Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Katarina Žigerović

Erdeš-Ko-Rado teorema i presecajuće familije permutacija

-master rad-

Novi Sad, 2024

Predgovor

Erdős[1]-Ko[2]-Rado[3] (EKR) teorema [2] je bila u centru velikog interesovanja od kako je objavljena 1961. godine. Ova teorema u najopštijem obliku opisuje veličinu i strukturu najveće familije podskupova veličine k (ili k-podskupova), iz skupa veličine n, koji imaju osobinu da bilo koja dva podskupa sadrže barem t zajedničkih elemenata. Opisanu familiju nazivaćemo t-presecajućom. Najlakši način da se konstruiše maksimalna familija t-presecajućih k-podskupova jeste da se odabere t elemenata i svi podskupovi koji sadrže tih t elemenata. Ovakvu familiju ćemo zvati kanoničkom t-presecajućom familijom. Pored toga, Erdős-Ko-Rado teorema ima brojna proširenja na matematičke objekte različite od skupova, a njena primena prostire se daleko izvan klasične kombinatorike. Samim tim, i ovaj rad će biti podeljen na nekoliko celina - najpre ćemo govoriti o EKR teoremi sa čisto kombinatornog stanovišta, a potom ćemo videti kako se ona može prevesti na jezik teorije grafova i teorije grupa.

U prvoj glavi rada se najpre upoznajemo sa operacijom zamene na familiji k-podskupova. Ova operacija biće neophodan alat u originalnom dokazu EKR teoreme, ali uz male modifikacije, slična operacija će biti korišćena u još nekoliko dokaza kasnije. Nakon toga dajemo formulaciju i dokaz same EKR teoreme, kako u opštem obliku za t-presecajuće familije, tako i u specijalnom slučaju kada je $t = 1$. Mnogi matematičari su nakon ovog dokaza pokušali da nađu kraći i elegantniji dokaz. U ovom radu će najpre biti prezentovan Franklov[4] dokaz, a metodom korišćenom u njemu može se dokazati i Hilton[5]-Milner[6] teorema. Naime, Hilton i Milner su odredili gornje ograničenje za kardinalnost nekanoničke familije presecajućih k-podskupova, i ovaj dokaz

[1] Pál Erdős (1913–1996), mađarski matematičar

[2] Chao Ko (1910-2002), kineski matematičar

[3] Richard Rado (1906-1989), nemački matematičar

[4] Péter Frankl (1953-), mađarski matematičar

[5] Anthony J. W. Hilton (1941-), britanski matematičar

[6] Eric Charles Milner (1928-1997), britanski matematičar

će takođe biti prezentovan ovde. Nakon toga ćemo videti kako se EKR teorema može dobiti direktno iz Kruskal[7]-Katona[8] teoreme koja daje gornje ograničenje za veličinu senke neke familije skupova. Na kraju prve glave govorićemo o dve varijacije Erdős-Ko-Rado teoreme. Preciznije, upoznaćemo se sa pojmovima unakrsno-presecajuće familije i familije presecajućih razdvojenih skupova, i videti kako izgleda gornje ograničenje na kardinalnost takvih familija.

Problemi vezani za presecajuće k-podskupove mogu se prevesti i na jezik teorije grafova pomoću pojma Kneserovog[9] grafa. Kneserov graf $K(n,k)$ je graf čiji su čvorovi svi k-podskupovi skupa $\{1,...,n\}$, a koji su susedni ako su disjunktni. Tada je presecajuća familija k-podskupova zapravo koklika u Kneserovom grafu, pa EKR teorema opisuje koklike maksimalne veličine. U drugoj glavi rada izvodićemo nekoliko različitih granica na veličinu klika i koklika Kneserovog grafa. Neke od ovih granica koristiće odnos između najveće i najmanje sopstvene vrednosti grafa $K(n,k)$. Sopstvenim vrednostima grafa G nazivaćemo sopstvene vrednosti njemu odgovarajuće matrice susedstva $A(G)$. Slično kao što smo kod presecajućih familija k-podskupova imali unakrsno-presecajuće familije, ovde ćemo definisati unakrsne koklike i dati gornje ograničenje za njihovu veličinu.

U trećoj glavi rada posmatraćemo presecajuće familije permutacija. Za familiju permutacija S na n-elementnom skupu kažemo da je presecajuća ako za svake dve permutacije g i h iz te familije postoji neko $x \in \{1,...,n\}$ tako da je $g(x) = h(x)$. Deza[10] i Frankl su dokazali da ovakva familija ne može biti kardinalnosti veće od $(n-1)!$. Cameron[11] i Ku su 2003. godine dokazali sledeće:
Neka je $n \geq 2$ i $S \subseteq S_n$ presecajuća familija permutacija takva da je $|S| = (n-1)!$. Tada je S koset stabilizatora jedne tačke.
Ovaj dokaz sastoji se iz nekoliko koraka: najpre ćemo pokazati da uvek možemo pretpostaviti da $\mathrm{Id} \in S$. Zatim ćemo definisati operaciju fiksiranja neke tačke $x \in [n]$ preko permutacije $g \in S_n$ i pokazati da je familija permutacija S koja zadovoljava gore navedene uslove zatvorena u odnosu na operaciju fiksiranja. Odavde sledi da je familija podskupova od $[n]$ fiksiranih permutacijama iz S presecajuća familija, pa na osnovu svih ovih zaključaka konačno možemo dokazati da S mora biti stabilizator jedne tačke.

[7]Joseph B. Kruskal (1928-2010), američki matematičar
[8]Gyula O. H. Katona (1941-), mađarski matematičar
[9]Martin Kneser (1928-2004), nemački matematičar
[10]Michel M. Deza (1939-2016), ruski matematičar
[11]Peter J. Cameron (1947-), australijski matematičar

***

Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Samiru Zahiroviću, na podršci i motivaciji tokom izrade ovog rada, ali podjednako i tokom samih master studija.

Zahvalila bih se i dr Ivici Bošnjaku i dr Vladu Uljareviću što su prihvatili da budu članovi komisije, i svojim sugestijama značajno doprineli ovom radu.

Takođe bih se zahvalila i svim ostalim profesorima i asistentima od kojih sam imala priliku da učim sve ove godine. Svako od njih je 'dolio poneku kapljicu', i doprineo da moja sklonost ka matematici izraste u pravu ljubav.

Veliko hvala dugujem i mojoj dragoj učiteljici Milici Tančić koja je prva prepoznala moj talenat za matematiku, i vredno i predano radila sa mnom na razvoju istog.

Hvala svim mojim prijateljima koji su često verovali u mene više i od mene same. Spremanje ispita u čitaonici i naše n-te pauze će zauvek biti prva asocijacija na studentske dane!

Za kraj, najveće hvala dugujem mojoj porodici - ocu Konstantinu, majci Vesni, sestrama Anđeliji i Mariji, i bratu Nemanji. Vi me možda niste učili matematici, ali sve ono što imam i što jesam je zahvaljujući vama! Jedini zadatak na kom ću sigurno raditi do kraja života jeste onaj koji od mene traži da vas petoro učinim srećnim i ponosnim.

Novi Sad, septembar 2024. Katarina Žigerović

Sadržaj

Glava 1

Erdős-Ko-Rado teorema

1.1 Uvod

Erdős-Ko-Rado teorema je jedan od fundamentalnih rezultata u ekstremalnoj kombinatorici i teoriji skupova. Objavljena je 1961. godine u radu pod nazivom *"Intersection theorems for systems of finite sets"* [2] i poslužila je kao inspiracija za mnoge teoreme o presecajućim sistemima skupova. U svom najpoznatijem obliku, ova teorema opisuje veličinu i strukturu najveće moguće kolekcije podskupova veličine k (k-podskupova) skupa od n elemenata, takve da svaki par k-podskupova iz kolekcije ima bar jedan zajednički element.

Definicija 1.1 *Za familiju $\mathcal{A}$ podskupova skupa $\{1, 2, ..., n\}$ (u nastavku ćemo ovaj skup označavati sa $[n]$) kažemo da je presecajuća ako je $A \cap B \neq \emptyset$ za sve $A, B \in \mathcal{A}$, tj. ako svaka dva skupa iz $\mathcal{A}$ imaju barem jedan zajednički element.*

Jedan od najlakših načina formiranja presecajuće familije dobija se fiksiranjem nekog elementa iz skupa $[n]$ i izdvajanjem svih onih podskupova tog skupa koji sadrže fiksirani element. Ovako dobijene presecajuće familije nazivaćemo *kanoničkim*. Međutim, postoje i drugi jednostavni načini za konstruisanje presecajućih familija, kao što ćemo videti u narednom primeru.

Primer 1.2 *Posmatrajmo jednu presecajuću familiju 3-podskupova na skupu $\{1, 2, ..., 7\}$:*

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\},$
$\{1, 3, 6\}, \{1, 3, 7\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 3, 7\}.$

Do ove famililije smo došli tako što smo posmatrali sve one 3-podskupove koji sadrže barem dva elementa iz skupa $\{1, 2, 3\}$. Vidimo da takvih *podskupova ima 13. Sa druge strane, kardinalnost kanoničke presecajuće familije u ovom slučaju biće* $\binom{7-1}{3-1} = 15$.

Prirodno se postavlja pitanje da li su kanoničke presecajuće familije uvek najveće među svim presecajućim familijama, kao i koje je to gornje ograničenje za kardinalnost familije presecajućih k-podskupova posmatranog skupa kardinalnosti n.

Odgovor na ova pitanja daje upravo Erdős-Ko-Rado teorema, a za razumevanje njenog originalnog dokaza iz 1961. godine, najpre na familiji podskupova skupa $[n]$, uvodimo jednu novu operaciju.

Definicija 1.3 *Neka je $\mathcal{A}$ familija k-podskupova skupa $[n]$. Za cele brojeve $i, j \in [n]$ definišemo (i, j)-zamenu skupa A iz $\mathcal{A}$ na sledeći način:*

$$S_{i,j}(A) = \begin{cases} (A \setminus \{j\}) \cup \{i\}, & \text{ako } j \in A \wedge i \notin A \wedge (A \setminus \{j\}) \cup \{i\} \notin \mathcal{A}; \\ A, & \text{inače,} \end{cases}$$

dok je (i, j)-zamena familije $\mathcal{A}$ definisana kao

$$S_{i,j}(\mathcal{A}) = \{S_{i,j}(A) : A \in \mathcal{A}\}.$$

Na primer, ako se $\mathcal{A}$ sastoji iz skupova

$$\{1,2,4\} \quad \{1,2,5\} \quad \{1,2,6\} \quad \{1,3,5\} \quad \{1,4,5\} \quad \{1,4,6\}$$

onda familiju $S_{3,4}(\mathcal{A})$ čine sledeći skupovi

$$\{1,2,3\} \quad \{1,2,5\} \quad \{1,2,6\} \quad \{1,3,5\} \quad \{1,4,5\} \quad \{1,3,6\}.$$

Ako je $\mathcal{A}$ familija k-podskupova, onda je i $S_{i,j}(\mathcal{A})$ familija podskupova iste veličine. Isto tako važi da kada metodom zamene delujemo na presecajuću familiju, opet dobijamo presecajuću familiju. Upravo ove osobine operacije zamene dokazujemo u narednoj lemi.

Lema 1.4 *Neka je $\mathcal{A}$ familija k-podskupova n-elementnog skupa, i neka $A \in \mathcal{A}$. Tada je:*
(i) $|S_{i,j}(A)| = |A|$,
(ii) $|S_{i,j}(\mathcal{A})| = |\mathcal{A}|$,
(iii) ako je $\mathcal{A}$ presecajuća familija onda je to i $S_{i,j}(\mathcal{A})$.

Dokaz. (i) i (ii) slede direktno iz definicije.
(iii) Neka je $\mathcal{A}$ presecajuća familija i neka $A, B \in \mathcal{A}$. Pokazaćemo da je tada $S_{i,j}(A) \cap S_{i,j}(B) \neq \emptyset$.

Ako i skup A i skup B ostaju nepromenjeni pri (i, j)-zameni, ili ako su oba skupa promenjena ovom operacijom, onda je jasno da je presek skupova $S_{i,j}(A)$ i $S_{i,j}(B)$ neprazan.
Dakle, bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $S_{i,j}(A) = A$ i $S_{i,j}(B) = (B \setminus \{j\}) \cup \{i\}$. Kako skup A ostaje nepromenjen, mora važiti barem jedna od sledećih relacija:

(a) $j \notin A$,

(b) $i \in A$,

(c) $(A \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathcal{A}$.

Ako važi (a) ili (b) onda se ponovo lako vidi da je presek skupova $S_{i,j}(A)$ i $S_{i,j}(B)$ neprazan.
Ako važi (c), onda kako je $\mathcal{A}$ presecajuće familija mora biti $((A \setminus \{j\}) \cup \{i\}) \cap B \neq \emptyset$. Kako $i \notin B$ i $j \notin (A \setminus \{j\}) \cup \{i\}$, onda postoji $k \in [n]$, $k \neq i, j$ koje pripada preseku $(A \setminus \{j\}) \cup \{i\}$ i B. Ali tada važi $k \in S_{i,j}(A) \cap S_{i,j}(B)$, što je i trebalo dokazati. □

Ako za sve $i < j$ važi $S_{i,j}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, onda $\mathcal{A}$ nazivamo *stabilnom familijom.* Svaka familija $\mathcal{A}$ može se transformirati u stabilnu metodom zamene. Tačnije, dovoljno je $\binom{n}{2}$ zamena da se to postigne. Dokaz ovoga se zasniva na posmatranju metode zamene iz malo drugačijeg ugla (pogledati [4]), a mi ćemo nadalje koristiti činjenicu da za svaku familiju skupova možemo pretpostaviti da je stabilna.

1.2 Originalni dokaz Erdős-Ko-Rado teoreme

Sada kada smo se upoznali sa operacijom zamene na nekoj familiji skupova, imamo potreban alat za dokazivanje EKR teoreme. Najpre ćemo dati formulaciju i dokaz teoreme za presecajuće familije, a ubrzo ćemo videti da je to samo posledica jačeg rezultata koji je takođe prezentovan u radu [2].

Teorema 1.5 *Neka su k i n prirodni brojevi takvi da je $n \geq 2k$. Ako je $\mathcal{A}$ presecajuća familija k-podskupova skupa $[n]$, onda*

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

Dokaz. Razmotrimo prvo slučaj kada je $n = 2k$. U ovom slučaju je, za svaki skup $A \in \mathcal{A}$, kardinalnost od A jednaka kardinalnosti skupa $[n] \setminus A$, i to je baš k. Kako je $\mathcal{A}$ presecajuća familija ne može se desiti da su i A i njegov komplement u $\mathcal{A}$, odakle sledi da je

$$|\mathcal{A}| \leq \frac{1}{2}\binom{n}{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Neka je sada $n > 2k$. Dokaz dajemo indukcijom po n.
Baza indukcije: Ako je $n = 3$, onda je $k = 1$, pa mora biti $|\mathcal{A}| = 1 \leq \binom{n-1}{k-1}$.
Induktivni korak: Pretpostavimo da teorema važi za sve $m < n$. Neka je $\mathcal{A}$ presecajuća familija k-podskupova skupa $[n]$ koja je stabilna. Dakle, za sve $i < n$ važi $S_{i,n}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Posmatrajmo sada familiju $\mathcal{A}$ kao uniju dve podfamilije - $\mathcal{A}_1$ u kojoj su svi oni skupovi koji ne sadrže n, i $\mathcal{A}_2$ koja se sastoji iz skupova koji sadrže n.

$\mathcal{A}_1$ je familija presecajućih k-podskupova skupa $[n-1]$, pa na osnovu induktivne hipoteze imamo da je $|\mathcal{A}_1| \leq \binom{n-2}{k-1}$.

Sada tražimo gornje ograničenje za kardinalnost podfamilije $\mathcal{A}_2$. Ako iz svakog skupa koji je u $\mathcal{A}_2$ izbacimo element n, ono što nam ostaje je familija $(k-1)$-podskupova skupa $[n-1]$. Kako bismo ponovo mogli da primenimo induktivnu hipotezu, moramo pokazati da je ta familija presecajuća, tj. da za svaka dva skupa $A, B \in \mathcal{A}_2$ važi

$$(A \setminus \{n\}) \cap (B \setminus \{n\}) \neq \emptyset.$$

A i B su k-podskupovi koji sadrže n, pa kako je $n > 2k$, postoji $x \in [n-1]$ tako da $x \notin A \cup B$. Familija $\mathcal{A}$ je stabilna, pa skup $(A \setminus \{n\}) \cup \{x\}$ mora pripadati $\mathcal{A}$. Sa druge strane, $\mathcal{A}$ je presecajuća familija, pa je presek skupova B i $(A \setminus \{n\}) \cup \{x\}$ neprazan, a samim tim skupovi B i A imaju zajedničku tačku različitu od n. Ovim smo pokazali da je $|\mathcal{A}_2| \leq \binom{n-2}{k-2}$.

Sada konačno imamo

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2| \leq \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{n-1}{k-1}.$$

$\square$

Primetimo, ako je $\mathcal{A}$ kanonička presecajuća familija, u teoremi 1.5 se dostiže jednakost. Za $n < 2k$ svaka dva k-podskupa bi imala neprazan presek, pa nam zato ovaj slučaj nije zanimljiv.

Do sada smo govorili o presecajućim familijama k-podskupova skupa $[n]$, međutim, potpuno analogno možemo definisati i t-presecajuće familije.

Definicija 1.6 *Neka je t prirodan broj, i $t \leq k$. Za familiju $\mathcal{A}$ k-podskupova skupa $[n]$ kažemo da je t-presecajuća ako za svaka dva skupa $A, B \in \mathcal{A}$ važi*

$$|A \cap B| \geq t.$$

Ponovo, ako svi k-podskupovi sadrže neki fiksirani t-skup, takvu familiju ćemo nazivati *kanoničkom t-presecajućom familijom.* Jasno je da će ovakve familije biti kardinalnosti $\binom{n-t}{k-t}$.

Lema 1.7 *Neka je $n \geq 2k - t$. Maksimalna t-presecajuća familija $k-$podskupova skupa $[n]$ nije $(t+1)$-presecajuća familija.*

Dokaz. Pretpostavimo da imamo $(t+1)$-presecajuću familiju $\mathcal{A}$. Dokazaćemo da joj tada možemo dodati skup kardinalnosti k tako da je novonastala familija t-presecajuća, pa samim tim $\mathcal{A}$ neće biti maksimalna t-presecajuća familija.

Neka su $A, B \in \mathcal{A}$ skupovi koji imaju najmanji broj elemenata u preseku među svim skupovima iz $\mathcal{A}$. Neka je $|A \cap B| = t + s$, $s \geq 1$. Sada iz skupa A izbacimo nekih s elemenata koji su u preseku skupova A i B i označimo novodobijeni skup sa A'. Jasno, $|A' \cap B| = t$. Kako smo A i B birali kao par skupova sa najmanjim presekom, sigurni smo da A' ima barem t elemenata u preseku sa svim ostalim skupovima iz $\mathcal{A}$.

Preostaje nam još da dopunimo skup A' tako da on bude kardinalnosti k, ali da očuvamo veličinu njegovog preseka sa skupom B. Nedostaje nam s elemenata, a možemo dodati bilo koje elemente iz skupa $(A \cup B)^{\mathsf{c}}$. Kako je

$$|(A \cup B)^{\mathsf{c}}| = n - (2k - t - s) = n - (2k - t) + s,$$

iz pretpostavke $n \geq 2k - t$ sledi da je $|(A \cup B)^{\mathsf{c}}| \geq s$, pa možemo uzeti nekih s elemenata i dodati ih u A'. Ovaj novi skup ćemo označiti sa A''.

Skup A'' ima tačno t elemenata u preseku sa B, pa zaključujemo da $A'' \notin \mathcal{A}$. Dobili smo familiju $\mathcal{A} \cup \{A''\}$ koja je t-presecajuća i veća od polazne familije $\mathcal{A}$ čime je završen dokaz ove leme. $\square$

U nastavku ćemo formulisati Erdős-Ko-Rado teoremu u najopštijem obliku, daćemo njen originalni dokaz i videćemo da je za n neophodno dati donje ograničenje kako bismo obezbedili da su presecajuće familije maksimalne veličine upravo kanoničke.

Teorema 1.8 (Erdős–Ko–Rado, 1961) *Neka je $\mathcal{A}$ t-presecajuća familija k-podskupova skupa $[n]$. Ako je $n \geq t + (k-t)\binom{k}{t}^3$ i ako $\mathcal{A}$ nije kanonička t-presecajuća familija, onda je*

$$|\mathcal{A}| < \binom{n-t}{k-t}.$$

Dokaz. Za početak, označimo sa r kardinalnost preseka svih skupova familije $\mathcal{A}$, tj. $r = \left|\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\right|$. Kako $\mathcal{A}$ nije kanonička t-presecajuća familija mora biti $r < t$.

Iz pretpostavke $n \geq t + (k-t)\binom{k}{t}^3$ imamo da je $n \geq t + 2(k-t)$, jer je $\binom{k}{t}^3 > 2$ uvek kada je $k > t$. Slučaj $k = t$ nije moguć jer smo pretpostavili da $\mathcal{A}$ nije kanonička familija.

Kako je $n \geq 2k - t$, na osnovu leme 1.7 maksimalna t-presecajuća familija nije $(t+1)$-presecajuća, pa postoje skupovi $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ takvi da je $|A_1 \cap A_2| = t$. Ponovo, kako $\mathcal{A}$ nije kanonička t-presecajuća familija postoji skup $A_3 \in \mathcal{A}$ tako da važi $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| < t$.

Posmatrajmo sada kolekciju T trojki (B_1, B_2, B_3) t-podskupova takvih da je $B_i \subset A_i$ za $i = 1, 2, 3$ i

$$t < |B_1 \cup B_2 \cup B_3| \leq k.$$

Za svaku trojku (B_1, B_2, B_3) iz T definišemo familiju skupova

$$\Phi_{(B_1,B_2,B_3)} = \{A : (B_1 \cup B_2 \cup B_3) \subseteq A \in \mathcal{A}\}.$$

Pokazaćemo da važi sledeće

$$\bigcup_{(B_1,B_2,B_3)\in T} \Phi_{(B_1,B_2,B_3)} = \mathcal{A}.$$

Iz definicije je jasno da je $\bigcup_{(B_1,B_2,B_3)\in T} \Phi_{(B_1,B_2,B_3)} \subseteq \mathcal{A}$. Pokažimo da važi i obratno. Neka $A \in \mathcal{A}$. Kako je $\mathcal{A}$ t-presecajuća familija znamo da je $|A \cap A_i| \geq t$ za $i = 1, 2, 3$. Neka je $B_i \subset A \cap A_i$, $|B_i| = t$. Tada je $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \subseteq A \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, pa je $|B_1 \cup B_2 \cup B_3| \leq k$. Sa druge strane imamo $t \leq |B_1 \cup B_2 \cup B_3|$. Ovde važi stroga nejednakost, jer ako bi bilo $t = |B_1 \cup B_2 \cup B_3|$, onda bismo imali $B_1 = B_2 = B_3$. Odavde bi sledilo da je $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \geq t$, što je u kontradikciji sa odabirom skupova A_1, A_2 i A_3. Ovim smo pokazali da postoji barem jedan skup

$B_1 \cup B_2 \cup B_3$ takav da je $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \subseteq A$ i $(B_1, B_2, B_3) \in T$, pa je $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{(B_1,B_2,B_3)\in T} \Phi_{(B_1,B_2,B_3)}$.

Sada nam je cilj da ograničimo veličine familija T i $\Phi_{(B_1,B_2,B_3)}$, pa samim tim ćemo dobiti i gornje ograničenje za $\mathcal{A}$.

Ako je $s = |B_1 \cup B_2 \cup B_3|$, onda je $\binom{n-s}{k-s}$ gornje ograničenje za $\Phi_{(B_1,B_2,B_3)}$. Kako je $s \geq t+1$, imamo $\binom{n-s}{k-s} \leq \binom{n-t-1}{k-t-1}$. Za gornje ograničenje kardinalnosti familije T dovoljno je uzeti $\binom{k}{t}^3$. Konačno, možemo zaključiti da je

$$|\mathcal{A}| = \left| \bigcup_{(B_1,B_2,B_3)\in T} \Phi_{(B_1,B_2,B_3)} \right| \leq \binom{n-t-1}{k-t-1}\binom{k}{t}^3.$$

Kako je $t < k$ i $n \geq t + (k-t)\binom{k}{t}^3$, onda je

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-t-1}{k-t-1}\binom{k}{t}^3 \leq \binom{n-t-1}{k-t-1}\frac{n-t}{k-t} = \binom{n-t}{k-t}.$$

□

U svom radu Erdős, Ko i Rado su naglasili da ovo donje ograničenje za n svakako nije najbolje moguće, ali da je neophodno ograničiti n odozdo. To su ilustrovali sledećim primerom.

Primer 1.9 *Neka je $n = 8, k = 4$ i $t = 2$. Tada je*

$$\{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,3,6\},\{1,2,3,7\},\{1,2,3,8\},\{1,2,4,5\},$$
$$\{1,2,4,6\},\{1,2,4,7\},\{1,2,4,8\},\{1,3,4,5\},\{1,3,4,6\},\{1,3,4,7\},$$
$$\{1,3,4,8\},\{2,3,4,5\},\{2,3,4,6\},\{2,3,4,7\},\{2,3,4,8\}\}$$

2-*presecajuća familija* 4-*podskupova skupa* $\{1,2,...,8\}$. *Vidimo da ova familija sadrži* 17 *skupova, dok kanonička* 2-*presecajuća familija u ovom slučaju ima* $\binom{8-2}{4-2} = 15$ *skupova, pa samim tim nije maksimalna.*

Nakon ovoga usledila su značajna poboljšanja rezultata vezanog za donje ograničenje za n u odnosu na ono koje je dato u originalnom radu. Frankl [7] je 1978. godine dokazao da se n može ograničiti sa $(t+1)(k-t+1)$, za $t \geq 15$, dok je Wilson [9] 1984. dao algebarski dokaz da je ovo ograničenje primenljivo za sve t.

Da je $(t+1)(k-t+1)$ najbolje moguće donje ograničenje za n možemo videti na sledećem primeru.

Primer 1.10 *Neka su n, k i t prirodni brojevi i neka je $t \le k \le n$. Za $i \in \{0,..,k-t\}$ definišemo*

$$\mathcal{F}_i = \{A : A \subset [n], |A| = k, |A \cap \{1,..,t+2i\}| \ge t+i\}.$$

Familija $\mathcal{F}_i$ je t-presecajuća familija k-podskupova skupa $[n]$, za sve $i \in \{0,..,k-t\}$. Primetimo, $\mathcal{F}_0$ je kanonička t-presecajuća familija.

Kako je

$$|\mathcal{F}_i| = \sum_{j=t+i}^{t+2i} \binom{t+2i}{j}\binom{n-(t+2i)}{k-j}$$

možemo uporediti $|\mathcal{F}_1|$ i $|\mathcal{F}_0|$:

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_1| &= \binom{t+2}{t+1}\binom{n-(t+2)}{k-(t+1)} + \binom{t+2}{t+2}\binom{n-(t+2)}{k-(t+2)} \\ &= (t+2)\binom{n-t-2}{k-t-1} + \binom{n-t-2}{k-t-2}\end{aligned}$$

$$|\mathcal{F}_0| = \binom{n-t}{k-t} = \binom{n-t-2}{k-t} + 2\binom{n-t-2}{k-t-1} + \binom{n-t-2}{k-t-2}$$

Pa dobijamo da je

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_0| - |\mathcal{F}_1| &= \binom{n-t-2}{k-t} - t\binom{n-t-2}{k-t-1} \\ &= \binom{n-t-2}{k-t-1}\left(\frac{n-k-1}{k-t} - t\right) \\ &= \binom{n-t-2}{k-t-1}\left(\frac{n-(t+1)(k-t+1)}{k-t}\right).\end{aligned}$$

Sada vidimo da kada je $n = (t+1)(k-t+1)$ važi $|\mathcal{F}_0| = |\mathcal{F}_1|$, dok za $n < (t+1)(k-t+1)$ imamo $|\mathcal{F}_0| < |\mathcal{F}_1|$.

Konačan odgovor na pitanje koja je veličina najveće t-presecajuće familije k-podskupova skupa $[n]$ za proizvoljne n, k i t, kao i kako ona izgleda, dali su Ahlswede i Khachatrian [10] 1997. Oni su zapravo odredili ograničenje na n (u odnosu na k i t) za koje je familija $\mathcal{F}_{i+1}$ veća od $\mathcal{F}_i$, ali su takođe dokazali da je za sve n upravo jedna od familija $\mathcal{F}_i$ najveća presecajuća familija. Ovim njihovim rezultatom je Erdős-Ko-Rado teorema konačno kompletirana. Sledeću teoremu navodimo bez dokaza.

Teorema 1.11 (Ahlswede-Khachatrian, 1997) *Neka su t, k i n celi brojevi takvi da je $1 \leq t \leq k \leq n$ i neka je r nenegativan ceo broj, $r \leq k - t$. Ako je*

$$(k-t+1)\left(2+\frac{t-1}{r+1}\right) < n < (k-t+1)\left(2+\frac{t-1}{r}\right),$$

onda je $\mathcal{F}_r$ jedinstvena (do na izomorfizam) t-presecajuća familija k-podskupova skupa $[n]$ maksimalne veličine. (Po dogovoru je $\frac{t-1}{r} = \infty$ za $r = 0$.) Ako je

$$n = (k-t+1)\left(2+\frac{t-1}{r+1}\right),$$

onda je $|\mathcal{F}_r| = |\mathcal{F}_{r+1}|$ i maksimalna t-presecajuća familija će biti izomorfna[1] *sa $\mathcal{F}_r$ ili $\mathcal{F}_{r+1}$.*

Sada ćemo videti da ova teorema zaista uključuje teoreme 1.5 i 1.8.

- Ako u nejednakost uvrstimo $r = 0$, dobijemo da je kanonička t-presecajuća familija $\mathcal{F}_0$ jedinstvena (do na izomorfizam) maksimalna t-presecajuća familija ako je $(k-t+1)(t+1) < n < \infty$.

- Za $t = 1$, nejednakost iz teoreme se svodi na

  $$2k < n < 2\left(k + \frac{0}{r}\right).$$

  Ako je $n > 2k$ ova nejednakost je zadovoljena samo kada je $r = 0$ (uz dogovor da je $\frac{0}{0} = \infty$), pa je jedinstvena maksimalna presecajuća familija ponovo kanonička familija, tj. $\mathcal{F}_0$.

  Ako je $n = 2k$, onda mora biti

  $$n = k\left(2 + \frac{0}{r+1}\right).$$

  Kako je ova jednakost zadovoljena za sve $r \in \{0, ..., k-1\}$, vidimo da u ovom slučaju imamo mnogo neizomorfnih presecajućih familija maksimalne veličine, tj. veličine $\binom{n-1}{k-1}$.

[1] Za dve familije podskupova skupa $[n]$ kažemo da su *izomorfne* ako se jedna od njih može dobiti iz druge permutacijom polaznog skupa $[n]$. Svake dve kanoničke t-presecajuće familije k-podskupova su izomorfne (i to su jedine familije skupova izomorfne sa kanoničkim familijama).

1.3 Alternativni dokazi Erdős-Ko-Rado teoreme

Nakon originalnog dokaza Erdős-Ko-Rado teoreme usledio je čitav niz pokušaja pronalaženja kraćih ili jednostavnijih dokaza za ovu teoremu. Posebno interesovanje privukao je slučaj kada je $t = 1$.

Neki od ovih alternativnih dokaza EKR teoreme naglašavaju potpuno različite aspekte samog problema i koriste razne tehnike ekstremalne kombinatorike koje su se opet pokazale veoma korisnim za rešavanje nekih drugih problema.

Mi ćemo se za početak osvrnuti na alternativni dokaz koji se javlja u Franklovom radu [4]. U ovom dokazu se ne bavimo strukturom maksimalnih presecajućih familija već isključivo ograničavanjem njihove kardinalnosti. Ono što je bitno jeste to da tehnike ovog dokaza mogu poslužiti za dokazivanje Hilton-Milner teoreme, čiji ćemo jedan dokaz i prezentovati u nastavku ove sekcije.

Lema 1.12 *Neka je $\mathcal{A}$ stabilna presecajuća familija k-podskupova skupa $[n]$. Tada za sve $A, B \in \mathcal{A}$ važi*

$$A \cap B \cap \{1, ..., 2k - 1\} \neq \emptyset.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje $A, B \in \mathcal{A}$ takvi da važi $A \cap B \cap \{1, ..., 2k - 1\} = \emptyset$, pri čemu smo A izabrali tako da je $|A \cap \{1, ..., 2k - 1\}|$ maksimalan. Kako je $\mathcal{A}$ presecajuća familija, onda postoji $j \in A \cap B$, $j > 2k - 1$. Znamo da je $|A \setminus \{j\}| = |B \setminus \{j\}| = k - 1$, pa je $|(A \cup B) \setminus \{j\}| \leq 2k - 2$. Odavde zaključujemo da postoji $i \leq 2k - 1$ tako da $i \notin A \cup B$. Kako je $\mathcal{A}$ stabilna familija, skup $(A \setminus \{j\}) \cup \{i\}$ je u $\mathcal{A}$ i važi

$$((A \setminus \{j\}) \cup \{i\}) \cap B \cap \{1, ..., 2k - 1\} = \emptyset$$

što je u kontradikciji sa maksimalnošću $|A \cap \{1, ..., 2k - 1\}|$ među svim takvim skupovima, jer $(A \setminus \{j\}) \cup \{i\}$ dodatno ima i element i u preseku sa skupom $\{1, ..., 2k - 1\}$. $\square$

Drugi dokaz EKR teoreme

Sada ćemo iskoristiti ovu lemu kako bismo dokazali da važi granica iz EKR teoreme za $t = 1$, $n \geq 2k$. Primenićemo indukciju po k. Jasno, za $k = 1$ tvrđenje trivijalno važi. Takođe, ako je $n = 2k$ tvrđenje je ponovo trivijalno jer $\mathcal{A}$ ne može sadržati istovremeno i neki skup i njegov komplement.

Neka je $n > 2k$ i pretpostavimo da je $\mathcal{A}$ stabilna familija presecajućih k-podskupova. Definišimo

$$\mathcal{A}_i = \{A \cap \{1, ..., 2k\} : A \in \mathcal{A}, |A \cap \{1, ..., 2k\}| = i\}.$$

Prema lemi 1.12, $\mathcal{A}_i$ je presecajuća familija i-podskupova za sve $i \in \{1, ..., k\}$. Indukcijom, za svaki $i \in \{1, ..., k-1\}$ važi

$$|\mathcal{A}_i| \leq \binom{2k-1}{i-1}.$$

Isto važi i kada je $i = k$, jer je tada $\mathcal{A}_k$ presecajuća familija k-podskupova skupa $[2k]$. Dakle,

$$|\mathcal{A}_k| \leq \frac{1}{2}\binom{2k}{k} = \binom{2k-1}{k-1}.$$

Za svaki skup $B \in \mathcal{A}_i$ postoji najviše $\binom{n-2k}{k-i}$ skupova A iz $\mathcal{A}$ takvih da je $A \cap \{1, ..., 2k\} = B$.
Sada možemo zaključiti da je

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &\leq \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{A}_i| \binom{n-2k}{k-i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \binom{2k-1}{i-1}\binom{n-2k}{k-i} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k-1}{j}\binom{n-2k}{k-1-j} \\ &= \binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

(U pretposlednjem redu smo samo pomerili brojač da bismo mogli da primenimo Vandermondov identitet.) □

Erdős-Ko-Rado teorema tvrdi da ako je $\mathcal{A}$ presecajuća familija k-podskupova skupa $[n]$ i $n \geq 2k$, onda je $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$. Ova granica se dostiže uzimajući sve one k-podskupove koji sadrže neki fiksirani element. Hilton i Milner [20] su pokazali da ako $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \emptyset$, tj. ako $\mathcal{A}$ nije kanonička familija, onda je $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1$ i to je najbolje moguće ograničenje. Sledeća dva primera ilustruju da granica iz Hilton-Milner teoreme ne može biti poboljšana.

Primer 1.13 *Za* $2 \le k \le \frac{n}{2}$ *posmatrajmo sledeću familiju*

$$\mathcal{A}' = \{A \subset [n] : |A| = k, 1 \in A, A \cap \{2, ..., k+1\} \neq \emptyset\} \cup \{2, ..., k+1\}.$$

Ova familija je presecajuća (ali očigledno nije kanonička) i važi

$$|\mathcal{A}'| = \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1.$$

Primer 1.14 *Neka je* $\mathcal{F}_1$ *definisana kao u primeru 1.10:*

$$\mathcal{F}_1 = \{A : A \subset [n], |A| = k, |A \cap \{1, 2, 3\}| \ge 2\},$$

i neka je $\mathcal{A}'$ *familija iz prethodnog primera. Za* $k = 2$ *je* $\mathcal{A}' = \mathcal{F}_1$*, dok za* $k = 3$ *važi* $|\mathcal{A}'| = |\mathcal{F}_1|$*. Ako je* $n > 2k$ *i* $k \ge 4$ *onda* $|\mathcal{A}'| > |\mathcal{F}_1|$*.*

Hilton i Milner su pokazali da je za $k > 3$ upravo familija iz primera 1.13 najveća presecajuća familija (do na izomorfizam) koja nije podskup kanoničke presecajuće familije. U slučaju $k = 3$ postoje dve takve neizomorfne familije i to su baš one iz primera 1.14. U nastavku ćemo formulisati Hilton-Milner teoremu i dati njen jednostavniji dokaz do kog su došli Frankl i Füredi [8]. Ovaj dokaz je veoma sličan Franklovom dokazu EKR teoreme koji smo već videli.

Teorema 1.15 (Hilton-Milner, 1967) *Neka su* n *i* k *celi brojevi takvi da je* $2 \le k \le \frac{n}{2}$*, i neka je* $\mathcal{A}$ *presecajuća familija* k*-podskupova skupa* $[n]$ *takva da je* $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$*. Tada je*

$$|\mathcal{A}| \le \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1.$$

Dokaz. Dokaz dajemo indukcijom po k.

Baza indukcije: Ako je $k = 2$, onda $\mathcal{A}$ mora biti izomorfna sa familijom $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, pa tvrđenje važi.

Induktivni korak: Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve $k_0 \le k$.

Neka je $\mathcal{A}$ maksimalna presecajuća familija k-podskupova skupa $[n]$ koja nije kanonička, niti je podskup kanoničke presecajuće familije. Koristimo metodu zamene $\mathcal{S}_{i,j}$ za $i, j \in \{1, ..., n\}$ na familiji $\mathcal{A}$ sve dok ona ne postane kanonička ili stabilna familija.

Za početak, pretpostavimo da $\mathcal{A}$ nije kanonička presecajuća familija, ali da $\mathcal{S}_{x,y}(\mathcal{A})$ jeste. U tom slučaju svi skupovi u $\mathcal{S}_{x,y}(\mathcal{A})$ sadrže x, pa svi skupovi u $\mathcal{A}$ sadrže ili x ili y. Kako je $\mathcal{A}$ maksimalna, možemo pretpostaviti da je svaki k-podskup skupa $[n]$ koji sadrži i x i y u $\mathcal{A}$.

Napravimo sad sve (i,j)-zamene za $i,j \in \{1,...,n\} \setminus \{x,y\}$ na familiji $\mathcal{A}$, i označimo novodobijenu familiju sa $\mathcal{B}$. Svaki skup u $\mathcal{B}$ sadrži bar jedan od elemenata x ili y, jer (i,j)-zamena ne utiče na njih. Takođe, ova familija je stabilna, tj. važi $\mathcal{S}_{i,j}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ za sve $i,j \in \{1,...,n\} \setminus \{x,y\}$.

Neka je sada Y skup prvih $2k-2$ elemenata skupa $\{1,...,n\} \setminus \{x,y\}$ zajedno sa $\{x,y\}$. Tada za sve $A, B \in \mathcal{B}$ važi

$$A \cap B \cap Y \neq \emptyset. \tag{1.1}$$

(Ovo se može dokazati vrlo slično kao lema 1.12: Ponovo pretpostavljamo suprotno, tj. da je $A \cap B \cap Y = \emptyset$, pri čemu $A, B \in \mathcal{B}$ biramo tako da je $|A \cap B|$ minimalna. Kako i A i B sadrže bar jedan od elemenata x i y, možemo pretpostaviti da $x \in A$ i $y \in B$. Sada je $|A \setminus \{x\}| = |B \setminus \{y\}| = k-1$, i dalje dokaz ide isto kao u lemi 1.12.) Definišimo

$$\mathcal{B}_i = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}, |B \cap Y| = i\}.$$

Tvrdimo da je

$$|\mathcal{B}_i| \leq \binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1}, \quad 1 \leq i \leq k-1 \tag{1.2}$$

i

$$|\mathcal{B}_k| \leq \binom{2k-1}{k-1}. \tag{1.3}$$

Jasno, za $i = 1$ biće $|\mathcal{B}_1| = 0$ jer $\mathcal{B}$ nije kanonička presecajuća familija (na osnovu (1.1) bi to moralo da važi ako bi postojao neki $B \in \mathcal{B}$ takav da je $|B \cap Y| = 1$).

Neka je sada $2 \leq i \leq k-1$. Na osnovu (1.1) znamo da je $\mathcal{B}_i$ presecajuća familija i-podskupova skupa veličine $2k$. Ako nejednakost (1.2) ne važi, imamo

$$|\mathcal{B}_i| > \binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1} \geq \binom{2k-1}{i-1} - \binom{2k-i-1}{i-1} + 1.$$

Prema induktivnoj hipotezi, $\mathcal{B}_i$ mora biti kanonička (ili podskup kanoničke) presecajuće familije. Odavde sledi da svi skupovi u $\mathcal{B}_i$ sadrže neki zajednički element a. Međutim, $\mathcal{B}$ nije kanonička presecajuća familija pa postoji k-podskup u $\mathcal{B}$ koji ne sadrži a. Sada možemo ograničiti veličinu od $\mathcal{B}_i$ tako što ćemo prebrojati i-podskupove iz Y koji sadrže a i oduzeti broj takvih skupova koji se ne seku sa k-podskupovima iz $\mathcal{B}$ koji ne sadrže a. Dakle, imamo da je

$$|\mathcal{B}_i| \leq \binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1}$$

i ovo dokazuje tvrdnju (1.2).

Za $i = k$ mora biti $|\mathcal{B}_k| \leq \frac{1}{2}\binom{2k}{k} = \binom{2k-1}{k-1}$, jer skup i njegov komplement ne mogu istovremeno pripadati presecajućoj familiji $\mathcal{B}_k$. Ovim smo pokazali da važi i (1.3).

Za svaki i-skup B iz $\mathcal{B}_i$, postoji najviše $\binom{n-2k}{k-i}$ $k-$podskupova B' iz $\mathcal{B}$ takvih da je $B' \cap Y = B$. Sada imamo

$$|\mathcal{B}| \leq \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{B}_i| \binom{n-2k}{k-i} \leq 1 + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1} \right) \binom{n-2k}{k-i}$$
$$= \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1$$

Još uvek treba razmotriti i situaciju kada primenom operacije zamene na $\mathcal{A}$ dobijamo stabilnu familiju koja nije kanonička. U ovom slučaju dokaz je isti kao u prethodnom počevši od (1.1), samo što za Y sada uzimamo skup $\{1, ..., 2k\}$. $\square$

Sledeći dokaz Erdős-Ko-Rado teoreme oslanja se na Kruskal-Katona teoremu [6, 13]. Tačnije, Katona [12] i Daykin [11] su pokazali da EKR teorema za presecajuće familije sledi direktno iz Kruskal-Katona teoreme koja daje donje ograničenje za veličinu senke familije skupova.

Definicija 1.16 *Senka familije $\mathcal{A}$ k-podskupova skupa $[n]$ definisana je kao*

$$\partial(\mathcal{A}) = \{B : |B| = k-1 \text{ i } B \subseteq A \text{ za neko } A \in \mathcal{A}\},$$

dok je g-ta senka $\partial^g(\mathcal{A})$ definisana kao

$$\partial^g(\mathcal{A}) = \{B : |B| = k-g \text{ i } B \subseteq A \text{ za neko } A \in \mathcal{A}\}.$$

Primer 1.17 *Neka je $\mathcal{A} = \{\{1,2,3\},\{2,4,6\},\{1,2,4\},\{3,4,6\}\}$ familija 3-podskupova skupa $\{1,2,...,7\}$. Da bismo odredili senku od $\mathcal{A}$ uzimamo sve dvoelementne podskupove skupova iz $\mathcal{A}$ i dobijamo*

$$\partial(\mathcal{A}) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,6\},\{4,6\},\{1,4\},\{3,4\},\{3,6\}\}.$$

Familiju skupova u kojoj nijedan skup nije podskup nekog drugog skupa iz te familije nazivamo *Spernerovim sistemom skupova* ili *antilancem.*

Teorema 1.18 *Ako je $\mathcal{A}$ Spernerov sistem skupova na skupu $[n]$, onda*

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1.$$

Dokaz. Za svaki skup $A \subset [n]$ tačno $|A|!(n-|A|)!$ maksimalnih lanaca skupa $[n]$ sadrži skup A. Kako svaki od $n!$ maksimalnih lanaca skupa $[n]$ sadrži najviše jedan element iz $\mathcal{A}$, imamo

$$\sum_{A\in\mathcal{A}} |A|!(n-|A|)! \leq n!,$$

pa deljenjem sa $n!$ dobijamo traženu nejednakost. $\square$

Ova nejednakost je poznatija kao LYM (Lubell-Yamamoto-Mešalkin) nejednakost, i koristeći nju možemo dobiti donje ograničenje za veličinu senke neke familije skupova.

Posledica 1.19 *Ako je $\mathcal{A}$ familija k-podskupova skupa $[n]$, onda*

$$|\mathcal{A}|\binom{n}{k-1} \leq |\partial(\mathcal{A})|\binom{n}{k}.$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{B}$ kolekcija svih $(k-1)$-podskupova skupa $[n]$ koji nisu u $\partial(\mathcal{A})$. Tada je $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ Spernerov sistem skupova. Ova unija je dusjunktna, i u njoj imamo $|\mathcal{A}|$ mnogo skupova veličine k i $\left(\binom{n}{k-1} - |\partial(\mathcal{A})|\right)$ mnogo skupova veličine $k-1$. Sada na osnovu LYM nejednakosti imamo

$$\sum_{A\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} \binom{n}{|A|}^{-1} = \frac{|\mathcal{A}|}{\binom{n}{k}} + \frac{\binom{n}{k-1} - |\partial(\mathcal{A})|}{\binom{n}{k-1}} = 1 + \frac{|\mathcal{A}|}{\binom{n}{k}} - \frac{|\partial(\mathcal{A})|}{\binom{n}{k-1}} \leq 1,$$

pa odavde dobijamo nejednakost iz tvrđenja. $\square$

Katona je ovaj rezultat proširio na g-tu senku presecajuće familije podskupova, i tu njegovu teoremu ovde navodimo bez dokaza.

Teorema 1.20 (Katona) *Neka je $0 \leq g \leq k-1$, $1 \leq t \leq k$ i $g \leq t$. Ako je $\mathcal{A}$ t-presecajuća familja k-podskupova skupa $[n]$, onda*

$$|\mathcal{A}|\binom{2k-t}{k-g} \leq |\partial^g(\mathcal{A})|\binom{2k-t}{k},$$

i jednakost važi ako i samo ako je $t = g$ ili $g = 0$.

Sada koristeći ove rezultate dajemo dokaz za granicu iz EKR teoreme.

Treći dokaz EKR teoreme

Neka je $\mathcal{A}$ presecajuća familija k-podskupova skupa $[n]$. Dalje neka je

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^c = \{\{1, ..., n\} \setminus A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Svaki skup iz $\mathcal{B}$ je kardinalnosti $n - k$, a za svaka dva različita skupa $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ gde je $B_i = \{1, ..., n\} \setminus A_i$ za $i = 1, 2$, važi

$$|B_1 \cap B_2| = |\{1, ..., n\} \setminus (A_1 \cup A_2)| \geq n - (2k - 1).$$

Dakle, $\mathcal{B}$ je $(n - 2k + 1)$-presecajuća familija $(n - k)$-podskupova.

Posmatrajmo $(n - 2k)$-tu senku familije $\mathcal{B}$

$$\partial^{n-2k}(\mathcal{B}) = \{C : |C| = n - k - (n - 2k) \text{ i } C \subset B \text{ za neko } B \in \mathcal{B}\}.$$

Ovo je familija k-skupova i $\partial^{n-2k}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A} = \emptyset$, pa sledi

$$|\partial^{n-2k}(\mathcal{B}) \cup \mathcal{A}| = |\partial^{n-2k}(\mathcal{B})| + |\mathcal{A}| \leq \binom{n}{k}.$$

Sada imamo

$$|\mathcal{B}| \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} = |\mathcal{B}| \frac{\binom{2(n-k)-(n-2k+1)}{k}}{\binom{2(n-k)-(n-2k+1)}{n-k}} \leq |\partial^{n-2k}(\mathcal{B})|,$$

pri čemu poslednja nejednakost važi na osnovu teoreme 1.20. Konačno, kako je $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$, sledi

$$|\mathcal{A}| \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} = |\mathcal{A}| + |\mathcal{A}| \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} \leq |\mathcal{A}| + |\partial^{n-2k}(\mathcal{B})| \leq \binom{n}{k},$$

pa je $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$. □

Sada ćemo uvesti uređenje na familiji k-skupova. Postoji više načina da se to uradi, a mi ćemo ovde koristiti tzv. koleksikografsko uređenje.

U koleksikografskom uređenju kažemo da je $A < B$ ako i samo ako su A i B različiti skupovi i ako je najveći element iz $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ u skupu B. Ako je $\mathcal{A}$ familija k-skupova, onda ćemo sa $\partial(|\mathcal{A}|)$ označavati broj $(k - 1)$-skupova koji pripadaju senci prvih (u koleksikografskom uređenju) $|\mathcal{A}|$ podskupova veličine k skupa $[n]$. Sledeću teoremu navodimo bez dokaza.

Teorema 1.21 (Kruskal-Katona) *Neka je $\mathcal{A}$ familija k-podskupova skupa $[n]$. Tada je*

$$\partial(|\mathcal{A}|) \leq |\partial(\mathcal{A})|.$$

Ako je $|\mathcal{A}| = \binom{n_k}{k}$ za neko $k \leq n_k \leq n$, onda jednakost važi ako i samo ako je $\mathcal{A}$ izomorfna sa kolekcijom svih k-podskupova skupa $[n_k]$.

Katona [6] je pokazao da ako su $|\mathcal{A}|$ i k prirodni brojevi, onda broj $|\mathcal{A}|$ možemo na jedinstven način zapisati kao

$$|\mathcal{A}| = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + ... + \binom{a_s}{s}$$

gde je $a_k > a_{k-1} > ... > a_s$. Na osnovu Kruskal-Katona teoreme sledi da je tada

$$|\partial(\mathcal{A})| = \binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + ... + \binom{a_s}{s-1}.$$

Ako za realan broj x definišemo

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)...(x-k+1)}{k!},$$

onda za bilo koju familiju k-skupova $\mathcal{A}$ postoji realan broj $x \leq n$ takav da je $|\mathcal{A}| = \binom{x}{k}$.
Lovasz [5] je dokazao da ako je $|\mathcal{A}| = \binom{x}{k}$, onda $|\partial(\mathcal{A})| \geq \binom{x}{k-1}$. Primenjujući ovo ograničenje uzastopno, dobijamo da je za $1 \leq g \leq k$

$$|\partial^g(\mathcal{A})| \geq \binom{x}{k-g}.$$

Dokaz EKR teoreme pomoću Kruskal-Katona teoreme

Sada dajemo karakterizaciju maksimalnih presecajućih familija iz EKR teoreme za slučaj $t = 1$. Pretpostavimo da je $n > 2k$ i da je $\mathcal{A}$ presecajuća familija k-podskupova skupa $[n]$ veličine $\binom{n-1}{k-1}$.

Neka je familija $\mathcal{B}$ definisana kao i ranije (komplement familije $\mathcal{A}$). Kako je

$$|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}| = \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k},$$

prvih $|\mathcal{B}|$ $(n-k)$-podskupova skupa $[n]$ u koleksikografskom uređenju su tačno svi skupovi veličine $n-k$ koji ne sadrže n.

Na osnovu Kruskal-Katona teoreme imamo

$$|\partial^{n-2k}(\mathcal{B})| \geq \binom{n-1}{n-k-(n-2k)} = \binom{n-1}{k}.$$

Kako je $|\mathcal{A}| + |\partial^{n-2k}(\mathcal{B})| \leq \binom{n}{k}$ i $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{k-1}$, možemo zaključiti da je $|\partial^{n-2k}(\mathcal{B})| = \binom{n-1}{k}$. Odavde sledi da je

$$|\partial^{n-2k-i}(\mathcal{B})| = \binom{n-1}{k+i}$$

za sve $i \in \{1, ..., n-2k-1\}$. Posebno, imamo da je $|\mathcal{B}| = \binom{n-1}{n-k}$ i

$$|\partial(\mathcal{B})| = \binom{n-1}{n-k-1} = \partial(|\mathcal{B}|).$$

Ponovo, koristeći Kruskal-Katona teoremu zaključujemo da $\mathcal{B}$ mora biti izomorfna kolekciji svih $(n-k)$-skupova koji ne sadrže element n, a ovo se dešava samo kada je $\mathcal{A}$ izomorfna sa kolekcijom svih k-skupova koji sadrže taj element, tj. kada je $\mathcal{A}$ kanonička presecajuća familija k-podskupova skupa $[n]$. $\square$

1.4 Unakrsno-presecajuće familije skupova

U ovom delu rada upoznaćemo se sa jednom varijacijom Erdős-Ko-Rado teoreme. Tačnije, bavićemo se malo drugačijim tipom presecajućih familija skupova.

Definicija 1.22 *Za dve familije skupova $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kažemo da su unakrsno presecajuće ako svaki skup iz $\mathcal{A}$ ima neprazan presek sa svakim skupom iz $\mathcal{B}$. Slično, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su unakrsno t-presecajuće ako je svaki skup iz $\mathcal{A}$ t-presecajući sa svakim skupom iz $\mathcal{B}$.*

Zadržaćemo se na slučajevima kada je $\mathcal{A}$ familija k-podskupova, a $\mathcal{B}$ familija l-podskupova skupa $[n]$. Naravno, k i l ne moraju biti jednaki, ali ako je to slučaj, familije $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ ne moraju biti disjunktne.

Ako je $\mathcal{A}$ familija k-podskupova koji sadrže neki fiksirani element i $\mathcal{B}$ familija l-podskupova koji sadrže isti taj element, onda na osnovu EKR teoreme znamo da je

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{l-1}.$$

Pyber [14] je 1983. godine dokazao da ako je $k > l$ i $n \geq 2k + l - 2$, ovo je najveća moguća vrednost za $|\mathcal{A}||\mathcal{B}|$. Pet godina kasnije, Matsumoto i Tokushige [15] su dali bolje ograničenje za n. U nastavku dajemo kratak pregled njihovog dokaza.

Teorema 1.23 *Neka su n, k i l prirodni brojevi takvi da je $n \geq 2k$ i $n \geq 2l$. Neka je $\mathcal{A}$ familija k-podskupova skupa $[n]$ i $\mathcal{B}$ familija l-podskupova skupa $[n]$. Ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ unakrsno presecajuće familije, onda*

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{l-1}.$$

Štaviše, ako je $n > 2k$ i $n > 2l$, jednakost važi ako i samo ako postoji $x \in \{1, ..., n\}$ takav da se $\mathcal{A}$ sastoji od svih k-podskupova koji sadrže x i $\mathcal{B}$ se sastoji od svih l-podskupova koji sadrže x.

Dokaz. Ako je $|\mathcal{A}| < \binom{n-1}{k-1}$ i $|\mathcal{B}| < \binom{n-1}{l-1}$, onda tvrđenje trivijalno važi. Zato možemo pretpostaviti da je $|\mathcal{A}| \geq \binom{n-1}{k-1}$. U tom slučaju $|\mathcal{A}|$ možemo predstaviti na sledeći način:

$$|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + ... + \binom{n-j}{k-1} + \binom{x}{n-k-j}, \quad (1.4)$$

gde $j \in \{1, ..., n-k\}$ i x je neki realan broj takav da važi $n-k-j \leq x \leq n-j-1$.

$\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su unakrsno presecajuće familije ako i samo ako su skupovi $\partial^{n-k-l}(\mathcal{A}^c)$ i B disjunktni, prema tome

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq |\mathcal{A}|\left(\binom{n}{l} - |\partial^{n-k-l}(\mathcal{A}^c)|\right).$$

Izraz sa desne strane nejednakosti dostiže maksimum kada je $|\partial^{n-k-l}(\mathcal{A}^c)|$ minimalno. Prema Kruskal-Katona teoremi to se događa kada se $\mathcal{A}^c$ sastoji iz prvih $|\mathcal{A}|$ skupova veličine $(n-k)$ u koleksikografskom redosledu. Sada imamo da je

$$|\partial^{n-k-l}(\mathcal{A}^c)| \geq \binom{n-1}{l} + \binom{n-2}{l-1} + ... + \binom{n-j}{l-j+1} + \binom{x}{l-1}.$$

Kako je

$$\binom{n}{l} - \left(\binom{n-1}{l} + ... + \binom{n-j}{l-j+1} + \binom{x}{l-1}\right) = \binom{n-j}{l-j} - \binom{x}{l-j},$$

preostaje nam da pokažemo da je

$$\left(\binom{n-1}{k-1}+...+\binom{n-j}{k-1}+\binom{x}{n-k-j}\right)\left(\binom{n-j}{l-j}-\binom{x}{l-j}\right)$$

odozgo ograničeno sa

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{l-1}.$$

Kako je $\binom{n-i}{k-1}\leq\binom{n-1}{k-1}$ za sve $1\leq i\leq j$, i $\binom{x}{n-k-j}\leq\binom{n-j-1}{n-k-j}=\binom{n-j-1}{k-1}$, veoma grubo gornje ograničenje leve strane biće

$$\left((j+1)\binom{n-1}{k-1}\right)\binom{n-j}{l-j}.$$

Ako je $j\geq 3$, dobijamo traženu nejednakost jer važi

$$\begin{aligned}(j+1)\binom{n-1}{k-1}\binom{n-j}{l-j} &= (j+1)\binom{n-1}{k-1}\frac{l-j+1}{n-j+1}...\frac{l-1}{n-1}\binom{n-1}{l-1}\\ &\leq \frac{j+1}{2^{j-1}}\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{l-1}\\ &\leq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{l-1}\end{aligned}$$

Ista nejednakost važi i za $j=1$ i $j=2$, ali kako su u oba slučaja potrebni dosta složeniji proračuni, njih ovde izostavljamo. Za detaljno ispisan dokaz ove teoreme pogledati [15]. □

Primetimo, teorema 1.23 implicira EKR teoremu za presecajuće familije: Ako je $\mathcal{A}$ presecajuća familija k-podskupova skupa $[n]$, možemo je posmatrati kao familiju koja je unakrsno presecajuća sama sa sobom, pa će na osnovu teoreme 1.23 važiti

$$|\mathcal{A}|^2\leq\binom{n-1}{k-1}^2,$$

dok jednakost važi samo ako je $\mathcal{A}$ kanonička presecajuća familija.

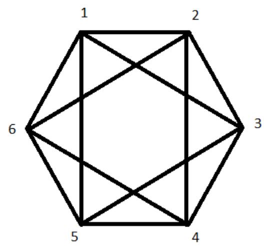
1.5 Razdvojeni skupovi

Za kraj ove glave bavićemo se određivanjem najvećih presecajućih familija skupova koji zadovoljavaju jedan dodatni uslov. Označimo sa G cirkulantni graf na $\mathbb{Z}_n$ sa skupom veza $\{\pm1,\pm2,...,\pm r\}$. Umesto 0 koristićemo oznaku n za element skupa $\mathbb{Z}_n$.

Za k-podskup $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ skupa $\mathbb{Z}_n$ kažemo da je r*-razdvojen* ako za sve $1 \leq i, j \leq k$ brojevi a_i i a_j nisu susedni u G. Dakle, ako bismo brojeve od 1 do n poređali u krug, onda su svaka dva elementa r-razdvojenog skupa razdvojena sa barem r brojeva u krugu.

Kada je $r = 1$, r-razdvojeni skup jednostavno nazivamo *razdvojenim* skupom. Mi ćemo se zadržati na ovom slučaju.

Primer 1.24 *Neka je G cirkulantni graf na $\mathbb{Z}_6$ sa skupom veza $\{\pm 1, \pm 2\}$.*



Slika 1.1: Graf G

Familiju 2-razdvojenih 2-skupova čine sledeći skupovi: $\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}$.

Ponovo, familiju svih razdvojenih k-podskupova skupa $[n]$ koji sadrže neki fiksirani element nazivamo *kanoničkom presecajućom familijom razdvojenih skupova.*

Talbot [16] je dokazao da su za $r = 1$ i $n \geq 2k$ najveće presecajuće familije razdvojenih skupova upravo kanoničke. Štaviše, ako je $n \neq 2k + 2$ ovo su jedine (do na izomorfizam) takve maksimalne familije.

Teorema 1.25 *Neka je $n \geq 2k$ i $n \neq 2k + 2$. Ako je $\mathcal{A}$ familija razdvojenih k-podskupova skupa $[n]$, onda njena veličina nije veća od veličine kanoničke presecajuće familije razdvojenih k-podskupova i jednakost važi ako i samo ako je $\mathcal{A}$ baš kanonička familija.*

Sada ćemo dati skicu dokaza ove teoreme: Sam dokaz ponovo koristi operaciju zamene, samo što je ona malo drugačije definisana u slučaju razdvojenih skupova i gubi neka lepa svojstva koja smo ranije imali. Za razdvojen skup $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ operaciju zamene definišemo kao

$$f(A) = \begin{cases} \{1, a_2 - 1, ..., a_k - 1\}, & \text{ako } a_1 = 1 \\ \{a_1 - 1, a_2 - 1, ..., a_k - 1\}, & \text{inače.} \end{cases}$$

Samim tim, za familiju razdvojenih skupova $\mathcal{A}$ definišemo

$$f(\mathcal{A}) = \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}.$$

Očigledno, ako je A razdvojen k-podskup skupa $\{1, ..., n\}$, onda je $f(A)$ k-podskup skupa $\{1, ..., n-1\}$.

Prvi problem sa kojim se susrećemo kod ovako definisane operacije zamene jeste to što $f(A)$ ne mora biti razdvojen skup. Preciznije, ako $f(A)$ nije razdvojen skup onda A mora da sadrži ili par $\{1, 3\}$ ili par $\{2, n\}$.

Drugi problem je to što dva različita razdvojena skupa A i B pri preslikavanju f mogu imati istu sliku, tj. može se desiti da je $f(A) = f(B)$. Ovo se dešava samo kada je $A \triangle B = \{1, 2\}$. Zaista, ako je $j \geq 2$, onda $j \in f(A)$ ako i samo ako $j+1 \in A$. Dakle, $f(A) = f(B)$ implicira da je $A \cap \{3, 4, ..., n\} = B \cap \{3, 4, ..., n\}$. Kako su A i B različiti skupovi, onda jedan od njih mora sadržati 1, a drugi 2, pa je $A \triangle B = \{1, 2\}$.

Dakle, $f(\mathcal{A})$ i $\mathcal{A}$ ne moraju biti iste veličine. Štaviše, $f(\mathcal{A})$ ne mora biti presecajuća familija razdvojenih k-skupova.

Posmatraćemo dve familije razdvojenih k-skupova: familiju $\mathcal{A}_1$ koja se sastoji iz problematičnih skupova, odnosno u njoj su svi oni skupovi A za koje $f(A)$ nije razdvojen, kao i skupovi A takvi da $1 \in A$ i postoji skup $B \in \mathcal{A}$, $B \neq A$ za koji važi $f(B) = f(A)$, i familiju $\mathcal{A}_2$ u kojoj su svi preostali skupovi.

Može se pokazati da izbacivanjem elementa 1 iz svih skupova familije $f(\mathcal{A}_1)$ dobijamo presecajuću familiju razdvojenih $(k-1)$-podskupova skupa $\{1, ..., n-2\}$ i nju ćemo označiti sa $\mathcal{A}_1'$. Takođe, može se pokazati da je $\mathcal{A}_2' = f(\mathcal{A}_2)$ presecajuća familija razdvojenih k-podskupova skupa $\{1, ..., n-1\}$. Tada je

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}_1'| + |\mathcal{A}_2'|.$$

Indukcijom po n dobijamo gornja ograničenja za $|\mathcal{A}_1'|$ i $|\mathcal{A}_2'|$, pa samim tim i za $|\mathcal{A}|$. Da bismo pokazali da se ovo ograničenje dostiže samo u slučaju da je $\mathcal{A}$ kanonička presecajuća familija razdvojenih k-podskupova potrebno je pažljivo razmatranje strukture koju $\mathcal{A}_1$ mora imati.

Glava 2

Ograničenja na koklikama

2.1 Uvod

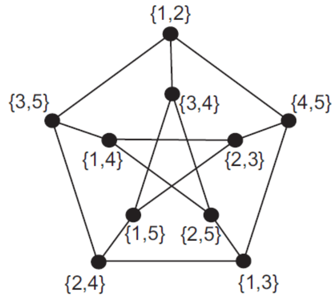
Kao što smo negde već i najavili, Erdős-Ko-Rado teorema je našla svoje primene i uopštenja na mnogim različitim matematičkim objektima. Tako na primer, problem pronalaska najveće presecajuće familije skupova možemo prevesti na jezik teorije grafova pomoću pojma Kneserovog grafa. U te svrhe, najpre ćemo navesti neke osnovne definicije iz teorije grafova.

Graf G je uređeni par $(V(G), E(G))$, gde je $V(G)$ neprazan skup koji nazivamo skupom čvorova, a $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$ nazivamo skupom grana. *Red grafa* G je broj čvorova u $V(G)$. Za dva čvora u i v grafa G kažemo da su susedni ako su spojeni granom $e = \{u, v\}$ (skraćeno pišemo $e = uv$). Grana koja spaja čvor sa samim sobom naziva se *petlja.* Ako dve različite grane spajaju iste čvorove, onda takve grane nazivamo *paralelnim granama.* Graf G je *prost* ako nema petlji, ni paralelnih grana. U nastavku ćemo, ukoliko nije drugačije naznačeno, uvek pretpostavljati da je G prost graf.

Za grafove $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ kažemo da su *izomorfni* ako postoji bijekcija $f : V_1 \to V_2$ takva da je $uv \in E_1$ ako i samo ako je $f(u)f(v) \in E_2$. Funkcija f se naziva izomorfizmom grafova G_1 i G_2. Izomorfizam grafa G na sebe samog nazivamo *automorfizmom.*

Definicija 2.1 *Neka su n i k prirodni brojevi. Kneserov graf $K(n, k)$ je graf čiji čvorovi odgovaraju k-podskupovima skupa $[n]$, a dva čvora su spojena granom ako i samo ako su odgovarajući podskupovi disjunktni.*

Primer 2.2 *Neka je* $n = 5$ *i* $k = 2$. *Petersenov*[1] *graf je Kneserov graf* $K(5, 2)$.



Slika 2.1: Petersenov graf $K(5, 2)$

Primetimo, familija svih čvorova grafa $K(n, k)$ među kojima nikoja dva nisu povezana granom čini familiju presecajućih skupova.

Skup čvorova nekog grafa među kojima su svaka dva čvora susedna naziva se *klika*, dok je *koklika* ili *nezavisan skup*, skup čvorova gde nikoja dva nisu susedna. Standardna oznaka za veličinu najveće klike u grafu G je $\omega(G)$, a za veličinu najveće koklike je $\alpha(G)$.

2.2 Klika-koklika granica

Pretpostavimo da je G graf sa v čvorova na kojima je moguće izvršiti particiju na međusobno disjunktne klike veličine c. Kako proizvoljna koklika može imati najviše jedan zajednički čvor sa svakom od tih klika, zaključujemo da je

$$\alpha(G) \leq \frac{v}{c}.$$

U nastavku ćemo videti da istu granicu dobijamo čak i u slučajevima u kojima nije moguće izvršiti opisanu particiju.

Struktura incidencije je trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$, gde je $\mathcal{P}$ skup čije elemente nazivamo tačkama, $\mathcal{B}$ je skup čije elemente nazivamo blokovima i $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$ je relacija incidencije. Za tačku P i blok B kažemo da su incidentni ako je $(P, B) \in \mathcal{I}$.

Posmatrajmo strukturu incidencije čije su tačke čvorovi grafa G, a blokovi podskupovi skupa čvorova istog grafa (označimo skup blokova

[1]Julius Petersen (1839-1910), danski matematičar

sa $\mathcal{S}$). Za ovu strukturu kažemo da je *blok-regularna* ako su svi podskupovi u $\mathcal{S}$ iste veličine. Struktura je *tačkasto-regularna* ako svaka tačka leži u istom broju blokova. *Karakteristični vektor* skupa $S \in \mathcal{S}$ definisan je na sledeći način

$$(v_S)_i = \begin{cases} 1, & \text{ako } i \in S \\ 0, & \text{ako } i \notin S. \end{cases}$$

Matrica incidencije je matrica čije su kolone karakteristični vektori blokova.

U nastavku ćemo sa $\mathbf{1}$ označavati vektor sa jedinicama na svim koordinatama, a sa J matricu sa svim jedinicama.

Teorema 2.3 *Neka je G graf reda v , tj. $v = |V(G)|$ i neka je $\mathcal{C}$ skup maksimalnih klika u G. Ako čvorovi iz G i klike iz $\mathcal{C}$ čine strukturu incidencije koja je blok-regularna i tačkasto-regularna, onda*

$$\alpha(G)\omega(G) \le |V(G)|.$$

Ako važi jednakost, onda svaka koklika maksimalne veličine seče svaku kliku iz $\mathcal{C}$ u tačno jednom čvoru.

Dokaz. Kako je $\mathcal{C}$ skup maksimalnih klika, veličina svake od njih je $\omega(G)$. Neka je r broj klika iz $\mathcal{C}$ koje sadrže dati čvor iz G, a N matrica incidencije za strukturu određenu skupom čvorova iz G i skupom $\mathcal{C}$.

Ako sa y označimo karakteristični vektor koklike S u G, onda kako ova koklika može seći svaku kliku iz $\mathcal{C}$ u najviše jednom čvoru, mora biti $y^T N \le \mathbf{1}^T$, gde naravno nejednakost važi po komponentama vektora.

Kako imamo tačkasto-regularnu strukturu, svaki čvor iz G se nalazi u tačno r klika iz $\mathcal{C}$, pa je

$$|\mathcal{C}| = \mathbf{1}^T\mathbf{1} \ge y^T N\mathbf{1} = ry^T\mathbf{1} = r|S|. \tag{2.1}$$

($y^T N\mathbf{1} = ry^T\mathbf{1}$ imamo iz činjenice da kada $y^T N$ množimo sa $\mathbf{1}$ dobijamo zbir broja klika kojima svaki čvor iz koklike S pripada što je isto kao da množimo r sa zbirom komponenata vektora y, tj. brojem čvorova koklike S.)

Kako je svaka klika iz $\mathcal{C}$ veličine $\omega(G)$, imamo sledeću jednakost:

$$|\mathcal{C}|\omega(G) = r|V(G)|. \tag{2.2}$$

Sada na osnovu (2.1) i (2.2) dobijamo

$$\frac{r|V(G)|}{\omega(G)} \ge r|S|,$$

a kako je S bila proizvoljna koklika iz G, dobili smo upravo ono što je i bilo tvrđenje teoreme.

Ako u tvrđenju teoreme imamo zadovoljenu jednakost, vraćajući se unazad dobijamo da je $y^T N = \mathbf{1}^T$, a to upravo znači da svaka koklika maksimalne veličine seče svaku kliku iz $\mathcal{C}$ u tačno jednom čvoru. $\square$

Definicija 2.4 *Za graf G kažemo da je čvorno tranzitivan ako za svaka dva čvora v_1 i v_2 iz G postoji automorfizam $f : V(G) \to V(G)$ takav da je $f(v_1) = v_2$.*

Ako je C maksimalna klika u čvorno tranzitivnom grafu G, onda slike klike C pod dejstvom automorfizama iz $\mathrm{Aut}(G)$ formiraju tačkasto i blok-regularnu strukturu incidencije. Na osnovu toga i prethodne teoreme imamo sledeću posledicu poznatiju kao klika-koklika granica.

Posledica 2.5 *Ako je G čvorno tranzitivan graf, onda važi*

$$\alpha(G)\omega(G) \le |V(G)|.$$

Erdős-Ko-Rado teorema za presecajuće familije (dakle, $t = 1$) ekvivalentna je problemu pronalaženja veličine i strukture najveće koklike grafa $K(n, k)$. Kako su Kneserovi grafovi čvorno tranzitivni, možemo iskoristiti posledicu 2.5 da pokažemo granicu iz EKR teoreme u specijalnom slučaju kada k deli n. Lako se vidi da je tada $\omega(K(n, k)) = \frac{n}{k}$, pa je

$$\frac{n}{k} = \omega(K(n,k)) \le \frac{|V(K(n,k))|}{\alpha(K(n,k))} = \frac{\binom{n}{k}}{\alpha(K(n,k))}$$

a odavde imamo

$$\alpha(K(n,k)) \le \binom{n-1}{k-1}.$$

Sada dajemo primer grafa za koji važi jednakost u klika-koklika granici: *n-dimenzionalna hiperkocka*, u oznaci Q_n, je graf čiji su čvorovi reči dužine n nad azbukom $\{0, 1\}$, a dve reči su povezane granom ako i samo ako se razlikuju na tačno jednoj poziciji. Q_n je čvorno tranzitivan graf, i kako svaka klika u njemu ima najviše dva čvora, skup svih grana obrazuje traženu strukturu incidencije iz pomenute teoreme. Dakle, veličina najveće koklike nije veća od 2^{n-1}. Svaka grana grafa Q_n spaja jednu reč sa parnim i jednu sa neparnim brojem nula, pa skup svih reči koje imaju paran broj nula jeste jedna koklika veličine 2^{n-1}.

Posledica 2.6 *Neka je G čvorno tranzitivan graf takav da važi*

$$\alpha(G)\omega(G) = |V(G)|.$$

Neka su S i C koklika i klika maksimalne veličine, redom. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih koklika $\phi(S)$, i $\mathcal{C}$ skup svih klika $\phi(C)$, pri čemu $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$. Dalje, neka su M i N matrice incidencije koje odgovaraju strukturama incidencije čiji su blokovi skupovi iz $\mathcal{S}$ i $\mathcal{C}$, redom. Tada je $N^T M = J$.

Za vektor u prostoru $\mathbb{R}^n$ kažemo da je *uravnotežen* ako je ortogonalan na vektor jedinica $\mathbf{1}$. Ako sa v_S označimo karakteristični vektor podskupa S skupa V, onda kažemo da je $v_S - \frac{|S|}{|V|}\mathbf{1}$ *uravnoteženi karakteristični vektor* od S.

Može se pokazati da je posledica 2.6 ekvivalentna tvrđenju da je uravnoteženi karakteristični vektor koklike veličine $\alpha(G)$ ortogonalan na uravnoteženi karakteristični vektor klike veličine $\omega(G)$. Potražimo skalarni proizvod ovih vektora:

$$\left(v_S - \frac{|\alpha(G)|}{|V(G)|}\mathbf{1}\right)^T \left(v_C - \frac{|\omega(G)|}{|V(G)|}\mathbf{1}\right) = \left(v_S^T - \frac{|\alpha(G)|}{|V(G)|}\mathbf{1}^T\right)\left(v_C - \frac{|\omega(G)|}{|V(G)|}\mathbf{1}\right)$$

$$= v_S^T v_C - \frac{|\omega(G)|}{|V(G)|}v_S^T\mathbf{1} - \frac{|\alpha(G)|}{|V(G)|}\mathbf{1}^T v_C + \frac{|\alpha(G)||\omega(G)|}{|V(G)|^2}\mathbf{1}^T\mathbf{1}$$

pa kako je $v_S^T\mathbf{1} = |\alpha(G)|$, $\mathbf{1}^T v_C = |\omega(G)|$ i $\mathbf{1}^T\mathbf{1} = |V(G)|$, dobijamo

$$\left(v_S - \frac{|\alpha(G)|}{|V(G)|}\mathbf{1}\right)^T \left(v_C - \frac{|\omega(G)|}{|V(G)|}\mathbf{1}\right) = v_S^T v_C - \frac{|\alpha(G)||\omega(G)|}{|V(G)|}.$$

Iz ove jednakosti lako dolazimo do pomenute ekvivalencije.

2.3 Pravedne particije

Svaki graf G možemo predstaviti *matricom susedstva* $A(G) = [a_{ij}]$. Ovo je matrica dimenzije $n \times n$ u kojoj vrste i kolone odgovaraju čvorovima grafa G i $a_{ij} = 1$ ako i samo ako su čvorovi v_i i v_j susedni u G, inače $a_{ij} = 0$. Sopstvene vrednosti ove matrice nazivamo *sopstvenim vrednostima grafa G*.

Neka je π particija čvorova grafa G i neka su $C_1, C_2, ..., C_r$ blokovi ove particije. Kažemo da je particija *pravedna* ako je broj čvorova u bloku C_j koji su susedni sa čvorom iz C_i određen samo indeksima i i j, a ne zavisi od izabranog čvora iz C_i. Ovaj broj ćemo označavati sa b_{ij}.

U tom slučaju možemo definisati *količnički graf* G/π kao usmereni multigraf čiji su čvorovi blokovi particije π. Ako čvor u C_i ima tačno b_{ij} suseda u C_j, onda G/π ima b_{ij} usmerenih grana iz C_i u C_j. U opštem slučaju, G/π će imati petlje i paralelne grane, tj. neće biti prost graf.

Posmatrajmo jedan jednostavan primer. Neka je G Petersenov graf $K(5,2)$ (graf iz primera 2.2). Četiri 2-podskupa koji sadrže 1 obrazuju kokliku S, a svaki 2-podskup koji ne sadrži 1 je disjunktan sa tačno dva čvora iz S. Dakle, particija $\{S, \overline{S}\}$ je pravedna, i matrica susedstva koja odgovara količničkom grafu $K(5,2)/\{S, \overline{S}\}$ je

$$A(K(5,2)/\{S,\overline{S}\}) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sume elemenata i prve i druge vrste jednake su sa 3, pa možemo zaključiti da će svaki konstantni nenula vektor biti sopstveni vektor količničkog grafa $K(5,2)/\{S, \overline{S}\}$, koji odgovara sopstvenoj vrednosti 3. Kako je suma sopstvenih vrednosti neke matrice jednaka tragu te matrice, a trag ove matrice je 1, dobijamo da je druga sopstvena vrednost -2.

Ako je π particija, sa $|\pi|$ ćemo označavati broj blokova te particije. Uvek možemo predstaviti π preko matrice dimenzije $|V(G)| \times |\pi|$ čija i-ta kolona odgovara karakterističnom vektoru i-tog bloka u π. Ovu matricu nazivamo *karakterističnom matricom particije* π i to je 01-matrica. Svaki čvor grafa G se nalazi u tačno jednom bloku particije π, pa to znači da će za svaki $u \in V(G)$ tačno jedan vektor kolone imati jedinicu na u-koordinati. Dakle, kolone karakteristične matrice particije π su linearno nezavisni vektori.

Teorema 2.7 *Neka je π pravedna particija čvorova grafa G sa karakterističnom matricom P, A matrica susedstva grafa G i neka je $B = A(G/\pi)$. Tada je $AP = PB$.*

Dokaz. Pokazaćemo da je za sve čvorove u i sve blokove C_j particije π

$$(AP)_{uj} = (PB)_{uj}.$$

$(AP)_{uj}$ je broj svih suseda čvora u koji se nalaze u bloku C_j. Ako $u \in C_i$, onda je taj broj b_{ij}. Sa druge strane, i $(PB)_{uj}$ je takođe b_{ij}, jer je jedina nenula vrednost u u-vrsti od P jedinica u i-toj koloni. Dakle, $AP = PB$. $\square$

Teorema 2.8 *Neka je G graf sa matricom susedstva A, i neka je π particija na $V(G)$ sa karakterističnom matricom P. Tada je π pravedna particija ako i samo ako je vektorski prostor generisan vektorima kolona matrice P A-invarijantan*[2].

Dokaz. Vektorski prostor generisan vektorima kolona matrice P je A-invarijantan ako i samo ako postoji matrica B takva da je $AP = PB$. Ako je π pravedna particija, onda na osnovu prethodne teoreme možemo uzeti $B = A(G/\pi)$.

Sada pretpostavimo da postoji takva matrica B. U tom slučaju je svaki čvor u bloku C_i povezan sa b_{ij} čvorova u C_j, pa je π pravedna particija. □

Pretpostavljajući da je $B = A(G/\pi)$, ako je z sopstveni vektor za B koji odgovara sopstvenoj vrednosti θ, onda

$$APz = PBz = \theta Pz.$$

Dakle, Pz je sopstveni vektor za A koji odgovara sopstvenoj vrednosti θ. Štaviše, ovaj sopstveni vektor je konstantan na blokovima particije π. Primetimo, B je matrica koja predstavlja delovanje od A na A-invarijantnom prostoru generisanom vektorima kolona matrice P, pa njen karakteristični polinom mora deliti karakteristični polinom matrice A.

Lema 2.9 *Ako je π pravedna particija na skupu čvorova grafa G, onda karakteristični polinom od G/π deli karakteristični polinom od G.*

Posledica 2.10 *Ako je π pravedna particija na skupu čvorova grafa G, onda su sopstvene vrednosti grafa G/π sopstvene vrednosti grafa G.*

2.4 Preplitanje

Neka je sa $\theta_i(M)$ označena i-ta po veličini sopstvena vrednost matrice M. Ako je A matrica dimenzije $n \times n$, a B matrica dimenzije $m \times m$ gde je $m \leq n$, kažemo da sopstvene vrednosti matrice B prepliću sopstvene vrednosti matrice A ako su sve sopstvene vrednosti od A i B realni brojevi i važe sledeće nejednakosti:

$$\theta_i(B) \leq \theta_i(A), \quad i = 1, ..., m \tag{2.3}$$

[2] Vektorski prostor je A-invarijantan ako A slika taj vektorski prostor na samog sebe.

i

$$\theta_i(-B) \leq \theta_i(-A), \quad i = 1, ..., m. \tag{2.4}$$

Primetimo, uslov (2.4) ekvivalentno možemo zapisati kao

$$\theta_{n-i+1}(A) \leq \theta_{m-i+1}(B), \quad i = 1, ..., m.$$

Ovde smo koristili to da ako je λ_i sopstvena vrednost matrice A, onda je $-\lambda_i$ sopstvena vrednost matrice $-A$, pa je $\theta_i(-A) = -\theta_{n-i+1}(A)$.

Preplitanje je tesno ako postoji neko s tako da u (2.3) jednakost važi za $i = 1, ..., s$ i u (2.4) jednakost važi za $i = 1, ..., m - s$.

Posebno će nas zanimati slučaj kada je $m = 2$. Tada preplitanje znači da je

$$\theta_1(B) \leq \theta_1(A),$$

$$\theta_n(A) \leq \theta_2(B),$$

dok je preplitanje tesno ako u obe nejednakosti zapravo imamo jednakosti.

Neka je π particija čvorova grafa G i neka su $C_1, ..., C_r$ njeni blokovi. Ako π nije pravedna particija, onda broj čvorova u bloku C_i povezanih sa nekim fiksiranim čvorom iz C_j ne mora biti isti za sve čvorove iz C_j, pa ni količnički graf G/π ne mora biti dobro definisan. U tom slučaju matricu susedstva $A(G/\pi) = [a_{ij}]$ definišemo kao matricu dimezije $r \times r$ gde je a_{ij} jednak prosečnom broju suseda koje čvor iz C_i ima u C_j.

Teorema 2.11 *Neka je π particija čvorova grafa G. Tada sopstvene vrednosti matrice $A(G/\pi)$ prepliću sopstvene vrednosti matrice A. Ako je preplitanje tesno, onda je π pravedna particija.*

Na primer, posmatrajmo kokliku S veličine s u k-regularnom grafu G koji ima v čvorova. Ako je $\pi = \{S, \overline{S}\}$, onda

$$A(G/\pi) = \begin{bmatrix} 0 & k \\ \frac{sk}{v-s} & k - \frac{sk}{v-s} \end{bmatrix}.$$

Sopstvene vrednosti ove matrice su k i $-\frac{sk}{v-s}$ (ovo lako dobjamo transformisanjem matrice $A(G/\pi)$ u gornju trougaonu matricu čije su sopstvene vrednosti upravo elementi sa dijagonale), pa preplitanje implicira da je

$$\theta_n(A) \leq -\frac{sk}{v-s}.$$

Odavde imamo

$$s \leq \frac{v}{1 - \frac{k}{\theta_n}}.$$

Ovo ograničenje ćemo nazivati *granicom odnosa za koklike*, i ona je zasnovana na odnosu između najveće i najmanje sopstvene vrednosti nekog grafa.

2.5 Granica odnosa za koklike

Spektralna teorija grafova obuhvata širok spektar rezultata koji na određeni način povezuju neke kombinatorne parametre grafova sa linearnoalgebarskim parametrima njima pridruženih matrica. Posebno su važni oni rezultati koji daju ograničenja za veličinu maksimalnog nezavisnog skupa nekog grafa G u odnosu na njegov spektar. Jedan od najpoznatijih rezultata ovog tipa jeste tzv. granica odnosa za koklike, poznata i kao Hoffmanova[3] granica, koju navodimo u nastavku.

Teorema 2.12 *Neka je G k-regularan graf i neka je τ njegova najmanja sopstvena vrednost. Tada je*

$$\alpha(G) \leq \frac{|V(G)|}{1 - \frac{k}{\tau}}.$$

Ako jednakost važi za neku kokliku S sa karakterističnim vektorom v_S, onda je $v_S - \frac{|S|}{|V(G)|}\mathbf{1}$ sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti τ.

Dokaz. Uvodimo sledeće oznake: $v = |V(G)|$, $s = |S|$ i $A = A(G)$. Sada ćemo definisati matricu M kao

$$M = A - \tau I - \frac{k - \tau}{v} J.$$

Primetimo, M je pozitivno semidefinitna matrica. Ovo sledi na osnovu nekoliko tvrđenja o pozitivno semidefinitnim matricama (PSD). Matrica je PSD akko su sve njene sopstvene vrednosti nenegativne. Takođe, važi sledeće: ako su A i B PSD matrice, onda je to i matrica $A + B$, i ako je $c \geq 0$ onda je cA PSD. Najmanja sopstvena vrednost matrice $A - \tau I$ je $\tau - \tau = 0$, pa ovo jeste PSD matrica. Sopstvene vrednosti matrice J su 0 i v, pa je i J PSD matrica. Kako je τ najmanja sopstvena vrednost od A, a važi $A\mathbf{1} = k\mathbf{1}$, onda mora biti $k - \tau \geq 0$, pa je $-\frac{k-\tau}{v} \geq 0$. Ovim smo dobili da je i matrica $-\frac{k-\tau}{v}J$ PSD. Konačno, M je pozitivno semidefinitna kao zbir dve takve matrice.

[3] Alan J. Hoffman (1924-2021), američki matematičar

Dakle, za svaki vektor x imamo

$$0 \leq x^T M x = x^T A x - \tau x^T x - \frac{k-\tau}{v} x^T J x. \tag{2.5}$$

Neka je x karakteristični vektor koklike veličine s. Tada je $x^T A x = 0$, jer koklika ne sadrži susedne čvorove. Nejednakost (2.5) se svodi na

$$0 \leq -\tau s - \frac{k-\tau}{v} s^2.$$

Dakle imamo

$$\tau s \leq \frac{\tau - k}{v} s^2,$$

a odavde dobijamo i traženu nejednakost iz tvrđenja, tj.

$$s \leq \frac{v}{1 - \frac{k}{\tau}}.$$

Sada pretpostavimo da za neku kokliku S sa karakterističnim vektorom v_S važi jednakost. Tada je $x^T M x = 0$, pa kako je M pozitivno semidefinitna, mora biti $Mx = 0$. Odavde je

$$(A - \tau I)x = \frac{k-\tau}{v} J x.$$

Ako izaberemo $x = v_S - \frac{s}{v}\mathbf{1}$, dobijamo da je

$$Jx = J\left(v_S - \frac{s}{v}\mathbf{1}\right) = Jv_S - \frac{s}{v} J\mathbf{1} = s\mathbf{1} - \frac{s}{v} v\mathbf{1} = 0,$$

a odavde sledi

$$A\left(v_S - \frac{s}{v}\mathbf{1}\right) = \tau\left(v_S - \frac{s}{v}\mathbf{1}\right),$$

što je i trebalo dokazati. □

Hoffman je prvi došao do ovog ograničenja za slučaj koji smo upravo videli - kada je A matrica susedstva grafa G. Sam taj rezultat je moćan jer se može koristiti za dokazivanje EKR teoreme, što ćemo uskoro i videti. Međutim, mogućnost izbora proizvoljne težinske matrice susedstva čini ovu granicu još moćnijom.

Primetimo, jedine osobine matrice A koje su nam bile bitne za ovaj dokaz jesu njena simetričnost, konstantnost sume po vrstama i to da je element na (i, j) koordinati jednak nuli ako odgovarajući čvorovi nisu susedni u grafu G. Kažemo da je matrica B *kompatibilna* sa grafom G koji ima n čvorova ako je B simetrična matrica reda $n \times n$, i ako za sve čvorove u i v važi $B_{u,v} = 0$ kada u i v nisu susedni u grafu G (svi dijagonalni elementi matrice B su jednaki nuli). Kompatibilne matrice nazivamo još i *težinskim matricama susedstva.*

Koristeći isti dokaz kao za teoremu 2.12, dobijamo sledeći rezultat za kompatibilne matrice sa konstantnom sumom po vrstama.

Teorema 2.13 *Neka je A matrica sa konstantnom sumom po vrstama d, kompatibilna sa grafom G. Ako je τ najmanja sopstvena vrednost matrice A, onda je*

$$\alpha(G) \leq \frac{|V(G)|}{1 - \frac{d}{\tau}}.$$

Ako jednakost važi za neku kokliku S sa karakterističnim vektorom v_S, onda je $v_S - \frac{|S|}{|V(G)|}\mathbf{1}$ sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti τ.

Svaka koklika u k-regularnom grafu koja dostiže granicu odnosa za koklike ima neke dodatne lepe osobine.

Teorema 2.14 *Neka je G k-regularan graf sa v čvorova i neka je τ njegova najmanja sopstvena vrednost. Ako je S koklika za koju važi*

$$|S| = \frac{v}{1 - \frac{k}{\tau}}$$

onda je particija $\{S, \overline{S}\}$ skupa čvorova grafa G pravedna i svaki čvor koji nije u S ima tačno $-\tau$ suseda u S.

Dokaz. Neka je v_S karakteristični vektor koklike S. Na osnovu teoreme 2.13 znamo da je prostor generisan vektorima v_S i $\mathbf{1}$ A-invarijantan, pa je samim tim i prostor generisan vektorima v_S i $\mathbf{1} - v_S$ A-invarijantan. Sada na osnovu teoreme 2.8 imamo da je $\{S, \overline{S}\}$ pravedna particija. Ako je matrica susedstva količničkog grafa $G/\{S, \overline{S}\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & k \\ a & k - a \end{bmatrix}$$

onda su njegove sopstvene vrednosti k i $-a$. Prebrojavanjem grana između $\overline{S}$ i S dobijamo da je $a = \frac{|S|k}{v-|S|} = -\tau$, pa svaki čvor u $\overline{S}$ ima tačno $-\tau$ suseda u S. $\square$

Posledica 2.15 *Neka je G k-regularan graf sa v čvorova i neka je S koklika veličine s. Ako je $\frac{ks}{v-s}$ najmanja sopstvena vrednost grafa G, onda je particija $\{S, \overline{S}\}$ pravedna i S je maksimalna koklika u G.*

Lema 2.16 *Neka je G k-regularan graf sa v čvorova i neka je S koklika veličine s. Tada je $\{S, \overline{S}\}$ pravedna particija ako i samo ako je $s = \frac{v}{1-\frac{k}{\lambda}}$ za neku sopstvenu vrednost λ grafa G.*

Dokaz. Za početak pretpostavimo da je $\{S, \overline{S}\}$ pravedna particija. Matrica susedstva količničkog grafa je

$$\begin{bmatrix} 0 & k \\ a & k-a \end{bmatrix}$$

gde je $a = \frac{ks}{v-s}$. Sopstvene vrednosti ovog količničkog grafa su k i $\lambda = -a = -\frac{ks}{v-s}$. Kako je particija pravedna, ovo su takođe sopstvene vrednosti grafa G i važi $s = \frac{v}{1-\frac{k}{\lambda}}$.

Pretpostavimo sada da je $s = \frac{v}{1-\frac{k}{\lambda}}$ za neku sopstvenu vrednost λ grafa G. Tada su sopstvene vrednosti količničkog grafa k i λ i preplitanje je tesno, pa je $\{S, \overline{S}\}$ pravedna particija. □

Sada ćemo granicu odnosa iskoristiti da pokažemo granicu za maksimalnu presecajuću familiju iz EKR teoreme. Kao što smo i pomenuli, koklika u Kneserovom grafu $K(n, k)$ je kolekcija k-podskupova skupa $[n]$ takvih da bilo koja dva skupa iz te kolekcije imaju barem jednu zajedničku tačku. Dakle, koklika je presecajuća familija k-podskupova skupa $[n]$.

Sopstvene vrednosti Kneserovog grafa $K(n, k)$ su određene (videti [3], odeljak 6.5). To su celi brojevi

$$(-1)^i \binom{n-k-i}{k-i} \tag{2.6}$$

gde $i = 0, ..., k$ i i-ta sopstvena vrednost je višestrukosti

$$m_i = \binom{n}{i} - \binom{n}{i-1} \tag{2.7}$$

(gde je $\binom{n}{-1} = 0$).

U nastavku ćemo razmatrati samo Kneserove grafove kod kojih je $n \geq 2k$. Ako je $n < 2k$, onda je $K(n, k)$ prazan graf, njegove sopstvene vrednosti su sve jednake nuli i poznata nam je veličina maksimalne koklike bez korišćenja granice odnosa. Ako je $n = 2k$, njegove sopstvene vrednosti su 1 i -1, a veličina maksimalne koklike jednaka je polovini ukupnog broja čvorova u tom grafu.

Lema 2.17 *Ako je $n \geq 2k$, onda $\alpha(K(n,k)) = \binom{n-1}{k-1}$.*

Dokaz. Kneserov graf $K(n,k)$ ima $\binom{n}{k}$ čvorova i stepen svakog od njih je $\binom{n-k}{k}$. Kada u (2.6) uvrstimo $i = 1$, dobijamo najmanju sopstvenu vrednost i to je $-\binom{n-k-1}{k-1}$. Sada na osnovu granice odnosa imamo

$$\alpha(K(n,k)) \leq \frac{\binom{n}{k}}{1 + \frac{\binom{n-k}{k}}{\binom{n-k-1}{k-1}}} = \frac{\binom{n}{k}}{1 + \frac{n-k}{k}} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Skup svih čvorova koji sadrže 1 (ili bilo koji drugi fiksirani element) očigledno jeste koklika ove veličine. □

2.6 Granica odnosa za klike

Znajući da je klika u regularnom grafu zapravo koklika u komplementu tog grafa, ograničenje za veličinu klike možemo potražiti koristeći granicu odnosa za koklike prelazeći na komplement grafa. Mi ovde navodimo još jedno ograničenje koje se u nekim slučajevima ispostavilo kao preciznije. Narednu teoremu formulisao je i dokazao Mike Newman u svom neobjavljenom radu.

Teorema 2.18 *Neka je G k-regularan graf sa najmanjom sopstvenom vrednošću τ, i neka je $\mathcal{C}$ skup klika u G veličine $\omega(G)$ koje daju tačkastu i blok-regularnu strukturu incidencije na $V(G)$. Ako postoji konstanta λ takva da svaka grana iz G leži u tačno λ mnogo klika iz $\mathcal{C}$, onda*

$$\omega(G) \leq 1 - \frac{k}{\tau}.$$

Ako je postignuta jednakost i N je matrica incidencije između čvorova i klika, onda je $NN^T = \lambda(A - \tau I)$, gde je A matrica susedstva grafa G.

Dokaz. Neka je A matrica susedstva grafa G i neka je N matrica incidencije za klike iz $\mathcal{C}$. Pretpostavimo da svaki čvor iz G leži u tačno r klika iz $\mathcal{C}$ (ovo imamo iz tačkaste regularnosti) i da svaka grana leži u tačno λ klika. Tada važi

$$NN^T = rI + \lambda A.$$

(Kada možimo N i N^T mi zapravo na (i,j)-koordinati dobijamo proizvod i-te i j-te vrste u N, pa odatle lako dobijamo navedenu jednakost.)

Matrica NN^T je pozitivno semidefinitna (NN^T je simetrična i važi $x^T NN^T x = (N^T x)^T (N^T x) = \|N^T x\|_2^2 \geq 0$, za sve vektore x), pa su sve njene sopstvene vrednosti nenegativne, pa važi

$$0 \leq r + \lambda\tau.$$

Znamo da je $|\mathcal{C}|\omega(G) = |V(G)|r$ i $|\mathcal{C}|\binom{\omega(G)}{2} = \lambda|E(G)|$, a odavde imamo

$$\omega(G) - 1 = \frac{2\lambda|E(G)|}{|\mathcal{C}|\omega(G)} = \frac{2\lambda|E(G)|}{r|V(G)|} = k\frac{\lambda}{r} \leq \frac{k}{-\tau}.$$

čime smo dobili upravo granicu iz tvrdnje teoreme. Ako imamo jednakost, onda je $0 = r + \lambda\tau$, pa važi $NN^T = \lambda(A - \tau I)$. □

Ako je dostignuta granica iz teoreme 2.18, onda je prostor svih sopstvenih vektora grafa G koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti τ jednak $\ker(NN^T)$. Ovo dobijamo nizom ekvivalencija: $v \in \ker(NN^T)$ akko $NN^T v = 0$ akko $rv + \lambda Av = 0$ akko $Av = \frac{-r}{\lambda}v$ akko $Av = \tau v$. Kako je $\ker(NN^T) = \ker(N^T)$, zaključujemo da je prostor svih sopstvenih vektora grafa G koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti τ jednak skupu svih vektora koji su ortogonalni na karakteristične vektore klika iz $\mathcal{C}$. Ako je S koklika veličine $|V(G)|/\omega(G)$ sa karakterističnim vektorom v_S, onda je $v_S^T N = \mathbf{1}$ (na osnovu klika-koklika granice znamo da u tom slučaju svaki čvor iz S mora biti u tačno jednoj kliki iz $\mathcal{C}$). Ovo implicira da je

$$\left(v_S - \frac{1}{\omega(G)}\mathbf{1}\right)^T N = 0,$$

pa su uravnoteženi vektori koklika veličine $|V(G)|/\omega(G)$ zapravo sopstveni vektori matrice susedstva $A(G)$ koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti τ.

Postoji klasa grafova gde skup svih maksimalnih klika daje tačkastu i blok-regularnu strukturu incidencije na skupu čvorova tog grafa.

Luk u grafu je uređen par susednih čvorova, i kažemo da je graf luk-tranzitivan ako njegova grupa automorfizama ima tranzitivno dejstvo na skupu svih lukova tog grafa, tj. ako za bilo koja dva posmatrana luka postoji automorfizam koji slika jedan luk na drugi.

Lema 2.19 *Ako je G k-regularan luk-tranzitivan graf sa najmanjom sopstvenom vrednošću τ, onda je*

$$\omega(G) \leq 1 - \frac{k}{\tau}.$$

Kneserov graf $K(n, k)$ je luk-tranzitivan, pa je na osnovu ove leme

$$\omega(K(n,k)) \leq 1 - \frac{\binom{n-k}{k}}{-\binom{n-k-1}{k-1}} = \frac{n}{k},$$

a jednakost važi ako i samo ako k deli n.

2.7 Unakrsne koklike

Neka je G graf sa skupom čvorova $V(G)$. Kažemo da je par podskupova (S, T) na $V(G)$ *unakrsna koklika* (ili *unakrsan nezavisan skup*) ako nijedna grana iz G ne spaja čvor iz S sa čvorom iz T. Ova definicija je slična definiciji unakrsno-presecajućih familija skupova iz odeljka 1.4. Štaviše, ako je $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ unakrsno-presecajuća familija, i svi skupovi u $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su k-skupovi, onda $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ čini unakrsnu kokliku u Kneserovom grafu.

Na osnovu teoreme 1.23 dobili smo gornje ograničenje za proizvod veličina dva skupa čvorova iz unakrsne koklike u Kneserovom grafu. Ellis [17] je u svom radu koristio sopstvene vrednosti grafa da bi došao do ove granice. Preciznije, u nastavku dajemo ograničenje veličine unakrsne koklike u regularnom grafu koristeći dve najveće (po apsolutnoj vrednosti) sopstvene vrednosti tog grafa.

Teorema 2.20 *Neka je G k-regularan graf sa n čvorova i matricom susdestva A. Neka su $k \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_n$ sopstvene vrednosti matrice A. Definišimo $\mu = max\{|\lambda_2|, |\lambda_n|\}$. Neka je (S, T) unakrsna koklika u G, tada*

$$|S||T| \leq \left(\frac{n}{1 + \frac{k}{\mu}}\right)^2.$$

Dokaz. Neka je prostor $\mathbb{R}^n$ snabdeven skalarnim proizvodom:

$$\langle u \ , \ v \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u(i)v(i),$$

gde smo sa $u(i)$ označili i-tu komponentu vektora u (slično za v), i neka je

$$\|u\| = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u(i)^2}$$

indukovana Euklidska norma. Dalje neka je $\{\mathbf{1}, u_2, u_3, ..., u_n\}$ ortonormiran skup sopstvenih vektora gde u_i odgovara sopstvenoj vrednosti λ_i (znamo da su u_i međusobno ortogonalni jer je A simetrična matrica). Definišemo

$$\xi_i = \langle v_S \ , \ u_i \rangle, \qquad \eta_i = \langle v_T \ , \ u_i \rangle.$$

Proizvoljan vektor a možemo izraziti kao linearnu kombinaciju ortonormiranih vektora u_i, pri čemu su koeficijenti upravo $\langle a \ , \ u_i \rangle$. Odavde imamo da je

$$v_S = \sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i, \qquad v_T = \sum_{i=1}^{n} \eta_i u_i.$$

Označimo $\alpha = \frac{|S|}{n}$ i $\beta = \frac{|T|}{n}$. Sada imamo da je $\xi_1 = \alpha$, $\eta_1 = \beta$, i

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 = \|v_S\|^2 = \frac{|S|}{n} = \alpha, \quad \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 = \|v_T\|^2 = \frac{|T|}{n} = \beta.$$

Kako između S i T nema grana iz grafa G,

$$0 = \sum_{s \in S, t \in T} A_{s,t} = v_T^T A v_S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \eta_i = k\alpha\beta + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \xi_i \eta_i \tag{2.8}$$

Odavde koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost dobijamo

$$\begin{aligned} k\alpha\beta &= \left| \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \xi_i \eta_i \right| \\ &\le \sum_{i=2}^{n} |\lambda_i||\xi_i||\eta_i| \\ &\le \mu \sum_{i=2}^{n} |\xi_i||\eta_i| \\ &\le \mu \sqrt{\sum_{i=2}^{n} |\xi_i|^2 \sum_{i=2}^{n} |\eta_i|^2} \\ &= \mu \sqrt{(\alpha - \alpha^2)(\beta - \beta^2)} \end{aligned}$$

Kvadriranjem ove nejednakosti dobijamo

$$\frac{\alpha^2 \beta^2}{(\alpha - \alpha^2)(\beta - \beta^2)} \le \left(\frac{\mu}{k} \right)^2,$$

tj.

$$\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} \leq \left(\frac{\mu}{k}\right)^2.$$

Na osnovu nejednakosti između geometrijske i aritmetičke sredine znamo da je $\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$, pa je

$$\frac{\alpha\beta}{(1-\sqrt{\alpha\beta})^2} = \frac{\alpha\beta}{1-2\sqrt{\alpha\beta}+\alpha\beta} \leq \frac{\alpha\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta} \leq \left(\frac{\mu}{k}\right)^2,$$

odakle sledi da je

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\mu}{k+\mu}.$$

Dakle, konačno dobijamo da je

$$\sqrt{|S||T|} \leq \frac{\mu n}{k+\mu},$$

odnosno

$$|S||T| \leq \left(\frac{n}{1+\frac{k}{\mu}}\right)^2.$$

$\square$

Ova teorema se može primeniti na Kneserove grafove pri čemu dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 2.21 *Neka je $n \geq 2k$ i neka je (S,T) unakrsna koklika u Kneserovom grafu $K(n,k)$. Tada*

$$|S||T| \leq \binom{n-1}{k-1}^2.$$

Dokaz. Broj čvorova grafa $K(n,k)$ je $\binom{n}{k}$, a svaki od njih ima $\binom{n-k}{k}$ suseda. Na osnovu (2.6) znamo da je druga po apsolutnoj veličini najveća sopstvena vrednost $-\binom{n-k-1}{k-1}$. Sada na osnovu prethodne teoreme imamo

$$|S||T| \leq \left(\frac{\binom{n-k-1}{k-1}\binom{n}{k}}{\binom{n-k}{k}+\binom{n-k-1}{k-1}}\right)^2 = \binom{n-1}{k-1}^2.$$

$\square$

2.8 Koklike u susedstvu

Susedstvo čvora u u grafu G je podgraf grafa G indukovan svim čvorovoma koji su susedni sa u. Sada ćemo izvesti još jedno ograničenje za veličinu koklike u grafu, koristeći maksimalnu veličinu koklike u susedstvu nekog čvora iz tog grafa.

Teorema 2.22 *Neka je G k-regularan graf sa v čvorova, i neka je α_1 veličina maksimalne koklike u susedstvu nekog čvora iz G. Tada je*

$$\alpha(G) \leq \frac{v}{1 + \frac{k}{\alpha_1}}.$$

Ako jednakost važi za neku kokliku S, onda je particija $\{S, \overline{S}\}$ pravedna i $-\alpha_1$ je sopstvena vrednost grafa G.

Dokaz. Neka je S koklika u grafu G veličine s. Pošto je G k-regularan graf, broj grana koje spajaju neki čvor iz S sa nekim čvorom iz $\overline{S}$ je ks. S druge strane, ako $u \notin S$ onda susedi od u u S obrazuju kokliku, a ona je veličine najviše α_1. Dakle, u ima najviše α_1 suseda u S, pa zaključujemo da je

$$sk \leq \alpha_1(v - s),$$

a odavde dobijamo granicu iz tvrđenja.

Ako jednakost važi, onda svaki čvor u $\overline{S}$ ima tačno α_1 suseda u S, pa je samim tim particija $\{S, \overline{S}\}$ pravedna. Matrica količničkog grafa $G/\{S, \overline{S}\}$ je

$$\begin{bmatrix} 0 & k \\ \alpha_1 & k - \alpha_1 \end{bmatrix},$$

a njene sopstvene vrednosti su k i $-\alpha_1$. $\square$

Susedstvo čvora u Kneserovom grafu $K(n, k)$ izomorfno je Kneserovom grafu $K(n - k, k)$. Na osnovu EKR teoreme znamo da ako je $n - k \geq 2k$, onda je veličina maksimalne koklike u susedstvu nekog čvora $\binom{n-k-1}{k-1}$, a to je baš apsolutna vrednost najmanje sopstvene vrednosti grafa $K(n, k)$.

2.9 Granica inercije

Podsetimo se, za neku matricu B kažemo da je kompatibilna sa grafom G koji ima n čvorova ako je B simetrična matrica reda $n \times n$, i ako za sve čvorove u i v važi $B_{u,v} = 0$ kada u i v nisu susedni u grafu G. Kako je B simetrična, sve njene sopstvene vrednosti su realne, pa koristimo oznake $n^+(B)$ i $n^-(B)$ za broj pozitivnih i negativnih sopstvenih vrednosti od B, redom. Uređenu trojku

$$(n^+(B), n - n^+(B) - n^-(B), n^-(B))$$

nazivamo *inercijom* matrice B.

Priča o *granici inercije* slična je onoj o granici odnosa. Do ove granice u slučaju matrica susedstva prvi je došao Cvetković [19], pa se zato često koristi i termin *Cvetkovićeva granica.* Opštije tvrđenje koje važi za sve kompatibilne matrice nekog grafa dali su Calderbank i Frankl [18], i ono im je pomoglo da dokažu nekoliko rezultata u ekstremalnoj teoriji skupova.

Teorema 2.23 *Ako je G graf i B matrica kompatibilna sa G, onda je*

$$\alpha(G) \leq \min\{n - n^-(B), n - n^+(B)\}.$$

Dokaz. Neka je S koklika u G veličine s. Neka je B_0 podmatrica matrice B sa vrstama i kolonama indeksiranim po čvorovima iz S. Kako nikoja dva čvora iz S nisu susedna, sve sopstvene vrednosti matrice B_0 biće jednake nuli. Sada na osnovu preplitanja, imamo

$$0 = \theta_s(B_0) \leq \theta_s(B)$$

i

$$\theta_{n+1-s}(B) \leq \theta_1(B_0) = 0.$$

Iz prve nejednakosti sledi da je broj nenegativnih sopstvenih vrednosti matrice B najmanje s, dok iz druge nejednakosti imamo da je broj nepozitivnih sopstvenih vrednosti najmanje s. Kako je prvi broj baš $n - n^-(B)$, a drugi $n - n^+(B)$, dobijamo tvrđenje teoreme. $\square$

2.9.1 Granica inercije za Kneserove grafove

Sada ćemo iskoristiti ono što znamo o Kneserovim grafovima i njihovim sopstvenim vrednostima kako bismo dobili granicu inercije za $K(n,k)$. Posmatrajmo sledeći binomni identitet:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{v}{k-i} = \binom{v-1}{k}. \tag{2.9}$$

Ovaj identitet se lako dokazuje indukcijom po k, koristeći činjenicu da je

$$\binom{v}{k} - \binom{v-1}{k} = \binom{v-1}{k-1}.$$

Ako malo raspišemo sumu sa leve strane jednakosti (2.9) dobijamo

$$\binom{v}{k} - \binom{v}{k-1} + \binom{v}{k-2} - ... + (-1)^{k-1}\binom{v}{1} + (-1)^k\binom{v}{0}$$

pa u zavisnosti od parnosti k, na osnovu (2.7) ovo predstavlja broj pozitivnih ili broj negativnih sopstvenih vrednosti Kneserovog grafa $K(n,k)$.

Kada primenimo granicu inercije na matricu susedstva Kneserovog grafa $K(n,k)$ dobijamo

$$\alpha(K(n,k)) \leq \min\left\{\binom{n-1}{k}, \binom{n-1}{k-1}\right\} = \binom{n-1}{k-1},$$

i ponovo dobijamo granicu iz EKR teoreme.

2.9.2 Granica inercije za presavijene n-dimenzionalne hiperkocke

Već smo se upoznali sa pojmom n-dimenzionalne hiperkocke Q_n. Za dva čvora iz Q_n kažemo da su antipodalni ako je njihovo rastojanje jednako dijametru grafa. Presavijena n-dimenzionalna hiperkocka dobija se iz $(n-1)$-dimenzionalne hiperkocke Q_{n-1} dodavanjem grana između antipodalnih čvorova. Ako je n paran broj, onda je presavijena n-dimenzionalna hiperkocka bipartitan graf, pa nam u tom slučaju traženje maksimalne koklike nije zanimljivo.

Zato ćemo posmatrati slučaj kada imamo presavijenu $(2n+1)$-dimenzionalnu hiperkocku: U [] je pokazano da su njene sopstvene vrednosti oblika

$$2n + 1 - 4i,$$

gde je $i = 0, 1, ..., n$, sa odgovarajućim višestrukostima

$$\binom{2n+1}{2i}.$$

Vidimo da su za $i \leq \frac{n}{2}$ sopstvene vrednosti pozitivne, pa ako je n neparan broj ukupan broj pozitivnih sopstvenih vrednosti jednak

$$\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{2n+1}{2i}.$$

Slično, ako je n paran broj, ukupan broj negativnih sopstvenih vrednosti je

$$\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \binom{2n+1}{2i}.$$

U oba slučaja dobijamo gornju granicu za veličinu koklike.

Glava 3

Permutacije

3.1 Uvod

Neka je S_n simetrična grupa, odnosno grupa svih permutacija na skupu $[n]$. Za dve permutacije g i h iz S_n kažemo da su *presecajuće* ako postoji neko $i \in [n]$ tako da je $g(i) = h(i)$ (g i h se slažu na i). Slično, g i h su t*-presecajuće* ako se slažu na barem t elemenata iz $[n]$. Familiju permutacija $S \subseteq S_n$ nazivamo presecajućom ako su svake dve permutacije iz S presecajuće. Kažemo da je $S \subseteq S_n$ t-presecajuća familija ako su svake dve permutacije iz S t-presecajuće. Slično kao i ranije, S ćemo nazivati *kanoničkom presecajućom familijom permutacija* ako postoji neko $i \in [n]$ na kom se sve permutacije iz S ponašaju isto.

Podsetimo se nekih pojmova iz teorije grupa o kojima će ovde biti reči.
Za $x \in [n]$ i $G \leq S_n$, skup

$$G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$$

nazivamo *stabilizator* elementa x.

Neka je H podgrupa grupe G i neka $g \in G$. Skup

$$gH = \{gh : h \in H\}$$

nazivamo *levi koset* podgrupe H. Analogno definišemo i *desni koset* Hg podgrupe H u G. Svaka podgrupa ima jednako mnogo levih i desnih koseta. Svi koseti su iste kardinalnosti i važi $|gH| = |Hg| = |H|$.

Kanoničke presecajuće familije permutacija možemo predstaviti na sledeći način:

$$S_{x,y} = \{g \in S : g(x) = y\}, \quad x, y \in \{1, ..., n\}.$$

Primetimo, $S_{x,y}$ je koset stabilizatora tačke x određen permutacijom g za koju važi $g(x) = y$. Dakle, $S_{x,y} = gG_x$. Zaista, ako $h \in gG_x$, onda je $h = gf$ za neko $f \in G_x$. Ali tada je $h(x) = g(f(x)) = g(x) = y$, pa $h \in S_{x,y}$. S druge strane, ako $h \in S_{x,y}$, onda je $h(x) = y$. Definišimo $f = g^{-1}h$. Tada $f \in G_x$ jer je $f(x) = g^{-1}(h(x)) = g^{-1}(y) = x$. Dakle, $h = gf$ za $f \in G_x$, pa je $h \in gG_x$.

Permutacije n-elementnog skupa možemo predstavljati u Košijevoj notaciji (kao $2 \times n$ matrice čija se prva vrsta sastoji od originala, a druga od odgovarajućih slika) ili u cikličnoj notaciji (kao proizvode disjunktnih ciklusa). U cikličnoj notaciji ćemo sa $[i+j]_n$ označavati element $k \in [n]$ takav da je $i + j \equiv k (\mathrm{mod}\, n)$.

Deza i Frankl [21] su dokazali da veličina presecajuće familije permutacija na skupu $[n]$ ne može biti veća od $(n-1)!$. Mi ćemo prezentovati dokaz koji su dali Ellis, Friedgut i Pilpel [22], a koji koristi narednu lemu.

Lema 3.1 *Neka je $\rho \in S$ ciklus dužine n i neka je H ciklična grupa reda n generisana sa ρ. Dalje, neka je $\sigma \in S$ proizvoljno. Tada nikoje dve različite permutacije iz levog koseta σH grupe H neće biti presecajuće.*

Dokaz. Neka je $\rho = (x_1\, x_2\, \ldots\, x_n)$. Tada za sve $i, j \in n$ važi

$$\rho^i(x_j) = x_{[i+j]_n}.$$

Pretpostavimo da postoje dve permutacije g i h u σH takve da je $g(x_j) = h(x_j)$, za neko $j \in [n]$. Kako je $g = \sigma\rho^k$ i $h = \sigma\rho^l$ za neke $k, l \in [n]$, mora biti $\rho^k(x_j) = \rho^l(x_j)$. Ali ovo znači da je

$$x_{[k+j]_n} = x_{[l+j]_n},$$

pa je $k = l$. Dakle, ako je $g(x_j) = h(x_j)$ za neko $j \in [n]$, onda je $g = h$. $\square$

Teorema 3.2 (Deza-Frankl, 1977) *Neka je S presecajuća familija permutacija na skupu $[n]$. Tada je*

$$|S| \leq (n-1)!.$$

Dokaz. Neka je S presecajuća familija permutacija na skupu $[n]$. Neka je $\rho \in S_n$ n-ciklus i neka je H ciklična grupa reda n generisana sa ρ. Za svaki levi koset σH podgrupe H na osnovu leme 3.1 sledi da σH sadrži najviše jednu permutaciju iz S. Levi koseti podgrupe H vrše particiju na grupi S_n, i kardinalnost svakog od njih jednaka je kardinalnosti same podgrupe. Kako je $|S_n| = n!$, broj levih koseta podgrupe H je $(n-1)!$, pa sledi da je $|S| \leq (n-1)!$. $\square$

Lako se vidi da se jednakost dostiže ako posmatramo kanoničke presecajuće familije permutacija. Deza i Frankl su dali pretpostavku da su ovo jedine presecajuće familije veličine $(n-1)!$, međutim to se ispostavilo znatno težim za dokazivanje. Ovo tvrđenje prvi su dokazali Cameron i Ku [1], i Larose i Malvenuto [23], nezavisno jedni od drugih.

Mi ćemo se fokusirati na dokaz koji su dali Cameron i Ku 2003. godine [1]. Pre nego što formulišemo i pokažemo samu teoremu, definisaćemo nekoliko novih pojmova i pokazati neka tvrđenja koja će nam kasnije biti od koristi.

Teorema 3.3 *Neka je G čvorno tranzitivan graf sa n čvorova. Neka je T podskup skupa čvorova i neka je najveća klika sadržana u T veličine $\frac{|T|}{m}$. Tada za svaku kliku C u G važi $|C| \leq \frac{n}{m}$. Ako je postignuta jednakost, onda je $|C \cap T| = \frac{|T|}{m}$.*

Dokaz. Neka je C klika u G. Brojaćemo parove (v, g) gde je $v \in C$, $g \in \mathrm{Aut}(G)$ i $g(v) \in T$. Pošto je G čvorno tranzitivan graf, za svaki $w \in T$ postoji $\frac{|\mathrm{Aut}(G)|}{n}$ izbora za g tako da je $g(v) = w$, pa je broj opisanih parova jednak $|C|\frac{|\mathrm{Aut}(G)|}{n}|T|$.

Sa druge strane, za bilo koji automorfizam g imamo $|g(C) \cap T| \leq \frac{|T|}{m}$, jer je $g(C) \cap T$ klika u T. Odavde zaključujemo da je broj parova najviše $\frac{|T|}{m}|\mathrm{Aut}(G)|$. Dakle,

$$|C|\frac{|\mathrm{Aut}(G)|}{n}|T| \leq \frac{|T|}{m}|\mathrm{Aut}(G)|,$$

pa je

$$|C| \leq \frac{n}{m}.$$

Ako važi jednakost, onda je $|g(C) \cap T| = \frac{|T|}{m}$ za sve $g \in \mathrm{Aut}(G)$. Uzimajući $g = \mathrm{Id}$ dobijamo jednakost iz tvrđenja. $\square$

Ako je T koklika, onda je najveća klika koju T sadrži veličine 1, pa hipoteza važi za $m = |T|$. Ovo nam daje sada već poznatu klika-koklika granicu.

Posledica 3.4 *Neka je C klika i S koklika u čvorno tranzitivnom grafu sa n čvorova. Tada je $|C||S| \leq n$, a jednakost implicira da je $|C \cap S| =$ 1.*

Latinski kvadrat reda $n \in \mathbb{N}$ je kvadratna matrica L reda n takva da važi sledeće:
(i) elementi matrice L su elementi nekog n-elementnog skupa X,
(ii) svaki element skupa X se pojavljuje u tačno jednoj vrsti matrice L,
(iii) svaki element skupa X se pojavljuje u tačno jednoj koloni matrice L.
Vrste (kolone) latinskog kvadrata možemo posmatrati kao permutacije na n-elementnom skupu. U skladu sa tim, dajemo još jednu posledicu teoreme 3.3.

Teorema 3.5 *Neka je S presecajuća familija permutacija na skupu $[n]$ i neka je $|S| = (n-1)!$. Tada S sadrži tačno jednu vrstu svakog latinskog kvadrata reda n.*

Dokaz. Neka je G graf čiji je skup čvorova S_n, a dve permutacije g i h su povezane granom ako je $g(i) = h(i)$, za neko $i \in [n]$. Množenje sa leve strane sa elementima iz S_n je automorfizam grafa G, pa je G čvorno tranzitivan graf.

Neka je L skup vrsta nekog proizvoljnog latinskog kvadrata. Tada je S klika, a L koklika veličine n u grafu G. Kako je $|S| = (n-1)! = \frac{n!}{|L|}$, na osnovu posledice 3.4 imamo da je $|S \cap L| = 1$. $\square$

U nastavku će nam biti potrebna Hallova teorema o venčanju. Tačnije, koristićemo njenu formulaciju u terminima teorije skupova.

Za datu familiju skupova $S = \{S_1, ..., S_n\}$, *sistem različitih predstavnika* I elemenata iz S je skup od n različitih elemenata takvih da je $|I \cap S_i| = 1$, za $i \in \{1, ..., n\}$. Sledeću teoremu navodimo bez dokaza.

Teorema 3.6 *Neka je E neprazan konačan skup i $S = \{S_1, ..., S_n\}$ familija nepraznih podskupova skupa E. Tada postoji sistem različitih predstavnika I od S ako i samo ako za svaku kolekciju k mnogo skupova S_i, $i \in \{1, ..., n\}$ njihova unija sadrži barem k elemenata.*

Neka je g permutacija iz S_n. Definišemo

$$D(g) = \{w \in S_n : w(i) \neq g(i), \forall i = 1, ..., n\}.$$

Tvrđenje 3.7 *Neka je $n \geq 2k$. Tada, za sve $g_1, g_2, ..., g_k \in S_n$, važi $D(g_1) \cap D(g_2) \cap ... \cap D(g_k) \neq \emptyset$.*

Dokaz. Permutacija $h \in S_n$ pripada skupu $D(g_1) \cap D(g_2) \cap ... \cap D(g_k)$ ako i samo ako je sistem različitih predstavnika za skupove A_i, $i = 1, ..., n$, gde je

$$A_i = \{x : x \neq g_1(i) \text{ i } x \neq g_2(i) \text{ i ... i } x \neq g_k(i)\}.$$

Jasno je da je $|A_i| \geq n - k$.

Proveravamo uslove iz teoreme 3.6. Neka je $A(J) = \bigcup_{j \in J} A_j$, za $J \subset \{1, ..., n\}$. Treba da pokažemo da je $|A(J)| \geq |J|$, za sve J.

Jasno je da će ovo važiti ako je $|J| \leq n-k$, pa možemo pretpostaviti da je $|J| \geq n - k + 1$.

Neka $x \in \{1, ..., n\}$. Tada $x \notin A(J)$ ako i samo ako za sve $j \in J$ postoji $i \in \{1, ..., k\}$ takvo da je $x = g_i(j)$. Međutim, postoji najviše k parova (i, j) takvih da je $x = g_i(j)$, jer je za dato i vrednost j određena sa $j = g_i^{-1}(x)$. Kako je $|J| \geq n - k + 1 \geq k + 1$, ovo ne može važiti za sve $j \in J$. Dakle, $A(J) = \{1, ..., n\}$ i $|A(J)| = n \geq |J|$. □

Napomena: Ako su $g_1, ..., g_k$ po parovima nepresecajuće permutacije, onda uslov $n \geq 2k$ možemo oslabiti na $n \geq k + 1$. Dakle, svaki latinski pravougaonik dimenzije $k \times n$ (skup po parovima nepresecajućih permutacija) se može proširiti do latinskog kvadrata. Neka su $g_1, ..., g_k$ vrste latinskog kvadrata reda k, proširene tako da fiksiraju tačke $k + 1, ..., n$. Bilo koja permutacija iz $D(g_1) \cap D(g_2) \cap ... \cap D(g_k)$ mora imati vrednosti iz skupa $\{k+1, ..., n\}$ na pozicijama $1, ..., k$. Ako je $n \leq 2k - 1$, takva permutacija ne može postojati.

Teorema 3.8 (Hall, 1945) *Svaki $k \times n$ latinski pravougaonik se može proširiti do nekog $n \times n$ latinskog kvadrata.*

Dokaz. Označimo sa R dati latinski pravougaonik dimenzije $k \times n$. Neka je za svako $j = 1, ..., n$ S_j skup koji se sastoji od onih vrednosti iz skupa $\{1, ..., n\}$ koje se ne pojavljuju u j-toj koloni u R. Dokažimo da postoji sistem različitih predstavnika za skupove $S_1, ..., S_n$.

Svaki skup S_j ima tačno $n - k$ elemenata. Kako se svaki element skupa $\{1, ..., n\}$ javlja tačno jednom u svakoj od k vrsta, i nijedan element se ne pojavljuje dva puta u istoj koloni, zaključujemo da se svaki element iz $\{1, ..., n\}$ nalazi u tačno $n - k$ skupova S_j. Bilo koji izbor k skupova S_j sadržaće $k(n-k)$ pojavljivanja elemenata iz $\{1, ..., n\}$, i od toga barem k različitih elemenata. Sada vidimo da su ispunjeni uslovi teoreme 3.6, pa je moguće izabrati različite predstavnike $a_1, ..., a_n$ tako da $a_j \in S_j$.

Po definiciji skupova S_j, ovih n različitih predstavnika može se iskoristiti za dodavanje još jedne vrste u R tako da on sada postaje latinski pravougaonik dimenzije $(k+1)\times n$. Ponavljajući ovaj postupak $n-k$ puta, na kraju dobijamo latinski kvadrat dimenzije $n \times n$. $\square$

3.2 Operacija fiksiranja

Dokaz koji su dali Cameron i Ku koristi operaciju fiksiranja koja je slična operaciji zamene iz originalnog dokaza Erdős-Ko-Rado teoreme. Sada ćemo definisati tu operaciju.

Neka je $x \in [n]$ i $g \in S_n$. Definišimo *fiksiranje* tačke x preko g kao permutaciju $g_x \in S_n$ na sledeći način:

(i) ako $g(x) = x$, onda $g_x = g$,

(ii) ako $g(x) \neq x$, onda

$$g_x(y) = \begin{cases} x, & \text{ako } y = x, \\ g(x), & \text{ako } y = g^{-1}(x), \\ g(y), & \text{inače.} \end{cases}$$

Induktivno definišemo $g_{x_1 \dots x_r}$ kao fiksiranje od x_r preko $g_{x_1 \dots x_{r-1}}$. Za familiju permutacija S kažemo da je *zatvorena u odnosu na operaciju fiksiranja* ako za sve $x \in [n]$ i sve $g \in S$ važi $g_x \in S$.

Neka $g \in S_n$, $A \subset [n]$, i neka je sa $g|_A$ označena restrikcija permutacije g na skup A. Ako je $g(A) = A$, onda je $g|_A$ bijekcija iz A u A, pa je to permutacija na skupu A. U opštem slučaju, $g|_A$, kao bijekcija između podskupova od $[n]$ veličine $|A|$, je parcijalna permutacija.

Teorema 3.9 *Neka je $S \subseteq S_n$ presecajuća familija permutacija takva da $\mathrm{Id} \in S$ i $|S| = (n-1)!$, gde je $n \geq 6$. Tada je S zatvorena u odnosu na operaciju fiksiranja.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da S nije zatvorena u odnosu na operaciju fiksiranja. Tada postoje neko $x \in [n]$ i $g \in S$ tako da je $g(x) \neq x$ i $g_x \notin S$. Neka je

$$g : \begin{pmatrix} 1 & \dots & x & \dots & y & \dots & n \\ a_1 & \dots & a_x & \dots & a_y & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

gde je $a_x \neq x$ i $a_y = x$. Tada je

$$g_x : \begin{pmatrix} 1 & \cdots & x-1 & x & x+1 & \cdots & y-1 & y & y+1 & \cdots & n \\ a_1 & \cdots & a_{x-1} & a_y & a_{x+1} & \cdots & a_{y-1} & a_x & a_{y+1} & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Razmatraćemo dva slučaja:

(i) $a_x = y$.

Neka je $A = [n] \setminus \{x, y\}$. Tada su $\overline{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}\,|_A$ i $\overline{g} = g|_A = g_x|_A$ elementi u S_A. Kako je $n - 2 \geq 4$, na osnovu tvrđenja 3.6 postoji neko $\overline{h} \in D(\overline{\mathrm{Id}}) \cap D(\overline{g})$. Definišimo sada permutaciju h na skupu $[n]$ na sledeći način:

$$h(i) = \begin{cases} \overline{h}(i), & \text{ako } i \in A, \\ y, & \text{ako } i = x, \\ x, & \text{ako } i = y. \end{cases}$$

Tada g_x i h formiraju latinski pravougaonik dimenzije $2 \times n$. Na osnovu teoreme 3.8, postoji $n \times n$ latinski kvadrat koji sadrži g_x i h. Primetimo, za bilo koju drugu vrstu r (sem g_x i h) ovog latinskog kvadrata, mora važiti $r \in D(g_x) \cap D(h)$, pa dakle $r \in D(g)$, a to znači da se r i g ne slažu ni u jednoj tački iz $[n]$.

Dakle, $r \notin S$ jer je $g \in S$ i S je presecajuća familija permutacija. Štaviše, h i Id se takođe ne slažu ni u jednoj tački iz $[n]$ po samoj konstrukciji permutacije h, pa $h \notin S$. Po pretpostavci imamo da $g_x \notin S$, pa dobijamo da nijedna vrsta iz ovog latinskog kvadrata ne pripada S, a to je u kontradikciji sa teoremom 3.5.

(ii) $a_x = z \neq y$.

Neka je $A = [n] \setminus \{x, z\}$. Tada je $\overline{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}\,|_A$ identičko preslikavanje u S_A. Definišemo permutaciju $\overline{g}$ na skupu A na sledeći način:

$$\overline{g}(i) = \begin{cases} g(i), & \text{ako } i \neq y, \\ g(z), & \text{ako } i = y. \end{cases}$$

$|A| = n - 2 \geq 4$, pa na osnovu tvrđenja 3.7, postoji permutacija $\overline{h} \in D(\overline{\mathrm{Id}}) \cap D(\overline{g}) \subseteq S_A$. Sada ćemo definisati još jednu permutaciju, ali ovaj put na skupu $[n]$:

$$h_*(i) = \begin{cases} \overline{h}(i), & \text{ako } i \in A, \\ z, & \text{ako } i = x, \\ x, & \text{ako } i = z. \end{cases}$$

Dalje definišemo permutaciju h na skupu $[n]$:

$$h(i) = \begin{cases} h_*(i), & \text{ako } i \neq y, z, \\ h_*(z) = x, & \text{ako } i = y, \\ h_*(y), & \text{ako } i = z. \end{cases}$$

Tvrdimo da g_x i h formiraju latinski pravougaonik dimenzije $2 \times n$. Lako se proverava da se g_x i h ne slažu ni na jednom elementu iz $[n]$, sem eventualno na z. Ali kako je $h(z) = h_*(y) = \overline{h}(y)$ i $\overline{h} \in D(\overline{g})$, imamo $h(z) \neq \overline{g}(y) = g(z) = g_x(z)$. Ovim smo dokazali ono što smo tvrdili, pa na osnovu teoreme 3.8 postoji $n \times n$ latinski kvadrat koji sadrži g_x i h.

Sada primetimo da se nijedna vrsta r, različita od g_x i h, ovog latinskog kvadrata ne slaže sa g ni u jednoj tački iz $[n]$. Po pretpostavci $g_x \notin S$, pa nam preostaje da proverimo da li $h \in S$.

Na osnovu konstrukcije, ako bi se h i Id slagale na nekoj tački i, onda $i \neq x, y, z$. Ali odavde bi sledilo da $\overline{h}$ i $\overline{\mathrm{Id}}$ moraju da se slažu na nekoj tački. Ovo je kontradikcija jer $\overline{h} \in D(\overline{\mathrm{Id}})$. Dakle, $h \notin S$. Ovim smo ponovo dobili da nijedna vrsta posmatranog latinskog kvadrata ne pripada S, a to je u kontradikciji sa teoremom 3.5.

Dakle, teorema je dokazana.

□

3.3 Fiksne tačke permutacije

Za tačku $i \in [n]$ kažemo da je *fiksna tačka permutacije* $g \in S_n$ ako je $g(i) = i$. Skup $\mathrm{Fix}(g) = \{i \in [n] : g(i) = i\}$ naziva se *skupom fiksnih tačaka* permutacije g. Ako je S podskup od S_n, onda je

$$\mathrm{Fix}(S) = \{\mathrm{Fix}(g) : g \in S\}$$

familija podskupova od $[n]$.

Lema 3.10 *Neka su $g, h \in S_n$ takve da je $g(x) = h(x)$ u $g(y) \neq h(y)$. Tada je $g_x(y) \neq h(y)$.*

Dokaz. Posmatramo dva slučaja:

(i) Ako je $g(y) = x$, onda $g_x(y) = g(x) = h(x) \neq h(y)$.

(ii) Ako je $g(y) \neq x$, onda $g_x(y) = g(y) \neq h(y)$.

□

Teorema 3.11 *Neka je $S \subseteq S_n$ presecajuća familija permutacija koja je zatvorena u odnosu na operaciju fiksiranja. Tada je i* $\mathrm{Fix}(S)$ *presecajuća familija.*

Dokaz. Ako su $g, h \in S_n$ takve da je $g(x) = h(x)$ i $g(y) \neq h(y)$, na osnovu leme 3.10 i činjenice da je S zatvorena u odnosu na operaciju fiksiranja imamo da je $g_x(y) \neq h(y)$ i $g_x \in S$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da $\mathrm{Fix}(S)$ nije presecajuća familija. Tada postoje $g, h \in S$ takve da je $g \neq h$ i $\mathrm{Fix}(g) \cap \mathrm{Fix}(h) = \emptyset$. Neka je $B = \{x \in [n] : g(x) = h(x)\}$. Kako je S presecajuća familija, $B = \{x_1, ..., x_k\}$ za neki pozitivan ceo broj k.

Neka je $w = g_{x_1 \dots x_k}$. Sada je $w(y) \neq h(y)$ za sve $y \in [n] \setminus B$, i $w \in S$. Ako je $w(x_i) = h(x_i)$ za neko i, dobili bismo da je $x_i = w(x_i) = h(x_i) = g(x_i)$, gde poslednja jednakost sledi iz $x_i \in B$. Ali tada je $\mathrm{Fix}(g) \cap \mathrm{Fix}(h) \neq \emptyset$, a to je u kontradikciji sa našom pretpostavkom.

Dakle, mora biti $w(x) \neq h(x)$ za sve $x \in [n]$, ali kako $w, h \in S$, ovo je ponovo u kontradikciji sa tim da je S presecajuća familija permutacija. $\square$

3.4 Maksimalne presecajuće familije permutacija

Neka je $Y \subseteq [n]$ i $G_{(Y)} = \{g \in S_n : g(y) = y, \text{ za sve } y \in Y\}$. Jasno je da je tada $G_{(\{x\})}$ stabilizator tačke x i da je $|G_{(Y)}| = (n - |Y|)!$.

Ako je sada g permutacija iz $S \subseteq S_n$ sa skupom fiksnih tačaka $\mathrm{Fix}(g) = F$, onda $g \in G_{(F)}$. Sada imamo da je

$$|S| \leq \sum_{F \in \mathrm{Fix}(S)} |G_{(F)}| = \sum_{F \in \mathrm{Fix}(S)} (n - |F|)!.$$

Međutim, možemo dobiti i bolje ograničenje za kardinalnost familije S. Primetimo, ako je $A \subseteq B$ za neke $A, B \in \mathrm{Fix}(S)$, onda je $G_{(B)} \subseteq G_{(A)}$. Uzimajući

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathrm{Fix}(S) : F \text{ je minimalni element poseta } (\mathrm{Fix}(S), \subseteq)\},$$

dobijamo

$$|S| \leq \sum_{F \in \mathcal{F}} (n - |F|)!.$$

U glavi 1 smo izveli LYM nejednakost (videti teoremu 1.18), tj. pokazali smo da ako je $\mathcal{A}$ antilanac podskupova skupa $[n]$, onda je

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} |A|!(n - |A|)! \leq n!.$$

Sada ćemo videti jednu posledicu ove nejednakosti.

Lema 3.12 *Ako je $\mathcal{A}$ antilanac podskupova skupa $[n]$ i ako je $|A| \geq k$ za sve $A \in \mathcal{A}$, onda*

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} (n - |A|)! \leq \frac{n!}{k!}.$$

Dokaz. Primenjujući LYM nejednakost, dobijamo

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} (n - |A|)! \leq \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{|A|!}{k!} (n - |A|)! \leq \frac{n!}{k!}.$$

□

Sada konačno imamo sav potreban alat za dokazivanje glavnog rezultata ove glave.

Teorema 3.13 (Cameron-Ku, 2003) *Neka je $n \geq 2$ i $S \subseteq S_n$ presecajuća familija permutacija takva da je $|S| = (n-1)!$. Tada je S koset stabilizatora jedne tačke.*

Dokaz. Primetimo prvo da uvek možemo pretpostaviti da $\mathrm{Id} \in S$. U suprotnom, za neku permutaciju $g \in S$ definišemo $S' = g^{-1}S = \{g^{-1}h : h \in S\}$. Sada S' sadrži Id i to je ponovo presecajuća familija permutacija veličine $(n-1)!$. Dakle, pretpostavljajući da je $\mathrm{Id} \in S$, dovoljno je pokazati da je S stabilizator jedne tačke.

Za slučajeve kada je $n \leq 5$, ovo se može pokazati upotrebom paketa GRAPE u GAP-u.

Neka je $n \geq 6$. Na osnovu teorema 3.9 i 3.11 možemo pretpostaviti da je $\mathrm{Fix}(S)$ presecajuća familija. Neka je $\mathcal{F}$ definisan kao ranije, tj.

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathrm{Fix}(S) : F \text{ je minimalni element poseta } (\mathrm{Fix}(S), \subseteq)\}.$$

Dakle, $\mathcal{F}$ je neprazan presecajući antilanac podskupova od $[n]$.

Očigledno, $\emptyset \notin \mathcal{F}$ jer je $\mathcal{F}$ presecajuća. Dodatno, primetimo da nijedna permutacija g ne može fiksirati tačno $n-1$ tačku, jer u tom slučaju i preostala tačka mora biti fiksirana pod dejstvom permutacije g. Odavde imamo da je $|\mathrm{Fix}(g)| \neq n-1$ za sve $g \in S$. Posebno, $|F| \neq n-1$ za sve $F \in \mathcal{F}$. Takođe, $[n] \notin \mathcal{F}$ jer je $\mathcal{F}$ antilanac. Dakle, imamo $1 \leq |F| \leq n-2$, za sve $F \in \mathcal{F}$.

Ako $\{x\} \in \mathrm{Fix}(S)$, onda postoji permutacija $g \in S$ koja fiksira samo tačku x, dok sve ostale tačke ispermutuje. Kako je $\mathrm{Fix}(S)$ presecajuća familija, onda sve permutacije iz S fiksiraju tačku x. Sada na osnovu $|S| = (n-1)!$ zaključujemo da S mora biti stabilizator tačke x. Dakle, možemo pretpostaviti da je $|\mathrm{Fix}(g)| \geq 2$ za sve $g \in S$, pa samim tim je $|F| \geq 2$ za sve $F \in \mathcal{F}$.

Na osnovu definicije $\mathcal{F}$ ako bi bilo $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$, onda bi važilo $\bigcap_{F \in \mathrm{Fix}(S)} F \neq \emptyset$, pa bi sve permutacije iz S fiksirale neku istu tačku odakle bismo ponovo imali traženi rezultat. Dakle, pretpostavimo da je $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$.

Uz sve gore navedene pretpostavke, naš cilj je da dobijemo kontradikciju pokazujući da je $|S| < (n-1)!$. U te svrhe, posmatraćemo dva slučaja:

(i) Neka je $|F| \geq 3$, za sve $F \in \mathcal{F}$. U tom slučaju, na osnovu leme 3.12 imamo

$$\begin{aligned} |S| &\leq \sum_{F \in \mathcal{F}} (n - |F|)! \\ &= \sum_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ 3 \leq |F| \leq [\frac{n}{2}]}} (n - |F|)! + \sum_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ |F| \geq [\frac{n}{2}]+1}} (n - |F|)! \\ &\leq \sum_{k=3}^{[\frac{n}{2}]} a_k (n-k)! + \frac{n!}{([\frac{n}{2}]+1)!}, \end{aligned}$$

gde je a_k broj elemenata u $\mathcal{F}$ veličine k. Sada je na osnovu EKR teoreme

$$|S| \leq \sum_{k=3}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-1}{k-1} (n-k)! + \frac{n!}{([\frac{n}{2}]+1)!},$$

pa je

$$\begin{aligned} |S| &\leq (n-1)! \sum_{k=3}^{[\frac{n}{2}]} \frac{1}{(k-1)!} + \frac{n!}{([\frac{n}{2}]+1)!} \\ &\leq (n-1)! \frac{4}{5} + \frac{n!}{([\frac{n}{2}]+1)!}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

jer je $\sum_{k=3}^{[\frac{n}{2}]} \frac{1}{(k-1)!} < e - 2 < \frac{4}{5}$, gde je e prirodni eksponent. Ovde smo koristili da se funkcija e^x može razviti u Maklorenov red, pa je $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Za $x = 1$, dobijamo navedenu nejednakost.

Dakle, dovoljno je pokazati da je $\frac{n!}{([\frac{n}{2}]+1)!} < \frac{(n-1)!}{5}$. Ovo je tačno za $n \geq 8$. Za slučajeve kada je $n = 6$ ili $n = 7$, iz (3.1) se lako dobija da je $|S| < (n-1)!$.

Zaključujemo da ako $\mathcal{F}$ nema element veličine 2, onda je $|S| < (n-1)!$ za sve $n \geq 6$.

(ii) Neka sada $\mathcal{F}$ sadrži element veličine 2 i neka je

$$\mathcal{F}_2 = \{F \in \mathcal{F} : |F| = 2\}.$$

Sada ćemo posmatrati dva podslučaja:

(1) Neka je $\bigcap_{F\in\mathcal{F}_2} F = \emptyset$.

Bez umanjenja opštosti, na osnovu svojstva presecanja možemo pretpostaviti da je $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\} \subseteq \mathcal{F}_2$. Neka sada $F \in \mathcal{F} \setminus \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$. Kako je $F \cap \{2,3\} \neq \emptyset$, imamo da ili $2 \in F$ ili $3 \in F$. Odavde sledi da $1 \notin F$, jer bi u suprotnom bilo $\{1,2\} \subseteq F$ ili $\{1,3\} \subseteq F$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je $\mathcal{F}$ antilanac. Ali sada $F \cap \{1,2\} \neq \emptyset$ i $F \cap \{1,3\} \neq \emptyset$ implicira da je $\{2,3\} \subseteq F$, što je ponovo u kontradikciji sa činjenicom da je $\mathcal{F}$ antilanac. Dakle, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$, $|\mathcal{F}_2| = 3$, pa zaključujemo da je za sve $n \geq 6$

$$|S| \leq \sum_{F\in\mathcal{F}} (n-|F|)! = \sum_{F\in\mathcal{F}_2} (n-|F|)! = 3(n-2)! < (n-1)!.$$

(2) Neka je $\bigcap_{F\in\mathcal{F}_2} F \neq \emptyset$.

Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $\mathcal{F}_2 = \{\{1,i\} : 2 \leq i \leq c\}$, za neko $c \in \{2,3,...,n\}$. Neka je sada

$$\mathcal{D} = \{F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_2 : 1 \notin F\}, \quad \mathcal{E} = \{F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_2 : 1 \in F\}.$$

Ako je g permutacija i ako njen skup fiksnih tačaka $\mathrm{Fix}(g)$ sadrži neki F iz $\mathcal{D}$, onda kako je familija $\mathcal{F}$ presecajuća, $\mathrm{Fix}(g)$ mora sadržati $\{2,3,...,c\}$. Dakle, $g \in G_{(\{2,3,...,c\})}$.

Za početak, pretpostavimo da je $c = n$. Tada $\mathcal{D}$ mora biti prazan skup, jer bismo inače imali da je $\{2,3,...,n\} \subseteq F$ za bilo koji skup $F \in \mathcal{D}$, pa bi bilo $|F| > n-2$, što je kontradikcija. Dakle, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{E}$, pa svaki F iz $\mathcal{F}$ mora sadržati 1. Ali onda bi važilo $\bigcap_{F\in\mathcal{F}_2} F \neq \emptyset$, što je ponovo kontradikcija. Dakle, $c \leq n-1$.

Ako $F \in \mathcal{E}$, onda je $\{1,x,y\} \subseteq F$ ($F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_2$, pa mora sadržati barem tri tačke) za neke $x, y \notin \{2,3,...,c\}$. Ovo imamo na osnovu toga što je $\mathcal{F}$ antilanac. Dakle, postoji najviše $\binom{n-c}{2}$ izbora za neuređeni par $\{x,y\}$. Ako je g permutacija i ako njen skup fiksnih tačaka $\mathrm{Fix}(g)$ sadrži neki F iz $\mathcal{E}$, onda $g \in G_{(\{1,x,y\})}$. Sada zaključujemo da je

$$|S| \leq \sum_{F\in\mathcal{F}_2}(n-|F|)! + |G_{(\{2,3,\ldots,c\})}| + \sum_{B\in\binom{[n]\setminus\{1,2,\ldots,c\}}{2}} |G_{(\{1\}\cup B)}|$$

$$\leq (c-1)(n-2)! + (n-c+1)! + \binom{n-c}{2}(n-3)!.$$

Pretpostavljajući da je $3 \leq c \leq n-2$, imamo $|S| \leq f(s)$ gde je $f(c) = c(n-2)! + \binom{n-c}{2}(n-3)!$. Ali $\frac{n-c}{2} < n-2$ implicira

$$\frac{(n-c)(n-c-1)}{2} < (n-2)(n-c-1),$$

jer $n-c-1 > 0$. Sada je

$$\binom{n-c}{2}(n-3)! < (n-2)!(n-c-1),$$

pa je

$$f(c) < (n-1)!.$$

Dakle, $|S| < (n-1)!$, za $n \geq 6$.

Ako je $c = n-1$, onda nemamo izbora za neuređeni par $\{x, y\}$ jer biramo elemente iz skupa $[n]\setminus\{1, 2, ..., n-1\}$. U ovom slučaju se gornja granica za veličinu kardinalnosti od S svodi na

$$|S| \leq \sum_{F\in\mathcal{F}_2}(n-|F|)! + |G_{(\{2,3,\ldots,c\})}| = (n-2)(n-2)! + 2 < (n-1)!$$

za sve $n \geq 6$.

Sada možemo pretpostaviti da je $c = 2$, pa je $\mathcal{F}_2 = \{\{1, 2\}\}$. Kako je familija $\mathcal{F}$ presecajući antilanac, možemo je predstaviti kao disjunktnu uniju familije $\mathcal{F}_2$, skupova iz $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_2$ koji sadrže 1 i skupova iz $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_2$ koji sadrže 2. Dakle, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, gde je

$$\mathcal{B}_1 = \{F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_2 : 1 \in F\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_2 : 2 \in F\}.$$

Za svako $i = 1, 2$, ako $F \in \mathcal{B}_i$, onda F sadrži skup $\{i, a, b\}$, gde

$a, b \in [n] \setminus \{1, 2\}$. Dakle,

$$\begin{aligned}
|S| \le \sum_{F \in \mathcal{F}_2} (n - |F|)! + &\sum_{\{a,b\} \in \binom{[n] \setminus \{1,2\}}{2}} |G_{(\{1,a,b\})}| \\
+ &\sum_{\{a,b\} \in \binom{[n] \setminus \{1,2\}}{2}} |G_{(\{2,a,b\})}| \\
&\le (n-2)! + 2\binom{n-2}{2}(n-3)! \\
&\le (n-2)(n-2)! < (n-1)!.
\end{aligned}$$

Možemo zaključiti da ako $\mathcal{F}$ ima element veličine 2, onda za sve $n \ge 6$ važi $|S| < (n-1)!$.

Ovim smo pokrili sve moguće slučajeve, pa je dokaz teoreme završen.

$\square$

Zaključak

U ovom radu bavili smo se jednim od glavnih rezultata ekstremalne kombinatorike, a to je Erdős-Ko-Rado teorema. Reč je o teoremi koja daje gornje ograničenje za kardinalnost familije t-presecajućih k-podskupova nekog posmatranog skupa kardinalnosti n. Ova teorema takođe opisuje strukturu maksimalnih t-presecajućih familija, odnosno onih familija za koje se to gornje ograničenje dostiže.

Prva glava rada posvećena je prezentovanju nekoliko različitih dokaza Erdős-Ko-Rado teoreme. Najpre je dat njen originalni dokaz koji je zahtevao definisanje operacije zamene na familiji k-podskupova. Nakon toga prikazana su dva alternativna dokaza EKR teoreme, kao i dokaz Hilton-Milner teoreme koja daje granicu za kardinalnost nekanoničkih presecajućih familija. Takođe, prikazano je i kako se EKR teorema dobija direktno iz Kruskal-Katona teoreme. Na kraju ove glave, date su neke varijacije na EKR teoremu.

U drugoj glavi smo najpre definisali neke pojmove iz teorije grafova, kao što su Kneserov graf, klika i koklika. Zatim smo izvodili nekoliko različitih granica na veličinu klika i koklika Kneserovog grafa. Takođe, prezentovali smo Erdős-Ko-Rado teoremu u terminima teorije grafova na sledeći način: presecajuća familija k-podskupova je koklika u Kneserovom grafu, pa EKR teorema daje ograničenje na veličinu takve koklike, i opisuje koklike maksimalne veličine.

U trećoj glavi rada bavili smo se maksimalnim presecajućim familijama permutacija. Prvo smo prezentovali dokaz Deza-Frankl teoreme koja je dala gornje ograničenje na kardinalnost ovakvih familija. Nakon toga smo dali niz pomoćnih tvrđenja i teorema neophodnih za dokazivanje glavnog rezultata ovog dela rada, a to je teorema do koje su došli Cameron i Ku. Ova teorema nam kaže da ako je dostignuta granica iz Deza-Frankl teoreme, onda posmatrana presecajuća familija permutacija mora biti koset stabilizatora jedne tačke.

Literatura

[1] P. J. Cameron, C. Y. Ku, *Intersecting families of permutations.* European Journal of Combinatorics. 24, 881–890 (2003)

[2] P. Erdős, C. Ko, R. Rado, *Intersection theorems for systems of finite sets.* Quarterly Journal of Mathematics. 12, 313–320 (1961)

[3] C. Godsil, K. Meagher, *Erdős-Ko-Rado Theorems: Alegbraic Approaches*, Cambridge University Press (2016)

[4] P. Frankl, *The shifting technique in extremal set theory.* Surveys in Combinatorics 1987, 81-110. Cambridge University Press (1987)

[5] L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises.* American Mathematical Society (2007)

[6] G. Katona, *A theorem of finite sets.* Theory of Graphs, Tihany, Hungary, 1966 (Academic Press, New York and Acad. Kiado, Budapest, 1968) 187-207

[7] P. Frankl, *The Erdős–Ko–Rado theorem is true for $n = ckt$.* Combinatorics, volume 18 of Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 365–375. North-Holland, Amsterdam (1978)

[8] P. Frankl, Z. Füredi, *Non-trivial intersecting families.* Journal of Combinatorial Theory, Series A. 41, 150–153 (1986)

[9] R. M. Wilson, *The exact bound in the Erdős-Ko-Rado theorem.* Combinatorica. 4, 247–257 (1984)

[10] R. Ahlswede, L. H. Khachatrian, *The Complete Intersection Theorem for Systems of Finite Sets.* European Journal of Combinatorics. 18, 125–136 (1997)

[11] D. E. Daykin, *Erdős-Ko-Rado from Kruskal-Katona.* Journal of Combinatorial Theory, Series A. 17, 254–255 (1974)

[12] G. Katona, *Intersection theorems for systems of finite sets.* Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 15, 329–337 (1964)

[13] J. B. Kruskal, *The number of simplices in a complex.* Mathematical Optimization Techniques (University of California Press, 2024), 251–278

[14] L. Pyber, *A new generalization of the Erdös-Ko-Rado theorem.* Journal of Combinatorial Theory, Series A. 43, 85–90 (1986)

[15] M. Matsumoto, N. Tokushige, *The exact bound in the Erdős-Ko-Rado theorem for cross-intersecting families.* Journal of Combinatorial Theory, Series A. 52, 90–97 (1989)

[16] J. Talbot, *Intersecting families of separated sets.* Journal of the London Mathematical Society. 68, 37–51 (2003)

[17] D. Ellis, *A proof of the Cameron-Ku conjecture.* Journal of the London Mathematical Society. 85, 165–190 (2012)

[18] A. R. Calderbank, P. Frankl, *Improved Upper Bounds Concerning the Erdős-Ko-Rado Theorem.* Combinatorics, Probability and Computing. 1, 115–122 (1992)

[19] D. M. Cvetković, *Graphs and their spectra.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. (1971)

[20] A. J. W. Hilton, E. C. Milner, *Some intersection theorems for systems of finite sets.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 18:369–384 (1967)

[21] P. Frankl, M. Deza, *On the maximum number of permutations with given maximal or minimal distance.* Journal of Combinatorial Theory, Series A. 22, 352–360 (1977)

[22] D. Ellis, E. Friedgut, H. Pilpel, *Intersecting families of permutations.* Journal of the American Mathematical Society. 24, 649–682 (2011)

[23] B. Larose, C. Malvenuto, *Stable sets of maximal size in Kneser-type graphs.* European Journal of Combinatorics. 25, 657–673 (2004)

Biografija

Katarina Žigerović je rođena 22. februara 1998. godine u Šapcu. Osnovnu školu ,,Vuk Karadžić" završila je u Badovincima 2013. godine kao nosilac Vukove diplome, nakon čega upisuje srednju medicinsku školu ,,Dr Andra Jovanović" u Šapcu. 2017. godine upisala je osnovne akademske studije u trajanju od četiri godine na smeru Diplomirani profesor matematike, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Diplomirala je 2022. godine sa prosečnom ocenom 9,68, a zatim na istom fakultetu upisala master studije na dvogodišnjem smeru Matematika. U julskom ispitnom roku položila je sve ispite predviđene planom i programom master studija, sa prosečnom ocenom 10,00.

Od decembra 2023. godine radi kao saradnica u nastavi na Departmanu za matematiku i informatiku, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Katarina Žigerović
AU

Mentor: dr Samir Zahirović
ME

Naslov rada: Erdeš-Ko-Rado teorema i presecajuće familije permutacija
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski / engleski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2024.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (3/70/23/0/2/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Kombinatorika
ND

Ključne reči: Erdős-Ko-Rado teorema, presecajuća familija skupova, klika, koklika, Kneserov graf, stabilizator, koset, presecajuća familija permutacija, Cameron-Ku teorema
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Erdős-Ko-Rado teorema jedan je od glavnh rezultata ekstremalne kombinatorike. Ona daje ograničenje za kardinalnost familije presecajućih k-podskupova posmatranog skupa kardinalnosti n, i opisuje familije za koje se to gornje ograničenje dostiže. Najpre dajemo originalni dokaz ove teoreme, a potom i nekoliko njenih alternativnih dokaza. U ovom delu rada su prezentovane i različite varijacije EKR teoreme. U drugoj glavi smo pro-

bleme vezane za presecajuće k-podskupove preveli na jezik teorije grafova pomoću Kneserovog grafa. Potom smo izvodili različite gornje granice na veličinu klika i koklika Kneserovog grafa. Centralni deo treće glave je teorema koja opisuje maksimalne presecajuće familije permutacija na nekom n-elementnom skupu, a do koje su došli Cameron i Ku 2003. godine. Dokazu ove glavne teoreme prethodi nekoliko teorema vezanih za fiksne tačke permutacija i operaciju fiksiranja. Takođe, dokazana je i Hallova teorema o proširenju proizvoljnog latinskog pravougaonika do latinskog kvadrata.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 28. avgust 2024.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Ivica Bošnjak, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor: dr Samir Zahirović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Vlado Uljarević, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Katarina Žigerović
AU

Mentor: Samir Zahirović, PhD
MN

Title: Erdős-Ko-Rado theorem and intersecting families of permutations
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: serbian / english
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2024.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (3/70/23/0/2/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Combinatorics
SD

Subject/Key words: Erdős–Ko–Rado theorem, intersecting family of sets, clique, coclique, Kneser graph, stabilizer, coset, intersecting family of permutations, Cameron–Ku theorem
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: The Erdős–Ko–Rado theorem is one of the main results in extremal combinatorics. It provides an upper bound for the cardinality of a family of intersecting k-subsets of a set of cardinality n, and it describes families for which this upper bound is attained. We first present the original proof of this theorem, followed by several alternative proofs. This section also presents various versions of the EKR theorem. In the second chapter, we translate the problems related to intersecting k-subsets into the language of

graph theory using the Kneser graph. Then, we derive various upper bounds on the size of the clique and coclique of the Kneser graph. The central part of the third chapter is a theorem that describes the maximal intersecting families of permutations on an n-element set, discovered by Cameron and Ku in 2003. The proof of this main theorem is preceded by several theorems related to fixed points of permutations and the operation of fixing. Additionally, Hall's theorem on extending any Latin rectangle to a Latin square is also proven.
AB

Accepted by the Scientific Board on: August 28, 2024.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Ivica Bošnjak, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor: Samir Zahirović, PhD, Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Vlado Uljarević, PhD, Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad