Спајић

Садржај

1 Хилбертов простор

1.1 Основни појмови - Хилбертов простор

Дефиниција 1.1.0.1. *Нека је X непразан скуп чије ћемо елементе $x, y, z, \ldots$ називати векторима или тачкама и нека је F скуп свих реалних или скуп свих комплексних бројева чије ћемо елементе $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \ldots$ називати скаларима. Пар (X, F) образује линеарни векторски простор или, краће, векторски простор (реалан или комплексан, према томе који скуп скалара F је у питању), ако је снабдевен следећом алгебарском структуром:*

1. *Сваком уређеном пару (x, y) вектора из X одговара један трећи вектор у X - њихов збир, који означавамо са $x + y$. Операцију која уређеном пару вектора (x, y) придружује вектор $x + y$ називамо сабирање вектора $(+ : X \times X \to X)$.*

2. *Сваком вектору x из X и сваком скалару λ из F одговара један други вектор у X - производ вектора x и скалара λ, који означавамо са λx. Операцију која вектору x и скалару λ придружује вектор λx називамо множење скаларом $(\cdot : F \times X \to X)$.*

За сабирање и множење скаларом важе ови аксиоми:

1. Сабирање је комутативно: $x + y = y + x$.
2. Сабирање је асоцијативно: $x + (y + z) = (x + y) + z$.
3. У X постоји нула-вектор 0 такав да је $x + 0 = x$ за свако $x \in X$.
4. Сваком вектору $x \in X$ одговара у X симетричан (супротан) вектор који означавамо са $-x$, такав да је $x + (-x) = 0$.
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.
7. Множење скаларом је асоцијативно: $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
8. $1 \cdot x = x$, где је 1 јединица из F.

Аксиоми 1.), 2.), 3.) и 4.) нам говоре да је $(X, +)$ комутативна (Абелова) група.

Дефиниција 1.1.0.2. *Нека је X векторски простор над F, а полу-унутрашњи производ на X је функција $u : X \times X \to F$ тако да за свако $\alpha, \beta \in F$, $x, y \in X$, следећи услови су еквивалентни:*

1. *$u(\alpha x + \beta y, z) = \alpha u(x, z) + \beta u(y, z)$.*
2. *$u(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} u(x, y) + \overline{\beta} u(x, z)$.*
3. *$u(x, x) \geq 0$.*
4. *$u(x, y) = \overline{u(y, x)}$.*

За $\alpha \in F$, $\alpha = \overline{\alpha}$ ако је $F = \mathbb{R}$. $\overline{\alpha}$ је комплексни конјугат од α ако је $F = \mathbb{C}$.

Ако $\alpha \in \mathbb{C}$, имамо да $\alpha \geq 0$ значи да $\alpha \in \mathbb{R}$ и α је ненегативно.

Напоменимо да ако је $\alpha = 0$, особина 1) из дефиниције имплицира да $u(0, y) = u(\alpha \cdot 0, y) = \alpha u(0, y) = 0$ за свако $y \in X$. На основу овога можемо закључити да за полу-унутрашњи производ важи: $u(x, 0) = u(0, y) = 0$ за свако $x, y \in X$. Заправо, $u(0, 0) = 0$.

Унутрашњи производ на X је полу-унутрашњи производ који задовољава још један услов: Ако $u(x, x) = 0$, тада $x = 0$.

Унутрашњи производ означаваћемо са $\langle x, y\rangle = u(x, y)$. Ово није универзална ознака за унутрашњи производ. У некој другој литератури се може наићи на ознаке (x, y) и $(x \mid y)$.

Пример 1.1.0.3. *Нека је $F^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in F\}$ скуп свих уређених n-торки елемената из F. Ако се сабирање елемената из F^n и множење елемената из F^n са елементима из F дефинишу на следећи начин:*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

$$\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n), \quad \alpha \in F,$$

онда је F^n векторски простор над F.

Са $(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}$ дефинишемо скаларни производ на F. Особине (1), (2) и (4) се непосредно проверавају. Проверићемо особине (3) и (5):

- *(3) : $(a, a) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a_i} = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \geq 0$;*
- *(5) : Ако је $(a, a) = 0$, онда следи да је $a = 0$.*

Аналоган је поступак ако посматрамо само R^n, с тим што скаларни производ дефинишемо са $(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Лема 1.1.0.4 (Коши - Буњаковски - Шварц неједнакост)**.** *Ако је $\langle\cdot, \cdot\rangle$ полу-унутрашњи производ на X, тада*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

за свако $x, y \in X$. Шта више, једнакост се јавља ако скалари α и β нису нуле, тако да $\langle \beta x + \alpha y, \beta x + \alpha y\rangle = 0$.

Доказ. Ако је $\alpha \in F$, на основу дефиниције 1.1.0.2 под 1.) и 2.) имамо да важи

$$\langle \alpha y, \alpha y\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle y, y\rangle = |\alpha|^2\langle y, y\rangle.$$

Из дефиниције 2. (под 3.):

$$\begin{aligned}0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y\rangle &= \langle x, x\rangle + \langle x, \alpha y\rangle + \langle \alpha y, x\rangle + \langle \alpha y, \alpha y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \alpha\langle y, x\rangle + \langle \alpha y, \alpha y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\mathrm{Re}(\overline{\alpha}\langle x, y\rangle) + |\alpha|^2\langle y, y\rangle.\end{aligned}$$

Бирамо α тако да од средњег члана направимо $|\langle x,y\rangle|$. Нека је $\alpha = -\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle}$ (приметимо да за $y=0$, неједнакост важи и у том случају α није коректно изабрано).

$$\langle x,x\rangle - 2\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle}\cdot\langle x,y\rangle\right) + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle^2}\cdot\langle y,y\rangle$$

$$\langle x,x\rangle - 2\mathrm{Re}\left(\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}\right) + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}$$

$$\langle x,x\rangle - 2\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} = \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}.$$

$$0 \le \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}.$$

$$\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} \le \langle x,x\rangle.$$

$$|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$

Једнакост се достиже ако су x и y линеарно зависни.

Из $|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$, акко $y=0$ или $\langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle = 0$ за $x=-\alpha y$.

□

Пропозиција 1.1.0.5. *Ако је* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *полу-унутрашњи производ на* X *и* $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ *за свако* x *из* X*, тада:*

а.) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$*, за* $x,y\in X$*.*

б.) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$*, за* $\alpha\in F$*,* $x\in X$*.*

Ако је $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *унутрашњи производ, тада*

в.) $\|x\| = 0$ *имплицира* $x=0$*.*

Доказ. а.) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$

$$= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

На основу Коши - Буњаковски - Шварц неједнакости важи

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \le |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|$$

$$= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

Коначно добијамо $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

б.) $\langle\alpha x,\alpha x\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle x,x\rangle = |\alpha|^2\langle x,x\rangle$, када коренујемо почетак и крај добијамо $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

в.) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle^{1/2} = 0$, када квадрирамо следи да је $\langle x,x\rangle = 0$ из чега следи да је $x=0$

□

Ако је $\langle\cdot,\cdot\rangle$ полу - унутрашњи производ на X и ако $x, y \in X$, идентитет

$$\|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$$

назива се **поларни идентитет**. Једнакост $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ за унутрашњи производ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ се назива норма од X.

Дефиниција 1.1.0.6. *Нека је $X \neq \emptyset$ и $d : X \times X \to [0, \infty)$ тако да важе следећи услови:*
1.) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.) За све $x, y \in X$ је $d(x, y) = d(y, x)$ (симетричност)
3.) За све $x, y, z \in X$ важи неједнакост $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ која се назива неједнакост троугла

Тада кажемо да је пресликавање d метрика на скупу X, а $d(x, y)$ је растојање тачака x и y. Пар (X, d) је метрички простор.

Особина норме на векторском простору X је да $d(x, y) = \|x - y\|$ дефинише метрику на X, па X постаје ***Метрички простор***.

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$$

Остала својства метрике се показују слично.

Дефиниција 1.1.0.7. *Линеарни векторски простор снабдевен скаларним производом назива се пред-Хилбертов простор.*

Пример 1.1.0.8. *1.) $(\mathbb{R}^m, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, где је*

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$$

$$x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$

2.) Скуп непрекидних функција $C[a, b]$ (са вредностима у скупу $\mathbb{C}$) у којем је дефинисан скаларни производ $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$, где су $f, g \in C[a, b]$.

Дефиниција 1.1.0.9. *пред-Хилбертов простор који је комплетан назива се* ***Хилбертов простор***.

Пример 1.1.0.10. *1.) Нека је I било који скуп и са $l^2(I)$ означимо скуп свих функција $\chi : I \to F$ тако да $\chi(i) = 0$ за сваки пребројив број i и $\sum_{i\in I} |\chi(i)|^2 < \infty$. За $x, y \in l^2(I)$ дефинишимо*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} x(i)\overline{y(i)}$$

тада је $l^2(I)$ Хилбертов простор.

2.) Нека је $\mathcal{H}$ колекција свих апсолутно непрекидних функција $f : [0, 1] \to F$, тако да $f(0) = 0$ и $f' \in L^2(0, 1)$. Ако је

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'(t)\overline{g'(t)}dt$$

за $f, g \in \mathcal{H}$, тада је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор.

Пропозиција 1.1.0.11. *Ако је X векторски простор и $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ је унутрашњи производ на X и ако је Y комплементирање од X у односу на метрику индуковану нормом на X, онда постоји унутрашњи производ $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$ на Y тако да је $\langle x, y\rangle_Y = \langle x, y\rangle_X$ за $x, y \in X$ и метрика на Y индукована унутрашњим производом. Односно, комплементирање од X је Хилбертов простор.*

Претходна пропозиција каже да се некомплетни унутрашњи производ може комплементирати до Хилбертовог простора.

1.2 Ортогоналност

Највећа предност Хилбертовог простора је његов концепт *ортогоналности*.

Дефиниција 1.2.0.1. *Ако је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор и $f, g \in \mathcal{H}$, тада су f и g ортогонални ако $\langle f, g\rangle = 0$, у ознаци $f \perp g$. Ако је $A, B \subseteq \mathcal{H}$, тада је $A \perp B$ ако је $f \perp g$ за свако f из A и свако g из B.*

Теорема 1.2.0.2 (Питагорина теорема)**.** *Ако су $f_1, f_2, \ldots, f_n$ у пару ортогонални вектори у $\mathcal{H}$ тада*

$$\|f_1 + f_2 + \ldots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \ldots + \|f_n\|^2$$

Доказ. Ако је $f_1 \perp f_2$,

$$\begin{aligned}\|f_1 + f_2\|^2 = \langle f_1 + f_2, f_1 + f_2\rangle &= \langle f_1, f_1\rangle + \langle f_1, f_2\rangle + \langle f_2, f_1\rangle + \langle f_2, f_2\rangle \\ &= \|f_1\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle f_1, f_2\rangle + \|f_2\|^2 \\ &= \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2, \text{ за } n = 2\end{aligned}$$

Индукцијом се показује да важи

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} f_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{N}\|f_n\|^2 + \sum_{\substack{n,m=1\\ m\neq n}}^{N}\langle f_m, f_n\rangle = \sum_{n=1}^{N}\|f_n\|^2$$

□

Напомена: Ако је $f \perp g$, тада $f \perp -g$, па је

$$\|f_1 - f_2\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2$$

Лема 1.2.0.3 (Закон паралелограма)**.** *Ако је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор и $f, g \in \mathcal{H}$, тада*

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

Доказ. За било које $f, g \in \mathcal{H}$ поларни идентитет имплицира

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle f, g\rangle + \|g\|^2 \quad (1)$$
$$\|f-g\|^2 = \|f\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle f, g\rangle + \|g\|^2 \quad (2)$$

Сабирањем једнакости (1) и (2) добијамо

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

□

Примедба: Релација паралелограма је потребан услов да би Банахов простор био и Хилбертов простор. Ако у неком Банаховом простору не важи релација паралелограма, тада се у њему не може увести скаларни производ из кога би извирала норма тог простора.

Дефиниција 1.2.0.4. *Ако је $\mathfrak{X}$ било који векторски простор над F и $A \subseteq \mathfrak{X}$, тада је A конвексни скуп ако за било које x и y из A и $0 \leq t \leq 1$, $tx + (1-t)y \in A$.*

Теорема 1.2.0.5. *Ако је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор и K непразан, затворен и конвексан подскуп од $\mathcal{H}$. Тада постоји јединствена тачка $k_0 \in K$ тако да је*

$$\|h - k_0\| = dist(h, K) = \inf\{\|h-k\| : k \in K\}, \quad h \in \mathcal{H}$$

Доказ. Узимајући $K - h = \{k - h : k \in K\}$ уместо K, довољно је претпоставити да је $h = 0$. Желимо да покажемо да постоји јединствени вектор k_0 тако да важи

$$\|k_0\| = \mathrm{dist}(0, K) = \inf\{\|k\| : k \in K\}.$$

Нека је $d = \mathrm{dist}(0, K)$. Из дефиниције инфимума, постоји низ $\{k_n\}$ у K тако да $\|k_n\| \to d$. Из закона паралелограма имамо

$$\left\|\frac{k_n - k_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|k_n\|^2 + \|k_m\|^2) - \left\|\frac{k_n + k_m}{2}\right\|^2 \quad (1)$$

Пошто је K конвексан скуп, $\frac{k_n+k_m}{2} \in K$. С тога је $\left\|\frac{k_n+k_m}{2}\right\|^2 \geq d^2$. За $\epsilon > 0$, бирамо N тако да за $n \geq N$, $\|k_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{4}\epsilon^2$ (дефиниција инфимума).

Из једначине (1), ако $n, m \geq N$, имамо

$$\|k_n - k_m\|^2 < \frac{1}{2}(2d^2 + \frac{1}{2}\epsilon^2) - d^2 = \frac{1}{4}\epsilon^2$$

па је $\|k_n - k_m\| < \epsilon$ за $n, m \geq N$ и $\{k_n\}$ је Кошијев низ. Како је $\mathcal{H}$ комплетан и K је затворен, постоји $k_0 \in K$ тако да $\|k_n - k_0\| \to 0$. За свако k_n, имамо

$$d \leq \|k_0\| = \|k_0 - k_n + k_n\| \leq \|k_0 - k_n\| + \|k_n\| \to d$$

дакле, $\|k_0\| = d$.

За доказ да је k_0 јединствен, претпоставимо да $h_0 \in K$ тако да је $\|h_0\| = d$. Из конвексности $\frac{1}{2}(k_0 + h_0) \in K$. С тога,

$$d \leq \left\|\frac{1}{2}(k_0 + h_0)\right\| \leq \frac{1}{2}(\|k_0\| + \|h_0\|) = d$$

па је, $\left\|\frac{1}{2}(k_0+h_0)\right\| = d$. Закон паралелограма нам сад даје

$$d^2 = \left\|\frac{k_0+h_0}{2}\right\|^2 = d^2 - \left\|\frac{h_0-k_0}{2}\right\|^2$$

те је $k_0 = h_0$.

$\square$

Теорема 1.2.0.6. *Ако је M затворени линеарни потпростор од $\mathcal{H}$, $h \in \mathcal{H}$, и f_0 је јединствени елеменат од M тако да $\|h - f_0\| = \operatorname{dist}(h, M)$, тада $h - f_0 \perp M$. Обрнуто, ако $f_0 \in M$ тако да $h - f_0 \perp M$, тада $\|h - f_0\| = \operatorname{dist}(h, M)$.*

Доказ.

($\Rightarrow$) Претпоставимо $f_0 \in M$ и $\|h - f_0\| = \operatorname{dist}(h, M)$. Ако $f \in M$, тада $f_0 + f \in M$ и

$$\begin{aligned}\|h - f_0\|^2 \leq \|h - (f_0 + f)\|^2 &= \|(h - f_0) - f\|^2 \\ &= \|h - f_0\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle h - f_0, f\rangle + \|f\|^2 .\end{aligned}$$

Дакле, $2\mathrm{Re}\,\langle h - f_0, f\rangle \leq \|f\|^2$, за свако f из M. За фиксирано f из M и сменом $te^{i\theta}f$ за f у претходној неједнакости, где је $\langle h - f_0, f\rangle = re^{i\theta}, r \geq 0$, $2\mathrm{Re}\{te^{-i\theta}re^{i\theta}\}$ или $2tr \leq t^2\|f\|^2$. Пуштајући да $t \to 0$, видимо да је $r = 0$, те је $h - f_0 \perp f$.

($\Leftarrow$) Обрнуто, претпоставимо $f_0 \in M$ тако да $h - f_0 \perp M$. Ако $f \in M$, тада је $h - f_0 \perp f_0 - f$ па имамо

$$\|h - f\|^2 = \|(h - f_0) + (f_0 - f)\|^2 = \|h - f_0\|^2 + \|f_0 - f\|^2 \geq \|h - f_0\|^2$$

дакле, $\|h - f_0\| = \operatorname{dist}(h, M)$.

$\square$

$A \subseteq \mathcal{H}$. Нека је $A^\perp = \{f \in \mathcal{H} \mid f \perp g$ за свако g из $\mathcal{H}\}$.

$A^\perp$ је линеарни потпростор из $\mathcal{H}$.

$A^\perp$ је линеарни векторски потпростор, то следи из чињенице да је скаларни производ линеаран.

Ако је $x_1, x_2 \in A^\perp$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$, тада за све $y \in A$ важи $\langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle = 0$,

па важи

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \langle \lambda_1 x_1, y\rangle + \langle \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1 \langle x_1, y\rangle + \lambda_2 \langle x_2, y\rangle = 0 + 0 = 0$$

Да бисмо доказали да је $A^\perp$ затворен скуп, треба показати да је скаларни производ непрекидан тј. из $x_n \to x$ и $y_n \to y$ следи $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$

Ако $x_n \to x$, онда $\|x_n\| \to \|x\|$

Ако $y_n \to y$, онда $\|y_n\| \to \|y\|$

па следи да су $\|x_n\|$ и $\|y_n\|$ ограничени низови и отуда

$$\begin{aligned}\|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle\| &= \|\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle\| \\ &\le \|x_n - x\|\,\|y_n\| + \|x\|\,\|y_n - y\| \to 0\end{aligned}$$

Доказујемо да је $A^{\perp}$ затворен скуп. Ако $x_n \in S^{\perp}$ и $x_n \to x$, тада за све $y \in S$ важи $\langle x_n, y\rangle = 0$ и отуда

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = 0$$

Ако је $A = \{x\}$, једночлани скуп, тада краће пишемо $x^{\perp}$. Једноставно се проверава да је $0^{\perp} = \mathcal{H}$ (јер је за свако $x \in \mathcal{H}$, $0 \perp x$), као и да је $\mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$, јер ако $x \in \mathcal{H}^{\perp}$ тада је $x \perp x$, тј. $\langle x, x\rangle = 0$, а то је могуће само ако је $x = 0$. За било који скуп A, пресек $A \cap A^{\perp}$ може да садржи само нула вектор. Ако $x \in A \cap A^{\perp}$, онда важи и $x \perp x$ тј. $x = 0$.

Приметимо да последња теорема заједно са јединственошћу из претпоследње теореме показује да ако је M затворени линеарни потпростор у $\mathcal{H}$ и $h \in \mathcal{H}$ тада постоји јединствени елеменат f_0 у M тако да је $h - f_0 \perp M^{\perp}$. Дакле, функција $P : \mathcal{H} \to M$ може се дефинисати помоћу $Ph = f_0$

Теорема 1.2.0.7. *Ако је M затворени линеарни потпростор од $\mathcal{H}$ и $h \in \mathcal{H}$, и нека је Ph јединствена тачка у M тако да $h - Ph \perp M$. Тада:*

1. *P је линеарна трансформација на $\mathcal{H}$;*
2. *$\|Ph\| \le \|h\|$ за свако h из $\mathcal{H}$;*
3. *$P^2 = P$ (овде P^2 означава композицију P са самом собом);*
4. *$\ker P = M^{\perp}$ и $\operatorname{ran} P = M$;*

Доказ. 1. Нека је $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$. Ако $f \in M$, тада

$$\langle [\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2] - [\alpha_1 Ph_1 + \alpha_2 Ph_2], f\rangle =$$
$$\langle [\alpha_1 h_1 - \alpha_1 Ph_1] + [\alpha_2 h_2 - \alpha_2 Ph_2], f\rangle =$$
$$\langle \alpha_1 h_1 - \alpha_1 Ph_1, f\rangle + \langle \alpha_2 h_2 - \alpha_2 Ph_2, f\rangle =$$
$$\langle \alpha_1 [h_1 - Ph_1], f\rangle + \langle \alpha_2 [h_2 - Ph_2], f\rangle =$$
$$\alpha_1 \langle h_1 - Ph_1, f\rangle + \alpha_2 \langle h_2 - Ph_2, f\rangle = 0 + 0 = 0$$

На основу јединствености из последње теореме, имамо

$$P[\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2] = \alpha_1 Ph_1 + \alpha_2 Ph_2$$

2. Ако $h \in \mathcal{H}$, тада $h = (h - Ph) + Ph$, $Ph \in M$, $h - Ph \in M^{\perp}$

$$\|h\| = \|h - Ph + Ph\|$$
$$\|h\|^2 = \|h - Ph\|^2 + \|Ph\|^2 \ge \|Ph\|^2$$
$$\|h\| \ge \|Ph\|$$

3. Ако $f \in M$, тада $Pf = f$. За свако $h \in \mathcal{H}$, $Ph \in M$, па имамо

$$P^2 h = P(Ph) = Ph \text{ тј. } P^2 = P$$

4. Ако је $Ph = 0$, тада $h = h - Ph \in M^\perp$. Обрнуто, ако је $h \in M^\perp$, тада је 0 јединствени вектор у M тако да је $h = h - 0 \perp M$, дакле $Ph = 0$. Одавде следи да је $\operatorname{ran} P = M$.

$\square$

Дефиниција 1.2.0.8. *Ако је M затворени линеарни потпростор од $\mathcal{H}$ и P је линеарно пресликавање дефинисано у претходној теореми, тада се P назива ортогонална пројекција од $\mathcal{H}$ на M. Ако желимо да покажемо ову зависност P од M, означаваћемо ортогоналну пројекцију од $\mathcal{H}$ на M са P_M.*

$M \leq \mathcal{H} - M$ затворени линеарни потпростор од $\mathcal{H}$.

Термин линеарна многострукост означава линеарни потпростор од $\mathcal{H}$ који није нужно затворен.

Пропозиција 1.2.0.9. *Ако $M \leq \mathcal{H}$, тада $(M^\perp)^\perp = M$*

Пропозиција 1.2.0.10. *Ако $A \subseteq \mathcal{H}$, тада $(A^\perp)^\perp$ је затворени линеарни спан од A у $\mathcal{H}$.*

Пропозиција 1.2.0.11. *Ако је $\mathcal{B}$ линеарна многострукост, тада је $\mathcal{B}$ густ ако и само ако $\mathcal{B}^\perp = \{0\}$*

1.3 Рисова теорема о представљању

Наслов овог поглавља је донекле двосмислен јер постоје две Рисове теореме о представљању. Једна теорема говори о представљању ограничених линеарних функционала на компактном Хауздорфовом простору (о овој теореми у овом раду неће бити речи, а читаоци могу погледати [1]. У овом поглављу бавићемо се теоремом о представљању линеарних функционала на Хилбертовом простору, али ћемо прво навести дефиниције и пропозиције потребне за доказ ове теореме.

Пропозиција 1.3.0.1. *Нека је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор и $L : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ линеарни функционал. Следећа тврђења су еквивалентна:*

1. *L је непрекидна*
2. *L је непрекидна у 0*
3. *L је непрекидна у некој тачки*
4. *Постоји константа $C > 0$ тако да је $|L(h)| \leq C \|h\|$ за $\forall h \in \mathcal{H}$*

Дефиниција 1.3.0.2. *Ограничени линеарни функционал L на $\mathcal{H}$ је линеарни функционал за који постоји константа $C > 0$ тако да је $|L(h)| \leq C \|h\|$ за $\forall h \in \mathcal{H}$. На основу претходне пропозиције, линеарни функционал је ограничен ако и само ако је непрекидан.*

За ограничени линеарни функционал $L : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ дефинишемо

$$\|L\| = \sup\{|L(h)| : \|h\| \leq 1\}$$

Приметимо да из дефиниције, $\|L\| \leq \infty$;
$\|L\|$ се назива *норма* од L.

Пропозиција 1.3.0.3. *Ако је L ограничени линеарни функционал, тада*

$$\begin{aligned}\|L\| &= \sup\{|L(h)| : \|h\| = 1\}\\ &= \sup\left\{\frac{|L(h)|}{\|h\|} : h \in \mathcal{H}, h \neq 0\right\}\\ &= \inf\{c > 0 : |L(h)| \leq C\|h\|, h \in \mathcal{H}\}\end{aligned}$$

Такође, $|L(h)| \leq \|L\| \|h\|$ *за свако* $h \in \mathcal{H}$

За фиксирано $h_0 \in \mathcal{H}$ дефинишемо $L : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ са $L(h) = \langle h, h_0 \rangle$. Пошто је L дефинисано преко скаларног производа следи да је L линеаран. На основу Коши-Буњаковски-Шварц неједнакости следи да је

$$|L(h)| = |\langle h, h_0 \rangle| \leq \|h\| \|h_0\|$$

па је L ограничен и $\|L\| \leq \|h_0\|$. Заправо, $L\left(\frac{h_0}{\|h\|}\right) = \left\langle \frac{h}{\|h_0\|}, h_0 \right\rangle = h_0$, те је $\|L\| = \|h_0\|$.

Теорема 1.3.0.4 (Рисова теорема о представљању)**.** *Ако је* $L : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ *ограничени линеарни функционал, тада постоји јединствени вектор* $h_0 \in \mathcal{H}$ *тако да је* $L(h) = \langle h, h_0 \rangle$, $h \in \mathcal{H}$. *Шта више,* $\|L\| = \|h_0\|$.

Доказ. Нека је $M = \ker L$.

Због тога што је L непрекидно, M је затворени линеарни потпростор од $\mathcal{H}$.

Пошто можемо претпоставити да је $M \neq \mathcal{H}$, $M^\perp \neq \emptyset$, постоји вектор f_0 у $M^\perp$ тако да је $L(f_0) = 1$. Сада ако је $h \in \mathcal{H}$ и $\alpha = L(h)$, тада

$$L(h - \alpha f_0) = L(h) - \alpha L(f_0) = \alpha - \alpha = 0$$

па $h - L(h) f_0 \in M$.

$$0 = \langle h - L(h) f_0, f_0 \rangle = \langle h, f_0 \rangle - L(h) \|f_0\|^2$$

ако је $h_0 = \|f_0\|^2 f_0$, $L(h) = \langle h, h_0 \rangle$, за свако $h \in \mathcal{H}$. □

1.4 Ортонормирани скуп вектора и ортонормирана база

У овом поглављу, показаћемо да као и у Еуклидовом простору, у сваком Хилбертовом простору могу се увести координате. Појам који нам је потребан за увођење координате је ортонормирана база. Одговарајући вектори $\mathbb{F}^d$ су вектори $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$, где је e_k d-торка која је на k-том месту има 1, а на свим осталим има 0.

Дефиниција 1.4.0.1. *Ортонормирани подскуп од Хилбертовог простора* $\mathcal{H}$ *је подскуп* $\mathcal{E}$ *који има следеће особине:*

1. За $e \in \mathcal{E}$, $\|e\| = 1$;

2. Ако $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ *и* $e_1 \neq e_2$, *тада* $e_1 \perp e_2$.

База за $\mathcal{H}$ је <u>*максимални ортонормирани скуп*</u>.

Сваки векторски простор има *Хамелову* базу (максималан линеарно независан скуп). Термин база за Хилбертов простор дефинисан у горњој дефиницији односи се на скаларни производ на $\mathcal{H}$. За бесконачно-димензионалне Хилбертове просторе, база никад није Хамелова база.

Пропозиција 1.4.0.2. *Ако је $\mathcal{E}$ ортонормиран скуп у $\mathcal{H}$, тада постоји база за $\mathcal{H}$ који садржи $\mathcal{E}$.*

Пример 1.4.0.3. *1. Ако је $\mathcal{H} = \mathbb{F}^d$ и за $1 \leq k \leq d$, e_k је d-торка са 1 на k-том месту и са нулом свуда остало, тада је $\{e_1, \dots, e_d\}$ база за $\mathcal{H}$.*

2. Нека је $\mathcal{H} = \ell^2(I)$ као у примеру 1.1.0.10 pod 1). За свако $i \in I$ дефинишемо e_i из $\mathcal{H}$ са $e_i(i) = 1$ и $e_i(j) = 0$ за $j \neq i$. Тада је $\{e_i : i \in I\}$ база.

Лема 1.4.0.4 (Грам-Шмитов поступак ортогонализације)**.** *Ако је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор и $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ је линеарно независан подскуп од $\mathcal{H}$, тада постоји ортонормирани скуп $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ тако да за свако n линеарни простор од $\{e_1, \dots, e_n\}$ једнак је линеарном спану од $\{h_1, \dots, h_n\}$.*

Пропозиција 1.4.0.5. *Нека је $\{e_1, \dots, e_n\}$ ортонормирани скуп у $\mathcal{H}$ и нека је $M = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Ако је P ортогонална пројекција од $\mathcal{H}$ на M, тада $Ph = \sum_{k=1}^n \langle h, e_k \rangle e_k$ за свако $h \in \mathcal{H}$.*

Доказ. Нека је $Qh = \sum_{k=1}^n \langle h, e_k \rangle e_k$.

Тада за $1 \leq j \leq n$, $\langle Qh, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n \langle h, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle h, e_j \rangle$, пошто је $e_k \perp e_j$ за $k \neq j$.

Имамо да је $\langle Qh, e_j \rangle = \langle h, e_j \rangle \Leftrightarrow \langle h - Qh, e_j \rangle = 0$ за $1 \leq j \leq n$, те је $h - Qh \perp M$ за свако $h \in \mathcal{H}$. Пошто је сада Qh вектор из M, онда је Qh јединствени вектор h_0 из M тако да је $h - h_0 \perp M$. Стога, $Qh = Ph$ за свако $h \in \mathcal{H}$.

□

Лема 1.4.0.6 (Беселова неједнакост)**.** *Ако је $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ортонормирани скуп и $h \in \mathcal{H}$, тада*

$$\sum_{n=1}^{\infty} | \langle h, e_n \rangle |^2 \leq \|h\|^2$$

Доказ. Нека је $h_n = h - \sum_{k=1}^n \langle h, e_k \rangle e_k$. Тада је $h_n \perp e_k$ за $1 \leq k \leq n$. На основу Питагорине теореме:

$$\|h\|^2 = \|h_n\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n \langle h, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|h_n\|^2 + \sum_{k=1}^n | \langle h, e_k \rangle |^2 \geq \sum_{k=1}^n | \langle h, e_k \rangle |^2$$

пошто је n произвољно, резултат је доказан. □

Последица 1.4.0.7. *Ако је $\mathcal{E}$ ортонормирани скуп у $\mathcal{H}$ и $h \in \mathcal{H}$, тада $\langle h, e \rangle \neq 0$ за највише пребројив број вектора e у $\mathcal{E}$.*

Последица 1.4.0.8. *Ако је $\mathcal{E}$ ортонормирани скуп и $h \in \mathcal{H}$, тада*

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} | \langle h, e \rangle |^2 \leq \|h\|^2$$

Последње две последице дају нам да у Беселовој неједнакости највише пребројив број чланова у збиру разликују се од нуле. За збир који се појављује у последњој последици може се дати боља математичка интерпретација. Питање је, шта се мисли под $\sum\{h_i : i \in I\}$ ако $h_i \in \mathcal{H}$ и I бесконачан, можда непребројив, скуп?

Нека је $\mathcal{F}$ колекција свих коначних подскупова од I. За свако $F \in \mathcal{F}$, дефинисано је $h_F = \sum\{h_i : i \in F\}$. Пошто је ова сума коначна, h_F је добро дефинисан елемент од $\mathcal{H}$. $\{h_F : F \in \mathcal{F}\}$ низ у $\mathcal{H}$.

Дефиниција 1.4.0.9. *$\sum\{h_i : i \in F\}$ конвергира ако низ $\{h_F : F \in \mathcal{F}\}$ конвергира. Вредност суме је граница низа.*

Сада последња последица има прецизније значење. $\sum\{| \langle h, e\rangle |^2 : e \in \mathcal{E}\}$ конвергира у $\mathcal{H}$.

Лема 1.4.0.10. *Ако је $\mathcal{E}$ ортонормирани скуп и $h \in \mathcal{H}$, тада $\sum\{\langle h, e\rangle e : e \in \mathcal{E}\}$ конвергира у $\mathcal{H}$.*

Доказ. На основу последице 1.4.0.8 постоје вектори $e_1, e_2, \ldots$ у $\mathcal{E}$ тако да

$$\{e \in \mathcal{E} : \langle h, e\rangle \neq 0\} = \{e_1, e_2, \ldots\}$$

Такође, имамо да важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} | \langle h, e_n\rangle |^2 \leq \|h\|^2 < \infty$$

Ако је $\epsilon > 0$, постоји N тако да

$$\sum_{n=N}^{\infty} | \langle h, e_n\rangle |^2 < \epsilon^2$$

Нека је $F_0 = \{e_1, \ldots, e_{N-1}\}$ и нека је $\mathcal{F}$ - сви коначни подскупови од $\mathcal{E}$.

За $F \in \mathcal{F}$, дефинишимо $h_F = \sum\{\langle h, e\rangle e : e \in F\}$. Ако су $F, G \in \mathcal{F}$ и оба садрже F_0, тада

$$\|h_F - h_G\|^2 = \sum\{| \langle h, e\rangle |^2 : e \in (F \setminus G) \cup (G \setminus F)\} \leq \sum_{n=N}^{\infty} | \langle h, e_n\rangle |^2 < \epsilon^2$$

следи да је $\{h_F : F \in \mathcal{F}\}$ Кошијев низ у $\mathcal{H}$. Због овога је $\mathcal{H}$ комплетан простор и овај низ конвергира, тј. конвергира ка $\sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n\rangle e_n$.

□

Теорема 1.4.0.11. *Ако је $\mathcal{E}$ ортонормирани скуп у $\mathcal{H}$, тада су следећи услови еквивалентни:*

а) $\mathcal{E}$ је база за $\mathcal{H}$

б) Ако $h \in \mathcal{H}$ и $h \perp \mathcal{E}$, тада $h = 0$

в) $\vee\mathcal{E} = \mathcal{H}$

г) Ако $h \in \mathcal{H}$, тада $h = \sum\{\langle h, e\rangle e : e \in \mathcal{E}\}$

д) Ако су $g, h \in \mathcal{H}$, тада $\langle g, h\rangle = \sum\{\langle g, e\rangle \langle e, h\rangle : e \in \mathcal{E}\}$

ђ) Ако $h \in \mathcal{H}$, тада $\|h\|^2 = \sum\{|\langle h, e\rangle|^2 : e \in \mathcal{E}\}$

(<u>Парсевалова једнакост</u>)

Доказ.

а) $\Rightarrow$ б): Претпоставимо $h \perp \mathcal{E}$ и $h \neq 0$, тада $\mathcal{E} \cup \left\{\frac{h}{\|h\|}\right\}$ је ортонормиран скуп који садржи $\mathcal{E}$, контрадикција са максималношћу.

б) $\Rightarrow$ в): На основу пропозиције 1.2.0.11 важи $\vee\mathcal{E} = \mathcal{H}$ ако и само ако $\mathcal{E}^\perp = \{0\}$

б) $\Rightarrow$ г): Ако $h \in \mathcal{H}$, тада је $f = h - \sum\{\langle h, e\rangle e : e \in \mathcal{E}\}$ добро дефинисан вектор на основу леме 1.4.0.10 Ако је $e_1 \in \mathcal{E}$, тада

$$\langle f, e_1\rangle = \langle h, e_1\rangle - \sum\{\langle h, e\rangle \langle e, e_1\rangle : e \in \mathcal{E}\} = 0$$

То је, $f \in \mathcal{E}^\perp$. Стога је $f = 0$.

г) $\Rightarrow$ д): Искористићемо чињеницу да је скаларни производ непрекидан.

$$\begin{aligned}\langle h, g\rangle &= \left\langle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle h, e_k\rangle e_k, \lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n}\langle g, e_l\rangle e_l \right\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k,l=1}^{n}\langle h, e_k\rangle \overline{\langle g, e_l\rangle} \langle e_k, e_l\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle h, e_k\rangle \overline{\langle g, e_k\rangle}\end{aligned}$$

тј. важи

$$\begin{aligned}\langle g, h\rangle &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\overline{\langle h, e_k\rangle} \langle g, e_k\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle e_k, h\rangle \langle g, e_k\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle g, e_k\rangle \langle e_k, h\rangle\end{aligned}$$

д) $\Rightarrow$ ђ): Ово имамо директно јер $\|h\|^2 = \langle h, h\rangle$.

ђ) $\Rightarrow$ а): Ако $\mathcal{E}$ није база, тада постоји јединични вектор e_0 ($\|e_0\| = 1$) у $\mathcal{H}$ тако да $e_0 \perp \mathcal{E}$. С тога, $0 = \sum\{|\langle e_n, e\rangle|^2 : e \in \mathcal{E}\}$, контрадикција са ђ).

□

Баш као и у коначно-димензионалним просторима, база у Хилбертовом простору се може користити за дефинисање концепта димензије. У ту сврху следећи резултат је кључан.

Пропозиција 1.4.0.12. *Ако је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор, било које две базе имају исту кардиналност.*

Доказ. Нека су $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ две базе за $\mathcal{H}$. Означимо са n и m кардиналност $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, редом.

У случају да су m и n коначни, следи да је $m = n$ (за доказ овог дела погледати нпр. [7]). Претпоставимо да су m и n бесконачни непребројиви. За $e \in \mathcal{E}$, нека је

$$\mathcal{F}_e = \{f \in \mathcal{F} : \langle f, e \rangle \neq 0\}$$

На основу последице 1.4.0.7, следи да је $\mathcal{F}_e$ пребројив.

На основу 1.4.0.11 под б), сваки $f \in \mathcal{F}$ припада најмање једном скупу $\mathcal{F}_e$, $e \in \mathcal{E}$. То је, $\mathcal{F} = \bigcup\{\mathcal{F}_e : e \in \mathcal{E}\}$. Следи да је, $n \leq m \cdot \aleph_0 = m$ (јер је $\mathcal{F}_e$ пребројив, па на основу операција са $\aleph_0$ и $\mathfrak{c}$ важи да је $\mathfrak{c} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{c}$). Слично се доказује да је $m \leq n$ (само се замене улоге m и n).

На основу Кантор-Бернштајн теореме следи да је $m = n$. (**Кантор-Бернштајн теорема**: Ако је скуп A еквивалентан једном делу скупа B, и ако је обрнуто, скуп B еквивалентан једном делу скупа A, тада су скупови A и B еквивалентни.)

□

Дефиниција 1.4.0.13. *Димензија Хилбертовог простора је кардиналност базе и означава се са* $\dim \mathcal{H}$.

Метрички простор (X, d) је сепарабилан ако постоји пребројив густ скуп у X.

$\{B_i = B(x_i, \epsilon_1) : i \in I\}$ је колекција у пару дисјунктних отворених лопти у X, тада I мора бити пребројив. Заиста, ако је D пребројив густ подскуп од X, $B_i \cap D \neq \emptyset$ за свако $i \in I$, тада постоји тачка x_i у $B_i \cap D$. $\{x_i : i \in I\}$ је подскуп од D и I је пребројив скуп.

Пропозиција 1.4.0.14. *Ако је $\mathcal{H}$ бесконачан-димензионалан Хилбертов простор, тада је $\mathcal{H}$ сепарабилан ако и само ако* $\dim \mathcal{H} = \aleph_0$.

Доказ.

($\Rightarrow$) Нека је $\mathcal{E}$ база од $\mathcal{H}$. Ако $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$, тада $\|e_1 - e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 = 2$. С тога $\{B(e; \frac{1}{\sqrt{2}}) : e \in \mathcal{E}\}$ је колекција у пару дисјунктних отворених лопти у $\mathcal{H}$, на основу претпоставке да је $\mathcal{H}$ сепарабилан имплицира да је $\mathcal{E}$ пребројив.

($\Leftarrow$) Обрнуто, претпоставимо да у $\mathcal{H}$ постоји највише пребројива база $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Означимо са E скуп линеарних комбинација

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

где су $\alpha_m, i = 1, \ldots, n$ комплексни бројеви облика $\alpha_m = a_m + ib_m$, а a_m и b_m рационални бројеви. На основу пропозиције 1.4.0.11 под г), сваком $\epsilon > 0$ и сваком $e \in E$ одговара природни број n тако да је

$$\left\| e - \sum_{m=1}^{n} \langle e, e_m \rangle e_m \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

бројеве α_m одредимо тако да је

$$\left\|\sum_{m=1}^{n}(\langle e, e_m\rangle - \alpha_m)e_m\right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

тада је вектор

$$z = \sum_{m=1}^{n}\alpha_m e_m \in E \text{ и } \|e - z\| < \epsilon$$

што значи да је E густ у $\mathcal{H}$. Како је E највише пребројив, простор $\mathcal{H}$ је сепарабилан.

□

1.5 Изоморфизам Хилбертових простора и директна сума Хилбертових простора

1.5.1 Изоморфизам Хилбертових простора

Свака математичка теорија има концепт изоморфизма. У топологији постоји хомеоморфизам и хомотопска еквиваленција, алгебра ово назива изоморфизам. Основна идеја је дефинисати пресликавање које чува основну структуру простора.

Дефиниција 1.5.1.1. *Ако су $\mathcal{H}$ и $\mathcal{L}$ Хилбертови простори, изоморфизам између $\mathcal{H}$ и $\mathcal{L}$ је линеарна сирјекција $U : \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ тако да је $\langle Uh, Ug\rangle = \langle h, g\rangle$ за све $h, g \in \mathcal{H}$. У овом случају за $\mathcal{H}$ и $\mathcal{L}$ кажемо да су изоморфни.*

Треба приметити да ако је $U : \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ изоморфизам, тада је $U^{-1} : \mathcal{L} \to \mathcal{H}$. На основу овога и сличних аргумената можемо рећи да је изоморфност релација еквиваленције на Хилбертовом простору. Релација еквиваленције је добро дефинисана зато што је суштински „састојак“ Хилбертовог простора и изоморфни Хилбертови простори имају исти унутрашњи производ. Неко може дати примедбу да је и комплетност битан део Хилбертовог простора али и то је сачувано изоморфизмом. Изометрија између метричких простора је пресликавање које чува растојање.

Пропозиција 1.5.1.2. *Ако је $V : \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ линеарно пресликавање између Хилбертових простора, тада је V изометрија ако и само ако $\langle Vh, Vg\rangle = \langle h, g\rangle$ за свако $h, g \in \mathcal{H}$.*

Доказ.

($\Leftarrow$) Претпоставимо $\langle Vh, Vg\rangle = \langle h, g\rangle$ за свако $h, g \in \mathcal{H}$. Тада

$$\|Vh\|^2 = \langle Vh, Vh\rangle = \langle h, h\rangle = \|h\|^2$$

и следи да је V изометрија.

($\Rightarrow$) Сада претпоставимо да је V изометрија. Ако $h, g \in \mathcal{H}$ и $\alpha \in \mathbb{F}$

$$\|h + \alpha g\| = \|Vh + \alpha Vg\| \quad (1)$$

На (1) применимо поларни идентитет на обе стране једнакости.

$$\|h\|^2 + 2\mathrm{Re}\overline{\alpha}\,\langle h, g\rangle + |\alpha|^2\,\|g\|^2 = \|Vh\|^2 + 2\mathrm{Re}\overline{\alpha}\,\langle Vh, Vg\rangle + |\alpha|^2\,\|Vg\|^2$$

пошто имамо да је $\|Vh\| = \|h\|$ и $\|Vg\| = \|g\|$,

$$2\mathrm{Re}\overline{\alpha}\,\langle h, g\rangle = 2\mathrm{Re}\overline{\alpha}\,\langle Vh, Vg\rangle$$

Ако је $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, онда узмемо да је $\alpha = 1$ и добијамо тражено.

Ако је $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, онда узмемо да је $\alpha = 1$, а затим $\alpha = i$ да нађемо $\langle h, g\rangle$ и $\langle Vh, Vg\rangle$ који имају исте реалне и имагинарне делове.

□

Напомена: Изометрија између метричких простора пресликава Кошијеве низове у Кошијеве низове. Тада изоморфизам такође чува комплетност.

Пример 1.5.1.3. *Дефинишимо $S : \ell^2 \to \ell^2$ са $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Тада је S изометрија која није сирјективна. Овај пример показује да изометрија не мора бити изоморфизам.*

Теорема 1.5.1.4. *Два Хилбертова простора су изоморфна ако и само ако имају исту димензију.*

Доказ. ($\Rightarrow$) Нека је $\mathcal{H}$ изоморфан са $\mathcal{L}$ и $U : \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ изоморфизам, тада база из $\mathcal{H}$ има своју слику која је такође база. Пошто је U бијективно, можемо закључити да свака база из $\mathcal{H}$ се пресликава у базу из $\mathcal{L}$. С тога $\mathcal{H}$ и $\mathcal{L}$ имају исту кардиналност.

($\Leftarrow$) Претпоставимо да $\mathcal{H}$ и $\mathcal{L}$ имају базу исте кардиналности. У случају $\mathcal{H} = \{0\}$ и $\mathcal{L} = \{0\}$, ово очигледно важи. Претпоставимо да је $\mathcal{H} \neq \{0\}$ и $\mathcal{L} \neq \{0\}$. Нека је $\mathcal{E}$ база за $\mathcal{H}$ и $\mathcal{B}$ база за $\mathcal{L}$. Пошто су исте кардиналности, узмимо да је $\mathcal{E} = (e_k)$ и $\mathcal{B} = (\overline{e_k})$. Да би показали да су $\mathcal{H}$ и $\mathcal{L}$ изоморфни, треба да конструишемо изоморфизам између њих. За свако $x \in \mathcal{H}$ имамо да је

$$x = \sum_k \langle x, e_k\rangle\, e_k \quad (1)$$

где је десна страна коначна сума или бесконачан низ и $\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 < \infty$ на основу Беселове неједнакости. Дефинишимо

$$\bar{x} = Ux = \sum_k \langle x, e_k\rangle\, \bar{e}_k \quad (2)$$

знамо да конвергира на основу леме 1.4.0.10, па је зато $\bar{x} \in \mathcal{L}$. U је линеаран пошто је унутрашњи (скаларни) производ линеаран по првој компоненти. U је изометрија на основу (1) и (2):

$$\|\bar{x}\|^2 = \|Ux\|^2 = \sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2$$

На основу овога следи да U чува унутрашњи производ. Шта више, изометрија имплицира инјекцију. Заправо, ако је $Tx = Ty$, тада

$$\|x - y\| = \|U(x - y)\| = \|Ux - Uy\| = 0$$

па је $x = y$ и U је инјективно.

Показујемо да је U сирјективно.

$$\bar{x} = \sum \alpha_k \bar{e}_k \text{ у } \mathcal{L}$$

имамо да је $\sum |\alpha_k|^2 < \infty$ на основу Беселове неједнакости. С тога $\sum_k \alpha_k e_k$ је коначна сума или низ који конвергира ка $x \in \mathcal{H}$ и $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$. Сада имамо да је $\bar{x} = Ux$ на основу (2). Пошто је $\bar{x} \in \mathcal{L}$ произвољан, па имамо да је U сирјективно.

□

1.5.2 Директна сума на Хилбертовим просторима

Претпоставимо да су $\mathcal{H}$ и $\mathcal{R}$ Хилбертови простори. Ми желимо да дефинишемо $\mathcal{H} \oplus \mathcal{R}$ тако да је и ово Хилбертов простор. То није тежак задатак. За сваки векторски простор X и Y, $X \oplus Y$ је дефинисан као Декартов производ где су операције дефинисане на $X \times Y$ (по координатама). Ако су елементи од $X \oplus Y$ дефинисани као $\{x \oplus y : x \in X, y \in Y\}$, тада

$$(x_1 \oplus y_1) + (x_2 \oplus y_2) = (x_1 + x_2) \oplus (y_1 + y_2).$$

Дефиниција 1.5.2.1. *Ако су $\mathcal{H}$ и $\mathcal{R}$ Хилбертови простори,*

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{R} = \{h \oplus k : h \in \mathcal{H}, k \in \mathcal{R}\}$$

$$\langle h_1 \oplus k_1, h_2 \oplus k_2 \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle + \langle k_1, k_2 \rangle$$

Мора се показати да ово дефинише унутрашњи производ на $\mathcal{H} \oplus \mathcal{R}$ и да је $\mathcal{H} \oplus \mathcal{R}$ комплетан. Шта се дешава када желимо да дефинишемо $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots$ за низ Хилбертових простора $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots$? Постоји проблем око комплетности ако је у питању бесконачна директна сума, али то се може превазићи на следећи начин.

Пропозиција 1.5.2.2. *Ако су $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots$ Хилбертови простори, нека је*

$$\mathcal{H} = \left\{ (h_n)_{n=1}^{\infty} : h_n \in \mathcal{H}_n \text{ за свако } n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 < \infty \right\}$$

за $h = (h_n)$ и $g = (g_n)$ у $\mathcal{H}$, дефинишемо

$$\langle h, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h_n, g_n \rangle \tag{1}$$

Тада је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ унутрашњи производ на $\mathcal{H}$ и норма у односу на унутрашњи производ је

$$\|h\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Са овим унутрашњим производом $\mathcal{H}$ је Хилбертов простор.

Доказ. Ако $h = (h_n)$ и $g = (g_n) \in \mathcal{H}$, тада на основу Коши-Буњаковски-Шварц неједнакости имамо да је

$$\sum |\langle h_n, g_n \rangle| \leq \sum \|h_n\| \, \|g_n\| \leq \left(\sum \|h_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum \|g_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

С тога низ из (1) конвергира апсолутно. Да је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ унутрашњи производ, доказује се директно по дефиницији (користи се чињеница да је $\mathcal{H}_n$ Хилбертов простор), а да је $\mathcal{H}$ комплетан простор се доказује тако што се покаже да сваки Кошијев низ има границу. $\square$

Дефиниција 1.5.2.3. *Ако су $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$ Хилбертови простори, простор $\mathcal{H}$ из претходне пропозиције се назива* <u>*директна сума*</u> *од $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$ и означава се са*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots$$

Ово је део општијег процеса. Ако је $\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ колекција Хилбертових простора, $\mathcal{H} = \bigoplus \{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ је дефинисан као колекција функција $h : I \to \bigcup \{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ тако да је $h(i) \in \mathcal{H}_i$ за свако i и $\sum \left\{ \|h(i)\|^2 : i \in I \right\} < \infty$

Ако су $h, g \in \mathcal{H}$,

$$\langle h, g \rangle = \sum \{ \langle h(i), g(i) \rangle : i \in I \}$$

$\mathcal{H}$ је Хилбертов простор. Главни разлог за разматрање директних сума је што „изграђује“ операторе на Хилбертовим просторима. Многа питања о линеарним операторима на Хилбертовим просторима су неразјашњена.

2 Оператори на Хилбертовим просторима

Велико подручје тренутног истраживачког интересовања усресређено је на теорију оператора на Хилбертовом простору. Хилбертов простор оператора имају елегантну и добро развијену теорију с обзиром да је геометрија Хилбертових простора има добро развијену теорију, што смо видели и претходном поглављу.

2.1 Елементарне особине и примери

Пропозиција 2.1.0.1. *Нека су $\mathcal{H}$ и $\mathcal{R}$ Хилбертови простори и $A : \mathcal{H} \to \mathcal{R}$ линеарна трансформација. Следећи услови су еквивалентни:*

1. *A је непрекидна*
2. *A је непрекидна у 0*
3. *A је непрекидна у некој тачки*
4. *Постоји константа $C > 0$ тако да $\|Ah\| \leq C \|h\|$ за свако $h \in \mathcal{H}$.*

$$\|A\| = \sup\{\|Ah\| : h \in \mathcal{H}, \|h\| = 1\}$$

$$
\begin{aligned}
\|A\| &= \sup\{\|Ah\| : \|h\| = 1\} \\
&= \sup\left\{\frac{\|Ah\|}{\|h\|} : \|h\| \neq 0\right\} \\
&= \inf\left\{C > 0 : \|Ah\| \leq C\,\|h\|\,, h \in \mathcal{H}\right\}
\end{aligned}
$$

такође, $\|Ah\| \leq \|A\|\,\|h\|$.

$\|A\|$ се назива норма од A и линеарна трансформација са коначном нормом се назива ограничена линеарна трансформација. Нека је $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ скуп ограничених линеарних трансформација из $\mathcal{H}$ у $\mathcal{R}$. За $\mathcal{H} = \mathcal{R}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Приметимо да $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathbb{F})$ су ограничени линеарни функционали.

Пропозиција 2.1.0.2. *a) Ако A и $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$, тада $A + B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ и $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$*

b) Ако $\alpha \in \mathbb{F}$ и $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$, тада $\alpha A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ и $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$

c) Ако $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ и $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{L})$, тада $BA \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ и $\|BA\| \leq \|B\|\,\|A\|$

Доказ. a) Нека $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$. Узмимо да су $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ и C_1, C_2 неке константе.

$$
\begin{aligned}
Mh &= Ah + Bh \\
M(C_1h_1 + C_2h_2) &= A(C_1h_1 + C_2h_2) + B(C_1h_1 + C_2h_2) \\
&= C_1Ah_1 + C_2Ah_2 + C_1Bh_1 + C_2Bh_2 \\
&= C_1(Ah_1 + Bh_1) + C_2(Ah_2 + Bh_2) \\
&= C_1Mh_1 + C_2Mh_2
\end{aligned}
$$

тј. $M = A + B$ је линеарни оператор на $\mathcal{H}$.

Да је ограничени следи из

$$
\begin{aligned}
\|Mh\| = \|Ah + Bh\| &\leq \|Ah\| + \|Bh\| \\
&\leq \|A\|\,\|h\| + \|B\|\,\|h\| \\
&= (\|A\| + \|B\|)\,\|h\|
\end{aligned}
$$

б)

$$
\begin{aligned}
Mh &= \lambda(Ah) \\
M(C_1h_1 + C_2h_2) &= C_1Mh_1 + C_2Mh_2 \\
&= \lambda(C_1Ah_1 + C_2Ah_2) \\
&= \lambda C_1Ah_1 + \lambda C_2Ah_2 \\
&= C_1\lambda Ah_1 + C_2\lambda Ah_2 \\
&= C_1Mh_1 + C_2Mh_2 \text{ тј. } M = \lambda A
\end{aligned}
$$

$$
\|Mh\| = \|\lambda Ah\| = |\lambda|\,\|Ah\| \leq |\lambda|\,\|A\|\,\|h\|
$$

в) Ако $k \in \mathcal{R}$, тада $\|Bk\| \leq \|B\| \|k\|$. С тога, ако је $h \in \mathcal{H}$, $k = Ah \in \mathcal{R}$ и

$$\|BAh\| \leq \|B\| \|Ah\| \leq \|B\| \|A\| \|h\|$$

$$Mh = BAh$$

$$M(C_1h_1 + C_2h_2) = C_1BAh_1 + C_2BAh_2 = C_1Mh_1 + C_2Mh_2 \Rightarrow M = BA$$

□

Пример 2.1.0.3. *Ако је* $\dim \mathcal{H} = n < \infty$ *и* $\dim \mathcal{R} = m < \infty$*, нека је* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *ортонормирана база за* $\mathcal{H}$ *и нека је* $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$ *ортонормирана база за* $\mathcal{R}$*. Свака линеарна трансформација из* $\mathcal{H}$ *у* $\mathcal{R}$ *је ограничена. Ако* $1 \leq j \leq n$*,* $1 \leq i \leq m$*, нека је* $a_{ij} = \langle Ae_j, \varepsilon_i \rangle$*. Тада* $m \times n$ *матрица* (a_{ij}) *представља* A *и свака таква матрица представља елемент из* $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$*.*

2.2 Адјуговани оператори

Дефиниција 2.2.0.1. *Ако су* $\mathcal{H}$ *и* $\mathcal{R}$ *Хилбертови простори, функција* $u : \mathcal{H} \times \mathcal{R} \to \mathbb{F}$ *је сесквилинеарна форма ако за* $h, g \in \mathcal{H}$*,* $k, f \in \mathcal{R}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$*:*

а) $u(\alpha h + \beta g, k) = \alpha u(h, k) + \beta u(g, k)$

б) $u(h, \alpha k + \beta f) = \bar{\alpha} u(h, k) + \bar{\beta} u(h, f)$

Назив <u>*сесквилинеарна*</u> се користи због тога што је линеарна по првој компоненти, а антилинеарна по другој компоненти. Сесквилинеарна форма је ограничена ако постоји константа M тако да је $|u(h, k)| \leq M \|h\| \|k\|$ за свако $h \in \mathcal{H}$ и $k \in \mathcal{R}$. Константа M се назива ограничење (граница) за u.

Сесквилинеарна форма се користи за проучавање оператора. Ако је $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$, тада $u(h, k) = \langle Ah, k \rangle$ је ограничена сесквилинеарна форма. Такође, ако $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R}, \mathcal{H})$, $u(h, k) = \langle h, Bk \rangle$ је ограничена сесквилинеарна форма.

Теорема 2.2.0.2. *Ако је* $u : \mathcal{H} \times \mathcal{R} \to \mathbb{F}$ *ограничена сесквилинеарна форма са границом* M*, тада постоје јединствени оператори* $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ *и* $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R}, \mathcal{H})$ *тако да је*

$$u(h, k) = \langle Ah, k \rangle = \langle h, Bk \rangle \tag{2}$$

за свако $h \in \mathcal{H}$*,* $k \in \mathcal{R}$ *и* $\|A\|, \|B\| \leq M$*.*

Доказ. Показаћемо егзистенцију од A (егзистенција од B се показује слично користећи Рисову теорему о јединственом представљању). За свако $h \in \mathcal{H}$, дефинишемо $L_h : \mathcal{R} \to \mathbb{F}$ са $L_h(k) = \overline{u(h, k)}$. Тада је L_h линеарна и $|L_h(k)| \leq M \|h\| \|k\|$. На основу Рисове теореме о јединственом представљању постоји јединствени вектор $f \in \mathcal{R}$ тако да је $\langle k, f \rangle = L_h(k) = \overline{u(h, k)}$ и $\|f\| \leq M \|h\|$. Нека је $Ah = f$. Остало је да се покаже да је A линеарно (ово се показује користећи Рисову теорему о јединственом представљању). Такође,

$$\langle Ah, k \rangle = \overline{\langle k, Ah \rangle} = \overline{\langle k, f \rangle} = u(h, k)$$

Ако $A_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ и $u(h, k) = \langle A_1 h, k \rangle$, тада $\langle Ah - A_1 h, k \rangle = 0$ за свако k; дакле $Ah - A_1 h = 0$ за свако h. С тога, A је јединствено. □

Дефиниција 2.2.0.3. *Ако $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$, тада постоји јединствени оператор $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R}, \mathcal{H})$ (који задовољава (2)) који се назива адјуговани оператор од A и означава се са $B = A^*$.*

Адјугованост оператора ће се често користити за операторе из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ него из $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$. Постоји један значајан изузетак.

Пропозиција 2.2.0.4. *Ако $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$, тада је U изоморфизам ако и само ако је U инвертибилно и $U^{-1} = U^*$.*

Пропозиција 2.2.0.5. *Ако $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, тада:*

а) $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$

б) $(AB)^* = B^* A^*$

в) $A^{**} = (A^*)^* = A$

г) *Ако је A инвертибилно у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и A^{-1} је инверзно, тада је A^* инвертибилно и $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$*

Пропозиција 2.2.0.6. *Ако $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, тада $\|A\| = \|A^*\| = \|A^* A\|^{\frac{1}{2}}$.*

Доказ. За $h \in \mathcal{H}$, $\|h\| \leq 1$:

$$\|Ah\|^2 = \langle Ah, Ah \rangle = \langle A^* Ah, h \rangle \leq \|A^* Ah\| \, \|h\| \leq \|A^* A\| \leq \|A^*\| \, \|A\|,$$

с тога, $\|A\|^2 \leq \|A^* A\| \leq \|A^*\| \, \|A\|$. Користећи два краја ове неједнакости, добијамо да је $\|A\| \leq \|A^*\|$ (1). Пошто је $A = A^{**}$ и ако уместо A^* ставимо A, добијамо $\|A^*\| \leq \|A^{**}\| = \|A\|$ (2). На основу (1) и (2) имамо $\|A\| = \|A^*\|$. □

Пропозиција 2.2.0.7. *Ако је $S : \ell^2 \to \ell^2$ дефинисано са $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, тада је S изометрија и $S^*(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (\alpha_2, \alpha_3, \ldots)$.*

Доказ. У примеру 1.5.1.3 имамо да је S изометрија. За (α_n) и (β_n) у ℓ^2,

$$\begin{aligned}\langle S^*(\alpha_n), \beta_n \rangle &= \langle (\alpha_n), S(\beta_n) \rangle = \langle (\alpha_1, \alpha_2, \ldots), (0, \beta_1, \beta_2, \ldots) \rangle \\ &= \alpha_2 \bar{\beta}_1 + \alpha_3 \bar{\beta}_2 + \cdots = \langle (\alpha_2, \alpha_3, \ldots), (\beta_1, \beta_2, \ldots) \rangle\end{aligned}$$

Пошто важи за сваки (β_n), тиме је резултат доказан. □

Оператор S из претходне пропозиције назива се *једнострано померање*, а оператор S^* се назива *померање уназад*. Операција адјугованости за операторе аналогна је конјугату за комплексан број.

Дефиниција 2.2.0.8. *Ако $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, тада је:*

а) *A хермитски или самоадјугован ако важи $A^* = A$*

б) *A нормалан ако је $AA^* = A^* A$*

в) *A унитаран ако је $A^{-1} = A^*$*

У аналогији адјугованости и комплексног конјугата, хермитски оператор постаје аналогија реалних бројева, а унитарни оператори имају своју аналогију у комплексним бројевима по модулу 1. Нормални оператори своју аналогију имају у комплексним бројевима. Хермитски и унитарни оператори су уједно и нормални оператори.

Пропозиција 2.2.0.9. *Ако је $\mathcal{H}$ $\mathbb{C}$-Хилбертов простор и $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, тада је A хермитски ако и само ако је $\langle Ah, h\rangle \in \mathbb{R}$ за свако $h \in \mathcal{H}$.*

Доказ.

($\Rightarrow$) Претпоставимо да је A хермитски оператор, тада важи $A = A^*$.

$$\langle Ah, h\rangle = \langle h, Ah\rangle = \overline{\langle Ah, h\rangle},$$

из овога следи да је $\langle Ah, h\rangle \in \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) Сада претпоставимо да је $\langle Ah, h\rangle \in \mathbb{R}$ за свако $h \in \mathcal{H}$. Ако је $\alpha \in \mathbb{C}$ и $h, g \in \mathcal{H}$, тада:

$$\langle A(h+\alpha g), h+\alpha g\rangle = \langle Ah, h\rangle + \bar{\alpha}\langle Ah, g\rangle + \alpha\langle Ag, h\rangle + |\alpha|^2\langle Ag, g\rangle \in \mathbb{R}.$$

Овај израз једнак је његовом комплексном конјугату. Користећи чињеницу да $\langle Ah, h\rangle, \langle Ag, g\rangle \in \mathbb{R}$, добијамо:

$$\alpha\langle Ag, h\rangle + \bar{\alpha}\langle Ah, g\rangle = \bar{\alpha}\langle h, Ag\rangle + \alpha\langle g, Ah\rangle = \bar{\alpha}\langle A^*h, g\rangle + \alpha\langle A^*g, h\rangle.$$

Узимајући прво да је $\alpha = 1$, а затим да је $\alpha = i$, добијамо две једначине:

$$\langle Ag, h\rangle + \langle Ah, g\rangle = \langle A^*h, g\rangle + \langle A^*g, h\rangle \quad (m),$$
$$i\langle Ag, h\rangle - i\langle Ah, g\rangle = -i\langle A^*h, g\rangle + i\langle A^*g, h\rangle \quad (n).$$

Из (m) и (n) следи:

$$\langle Ag, h\rangle = \langle A^*g, h\rangle, jA = A^*.$$

□

<u>*Напомена*</u>: Прошла пропозиција је погрешна ако се узме само претпоставка да је $\mathcal{H}$ $\mathbb{R}$-Хилбертов простор. Узмимо за пример $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, тада је $\langle Ah, h\rangle = 0$ за $h \in \mathbb{R}^2$. Међутим, A^* је транспонована од A, па важи $A \neq A^*$. За сваки оператор A на $\mathbb{R}$-Хилбертовом простору, $\langle Ah, g\rangle \in \mathbb{R}$.

Пропозиција 2.2.0.10. *Ако је $A = A^*$, тада важи $\|A\| = \sup\{|\langle Ah, h\rangle| : \|h\| = 1\}$.*

Доказ. Обележимо са $M = \sup\{|\langle Ah, h\rangle| : \|h\| = 1\}$.

Из $\|h\| = 1$, имамо да је $|\langle Ah, h\rangle| \leq \|A\|$; с тога је $M \leq \|A\|$.

С друге стране, ако је $\|h\| = \|g\| = 1$, имамо:

$$\begin{aligned}\langle A(h \pm g), h \pm g\rangle &= \langle Ah, h\rangle \pm \langle Ah, g\rangle \pm \langle Ag, h\rangle + \langle Ag, g\rangle \\ &= \langle Ah, h\rangle \pm \langle Ah, g\rangle \pm \langle g, A^*h\rangle + \langle Ag, g\rangle.\end{aligned}$$

Пошто је $A = A^*$, то имплицира:

$$\langle A(h+g), h+g\rangle = \langle Ah, h\rangle + 2\mathrm{Re}\,\langle Ah, g\rangle + \langle Ag, g\rangle\,,$$

$$\langle A(h-g), h-g\rangle = \langle Ah, h\rangle - 2\mathrm{Re}\,\langle Ah, g\rangle - \langle Ag, g\rangle\,.$$

Одузимајући ове две једначине добијамо:

$$4\mathrm{Re}\,\langle Ah, g\rangle = \langle A(h+g), h+g\rangle - \langle A(h-g), h-g\rangle\,.$$

Сада, лако се можемо уверити да је $|\langle Af, f\rangle| \leq M\,\|f\|^2$ за свако $f \in \mathcal{H}$. Користећи закон паралелограма добијамо:

$$4\mathrm{Re}\,\langle Ah, g\rangle \leq M(\|h+g\|^2 + \|h-g\|^2) = 2M(\|h\|^2 + \|g\|^2) = 4M \qquad (3)$$

јер су h и g јединични вектори. Сада, претпоставимо $\langle Ah, g\rangle = e^{i\theta}|\langle Ah, g\rangle|$. Замењујући h са $e^{-i\theta}h$ у неједнакост (3), добијамо $\langle Ah, g\rangle \leq M$ ако је $\|h\| = \|g\| = 1$. Ако узмемо супремум свих g, добијамо $\|Ah\| \leq M$ када је $\|h\| = 1$. Одавде следи $\|A\| \leq M$. □

Последица 2.2.0.11. *Ако су $A = A^*$ и $\langle Ah, h\rangle = 0$ за свако h, тада $A = 0$.*

Пропозиција 2.2.0.12. *Ако је $\mathcal{H}$ $\mathbb{C}$-Хилбертов простор и $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ тако да важи $\langle Ah, h\rangle = 0$ за свако $h \in \mathcal{H}$, тада је $A = 0$.*

Доказ. Нека су $h, g \in \mathcal{H}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Тада знамо да је $\alpha h + \beta g \in \mathcal{H}$ пошто је $\mathcal{H}$ векторски простор.

$$\langle A(\alpha h + \beta g), \alpha h + \beta g\rangle = 0$$

$$\langle \alpha Ah + \beta Ag, \alpha h + \beta g\rangle = 0$$

$$\langle \alpha Ah, \alpha h\rangle + \langle \alpha Ah, \beta g\rangle + \langle \beta Ag, \alpha h\rangle + \langle \beta Ag, \beta g\rangle = 0$$

$$\alpha\bar{\alpha}\,\langle Ah, h\rangle + \alpha\bar{\beta}\,\langle Ah, g\rangle + \beta\bar{\alpha}\,\langle Ag, h\rangle + \beta\bar{\beta}\,\langle Ag, g\rangle = 0$$

$$|\alpha|^2\,\langle Ah, h\rangle + \alpha\bar{\beta}\,\langle Ah, g\rangle + \beta\bar{\alpha}\,\langle Ag, h\rangle + |\beta|^2\,\langle Ag, g\rangle = 0$$

Имамо да је $\langle Ah, h\rangle = 0$ и $\langle Ag, g\rangle = 0$ из претпоставке,

$$\alpha\bar{\beta}\,\langle Ah, g\rangle + \beta\bar{\alpha}\,\langle Ag, h\rangle = 0 \quad (c)$$

Узмимо да је $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ и убацимо у (c),

$$\langle Ah, g\rangle + \langle Ag, h\rangle = 0 \quad (p)$$

Такође, узмимо да је $\alpha = i$ и $\beta = 1$ и убацимо у (c),

$$i\,\langle Ah, g\rangle - i\,\langle Ag, h\rangle = 0 \quad (q),\ \text{помножимо са } i$$

$$-\langle Ah, g\rangle + \langle Ag, h\rangle = 0 \quad i(q)$$

Одузмемо (p) и $i(q)$, добијамо

$$\langle Ah, g\rangle + \langle Ag, h\rangle + \langle Ah, g\rangle - \langle Ag, h\rangle = 0,$$

из овога следи да је $2\,\langle Ah, g\rangle = 0 \Rightarrow A = 0$. □

Ако је $\mathcal{H}$ $\mathbb{C}$-Хилбертов простор и $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, тада $B = \frac{A+A^*}{2}$ и $C = \frac{A-A^*}{2i}$ су самоадјуговани и $A = B+iC$. Оператори B и C се називају редом, реални и имагинарни део од A.

Пропозиција 2.2.0.13. *Ако $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, следећи услови су еквивалентни:*

а) A је нормалан оператор

б) $\|Ah\| = \|A^*h\|$, за свако h

Ако је $\mathcal{H}$ $\mathbb{C}$-Хилбертов простор, тада су ова два услова еквивалентна са:

в) Реални и имагинарни део од A су комутативни

Доказ. Ако $h \in \mathcal{H}$, тада

$$\begin{aligned}\|Ah\|^2 = \|A^*h\|^2 &= \langle Ah, Ah\rangle - \langle A^*h, A^*h\rangle \\ &= \langle A^*Ah, h\rangle - \langle AA^*h, h\rangle \\ &= \langle (A^*A - AA^*)h, h\rangle .\end{aligned}$$

Из овога имамо да је $A^*A - AA^*$ хермитски оператор. Еквиваленција а) и б) следе из последице 2.2.0.11 Ако су B и C реални и имагинарни део од A, на основу "малог"рачуна важе две једнакости:

$$A^*A = B^2 - iCB + iBC + C^2$$

$$AA^* = B^2 + iCB - iCB + C^2$$

$A^*A = AA^*$ ако и само ако $CB = BC$, па су а) и в) еквивалентни. □

Пропозиција 2.2.0.14. *Ако $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, следећи услови су еквивалентни:*

а) A је изометрија

б) $A^*A = I$

в) $\langle Ah, Ag\rangle = \langle h, g\rangle$, за све $h, g \in \mathcal{H}$

Доказ. а) $\Leftrightarrow$ в) следи на основу пропозиције 1.5.1.2. Доказаћемо да је б) $\Leftrightarrow$ в). Ако су $h, g \in \mathcal{H}$, тада важи $\langle A^*Ah, g\rangle = \langle Ah, Ag\rangle \Rightarrow$ б) и в) су еквивалентни. □

Пропозиција 2.2.0.15. *Ако $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, тада су следећи услови еквивалентни:*

а) $A^*A = AA^* = I$

б) A је унитарни (A је сирјективна изометрија)

в) A је нормална изометрија

Теорема 2.2.0.16. *Ако $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, тада је* $\ker A = (\operatorname{ran} A^*)^\perp$

Доказ. ($\Rightarrow$) Нека је $h \in \ker A$ и $g \in \mathcal{H}$, тада важи $\langle h, A^*g\rangle = \langle Ah, g\rangle = 0$, па следи $\ker A \subseteq (\operatorname{ran} A^*)^\perp$

($\Leftarrow$) Нека је $h \perp \ker A$ и $g \in \mathcal{H}$, тада је $\langle Ah, g\rangle = \langle h, A^*g\rangle = 0$, па је $(\operatorname{ran} A^*)^\perp \subseteq \ker A$

$\square$

<u>*Напомена*</u>: Пошто је $A^{**} = A$, такође важи $(\operatorname{ran} A^*)^\perp = \ker A$. Не важи ако заменимо места A и A^*, тј. $(\operatorname{ran} A)^\perp = \ker A^*$, пошто $\operatorname{ran} A^*$ можда није затворен. Оно што важи:

$$(\ker A)^\perp = \operatorname{cl}(\operatorname{ran} A^*)$$

$$(\ker A^*)^\perp = \operatorname{cl}(\operatorname{ran} A)$$

2.3 Пројектор и идемпотент; инваријанта и редуковани потпростори

Дефиниција 2.3.0.1. *Идемпотент на $\mathcal{H}$ је ограничени линеарни оператор E на $\mathcal{H}$ тако да је $E^2 = E$.*

Пројектор је идемпотент P тако да је $\ker P = (\operatorname{ran} P)^\perp$. Ако је $M \leq \mathcal{H}$, тада је P_M пројекција. Нека је E било који идемпотент, $\mathcal{M} = \operatorname{ran} E$ и $N = \ker E$. Пошто је E непрекидно, N је затворени потпростор од $\mathcal{H}$. Приметимо $(I - E)^2 = I - 2E + E^2 = I - 2E + E = I - E$, одавде следи да је $I - E$ идемпотент. Такође, $0 = (I - E)h = h - Eh$ акко $Eh = h$, па је $\ker(I - E) \subseteq \operatorname{ran} E$ (1). Са друге стране, ако је $h \in \operatorname{ran} E$, $h = Eg$ и $Eh = EEg = E^2g = Eg = h$; $\operatorname{ran} E \subseteq \ker(I - E)$ (2). Из (1) и (2) имамо да је $\operatorname{ran} E = \ker(I - E)$.

Пропозиција 2.3.0.2. *а) E је идемпотент ако и само ако је $I - E$ идемпотент.*

б) $\operatorname{ran} E = \ker(I - E)$ и оба $\operatorname{ran} E$ и $\ker(I - E)$ су затворени линеарни потпростори од $\mathcal{H}$.

в) Ако је $M = \operatorname{ran} E$ и $N = \ker E$, тада је $M \cap N = \{0\}$ и $M + N = \mathcal{H}$.

Пропозиција 2.3.0.3. *Ако је E идемпотент на $\mathcal{H}$ и $E \neq 0$, следећи услови су еквивалентни:*

а) E је пројектор

б) E је ортогонални пројектор на $\mathcal{H}$ на $\operatorname{ran} E$

в) $\|E\| = 1$

г) E је хермитски

д.) E је нормалан

ђ.) $\langle Eh, h\rangle \geq 0$, за свако $h \in \mathcal{H}$

Доказ.

а) $\Rightarrow$ б): Нека је $M = \operatorname{ran} E$ и $P = P_M$. Ако је $h \in \mathcal{H}$, тада постоји јединствени вектор Ph из M тако да је $h - Ph \in M^\perp = (\operatorname{ran} E)^\perp = \ker E$, због тога што је E пројектор.

б) $\Rightarrow$ в): На основу теореме 1.2.0.7, $\|E\| \leq 1$. Како је $Eh = h$, $\forall h \in \operatorname{ran} E$, следи $\|E\| = 1$.

в) $\Rightarrow$ а): Нека је $h \in (\ker E)^{\perp}$. Знамо на основу дефиниције $\operatorname{ran}(I - E) = \ker E$, па из овога следи $h - Eh \in \ker E$.

$$0 = \langle h - Eh, h \rangle = \|h\|^2 - \langle Eh, h \rangle \Rightarrow \|h\|^2 = \langle Eh, h \rangle$$

$$\|h\|^2 = \langle Eh, h \rangle \leq \|Eh\| \, \|h\| \leq \|E\| \, \|h\| \, \|h\| = \|h\|^2$$

За $h \in (\ker E)^{\perp}$, $\|Eh\| = \|h\| = \langle Eh, h \rangle^{1/2}$. Али, тада за $h \in (\ker E)^{\perp}$,

$$\|h - Eh\|^2 = \|h\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle Eh, h \rangle + \|Eh\|^2 = 0$$

тј. важи $(\ker E)^{\perp} \subseteq \ker(I - E) = \operatorname{ran} E$. Са друге стране, ако је $g \in \operatorname{ran} E$, $g = g_1 + g_2$, где је $g_1 \in \ker E$ и $g_2 \in (\ker E)^{\perp}$.

$g = Eg = Eg_2 = g_2$, тада је $\operatorname{ran} E \subseteq (\ker E)^{\perp}$. Дакле, $\operatorname{ran} E = (\ker E)^{\perp}$ тј. E је пројектор.

б) $\Rightarrow$ ђ): Ако $h \in \mathcal{H}$, $h = h_1 + h_2$, $h_1 \in \operatorname{ran} E$, $h_2 \in \ker E = (\operatorname{ran} E)^{\perp}$. Имамо да је

$$\langle Eh, h \rangle = \langle E(h_1 + h_2), h_1 + h_2 \rangle = \langle Eh_1, h_1 \rangle = \langle h_1, h_1 \rangle = \|h_1\|^2 \geq 0$$

ђ) $\Rightarrow$ а): Нека је $h_1 \in \operatorname{ran} E$ и $h_2 \in \ker E$. На основу ђ.) $0 \leq \langle E(h_1 + h_2), h_1 + h_2 \rangle = \langle h_1, h_1 \rangle + \langle h_1, h_2 \rangle \Rightarrow 0 \leq \|h_1\|^2 + \langle h_1, h_2 \rangle \Rightarrow -\|h_1\|^2 \leq \langle h_1, h_2 \rangle$ за свако $h_1 \in \operatorname{ran} E$ и $h_2 \in \ker E$.

Ако су h_1 и h_2 такви да важи $\langle h_1, h_2 \rangle = \bar{\alpha} \neq 0$, тада замењујући h_2 са $k_2 = -2\alpha^{-1} \|h_1\|^2 h_2$ у неједнакост, добијамо

$$-\|h_1\|^2 \leq -2\,\|h_1\|^2\,,$$

што је контрадикција, тј. $\langle h_1, h_2 \rangle = 0$ за било које $h_1 \in \operatorname{ran} E$ и $h_2 \in \ker E \Rightarrow E$ је пројектор.

а) $\Rightarrow$ г): Нека је $h, g \in \mathcal{H}$, $h = h_1 + h_2$ и $g = g_1 + g_2$, где је $h_1, g_1 \in \operatorname{ran} E$ и $h_2, g_2 \in \ker E = (\operatorname{ran} E)^{\perp}$. Имамо да је $\langle Eh, g \rangle = \langle h_1, g_1 \rangle$. Такође,

$$\langle E^* h, g \rangle = \langle h, Eg \rangle = \langle h_1, g_1 \rangle = \langle Eh, g \rangle \Rightarrow E = E^*$$

г) $\Rightarrow$ д): E је хермитски $\Rightarrow E^* = E$

$$E^* = E \Rightarrow EE^* = EE \Rightarrow EE^* = E^* E$$

, одавде следи да је E нормалан оператор.

д) $\Rightarrow$ а): На основу пропозиције 2.2.0.13, следи да $\|Eh\| = \|E^* h\|$ за свако h.

Из овога имамо $\ker E = \ker E^*$, али на основу теореме 2.2.0.16, $\ker E^* = (\operatorname{ran} E)^{\perp}$, па је E пројектор.

$\square$

Приметимо да део под б.) из прошле пропозиције нам говори да ако је E пројектор и $M = \operatorname{ran} E$, тада је $E = P_M$. Нека је P пројектор, где је $\operatorname{ran} P = M$ и $\ker P = N$. M и N су затворени потпростори од $\mathcal{H}$ па су такође и Хилбертови простори. Сада можемо формирати $M \oplus N$. Ако је $U : M \oplus N \to \mathcal{H}$ дефинисано са $U(h \oplus g) = h + g$ за $h \in M$ и $g \in N$, тада је U изоморфизам. Због овог изоморфизма, често ћемо писати $\mathcal{H} = M \oplus N$.

Дефиниција 2.3.0.4. *Ако је $\{M_i\}$ колекција по паровима ортогоналних потпростора од $\mathcal{H}$, тада*

$$\bigoplus_i M_i = \bigvee_i M_i$$

Ако су M и N два затворена линеарна потпростора од $\mathcal{H}$, тада

$$M \ominus N = M \cap N^{\perp}$$

ово се назива ортогонална разлика од M и N.

Приметимо да ако је $M, N \leq \mathcal{H}$ и $M \perp N$, тада $M + N$ је затворен. С тога $M \oplus N = M + N$. Ово важи за сваку коначну колекцију по паровима ортогоналних потпростора али не важи за бесконачну колекцију.

Дефиниција 2.3.0.5. *Ако $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $M \leq \mathcal{H}$, кажемо да је M инваријантни потпростор за A ако $Ah \in M$ за било које $h \in M$. Другим речима, ако $AM \subseteq M$. M је редуковани потпростор за A ако је $AM \subseteq M$ и $AM^{\perp} \subseteq M^{\perp}$. Ако је $M \leq \mathcal{H}$, тада $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$. Ако је $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, тада се A може записати као матрица 2×2 оператора:*

$$A = \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$$

где је $W \in \mathcal{B}(M)$, $X \in \mathcal{B}(M^{\perp}, M)$, $Y \in \mathcal{B}(M, M^{\perp})$ и $Z \in \mathcal{B}(M^{\perp})$.

Пропозиција 2.3.0.6. *Ако је $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $M \leq \mathcal{H}$ и $P = P_M$, тада су следећи услови еквивалентни:*

а) M је инваријантни потпростор за A

б) $PAP = P$

в) $Y = 0$.

Такође и следећи услови су међусобно еквивалентни:

г) M је редуковани потпростор за A

д) $PA = AP$

ђ) Y и X су 0

е) M је инваријантни потпростор и за A и за A^*.

Доказ.

а) ⇒ б): Нека је $h \in \mathcal{H}$, $Ph \in M$. Сада имамо да је $APh \in M$.

$$P(APh) = APh \Rightarrow PAP = AP$$

б) ⇒ в): Ако P представимо као 2×2 оператор матрице у односу на $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$, тада

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

С тога,

$$PAP = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = AP = \begin{bmatrix} W & 0 \\ Y & 0 \end{bmatrix}$$

па је $Y = 0$.

в) ⇒ а): Ако $Y = 0$ и $h \in M$, тада

$$Ah = \begin{bmatrix} W & X \\ 0 & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Wh \\ 0 \end{bmatrix} \in M$$

г) ⇒ д): Пошто су M и $M^{\perp}$ инваријантни потпростори за A, из б) имамо да је $AP = PAP$ и $A(I-P) = (I-P)A(I-P)$. Множећи претходну једначину, добијамо $A - AP = A - AP - PA + PAP$, и добијамо $PA = PAP = AP$.

д) ⇒ ђ): Нека је

$$A = \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$$

и

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

тада је

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ Y & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X = 0 \text{ и } Y = 0$$

ђ) ⇒ е): Ако је $X = Y = 0$, тада

$$A = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} A^* = \begin{bmatrix} W^* & 0 \\ 0 & Z^* \end{bmatrix}$$

на основу в.), M је инваријантни потпростор за A и A^*.

е) ⇒ г): Ако $h \in M^{\perp}$ и $g \in M$, тада $\langle g, Ah \rangle = \langle A^* g, h \rangle$, пошто $A^* g \in M$. Како је g произвољан вектор у M, $Ah \in M^{\perp}$. То је, $AM^{\perp} \subseteq M^{\perp}$.

□

Ако је M редуковани потпростор за A, тада је $X = Y = 0$. Ово говори да је проучавање A сведено на проучавање мањих оператора W и Z. Ово је разлог за увођење следеће терминологије. Ако је $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и M је инваријантни потпростор за A, тада се $A\mid_M$ користи као ознаку за рестрикцију од A по M. То је, $A\mid_M$ оператор на M дефинисан са:

$$(A\mid_M)h = Ah \quad \text{за } h \in M$$

Приметимо да $A\mid_M \in \mathcal{B}(M)$ и $\|A\mid_M\| \leq \|A\|$. Такође, ако је M инваријантни потпростор за A и A представљена као оператор матрице где је $Y = 0$, тада $W = A\mid_M$.

2.4 Компактни оператори

Испоставља се да већина резултата о линеарним трансформацијама на коначно димензионалним просторима има лепа уопштења на одређену класу оператора на бесконачно-димензионалним просторима, тј. на *компактне операторе*. Са S^1 ћемо означити затворену јединичну лопту у $\mathcal{H}$.

Дефиниција 2.4.0.1. *Линеарна трансформација $T : \mathcal{H} \to \mathcal{R}$ је компактна ако је $T(S^1)$ компактно затворење у $\mathcal{R}$. Скуп компактних оператора из $\mathcal{H}$ у $\mathcal{R}$ се означава са $\mathcal{B}_0(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ и $\mathcal{B}_0(\mathcal{H}) = \mathcal{B}_0(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.*

Пропозиција 2.4.0.2.

а) $\mathcal{B}_0(\mathcal{H}, \mathcal{R}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$

б) $\mathcal{B}_0(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ је линеарни простор и ако $\{T_n\} \subseteq \mathcal{B}_0(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ и $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ тако да $\|T_n - T\| \to 0$, тада $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}, \mathcal{R})$

в) Ако $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ и $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}, \mathcal{R})$, тада TA и $BT \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}, \mathcal{R})$

Дефиниција 2.4.0.3. *Оператор T на $\mathcal{H}$ је коначног ранга ако је $\operatorname{ran} T$ коначно димензионалан. Скуп непрекидних коначног ранга оператора се означава са $\mathcal{B}_{00}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$; $\mathcal{B}_{00}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}_{00}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.*

Теорема 2.4.0.4. *Ако $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$, тада су следећи услови еквивалентни:*

а) T је компактан

б) T^* је компактан

в) Постоји низ $\{T_n\}$ оператора коначног ранга тако да је $\|T - T_n\| \to 0$

Доказ.

в) $\Rightarrow$ а): Ово одмах следи на основу теореме 2.4.0.4 под б) и заправо следи $\mathcal{B}_{00}(\mathcal{H}, \mathcal{R}) \subseteq \mathcal{B}_0(\mathcal{H}, \mathcal{R})$.

а) $\Rightarrow$ в): Пошто је $\operatorname{cl}[T(S^1)]$ компактан, он је и сепарабилан. Дакле, $\operatorname{cl}[\operatorname{ran} T] = \mathcal{L}$ је сепарабилан потпростор од $\mathcal{H}$. Нека је $\{e_1, e_2, \ldots\}$ база за $\mathcal{L}$ и нека је P_n ортогонални пројектор од $\mathcal{H}$ у $\bigvee\{e_j : 1 \leq j \leq n\}$. Ставимо $T_n = P_n T$; приметимо да је сваки T_n коначног ранга. Показаћемо да је $\|T_n - T\| \to 0$, али пре тога показаћемо једну лему.

Помоћна лема. *Ако* $h \in \mathcal{H}$, $\|T_n h - Th\| \to 0$.

Доказ. Заправо, $k = Th \in \mathcal{L}$, па следи да је $\|P_n k - k\| \to 0$ на основу пропозиције 1.4.0.5 и теореме 1.4.0.11 под г). Те је $\|P_n Th - Th \to 0$, и лема је доказана. □

Вратимо се сада доказу.

Пошто је T компактан, ако је $\epsilon > 0$, постоје вектори $h_1, \ldots, h_m$ у S^1 тако да $T(S^1) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(Th_j, \frac{\epsilon}{3})$. Ако је $\|h\| \leq 1$, изаберемо h_j тако да је $\|Th - Th_j\| < \frac{\epsilon}{3}$. Дакле, за било који природан број n,

$$\begin{aligned}\|Th - T_n h\| &\leq \|Th - Th_j\| + \|Th_j - T_n h_j\| + \|P_n(Th_j - Th)\| \\ &\leq 2\|Th - Th_j\| + \|Th_j - T_n h_j\| \\ &\leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{3} + \|Th_j - T_n h_j\|\end{aligned}$$

Користећи лему, можемо пронаћи природан број n_0 тако да је

$$\|Th_j - T_n h_j\| < \frac{\epsilon}{3} \text{ за } 1 \leq j \leq m \text{ и } n \geq n_0$$

Па је, $\|Th - T_n h\| < \epsilon$ униформна за h у S^1. Дакле, $\|T - T_n\| < \epsilon$ за $n \geq n_0$.

в) $\Rightarrow$ б): Ако је $\{T_n\}$ низ у $\mathcal{B}_{00}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$ тако да је $\|T_n - T\| \to 0$, тада

$$\|T_n^* - T^*\| = \|T_n - T\| \to 0$$

Али $T_n^* \in \mathcal{B}_{00}(\mathcal{H}, \mathcal{R})$. Пошто в) $\Rightarrow$ а), T^* је компактан.

б) $\Rightarrow$ а): за доказ овог дела погледати [3].

□

Королар 2.4.0.5. *Ако* $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H}, \mathcal{R})$, *тада* $\mathrm{cl}(\mathrm{ran}\, T)$ *је сепарабилан и ако је* $\{e_n\}$ *база за* $\mathrm{cl}(\mathrm{ran}\, T)$ *и* P_n *је пројектор од* $\mathcal{H}$ *у* $\bigvee\{e_j : 1 \leq j \leq n\}$, *тада* $\|P_n T - T\| \to 0$.

Једно од најзначајних алата у проучавању линеарних трансформација на коначно димензионалним просторима је концепт сопствених вредности. Ако компактни оператори имају сопствену вредност која је различита од нуле, могу се извести неки лепи закључци.

Дефиниција 2.4.0.6. *Ако* $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, *скалар* α *је сопствена вредност од* A *ако* $\ker(A - \alpha) \neq \emptyset$. *Ако је* h *не-нула вектор у* $\ker(A - \alpha)$, h *се назива сопствени вектор за* α; *дакле* $Ah = \alpha h$. *Са* $\sigma_p(A)$ *означавамо скуп сопствених вредности од* A.

Пропозиција 2.4.0.7. *Ако* $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$, $\lambda \in \sigma_p(T)$, *и* $\lambda \neq 0$, *тада је* $\ker(T - \lambda)$ *коначно димензионалан.*

Доказ. Претпоставимо да постоји бесконачан ортонормиран низ $\{e_n\}$ у $\ker(T-\lambda)$. Пошто је T компактан, постоји подниз $\{e_{n_k}\}$ тако да $\{Te_{n_k}\}$ конвергира. Тада је низ $\{Te_{n_k}\}$ Кошијев. Али за $n_k \neq n_j$,

$$\|Te_{n_k} - Te_{n_j}\|^2 = \|\lambda e_{n_k} - \lambda e_{n_j}\|^2 = 2|\lambda|^2 > 0$$

пошто је $\lambda \neq 0$. Ово је контрадикција, која показује да $\ker(T-\lambda)$ мора бити коначно димензионалан.

□

Пропозиција 2.4.0.8. *Ако је T компактан оператор на $\mathcal{H}$, $\lambda \neq 0$, и*

$$\inf\{\|(T-\lambda)h\| : \|h\| = 1\} = 0$$

тада $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Доказ. На основу претпоставке, постоји низ јединичних вектора $\{h_n\}$ тако да $\|(T-\lambda)h_n\| \to 0$. Пошто је T компактан, постоји вектор f у $\mathcal{H}$ и подниз $\{h_{n_k}\}$ тако да $\|Th_{n_k} - f\| \to 0$. Али,

$$h_{n_k} = \lambda^{-1}[(\lambda - T)h_{n_k} + Th_{n_k}] \to \lambda^{-1}f$$

Онда, $1 = \|\lambda^{-1}f\| = |\lambda|^{-1}\|f\|$ и $f \neq 0$. Такође, мора бити $Th_{n_k} \to \lambda^{-1}Tf$. Пошто $Th_{n_k} \to f$, $f = \lambda^{-1}Tf$, или $Tf = \lambda f$. То јест, $f \in \ker(T-\lambda)$ и $f \neq 0$, па $\lambda \in \sigma_p(T)$. □

Последица 2.4.0.9. *Ако је T компактан оператор на $\mathcal{H}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \notin \sigma_p(T)$, и $\bar{\lambda} \notin \sigma_p(T^*)$, тада $\operatorname{ran}(T-\lambda) = \mathcal{H}$ и $(T-\lambda)^{-1}$ је ограничен оператор на $\mathcal{H}$.*

Доказ. Пошто $\lambda \notin \sigma_p(T)$, прошла пропозиција имплицира да постоји константа $c > 0$ тако да је $\|(T-\lambda)h\| \geq c\|h\|$ за свако $h \in \mathcal{H}$. Ако $f \in \operatorname{cl}[\operatorname{ran}(T-\lambda)]$, тада постоји низ $\{h_n\}$ у $\mathcal{H}$ тако да $(T-\lambda)h_n \to f$. Дакле,

$$\|h_n - h_m\| \leq c^{-1}\|(T-\lambda)h_n - (T-\lambda)h_m\|$$

и $\{h_n\}$ је Кошијев низ. С тога, $h_n \to h$ за неко $h \in \mathcal{H}$. Имамо $(T-\lambda)h = f$. $\operatorname{ran}(T-\lambda)$ је затворен и на основу теореме 2.2.0.16 и на основу претпоставке имамо да је $\operatorname{ran}(T-\lambda) = [\ker(T-\lambda)^*]^\perp = \mathcal{H}$. За $f \in \mathcal{H}$, нека је Af јединствен вектор h тако да $(T-\lambda)h = f$. Дакле, $(T-\lambda)Af = f$ за свако $f \in \mathcal{H}$. Из неједнакости $c\|Af\| \leq \|(T-\lambda)Af\| = \|f\|$, имамо да је $\|Af\| \leq c^{-1}\|f\|$ и A је ограничен. Такође, $(T-\lambda)A(T-\lambda)h = (T-\lambda)h$, па је $0 = (T-\lambda)[A(T-\lambda)h - h]$. Пошто, $\lambda \in \sigma_p(T)$, $A(T-\lambda)h = h$, те је $A = (T-\lambda)^{-1}$. □

2.5 Дијагонализација компактних самоадјугованих оператора

Теорема 2.5.0.1. *Ако је T компактан, самоадјугован оператор на $\mathcal{H}$, тада T има само пребројив број различитих сопствених вредности. Ако су $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ различите и ненула сопствене вредности од T, и P_n пројектор од $\mathcal{H}$ у $\ker(T-\lambda_n)$, тада $P_nP_m = P_mP_n = 0$ ако $n \neq m$ за свако λ_n које је реално, и*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \quad (\textit{коначна сума})$$

где низ конвергира ка T у метрици дефинисаној са нормом од $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Ову теорему ћемо доказати, али пре тога нам треба пар резултата који нам требају за доказ ове теореме. Неке од њих ћемо доказати, а неке ћемо узети као чињенице.

Последица 2.5.0.2. *Ако узмемо нотацију из прошле теореме, имамо да важи:*

а) $\ker T = [\bigvee\{P_n\mathcal{H} : n \geq 1\}]^{\perp}$

б) сваки P_n има коначан ранг

в) $\|T\| = \sup\{|\lambda_n| : n \geq 1\}$ *и* $\lambda_n \to 0$ *када* $n \to \infty$

Доказ овог королара можете наћи у [1]

Пропозиција 2.5.0.3. *Ако је A нормалан оператор и $\lambda \in \mathbb{F}$, тада*

$$\ker(A - \lambda) = \ker(A - \lambda)^*$$

и $\ker(A - \lambda)$ је редуковани потпростор за A.

Доказ. Пошто је A нормалан, онда је и $A-\lambda$. Важи $\|(A-\lambda)h\| = \|(A-\lambda)^*h\|$ на основу пропозиције 2.2.0.13. Дакле, $\ker(A - \lambda) = \ker(A - \lambda)^*$. Ако $h \in \ker(A - \lambda)$, $Ah = \lambda h \in \ker(A - \lambda)$. Такође, $A^*h = \bar{\lambda}h \in \ker(A - \lambda)$. Дакле, $\ker(A - \lambda)$ је редуковани потпростор од A. □

Лема 2.5.0.4. *Ако је T компактан самоадјугован оператор, тада су оба $\pm\|T\|$ сопствене вредности од T.*

Доказ. Ако је $T = 0$, тада лема важи. Претпоставимо да је $T \neq 0$. На основу пропозиције 2.2.0.10, постоји низ $\{h_n\}$ јединичних вектора тако да је $|\langle Th_n, h_n\rangle| \to \|T\|$. Преласком на поднизове ако је потребно, можемо претпоставити $\langle Th_n, h_n\rangle \to \lambda$, где је $|\lambda| = \|T\|$. Биће показано да $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Пошто $|\lambda| = \|T\|$,

$$0 \leq \|(T - \lambda)h_n\|^2 = \|Th_n\|^2 - 2\lambda\langle Th_n, h_n\rangle + \lambda^2 \leq 2\lambda^2 - 2\lambda\langle Th_n, h_n\rangle \to 0.$$

С тога, $\|(T - \lambda)h_n\| \to 0$. На основу пропозиције 2.4.0.8, $\lambda \in \sigma_p(T)$. □

Вратимо се доказу теореме 2.5.0.1.

Доказ теореме 2.5.0.1: На основу леме 2.5.0.4, постоји реалан број $\lambda_1 \in \sigma_p(T)$ тако да је $|\lambda_1| = \|T\|$. Нека је $\mathcal{E}_1 = \ker(T - \lambda_1)$, P_1 је пројектор на $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{E}_1^{\perp}$. На основу пропозиције 2.5.0.3, $\mathcal{E}_1$ је редуковани потпростор од T, па је $\mathcal{H}_2$ редуковани потпростор од T. Нека је $T_2 = T \mid \mathcal{H}_2$; тада T_2 је самоадјуговани компактни оператор на $\mathcal{H}_2$. На основу леме 2.5.0.4, постоји сопствена вредност λ_2 за T_2 тако да је $|\lambda_2| = \|T_2\|$. Нека је $\mathcal{E}_2 = \ker(T_2 - \lambda_2)$. Приметимо $\{0\} \neq \mathcal{E}_2$ и да је $\mathcal{E}_2 \subseteq \ker(T - \lambda_2)$. Ако би било да је $\lambda_1 = \lambda_2$, тада $\mathcal{E}_2 \subseteq \ker(T - \lambda_1) = \mathcal{E}_1$. Пошто је $\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_2$, онда мора да важи $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Нека је P_2 пројектор од $\mathcal{H}$ на $\mathcal{E}_2$ и ставимо да је $\mathcal{H}_3 = (\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2)^{\perp}$. Приметимо да $\|T_2\| \leq \|T\|$, па је $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$. Користећи индукцију, добијамо низ $\{\lambda_n\}$ реалних сопствених вредности од T тако да:

1. $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots$;
2. Ако је $\mathcal{E}_n = \ker(T - \lambda_n)$, $|\lambda_{n+1}| = \| \, T \mid (\mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_n)^{\perp} \|$.

На основу 1, постоји ненегативан број α тако да је $|\lambda_n| \to \alpha$.

Доказаћемо још једну помоћну лему која нам је потребна за доказ.

Помоћна лема. $\alpha = 0$, *тада је* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Доказ. Заправо, нека је $e_n \in \mathcal{E}_n$, $\|e_n\| = 1$. Пошто је T компактан оператор, постоје $h \in \mathcal{H}$ и подниз $\{e_{n_j}\}$ тако да је $\|Te_{n_j} - h\| \to 0$. Али $e_n \perp e_m$ за $n \neq m$ и $Te_{n_j} = \lambda_{n_j} e_{n_j}$. С тога,

$$\|Te_{n_j} - Te_{n_i}\|^2 = \lambda_{n_j}^2 + \lambda_{n_i}^2 \geq 2\alpha^2.$$

Пошто је $\{Te_{n_j}\}$ Кошијев низ, $\alpha = 0$. □

Овим је доказана лема и враћамо се на главни доказ.

Нека је P_n пројектор од $\mathcal{H}$ на $\mathcal{E}_n$ и испитујемо $T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j$. Ако је $h \in \mathcal{E}_k$, $1 \leq k \leq n$, тада

$$(T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j)h = Th - \lambda_k h = 0.$$

С тога, $\mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_n \subseteq \ker(T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j)$. Ако је $h \in (\mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_n)^{\perp}$, тада $P_j h = 0$ (6) за $1 \leq j \leq n$; па имамо да је $(T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j)h = Th$ (7).

Чињенице (6) и (7), заједно са тим да је $(\mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_n)^{\perp}$ редуковани потпростор од T, имплицирају да $\|T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j\| = \| \, T \mid (\mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_n)^{\perp} \| = |\lambda_{n+1}| \to 0$.

Дакле, низ $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ конвергира у метрици од $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ка T, чиме је доказ теореме 2.5.0.1 завршен.

□

Теорема 2.5.0.1 се другачије назива *Спектрална теорема за самоадјуговане операторе.*

2.6 Хилберт – Шмитови оператори

Дефиниција 2.6.0.1. *Нека је $\mathcal{H}$ сепарабилан Хилбертов простор. $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ је Хилберт – Шмитов оператор ако*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$$

где је $\{e_1, e_2, \ldots\}$ нека ортонормирана база за $\mathcal{H}$.

Пример 2.6.0.2. *Нека је $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$. Знамо да је $\mathbb{R}^n$ сепарабилан Хилбертов простор и узмимо да је $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ортонормирана база. Сада треба да дефинишемо T тако да $T \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$$

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где је T дефинисано са

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n})$$

Овако дефинисано T испуњава све услове дефиниције, па следи да је T Хилберт – Шмитов оператор.

Пример 2.6.0.3. *$\mathcal{H} = l^2$ над $\mathbb{K}$, где је $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ортонормирана база таква да важи:*

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0) \text{ и тако даље.}$$

У примеру 1.1.0.10. имамо да је l^2 Хилбертов простор, а да је сепарабилан простор можете погледати у [8]. Треба још показати да је $T \in \mathcal{B}(l^2)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$.

Разликујемо неколико случајева:

1. *$T = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = 0 < \infty$, што је испуњено.*
2. *$T = I$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \ldots = 1 + 1 + \ldots < \infty$, пошто имамо бесконачну суму, ова неједнакост не важи па у овом случају T није Хилберт – Шмитов оператор.*

Дефинишимо T као у примеру 2.6.0.2, лако се проверава да је T ограничени линеарни функционал. Покажимо да важи још $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 &= \|Te_1\|^2 + \|Te_2\|^2 + \|Te_3\|^2 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty\end{aligned}$$

<u>*Напомена*</u>: Ако $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, где је $\mathcal{H}$ коначно димензионалан, тада је T Хилберт – Шмитов оператор.

Теорема 2.6.0.4. *Нека је $\mathcal{H}$ сепарабилан Хилбертов простор и T је Хилберт – Шмитов оператор на $\mathcal{H}$, тада је T компактан оператор.*

Доказ. Нека је $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ортонормирана база за $\mathcal{H}$, тада на основу теореме 1.4.0.11 под г), свако $x \in \mathcal{H}$ можемо написати као

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n.$$

На основу тога што је T Хилберт – Шмитов оператор, имамо да је T линеаран и непрекидан, а из тога следи да је

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle Tu_n.$$

Сада за $m = 1, 2, \ldots$, дефинишимо парцијалну суму

$$T_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \langle x, u_n \rangle Tu_n.$$

$T_m(x) \in \operatorname{span}\{Tu_1, Tu_2, \dots, Tu_m\}$, па је dim ran $T_m \leq m$, тј. T_m је коначног ранга за свако m. Из овога произилази да је T_m компактан оператор на основу теореме 2.4.0.4.

У даљем доказу користићемо Хелдерову неједнакост, коју ћемо навести, а доказ можете погледати у [9].

Хелдерова неједнакост: Нека су $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ произвољне n-торке позитивних реалних бројева и $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ такви да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$. Тада:

а.) ако су p, q позитивни бројеви, важи неједнакост

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

б.) ако је $p < 0$ или $q < 0$, важи обрнута неједнакост

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

У оба случаја једнакост важи акко су a^p и b^q директно пропорционални.

Вратимо се доказу. Сада за свако $x \in \mathcal{H}$,

$$\|(T_m - T)x\|^2 = \|(T - T_m)x\|^2 = \|Tx - T_m x\|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n \right\|^2$$

$$\leq \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle| \|Tu_n\| \right)^2$$

$$\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \|Tu_n\|^2 \quad \text{(Хелдерова неједнакост)}$$

$$\leq \|x\|^2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \|Tu_n\|^2 \quad \text{(Беселова неједнакост).}$$

Дакле, $\|T - T_m\| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \|Tu_n\| \to 0$, када $n \to \infty$, с тога је T компактан оператор на основу теореме 2.4.0.4.

□

Пропозиција 2.6.0.5. *Ако је $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ Хилберт – Шмитов оператор, тада је T^* такође Хилберт – Шмитов оператор.*

Доказ. На основу претпоставке да је T Хилберт – Шмитов оператор, имамо ортонормирану базу $\{e_1, e_2, \dots\}$ од $\mathcal{H}$ тако да је $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$. Циљ нам је да покажемо $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^* e_n\|^2 < \infty$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\|T^*e_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\langle T^*e_n, e_m\rangle|^2 \quad \text{(Парсевалова једнакост)}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\langle e_n, Te_m\rangle|^2\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\langle Te_m, e_n\rangle|^2\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\|Te_m\|^2 < \infty \quad \text{(Парсевалова једнакост)}\end{aligned}$$

$\Rightarrow T^*$ је Хилберт – Шмитов оператор.

□

Напомена: За разлику од скупа свих компактних оператора, генерално, скуп Хилберт – Шмитових оператора није затворен у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, тј. ако је $\{T_n\}$ низ Хилберт – Шмитових оператора тако да $T_n \to T$, онда T не мора бити Хилберт – Шмитов оператор.

Показаћемо да изабрана ортонормирана база $\{e_1, e_2, \ldots\}$ нема значаја у дефиницији Хилберт – Шмитовог оператора. Другим речима, услов $\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|^2 < \infty$ је независан од избора ортонормиране базе.

Пропозиција 2.6.0.6. *Нека је $\mathcal{H}$ сепарабилан Хилбертов простор и $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ је Хилберт – Шмитов оператор. Претпоставимо да су $\{e_1, e_2, \ldots\}$ и $\{v_1, v_2, \ldots\}$ две ортонормиране базе од $\mathcal{H}$. Тада,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\|Tv_n\|^2$$

Доказ.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\langle Te_n, v_m\rangle|^2 \quad \text{(Парсевалова једнакост)}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\langle e_n, T^*v_m\rangle|^2\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\langle T^*v_m, e_n\rangle|^2\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\|T^*v_m\|^2 \quad \text{(Парсевалова једнакост)}\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\|Tv_m\|^2\end{aligned}$$

и овим је доказана пропозиција.

□

3 Слаба решења елиптичних проблема, Лакс-Милграм теорема и примена

Лапласова једначина $\Delta u = 0$ је тип елиптичних једначина и његов нехомогени пандан, Поасонова једначина $-\Delta u = f$, где користимо нотацију

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

за Лапласов оператор.

Уопштеније, нека је Ω ограничени отворени скуп у $\mathbb{R}^n$, и размотримо линеарну парцијалну диференцијалну једначину другог реда

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad x \in \Omega \tag{4}$$

где су a_{ij}, b_i, c коефицијенти и f испуњавају следеће услове:

1. $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $i, j = 1, \ldots, n$
2. $b_i \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, n$
3. $c \in C(\overline{\Omega})$, $f \in C(\overline{\Omega})$, $f \in C(\overline{\Omega})$
4. $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \tilde{c}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{5}$$

где је $\tilde{c}$ позитивна константа независна од x и ξ. Услов (5) се обично назива униформна елиптичност, а (4) се назива елиптична једначина.

Услови из (4) се обично допуњују једним од следећих граничних услова, при чему са g означавамо функцију дефинисану на $\partial\Omega$:

а.) $u = g$ на $\partial\Omega$ (Дирихлеов гранични услов);

б.) $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ на $\partial\Omega$, где са ν означавамо јединични вектор спољашње нормале на $\partial\Omega$ (Нојманов гранични услов);

в.) $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = g$ на $\partial\Omega$, где је $\sigma(x) \geq 0$ на $\partial\Omega$ (Робинов гранични услов);

г.) Уопштење граничних услова б.) и в.) је

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos\alpha_j + \sigma(x)u = g \quad \text{на } \partial\Omega,$$

где је α_j угао између јединичног вектора спољашње нормале ν на $\partial\Omega$ и x_j–осе (гранични услов косог извода).

У многим физичким проблемима се намеће једна врста граничног услова на $\partial\Omega$ (нпр. $\partial\Omega$ је унија два дисјунктна подскупа $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$, са Дирехлеовим граничним условом на $\partial\Omega_1$ и Нојмановим граничним условом на $\partial\Omega_2$). Проучавање таквих мешовитих проблема граничних вредности неће бити тема у овом раду.

Почињемо са разматрањем хомогеног Дирихлеовог граничног проблема

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad x \in \Omega \tag{6}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \tag{7}$$

где су a_{ij}, b_i, c и f као у (5).

Функција $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ која задовољава (6) и (7) се назива *класично решење* овог проблема. Теорија парцијалних диференцијалних једначина нам говори да (6) и (7) има јединствено класично решење, под условом да су a_{ij}, b_i, c, f и $\partial\Omega$ довољно „глатки“. Међутим, треба узети у обзир једначине где су ови захтеви за глаткошћу нарушени, а за такве проблеме класична теорија је неодговарајућа. Узмимо, нпр. Поасонову једначину са нултим Дирихлеовим граничним условом на $\Omega = (-1, 1)^n$ у $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} -\Delta u = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2} - |x|\right), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

Овај проблем нема класично решење, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, јер би иначе Δu била непрекидна функција на Ω, што је немогуће зато што $\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2} - |x|\right)$ није непрекидна на Ω. Да бисмо превазишли ограничења класичне теорије и да бисмо могли да се бавимо парцијалним диференцијалним једначинама са „не-глатким“ подацима, уопштавамо појам решења слабљењем захтева диференцијабилности за u.

Напомена: **Носач** од непрекидних функција на отвореном скупу $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ је дефинисан као затворење у Ω скупа $\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}$. Носач ћемо обележавати са supp. $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ је скуп свих u из $\mathcal{C}^1(\Omega)$ чији је supp ограничен подскуп од Ω.

За почетак, претпоставимо да је u класично решење за (6) и (7). Тада, за свако $v \in C_0^1(\Omega)$,

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \cdot v\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v\, dx + \int_\Omega c(x)uv\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx.$$

Интеграцијом по деловима у првом интегралу и констатацијом да је $v = 0$ на $\partial\Omega$, добијамо

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}v\,dx$$
$$+\int_{\Omega}c(x)uv\,dx=\int_{\Omega}f(x)v(x)\,dx,\quad \forall v\in C_0^1(\Omega).$$

Да би ова једнакост имала смисла, више не треба да претпостављамо да је $u\in C^2(\Omega)$: довољно је да $u\in L^2(\Omega)$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2(\Omega), i=1,\ldots,n$. Дакле, имајући у виду да u мора да задовољава нулти Дирихлеов гранични услов, природно је тражити u у простору $H_0^1(\Omega)$.

Напомена:

- $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ је простор локално интеграбилних функција (интеграбилних на сваком подскупу свог домена)
- $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ је простор бесконачно диференцијабилних функција са компактним носачем.

Дефиниција 3.0.0.1. *Функција $f\in\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ је слабо диференцијабилна у односу на x_i ако постоји функција $g_i\in\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ тако да важи:*

$$\int_{\Omega}f\partial_i\phi dx=-\int_{\Omega}g_i\phi dx,\quad \text{за свако } \phi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Функција g_i се назива слаби i-ти парцијални извод од f, и означава се са $\partial_i f$.

Дакле, за слаби извод, интеграција део по део формула:

$$\int_{\Omega}f\partial_i\phi dx=-\int_{\Omega}\partial_i f\phi dx$$

важи по дефиницији за све $\phi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Дефиниција 3.0.0.2. *Претпоставимо да је $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ мулти-индекс. Функција $f\in\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ има слаби извод $\partial^\alpha f\in\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ ако важи:*

$$\int_{\Omega}(\partial^\alpha f)\phi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}f(\partial^\alpha\phi)dx,\quad \text{за свако } \phi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

$$H_0^1(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega):\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2(\Omega),\, i=1,\ldots,n,\, u=0 \text{ на } \partial\Omega\}.$$

Стога, разматрамо следећи проблем: наћи u у $H_0^1(\Omega)$ тако да

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}v\,dx \tag{9}$$
$$+\int_{\Omega}c(x)uv\,dx=\int_{\Omega}f(x)v(x)\,dx,\quad \forall v\in C_0^1(\Omega).$$

Примећујемо да је $C_0^1(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)$, и да је лако видети да када $u\in H_0^1(\Omega)$ и $v\in H_0^1(\Omega)$ (уместо да $v\in C_0^1(\Omega)$), изрази на левој и десној страни (9) имају још увек смисла. Ово мотивише следећу дефиницију.

Дефиниција 3.0.0.3. *Нека је* $a_{ij} \in L^\infty(\Omega), i, j = 1, \ldots, n$, $b_i \in L^\infty(\Omega), i = 1, \ldots, n$ *и нека је* $f \in L^2(\Omega)$. *Функција* $u \in H_0^1(\Omega)$ *која задовољава*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx + \int_\Omega c(x) uv \, dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{10}$$

назива се слабо решење за (6) и (7). Сви парцијални изводи у (10) треба схватити као слабе изводе.

Јасно је да, ако је u класично решење за (6) и (7), онда је и слабо решење за (6) и (7). Међутим, обратно није тачно. Ако (6) и (7) има слабо решење, ово можда неће бити довољно глатко да буде класично решење. Заиста, у наставку ћемо доказати да гранични проблем (8) има јединствено слабо решење $u \in H_0^1(\Omega)$, упркос томе што нема класично решење. Пре разматрања овог конкретног проблема граничне вредности, питање постојања јединственог слабог решења за општији проблем (6) и (7).

Ради једноставности усвајамо следећу нотацију:

$$a(w, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx + \int_\Omega c(x) uv \, dx \tag{11}$$

и

$$l(v) = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx. \tag{12}$$

Са овом новом нотацијом, проблем (10) може се написати на следећи начин:

$$\text{наћи } u \text{ тако да } a(u, v) = l(v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{13}$$

Ми ћемо доказати постојање јединственог решења за овај проблем коришћењем следећег апстрактног резултата функционалне анализе.

Означимо са H реални Хилбертов простор са унутрашњим производом $(\cdot, \cdot)$ и нормом $\| \cdot \| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$. Наставићемо да користимо $\langle \cdot, \cdot \rangle$ да означимо дејство елемента из H^* на елемент из H.

Теорема 3.0.0.4 (Лакс–Милграм)**.** *Претпоставимо да је* $B : H \times H \to \mathbb{R}$ *билинеарни облик за које постоје константе* $\alpha, \beta > 0$ *тако да је*

$$|B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in H \tag{14}$$

$$|B[u, v]| \geq \beta \|u\|^2, \quad \forall u \in H. \tag{15}$$

Тада за свако $f \in H^*$, *постоји јединствено* $u \in H$ *тако да*

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle, \quad \text{за свако } v \in H.$$

Сам доказ, извешћемо кроз неколико лема и објединити све те резултате. Пре него што пређемо на доказ теореме даћемо једну напомену.

Напомена 3.0.0.5.

- *a.) Ако је B симетрично (тј. $B[u,v] = B[v,u]$ за свако $u, v \in H$), тада је $B[u,v]$ унутрашњи производ на H, и ово само је Рисова теорема о представљању.*
- *b.) Слично, важи за комплексан Хилбертов простор H, под претпоставком да је B сесквилинеаран.*

Доказ. Прво, за свако фиксирано $u \in H$, пресликавање $T_u v = B[u,v]$ је ограничени линеарни функционал на H, тј.

$$|T_u v| = |B[u,v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|,$$

а линеарност следи из билинеарности од B. Можемо закључити на основу Рисове теореме о представљању да постоји јединствено $w \in H$ тако да

$$B[u,v] = (w,v), \quad \forall v \in H.$$

Означимо са $A : H \to H$ пресликавање које „узима“ $u \in H$ као „улаз“ и враћа $w \in H$ и на овај начин $B[u,v] = (Au,v), \forall v \in H$.

Доказаћемо неколико лема које нам требају за доказ.

Лема 3.0.0.6. $A \in H^*$

Доказ. Прво да видимо да је A линеарно. Нека је $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in H$ и изводимо једноставан рачун

$$\begin{aligned}
(A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v) &= B[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v] \\
&= \lambda_1 B[u_1, v] + \lambda_2 B[u_2, v] \\
&= \lambda_1 (Au_1, v) + \lambda_2 (Au_2, v) \\
&= (\lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v)
\end{aligned}$$

пошто је ово тачно за свако $v \in H$, можемо закључити

$$A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2.$$

Да бисмо видели да је A ограничено, прво приметимо да нема шта да се покаже ако је $Au = 0$. Ако је $Au \neq 0$, тада имамо

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = B[u, Au] \leq \alpha \|u\| \|Au\|.$$

Дељењем са $\|Au\|$, имамо $\|Au\| \leq \alpha \|u\|$.

$\square$

Лема 3.0.0.7. *A је injективно, и слика од A, $R(A)$, је затворен у H.*

Доказ. Показујемо да је A инјективно. Користимо (15) да запишемо $\beta \leq B[u, v] = (Au, u) \leq \|Au\|\|u\|$. Ако је $\|u\| \neq 0$, дељењем са $\|u\|$ добијамо, $\|Au\| \geq \beta\|u\|$. Наравно, тривијално важи за $\|u\| \neq 0$.

Посебно, ако $u_1, u_2 \in H$, тада $\|A(u_1 - u_2)\| \geq \beta\|u_1 - u_2\|$, а одавде се види да је A инјективно (тј. $u_1 \neq u_2 \Rightarrow Au_1 \neq Au_2$).

Сада показујемо да је $R(A)$ затворен у H. Нека је $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ који испуњава $Au_j \to w$ за неко $w \in H$. Треба да покажемо да постоји $u \in H$ тако да $Au = w$ (тј. $w \in R(A)$).

За ово, примећујемо да

$$\|u_i - u_j\| \leq \frac{1}{\beta}\|Au_i - Au_j\|.$$

Низ $\{Au_j\}_{j=1}^{\infty}$ конвергира па је самим тим и Кошијев низ и низ $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ мора бити Кошијев низ, и мора конвергирати ка неком $u \in H$. Пошто је A ограничено,

$$\|Au - w\| = \lim_{j\to\infty} \|Au - Au_j\| \leq \alpha \lim_{j\to\infty} \|u - u_j\| = 0 \text{ тј. } Au = w.$$

(Алтернативно, пошто је A ограничено, знамо из теореме о затвореном графику да је A затворено, и то нам омогућава да закључимо $Au = w$)

□

Лема 3.0.0.8. $R(A) = H$

Доказ. Претпоставимо супротно, и подсетимо се пошто је $R(A)$ затворено, можемо писати

$$H = R(A) \oplus R(A)^{\perp}.$$

Ако је $R(A) \subsetneq H$, тада ми можемо пронаћи $w \in R(A) \setminus \{0\}$, и за то w ми имамо

$$0 \neq \beta\|w\|^2 \leq B[w, w] = (Aw, w) = 0,$$

што је контрадикција.

□

Настављамо доказ теореме. Према Рисовој теореми о представљању, за свако $f \in H^*$, ми можемо наћи јединствено $w \in H$ тако да

$$\langle f, v\rangle = (w, v), \quad \text{за свако } v \in H.$$

На овај начин, видимо да можемо да решимо $B[u, v] = \langle f, v\rangle$, $\forall v \in H$.

Решавањем $B[u, v] = (w, v)$, $\forall v \in H$. Подсетимо се да је

$$B[u, v] = (Au, v), \forall v \in H.$$

Из овога видимо да је $Au = w$, а решење које тражимо је $u = A^{-1}w$.

Још остаје да се покаже јединственост овог решења. Претпоставимо супротно да су u и $\tilde{u}$ два решења тако да

$$B[u, v] = \langle f, v\rangle, \forall v \in H$$

$$B[\tilde{u}, v] = \langle f, v\rangle, \, \forall v \in H.$$

Замењујући и користећи линеарност, видимо да је $B[u-\tilde{u}, v] = 0$, $\forall v \in H$. Узмимо да је $v = u - \tilde{u}$, и приметимо на основу (15)

$$\|u - \tilde{u}\|^2 \leq \frac{1}{\beta} B[u - \tilde{u}, u - \tilde{u}] = 0.$$

Тј., $u = \tilde{u}$.

□

Даћемо другу верзију Лакс–Милграм теореме (разлика је само у нотацији) коју ћемо користити приликом показивања егзистенције јединственог слабог решења за (6) и (7).

Теорема 3.0.0.9 (Лакс–Милграм друга верзија)**.** *Претпоставимо да је V реални Хилбертов простор снабдевен нормом $\|\cdot\|_V$. Нека је $a(\cdot,\cdot)$ билинеарни функционал на $V \times V$ тако да је:*

а.) $\exists c_0 > 0, \, \forall v \in V, \, a(v, v) \geq c_0 \|v\|_V^2$,

б.) $\exists c_1 > 0, \, \forall v, w \in V, \, |a(w, v)| \leq c_1 \|w\|_V \|v\|_V$, *и нека је $l(\cdot)$ линеарни функционал на V тако да је:*

в.) $\exists c_2 > 0, \, \forall v \in V, \, |l(v)| \leq c_2 \|v\|_V$.

Тада, постоји јединствено $u \in V$ тако да је $a(u, v) = l(v)$, $\forall v \in V$.

Сада ћемо показати егзистенцију и јединственост слабог решења за (6) и (7). Узећемо да је $V = H_0^1(\Omega)$ и норму $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Овде нећемо доказивати да је $H_0^1(\Omega)$ Хилбертов простор снабдевен скаларним производом $(w, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega wv \, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx$ и нормом $\|w\|_{H^1(\Omega)} = (w, w)_{H^1(\Omega)}^{1/2}$ (за доказ погледати [10]).

Следеће што ћемо показати је да $a(\cdot,\cdot)$ и $l(\cdot)$ дефинисани у (11) и (12) задовољавају све услове Лакс–Милграм теореме.

Прво ћемо показати (в). Пресликавање $v \to l(v)$ је линеарно: заиста, за свако $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} l(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \int_\Omega f(x)(\alpha v_1 + \beta v_2) \, dx \\ &= \alpha \int_\Omega f(x) v_1(x) \, dx + \beta \int_\Omega f(x) v_2(x) \, dx \\ &= \alpha l(v_1) + \beta l(v_2), \quad v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

дакле, $l(\cdot)$ је линеарни функционал на $H_0^1(\Omega)$. Такође, на основу Коши–Шварцове неједнакости,

$$\begin{aligned} |l(v)| = \left| \int_\Omega f(x) v(x) \, dx \right| &= \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

за свако $v \in H_0^1(\Omega)$, где користимо очигледну неједнакост $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$.

Узимајући да је $c_2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}$, добијамо тражену ограниченост.

Следеће показујемо (б).

За свако фиксирано $w \in H_0^1(\Omega)$, пресликавање $v \to a(v,w)$ је линеарно. Слично, за свако фиксирано $v \in H_0^1(\Omega)$, пресликавање $w \to a(v,w)$ је линеарно. Стога, $a(\cdot,\cdot)$ је билинеарни функционал на $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Примењујући Коши–Шварцову неједнакост, закључујемо

$$
\begin{aligned}
|a(w,v)| \leq & \sum_{i,j=1}^{n} \max_{x\in\overline{\Omega}} |a_{ij}(x)| \left| \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx \right| \qquad (16)\\
& + \sum_{i=1}^{n} \max_{x\in\overline{\Omega}} |b_i(x)| \left| \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} v\, dx \right| \\
& + \max_{x\in\overline{\Omega}} |c(x)| \left| \int_\Omega w(x)v(x)\, dx \right| \\
& \leq \hat{c} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} \right.\\
& + \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2\, dx \right)^{1/2} \\
& \left. + \left(\int_\Omega |w|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2\, dx \right)^{1/2} \right\} \\
& \leq \hat{c} \left\{ \left(\int_\Omega |w|^2\, dx \right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \right\} \\
& \times \left\{ \left(\int_\Omega |v|^2\, dx \right)^{1/2} + \sum_{j=1}^{n} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} \right\}
\end{aligned}
$$

где је

$$\hat{c} = \max\left\{ \max_{1\le i,j\le n} \max_{x\in\overline{\Omega}} |a_{ij}(x)|, \max_{1\le i\le n} \max_{x\in\overline{\Omega}} |b_i(x)|, \max_{x\in\overline{\Omega}} |c(x)| \right\}.$$

Даљом мајоризацијом десне стране у (13) закључујемо да

$$|a(w,v)| \le 2n\hat{c} \left(\int_\Omega |w|^2\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^2 dx \right)^{1/2}$$
$$\times \left(\int_\Omega |v|^2\,dx + \sum_{j=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|^2 dx \right)^{1/2},$$

тако да, узимајући да је $c_1 = 2n\hat{c}$, добијамо неједнакост (б):

$$|a(w,v)| \le c_1 \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{17}$$

Остало је још да покажемо под (а). Да бисмо ово урадили, ми ћемо делимично испунити захтеве за глаткост коефицијената b_i захтевајући да $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Користећи (5), закључујемо да

$$a(v,v) \ge \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega b_i(x) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(v^2)\,dx + \int_\Omega c(x)|v|^2\,dx,$$

где смо ставили $\frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot v$ као $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(v^2)$. Интегришући по деловима други члан са десне стране, добијамо

$$a(v,v) \ge \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx + \int_\Omega \left(c(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \right) |v|^2\,dx.$$

Претпоставимо да b_i, $i = 1,\ldots,n$, и c задовољавају неједнакост

$$c(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \ge 0, \quad x \in \Omega. \tag{18}$$

Тада

$$a(v,v) \ge \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx. \tag{19}$$

Навешћемо једну неједнакост коју нећемо доказати, већ ћемо је искористити за крај доказа.

Лема 3.0.0.10 (Поенкаре-Фридрихова неједнакост). *Претпоставимо да је Ω ограничени отворени скуп у $\mathbb{R}^n$ (са довољно глатком границом $\partial\Omega$) и нека је $u \in H_0^1(\Omega)$; тада постоји константа $c^*(\Omega)$, независно од u, тако да је*

$$\int_\Omega |u(x)|^2\,dx \le c^* \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx.$$

На основу Поенкаре–Фридрихове неједнакости, десна страна се може даље ограничити да би добили

$$a(v,v) \geq \frac{\tilde{c}}{c^*} \int_\Omega |v|^2 \, dx. \tag{20}$$

Сумирајући 19 и 20 добијамо

$$a(v,v) \geq c_0 \left(\int_\Omega |v|^2 \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \, dx \right),$$

где је $c_0 = \frac{\tilde{c}}{1+c^*}$ *и отуда следи (а).*

4 Закључак

У овом раду је изнет теоријски концепт Хилбертовог простора и оператора на Хилбертовом простору. У последњем поглављу смо показали Лакс–Милграм теорему и применили је на доказ о постојању и јединствености слабих решења елиптичних проблема. Сви они које буде заинтересовао овај рад могу да наставе даље проучавајући теорију Фуријеових редова, Штурм–Луивил теорију диференцијалних једначина и тако даље. Једна од битних улога Хилбертовог простора и оператора на Хилбертовом простору (ово највише може заинтересовати физичаре, али и све које ова тема занима) јесте одређивање таласне функције, јер је таласна функција решење једначине задате квантним хермитским операторима.

5 Биографија

Милан Спајић је рођен 05.05.1995. у Сремској Митровици. Основну школу „Вељко Дугошевић“ у Руми је завршио 2010. године. Исте године уписује гимназију „Стеван Пузић“ у Руми, општи смер, коју је завршио 2014. године. После средње школе, уписује Природно-математички факултет у Новом Саду, смер Дипломирани професор математике (М4). Основне студије завршава 08.10.2021. и пребацује се на интегрисане академске студије, смер Мастер професор математике. Последњи испит је положио у октобарском року 2023. године, чиме је стекао услов за одбрану мастер рада.

Литература

[1] Conway, J. B. (2000). A course in functional analysis. Springer. DOI: 10.1007/978-1-4757-4383-8

[2] Аљанчић, С. (2011) Увод у реалну и функционалну анализу. Завод за уџбенике - Београд. ИСБН: 978-86-17-17590-8

[3] Јоцић, Д., Арсеновић, М., Достанић, М. (2012). Теорија мере, функционална анализа, теорија оператора. Завод за уџбенике - Београд. ИСБН: 8617180137

[4] Kreyszig, E. (1991) Introductory functional analysis with applications. New York: Wiley. ИСБН: 978-0-471-50459-7

[5] Nielsen, J. (2017) An Introduction to Compact Operators. Lakehead University, Thunder Bay, Ontario

[6] Кечкић, Д. Функционална анализа. https://poincare.matf.bg.ac.rs/~dragoljub.keckic/A3B.pdf Време приступа: 23.09.2024.

[7] Стојаковић, З., Бошњак, И. (2010) Елементи линеарне алгебре. Нови Сад, Симбол.

[8] Гајић, Љ., Курилић, М., Пилиповић, С., Станковић, Б. (2000) Збирка задатака из функционалне анализе , Унивезитетски уџбеник, Нови Сад ИСБН: 9788649900691

[9] Манојловић, Ј. Неједнакости и примене, Природно-математички факултет, Ниш. https://tesla.pmf.ni.ac.rs/Dmatem/sem3101/nejed-jelena.pdf Време приступа: 23.09.2024.

[10] Šuli, E. (2020) Lectures Notes of Finite Element Methods for Partial Differential Equations, University of Oxford.

[11] Танасковић, Ј. (2015) Геометрија Хилбертових простора , Математичка гимназија, Београд. https://www.mg.edu.rs/uploads/files/images/stories/dokumenta/maturski-2015/jovan-tanaskovic.pdf Време приступа: 23.09.2024.