



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU



Milana Kovačev

Teorija stabilnosti sa primenama u mehanici

Master rad

Mentor:
dr Srboljub Simić

Novi Sad, 2024.

SADRŽAJ

Uvod	1
1 Dinamički sistemi u faznoj ravni	3
1.1 Osnovni pojmovi	3
1.2 Dinamički sistem u okolini stacionarne tačke	4
2 Osnovi teorije stabilnosti	7
2.1 Definicije stabilnosti	7
2.2 Linearna stabilnost stacionarne tačke.....	9
2.3 Klasifikacija stacionarnih tačaka.....	13
2.4 Nelinearna stabilnost stacionarne tačke	17
2.4.1 Kretanje reprezentativne tačke u faznoj ravni	18
2.4.2 Definitne funkcije i njihova svojstva	19
2.4.3 Kvalitativna analiza rešenja	21
2.4.4 Teoreme Ljapunova	23
2.5 Primeri.....	25
3 Primene u mehanici	35
3.1 Harmonijski oscilator	35
3.2 Prigušeni oscilator	38
3.3 Matematičko klatno	41
3.4 Rotirajuće matematičko klatno	44
4 Zaključak	54
5 Dodatak	56
5.1 Teorema o srednjoj vrednosti	56
5.2 Lokalni ekstremi funkcija više promenljivih	57

Literatura	59
Biografija.....	60
Ključna dokumentacijska informacija	61

UVOD

U matematici, teorija stabilnosti se bavi stabilnošću rešenja diferencijalnih jednačina i trajektorija dinamičkih sistema pri malim poremećajima (perturbacijama) početnih uslova. Međutim, ovi problemi imaju svoj koren u fizici, odnosno mehanici. Problemi stabilnosti se u mehanici prvi put javljaju prilikom istraživanja ravnotežnog stanja sistema. Na primer, kada je matematičko klatno u najnižem položaju bilo koja perturbacija će izazvati oscilovanje klatna oko tog položaja. U ovom slučaju najniži položaj klatna predstavlja ravnotežni položaj i smatra se da je on stabilan zato što odstupanja klatna od njega ostaju ograničena tokom vremena. U ovom radu će se pokazati da u matematičkom smislu najniži položaj klatna predstavlja stabilnu stacionarnu tačku sistema diferencijalnih jednačina. Međutim, proučavanje stabilnosti u opštem slučaju značajno izlazi izvan okvira ovakvih jednostavnih problema zato što kod mnogih dinamičkih sistema uslove stabilnosti nije lako odrediti.

Kriterijum stabilnosti krutih tela u ravnotežnom položaju pod dejstvom gravitacione sile definisao je Toričeli 1644. godine. Lagranž je dokazao teoremu koja definiše dovoljne uslove za stabilnost bilo kog konzervativnog sistema 1788. godine.

Sredinom XIX veka javljaju se novi problemi u mehanici koji zahtevaju formulisanje opštijih uslova za određivanje stabilnosti. Jedan od tih problema je izazvao krizu u industriji motora. Naime, radi se o centrifugalnim regulatorima koji su bili ugrađeni na parne mašine sa ciljem da održe propisano okretanje motora određenom brzinom. Problem kod centrifugalnih regulatora se javljao pri povećanju snage motora što je dovodilo do njegovog ubrzanja. Maksvel (1868) i Višnjegradski (1876-1877) ukazuju na to da je prvo potrebno formulisati uslove za određivanje stabilnosti pa tek onda rešiti problem pomenutog regulatora.

Krajem XIX veka Raut i Žukovski objavljuju monografije posvećene opštim problemima stabilnosti kretanja i metodima njihove analize. Neke od objavljenih metoda ova dva naučnika su od velikog značaja i danas. Međutim, glavni nedostatak istraživanja stabilnosti u ovom periodu bio je taj što su analizirani samo linearizovani sistemi diferencijalnih jednačina poremećaja i nisu uzimani u obzir članovi višeg reda.

Veliki pomak u teoriji stabilnosti dešava se 1892. godine kada Ljapunov objavljuje doktorsku disertaciju pod naslovom „Opšti problemi stabilnosti kretanja“. Ova teza sadrži toliko ideja i rezultata od značaja da se cela istorija teorije stabilnosti može podeliti na period pre i posle Ljapunova. Pre svega, Ljapunov je dao strogu definiciju stabilnosti kretanja koja je prihvaćena kao osnovna definicija. On je predstavio rešenja za veliku klasu problema

nestacionarnog i periodičnog kretanja. Takođe, predložio je dve metode za analizu stabilnosti kretanja. Prva se oslanja na poznavanje rešenja sistema diferencijalnih jednačina. Druga metoda, koja se naziva i direktna metoda Ljapunova, poznata je zbog svoje jednostavnosti i efikasnosti. Naime, Ljapunov je prvi spoznao da se stabilnost rešenja može dokazati bez prethodnog poznavanja tačnog rešenja sistema. Ova metoda je postala poznata u periodu Hladnog rata kada je otkriveno da se možemo primeniti u analizi stabilnosti sistema za navođenje u vazduhoplovstvu. Ovaj sistem je nelinearan i njegova stabilnost se ne može odrediti pomoću drugih metoda.

Posle Ljapunova teorija stabilnosti kretanja se razvijala u različitim pravcima. Mnogi naučnici su nastavili da istražuju ideje koje je Ljapunov izneo. Jedan od njih bio je Četajev koji se smatra direktnim naslednikom Ljapunova. Definicije koje je uveo Ljapunov su dopunjene i određeni su uslovi stabilnosti sistema pod uticajem velikih perturbacija početnih uslova kao i perturbacija u konačnim vremenskim intervalima i pod dejstvom slučajnih sila.

Teorija stabilnosti se danas široko koristi u fizici, astronomiji, hemiji, čak i biologiji. Najznačajnija primena teorije stabilnosti je u tehnici: brodovi, avioni, turbine, giroskopski kompas i tako dalje. Teorija stabilnosti se i dalje razvija zahvaljujući brojnim naučnicima koji otkrivaju rešenja novih problema.

Ovaj rad je posvećen teoriji stabilnosti kao delu teorije običnih diferencijalnih jednačina i njenoj primeni na odabrane probleme mehanike. Analiza će se sprovesti na sistemima drugog reda, odnosno na dinamičkim sistemima u faznoj ravni.

Rad se sastoji iz tri dela. Prvi deo rada posvećen je uvođenju pojmova fazne ravni, fazne trajektorije i faznog portreta. Zatim će biti definisan pojam stacionarne tačke i analiziraće se ponašanje dinamičkog sistema u njenoj okolini pomoću linearizovanih sistema diferencijalnih jednačina.

Drugi deo rada sadrži osnove teorije stabilnosti dinamičkih sistema u faznoj ravni. Najpre će biti definisani pojmovi stabilnosti u običnom smislu i asimptotske stabilnosti stacionarne tačke. Dokazaćemo teoreme o stabilnosti stacionarne tačke i dati klasifikaciju stacionarnih tačaka. Zatim ćemo uvesti pojam definitnih funkcija i analizirati njihova svojstva. Najzad ćemo formulisati i dokazati teoreme Ljapunova. Primena teorije stabilnosti biće ilustrovana pogodnim primerima.

Treći deo rada je posvećen primenama teorije stabilnosti na mehaničke sisteme. Obradiće se stabilnost položaja ravnoteže harmonijskog i prigušenog oscilatora, matematičkog klatna, kao i stabilnost položaja relativne ravnoteže rotirajućeg matematičkog klatna.

1 DINAMIČKI SISTEMI U FAZNOJ RAVNI

1.1 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju će biti definisani osnovni pojmovi koji se odnose na dinamičke sisteme u faznoj ravni. Pod pojmom dinamičkog sistema u faznoj ravni podrazumevaće se sistem koji čine dve obične diferencijalne jednačine (ODJ) prvog reda.

Prvo uvodimo *veliĉine stanja dinamiĉkog sistema*. Njih oznaĉavamo sa (y_1, y_2) i one svojim vrednostima opisuju stanje sistema. Veliĉine stanja dinamiĉkog sistema mogu biti, na primer, temperatura, pritisak, poloŹaj, brzina, broj jedinki neke populacije. Mi ćemo posmatrati veliĉine stanja dinamiĉkog sistema koje se menjaju tokom vremena, $(y_1(t), y_2(t))$. Stanje dinamiĉkog sistema se tokom vremena menja pod uticajem nekog dejstva i to ĉini osnovnu strukturu matematiĉkog modela:

$$\frac{\Delta \text{veliĉina stanja}}{\Delta t} \approx \text{dejstvo}.$$

Dinamiĉki sistem opisan je sledećim sistemom ODJ prvog reda.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= F_1(y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} &= F_2(y_1, y_2). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ovaj sistem ODJ je autonoman Źto znaĉi da desne strane ne zavise eksplicitno od t , odnosno:

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Rešenje sistema ODJ (1.1) je vektorska funkcija:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix},$$

ĉije komponente identički zadovoljavaju dati sistem jednaĉina:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(t)}{dt} &\equiv F_1(y_1(t), y_2(t)), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &\equiv F_2(y_1(t), y_2(t)). \end{aligned}$$

Ravan (y_1, y_2) se naziva *fazna ravan*. Grafički prikaz rešenja sistema ODJ (1.1) u ovoj ravni naziva se *fazna trajektorija*. Zapravo, fazna trajektorija je skup tačaka $(y_1(t), y_2(t))$ u faznoj ravni, koje se dobijaju za sve vrednosti t iz nekog vremenskog intervala. Takođe, fazna trajektorija je parametarski zadata kriva kod koje vreme t igra ulogu parametra. Skup svih faznih trajektorija naziva se *fazni portret*.

Stacionarna tačka (kritična tačka ili singularna tačka) je tačka za koju važi da je:

$$y_1(t) = a_1 = \text{const.} \quad (1.2)$$

$$y_2(t) = a_2 = \text{const.}$$

partikularno rešenje sistema ODJ (1.1). Ako je (1.2) stacionarna tačka, onda važi:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = 0,$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = 0,$$

odakle dobijamo da je:

$$F_1(a_1, a_2) = 0, \quad (1.3)$$

$$F_2(a_1, a_2) = 0.$$

Ukoliko je ovo slučaj, cela fazna trajektorija je tačka.

1.2 Dinamički sistem u okolini stacionarne tačke

U analizi dinamičkih sistema od posebnog interesa je njihovo ponašanje u okolini stacionarne tačke. Ta analiza se mnogo jednostavnije može sprovesti ako se izvrši smena promenljivih, odnosno ako se redefinišu veličine stanja. Nove veličine stanja ćemo označiti sa $x(t)$ i $y(t)$ i definisaćemo ih relacijom:

$$y_1(t) = a_1 + x(t), \quad (1.4)$$

$$y_2(t) = a_2 + y(t),$$

gde a_1 i a_2 predstavljaju vrednosti veličina stanja u stacionarnoj tački. Veličine $x(t)$ i $y(t)$ se uobičajeno nazivaju *poremećajima*. Diferenciranjem jednačina (1.4) po t dobijamo:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}, \quad (1.5)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt}.$$

Korišćenjem (1.4) i (1.5) dinamički sistem (1.1) se može zapisati u obliku:

$$\frac{dx}{dt} = F_1(a_1 + x, a_2 + y), \quad (1.6)$$

$$\frac{dy}{dt} = F_2(a_1 + x, a_2 + y).$$

Uvođeći oznake:

$$X(x, y) := F_1(a_1 + x, a_2 + y),$$

$$Y(x, y) := F_2(a_1 + x, a_2 + y),$$

dinamički sistem (1.6) se može zapisati kao:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \tag{1.7}$$

$$\frac{dy}{dt} = Y(x, y).$$

Primetimo da važi:

$$X(0,0) = 0, \quad Y(0,0) = 0,$$

odnosno, stacionarna tačka sistema (1.7) je sada $(x, y) = (0,0)$. Sistem ODJ (1.7) nazivamo *dinamički sistem u okolini stacionarne tačke* $(0,0)$ ili *diferencijalne jednačine poremećaja*. Drugi naziv ovih jednačina se koristi u mehanici.

Diferencijalne jednačine (1.7) su u opštem slučaju nelinearne diferencijalne jednačine. Budući da se rešenja nelinearnih jednačina mogu odrediti samo u specijalnim slučajevima, veoma je teško analizirati ponašanje dinamičkog sistema na osnovu (1.7). Određene informacije o njegovom ponašanju u *maloj okolini* stacionarne tačke mogu se dobiti ako se desne strane jednačina (1.7), odnosno (1.6), linearizuju.

Razvojem funkcija F_1 i F_2 iz (1.6) u Tejlorov polinom u okolini stacionarne tačke $(0,0)$ dobijamo sledeće:

$$F_1(a_1 + x, a_2 + y) = F_1(a_1, a_2) + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a_1, a_2)x + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(a_1, a_2)y + O(\|\mathbf{x}\|^2)$$

$$= ax + by + O(\|\mathbf{x}\|^2) = X(x, y),$$

$$F_2(a_1 + x, a_2 + y) = F_2(a_1, a_2) + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(a_1, a_2)x + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(a_1, a_2)y + O(\|\mathbf{x}\|^2)$$

$$= cx + dy + O(\|\mathbf{x}\|^2) = Y(x, y).$$

Sa \mathbf{x} smo označili vektor:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Sa $\|\mathbf{x}\|$ je označena norma vektora \mathbf{x} . S obzirom na to da su u vektorskim prostorima konačne dimenzije sve norme ekvivalentne, možemo izabrati bilo koju od njih. Najjednostavnije za dalji rad je da usvojimo euklidsku normu:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Konačno, sistem ODJ (1.7) sada izgleda ovako:

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(x, y) = ax + by + O(\|\mathbf{x}\|^2), \tag{1.8}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = Y(x, y) = cx + dy + O(\|\mathbf{x}\|^2).$$

U daljoj analizi posmatraćemo i *dinamičke sisteme u linearnoj aproksimaciji u okolini stacionarne tačke*, a to su dinamički sistemi kod kojih su zanemareni članovi $O(\|\mathbf{x}\|^2)$:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= ax + by, \\ \frac{dy(t)}{dt} &= cx + dy.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Ovaj sistem jednačina se u mehanici i teoriji stabilnosti naziva *linearizovanim jednačinama poremećaja*.

Ukoliko uvedemo vektor \mathbf{x} i matricu \mathbf{A} na sledeći način:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

sistem (1.9) možemo zapisati u matričnom obliku:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}.\tag{1.10}$$

2 OSNOVI TEORIJE STABILNOSTI

2.1 Definicije stabilnosti

Dinamički sistem ODJ (1.6) u okolini stacionarne tačke (0,0):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y),\end{aligned}$$

možemo zapisati na sledeći način:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

gde je:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} X(x, y) \\ Y(x, y) \end{bmatrix}.$$

Stacionarna tačka je tačka za koju važi da je:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 = \text{const.}$$

rešenje dinamičkog sistema (2.1), odnosno važi:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Mi ćemo uzeti da je:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0},$$

jer stacionarnu tačku možemo translirati u koordinatni početak, pa jednakost (2.2) pišemo:

$$\mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Neka je:

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t),$$

rešenje sistema (2.1) i

$$\mathbf{\Phi}(0),$$

je početni uslov sistema (2.1). Pretpostavljamo da je u opštem slučaju:

$$\Phi(0) \neq \mathbf{0}.$$

Tada je (2.1):

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} \equiv X(\Phi(t)).$$

Sada uvodimo definicije stabilnosti i asimptotske stabilnosti stacionarne tačke.

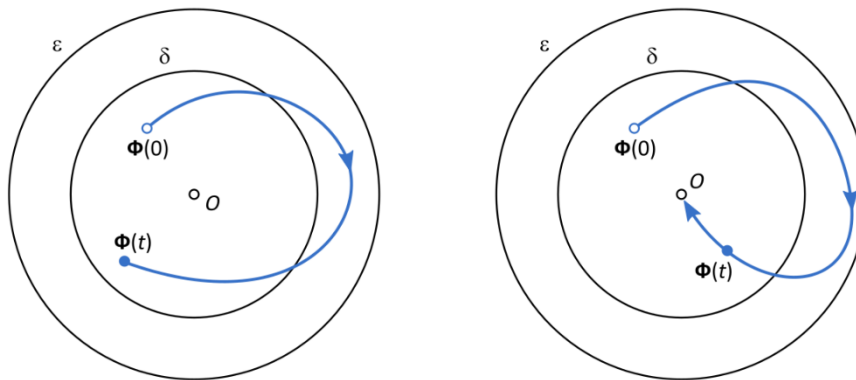
Definicija 2.1 (obična stabilnost) Ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da važi:

$$\|\Phi(0)\| < \delta \Rightarrow \|\Phi(t)\| < \varepsilon,$$

za svako $t > 0$ za svako rešenje $\Phi(t)$, onda je stacionarna tačka:

$$x_0 = \mathbf{0},$$

stabilna (u običnom smislu).



Slika 2.1 Definicije stabilnosti: obična i asimptotska

Definicija 2.2 (asimptotska stabilnost) Stacionarna tačka:

$$x_0 = \mathbf{0},$$

je asimptotski stabilna ako važi:

- 1) $x_0 = \mathbf{0}$ je stabilna (u običnom smislu),
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t)\| = 0$ za svako rešenje $\Phi(t)$.

Očigledno, asimptotska stabilnost je jače svojstvo od stabilnosti, uzevši u obzir da stacionarna tačka mora biti stabilna pre nego što možemo razmotriti da li je asimptotski stabilna.

U mehanici se početni uslovi $\Phi(0)$ tretiraju kao *mali* poremećaji. Stoga nam Definicija 2.1 govori o tome da *mali* poremećaji u početnim uslovima ostaju *mali* (ograničeni) tokom kretanja, dok nam Definicija 2.2 govori da poremećaji iščezavaju tokom vremena.

Ukoliko želimo da dokažemo da stacionarna tačka nije stabilna dovoljno je pronaći *jedan* početni uslov $\Phi(0)$ za koji će rešenje $\Phi(t)$ narušiti nejednakost:

$$\|\Phi(t)\| < \varepsilon.$$

Matematički zapisano to izgleda ovako:

$$\exists T > 0 : \|\Phi(T)\| > \varepsilon.$$

2.2 Linearna stabilnost stacionarne tačke

U daljem tekstu ćemo se ograničiti na analizu stabilnosti hiperboličnih stacionarnih tačaka. To su stacionarne tačke linearnog dinamičkog sistema (1.8):

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

gde sopstvene vrednosti matrice A imaju realni deo različit od nule.

Problem sopstvenih vrednosti je:

$$Ad = \lambda d, \quad (2.3)$$

a karakteristična jednačina je:

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (2.4)$$

U opštem slučaju, postoje dva rešenja karakteristične jednačine (2.4):

$$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad k = 1, 2, \quad (2.5)$$

$$\alpha_k = \operatorname{Re}(\lambda_k) \neq 0, \quad k = 1, 2,$$

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$$

i njih nazivamo *sopstvene vrednosti*. *Sopstveni vektori* su:

$$d_k = a_k + ib_k, \quad k = 1, 2, \quad (2.6)$$

gde je $d_2 = \overline{d_1}$. Norma vektora (2.6) je:

$$\|d_k\| = (d_k \cdot \overline{d_k})^{\frac{1}{2}} = ((a_k + ib_k) \cdot (a_k - ib_k))^{\frac{1}{2}} = ((a_k \cdot a_k) + (b_k \cdot b_k))^{\frac{1}{2}},$$

gde je tačkom označen skalarni proizvod vektora.

Partikularna rešenja linearnog dinamičkog sistema (1.8), za $k = 1, 2$, dobijamo na sledeći način:

$$x^{(k)}(t) = e^{\lambda_k t} d_k = e^{(\alpha_k + i\beta_k)t} d_k = e^{\alpha_k t} e^{i\beta_k t} d_k = e^{\alpha_k t} (\cos(\beta_k t) + i \sin(\beta_k t)) d_k. \quad (2.7)$$

Znamo da je:

$$|\cos(\beta_k t) + i \sin(\beta_k t)| = (\cos(\beta_k t))^2 + (\sin(\beta_k t))^2 = 1.$$

Opšte rešenje linearnog dinamičkog sistema (1.8) se dobija kao linearna kombinacija nezavisnih partikularnih rešenja:

$$x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t). \quad (2.8)$$

Dalje formulišemo i dokazujemo teoreme o stabilnosti stacionarne tačke u linearnoj aproksimaciji.

Teorema 2.3 Ako su $Re(\lambda_k) < 0, k = 1, 2$, onda je stacionarna tačka $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ asimptotski stabilna u linearnoj aproksimaciji.

Dokaz: Pretpostavimo da je $Re(\lambda_k) < 0, k = 1, 2$ i da je $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k, k = 1, 2$. Pošto je $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, to možemo zapisati i u obliku $\alpha_1 = \alpha_2 < 0, \beta_2 = -\beta_1$. Tada je:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(t)\| &= \|c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)\| \leq \|c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)\| + \|c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)\| \\ &\leq |c_1|\|\mathbf{x}^{(1)}(t)\| + |c_2|\|\mathbf{x}^{(2)}(t)\| = |c_1|\|e^{\alpha_1 t}e^{i\beta_1 t}\mathbf{d}_1\| + |c_2|\|e^{\alpha_2 t}e^{i\beta_2 t}\mathbf{d}_2\| \\ &\leq |c_1|e^{\alpha_1 t}|e^{i\beta_1 t}|\|\mathbf{d}_1\| + |c_2|e^{\alpha_2 t}|e^{i\beta_2 t}|\|\mathbf{d}_2\|.\end{aligned}$$

Pošto znamo sledeće:

$$\begin{aligned}|e^{i\beta_1 t}| &= 1, & |e^{i\beta_2 t}| &= 1, \\ \alpha_1 &= \alpha_2 \Rightarrow e^{\alpha_1 t} = e^{\alpha_2 t}, \\ \alpha_1 &= \alpha_2 < 0 \Rightarrow |e^{\alpha_1 t}| = |e^{\alpha_2 t}| \leq 1, \quad t \geq 0, \\ \mathbf{d}_2 &= \overline{\mathbf{d}_1} \Rightarrow \|\mathbf{d}_2\| = \|\mathbf{d}_1\|,\end{aligned}$$

dobijamo da je:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq (|c_1| + |c_2|)\|\mathbf{d}_1\|.$$

Možemo proglasiti da je:

$$\varepsilon = (|c_1| + |c_2|)\|\mathbf{d}_1\|,$$

te dobijamo da je stacionarna tačka stabilna u običnom smislu.

Dalje, iz nejednakosti:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq (|c_1| + |c_2|)e^{\alpha_1 t}\|\mathbf{d}_1\|$$

dobijamo, kada pustimo da t teži beskonačnosti:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (|c_1| + |c_2|)e^{\alpha_1 t}\|\mathbf{d}_1\| = 0,$$

te onda mora biti i:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0,$$

što nam daje, zajedno sa stabilnošću, asimptotsku stabilnost stacionarne tačke.

Ako je $Im(\lambda_k) = \beta_k = 0, k = 1, 2$, onda je $\lambda_k = \alpha_k$. Neka je $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, tada su partikularna rešenja oblika:

$$\mathbf{x}^{(k)}(t) = e^{\lambda_k t}\mathbf{d}_k,$$

a opšte rešenje je:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t).$$

Norma opšteg rešenja je:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(t)\| &= \|c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)\| \leq \|c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)\| + \|c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)\| \\ &\leq |c_1|\|\mathbf{x}^{(1)}(t)\| + |c_2|\|\mathbf{x}^{(2)}(t)\| = |c_1|\|e^{\lambda_1 t}\mathbf{d}_1\| + |c_2|\|e^{\lambda_2 t}\mathbf{d}_2\| \\ &\leq |c_1|e^{\lambda_1 t}\|\mathbf{d}_1\| + |c_2|e^{\lambda_2 t}\|\mathbf{d}_2\|.\end{aligned}$$

Pošto je $|e^{\lambda_1 t}| \leq |e^{\lambda_2 t}|$ i možemo izabrati $\|\mathbf{d}_1\| = 1$ i $\|\mathbf{d}_2\| = 1$, dobijamo da je:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq (|c_1| + |c_2|)|e^{\lambda_2 t}| \leq |c_1| + |c_2|.$$

Proglašavamo da je $\varepsilon = |c_1| + |c_2|$, pa dobijamo da je stacionarna tačka stabilna.

Kada pustimo da t teži beskonačnosti dobijamo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (|c_1| + |c_2|)|e^{\lambda_2 t}| = 0,$$

pa mora biti i :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0,$$

što nam ponovo daje asimptotsku stabilnost stacionarne tačke.

Teorema 2.4 Ako važi:

$$i) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \quad \text{ili} \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2,$$

ili

$$ii) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \text{ i } Re(\lambda_k) = \alpha > 0, k = 1, 2,$$

onda je stacionarna tačka nestabilna.

Dokaz:

i) U ovom slučaju partikularna rešenja su : $\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{d}_1$ i $\mathbf{x}^{(2)}(t) = e^{\lambda_2 t} \mathbf{d}_2$, a problem sopstvenih vrednosti glasi:

$$\mathbf{A} \mathbf{d}_k = \lambda_k \mathbf{d}_k, \quad k = 1, 2.$$

Opšte rešenje je:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{d}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{d}_2.$$

Za dokazivanje nestabilnosti stacionarne tačke dovoljno pronaći jedan početni uslov $\mathbf{x}(0)$ za koji važi da postoji $0 < T < \infty$ takvo da je $\|\mathbf{x}(T)\| > \varepsilon$ za unapred zadato ε . Pošto je $\lambda_2 > 0$, izabraćemo $\mathbf{x}(0) = \kappa \mathbf{d}_2$, $\kappa > 0$. Tada je:

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{d}_1 + c_2 \mathbf{d}_2 = \kappa \mathbf{d}_2,$$

$$c_1 \mathbf{d}_1 + (c_2 - \kappa) \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}.$$

Pošto su vektori \mathbf{d}_1 i \mathbf{d}_2 linearno nezavisni dobijamo da je:

$$c_1 = 0,$$

$$c_2 - \kappa = 0 \Rightarrow c_2 = \kappa.$$

Naše rešenje sada glasi ovako:

$$\mathbf{x}(t) = \kappa e^{\lambda_2 t} \mathbf{d}_2,$$

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \|\kappa e^{\lambda_2 t} \mathbf{d}_2\| = \kappa e^{\lambda_2 t} \|\mathbf{d}_2\| = \kappa e^{\lambda_2 t},$$

gde smo usvojili $\|\mathbf{d}_2\| = 1$. Neka je $0 < T < \infty$, pa je:

$$\|\mathbf{x}(T)\| = \kappa e^{\lambda_2 T} > \varepsilon > 0,$$

$$T > \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{\varepsilon}{\kappa}.$$

Dakle, stacionarna tačka $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je nestabilna.

ii) Za $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ i $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$, imamo:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \\ e^{\lambda_2 t} &= e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)) = \overline{e^{\lambda_1 t}}, \\ \mathbf{d}_1 &= \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \\ \mathbf{d}_2 &= \overline{\mathbf{d}_1} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}, \end{aligned}$$

gde su vektori \mathbf{a} i \mathbf{b} linearno nezavisni. Sada prvo partikularno rešenje izgleda ovako:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(t) &= e^{\lambda_1 t} \mathbf{d}_1 = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \\ &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \mathbf{a} - \sin(\beta t) \mathbf{b}) + i e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \mathbf{b} + \sin(\beta t) \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Definišimo funkcije $\mathbf{u}(t)$ i $\mathbf{v}(t)$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \mathbf{a} - \sin(\beta t) \mathbf{b}), \\ \mathbf{v}(t) &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \mathbf{b} + \sin(\beta t) \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Prvo partikularno rešenje sada možemo zapisati u obliku:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t),$$

a drugo partikularno rešenje izgleda ovako:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = e^{\lambda_2 t} \mathbf{d}_2 = \mathbf{u}(t) - i\mathbf{v}(t) = \overline{\mathbf{x}^{(1)}(t)}.$$

Pošto su funkcije $\mathbf{u}(t)$ i $\mathbf{v}(t)$ dva realna linearno nezavisna rešenja, opšte rešenje ćemo formirati kao njihovu linearnu kombinaciju:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t).$$

Primetimo da je $\mathbf{u}(0) = \mathbf{a}$ i $\mathbf{v}(0) = \mathbf{b}$.

Neka je $\mathbf{x}(0) = \kappa \mathbf{a}$, $\kappa > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= c_1 \mathbf{u}(0) + c_2 \mathbf{v}(0) = c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b} = \kappa \mathbf{a}, \\ (c_1 - \kappa) \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Pošto su vektori \mathbf{a} i \mathbf{b} linearno nezavisni dobijamo da je:

$$\begin{aligned} c_2 &= 0, \\ c_1 - \kappa &= 0 \implies c_1 = \kappa. \end{aligned}$$

Sada naše rešenje ima sledeći oblik:

$$\mathbf{x}(t) = \kappa \mathbf{u}(t) = \kappa e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \mathbf{a} - \sin(\beta t) \mathbf{b}).$$

Definišimo funkciju $\hat{\mathbf{u}}(t)$ na sledeći način:

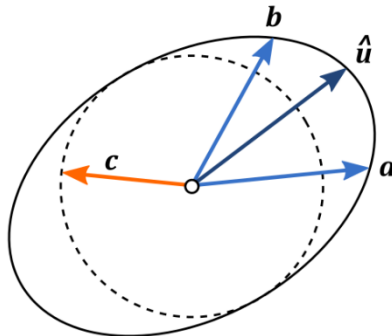
$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \cos(\beta t) \mathbf{a} - \sin(\beta t) \mathbf{b}.$$

Sada je:

$$\mathbf{x}(t) = \kappa e^{\alpha t} \hat{\mathbf{u}}(t).$$

Pošto je $\hat{\mathbf{u}}(t) \neq \mathbf{0}$ zbog linearne nezavisnosti vektora \mathbf{a} i \mathbf{b} , dobijamo da je:

$$\|\hat{\mathbf{u}}(t)\| > \varepsilon_0 > 0 \Rightarrow \exists \mathbf{c}: \|\mathbf{c}\| = \varepsilon_0.$$



Slika 2.2 Analiza linearne nestabilnosti

Sada je:

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \|\kappa e^{\alpha t} \hat{\mathbf{u}}(t)\| = \kappa e^{\alpha t} \|\hat{\mathbf{u}}(t)\| > \kappa e^{\alpha t} \varepsilon_0.$$

Odatle sledi da postoji $0 < T < \infty$ tako da je:

$$\|\mathbf{x}(T)\| > \kappa e^{\alpha T} \varepsilon_0 > \varepsilon,$$

$$T > \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\varepsilon}{\kappa \varepsilon_0}.$$

Dakle, stacionarna tačka $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je nestabilna.

Napomenimo da ovde nije razmatrana linearna stabilnost kada su sopstvene vrednosti realne i jednake, $\lambda_1 = \lambda_2$. Iako je ovaj slučaj zanimljiv u matematičkom smislu, u primenama on spada u granične slučajeve kod kojih male promene parametara sistema impliciraju narušavanje jednakosti sopstvenih vrednosti. Uz to, ideja dokaza ostaje nepromenjena i stoga se zainteresovani čitalac upućuje na obimnu literaturu iz dinamičkih sistema u kojoj se ova analiza može pronaći.

2.3 Klasifikacija stacionarnih tačaka

U prethodnoj analizi smo se bavili proučavanjem stabilnosti stacionarne tačke. To je najgrublji vid analize zato što nam samo daje odgovor na pitanje da li je stacionarna tačka stabilna. Međutim, i kada je stabilna i kada je nestabilna ponašanje dinamičkog sistema u njenoj okolini može biti detaljnije opisano. Posledica te detaljnije analize je klasifikacija stacionarnih tačaka i analiza lokalnih faznih portreta.

Pretpostavimo najpre da je rešenje sistema ODJ (1.8) dato u sledećem obliku:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{d}e^{\lambda t},$$

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \mathbf{d} e^{\lambda t},$$

gde je $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$ i $\lambda \in \mathbb{C}$. Tada dobijamo:

$$\lambda \mathbf{d} e^{\lambda t} = \mathbf{A} \mathbf{d} e^{\lambda t} \Rightarrow (\mathbf{A} \mathbf{d} - \lambda \mathbf{d}) e^{\lambda t} = \mathbf{0}.$$

Pošto je $e^{\lambda t} \neq 0$ mora biti:

$$\mathbf{A} \mathbf{d} - \lambda \mathbf{d} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{d} = \lambda \mathbf{d}.$$

Ovo je problem sopstvenih vrednosti (2.3). Desnu stranu ove jednakosti možemo zapisati i na sledeći način:

$$\lambda \mathbf{d} = \lambda \mathbf{I} \mathbf{d},$$

gde je \mathbf{I} jedinična matrica drugog reda:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kada ovakav zapis uvrstimo u problem sopstvenih vrednosti (2.3) dobijamo:

$$\mathbf{A} \mathbf{d} = \lambda \mathbf{I} \mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{d} - \lambda \mathbf{I} \mathbf{d} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

Netrivijalno rešenje sistema (1.8) je karakteristična jednačina (2.4):

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Izračunavanjem determinante (2.4) dobijamo sledeće:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

što je dalje:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0.$$

Sa T i D ćemo, respektivno, obeležiti trag i determinantu matrice \mathbf{A} , odnosno:

$$T = \text{tr} \mathbf{A} = a + d,$$

$$D = \det \mathbf{A} = ad - bc.$$

Sada karakteristična jednačina (2.4) izgleda ovako:

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0.$$

Primetimo da je ovo, ustvari, kvadratna jednačina, te su njena rešenja:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(T \pm \sqrt{T^2 - 4D} \right).$$

Pređimo sada na detaljnu analizu sopstvenih vrednosti matrice \mathbf{A} . U zavisnosti od vrednosti diskriminante:

$$T^2 - 4D,$$

dobijamo različite sopstvene vrednosti (2.5). Naime, ako je:

$$T^2 - 4D > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

a ako je:

$$T^2 - 4D < 0 \Rightarrow \lambda_2 = \overline{\lambda_1} \in \mathbb{C}.$$

Ukoliko je:

$$T^2 - 4D = 0 \Rightarrow D = \frac{1}{4}T^2,$$

ovo je granična kriva koja razdvaja realna rešenja od konjugovano kompleksnih rešenja.

Posmatramo tri slučaja:

a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, T^2 - 4D > 0 \Leftrightarrow D < \frac{1}{4}T^2,$

b) $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} \in \mathbb{C}, T^2 - 4D < 0 \Leftrightarrow D > \frac{1}{4}T^2,$

c) $T = 0, D > 0,$

na osnovu kojih dobijamo klasifikaciju stacionarnih tačaka. Navedeni slučajevi nam određuju tri klase stacionarnih tačaka a pod c) imamo par imaginarnih sopstvenih vrednosti.

Realne sopstvene vrednosti. U slučaju pod a) sopstvene vrednosti su realne:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(T + \sqrt{T^2 - 4D}) \text{ i } \lambda_2 = \frac{1}{2}(T - \sqrt{T^2 - 4D}).$$

Tada važi:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{4}(T + \sqrt{T^2 - 4D})(T - \sqrt{T^2 - 4D}) = \frac{1}{4}(T^2 - T^2 + 4D) = D.$$

U zavisnosti od znaka determinante D i traga T razlikuju se tri tipa stacionarne tačke.

i) *Sedlo*, za koje važi:

$$D < 0 \text{ i } T \text{ je proizvoljnog znaka.}$$

Tada je $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, odnosno sopstvene vrednosti su različitog znaka.

ii) *Stabilni čvor*, za koji važi:

$$0 < D < \frac{1}{4}T^2, T < 0.$$

Tada je $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ i obe sopstvene vrednosti su negativne, $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Očigledno je $\lambda_2 < 0$, a $\lambda_1 < 0$ jer je:

$$\sqrt{T^2 - 4D} < \sqrt{T^2} = |T| \Rightarrow T + \sqrt{T^2 - 4D} < 0.$$

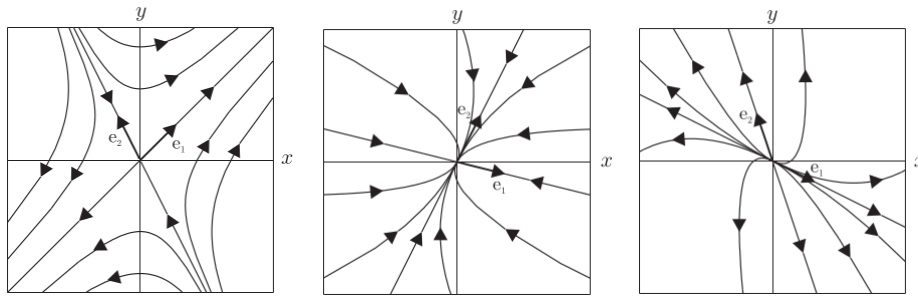
iii) *Nestabilni čvor*, za koji važi:

$$0 < D < \frac{1}{4}T^2, T > 0.$$

Tada je $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ i obe sopstvene vrednosti su pozitivne, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Očigledno je $\lambda_1 > 0$, a $\lambda_2 > 0$ jer je:

$$\sqrt{T^2 - 4D} < \sqrt{T^2} = |T| \Rightarrow T - \sqrt{T^2 - 4D} > 0.$$

Tipični fazni portreti su prikazani na Slici 2.3.



Slika 2.3 Fazni portreti: sedlo, stabilni čvor i nestabilni čvor

Konjugovano kompleksne sopstvene vrednosti. U slučaju pod b) sopstvene vrednosti su konjugovano kompleksne i tip stacionarne tačke je određen znakom realnog dela, odnosno znakom traga T , jer je $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = \frac{T}{2}$. Razlikujemo sledeće stacionarne tačke.

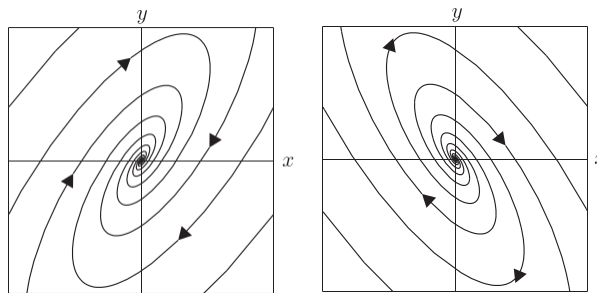
i) *Stabilni fokus*, za koji važi:

$$T < 0, D > \frac{1}{4}T^2.$$

ii) *Nestabilni fokus*, za koji važi:

$$T > 0, D > \frac{1}{4}T^2.$$

Tipični fazni portreti su prikazani na Slici 2.4.



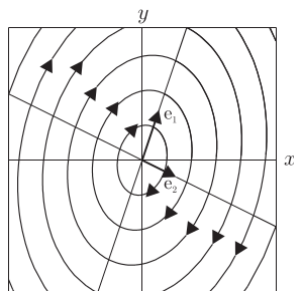
Slika 2.4 Fazni portreti: stabilni fokus i nestabilni fokus

Imaginarne sopstvene vrednosti. U slučaju pod c) imamo par imaginarnih sopstvenih vrednosti. To je jedini slučaj koji analiziramo u kom je $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0$, odnosno stacionarna tačka nije hiperbolična. Ovom slučaju odgovara samo jedan tip stacionarne tačke:

i) *Centar*, za koji važi:

$$T = 0, D > 0.$$

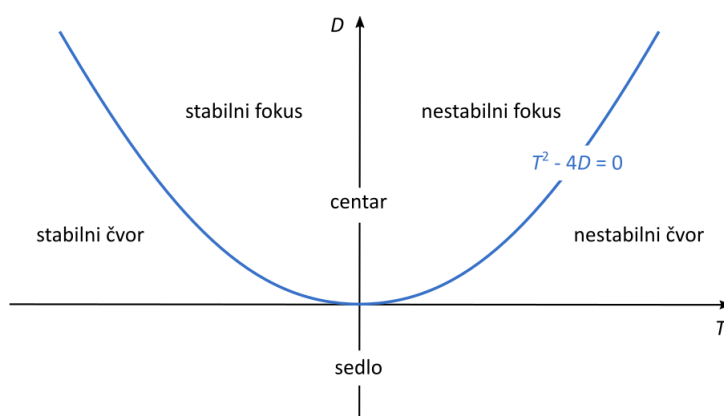
Tipični fazni portret je prikazan na Slici 2.5.



Slika 2.5 Fazni portreti: centar

Iako ova stacionarna tačka nije hiperbolična, ona će se u primenama na mehaničke probleme često pojavljivati. Zato je bilo neophodno da je izdvojimo u ovoj klasifikaciji.

Na Slici 2.6 dat je grafički prikaz klasifikacije stacionarnih tačaka u koordinatnoj ravni u kojoj je apscisa trag T a ordinata determinanta D .



Slika 2.6 Klasifikacija stacionarnih tačaka

2.4 Nelinearna stabilnost stacionarne tačke

U prethodnom izlaganju smo posmatrali sistem ODJ (1.6):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x, y), \quad X(0,0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y), \quad Y(0,0) = 0 \end{aligned}$$

i njega smo linearizovali u okolini stacionarne tačke. Zatim smo tražili sopstvene vrednosti i na osnovu njih određivali stabilnost stacionarne tačke.

Sada postavljamo pitanje: da li se može analizirati stabilnost bez linearizacije?

Mi ne znamo da rešimo nelinearne sisteme DJ u opštem slučaju. Međutim, nas ne interesuje tačno rešenje sistema, već samo jedno njegovo svojstvo a to je stabilnost, odnosno ograničenost norme rešenja. Ovaj problem pripada kvalitativnoj analizi diferencijalnih

jednačina. Jedno od mogućih rešenja je dato direktnim metodom Ljapunova, koji će biti opisan u daljem tekstu. Da bi ovaj metod mogao biti opisan, neophodno je uvesti nekoliko pojmova koji će sa jedne strane omogućiti jasnu formulaciju teorema Ljapunova o stabilnosti a sa druge pružiti njihovu pogodnu geometrijsku interpretaciju.

2.4.1 Kretanje reprezentativne tačke u faznoj ravni

Stanje dinamičkog sistema (1.6) u proizvoljnom trenutku vremena $t \geq 0$ određeno je veličinama stanja $x(t)$ i $y(t)$. Svako stanje sistema se može prikazati jednom tačkom u faznoj ravni (x, y) , a ona se može opisati vektorom:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y.$$

Ovu tačku ćemo nazivati reprezentativnom tačkom. Svako rešenje sistema (1.6) određuje parametarski zadatu krivu u faznoj ravni, koju ćemo nazivati faznom trajektorijom reprezentativne tačke. Po analogiji sa brzinom materijalne tačke u mehanici, možemo definisati brzinu $\mathbf{u}(t)$ reprezentativne tačke u faznoj ravni:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dy(t)}{dt} \mathbf{e}_y. \quad (2.9)$$

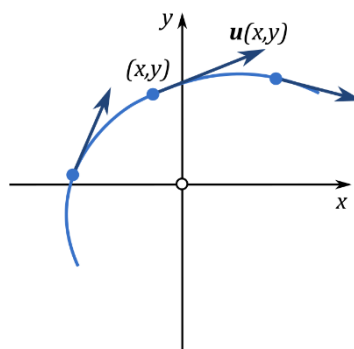
Pošto nam je poznato da je :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= X(x, y), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= Y(x, y), \end{aligned}$$

dobijamo da je (2.9):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) = X(x, y)\mathbf{e}_x + Y(x, y)\mathbf{e}_y, \quad (2.10)$$

i ovu jednačinu nazivamo *polje brzine reprezentativne tačke* u faznoj ravni. Ako postoji fazna trajektorija $(x(t), y(t))$ koja prolazi kroz tačku (x_0, y_0) , onda brzina $\mathbf{u}(x_0, y_0)$ reprezentativne tačke mora imati pravac tangente na faznu trajektoriju u toj tački. Štaviše, brzina reprezentativne tačke mora ovaj uslov da zadovolji u svakoj tački fazne trajektorije. Zbog toga se kaže da fazne trajektorije, odnosno rešenja sistema (1.6), predstavljaju integralne krive vektorskog polja $\mathbf{u}(x, y)$ određenog sa (2.10). Ova analiza je ilustrovana na Slici 2.7.



Slika 2.7 Brzina reprezentativne tačke

2.4.2 Definitne funkcije i njihova svojstva

U direktnom metodu Ljapunova centralnu ulogu imaju definitne funkcije. Stoga ćemo ovde dati njihovu definiciju i analizirati njihova svojstva koja su od značaja za dalju analizu.

Definicija 2.5 Neka je funkcija $V(x, y)$ definisana i 1-1 na otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $V \in C^1(\Omega)$, i tačka $(0,0) \in \Omega$. Funkcija $V(x, y)$ je *pozitivno (negativno) definitna* ako važi:

- 1) $V(0,0) = 0$;
- 2) $V(x, y) > 0, (x, y) \neq (0,0)$ ($V(x, y) < 0, (x, y) \neq (0,0)$).

Funkcija $V(x, y)$ je *pozitivno (negativno) semidefinitna* ako važi:

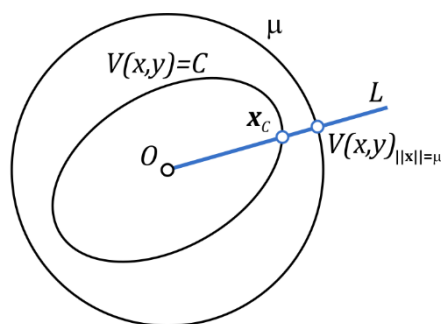
- 1) $V(0,0) = 0$;
- 2a) $V(x, y) \geq 0, (x, y) \neq (0,0)$ ($V(x, y) \leq 0, (x, y) \neq (0,0)$).

Definitne funkcije se mogu ilustrovati sa dva jednostavna primera:

- i) $V(x, y) = x^2 + y^2$ je pozitivno definitna funkcija,
- ii) $V(x, y) = (x - y)^2$ je pozitivno semidefinitna funkcija.

Svojstva definitnih funkcija su opisana u narednim Lemama. One će nam biti značajne u dokazivanju Teorema Ljapunova.

Lema 2.6 Ako je funkcija $V(x, y)$ pozitivno definitna funkcija u oblasti Ω , onda jednačina $V(x, y) = C$, $C > 0$, definiše zatvorenu krivu u \mathbb{R}^2 .



Slika 2.8 Svojstva definitnih funkcija

Umesto dokaza Leme izložićemo argumente, delimično geometrijskog karaktera, koji će nam osvetliti osnovnu ideju. U analizi koja sledi koristićemo (bez dokaza) jedno bitno svojstvo pozitivno definitnih funkcija: uvek postoji okolina koordinatnog početka u kojoj je pozitivno definitna funkcija ograničena monotono rastućim funkcijama, $\alpha_1(\|x\|) \leq V(x, y) \leq \alpha_2(\|x\|)$. Uočimo sada u oblasti Ω kružnicu određenu jednakošću:

$$\|x\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \mu,$$

i posmatrajmo vrednosti pozitivno definitne funkcije $V(x, y)$ na μ -okolini (μ -sferi) koordinatnog početka $(0,0)$. Znamo da je:

$$V(x, y)_{\|x\|=\mu} > 0.$$

Neka je l najmanja vrednost funkcije $V(x, y)_{\|x\|=\mu}$:

$$\min_{\|x\|=\mu} V(x, y) = l \implies V(x, y)_{\|x\|=\mu} \geq l.$$

Sada posmatramo tačke koje zadovoljavaju uslov:

$$V(x, y) = C < l$$

i posmatramo proizvoljnu polupravu OL , gde je O koordinatni početak. Ograničićemo analizu na μ -okolinu uz pretpostavku da je u njoj funkcija $V(x, y)$ ograničena monotono rastućim funkcijama. Tada je zadovoljeno sledeće:

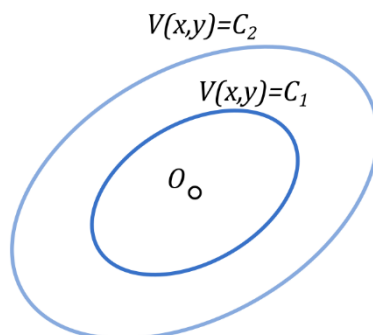
$$0 \leq V_{OL}(x, y) \leq V(x, y)_{\|x\|=\mu}.$$

Zbog neprekidnosti postoji tačka $(x_c, y_c) \in OL$ u kojoj funkcija ima vrednost:

$$V(x_c, y_c) = C < l \leq V(x, y)_{\|x\|=\mu}.$$

Ovo znači da poluprava OL u toj tački preseca krivu $V(x, y) = C$. Pošto je poluprava OL proizvoljno izabrana, svaka poluprava uočena na ovakav način će seći krivu $V(x, y) = C$ što znači da je $V(x, y) = C$ zatvorena kriva.

Lema 2.7 Ako je $V(x, y)$ pozitivno definitna funkcija i $C_2 > C_1 > 0$, onda se kriva implicitno zadata sa $V(x, y) = C_1$ nalazi u unutrašnjoj oblasti fazne ravni čiji je rub određen sa $V(x, y) = C_2$ i ove dve krive nemaju zajedničkih tačaka.



Slika 2.9 Svojstva definitnih funkcija

Primenjujući postupak primenjen u analizi prethodne Leme, možemo pokazati da će funkcija $V_{OL}(x, y)$ prvo dostići vrednost C_1 , a tek onda vrednost C_2 . Time se dokazuje da se kriva $V(x, y) = C_1$ nalazi unutar krive $V(x, y) = C_2$. Dalje, zbog pretpostavki ne postoji tačka $(x_1, y_1) \in \Omega$ takva da je $V(x_1, y_1) = C_2 = C_1$, što znači da uočene krive nemaju zajedničkih tačaka.

2.4.3 Kvalitativna analiza rešenja

Na osnovu analize kretanja reprezentativne tačke u faznoj ravni i svojstva definitnih funkcija, moguće je izvršiti kvalitativnu analizu rešenja sistema (2.1) uz pomoć definitne funkcije $V(x, y)$. U nastavku ćemo podrazumevati da je $V(x, y)$ pozitivno definitna funkcija.

Posmatrajmo sistem (2.1):

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(x),$$

i sa $\bar{V}(t)$ označimo vrednost funkcije $V(x, y)$ na rešenju sistema za $t \geq 0$:

$$\bar{V}(t) = V(x(t), y(t)) \Big|_{\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(x)}. \quad (2.11)$$

Kada funkciju (2.11) diferenciramo po t dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{V}(t)}{dt} &= \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \Big|_{\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(x)} = \frac{\partial V}{\partial x} X(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} Y(x, y) \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{e}_y \right) \cdot (X(x, y) \mathbf{e}_x + Y(x, y) \mathbf{e}_y). \end{aligned}$$

Pošto je:

$$\begin{aligned} \text{grad } V(x, y) &= \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{u}(x, y) &= X(x, y) \mathbf{e}_x + Y(x, y) \mathbf{e}_y, \end{aligned}$$

dobijamo da je:

$$\frac{d\bar{V}(t)}{dt} = \left(\text{grad } V(x, y) \cdot \mathbf{u}(x, y) \right) \Big|_{\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(x)}.$$

U daljoj analizi ćemo posmatrati oblast u \mathbb{R}^2 ograničenu krivom $V(x, y) = C$, za $C > 0$. Definišimo skup $S_{V,C}$ na sledeći način:

$$S_{V,C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) \leq C, C > 0\}.$$

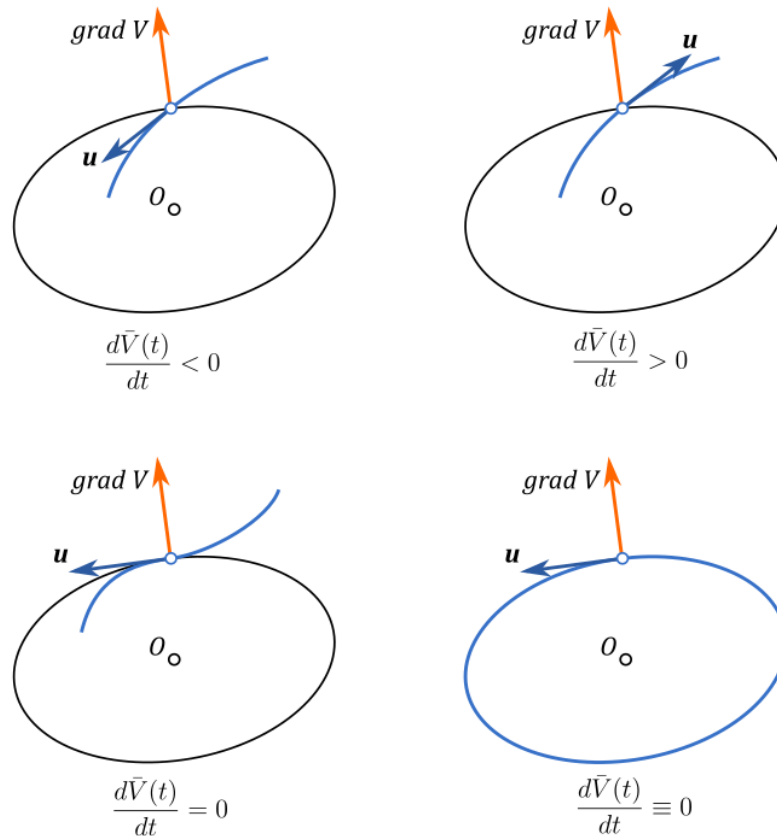
Zbog tvrđenja Leme 2.6 skup $S_{V,C}$ je ograničen i zatvoren a to znači da je kompaktan skup u \mathbb{R}^2 . Analizirajmo trajektorije reprezentativne tačke koje u nekom trenutku $t > 0$ zadovoljavaju uslov $V(x(t), y(t)) = C$, odnosno nalaze se na rubu skupa $S_{V,C}$. S obzirom na kretanje reprezentativne tačke, možemo razlikovati sledeća četiri slučaja.

$$1) \quad \frac{d\bar{V}(t)}{dt} = \left(\text{grad } V(x, y) \cdot \mathbf{u}(x, y) \right) \Big|_{\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(x)} > 0,$$

U ovom slučaju vrednost funkcije $V(x, y)$ raste duž trajektorije reprezentativne tačke, a ugao između vektora $\mathbf{u}(x, y)$ i $\text{grad } V(x, y)$ je oštar. Zbog toga se reprezentativna tačka kreće tako da u posmatranom trenutku *napušta* skup $S_{V,C}$.

$$2) \quad \frac{d\bar{V}(t)}{dt} = \left(\text{grad } V(x, y) \cdot \mathbf{u}(x, y) \right) \Big|_{\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(x)} < 0,$$

U ovom slučaju vrednost funkcije $V(x, y)$ opada duž trajektorije reprezentativne tačke, a ugao između vektora $\mathbf{u}(x, y)$ i $\text{grad } V(x, y)$ je tup. Zbog toga se reprezentativna tačka kreće tako da u posmatranom trenutku *ulazi* u skup $S_{V,C}$.



Slika 2.10 Kvalitativna analiza rešenja

$$3) \frac{d\bar{V}(t^*)}{dt} = (\text{grad } V(x, y) \cdot \mathbf{u}(x, y))_{\frac{dx}{dt}=\mathbf{X}(x)} = 0, \text{ gde je } t^* \text{ jedan izolovani trenutak.}$$

U ovom slučaju su vektor $\mathbf{u}(x, y)$ i $\text{grad } V(x, y)$ međusobno ortogonalni, odnosno, grade prav ugao. Trajektorija reprezentativne tačke tangira krivu $V(x, y) = C$ u posmatranom položaju. Da bi se utvrdilo da li se reprezentativna tačka kreće tako da u posmatranom trenutku ulazi u skup $S_{V,C}$ ili ga napušta potrebno je ispitati znak funkcije $\frac{dV(x,y)}{dt}$ u okolini posmatrane tačke.

$$4) \frac{d\bar{V}(t)}{dt} = (\text{grad } V(x, y) \cdot \mathbf{u}(x, y))_{\frac{dx}{dt}=\mathbf{X}(x)} = 0, \forall t \geq 0 \text{ i u ovom slučaju je:}$$

$$\bar{V}(t) = V(x(t), y(t))_{\frac{dx}{dt}=\mathbf{X}(x)} = c.$$

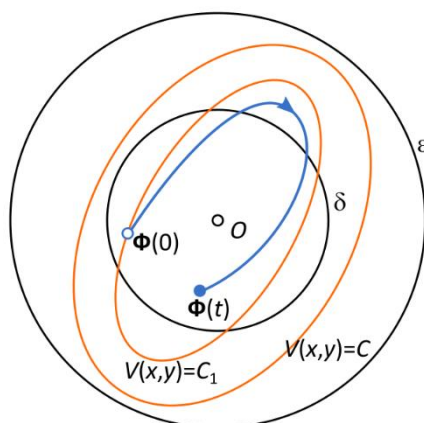
Dakle, reprezentativna tačka se stalno kreće po krivoj $V(x, y) = C$, odnosno sve vreme ostaje na rubu skupa $S_{V,C}$.

2.4.4 Teoreme Ljapunova

Nelinearna analiza stabilnosti stacionarne tačke se vrši pomoću Teorema Ljapunova, koje će u nastavku biti formulisane i dokazane za dinamičke sisteme u faznoj ravni. Za dokaze će nam biti od koristi da uvedemo oznaku za zatvorenu loptu u \mathbb{R}^2 :

$$B_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\| \leq \alpha, \alpha > 0\}.$$

Teorema 2.8 Ako za sistem DJ, $\frac{dx}{dt} = X(x)$, možemo da formiramo pozitivno definitnu funkciju $V(x, y)$, takvu da je njen izvod duž rešenja sistema negativno semidefinitna funkcija ili funkcija identički jednaka nuli, onda je stacionarna tačka $x = \mathbf{0}$ stabilna.



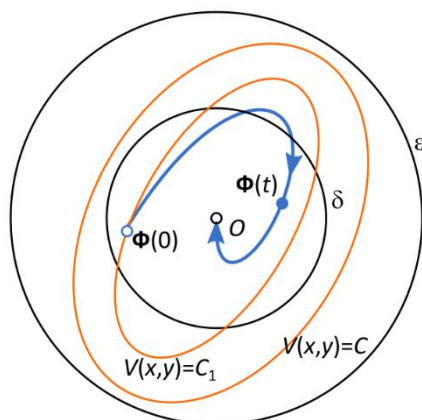
Slika 2.11 Teorema 2.8

Dokaz: Izaberimo dovoljno mali broj $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ i uočimo ε -okolinu stacionarne tačke $(0,0)$, $\|x\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \varepsilon$, odnosno $x \in B_\varepsilon$. Na osnovu Leme 2.6 znamo da je $V(x, y) = C$ zatvorena kriva u \mathbb{R}^2 . Zbog toga je uvek moguće izabrati takav broj C da važi $S_{V,C} \subset B_\varepsilon$. Takođe, postoji i dovoljno mali broj $\delta \in \mathbb{R}^+$ takav da odgovarajuća δ -okolina $\|x\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta$, odnosno $x \in B_\delta$, zadovoljava uslov $B_\delta \subset S_{V,C}$ nema zajedničkih tačaka sa rubom skupa $S_{V,C}$. Označimo sa M_0 početni položaj reprezentativne tačke $(x_0, y_0) = (x(0), y(0))$ koji zadovoljava uslov $M_0 \in B_\delta$ i neka je $V(x, y) = C_1$ kriva na kojoj se nalazi reprezentativna tačka u tom trenutku $t = 0$, $V(x(0), y(0)) = C_1$. Zbog izbora δ , za tačku M_0 važi $M_0 \in S_{V,C}$. Kako je $C_1 < C$, onda je i $S_{V,C_1} \subset S_{V,C}$.

Zbog uslova Teoreme može se desiti da je izvod funkcije $V(x, y)$ duž rešenja sistema negativno semidefinitna funkcija, odnosno $\frac{dV(x(t), y(t))}{dt} \leq 0$. Tada će reprezentativna tačka uvek prodirati u skup S_{V,C_α} , $C_\alpha \leq C_1$, ili će se kretati po njegovom rubu, odnosno po krivoj $V(x, y) = C_\alpha$. Takođe, zbog uslova Teoreme, izvod funkcije $V(x, y)$ duž rešenja sistema može biti identički jednak nuli i tada će se reprezentativna tačka sve vreme kretati po krivoj $V(x, y) = C_1$, odnosno po rubu skupa S_{V,C_1} . U oba slučaja zagarantovano je da reprezentativna tačka neće napustiti skup S_{V,C_1} . Na ovaj način ona će ostati i unutar skupa $S_{V,C}$, što zbog izbora

konstante C garantuje da će važiti $x \in B_\varepsilon$, odnosno $\|x\| \leq \varepsilon$ za $t > 0$, a ovo znači da je stacionarna tačka stabilna.

Teorema 2.9 Ako za sistem DJ, $\frac{dx}{dt} = X(x)$, možemo da formiramo pozitivno definitnu funkciju $V(x, y)$, takvu da je njen izvod duž rešenja sistema negativno definitna funkcija, onda je stacionarna tačka $x = \mathbf{0}$ asimptotski stabilna.



Slika 2.12 Teorema 2.9

Dokaz: Za dokazivanje ove Teoreme koristićemo iste konstrukcije koje smo koristili u dokazu Teoreme 2.8. Primitimo prvo da je, zbog uslova Teoreme, izvod funkcije $V(x, y)$ duž rešenja sistema negativno definitna funkcija, što znači da su ispunjeni uslovi prethodne teoreme, pa odatle dobijamo da je stacionarna tačka stabilna. Takođe, znamo da će se trajektorija reprezentativne tačke nalaziti u oblasti $S_{V,C}$ i da će važiti $\|x(t)\| \leq \varepsilon$.

Pošto je $\frac{dV(x(t), y(t))}{dt}$ negativno definitna funkcija, funkcija $V(x(t), y(t))$ će duž trajektorije biti monotono opadajuća i ograničena sa donje strane:

$$V(x(t), y(t)) \rightarrow c \geq 0 \text{ kada } t \rightarrow \infty.$$

Želimo da pokažemo da je $c = 0$. Pretpostavimo da je $c > 0$. Tada postoji okolina B_{ε_c} koordinatnog početka za koju važi $B_{\varepsilon_c} \subset S_{V,c}$. Uslov $V(x(t), y(t)) \rightarrow c > 0$ implicira da trajektorija ostaje izvan okoline B_{ε_c} za svako $t \geq 0$. Sada posmatrajmo zatvoren i ograničen, odnosno kompaktan, skup $B = \{x \in \mathbb{R}^2: \varepsilon_c \leq \|x\| \leq \varepsilon\}$. Zbog uslova Teoreme, funkcija $\frac{dV(x(t), y(t))}{dt}$ je neprekidna, pa na kompaktnom skupu B dostiže svoj minimum i maksimum. Označimo sa $-\gamma$ maksimum te funkcije, $\max_{x \in B} \frac{dV(x(t), y(t))}{dt} = -\gamma < 0$, koji mora biti negativan zato što je funkcija po pretpostavci negativno definitna. Tada važi sledeće:

$$V(x(t), y(t)) = V(x(0), y(0)) + \int_0^t \frac{dV(x(s), y(s))}{ds} ds \leq V(x(0), y(0)) - \gamma t.$$

Desna strana ove jednačine će biti negativna za $t > \frac{V(x(0), y(0))}{\gamma}$, što je nemoguće jer je funkcija $V(x(t), y(t))$ pozitivno definitna. Dakle, isključili smo mogućnost da je $c > 0$, odakle sledi da

važi $c = 0$, pa $x(t) \rightarrow \mathbf{0}$ kada $t \rightarrow \infty$. Konačno, dobijamo da je stacionarna tačka asimptotski stabilna.

2.5 Primeri

Primer 1 ([6], Exercise 4.3) Dinamički sistem u okolini stacionarne tačke $(0,0)$ opisan jednačinama:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -y.\end{aligned}$$

- Pokazati da je stacionarna tačka asimptotski stabilna analizom linearizovanih jednačina poremećaja.
- Koristeći funkciju Ljapunova u obliku:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

dokazati asimptotsku stabilnost primenom direktnog metoda Ljapunova.

- Odrediti rešenje sistema za proizvoljne početne uslove $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ i pokazati da je ograničeno i da asimptotski teži 0:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Rešenje:

- Linearizovani dinamički sistem u okolini stacionarne tačke izgleda ovako:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x, \\ \frac{dy}{dt} &= -y.\end{aligned}$$

Ovaj sistem u matricnom obliku zapisujemo na sledeći način:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Računamo sopstvene vrednosti iz karakteristične jednačine:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (-1 - \lambda)(-1 - \lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1.\end{aligned}$$

Dakle, $\lambda_{1,2} < 0$ pa je stacionarna tačka $(0,0)$ asimptotski stabilna.

- Prvo pokazujemo da je funkcija:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

pozitivno definitna funkcija, odnosno da važi:

$$1) V(0,0) = 0$$

$$2) V(x, y) > 0 \text{ jer su } x^2 > 0, y^2 > 0 \text{ kada je } x \neq 0, y \neq 0.$$

Dakle, $V(x, y)$ je pozitivno definitna funkcija.

Definišemo novu funkciju koja zavisi od parametra t :

$$\bar{V}(x, y) = V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{2}y^2(t),$$

I diferenciramo je po t :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{V}(t)}{dt} &= x(t) \frac{dx(t)}{dt} + y(t) \frac{dy(t)}{dt} = x(t)(-x(t) + x(t)y(t)) - y(t)y(t) \\ &= -(x(t))^2 + (x(t))^2 y(t) - (y(t))^2 \\ &= -(x(t))^2(1 - y(t)) - (y(t))^2. \end{aligned}$$

Sada proveravamo da li je $\frac{dV}{dt}(x, y)$ negativno definitna funkcija. Ovu proveru možemo izvršiti na dva načina:

- 1) Znamo da su x^2, y^2 pozitivne funkcije pa su $-x^2, -y^2$ negativne funkcije za $x \neq 0, y \neq 0$. Da bi cela $\frac{dV}{dt}(x, y)$ bila negativno definitna funkcija potrebno je da bude ispunjeno sledeće:

$$1 - y > 0 \Leftrightarrow y < 1.$$

Ovim uslovima je osigurano da je $\frac{dV}{dt}(x, y)$ negativno definitna funkcija u nekoj okolini stacionarne tačke $(0,0)$.

- 2) Znamo da je: $\|\mathbf{x}\| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$. Sada je:

$$\frac{dV}{dt}(x, y) = -x^2 - y^2 + o(\|\mathbf{x}\|^2).$$

Kao i u prethodnom slučaju znamo da su $-x^2, -y^2$ negativne funkcije pa je $\frac{dV}{dt}(x, y)$ negativno definitna funkcija u nekoj maloj okolini stacionare tačke $(0,0)$.

Dakle, $\frac{dV}{dt}(x, y)$ jeste negativno definitna funkcija. Na osnovu druge teoreme Ljapunova zaključujemo da je stacionarna tačka $(0,0)$ asimptotski stabilna.

- c) Druga jednačina u dinamičkom sistemu je linearna i kod nje je moguće razdvajanje promenljivih. To znači da je formalno možemo zapisati u obliku:

$$\frac{dy}{y} = -dt.$$

Kada izvršimo integraciju i iskoristimo početni uslov dobijamo da je:

$$\begin{aligned} \ln|y| &= -t + \ln c \Rightarrow y(t) = ce^{-t}, \\ y(0) &= c = y_0 \Rightarrow y(t) = y_0 e^{-t}. \end{aligned}$$

U graničnom slučaju kada pustimo da t teži beskonačnosti dobijamo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_0 e^{-t} = 0,$$

što je trebalo pokazati.

Drugo rešenje dobijamo na sledeći način:

$$\frac{dx}{dt} = x(-1 + y) = x(-1 + y_0 e^{-t}).$$

Razdvajanjem promenljivih dobijamo:

$$\frac{dx}{x} = (-1 + y_0 e^{-t}) dt.$$

Integraljenjem ove jednačine dobijamo:

$$\ln|x| = -t - y_0 e^{-t} + \ln D,$$

$$\ln|x_0| = -y_0 + \ln D \Rightarrow \ln D = \ln|x_0| + y_0,$$

$$\ln\left|\frac{x}{x_0}\right| = -t - y_0(1 - e^{-t}) \Rightarrow x(t) = y_0 e^{-t} e^{y_0(1-e^{-t})}.$$

Kada pustimo da t teži beskonačnosti dobijamo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_0 e^{-t} e^{y_0(1-e^{-t})} = 0,$$

što je trebalo pokazati.

Primer 2 ([6], Exercise 4.3) Dinamički sistem u okolini stacionarne tačke $(0,0)$ opisan jednačinama:

$$\frac{dx}{dt} = y(1 - x^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = -(x + y)(1 - x^2).$$

- Pokazati da je stacionarna tačka asimptotski stabilna analizom linearizovanih jednačina poremećaja.
- Koristeći funkciju Ljapunova u obliku:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

dokazati asimptotsku stabilnost primenom direktnog metoda Ljapunova.

Rešenje:

- Linearizovani dinamički sistem u okolini stacionarne $(0,0)$ tačke izgleda ovako:

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - y.$$

Ovaj sistem u matricnom obliku zapisujemo na sledeći način:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Računamo sopstvene vrednosti iz karakteristične jednačine:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-1 - \lambda) + 1 = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Dakle, $Re(\lambda_{1,2}) = -\frac{1}{2} < 0$ pa je stacionarna tačka $(0,0)$ asimptotski stabilna.

b) Prvo pokazujemo da je funkcija:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

pozitivno definitna funkcija.

1) $V(0,0) = 0$

2) $V(x, y) > 0$ jer su $x^2 > 0, y^2 > 0$ kada je $x \neq 0, y \neq 0$.

Dakle, ovo je pozitivno definitna funkcija.

Definišemo novu funkciju koja zavisi od parametra t :

$$\bar{V}(x, y) = V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{2}y^2(t).$$

Sada diferenciramo ovu funkciju po t :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{V}(t)}{dt} &= x(t) \frac{dx(t)}{dt} + y(t) \frac{dy(t)}{dt} \\ &= x(t)y(t) \left(1 - (x(t))^2\right) - y(t)(x(t) + y(t)) \left(1 - (x(t))^2\right) \\ &= \left(1 - (x(t))^2\right) (x(t)y(t) - x(t)y(t) - (y(t))^2) \\ &= -(y(t))^2 \left[1 - (x(t))^2\right]. \end{aligned}$$

Na osnovu ovog rezultata može se zaključiti da je $\frac{dV}{dt}(x, 0) = 0$ za ma koju vrednost x . To znači funkcija $\frac{dV}{dt}(x, y)$ ne može biti definitna. Međutim, $\frac{dV}{dt}(x, y)$ može biti negativno semidefinitna funkcija ako važi:

$$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) > 0,$$

a ovo je ispunjeno ako je:

a) $1 - x > 0 \wedge 1 + x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$

b) $1 - x < 0 \wedge 1 + x < 0 \Leftrightarrow x > 1 \wedge x < -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Da bi funkcija $\frac{dV}{dt}(x, y)$ bila negativno semidefinitna na nekoj okolini stacionarne tačke $(0,0)$ izabraćemo okolinu $x \in (-1, 1)$. Na osnovu Teoreme 2.8 možemo zaključiti da je stacionarna tačka $(0,0)$ stabilna u običnom smislu.

Iako je direktni metod Ljapunova stroži od linearne analize stabilnosti, on nam u ovom primeru daje slabiji rezultat. Razlog za to je postojanje skupa tačaka, $y = 0$, koji sprečava definitnost funkcije $\frac{dV}{dt}(x, y)$. Može se ipak pokazati da je i sa ovako izabranom funkcijom Ljapunova moguće dokazati asimptotsku stabilnost. Naime, dovoljno je pokazati da se reprezentativna tačka koja se u nekom trenutku t^* u faznoj ravni nađe u položaju $(x(t^*), 0)$, $x(t^*) \in (-1, 1)$, u tom položaju neće zaustaviti nego će nastaviti kretanje u oblasti $y \neq 0$ gde

je $\frac{dV}{dt}(x, y) < 0$. Lako se vidi da je $\mathbf{u}(x, 0) = -x\mathbf{e}_y$, odnosno $\mathbf{u}(x, 0) \neq \mathbf{0}$, za $x \neq 0$. S obzirom na to važiće $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$.

U narednim primerima će biti analiziran odnos linearne i nelinearne stabilnosti stacionarne tačke. Stoga ćemo nelinearni dinamički sistem okolini stacionarne tačke posmatrati u obliku:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + F_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + G_1(x, y).\end{aligned}\tag{i}$$

Nelinearni članovi $F_1(x, y)$ i $G_1(x, y)$ imaju sledeća svojstva:

$$\frac{F_1(x, y)}{r} \rightarrow 0, \quad \frac{G_1(x, y)}{r} \rightarrow 0 \quad \text{za } r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0.$$

Linearizovani sistem jednačina koji odgovara nelinearnom sistemu (i) izgleda ovako:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y.\end{aligned}\tag{ii}$$

Primer 3 ([4], Chapter 9, Problem 10) Posmatrajmo linearizovani sistem jednačina (ii).

a) Neka je stacionarna tačka (0,0) asimptotski stabilna. Dokazati da tada važi:

$$a_{11} + a_{22} < 0 \quad \text{i} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$

b) Konstruisati funkciju Ljapunova:

$$V(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2,$$

tako da je $V(x, y)$ pozitivno definitna funkcija i da je $\frac{dV}{dt}(x, y)$ negativno definitna funkcija.

c) Koristeći rezultat iz dela problema pod a) dokazati da je: $A > 0$, $4AC - B^2 > 0$.

Rešenje:

a) Linearizovani sistem DJ (ii) zapisan u matričnom obliku izgleda ovako:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Iz karakteristične jednačine dobijamo:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Znamo da važi: $T < 0, D > 0$, kada je stacionarna tačka asimptotski stabilna, pa je onda:

$$\begin{aligned}T &= a_{11} + a_{22} < 0, \\ D &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0,\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

b) Izvod funkcije Ljapunova $V(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ po t je:

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}(x, y) &= 2Ax \frac{dx}{dt} + By \frac{dx}{dt} + Bx \frac{dy}{dt} + 2Cy \frac{dy}{dt} \\
&= (2Ax + By) \frac{dx}{dt} + (Bx + 2Cy) \frac{dy}{dt} \\
&= (2Ax + By)(a_{11}x + a_{12}y) + (Bx + 2Cy)(a_{21}x + a_{22}y) \\
&= (2Aa_{11} + Ba_{21})x^2 + (Ba_{12} + 2Ca_{22})y^2 + (2Aa_{12} + Ba_{11} + Ba_{22} + 2Ca_{21})xy.
\end{aligned}$$

Pošto želimo da $\frac{dV}{dt}(x, y)$ bude negativno definitna funkcija biramo da je:

$$\frac{dV}{dt}(x, y) = -x^2 - y^2.$$

Da bi ovo bilo ispunjeno, mora biti zadovoljen sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
2Aa_{11} + Ba_{21} &= -1, \\
Ba_{12} + 2Ca_{22} &= -1, \\
2Aa_{12} + Ba_{11} + Ba_{22} + 2Ca_{21} &= 0.
\end{aligned}$$

Kao rešenja navedenog sistema dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{a_{21}^2 + a_{22}^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{2\Delta}, \\
B &= \frac{a_{12}a_{22} + a_{11}a_{21}}{\Delta}, \\
C &= -\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{2\Delta},
\end{aligned}$$

gde je $\Delta = (a_{11} + a_{22})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$. U nastavku će biti pokazano da ovako određeni koeficijenti A, B i C obezbeđuju pozitivnu definitnost funkcije $V(x, y)$.

- c) Pokažimo da koeficijenti A, B i C zadovoljavaju uslove $A > 0, 4AC - B^2 > 0$.
Posmatrajmo najpre koeficijent A :

$$A = -\frac{a_{21}^2 + a_{22}^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{2\Delta},$$

gde je $\Delta = (a_{11} + a_{22})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$. Znamo da je:

$$\begin{aligned}
\Delta &= (a_{11} + a_{22})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = TD < 0 \Rightarrow 2\Delta < 0, \\
a_{21}^2 &> 0, a_{22}^2 > 0, \\
a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &> 0,
\end{aligned}$$

pa je $A > 0$, što je trebalo pokazati. Sada ćemo posebno izračunati koliko je $4AC$ i B^2 :

$$\begin{aligned}
4AC &= 4 * \frac{(a_{21}^2 + a_{22}^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})) (a_{11}^2 + a_{12}^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}))}{4\Delta^2} = \\
&= \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{11}^2 + a_{12}^2) + a_{21}^2 a_{11}^2 + a_{22}^2 a_{12}^2}{\Delta^2} + \frac{+2a_{21}^2 a_{12}^2 + 2a_{22}^2 a_{11}^2 - 2a_{11}a_{22}a_{12}a_{21}}{\Delta^2}, \\
B^2 &= \frac{(a_{12}a_{22} + a_{11}a_{21})^2}{\Delta^2} = \frac{a_{12}^2 a_{22}^2 + 2a_{12}a_{22}a_{11}a_{21} + a_{11}^2 a_{21}^2}{\Delta^2}.
\end{aligned}$$

Konačno dobijamo da je:

$$4AC - B^2 = \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{11}^2 + a_{12}^2) + 2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2}{\Delta^2} > 0,$$

jer je:

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0,$$

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{11}^2 + a_{12}^2 > 0,$$

$$\Delta^2 > 0.$$

Primer 4 ([4], Chapter 9, Problem 11) U ovom primeru ćemo pokazati da je funkcija Ljapunova konstruisana u Primeru 3 za linearni dinamički sistem (ii), u isto vreme i funkcija Ljapunova nelinearnog dinamičkog sistema (i). Da bi se ovo pokazalo, treba dokazati da postoji okolina stacionarne tačke (0,0) u kojoj je $\frac{dV}{dt}(x, y)$ negativno definitna funkcija. Ovo će biti pokazano u dva koraka.

a) Pokazati da je:

$$\frac{dV}{dt}(x, y) = -(x^2 + y^2) + (2Ax + By)F_1(x, y) + (Bx + 2Cy)G_1(x, y).$$

b) Pokazati da je $\frac{dV}{dt}(x, y)$ negativno definitna funkcija.

Rešenje:

a) Iz problema 10 u delu pod b) smo dobili da izvod funkcija Ljapunova za linearizovani sistem (ii) izgleda ovako:

$$\frac{dV}{dt}(x, y) = -x^2 - y^2.$$

Na isti način dobijamo da izvod funkcije Ljapunova za sistem jednačina (i) ima sledeći oblik:

$$\frac{dV}{dt}(x, y) = -(x^2 + y^2) + (2Ax + By)F_1(x, y) + (Bx + 2Cy)G_1(x, y).$$

b) Znamo da $\frac{F_1(x,y)}{r} \rightarrow 0, \frac{G_1(x,y)}{r} \rightarrow 0$ za $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ što znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji krug $r = R$ za $0 < r < R$ i da je: $|F_1(x, y)| < \varepsilon r, |G_1(x, y)| < \varepsilon r$. Neka je: $M = \max\{|2A|, |B|, |2C|\}$. Iz dela pod a) znamo da je izvod funkcije Ljapunova:

$$\frac{dV}{dt}(x, y) = -(x^2 + y^2) + (2Ax + By)F_1(x, y) + (Bx + 2Cy)G_1(x, y).$$

Zapišimo izvod funkcije Ljapunova u obliku:

$$\frac{dV}{dt}(x, y) = -(x^2 + y^2) + \frac{dV_3}{dt}(x, y),$$

gde je:

$$\frac{dV_3}{dt}(x, y) = (2Ax + By)F_1(x, y) + (Bx + 2Cy)G_1(x, y).$$

Važe sledeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} \frac{dV_3}{dt}(x, y) &\leq |(2Ax + By)F_1(x, y) + (Bx + 2Cy)G_1(x, y)| \\ &\leq |2Ax + By||F_1(x, y)| + |Bx + 2Cy||G_1(x, y)| \\ &< \varepsilon r[|2A||x| + |B||y| + |B||x| + |2C||y|] \leq 2\varepsilon M(|x| + |y|). \end{aligned}$$

Kada uvedemo polarne koordinate:

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

gde je $r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$. Dobijamo sledeće:

$$\frac{dV_3}{dt}(x, y) = 2\varepsilon r M(|r \cos \varphi| + |r \sin \varphi|) = 2\varepsilon r^2 M(|\cos \varphi| + |\sin \varphi|) \leq 4\varepsilon r^2 M.$$

Sada je:

$$\frac{dV}{dt}(x, y) = -r^2 + \frac{dV_3}{dt}(x, y) \leq -r^2 + 4\varepsilon r^2 M = -r^2(1 - 4\varepsilon M).$$

Da bi ova funkcija Ljapunova bila negativno definitna potrebno je da bude ispunjeno sledeće:

$$1 - 4\varepsilon M > 0 \Rightarrow \varepsilon < \frac{1}{4M}.$$

Primer 5 ([4], Chapter 9, Example 4) Dat je dinamički sistem:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1(1 - y_1 - y_2),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2(0.75 - y_2 - 0.5y_1).$$

- Pokazati da je $(y_1, y_2) = (0.5, 0.5)$ stacionarna tačka.
- Formirati diferencijalne jednačine poremećaja u okolini stacionarne tačke.
- Formirati linearizovane jednačine poremećaja u okolini stacionarne tačke.
- Analizom linearizovanih jednačina odrediti tip stacionarne tačke i diskutovati njenu stabilnost.
- Koristeći funkciju Ljapunova u vidu kvadratne forme:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

primenom direktnog metoda Ljapunova pokazati da je stacionarna tačka asimptotski stabilna.

Rešenje:

- Da bi $(0.5, 0.5)$ bila stacionarna tačka mora biti ispunjeno:

$$y_1(1 - y_1 - y_2) = 0,$$

$$y_2(0.75 - y_2 - 0.5y_1) = 0.$$

Direktnim ubacivanjem vrednosti proveravamo da li su ovi uslovi ispunjeni:

$$0.5(1 - 0.5 - 0.5) = 0.5(1 - 1) = 0.5 * 0 = 0,$$

$$0.5(0.75 - 0.5 - 0.5 * 0.5) = 0.5(0.25 - 0.25) = 0.5 * 0 = 0.$$

Uslovi su ispunjeni pa zaključujemo da je $(0.5, 0.5)$ stacionarna tačka.

- Prvo uvodimo poremećaje:

$$y_1 = 0.5 + x,$$

$$y_2 = 0.5 + y.$$

DJ poremećaja u okolini stacionarne tačke izgledaju ovako:

$$\frac{dy_1}{dt} = -0.5x - 0.5y - x^2 - xy,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -0.5y - y^2 - 0.25x - 0.5xy.$$

c) Linearizovane DJ poremećaja izgledaju ovako:

$$\frac{dy_1}{dt} = -0.5x - 0.5y,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -0.25x - 0.5y.$$

d) Linearizovani sistem u matičnom obliku zapisujemo na sledeći način:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Računamo sopstvene vrednosti iz karakteristične jednačine:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -0.5 - \lambda & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 - \lambda \end{vmatrix} = (-0.5 - \lambda)(-0.5 - \lambda) - 0.5 * 0.25$$

$$= \lambda^2 + \lambda + 0.125 = 0.$$

Pošto znamo da je karakteristična jednačina zapisana u obliku: $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$, dobijamo da je $T = -1 < 0$ i $D = 0.125 > 0$.

$$\frac{1}{4}T^2 = \frac{1}{4}(-1)^2 = 0.25 \Rightarrow D < \frac{1}{4}T^2.$$

Na osnovu klasifikacije stacionarnih tačaka dobijamo da je stacionarna tačka (0.5, 0.5) stabilni čvor.

e) Prvo pokazujemo da je funkcija:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

pozitivno definitna funkcija.

1) $V(0,0) = 0$

2) $V(x, y) > 0$ jer su $x^2 > 0, y^2 > 0$ kada je $x \neq 0, y \neq 0$.

Dakle, ovo je pozitivno definitna funkcija.

Definišemo novu funkciju koja zavisi od parametra t :

$$\bar{V}(x, y) = V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{2}y^2(t).$$

Sada diferenciramo ovu funkciju po t :

$$\frac{d\bar{V}(t)}{dt} = x(t) \frac{dx(t)}{dt} + y(t) \frac{dy(t)}{dt}$$

$$= x(t) \left(-0.5x(t) - 0.5y(t) - (x(t))^2 - x(t)y(t) \right)$$

$$+ y(t) \left(-0.5y(t) - (y(t))^2 - 0.25x(t) - 0.5x(t)y(t) \right)$$

$$= -(x(t))^2(0.5 + y(t) + x(t)) - (y(t))^2(0.5 + 0.5x(t) + y(t)) - 0.75x(t)y(t).$$

Sada proveravamo da li je $\frac{dV}{dt}(x, y)$ negativno definitna funkcija. Kao što se vidi, ova funkcija sadrži članove trećeg stepena poremećaja, $O(\|x\|^3)$, pa nije moguće u opštem slučaju utvrditi njenu definitnost. Međutim, da bi funkcija bila negativno definitna u nekoj okolini stacionarne tačke, dovoljno je da njena kvadratna aproksimacija (kvadratna forma) bude negativno definitna. Ako kvadratnu formu zapišemo u obliku:

$$\frac{dV}{dt}(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + o(\|x\|^2),$$

onda uslovi negativne definitnosti kvadratne forme glase:

$$A < 0, \quad 4AC - B^2 > 0.$$

Kvadratna aproksimacija funkcije $\frac{dV}{dt}(x, y)$ ima oblik:

$$\frac{dV}{dt}(x, y) = -0.5x^2 - 0.75xy - 0.5y^2 + o(\|x\|^2),$$

pa je odatle:

$$A = -0.5 < 0,$$

$$4AC - B^2 = 0.4375 > 0.$$

Dakle, $\frac{dV}{dt}(x, y)$ ima negativno definitnu kvadratnu aproksimaciju, odakle sledi da postoji okolina stacionarne tačke u kojoj će i cela funkcija biti negativno definitna. Odatle sledi da je stacionarna tačka $(0,0)$ asimptotski stabilna na osnovu druge Teoreme Ljapunova.

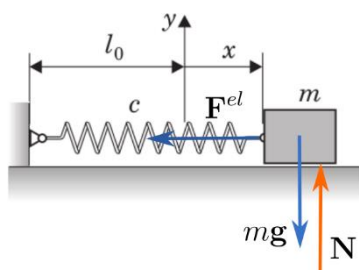
3 PRIMENE U MEHANICI

U ovom poglavlju ćemo se osvrnuti na primenu teorije stabilnosti na mehaničke sisteme. Stabilnost stacionarnih tačaka ćemo ispitivati na dva načina i to pomoću linearne analize i primenom direktnog metoda Ljapunova. Analiziraće se stacionarne tačke u problemu harmonijskog oscilatora, prigušenog oscilatora, matematičkog klatna i rotirajućeg matematičkog klatna.

3.1 Harmonijski oscilator

U ovom odeljku će biti ispitana stabilnost položaja ravnoteže harmonijskog oscilatora. Da bismo počeli sa ovim ispitivanjem potrebno je da formiramo DJ harmonijskog oscilovanja, a to ćemo uraditi analizom sila u harmonijskom oscilatoru. Drugi Njutnov zakon glasi:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}^{el}. \quad (3.1)$$



Slika 3.1 Harmonijski oscilator

Kada jednačinu (3.1) skalarno pomnožimo, redom, vektorom $\mathbf{i} = (1,0)$ i vektorom $\mathbf{j} = (0,1)$ dobijamo:

$$ma_x = -cx, \quad (3.2)$$

$$0 = -mg + N.$$

Iz jednačine (3.2) dobijamo da je:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{c}{m}x. \quad (3.3)$$

Kada uvedemo kružnu frekvenciju ω izrazom:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

jednačinu (3.3) možemo zapisati na sledeći način:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$$

i odatle dobijamo DJ harmonijskog oscilatora:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0, \quad \omega > 0. \quad (3.4)$$

Jednačina (3.4) je ODJ drugog reda. Pošto je celokupna analiza stabilnosti bila zasnovana na sistemima ODJ prvog reda, u nastavku ćemo DJ harmonijskog oscilatora svesti na takav sistem jednačina. Kada uvedemo novu promenljivu:

$$y = \frac{dx}{dt}, \quad (3.5)$$

DJ harmonijskog oscilatora (3.4) zapisujemo na sledeći način:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = -\omega^2x. \quad (3.6)$$

Sistem DJ (3.5)-(3.6) je sistem linearnih DJ prvog reda koji možemo zapisati u matičnom obliku:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -\omega^2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{Ax},$$

gde je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Stacionarne tačke su određene rešenjima jednačina:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = F_1(y_1(t), y_2(t)) = 0,$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = F_2(y_1(t), y_2(t)) = 0.$$

U slučaju sistema (3.5)-(3.6), jednačine koje moraju zadovoljiti stacionarne tačke su:

$$y = 0,$$

$$-\omega^2x = 0.$$

Kao rešenje ovih jednačina dobijamo da je:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

jedinstvena stacionarna tačka. Napomenimo da ova stacionarna tačka predstavlja položaj ravnoteže harmonijskog oscilatora.

Linearna analiza stabilnosti se oslanja na analizu sopstvenih vrednosti matrice \mathbf{A} , koje su određene rešenjima karakteristične jednačine:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega.$$

Dakle, $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$, što znači da je stacionarna tačka centar, a to je stabilna stacionarna tačka u običnom smislu.

Da bismo ispitali stabilnosti stacionarne tačke pomoću direktnog metoda Ljapunova, neophodno je da formiramo funkciju Ljapunova. Za njeno formiranje postoje samo preporuke opšteg karaktera, ali ne postoji konstruktivna procedura koja bi bila primenljiva za proizvoljni dinamički sistem. Drugim rečima, njeno formiranje uvek zavisi od strukture konkretnog dinamičkog sistema.

Za ispitivanje stabilnosti stacionarne tačke harmonijskog oscilatora izabraćemo funkciju Ljapunova u obliku:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2x^2.$$

Ovo je pozitivno definitna funkcija jer je ispunjeno:

- 1) $V(0,0) = 0$,
- 2) $V(x, y) > 0$ jer su $x^2, y^2 > 0$ kada je $x, y \neq 0$ i $\omega^2 > 0$.

Formirajmo sada novu funkciju koja zavisi od parametra t :

$$\bar{V}(t) = V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}y^2(t) + \frac{1}{2}\omega^2x^2(t), \quad (3.7)$$

i posmatrajmo njeno ponašanje na rešenju sistema (3.5)-(3.6). Diferenciranjem funkcije (3.7) po t dobijamo:

$$\frac{d\bar{V}(t)}{dt} = y(t) \frac{dy(t)}{dt} + \omega^2x(t) \frac{dx(t)}{dt} = y(t)(-\omega^2x(t)) + \omega^2x(t)y(t) \equiv 0.$$

Time su ispunjeni svi uslovi prve teoreme Ljapunova, pa je stacionarna tačka stabilna u običnom smislu.

Izbor funkcije Ljapunova u ovom problemu nije bio slučajan. Naime, polazeći od diferencijalne jednačine kretanja:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

Može se pokazati da za harmonijski oscilator važi zakon održanja ukupne mehaničke energije (integral energije):

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}cx^2 = \text{const.}$$

Takva relacija u matematičkog smislu predstavlja prvi integral diferencijalne jednačine i njen izvod duž rešenja je uvek identički jednak nuli. Ta činjenica i struktura zakona održanja energije, koji predstavlja kvadratnu formu, motivisala je izbor funkcije Ljapunova u vidu ukupne mehaničke energije po jedinici mase:

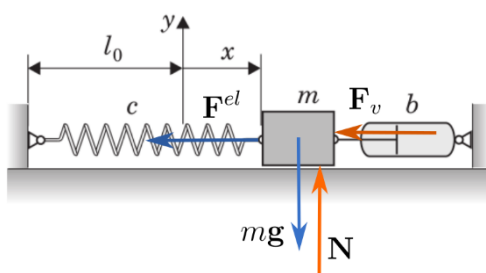
$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2x^2.$$

Kada postoji integral energije, onda on može biti prvi kandidat za konstrukciju funkcije Ljapunova.

3.2 Prigušeni oscilator

U ovom delu ćemo ispitati stabilnost stacionarne tačke, odnosno položaja ravnoteže prigušenog oscilatora. Da bismo uopšte počeli sa ovim ispitivanjem potrebno je najpre da formiramo DJ prigušenog oscilovanja, a to ćemo uraditi analizom sila u prigušenom oscilatoru. Drugi Njutnov zakon glasi:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}^{el} + \mathbf{F}_v, \quad (3.8)$$



Slika 3.2 Prigušeni oscilator

gde je F^{el} elastična sila, a $F_v = -\beta v$ sila fluidnog otpora. Kada jednačinu (3.8) skalarno pomnožimo vektorom $\mathbf{i} = (1,0)$ dobijamo:

$$ma_x = -cx - \beta v_x, \quad (3.9)$$

a iz jednačine (3.9) sledi:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{c}{m}x - \frac{\beta}{m}v_x. \quad (3.10)$$

pošto znamo da je:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

$$b = \frac{\beta}{m},$$

$$v_x = \frac{dx}{dt},$$

tada jednačinu (3.10) možemo zapisati na sledeći način:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - \omega^2 x,$$

i odatle dobijamo DJ prigušenog oscilatora:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad \omega > 0, \quad b > 0. \quad (3.11)$$

Ovde ćemo takođe uvesti oznaku:

$$y = \frac{dx}{dt}, \quad (3.12)$$

tako da iz jednačine (3.11) i jednačine (3.12) dobijamo sledeće:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = -\omega^2x - b \frac{dx}{dt} = -\omega^2x - by.$$

Na taj način se DJ prigušenog oscilatora (3.11) svodi na sistem ODJ prvog reda:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (3.13)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\omega^2x - by, \quad (3.14)$$

te njega možemo zapisati u matičnom obliku na sledeći način:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -\omega^2x - by \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{Ax},$$

gde je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Stacionarne tačke su određene rešenjima jednačina:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = F_1(y_1(t), y_2(t)) = 0,$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = F_2(y_1(t), y_2(t)) = 0.$$

Stacionarne tačke sistema (3.13)-(3.14) zadovoljavaju sledeće jednačine:

$$y = 0,$$

$$-\omega^2x - by = 0 \Rightarrow x = 0,$$

odakle dobijamo da je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

stacionarna tačka.

Linearna analiza stabilnosti se oslanja na sopstvene vrednosti matrice \mathbf{A} koje su određene rešenjima karakteristične jednačine:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -b - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + b\lambda + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2 + 4\omega^2}).$$

Kako bi utvrdili stabilnost stacionarne tačke potrebno je izvršiti analizu determinante i traga:

$$D = \omega^2 > 0,$$

$$T = -b < 0.$$

Granična kriva je $D = \frac{1}{4}T^2 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{4}b^2$ pa možemo imati dva slučaja:

$$1) D < \frac{1}{4}T^2 \Leftrightarrow \omega^2 < \frac{1}{4}b^2 \text{ a ovo je stabilan čvor,}$$

2) $D > \frac{1}{4}T^2 \Leftrightarrow \omega^2 > \frac{1}{4}b^2$ a ovo je stabilan fokus.

Dakle, stacionarna tačka je asimptotski stabilna u oba slučaja. Granični slučaj $\omega^2 = \frac{1}{4}b^2$ ovde neće biti posebno analiziran, mada se i tada može pokazati da je stacionarna tačka asimptotski stabilna.

Za ispitivanje stabilnosti pomoću direktnog metoda Ljapunova izabraćemo funkciju Ljapunova kao kod harmonijskog oscilatora, u obliku ukupne mehaničke energije po jedinici mase:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2x^2.$$

Ovo je pozitivno definitna funkcija jer je ispunjeno sledeće:

- 1) $V(0,0) = 0$
- 2) $V(x, y) > 0$ jer su $x^2, y^2 > 0$ kada je $x, y \neq 0$ i $\omega^2 > 0$.

Definišimo novu funkciju koja zavisi od parametra t :

$$\bar{V}(t) = V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}y^2(t) + \frac{1}{2}\omega^2x^2(t). \quad (3.15)$$

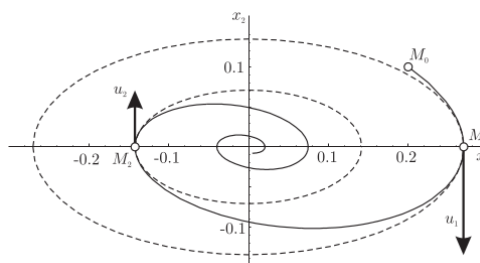
Diferenciranjem funkcije (3.15) po t na rešenju sistema (3.13)-(3.14) dobijamo sledeće:

$$\frac{d\bar{V}(t)}{dt} = y(t)\frac{dy(t)}{dt} + \omega^2x(t)\frac{dx(t)}{dt} = y(t)(-\omega^2x(t) - by(t)) + \omega^2x(t)y(t) = -by^2(t) \leq 0.$$

Primetimo da je izvod funkcije Ljapunova duž rešenja sistema:

$$\frac{d\bar{V}(t)}{dt} = -by^2(t) \leq 0,$$

negativno semidefinitna funkcija a to znači da je stacionarna tačka stabilna samo u običnom smislu, zbog ispunjenih uslova prve teoreme Ljapunova.



Slika 3.3 Analiza stabilnosti prigušenog oscilatora

Da bi bila dokazana asimptotska stabilnost stacionarne tačke potrebna je dalja analiza. Izvod funkcije Ljapunova $d\bar{V}(t)/dt$ je jednak nuli na skupu:

$$\{(x, y) | y(t) = 0\}.$$

$$\frac{d\bar{V}(t)}{dt} < 0, y(t) \neq 0,$$

$$C_1 > C_2,$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \Big|_{y(t)=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega^2 x(t) \end{bmatrix} = \mathbf{u}(t).$$

Te dobijamo asimptotsku stabilnost stacionarne tačke. Ova analiza je ilustrovana na Slici 3.3.

Napomenimo da je izbor funkcije Ljapunova u obliku ukupne mehaničke energije motivisan činjenicom da je kod prigušenog oscilatora, zbog dejstva sile fluidnog otpora, prisutna disipacija mehaničke energije, $dE/dt \leq 0$.

3.3 Matematičko klatno

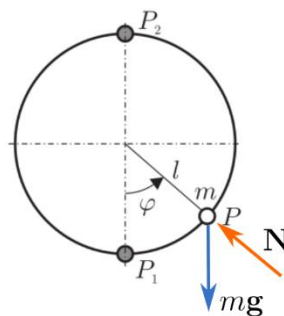
U narednim koracima ćemo ispitati stabilnost stacionarnih tačaka matematičkog klatna. Da bismo uopšte počeli sa ovim ispitivanjem moramo se osvrnuti na osnovne pretpostavke:

1. kretanje se vrši u vertikalnoj ravni,
2. konac (žica) je nerastegljiv i zategnut,
3. sile otpora su zanemarljive.

Uzimajući u obzir nabrojane pretpostavke zaključujemo da je trajektorija matematičkog klatna kružnica.

Kao i u prethodna dva primera radićemo analizu sila da bismo došli do DJ kretanja matematičkog klatna. Drugi Njutnov zakon glasi:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}, \quad (3.16)$$



Slika 3.4 Matematičko klatno

gde $m\mathbf{g}$ sila teže materijalne tačke a \mathbf{N} normalna sila kojom žica dejstvuje na nju (sila zatezanja konca). Kada jednačinu (3.16) pomnožimo vektorom \mathbf{e}_t dobijamo DJ kretanja matematičkog klatna:

$$mR \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta. \quad (3.17)$$

Kada jednačinu (3.17) podelimo sa mR , dobijamo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{R} \sin \theta. \quad (3.18)$$

što predstavlja ODJ drugog reda. Da bismo (3.18) transformisali u sistem ODJ prvog reda, uvešćemo sledeće oznake:

$$\theta = y_1(t),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = y_2(t),$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dy_2(t)}{dt}.$$

Sistem ODJ, koji je ekvivalentan DJ kretanja matematičkog klatna (3.18), izgleda ovako:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = y_2(t), \quad (3.19)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = -\frac{g}{R} \sin y_1(t). \quad (3.20)$$

Stacionarne tačke su određene rešenjima jednačina:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = F_1(y_1(t), y_2(t)) = 0,$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = F_2(y_1(t), y_2(t)) = 0.$$

Stacionarne tačke sistema (3.19)-(3.20) zadovoljavaju sledeće jednačine:

$$y_2 = 0,$$

$$-\frac{g}{R} \sin y_1 = 0 \Rightarrow \sin y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Primećujemo da imamo beskonačno mnogo rešenja, ali postoje samo dva različita fizička rešenja. Dakle, imamo dve stacionarne tačke:

$$P_1: \mathbf{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P_2: \mathbf{y}^{(2)} = \begin{bmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Analiza stabilnosti se mora vršiti za svaku stacionarnu tačku posebno. Pored toga, u ovom primeru ćemo se ograničiti na analizu stabilnosti u linearnoj aproksimaciji.

Posmatrajmo stacionarnu tačku P_1 i uvedimo poremećaje x i y na sledeći način:

$$y_1 = y_1^{(1)} + x = x,$$

$$y_2 = y_2^{(1)} + y = y.$$

Odatle dobijamo da je:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = \frac{dy}{dt}.$$

DJ poremećaja izgledaju ovako:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (3.21)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{R} \sin x.$$

Da bismo mogli sprovesti linearnu analizu stabilnosti, neophodno je linearizovati desne strane jednačina (3.21). Razvojem u Maklorenov red dobijamo:

$$-\frac{g}{R} \sin x = -\frac{g}{R} (x + o(x)) \approx -\frac{g}{R} x.$$

Sada linearizovane DJ poremećaja (3.21) izgledaju ovako:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (3.22)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{R} x.$$

Linearizovane DJ poremećaja (3.22) mogu biti zapisane u matičnom obliku:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -\frac{g}{R} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

Sopstvena vrednosti matrice \mathbf{A} su određene rešenjima karakteristične jednačine:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{g}{R} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{R} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Dakle, $Re(\lambda_{1,2}) = 0$ pa je stacionarna tačka P_1 centar, a to je stabilna stacionarna tačka.

Sada posmatramo stacionarnu tačku P_2 i uvodimo poremećaje x i y :

$$y_1 = y_1^{(2)} + x = \pi + x,$$

$$y_2 = y_2^{(2)} + y = y,$$

te dobijamo da je:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = \frac{dy}{dt}.$$

DJ poremećaja izgledaju ovako:

$$\frac{dx}{dt} = y \quad (3.23)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{R} \sin(\pi + x).$$

Linearizacijom desnih strana jednačina (3.23), odnosno razvojem u Maklorenov red u okolini tačke $(x, y) = (0, 0)$, dobijamo:

$$-\frac{g}{R} \sin(\pi + x) = -\frac{g}{R} (\sin \pi + \cos \pi x + o(x)) \approx \frac{g}{R} x.$$

Sada DJ poremećaja (3.23) nakon linearizacije izgledaju ovako:

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g}{R}x,$$

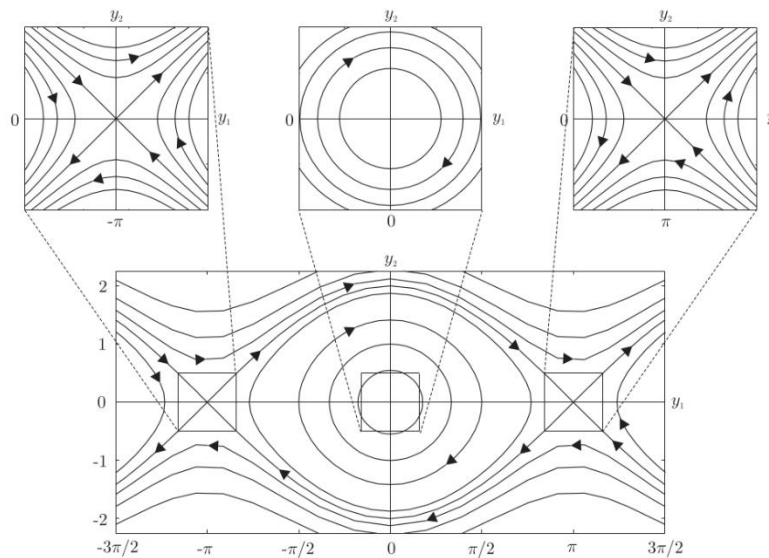
a u matičnom obliku zapisujemo ih na ovaj način:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{g}{R}x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}x.$$

Sopstvene vrednosti matrice \mathbf{A} su određene rešenjima karakteristične jednačine:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{g}{R} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{g}{R} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Pošto su sopstvene vrednosti realne i različitog znaka, stacionarna tačka P_2 je sedlo, a to je nestabilna stacionarna tačka.



Slika 3.5 Fazni portret matematičkog klatna

Na Slici 3.5 je prikazan globalni fazni portret matematičkog klatna. Važno je primetiti da se u okolini stacionarnih tačaka mogu uočiti tipične strukture faznih protreta centra i sedla. U dalju detaljnu analizu globalnog faznog portreta, odnosno analizu svih mogućih faznih trajektorija matematičkog klatna, ovde nećemo ulaziti.

3.4 Rotirajuće matematičko klatno

Za ispitivanje stabilnosti stacionarnih tačaka rotirajućeg matematičkog klatna potrebna nam je njegova DJ kretanja. Ona se izvodi kao DJ relativnog kretanja u odnosu na pokretni sistem referencije. Kako bismo došli do DJ uradićemo analizu sila kao i u prethodnim primerima. Međutim, analiza sila rotirajućeg matematičkog klatna je složenija zato što se silama koje dejstvuju na materijalnu tačku dodaju se tzv. inercijalne (fiktivne) sile, a te sile su:

prenosna i Koriolisova sila. Takođe, ubrzanje tačke je njeno relativno ubrzanje. Treba napomenuti da apsolutno ubrzanje \mathbf{a} čine relativno ubrzanje \mathbf{a}_r , prenosno ubrzanje \mathbf{a}_p i Koriolisovo ubrzanje \mathbf{a}_c :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_c, \quad (3.24)$$

gde je:

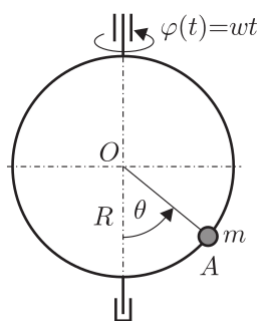
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r &= R \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{e}_t + R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_n, \\ \mathbf{a}_p &= -a_p \cos \theta \mathbf{e}_t + a_p \sin \theta \mathbf{e}_n, \\ \mathbf{a}_c &= 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = -2\omega R \frac{d\theta}{dt} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \mathbf{e}_b, \\ \mathbf{v}_r &= R \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_t. \end{aligned}$$

Znamo i da je:

$$m\mathbf{g} = -mg \sin \theta \mathbf{e}_t - mg \cos \theta \mathbf{e}_n.$$

Sada se drugi Njutnov zakon može zapisati u obliku:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{S} + \mathbf{N}.$$



Slika 3.6 Rotirajuće matematičko klatno

Kada umesto \mathbf{a} uvršimo (3.24) dobijamo:

$$m\mathbf{a}_r = m\mathbf{g} + \mathbf{S} + \mathbf{N} - m\mathbf{a}_p - m\mathbf{a}_c, \quad (3.25)$$

gde su:

$$-m\mathbf{a}_p = \mathbf{F}_p^{in},$$

$$-m\mathbf{a}_c = \mathbf{F}_c^{in},$$

\mathbf{F}_p^{in} i \mathbf{F}_c^{in} prenosna i Koriolisova inercijalna sila, redom.

Kada jednačinu (3.19) skalarno pomnožimo, respektivno, sa jediničnim vektorom tangente \mathbf{e}_t , normale \mathbf{e}_n i binormale $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$ dobijamo sledeće tri jednačine:

$$mR \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta + ma_p \cos \theta, \quad (3.26)$$

$$mR \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -mg \cos \theta + S - ma_p \sin \theta,$$

$$0 = N + 2m\omega R \frac{d\theta}{dt} \cos \theta.$$

Kada jednačinu (3.26) podelimo sa mR svešće se na:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{R} \sin \theta + \omega^2 \sin \theta \cos \theta,$$

odakle dobijamo DJ kretanja rotirajućeg matematičkog klatna:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta\right) \sin \theta. \quad (3.27)$$

Uvedimo oznake:

$$\theta = y_1(t),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = y_2(t),$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dy_2(t)}{dt}.$$

Tada se DJ (3.27) može zapisati u vidu sistema ODJ prvog reda:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = y_2(t), \quad (3.28)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = -\left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos y_1(t)\right) \sin y_1(t). \quad (3.29)$$

Stacionarne tačke su određene rešenjima jednačina:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = F_1(y_1(t), y_2(t)) = 0,$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = F_2(y_1(t), y_2(t)) = 0.$$

U slučaju sistema (3.28)-(3.29) ove jednačine se svode na:

$$y_2 = 0, \quad (3.30)$$

$$-\left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos y_1\right) \sin y_1 = 0. \quad (3.31)$$

Rešenja jednačine (3.31) su:

$$\sin y_1 = 0 \quad \vee \quad -\frac{g}{R} + \omega^2 \cos y_1 = 0,$$

odnosno:

$$y_1 = k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \cos y_1 = \frac{g}{R\omega^2}.$$

Primetimo da imamo beskonačno mnogo rešenja, ali samo četiri različita fizička rešenja. Dakle, imamo četiri stacionarne tačke:

$$P_1: \mathbf{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P_2: \mathbf{y}^{(2)} = \begin{bmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P_3: \mathbf{y}^{(3)} = \begin{bmatrix} y_1^{(3)} \\ y_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P_4: \mathbf{y}^{(4)} = \begin{bmatrix} y_1^{(4)} \\ y_2^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gde je:

$$\theta_3 = \arccos \frac{g}{R\omega^2} \text{ i } \theta_4 = -\arccos \frac{g}{R\omega^2}.$$

Primetimo da stacionarne tačke $\mathbf{y}^{(3)}$ i $\mathbf{y}^{(4)}$ postoje ako je ispunjen uslov:

$$\frac{g}{R\omega^2} < 1 \Rightarrow \omega^2 > \frac{g}{R}.$$

U nastavku će biti ispitana stabilnost stacionarnih tačaka i pomoću linearne analize i primenom direktnog metoda Ljapunova.

Posmatrajmo najpre stacionarnu tačku P_1 . Uvedimo poremećaje:

$$y_1 = y_1^{(1)} + x = x,$$

$$y_2 = y_2^{(1)} + y = y,$$

odakle sledi:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = \frac{dy}{dt}.$$

DJ poremećaja sada glase:

$$\frac{dx}{dt} = y, \tag{3.32}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos x\right) \sin x.$$

Za analizu stabilnosti u linearnoj aproksimaciji neophodno je linearizovati desne strane jednačina (3.32). Za to ćemo koristeći razvoj u Maklorenov red i zadržati se na članovima prvog stepena:

$$f(x) = f(0) + \frac{df(0)}{dx} x + o(|x|).$$

U našem slučaju imamo:

$$\frac{df(x)}{dx} = -\omega^2 (\sin(x))^2 - \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos(x)\right),$$

$$f(0) = 0,$$

$$\frac{df(0)}{dx} = -\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right).$$

Sada linearizovane DJ poremećaja (3.32) izgledaju ovako:

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)x.$$

Linearizovane DJ poremećaja u matricnom obliku zapisujemo na sledeći način:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{R} + \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Sopstvene vrednosti matrice \mathbf{A} su određene rešenjima karakteristične jednačine:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{g}{R} + \omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{R} - \omega^2 = 0.$$

Odavde slede dva različita slučaja u pogledu stabilnosti:

$$1) \frac{g}{R} - \omega^2 > 0 \Leftrightarrow \omega^2 < \frac{g}{R} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2},$$

$Re(\lambda_{1,2}) = 0$ pa dobijamo centar, a to je stabilna stacionarna tačka.

$$2) \frac{g}{R} - \omega^2 < 0 \Leftrightarrow \omega^2 > \frac{g}{R} \Rightarrow \lambda^2 = \omega^2 - \frac{g}{R} > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{g}{R}},$$

pa dobijamo sedlo, a to je nestabilna stacionarna tačka. Primetimo da je stacionarna tačka P_1 stabilna ako rešenja $\theta_{3,4}$ ne postoje, a da „gubi“ stabilnost kada se pojave rešenja $\theta_{3,4}$.

Sada posmatramo stacionarnu tačku P_2 . Uvodimo poremećaje:

$$y_1 = y_1^{(2)} + x = \pi + x,$$

$$y_2 = y_2^{(2)} + y = y,$$

odakle sledi:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = \frac{dy}{dt}.$$

DJ poremećaja izgledaju ovako:

$$\frac{dx}{dt} = y, \tag{3.33}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos(\pi + x)\right) \sin(\pi + x).$$

Za analizu stabilnosti u linearnoj aproksimaciji neophodno je linearizovati desne strane jednačina (3.33). Za to ćemo koristeći razvoj u Maklorenov red i zadržati se na članovima prvog stepena:

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos(\pi + x)\right) \sin(\pi + x) \\
& = -\left(\frac{g}{R} - \omega^2(\cos \pi - \sin \pi x + o(|x|))\right) (\sin \pi + \cos \pi x + o(|x|)) \\
& \approx \left(\frac{g}{R} + \omega^2\right) x.
\end{aligned}$$

Sada linearizovane DJ poremećaja (3.33) izgledaju ovako:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= y, \\
\frac{dy}{dt} &= \left(\frac{g}{R} + \omega^2\right) x.
\end{aligned}$$

Linearizovane DJ poremećaja u matičnom obliku zapisujemo na sledeći način:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \left(\frac{g}{R} + \omega^2\right) x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{R} + \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}x.$$

Sopstvene vrednosti matrice \mathbf{A} su određene rešenjima karakteristične jednačine:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{g}{R} + \omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{g}{R} - \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{R} + \omega^2}.$$

Dakle, stacionarna tačka P_2 je sedlo, a to je nestabilna stacionarna tačka.

Konačno, posmatrajmo tačku P_3 . Znamo da je $\cos \theta_{3,4} = \frac{g}{R\omega^2} < 1$. Kada postoje ravnotežni položaji $P_{3,4}$, to jest kada je $\frac{g}{R\omega^2} < 1$, tada je ravnotežni položaj P_1 nestabilan. Uvodimo poremećaje:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_1^{(3)} + x = \theta_3 + x, \\
y_2 &= y_2^{(3)} + y = y,
\end{aligned}$$

odakle sledi:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1(t)}{dt} &= \frac{dx}{dt}, \\
\frac{dy_2(t)}{dt} &= \frac{dy}{dt}.
\end{aligned}$$

DJ poremećaja se svode na:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= y, \\
\frac{dy}{dt} &= -\left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos(\theta_3 + x)\right) \sin(\theta_3 + x).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Za ispitivanje stabilnosti u linearnoj aproksimaciji koristimo razvoj u Maklorenov red:

$$f(x) = f(0) + \frac{df(0)}{dx} x + o(|x|),$$

i dobijamo da je:

$$\frac{df(x)}{dx} = -\omega^2 (\sin(\theta_3 + x))^2 - \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos(\theta_3 + x)\right) \cos(\theta_3 + x),$$

$$f(0) = -\left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta_3\right) \sin \theta_3 = 0,$$

$$\frac{df(0)}{dx} = -\omega^2 (\sin \theta_3)^2 - \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta_3\right) \cos \theta_3.$$

Pošto je

$$(\sin \theta_3)^2 + (\cos \theta_3)^2 = 1 \Rightarrow (\sin \theta_3)^2 = 1 - (\cos \theta_3)^2 = 1 - \left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2 > 0,$$

dobijamo da je:

$$\frac{df(0)}{dx} = -\omega^2 \left[1 - \left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2\right].$$

Sada linearizovane DJ poremećaja (3.34) izgledaju ovako:

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\omega^2 \left[1 - \left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2\right] x.$$

Linearizovane DJ poremećaja u matricnom obliku zapisujemo na sledeći način:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -\omega^2 \left[1 - \left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2\right] x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \left[1 - \left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2\right] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

Sopstvene vrednosti matrice \mathbf{A} određujemo rešavanjem karakteristične jednačine:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 \left[1 - \left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2\right] & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 \left[1 - \left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2\right] = 0,$$

odakle dobijamo:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega \sqrt{1 - \left(\frac{g}{R\omega^2}\right)^2}.$$

Dakle, dobijamo centar, a to je stabilna stacionarna tačka. Analogno dobijamo centar kada posmatramo tačku P_4 jer su tačke P_3 i P_4 simetrične.

Linearna analiza je pokazala da je stacionarna tačka P_1 centar ako važi $\frac{g}{R\omega^2} > 1$ i da je stacionarna tačka P_3 (P_4) centar kada je $\frac{g}{R\omega^2} < 1$. Pošto u slučaju obične stabilnosti linearna analiza ne daje konačan odgovor, odnosno nelinearni članovi mogu imati uticaj na stabilnost stacionarne tačke, u daljem tekstu će biti analizirana stabilnost stacionarnih tačaka P_1 i P_3 pomoću direktnog metoda Ljapunova.

U formiranju funkcije Ljapunova sledićemo ideju koja je prikazana u analizi stabilnosti položaja ravnoteže harmonijskog oscilatora. To znači da ćemo pokušati da odredimo prvi integral DJ kretanja (3.27) i njega iskoristimo za funkciju Ljapunova. Uvedimo oznaku $v(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$. Tada važi: $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt}$. Posmatrajmo $v(t)$ kao složenu funkciju vremena t , odnosno $v(t) = v(\theta(t))$. Tada imamo:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{dv(\theta(t))}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = v \frac{dv}{d\theta}.$$

Na ovaj način se jednačina (3.27) može zapisati kao:

$$v \frac{dv}{d\theta} = - \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta.$$

Dalje, razdvajamo promenljive:

$$v dv = - \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta d\theta.$$

Integraljenjem obe strane dobijamo:

$$\int v dv = \int - \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta d\theta.$$

Kada uvedemo smenu:

$$\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta = u,$$

$$\omega^2 \sin \theta d\theta = du,$$

dobijamo sledeće:

$$\frac{1}{2} v^2 = - \frac{1}{\omega^2} \int u du = - \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta \right)^2 + C,$$

odakle sledi prvi integral u obliku:

$$F(\theta, v) = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta \right)^2 = C = const. \quad (3.35)$$

Pređimo sada na ispitivanje stabilnosti stacionarne tačke P_1 . Podsećamo da za ovu stacionarnu važi:

$$\theta_1 = 0,$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0.$$

Kada se uvedu poremećaji, DJ kretanja se svode na DJ poremećaja (3.32):

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = - \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos x \right) \sin x.$$

Prvi integral (3.35) se sada može izraziti kao funkcija poremećaja:

$$F(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{g}{R\omega} - \omega \cos \theta \right)^2,$$

i u stacionarnoj tački ima vrednost:

$$F(0,0) = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{R\omega} - \omega \right)^2.$$

Funkciju Ljapunova konstruišemo na sledeći način:

$$V(x, y) = F(x, y) - F(0,0).$$

Korišćenjem prvog integrala u stacionarnoj tački $F(0,0)$ obezbeđuje se da funkcija Ljapunova bude jednaka nuli u koordinatnom početku:

$$V(0,0) = 0.$$

Sada moramo proveriti da li je ovako definisana funkcija pozitivno definitna. Za to je neophodno da razvijemo funkciju $V(x, y)$ u Maklorenov red u okolini tačke $(0,0)$. Odredimo zato njene prve i druge parcijalne izvode:

$$V_x(x, y) = \left(\frac{g}{R\omega} - \omega \cos x \right) \omega \sin x \Rightarrow V_x(0,0) = 0,$$

$$V_y(x, y) = y \Rightarrow V_y(0,0) = 0,$$

$$V_{xx}(x, y) = \omega^2(\sin x)^2 + \left(\frac{g}{R\omega} - \omega \cos x \right) \omega \cos x \Rightarrow V_{xx}(0,0) = \frac{g}{R} - \omega^2,$$

$$V_{yy}(x, y) = 1 \Rightarrow V_{yy}(0,0) = 1,$$

$$V_{xy}(x, y) = 0 \Rightarrow V_{xy}(0,0) = 0.$$

Sada vidimo da je:

$$V_{xx}(0,0) = \frac{g}{R} - \omega^2 > 0,$$

$$V_{yy}(0,0) = 1 > 0,$$

$$V_{xx}(0,0)V_{yy}(0,0) - V_{xy}(0,0)^2 = \frac{g}{R} - \omega^2 > 0,$$

zato što u stacionarnoj tački P_1 kada je centar važi $\frac{g}{R\omega^2} > 1$. Dakle, funkcija $V(x, y)$ je pozitivno definitna funkcija. Pošto smo funkciju Ljapunova konstruisali pomoću prvog integrala, njen izvod na rešenju sistema DJ poremećaja treba da bude identički jednak nuli. Neposrednim računom se to i potvrđuje:

$$\frac{dV(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \left(\frac{g}{R\omega} - \omega \cos x \right) \omega \sin x y - y \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos x \right) \sin x \equiv 0.$$

Odatle po prvoj teoremi Ljapunova, dobijamo da je tačka P_1 stabilna u običnom smislu.

Pređimo sada na ispitivanje stabilnosti tačke P_3 . Podsećamo da je:

$$\cos \theta_3 = \frac{g}{R\omega^2} < 1 \Rightarrow \omega^2 > \frac{g}{R}.$$

Kada se uvedu poremećaji DJ kretanja su:

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = - \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos(\theta_3 + x) \right) \sin(\theta_3 + x).$$

U ovom slučaju prvi integral (3.35) zapisan kao funkcija poremećaja i njegova vrednost u stacionarnoj tački glase:

$$F(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos(\theta_3 + x) \right)^2,$$

$$F(0,0) = \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta_3 \right)^2 = 0.$$

Funkciju Ljapunova konstruišemo na sledeći način:

$$V(x, y) = F(x, y) - F(0,0).$$

Proverimo sada da li je ovako definisana funkcija pozitivno definitna, odnosno razvijmo je u Maklorenov red u okolini tačke (0,0) do kvadratnih članova.

$$V(0,0) = 0,$$

$$V_x(x, y) = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos(\theta_3 + x) \right) \omega^2 \sin(\theta_3 + x)$$

$$\Rightarrow V_x(0,0) = \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta_3 \right) \sin \theta_3 = 0,$$

$$V_y(x, y) = y \Rightarrow V_y(0,0) = 0,$$

$$V_{xx}(x, y) = \omega^2 (\sin(\theta_3 + x))^2 + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos(\theta_3 + x) \right) \cos(\theta_3 + x),$$

$$\Rightarrow V_{xx}(0,0) = \omega^2 (\sin \theta_3)^2 + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta_3 \right) \cos \theta_3 > 0.$$

$$V_{yy}(x, y) = 1 \Rightarrow V_{yy}(0,0) = 1 > 0,$$

$$V_{xy}(x, y) = 0 \Rightarrow V_{xy}(0,0) = 0.$$

$V_{xx}(0,0) > 0$ jer je $\cos \theta_3 = \frac{g}{R\omega^2}$ i važi:

$$(\sin \theta_3)^2 = 1 - (\cos \theta_3)^2 = 1 - \left(\frac{g}{R\omega^2} \right)^2 = \left(1 - \frac{g}{R\omega^2} \right) \left(1 + \frac{g}{R\omega^2} \right) > 0.$$

Sada vidimo da je

$$V_{xx}(0,0)V_{yy}(0,0) - V_{xy}(0,0)^2 = \omega^2 (\sin \theta_3)^2 > 0.$$

Dakle, funkcija $V(x, y)$ je pozitivno definitna funkcija. Njen izvod na rešenju sistema DJ poremećaja je po konstrukciji identički jednak nuli:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t), y(t))}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos(\theta_3 + x) \right) \sin(\theta_3 + x) y \\ &\quad + y \left[- \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos(\theta_3 + x) \right) \sin(\theta_3 + x) \right] \equiv 0. \end{aligned}$$

Na osnovu ovog rezultata, po prvoj teoremi Ljapunova, dobijamo da je tačka P_3 stabilna u običnom smislu. Analogno, dobija se da je i tačka P_4 stabilna u običnom smislu.

4 ZAKLJUČAK

Ovaj rad je posvećen teoriji stabilnosti kao delu teorije običnih diferencijalnih jednačina i njenoj primeni na odabrane probleme mehanike. Analizirani su sistemi drugog reda, odnosno dinamički sistemi.

Rad se sastoji od tri celine. Prvi deo rada posvećen je uvođenju pojmova fazne ravni, fazne trajektorije i faznog portreta. Takođe, definisan je pojam stacionarne tačke i analizirno je ponašanje dinamičkog sistema u okolini pomenute stacionarne tačke pomoću linearizovanih sistema diferencijalnih jednačina.

Drugi deo rada sadrži osnove teorije stabilnosti dinamičkih sistema u faznoj ravni. Najpre su definisani pojmovi stabilnosti u običnom smislu i asimptotske stabilnosti stacionarne tačke. Dokazane su teoreme o stabilnosti stacionarne tačke i data je klasifikacija stacionarnih tačaka. Zatim su analizirane definitne funkcije i njihova svojstva. Na kraju su formulisane i dokazane teoreme Ljapunova. Primena teorije stabilnosti ilustrovana je primerima koji su nam pokazali kako da, najpogodnije, konstruišemo funkciju Ljapunova. U primerima je pokazano da je funkcija Ljapunova konstruisana za linearizovan sistem diferencijalnih jednačina takođe i funkcija Ljapunova za nelinearizovan sistem diferencijalnih jednačina.

Treći deo rada je posvećen primenama teorije stabilnosti na mehaničke sisteme. Obrađena je stabilnost položaja ravnoteže harmonijskog i prigušenog oscilatora, matematičkog klatna kao i rotirajućeg matematičkog klatna. Stabilnost položaja ravnoteže harmonijskog oscilatora ispitana je na dva načina: linearnom analizom i direktnim metodom Ljapunova. Na oba načina smo dobili da je stacionarna tačka harmonijskog oscilatora stabilna, a tip stacionarne tačke je centar. Linearnom analizom stabilnosti stacionarne tačke prigušenog oscilatora dobijamo dva tipa stacionarne tačke: stabilan čvor i stabilan fokus. Direktna metoda Ljapunova nam, u slučaju prigušenog oscilatora, potvrđuje da je njegova stacionarna tačka asimptotski stabilna. Stabilnost stacionarne tačke matematičkog klatna je ispitana samo linearnom analizom. Matematičko klatno ima dva fizički različita rešenja, odnosno, dve stacionarne tačke od kojih je jedna stabilna (centar), a druga je nestabilna (sedlo). Rotirajuće matematičko klatno je primer dinamičkog sistema kod kog broj stacionarnih tačaka (položaja relativne ravnoteže) i njihova stabilnost zavisi od parametara sistema. Dve stacionarne tačke, P_1 i P_2 , nalaze se na osi rotacije i postoje za sve vrednosti parametara. Gornja stacionarna tačka P_2 je uvek nestabilna (kao kod običnog matematičkog klatna). Međutim, donja stacionarna tačka P_1 menja karakter stabilnosti sa promenom vrednosti parametara. Kada ona

postane nestabilna, pojavljuju se dve nove stacionarne tačke, P_3 i P_4 , simetrične u odnosu na osu rotacije, koje su stabilne. Kada je položaj P_1 stabilan, tip stacionarne tačke je centar. Kada postane nestabilan, tip stacionarne tačke se menja u sedlo. Položaj P_2 je nestabilan položaj, a tip stacionarne tačke je sedlo. Simetrični položaji P_3 i P_4 su stabilni položaji, a tip stacionarne tačke je centar. Stabilnost stacionarnih tačaka rotirajućeg matematičkog klatna ispitana je pomoću linearne analize kao i direktnim metodom Ljapunova.

Na osnovu prikazanog u radu zaključujemo da teorija stabilnosti ima veoma široku primenu u mehanici. Od posebnog značaja su metode Ljapunova zbog svoje efikasnosti. Takođe, prikazano je da se teorija stabilnosti može primeniti na konkretne probleme iz okoline. Zaključujemo i da teorija stabilnosti ima velik potencijal da se razvija u budućnosti zajedno sa razvojem tehnologije.

5 DODATAK

5.1 Teorema o srednjoj vrednosti

Za dokazivanje svojstava definitnih funkcija neophodna je primena teoreme o srednjoj vrednosti. Zbog toga u nastavku dajemo njihove formulacije i dokaze.

Teorema 5.1 Ako funkcija $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, zadovoljava sledeće uslove:

- 1) neprekidna je na $[a, b]$, $a < b$,
- 2) ima konačan ili beskonačan izvod u svakoj tački intervala (a, b) ,

tada postoji $c \in (a, b)$ tako da je:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 5.1 je u literaturi poznata kao Lagranžova teorema i ovde je navodimo bez dokaza.

Teorema 5.2 Neka je $A \subset \mathbb{R}^m$ otvoren skup, $a = (a_1, \dots, a_m) \in A$ i $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$, tako da segment:

$$[a, a + h] = \{x: x = a + th, 0 \leq t \leq 1\}$$

leži u A . Ako je funkcija $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u svim tačkama tog segmenta i diferencijabilna u svim tačkama intervala:

$$(a, a + h) = \{x: x = a + th, 0 < t < 1\},$$

onda postoji tačka $c = a + \theta h$, $0 < \theta < 1$, tog intervala, takva da važi:

$$f(a + h) - f(a) = df(c)h = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1 + \theta h_1, \dots, a_m + \theta h_m)h_i.$$

Dokaz: Neka je $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija definisana sa $\varphi(t) = f(a + th)$, $0 \leq t \leq 1$. Ovu funkciju možemo posmatrati kao složenu funkciju $\varphi = f \circ \psi$, gde je $\psi: [0, 1] \rightarrow [a, a + h]$, linearana funkcija data sa $\psi(t) = a + th$. Funkcija φ je neprekidna na zatvorenom intervalu $[0, 1]$, a pošto je ona kompozicija neprekidnih funkcija, onda je i diferencijabilna na intervalu $(0, 1)$ i njen diferencijal je:

$$d\varphi(t) = df(a + th) \circ d\psi(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th)h_i.$$

Ako sada na ovu funkciju primenimo Teoremu 5.1, koristeći da je $\varphi(1) = f(a + h)$ i $\varphi(0) = f(a)$, dobijamo da postoji broj θ , $0 < \theta < 1$, odnosno postoji vektor $c = a + \theta h \in (a, a + h)$, takav da važi:

$$f(a + h) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta h)h_i = df(c)h.$$

Nama je za rad potrebna teorema o srednjoj vrednosti u \mathbb{R}^2 , te je zato posebno navodimo.

Teorema 5.3 Neka je $A \subset \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $a = (a_1, a_2) = (0,0) \in A$ i $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, takav da interval:

$$[a, a + th] \equiv [0, th] = \{x: x = th, 0 \leq t \leq 1\}$$

leži u A . Ako je funkcija $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i diferencijabilna u svim tačkama intervala $(a, a + th) \equiv (0, th)$, onda postoji tačka $c = a + \theta h$, $0 < \theta < 1$, tog intervala, takva da važi:

$$f(a + h) - f(a) = df(c)h = \frac{\partial f(c)}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f(c)}{\partial x_2}h_2.$$

Dalje, ako je funkcija $f(x_1, x_2)$ pozitivno definitna funkcija, odnosno, važi: $f(a) = f(0) = 0$ i $f(a + h) = f(h) > 0$ onda je, prema teoremi o srednjoj vrednosti, $f(h) = df(c)h > 0$ odakle sledi da postoji okolina stacionatne tačke $(0,0)$ u kojoj će funkcija $f(x_1, x_2)$ biti rastuća za svako $h = (h_1, h_2)$, odnosno u svakom pravcu.

5.2 Lokalni ekstremi funkcije više promenljivih

Prvo ćemo uvesti oznake:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}.$$

Neka je $z = f(x, y)$ i tačka (x_0, y_0) je stacionarna tačka. Važi i da je $f_x(x_0, y_0) = 0$ i $f_y(x_0, y_0) = 0$. Matrica

$$\mathbf{H}(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}(x, y),$$

se naziva Hesijan.

Ako je tačka (x_0, y_0) lokalni minimum (maksimum), onda važi:

$$1) f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ i } f_y(x_0, y_0) = 0,$$

$$2) f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \text{ i } f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \text{ i } f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

$$(f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \text{ i } f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \text{ i } f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0).$$

Ako je funkcija $f(x, y)$ kvadratna forma $Q(x, y)$, što znači da je oblika:

$$Q(x, y) = \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

$$= \frac{1}{2}[x - x_0, y - y_0]\mathbf{H}(x_0, y_0)\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix},$$

onda uslovi 1) i 2) predstavljaju uslove pozitivne definitnosti kvadratne forme $Q(x, y)$. To znači da je tačka (x_0, y_0) stacionarna tačka kvadratne forme $Q(x, y)$ u kojoj ona dostiže lokalni minimum.

LITERATURA

- [1] D. Adnađević, Z. Kadelburg, Matematička analiza II, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1991.
- [2] J. Aleksić, Predavanja iz Analiza 2, PMF, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad 2015.
- [3] A. Bakša, M. Vesković, Stabilnost kretanja, Matematički fakultet, Beograd 1996.
- [4] W.E. Boyce, R.C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley & Sons, 2009.
- [5] P. Glendinning, Stability, Instability and Chaos, Cambridge University Press 1994.
- [6] H.K. Khalil, Nonlinear Systems, Prentice Hall, New Jersey 2002.
- [7] A.M. Lyapunov, The General Problem of the Stability of Motion, Taylor & Francis 1992.
- [8] V. Marić, M. Budinčević, Diferencijalne i diferencne jednačine, PMF, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad 2005.
- [9] D.R. Merkin, Introduction to the Theory of Stability, Springer-Verlag, New York 1997.
- [10] R.S. Palais, R.A. Palais, Differential Equations, Mechanics, and Computation, American Mathematical Society, 2009.
- [11] S.S. Simić, Analitička mehanika: dinamika, stabilnost, bifurkacije, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad 2006.
- [12] R. Šćepanović, J. Knežević Miljanović, Lj. Protić, Diferencijalne jednačine, Zavod za udžbenike, Beograd 2013.

Biografija



Milana Kovačev rođena je 14. novembra 1997. godine u Somboru. Osnovnu školu „Branko Radičević“ završila je u Staparuu 2012. godine odličnim uspehom, uz dodelu Vukove diplome zbog zapaženih rezultata na takmičenjima iz likovne kulture, a naročito iz matematike. Srednju medicinsku školu „Dr Ružica Rip“ u Somboru, smer farmaceutski tehničar, završila je 2016. godine sa odličnim uspehom. Iste godine upisuje osnovne akademske studije, diplomirani profesor matematike, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu na Departmanu za matematiku i informatiku. Željna novih saznanja i napredovanja u oblasti matematike prebacuje se, 2021. godine, na integrisane osnovne i master akademske studije, master profesor matematike, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu na istom departmanu. Posедуje međunarodno priznate diplome iz engleskog jezika.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

TD

Monografska dokumentacija

Tip zapisa:

TZ

Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada:

VR

Master rad

Autor:

AU

Milana Kovačev

Mentor:

MN

dr Srboljub Simić

Naslov rada:

NR

Teorija stabilnosti sa primenama u mehanici

Jezik publikacije:

JP

srpski (latinica)

Jezik izvoda:

JI

srpski/engleski

Zemlja publikovanja:

ZP

Srbija

Uže geografsko područje:

UGP

Vojvodina

Godina:

GO

2024.

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku,
MA Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom
Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

Fizički opis rada: (5/66/12/0/19/0/0)
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FOR

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Obične diferencijalne jednačine
ND

Predmetne odrednice, ključne reči: teorija stabilnosti, direktni metod Ljapunova, stabilnost
PO, UDK mehaničkih sistema

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku,
ČU Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom
Sadu

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ

Ovaj master rad je posvećen teoriji stabilnosti kao delu teorije običnih diferencijalnih jednačina i njenoj primeni na izabrane probleme mehanike. Analiza je ograničena na sisteme diferencijalnih jednačina (dinamičkih sistema) drugog reda. U prvom delu rada su uvedeni osnovni pojmovi kao što su fazna ravan, fazna trajektorija, fazni portret i stacionarna tačka. U drugom delu rada su izloženi osnovi teorije stabilnosti. Definisani su pojmovi obične i asimptotske stabilnosti stacionarne tačke u smislu Ljapunova, formulisane su i dokazane teoreme o stabilnosti stacionarne tačke u linearnoj aproksimaciji i izvršena je klasifikacija stacionarnih tačaka. Potom je izložena nelinearna analiza stabilnosti pomoću direktnog metoda Ljapunova i dokazane su teoreme Ljapunova o stabilnosti stacionarne tačke. Primena teorema o stabilnosti ilustrovana je sa nekoliko primera linearnih i nelinearnih sistema. Treći deo rada je posvećen primenama teorije stabilnosti na mehaničke sisteme. Analizirana je stabilnost položaja ravnoteže harmonijskog oscilatora, prigušenog linearnog oscilatora i matematičkog klatna, a proučena je i stabilnost položaja relativne ravnoteže rotirajućeg matematičkog klatna.

Datum prihvatanja teme
od strane NN veća:
DP

12.03.2024.

Datum odbrane:
DO

09.05.2024.

Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Jelena Aleksić, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu
Mentor: dr Srboljub Simić, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Zorana Lužanin, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

Monograph type

DT

Type of record:

Printed text

TR

Contents code:

Master's thesis

CC

Author:

Milana Kovačev

AU

Mentor:

Srboljub Simić, PhD

MN

Title:

Theory of Stability with Applications to Mechanics

TI

Language of text:

Serbian (Latin)

LT

Language of abstract:

Serbian/English

LA

Country of publication:

Serbia

CP

Locality of publication:

Vojvodina

LP

Publication year:

2024

PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics,
PP Faculty of Sciences, University of Novi Sad,
Trg Dositeja Obradovića 4

Physical description: (5/66/12/0/19/0/0)
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Science field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Ordinary differential equations
SD

Subject key word: theory of stability, direct method of Lyapunov, stability
SKW of mechanical systems

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and
HD Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Note:
N

Abstract:
AB

This Master thesis is devoted to the theory of stability as a part of the theory of ordinary differential equations, and its application to the selected problems of mechanics. Analysis is restricted to the second order systems of differential equations (dynamical systems). In Chapter 1 basis notions are introduced, such as phase plane, phase trajectory, phase portrait and stationary point. Chapter 2 contains the elements of stability theory. Lyapunov stability of a stationary point (ordinary and asymptotic) is defined, and theorems about linear stability are given and proved. A classification of stationary points is provided, based upon linear stability analysis. Furthermore, a nonlinear stability analysis is presented through application of the direct method of Lyapunov. Theorems on nonlinear stability of a stationary point are proved. Stability analysis is applied to several linear and nonlinear dynamical systems. In Chapter 3 stability theory is applied to selected problems of mechanics. Stability of equilibrium is studied for harmonic and damped oscillator, as well as for mathematical pendulum. Stability of relative equilibrium is analyzed for a rotating pendulum.

Accepted by the Scientific Board on: 12 March 2024

AS

Defended:

09 May 2024

DE

Thesis defended board:

DB

President: Jelena Aleksić, PhD, Full Professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: Srboljub Simić, PhD, Full Professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Zorana Lužanin, PhD, Full Professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad