Универзитет у Новом Саду
Природно-математички факултет
Департман за математику и
информатику

Иван Меденица

Ограниченост псеудо-диференцијалних оператора на L^p просторима

Мастер рад

Ментор:
др Ивана Којновић

2024, Нови Сад

Садржај

Предговор

Псеудо-диференцијални оператори представљају важан алат у функционалној анализи, математичкој физици и многим другим гранама математике. Теорија псеудо-диференцијалних оператора се проучава од почетка 1960-их година и одатле та се теорија заједно развијала са теоријом парцијалних диференцијалних једначина. Њихова примјена сеже далеко и дубоко у теорију функција и оператора, пружајући нам моћан оквир за разумијевање различитих аспеката диференцијалних једначина. Овај рад истражује специфичну особину псеудо-диференцијалних оператора, а то је када су псеудодиференцијални оператори ограничени на L^p просторима. Ограниченост псеудо-диференцијалних оператора на просторима L^p, гдје је $1 \leq p < \infty$, од великог је значаја у функционалној анализи. Наиме, ограниченост псеудо-диференцијалних оператора на просторима L^p омогућава примјену различитих техника из хармонијске анализе у проучавању њихових својстава. Таква ограниченост такође има важне примјене у различитим областима, као што су физика, инжењерство, рачунарство и друге. Ове примјене укључују, на примјер, решавање диференцијалних једначина, симулације и претпроцесирање података у обради сигнала, обраду слика и видео записа итд.

Овај рад је подијељен на четири поглавља. У првом поглављу, које је заправо уводно, присјећамо се основних појмова везаних за нормиране просторе, уопштено функционалну анализу и теорију мјере.

Друго поглавље бавиће се проучавањем Фуријеове трансформације, показаћемо неке њене особине, дефинисати кнволуцију, као и простор брзо-опадајућих функција, тј. Шварцов простор. Затим дефинисаћемо инверзну Фуријеову трансформацију и показати да се на Шварцовом простору понаша као линеарни изоморфизам. Такође, посматраћемо дуал Шварцовог простора, који називамо простором темперираних дистрибуција.

Код трећег поглавља фокус ће нам бити на псеудо-диференцијалним операторима. Као почетни појам увешћемо симбол псеудо-диференцијалног оператора, затим ћемо се бавити основним својствима псеудо-диференцијалних оператора, између којих се издваја његова ограниченост на Шварцовом простору. Након тога, наредних неколико одјељака биће посвећено дефинисању и доказивању добро-дефинисаности композиције псеудо-диференцијалних оператора, те у ту сврху ћемо увести појам осцилаторног интеграла и такође изучити његове особине. Захваљујући томе у посљедњем одјељку ћемо увести појам адјунгованог оператора псеудо-диференцијалног оператора, који је и сам псеудо-диференцијални оператор и који ће нам бити од користи приликом доказивања ограничености на L^p просторима.

Након тога, у четвртом поглављу, бавићемо се централном темом овог рада, а то је ограниченост псеудо-диференцијалних оператора на L^p просторима. Даћемо два доказа одграничености псеудодиференцијалних оператора реда нула на Лебеговим L^p просторима, гдје је $1 \leq p < \infty$, при чему се први доказ заснива на приступу из [1], док други из [2]. У сврху првог доказа уводимо сингуларне интегралне операторе инваријантне на транслацију и њихове важне особине, чиме ћемо показати ограниченост псеудо-диференцијалних оператора реда нула на L^p просторима. Навешћемо и најважније теореме, у вези са општом ограниченошћу псеудо-диференцијалних оператора на L^p просторима.

Овим путем желим да се захвалим свом ментору др Ивани Војновић, прије свега на искреном пријатељском односу према мени, затим на стрпљењу, као и на знању које ми је пренијела током студија. Желим да се захвалим и на корисним савјетима, који су побољшали квалитет овога рада, како др Ивани Војновић, тако и другим члановима комисије др Милици Жигић и др Бориши Кузељевићу. Захвалност дугујем, мојој тетки Вањи Вељовић, која је у мени пробудила љубав према науци, као и наставници из гимназије Мирјани Пјешчић која је ту љубав усмјерила ка математици. Хвала драгој Маји, која ми је уљепшала студирање и поред које ниједна теорема није била тешка. Највећу захвалност дугјем брату Марку и мајци Сањи на неизмјерној подршци и љубави током цијелог живота.

Иван Меденица

Глава 1

Увод

У овој глави ћемо навести основне појмове функционалне анализе и теорије мјере, који ће нам бити неопходни за рад. Конкретно, кључни појмови ће нам бити увођење L^p простора, као и Лебегова теорема о доминантној конвергенцији и Фубинијева теорема.

1.1 Основни појмови и теореме из функционалне анализе

На почетку, присјетимо се дефиницјие тополошко-векторског простора, као и локално-конвексног простора.

Дефиниција 1.1 *Тополошко-векторски простор је уређен пар (X, τ), гдје је τ топологија на X и важе особине:*

1. пресликавање $(x, y) \to x + y$ из $X \times X \to X$ је непрекидно пресликавање;

2. пресликавање $(\lambda, x) \to \lambda x$ из $K \times X \to X$ је непрекидно пресликавање.

Векторска структура и топологија простора X су компатибилне ако важзе услови 1. и 2.

Нека је X векторски простор. Кажемо да је $A \subset X$ конвексан ако за $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha+\beta = 1$ важи да је $\alpha A + \beta A \subset A$.

Дефиниција 1.2 *Тополошко-векторски простор (X, τ) је локално-конвексан ако свака тачка има базу околина која се састоји од конвексних скупова.*

Подсјетимо се и неких познатих простора функција које ћемо користити у овом раду. Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп. Са $C(\Omega)$ означавамо простор непрекидних функција на Ω. Сходно томе, са $C^k(\Omega), k \in \mathbb{N}$ означавамо простор k-пута непрекидно диференцијабилних функција на Ω, док са $C^\infty(\Omega)$ означавамо простор глатких функција на Ω. Такође, са $C_b^\infty(\Omega)$ означавамо простор глатких, ограничених функција на Ω. Споменимо још да са $C_0^\infty(\Omega)$ означавамо простор глатких функција на Ω са компактним носачем, гдје носач непрекидне функције $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ дефинишемо као скуп

$$supp f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}},$$

односно затворење скупа n-торки $x \in \mathbb{R}^n$, за које је функција различита од нуле.

Сада, за неко $x \in \mathbb{R}^n$ пишемо $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Нека је $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ произвољни мулти-индекс. Тада означавамо

$$\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

гдје је $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ ред мулти-индекса и такође дефинишемо $D_x = (-i)\partial_x$. Стога имамо

$$D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n} = \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

Споменимо сада Лајбницову формулу.

Теорема 1.3 *(Лајбницова формула) Извод производа функција $f, g \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ дат је са*

$$\partial_x^\alpha (fg)(x) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \Big(\partial_x^\gamma f(x)\Big)\Big(\partial_x^{\alpha-\gamma} g(x)\Big)$$

за све $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Присјетимо се појма семи-норме:

Дефиниција 1.4 *Нека је X векторско-тополошки простор и нека је $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Пресликавање $q : X \to [0, \infty)$ које задовољава услове:*

$$(SN1)\ q(\lambda x) = |\lambda| q(x) \text{ за све } \lambda \in K \text{ и } x \in X,$$

$$(SN2)\ q(x+y) \leq q(x) + q(y)$$

зовемо семи-норма на X.

Теорема 1.5 *Нека је (X, τ) локално-конвексни простор. Топологија τ се може дефинисати преко фамилије свих семи-норми које су непрекидне за τ.*

Кажемо да су двије фамлије семи-норми на векторском простору X еквивалентне ако дефинишу исту локално конвексну топологију на X.

Дефиниција 1.6 *Нека је F фамилија семи-норми на векторском простору X. Кажемо да је F засићена ако за сваку коначну потфамилију (q_i) у F важи да $max_i q_i \in F$.*

Напоменимо да за сваку фамилију семи-норми, можемо конструисати њој еквивалентну засићену фамилију семи-норми. Сада наводимо теорму о непрекидности линеарних пресликавања између простора са семи-нормама.

Теорема 1.7 *Нека је X локално-конвексни простор чија топологија је дефинисана преко засићене фамилије семи-норми $(q_i)_{i \in I}$. Нека је Y локално-конвексни простор чија топологија је дифинисана преко фамилије семи-норми $(r_j)_{j \in J}$. Линеарно пресликавање $f : X \to Y$ је непрекидно ако и само ако за сваку семи-норму r_j постоје семи-норма q_i и $M > 0$ (који зависе од j) тако да је*

$$r_j(f(x)) \leq M q_i(x) \text{ за све } x \in X.$$

За пресликавање A из нормираног простора $(X, \|\cdot\|_X)$ у нормиран простор $(Y, \|\cdot\|_Y)$ кажемо да је ограничено, ако за свако $x \in X$ постоји константа $M > 0$, тако да важи $\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X$. Присјетимо се да су за линеарно пресликавање из нормираног простора у нормиран простор ограниченост и непрекидност еквивалентни појмови.

Теорема 1.8 *Нека су X и Y два нормирана простора и нека је L линеаран оператор из X у Y. Тада важи:*

$$L \text{ је непрекидан} \iff L \text{ је ограничен}$$

Ако су $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ два нормирана векторска простора, тада са $\mathscr{L}(X,Y)$ означавамо скуп свих линеарних и непрекидних функција из $(X, \|\cdot\|_X)$ у $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Ако је $(X, \|\cdot\|_X) = (Y, \|\cdot\|_Y)$, тада умјесто $\mathscr{L}(X,X)$ пишемо $\mathscr{L}(X)$. Специјално ако је $Y = \mathbb{C}$ са уобичајеном нормом, онда скуп свих линеарних и непрекидних функција из X у $\mathbb{C}$ означавамо са X' и називамо дуал простора $(X, \|\cdot\|_X)$. Елементе дуала називамо функционелама. За $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ пошто је ограничено знамо да важи: $\|Ax\| \leq M\|x\|$, за неко $M > 0$. Сада за A дефинишемо норму $\|A\| = \inf\{M : M \in \mathbb{R} \text{ тако да важи } \|Ax\| \leq M\|x\|\}$. Такође имамо:

Лема 1.9 *Нека је $A \in \mathscr{L}(X,Y)$. Тада важи:*

$$\|A\| = \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Довољан услов да је $\mathscr{L}(X,Y)$ Банахов простор[1], јесте да је $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Банахов простор.

Лема 1.10 *Нека су X и Y Банахови простори, затим нека је D густ линеаран потпростор простора X и нека је $T : D \to Y$ линеарно и ограничено пресликавање из D у Y. Тада постоји јединствено $T' \in \mathscr{L}(X,Y)$ такво да $Tx = T'x$ за све $x \in D$.*

1.2 Основни појмови теорије мјере

Сада ћемо се подсјетити појмова из теорије мјере које ћемо користити у наставку.

Дефиниција 1.11 *Нека је $X \neq \emptyset$. Фамилију скупова $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ са особинама*

1. $X \in \mathcal{M}$
2. $A \in \mathcal{M} \Rightarrow X \backslash A \in \mathcal{M}$
3. $A_n \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$,

називамо σ-алгебра на X. Пар $(X, \mathcal{M})$ називамо простор са σ-алгебром. Елементи σ-алгебре $\mathcal{M}$ су мјерљиви скупови.

Дефиниција 1.12 *Нека је $(X, \mathcal{M})$ простор са σ-алгебром. Мјера на $\mathcal{M}$ је функција $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ за коју важи:*

Ако је $\{A_i \in \mathcal{M} : i \in \mathbb{N}\}$ фамилија дисјунктних скупова, онда је

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (\sigma \text{ адитивност })$$

[1] Присјетимо се, Банахов простор је нормиран простор са комплетном нормом.

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ називамо мјерљив простор или простор са мјером. Скуп $A \in \mathcal{M}$ за који је $\mu(A) = 0$ називамо скуп мјере нула.

Мјера μ је $\boldsymbol{\sigma}$-коначна ако је $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathcal{M}, \mu(E_i) < \infty$, за свако $i \in \mathbb{N}$.

Дефиниција 1.13 *Нека је $(X, \mathcal{M})$ простор са σ-алгебром. Кажемо да је мјера μ на $\mathcal{M}$ комплетна, то јест да је $(X, \mathcal{M}, \mu)$ простор са комплетном мјером, ако је сваки подскуп мјерљивог скупа мјере нула такође мјерљив скуп. Другачије записано,*

$$B \subset A, A \in \mathcal{M}, \mu(A) = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{M}.$$

За простор са (некомплетном) мјером $(X, \mathcal{M}, \mu)$ постоји најмањи простор са комплетном мјером који га садржи. Тај простор називамо комплетирање од $\mathcal{M}$ у односу на мјеру μ.

Ако је $(X, \mathcal{M}, \mu)$ произвољан простор са мјером, кажемо да неко тврђење важи за скоро свако (с.с) $x \in X$ ако постоји скуп $N \in \mathcal{M}, \mu(N) = 0$, тако да тврђење важи за свако $x \in X \setminus N$. У том смислу можемо, на примјер, дефинисати једнакост скоро свуда или конвергенцију скоро свуда.

Дефиниција 1.14 *Нека је $(X, \mathcal{M})$ простор са σ-алгебром и (Y, τ) тополошки простор. Функција $f : X \to Y$ (или $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \tau)$) је мјерљива ако и само ако је $f^{-1}[\omega] \in \mathcal{M}$, за свако $\omega \in \tau$.*

На скуповима $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ подразумијевамо Лебегове σ-алгебре и Лебегове мјере, које су σ-коначне и комплетне мјере.

1.3 Лебегов интеграл, L^p простори

Нека је $(X, \mathcal{M}, \mu)$ простор са σ-коначном, комплетном мјером μ, што и надаље подразумијевамо.

Са $L^1(\mu)$ обиљежавамо скуп свих реалних мјерљивих функција, $f : X \to \mathbb{R}$, за које важи

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

На скупу $L^1(\mu)$ можемо увести релацију еквиваленције $\sim$: За $f, g \in L^1(\mu)$ је

$$f \sim g \text{ ако и само ако } f = g \text{ с.с.}$$

Тада можемо дефинисати и класе еквиваленције те релације. За $f \in L^1(\mu)$ је

$$[f]_\sim = \left\{ g \in L^1(\mu) : f = g \text{ с.с. } \right\}.$$

Одговарајући фактор простор обиљежавамо са $L^1(X)$. На њему је дефинисана векторска структура, за $[f]_\sim, [g]_\sim \in L^1(X)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ је

$$[f + g]_\sim = [f]_\sim + [g]_\sim, \quad [\lambda f]_\sim = \lambda [f]_\sim,$$

гдје подразумијевамо уобичајене операције сабирања функција и множења функције реалним бројем. Пресликавање $\| \cdot \|_1 : L^1(X) \to [0, \infty)$,

$$\|[f]_{\sim}\|_1 = \int_X |f| d\mu, [f]_{\sim} \in L^1(X),$$

је добро-дефинисано, јер класу релације еквиваленције чине функције једнаке скоро свуда.

Елеменат $[f]_{\sim}$ можемо означавати са f, водећи рачуна о томе да се ради о класи функција једнаких скоро свуда (идентификоване су све функције једнаке скоро свуда). У том контексту фактор простор можемо идентификовати са почетним простором $L^1(\mu)$ и звати га простор Лебег-интеграбилних функција (у ком су претходно идентификоване све функције једнаке скоро свуда). Уз претходно наведене претпоставке и узимајући у обзир идентификацију скоро свуда једнаких функција (на начин који је описан за $L^1(\mu)$) дајемо наредне дефиниције.

Дефиниција 1.15 *За $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$, простор $L^p(X)$ је скуп реалних мјерљивих функција $f : X \to \mathbb{R}$ за које важи*

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

и у којем идентификујемо функције једнаке скоро свуда. Другачије записано,

$$L^p(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ је мјерљива и } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Дефиниција 1.16 *Простор есенцијално ограничених функција, у ознаци $L^\infty(X)$, је скуп реалних мјерљивих функција $f : X \to \mathbb{R}$ за које важи да постоје $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ и $C > 0$, тако да је*

$$|f(x)| \leq C, \text{ за све } x \in X \backslash A$$

и у којем идентификујемо функције једнаке скоро свуда. Другачије записано,

$$L^\infty(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ је мјерљива,} \\ \text{постоје } C > 0 \text{ и } A \in \mathcal{M}, \mu(A) = 0, \text{ тако да је} \\ |f(x)| \leq C, \text{ за све } x \in X \backslash A \end{array} \right. .$$

Са уобичајеним операцијама сабирања функција и множења функције реалним бројем $L^p(X)$ је реалан векторски простор, за свако $1 \leq p \leq \infty$. У наредним тврђењима представићемо и норме на овим просторима.

Лема 1.17 *Нека је $1 \leq p < \infty$. Пресликавање $\|\cdot\|_p : L^p(X) \to [0, \infty)$,*

$$\|f\|_p = \left[\int_X |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}}, f \in L^p(X),$$

је норма на $L^p(X)$.

Лема 1.18 *Пресликавање $\|\cdot\|_\infty : L^\infty(X) \to [0, \infty)$,*

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > C\}) = 0\}, f \in L^\infty(X),$$

је норма на $L^\infty(X)$.

Теорема 1.19 *За свако* $1 \leq p \leq \infty$ *простор* $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ *је Банахов.*

Користићемо и наредну пропозицију:

Пропозиција 1.20 *У простору* $L^p(X)$ *важе:*
а) Хелдерова неједнакост

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, f \in L^p(X), g \in L^q(X)$$

гдје је $1 \leq p \leq \infty$ *и* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
б) Коши-Шварцова неједнакост

$$\left| \int_X fg d\mu \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2, f, g \in L^2(X)$$

в) Неједнакост Минковског

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, f, g \in L^p(X)$$

гдје је $1 \leq p \leq \infty$.

Функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ је Лебег интеграбилна ако је мјерљива и

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty.$$

Функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ је Лебег интеграбилна ако су њени реални и имагинарни део Лебег интеграбилни. Тада је

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Im} f(x) dx.$$

Простор свих Лебег интеграбилних функција означавамо са $L^1(\mathbb{R}^n)$. То је векторски простор на ком дефинишемо норму

$$\|f\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx,$$

при чему идентификујемо функције које се разликују на скупу мјере нула. Са овако уведеном нормом простор $L^1(\mathbb{R}^n)$ је Банахов. Аналогно дефинишемо просторе $L^p(\mathbb{R}^n)$ за $2 \leq p \leq \infty$, као и одговарајуће норме.

Простор $L^2(\mathbb{R}^n)$ је Хилбертов. Унутрашњи производ је дат са

$$(f, g)_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dx$$

за све реалне $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Такође може се показати да важи:

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n), \|g\|_{p'} = 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dx \right|, \tag{1.1}$$

гдје је $1 \leq p' \leq \infty$ такво да важи $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Такође, имамо сљедећу лему која нам говори о односу $L^p(\mathbb{R}^n)$ простора са простором непрекидних и ограничених функција на $\mathbb{R}^n$:

Лема 1.21 *Нека је $1 \leq p < \infty$. Онда простор $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ је густ у $L^p(\mathbb{R}^n)$, тј. за свако $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ постоји неки низ $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), k \in \mathbb{N}$, тако да $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_p = 0$.*

Сада наводимо важне теореме.

Теорема 1.22 *(Лебегова теорема о доминантној конвергенцији) Нека је $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ низ функција у $L^1(\mathbb{R}^n)$ тако да је $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ скоро свуда и $|f_k(x)| \leq g(x)$ скоро свуда за неку функцију $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тада $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ і*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Примјеном Лебегове теореме о доминантној конвергенцији може се показати сљедећа теорема.

Теорема 1.23 *Нека је $U \subset \mathbb{R}^m$ отворен скуп. Нека је $f : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{C}$ функција која задовољава сљедеће услове:*

1. *за свако $x \in \mathbb{R}^n$ функција $t \mapsto f(x,t)$ је диференцијабилна на U,*
2. *за свако $t \in U$ функција $x \mapsto f(x,t)$ је интеграбилна на $\mathbb{R}^n$;*
3. *постоји $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$ тако да је $\partial_t |f(x,t)| \leq F(x)$ за скоро све $x \in \mathbb{R}^n$.*

Тада је функција

$$U \ni t \mapsto g(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)dx \in \mathbb{C}$$

диференцијабилна функција над U и за свако $t \in U$

$$g'(t) := \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t f(x,t)dx$$

Наведимо и специјалну форму Фубинијеве теореме, која ће се користити у наставку.

Теорема 1.24 *Нека су $X \subset \mathbb{R}^m$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$ Лебег мјерљиви скупови.*

1. *Нека $f \in L^1(X \times Y)$. Тада функције*

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)dy, \quad y \mapsto \int_X f(x,y)dx$$

дефинишу интеграбилне функције на X и Y редом и важе једнакости

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)dy \right) dx = \int_{X\times Y} f(x,y)d(x,y) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)dx \right) dy.$$

2. *Ако је f Лебег мјерљива на $X \times Y$, онда су функције*

$$x \mapsto \int_Y |f(x,y)|dy, \quad y \mapsto \int_X |f(x,y)|dx$$

Лебег мјерљиве на X и Y редом и важе једнакости

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|dy \right) dx = \int_{X\times Y} |f(x,y)|d(x,y) = \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|dx \right) dy.$$

За $U \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп дефинишемо векторски простор $L^p_{loc}(U) = \{f : U \to \mathbb{K}$ мјерљива $f|_K \in L^p(K)$ за сваки $K \subset U$ компактан$\}$.

Важе и наредна тврђења.

Теорема 1.25 *(Основна теорема варијационог рачуна) Нека је $U \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп и нека је $f \in L^1_{loc}(U)$ функција таква да је*

$$\int_U f(x)\varphi(x)dx = 0 \text{ за све } \varphi \in C_0^\infty(U).$$

Тада је $f(x) = 0$ за скоро све $x \in U$.

Уводимо ознаку $\langle x \rangle = \left(1 + \|x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ за $x \in \mathbb{R}^n$ („јапанска заграда"). Важи сљедећа лема.

Лема 1.26 *Нека је $s > n$. Тада $\langle x \rangle^{-s} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $(1 + \|x\|)^{-s} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Глава 2

Фуријеова трансформација и Шварцов простор

У овој глави уводимо Фуријеову трансформацију, која је заједно са простором брзо-опадајућих функција, тј. Шварцовим простором, један од кључних појмова за увођење псеудо-диференцијалних оператора. Као важнија тврдња, издваја се то, да је Фуријеова трансформација када слика Шварцов простор у самог себе, заправо линеарни изоморфизам. Такође, видјећемо да је Шварцов простор густ у L^p за $1 \leq p < \infty$. Бавићемо се и простором темперираних дистрибуција који је заправо дуал Шварцовог простора.

2.1 Фуријеова трансформација

Фуријеова трансформација је корисна за анализирање функција на $\mathbb{R}^n$ као и за рјешавање линеарних парцијалних дифиеренцијалних једначина на $\mathbb{R}^n$. Нека је $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, Фуријеову трансформацију од f дефинишемо са:

$$\hat{f}(\xi) := \mathcal{F}[f](\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx \tag{2.1}$$

за $\xi \in \mathbb{R}^n$. Како је $\left|e^{-ix\cdot\xi} f(x)\right| = |f(x)|$ за свако $\xi \in \mathbb{R}^n$, важи да $e^{-ix\cdot\xi} f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ па је претходна једначина добро дефинисана. Оператор $\mathcal{F}$ се зове Фуријеова трансформација.

Присјетимо се ознаке $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ која означава простор свих непрекидних и ограничених функција на $\mathbb{R}^n$. Сљедећа теорема описује важне особине Фуријеове трансформације:

Теорема 2.1 *1.* $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_b^0(\mathbb{R}^n)$ *је линеарно пресликавање такво да важи*

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{C_b^0(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

2. Ако је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *непрекидно-диференцијабилна функција таква да* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *и* $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *онда*

$$\mathcal{F}\left[\partial_{x_j} f\right] = i\xi_j \mathcal{F}[f] = i\xi_j \hat{f} \tag{2.2}$$

3. *Ако* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *тако да* $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, онда је* $\hat{f}(\xi)$ *парцијално-диференцијабилна за свако* ξ_j *и важи*

$$\partial_{\xi_j} \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}\left[-i x_j f(x)\right] \tag{2.3}$$

4. *Нека је* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *и нека* $(\tau_y f)(x) := f(x+y), y \in \mathbb{R}^n$ *ожначава транслацију функције* f *за* y*. Тада* $\mathcal{F}[\tau_y f](\xi) = e^{iy\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$ *за свако* $\xi \in \mathbb{R}^n$*.*

5. *Нека је* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *и нека* $(\rho_\varepsilon f)(x) := f(\varepsilon x), \varepsilon > 0$*, ожначава ротацију* f *за* ε*. Тада*

$$\mathcal{F}[\rho_\varepsilon f](\xi) = \varepsilon^{-n}\hat{f}(\xi/\varepsilon) = \varepsilon^{-n}\left(\rho_{\varepsilon^{-1}}\hat{f}\right)(\xi)$$

Доказ. Видјети [1], Теорема 2.1. □

Како знамо да важи

$$D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j}, \quad D_x = (D_{x_1}, \ldots, D_{x_n})$$

тада једначина из 2. ставке претходне теореме је еквивалентна са

$$\mathcal{F}\left[D_{x_j} f\right] = \xi_j \mathcal{F}[f] = \xi_j \hat{f}.$$

Штавише, ако посматрамо линеарни диференцијални оператор P са константним коефицијентима, нпр.

$$Pf = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha D_x f$$

гдје су $c_\alpha \in \mathbb{C}$, тада важи

$$\mathcal{F}[Pf] = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \xi^\alpha \hat{f}$$

Стога примјена линеарног диференцијалног оператора P на f одговара множењу $\hat{f}$ са полиномом

$$p(\xi) := \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \xi^\alpha$$

Функција $p(\xi)$ назива се симбол линеарног диференцијалног оператора P. Штавише, пишемо $P = p(D_x)$.

Напомена 2.2 *Ако* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *је непрекидно-диференцијабилна функција и ако је* $\partial_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *за свако* $j = 1, \ldots, n$*, тада су* $\hat{f}(\xi)$ *и* $\xi_j \hat{f}(\xi)$ *ограничене функције. Слиједи да*

$$(1+|\xi|)|\hat{f}(\xi)| \leq C \quad \Leftrightarrow \quad |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{1+|\xi|}$$

што значи да се $\hat{f}(\xi)$ *понаша као* $|\xi|^{-1}$ *када* $|\xi| \to \infty$*.*

Општије, ако је $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ тако да $\partial_x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ за свако $|\alpha| \leq k$, онда се може показати да важи

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{(1+|\xi|)^k}$$

Укртко: Диференцијабилност f имплицира полиномно опадање $\hat{f}$ када $|\xi| \to \infty$. С друге стране, ако је $(1+|x|)^k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ за неко $k \in \mathbb{N}$, примјеном Теореме 2.1 ставка 3. можемо сукцесивним поступком доћи до закључка да $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Слиједи да брже опадање $f(x)$ када $|x| \to \infty$ даје већу диференцијабилност $\hat{f}$.

Коначно, конволуција двије функције $f \in L^1(\mathbb{R}^n), g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, гдје је $1 \leq p \leq \infty$, је дефинисана са

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \quad \text{за скоро свако } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

Користећи Фубинијеву теорему може се показати да $(f*g)(x)$ постоји за скоро све $x \in \mathbb{R}^n$ и

$$\|f*g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ за свако } f \in L^1(\mathbb{R}^n), g \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{2.5}$$

чији доказ се може наћи у [7].

За конволуције и Фуријеову трансформацију имамо сљедеће правило:

Лема 2.3 *Нека су $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, онда*

$$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \mathcal{F}[f*g](\xi) \quad \text{за све } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Доказ. Прије свега, $f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ у односу на (x,y) пошто

$$\begin{aligned}\|f*g\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|dydx &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|f(z)g(y)|d(y,z)\\ &= \|f\|_1\|g\|_1.\end{aligned}$$

према Фубинијевој теореми и користећи смјену промјенљивих. Стога

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f*g](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x-y)g(y)dydx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\left(\tau_{-y}f\right)(x)dx\right)g(y)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi}\hat{f}(\xi)g(y)dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi),\end{aligned}$$

гдје смо користили Фубинијеву теорему и четврту особину теореме 2.1. □

2.2 Простор брзо-опадајућих функција $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Простор брзо-опадајућих, глатких функција је нарочито занимљив јер се на њему Фуријеова трасформација понаша као изоморфизам. Мотивација за дефинисање оваквог простора је сљедећи разлог:

Нека је $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тада $\partial_x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ за свако $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Као што смо видјели у напомени 2.2, $\hat{f}(\xi)$ опада брже од $(1+|x|)^{-k}$ за свако $k \in \mathbb{N}$. Штавише, $(1+|x|)^k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ за свако $k \in \mathbb{N}$. Слиједи да $\hat{f} \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ за свако $k \in \mathbb{N}$, тј. $\hat{f} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{k=1}^\infty C_b^k(\mathbb{R}^n)$. Али може се показати да $\hat{f}(\xi)$ нема компактан носач ако $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ осим у тривијалном случају када је $f \equiv 0$. Ако $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, онда $\hat{f}$ припада сљедећем простору функција.

Дефиниција 2.4 *Простор $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ брзо-опадајућих глатких функција је скуп свих глатких функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таквих да за свако $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ и $N \in \mathbb{N}_0$, постоји константа $C_{\alpha,N}$ тако да*

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \leq C_{\alpha,N}(1+|x|)^{-N}, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

Ако $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $m \in \mathbb{N}$, дефинишемо семи-норму:

$$|f|_{m,\mathcal{S}} := \sup_{|\alpha|+|\beta|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial_x^\beta f(x)\right|.$$

Простор $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ такође зовемо простором Шварцових функција.

Очигледно, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Инклузија је стриктна јер $f(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Важи и да $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ако $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, онда $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Штавише, $x^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ за свако $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ и $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ово слиједи из сљедеће општије леме:

Лема 2.5 *Нека је $C_{\mathrm{poly}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ скуп свих глатких полиномно-ограничених функција, тј. скуп свих глатких функција $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ тако да за свако $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ постоји $m_\alpha \in \mathbb{N}_0$ и $C_\alpha > 0$ са особином*

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \leq C_\alpha(1+|x|)^{m_\alpha} \quad \text{за свако } x \in \mathbb{R}^n.$$

Тада за свако $f \in C_{poly}^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ важи да $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Доказ. Претпоставимо да $f \in C_{poly}^\infty$ и $g \in S(\mathbb{R}^n)$. Из Лајбницове формуле користећи претпоставке теореме слиједи да је

$$\begin{aligned}
\left|x^\beta \partial_x^\alpha (fg)(x)\right| &= \left|x^\beta\right| \left|\sum_{\gamma\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \left(\partial_x^\gamma f(x)\right) \left(\partial_x^{\alpha-\gamma} g(x)\right)\right| \\
&\leq |x|^{|\beta|} \sum_{\gamma\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} C_\gamma (1+|x|)^{m_\gamma} C_{\alpha,N}(1+|x|)^{-N} \\
&\leq C|x|^{|\beta|} \frac{1}{(1+|x|)^N}(1+|x|)^M \leq C\frac{(1+|x|)^{M+|\beta|}}{(1+|x|)^N}
\end{aligned}$$

гдје је $M = \max\{m_\gamma : \gamma \leq \alpha\}$. Како добијени израз важи за све $N \in \mathbb{N}_0$, за дато $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ увијек постоји N тако да је $M + |\beta| \leq N$. Стога, добијени израз је коначан. $\square$

Такође имамо да важи:

Теорема 2.6 *Нека је $1 \leq p \leq \infty$. Тада је $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Доказ. Нека је $f \in \mathcal{S}$. Знамо да је то глатка функција и за свако $m \in \mathbb{N}_0$ и $k \in \mathbb{N}_0^n$ постоји константа $C_{m,k} > 0$ тако да

$$|t|^m \left|D^k f(t)\right| \leq C_{m,k}$$

У суштини, за $m = 0, k = (0, \cdots, 0), |f(t)| \leq C_{0,0}$, па $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Сада, нека је $1 \leq p < \infty$. Запишмо

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p dt = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(t)|^p \left(1 + |t|^N\right)^p}{(1 + |t|^N)^p} dt$$

за неко $N \in \mathbb{N}$. Обратимо пажњу да се бројилац може ограничити на сљедећи начин:

$$|f(t)|^p \left(1 + |t|^N\right)^p = \left[|f(t)| + |t|^N |f(t)|\right]^p \leq (C_{0,0} + C_{N,0})^p < \infty.$$

Означимо са $C = (C_{0,0} + C_{N,0})^p$. Онда,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p dt \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |t|^N)^p} dt. \tag{2.7}$$

Дакле, морамо провјерити да ли је горњи десни интеграл коначан. Промјеном поларних координата можемо писати

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |t|^N)^p} dt &= \mu\left(S^{n-1}\right) \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1 + r^N)^p} dr \\ &\leq \mu\left(S^{n-1}\right) \left(\int_0^1 r^{n-1} dr + \int_1^\infty \frac{dr}{r^{Np-n+1}}\right) \end{aligned}$$

гдје је μ мјера сфере S^{n-1}. Други интеграл у (2.7) ће бити коначан ако $Np - n + 1 > 1$, или еквивалентно, $N > n/p$. Дакле, бирајући N као што је наведено, имамо да $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Напомена 2.7 *На први поглед може бити природније за употребу*

$$|f|'_{m,\mathcal{S}} := \sup_{k+|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^k |\partial^\alpha f(x)|$$

као семи-нпрма на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ будући да је у ближој вези са неједнакошћу (2.6). Али дефиниција $|\cdot|_{m,\mathcal{S}}$ је погоднија када се радим са Фуријеовом трансформацијом што ће бити показано у сљедећој леми. Штавише, није битно коју семи-норму користимо, да ли $|\cdot|_{m,\mathcal{S}}$ или $|\cdot|'_{m,\mathcal{S}}$, јер су ове двије фамилије семи-норми еквивалентне. За свако $m \in \mathbb{N}_0$ постоји $k(m) \in \mathbb{N}_0$ тако да

$$|f|'_{m,\mathcal{S}} \leq C_m |f|_{k(m),\mathcal{S}} \quad \text{и} \quad |f|_{m,\mathcal{S}} \leq C'_m |f|'_{k(m),\mathcal{S}}$$

за свако $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Такође имамо још један низ семи-норми еквивалентан полазним.

Королар 2.8 *Нека*

$$|u|''_{k,\mathcal{S}} := \sup_{|\alpha|+|\beta|\le k} \left\| x^\alpha D_x^\beta u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

за $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), k \in \mathbb{N}_0$. *Онда је* $|\cdot|''_{k,\mathcal{S}}, k \in \mathbb{N}$ *опадајући низ семи-норми над* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *који је еквивалентан низу семи-норми* $|\cdot|_{k,\mathcal{S}}$ *дефинисаном раније. Прецизније,*

$$|u|''_{k,\mathcal{S}} \le C_k |u|_{k+2n,\mathcal{S}} \quad u \quad |u|_{k,\mathcal{S}} \le C_k |u|''_{k+2n,\mathcal{S}}$$

за све $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *и* $k \in \mathbb{N}_0$.

Коначно, напоменимо да $(1+|x|)$ у неједнакости (2.6) можемо замијенити са $\langle x \rangle = \left(1+|x|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ јер важи

$$\langle x \rangle \le (1+|x|) \le \sqrt{2}\langle x \rangle$$

Сада долазимо до кључног тврђења везаног за простор $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Лема 2.9 $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *је линеарно пресликавање. Штавише, за свако* $m \in \mathbb{N}_0$ *постоји неко* $C_m > 0$ *такво да*

$$|\hat{f}|_{m,\mathcal{S}} \le C_m |f|_{m+n+1,\mathcal{S}} \quad \text{за свако } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

тј. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *је ограничено.*

Доказ. Као прво, ако $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ онда важи

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-1} \left((1+|x|)^{n+1}|f(x)|\right) dx \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-1} dx |f|_{n+1,\mathcal{S}} = C|f|_{n+1,\mathcal{S}} \end{aligned}$$

гдје C зависи само од димензије n. Због тога имамо имамо

$$|\hat{f}|_{0,\mathcal{S}} = \|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1 \le C|f|_{n+1,\mathcal{S}} \tag{2.8}$$

из теореме 2.1 ставке 1. и претходне процјене. Због теореме 2.1 става 2. односно 3. важи

$$\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}\left[D_x^\alpha \left(x^\beta f(x)\right)\right]$$

Слиједи

$$\left\| \xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{f} \right\|_\infty \le C \left| D_x^\alpha \left(x^\beta f(x)\right) \right|_{n+1,\mathcal{S}}$$

из (2.8) . Користећи Лајбницову формулу имамо

$$D_x^\alpha \left(x^\beta f(x)\right) = \sum_{\gamma \le \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \left(D_x^\gamma x^\beta\right) \left(D_x^{\alpha-\gamma} f(x)\right).$$

Пошто је $D_x^\gamma x^\beta$ полином мањег степена од $|\beta|$,

$$\left|D_x^\alpha\left(x^\beta f(x)\right)\right|_{n+1,\mathcal{S}} \leq C_{\alpha,\beta}|f|_{|\alpha|+|\beta|+n+1}.$$

Кориштењем процјена и узимањем супремума $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$ заједно са $|\alpha|+|\beta|\leq m$, коначно закључујемо да

$$|\hat{f}|_{m,\mathcal{S}} \leq C_m|f|_{m+n+1,\mathcal{S}}$$

за произвољно $m\in\mathbb{N}_0$ гдје C_m зависи само од n и m. Слиједи $\mathcal{F}[f]\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ за свако $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Погледајмо сада један примјер.

Примјер 2.10 *Нека је $f(x)=e^{-|x|^2/2}, x\in\mathbb{R}^n$. Тада је $\hat{f}(\xi)=(2\pi)^{n/2}e^{-|\xi|^2/2}$.*

Доказ. *Како је $f(x)=e^{-x_1^2/2}\cdots e^{-x_n^2/2}$ и $e^{-ix\cdot\xi}=e^{-ix_1\xi_1}\cdots e^{-ix_n\xi_n}$, имамо*

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1\xi_1}e^{-x_1^2/2}dx_1\cdots\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_n\xi_n}e^{-x_n^2/2}dx_n=\hat{g}(\xi_1)\cdots\hat{g}(\xi_n)$$

гдје је $g(x)=e^{-x^2/2}, x\in\mathbb{R}$. Стога довољно је размотрити случај $n=1$.

Из теореме 2.1 став 2. имамо де је $\hat{g}(\xi)$ непрекидно-диференцијабилно и $\hat{g}'(\xi)=\mathcal{F}[-ixg(x)]$. Штавише, $-xg(x)=\frac{d}{dx}e^{-x^2/2}=g'(x)$. Такође, користећи поново Теорему 2.1 став 2. закључујемо

$$\hat{g}'(\xi)=i\mathcal{F}\left[g'(x)\right]=-\xi\hat{g}(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}$$

и $\hat{g}(0)=\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}$. Слиједи да је $\hat{g}$ је једнозначно одређен датим почетним проблемом, који има јединствено решење $\hat{g}(\xi)=\sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}$. □

2.3 Инверзна Фуријеова трансформација и Планшерелова теорема

У наставку ћемо показати да је Фуријеова трансформација $\mathcal{F}:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ инвертибилно пресликавање и да је њено инверзно пресликавање дато са

$$\check{g}(x):=\mathcal{F}^{-1}[g](x):=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}g(\xi)d\xi$$

добро-дефинисано за свако $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{F}^{-1}$ називамо инверзном Фуријеовом трансформацијом. Примијетимо да важи

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x)=(2\pi)^{-n}\mathcal{F}[g](-x). \tag{2.9}$$

Некада ћемо писати $\mathcal{F}^{-1}_{\xi\mapsto x}[g]$ да би се означили да се узима инверзна Фуријеова трансформација у односу на променљиву ξ и да инверзна Фуријеова трансформација зависи од x.

Ако је $f(x)=e^{-|x|^2/2}$ функција о којој се говори у примјеру 2.10 онда

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\xi)]=(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}\left[e^{-|\xi|^2/2}\right](-x)=e^{-|x|^2/2}=f(x).$$

Дакле, $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f$.

Долазимо до јако лијепог тврђења, које је допуна већ доказане леме 2.9.

Лема 2.11 *(Инверзна формула). Нека је $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тада $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)$ за свако $x \in \mathbb{R}^n$. У суштини, $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ је линеарни изоморфизам.*

Доказ. Као прво,

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} f(y) dy \right) d\xi.$$

Пошто $e^{i(x-y)\cdot\xi} f(y) \notin L^1(\mathbb{R}^{2n})$ по параметру (y, ξ), не можемо примијенити Фубинијеву теорему директно. Стога уводимо помоћну функцију $\psi_\varepsilon(\xi) := e^{-\varepsilon^2|\xi|^2/2}, \varepsilon > 0$, што нам обезбјеђује апсолутну интеграбилност. Пошто $\lim_{\varepsilon\to 0} \psi_\varepsilon(\xi) = 1$ за свако $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, користећи Лебегову теорему доминантне конвергенције и Фубинијеву теорему добијамо

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} \psi_\varepsilon(\xi) f(y) dy \right) d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} e^{-\varepsilon^2|\xi|^2} f(y) d(y, \xi).
\end{aligned}$$

Користећи смјену $\xi = \eta/\varepsilon$ и $y = x + \varepsilon z$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} e^{-\varepsilon^2|\xi|^2/2} f(y) d(y, \xi) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\eta} e^{-|\eta|^2/2} d\eta \right) f(x + \varepsilon z) dz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2/2} f(x + \varepsilon z) dz
\end{aligned}$$

гдје посљедња једнакост слиједи из примјера 2.10. Како је f непрекидно, имамо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2/2} f(x + \varepsilon z) dz = f(x) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2/2} dz = f(x)$$

из Лебегове теореме доминантне конвергенције. Слиједи да $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = f(x)$, што доказује лему. □

Техника убацивања брзо-опадајућег фактора и прелзак на лимес биће нам веома важна приликом описивања осцилаторног интеграла у сљедећој глави.

Теорема 2.12 *(Планшерелова теорема). За свако $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ важи*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \tag{2.10}$$

Специјално,

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

и $\mathcal{F}$ се проширује на линеарни изоморфизам $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$

Доказ. Користећи Фубинијеву теорему, лако се показује да важи

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}[f](\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\overline{\mathcal{F}^{-1}[\hat{g}](x)}dx$$

за свао $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Како из претходне леме имамо да важи $g=\mathcal{F}^{-1}[\hat{g}]$, директно добијамо тражену формулу. Специјално, ако је $f=g$, тада имамо:

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\|\mathcal{F}[f]\|_2^2=\|f\|_2^2.$$

Како је $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ густо у $L^2(\mathbb{R}^n)$ и како важи $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset L^2(\mathbb{R}^n)\,,\mathcal{F}$ се може проширити на ограничен линеарни оператор такав да $\mathcal{F}:L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$. Из (2.9) видимо да исто важи и за $\mathcal{F}^{-1}$. Штавише, $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]=f$ за свако $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ пошто ово важи за све $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, а $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ је густ у $L^2(\mathbb{R}^n)$. □

Напомена 2.13 *Због члана $(2\pi)^{-n}$ у дефиницији инверзне Фуријеове трансформације у (2.10), уводимо уобичајену нотацију коју ћемо користити у наставку*

$$đ\xi:=\frac{d\xi}{(2\pi)^n}$$

Онда је

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}g(\xi)đ\xi$$

и такође

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}đ\xi.$$

Лема 2.14 *(Фуријеови множитељи на $L^2(\mathbb{R}^n)$).*
Неак је $m:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ мјерљива функција. Онда

$$m(D_x)f:=\mathcal{F}^{-1}[m(\xi)\hat{f}(\xi)]\text{ за све }f\in L^2(\mathbb{R}^n)$$

је добро-дефинисан ограничен оператор $m(D_x):L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ ако и само ако $m\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Штавише, $\|m(D_x)\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))}=\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Доказ. Ако $m\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, онда очигледно $m(\xi)\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ за све $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Штавише,

$$\|m(D_x)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\|m(\xi)\hat{f}\|_2\le\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\|m\|_\infty\|\hat{f}\|_2=\|m\|_\infty\|f\|_2.$$

Дакле $m(D_x):L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ је ограничен линеаран оператор и

$$\|m(D_x)\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))}\le\|m\|_\infty$$

За обрнуту импликацију довољно је доказати да је оператор $M:L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)\,,(Mf)(\xi)=m(\xi)f(\xi)$ ограничен ако и само ако $m\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. То је довољно јер важи еквиваленција:

$$m(D_x)f \in L^2(\mathbb{R}^n) \iff \mathcal{F}(m(D_x)f) \in L^2(\mathbb{R}^n) \iff m(\xi)\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \iff (M\hat{f})(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Дакле, ако је $m(D_x) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ограничен линеаран оператор, онда је

$$\mathcal{F}m(D_x)\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

такође ограничен линеаран оператор, гдје

$$\left(\mathcal{F}m(D_x)\mathcal{F}^{-1}g\right)(\xi) = m(\xi)g(\xi) = (Mg)(\xi)$$

за све $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
Штавише,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)h(\xi)d\xi : h \in L^1(\mathbb{R}^n), \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1\right\} \\ &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)||h(\xi)|d\xi : h \in L^1(\mathbb{R}^n), \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1\right\}\end{aligned}$$

за све $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, због (1.1) и

$$\|m(\xi)g(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |m(\xi)|^2|g(\xi)|^2 d\xi \leq \|M\|^2_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Дакле

$$\begin{aligned}\|m\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \left\||m|^2\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{h \in L^1(\mathbb{R}^n) : \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} |m(\xi)|^2|h(\xi)|d\xi \\ &= \sup_{g \in L^2(\mathbb{R}^n) : \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} |m(\xi)|^2|g(\xi)|^2 d\xi \leq \|M\|^2_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))}\end{aligned}$$

гдје смо користили да $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ако и само ако $g(\xi) := |h(\xi)|^{\frac{1}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Дакле $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\|m(D_x)\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \geq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. $\square$

2.4 Темпериране дистрибуције и Фуријеова трансформација

Дефиниција 2.15 *Простор темперираних дистрибуција је* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))'$, *тј. простор линеарних и ограничених функционала* $f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. *Низ* $f_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *конвергира ка* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *ако и само ако*

$$\lim_{k\to\infty}\langle f_k, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle \quad \text{\textit{за свако} } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Овдје $\langle f, \varphi\rangle := f(\varphi), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ означава унутрашњи производ у простору L^2.

Напомена 2.16 *1. Ако је $f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ линеарно пресликавање, онда је по дефиницији f ограничено ако и само ако постоји $m \in \mathbb{N}_0$ и константа $C > 0$ тако да важи*

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq C|\varphi|_{m,\mathcal{S}} \quad \text{за свако } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

2. Ако је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ мјерљива функција таква да $\langle x\rangle^{-N} f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ за неко $N \in \mathbb{N}_0$, онда f природно идентификујемо са темпорираном дистрибуцијом $F_f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ дефинисаном са

$$\langle F_f, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \text{ за свако } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{2.11}$$

Штавише,

$$|\langle F_f, \varphi\rangle| \leq \left\|\langle x\rangle^{-N} f\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} |\varphi|'_{N,\boldsymbol{S}} \leq C \left\|\langle x\rangle^{-N} f\right\|_1 |\varphi|_{N,\mathcal{S}}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

гдје је $|\cdot|'_{N,\mathcal{S}}$ као у напомени 2.7. Напоменимо да је пресликавање $f \mapsto F_f$ инјективно, на основу основне теореме варијационог рачуна.

Дефиниција 2.17 *Нека је $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Тада F називамо регуларном темперираном дистрибуцијом ако постоји неко $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ тако да $\langle x\rangle^{-N} f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ за неко $N \in \mathbb{N}_0$ и $F = F_f$, гдје је F_f као у (2.11).*

У наставку ћемо идентификовати регуларну (темперирану) дистрибуцију $F = F_f$ са мјерљивом функцијом f, што је заправо класа еквиваленције функција које се скоро свуда поклапају као и обично.

Није свака дистрибуција регуларна што показује сљедећи примјер.

Примјер 2.18 *Најпознатија дистрибуција $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ је дефинисана са*

$$\langle \delta_0, \varphi\rangle := \varphi(0) \quad \text{за свако } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

зовемо је још и делта дистрибуција.

Општије,

$$\langle \delta_a, \varphi\rangle := \varphi(a) \text{ за свако } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

дефинише темпорирану дистрибуцију за свако $x \in \mathbb{R}^n$. Покажимо да није регуларна: Претпоставимо супротно, односно да постоји $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, тако да је

$$\langle \delta_a, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Изаберимо $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, гдје је $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ векторски простор свих функција на $\mathbb{R}^n$ чији парцијални изводи свих редова постоје и непрекидни су и чији носач је садржан у неком компактном подскупу од $\mathbb{R}^n$, тако да је $supp(\rho) \subset \overline{B_1(0)}, \rho(0) = 1$ и дефинишимо $\rho_l(x) = \rho(l(x - x_0)), l \in \mathbb{N}_0$. Тада је $supp(\rho_l) \subset \overline{B_{1/l}(x_0)}, \rho_l(x_0) = 1$ (постојање овакве функције слиједи из примјера 3.10 из [4]). Закључујемо да је

$$1 = |\langle \delta_{x_0}, \rho_l\rangle| \leq \int_{B_{1/l}(x_0)} |f(x)| \, |\rho(l(x - x_0))| \, dx \leq \max_{x\in\mathbb{R}^n} |\rho(x)| \int_{B_{1/l}(x_0)} |f(x)|dx$$

.

Међутим, како је $\int_{B_{1/l}(x_0)} |f(x)|dx \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *долазимо до контрадикције. Дакле,* δ_a *није регуларна дистрибуција.*

Сада ћемо дефинисати извод дистрибуције и производ двије дистрибуције.

Дефиниција 2.19 *Нека је* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *Тада је извод дистрибуције* $\partial_x^\alpha f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *од* f *такође дистрибуција дефинисана са*

$$\langle \partial_x^\alpha f, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial_x^\alpha \varphi \rangle \qquad \text{за } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Штавише, ако $g \in C^\infty_{poly}(\mathbb{R}^n)$, *онда производ* $fg \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *је дефинисан са*

$$\langle fg, \varphi \rangle = \langle f, g\varphi \rangle \qquad \text{за свако } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Примјер 2.20 *Нека је* f *Хевисајдова функција, тј.* $f(x) = 1$ *за* $x \geq 0$ *и* $f(x) = 0$ *иначе, тада*

$$\langle f', \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

за све $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. *Слиједи* $f' = \delta_0$ *је делта дистрибуција.*

2.5 Фуријеова трансформација темперираних дистрибуција

Већина операција на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ директно се преноси на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, што такође важи и за Фуријеову трансформацију.

Дефиниција 2.21 *Нека је* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *Фуријеова трансформација* $\mathcal{F}[f]$ *и њена инверзна* $\mathcal{F}^{-1}[f]$ *од* f *се дефинишу како дистрибуције*

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle &:= \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \qquad && \text{за свако } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \\ \left\langle \mathcal{F}^{-1}[f], \varphi \right\rangle &:= \left\langle f, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \right\rangle \qquad && \text{за свако } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Напомена 2.22 *Примијетимо да је дефиниција* $\mathcal{F}$ *на* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *у складу са дефиницијом* $\mathcal{F}$ *на* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *у сљедећем смислу: Ако* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *и* $F_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *је придружена темпорирана дистрибуција због (2.11), онда*

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[F_f], \varphi \rangle = \langle F_f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(\xi)d\xi\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x)dx \\ &= \left\langle F_{\hat{f}}, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

за свако $\varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, *тј.* $\mathcal{F}[F_f] = F_{\hat{f}}$. *Заиста, ова калкулација је мотивација за дефиницију* $\mathcal{F}$ *на* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *Аналогно важи за* $\mathcal{F}^{-1}$.

Пропозиција 2.23 *Фуријеова трансформација $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ је непрекидно линеарно пресликавање. Штавише, $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ је линеарни изоморфизам са инверзом $\mathcal{F}^{-1}$.*

Доказ. Пошто $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ је непрекидан линеарни оператор и

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = (f \circ \mathcal{F})(\varphi)$$

$\mathcal{F}[f] = f \circ \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ је непрекидан линеарни оператор. Штавише, ако $f_k \to f$ у $S'(\mathbb{R}^n)$ када $k \to \infty$, онда

$$\langle \mathcal{F}[f_k], \varphi \rangle = \langle f_k, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle$$

за свако $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Слиједи $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ је непрекидно пресликавање.

Коначно, $\mathcal{F}^{-1}$ има иста својства као $\mathcal{F}$ и очигледно $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$ за свако $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ □

Примјер 2.24 *Фуријеова трансформација делта дистрибуције δ_0 може се једноставно израчунати:*

$$\langle \mathcal{F}[\delta_0], \varphi \rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

за свако $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Слиједи да је $\mathcal{F}[\delta] = 1$.

2.6 Конволуција на $\mathcal{S}'$

Сада ћемо дефинисати конволуцију за $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. У ту сврху напомињемо да важи

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)\varphi(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (g * f)(x)\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\varphi(x)dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\varphi(x)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\tilde{g} * \varphi)(y)dy
\end{aligned}$$

за све $f, g, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ због Фубинијеве теореме, гдје $\tilde{g}(x) = g(-x)$ за све $x \in \mathbb{R}^n$. Исти закључак важи и ако $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ са $\langle x \rangle^{-N} f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ за неко $N \in \mathbb{N}$. Стога дефинишемо:

Дефиниција 2.25 *Нека су $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, и $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Онда конволуција $f * g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ од f и g је дефинисана са*

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{g} * \varphi \rangle \quad \text{за све } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

гдје је $\tilde{g}(x) = g(-x)$ за све $x \in \mathbb{R}^n$.

Напомена 2.26 *1. Ако је f регуларна темперирана дистрибуција, онда горњи прорачун показује да се дефиниција $f * g$ у смислу дефиниције 2.25 поклапа са*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \quad \text{за све } x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Може се показати да је $f * g$ регуларна темперирана дистрибуција таква да $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и дата са

$$(f * g)(x) = \langle f, \tilde{\tau}_x g \rangle \quad \text{за све } x \in \mathbb{R}^n,$$

гдје $\tilde{\tau}_x g(y) = g(y-x)$ за све $y \in \mathbb{R}^n$.

Примјер 2.27 *Нека је δ_0 као у примјеру 2.18. Онда*

$$\langle \delta_0 * g, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \tilde{g} * \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(y-0)\varphi(y)dy$$

за све $g, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Дакле $\delta_0 * g$ је регуларна темпорирана дистрибуција и

$$\delta_0 * g = g \quad \text{за све } g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Као посљедицу имамо наредну лему.

Лема 2.28 *Нека је $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Онда* $\quad \mathcal{F}[f * g] = \hat{f}\hat{g}$.

Глава 3

Псеудо-диференцијални оператори

У овој глави бавићемо се појмом псеудо-диференцијалних оператора, њиховом дефиницијом и основним својствима. Треба напоменути да умјесто посматрања уобичајене Хермандерове класе псеудо-диференцијалних симбола $S^m_{\rho,\delta}$ посматраћемо специјалан случај $S^m_{1,0}$. Поред дефиниције, као најважније поглавље за даљи рад, издвојиће се поглавље о адјунгованом оператору псеудо-диференцијалног оператора, који ће бити, испоставиће се, такође псеудо-диференцијални оператор истог реда као и полазни оператор.

3.1 Симболи и основна својства

Дефиниција 3.1 *Нека су $m \in \mathbb{R}, n, N \in \mathbb{N}$. Тада за $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ са $S^m_{\rho,\delta}\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n\right)$ означавамо векторски простор свих глатких функција $p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таквих да важи*

$$\left|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x p(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \tag{3.1}$$

за све $\alpha \in \mathbb{N}^n_0, \beta \in \mathbb{N}^N_0$, гдје $C_{\alpha,\beta}$ не зависи од $x \in \mathbb{R}^N, \xi \in \mathbb{R}^n$. Функцију p називамо псеудо-диференцијални симбол, а m називамо редом симбола p.

Напомена 3.2 *У претходном тексту, дефинисали смо псеудо-диференцијалне операторе на општији начин, иако ћемо се највећим дијелом рада бавити случајем када је $\rho = 1$ и $\delta = 0$, тј. бавићемо се простором $S^m_{1,0}$. Тада услов (3.1) изгледа:*

$$\left|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x p(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \tag{3.2}$$

На крају овог рада, тј. у посљедњем одјељку, формулисаћемо општије теореме које се односе на произвољно ρ и δ.

Такође, дефинишемо и

$$
\begin{aligned}
S_{1,0}^{\infty}\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n\right) &:= \bigcup_{m\in\mathbb{R}} S_{1,0}^{m}\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n\right) \text{ и} \\
S_{1,0}^{-\infty}\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n\right) &:= \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S_{1,0}^{m}\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n\right).
\end{aligned}
$$

Наравно, укратко записујемо $S_{1,0}^m$ умјесто $S_{1,0}^m\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n\right)$.

Напомена 3.3 *У наставку ћемо се бавити случајем $N = n$.*

Ако је $p \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ симбол, тада са

$$
p(x, D_x) f(x) := \mathrm{OP}(p) f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\hat{f}(\xi) đ\xi \quad \text{за свако } x \in \mathbb{R}^n \tag{3.3}
$$

дефинишемо њему придружен псеудо-диференцијални оператор, гдје је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ одговарајућа функција. Ако $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, онда $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и дакле $p(x,\xi)\hat{f}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ у односу на ξ за свако фиксно $x \in \mathbb{R}^n$ према леми 2.5. Стога интеграл у (3.3) постоји и $p(x, D_x) f$ је добро-дефинисано. У наставку ћемо показати да је $p(x, D_x) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ непрекидно пресликавање. Али прије него што докажемо ову чињеницу, размотрићемо неке примјере и направити нека једноставна запажања.

Примјер 3.4 *Нека је $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x)\xi^\alpha, x, \xi \in \mathbb{R}^n$, полином по ξ реда $m \in \mathbb{N}_0$ са глатким коефицијентима $c_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ за свако $|\alpha| \le m$. Тада $p \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ и*

$$
p(x, D_x) f := \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x) D_x^\alpha f
$$

за свако $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Отуда је сваки линеарни диференцијални оператор са глатким и ограниченим коефицијентима псеудодиференцијални оператор. Посебно Лапласијан $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$ је псеудо-диференцијални оператор са симболом $-|\xi|^2$.

2. *Може се показати да је јапанска заграда $\langle\xi\rangle := \sqrt{1+|\xi|^2}$ псеудо-диференцијални симбол реда 1. Пошто $1+|\xi|^2$ је симбол од $1-\Delta$, његов придружени псеудо-диференцијални оператор*

$$
\langle D_x \rangle f = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \sqrt{1+|\xi|^2}\hat{f}(\xi) đ\xi
$$

може се сматрати квадратним кореном од $1-\Delta$. Укратко: $\langle D_x\rangle = \sqrt{1-\Delta}$. Општије чак важ $\langle\xi\rangle^m \in S_{1,0}^m$ за свако $m \in \mathbb{R}$ и $\langle D_x\rangle^m = (1-\Delta)^{\frac{m}{2}}$.

Дефинишимо низ семи-норми $S_{1,0}^m\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n\right)$, која је на природан начин повезана са фамилијом неједначина (3.2). Нека је

$$
|p|_k^{(m)} := \max_{|\alpha|,|\beta|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^N, \xi\in\mathbb{R}^n} \left|D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi)\right| (1+|\xi|)^{-m+|\alpha|} \tag{3.4}
$$

за свако $k \in \mathbb{N}$. Овдје

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N,\xi\in\mathbb{R}^n}\left|D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi)\right|(1+|\xi|)^{-m+|\alpha|}$$

је најмања константа $C_{\alpha,\beta}$ таква да важи (3.2) за свако $x\in\mathbb{R}^N,\xi\in\mathbb{R}^n$ и фиксирано $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$.

Напоменимо и да није тешко доказати да је $S_{1,0}^m$ заједно са семи-нормама Фрешеов простор, тј. локално-конвексан простор који је комплетан и метризабилан.

Напомена 3.5 *У литератури функција $(1+|\xi|)$ која се појављује у (3.2) најчешће се замјењује са $\langle\xi\rangle=\sqrt{1+|\xi|^2}$. Ово се може урадити без промјене класе симбола јер важи*

$$\sqrt{1+|\xi|^2}\le(1+|\xi|)\le\sqrt{2}\sqrt{1+|\xi|^2}$$

Претходну неједнакост ћемо доказати у леми 4.2. Користећи $\langle\xi\rangle$ умјесто $(1+|\xi|)$, нотација постаје нешто краћа.

Пропозиција 3.6 *Нека је $p_j\in S_{1,0}^{m_j}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n),m_j\in\mathbb{R},j=1,2$ и нека је $p(x,\xi):=p_1(x,\xi)p_2(x,\xi)$ за свако $x,\xi\in\mathbb{R}^n$. Тада $p\in S_{1,0}^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. Штавише, за свако $k\in\mathbb{N}_0$ постоји неко C_k зависно од k и n тако да важи*

$$|p|_k^{(m_1+m_2)}\le C_k\,|p_1|_k^{(m_1)}\,|p_2|_k^{(m_2)}$$

Пропозиција се лако може показати коришћењем Лајбницове формуле.

Један од главних резултата ове главе је управо сљедећа теорема.

Теорема 3.7 *Нека је $p\in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n),m\in\mathbb{R}$ псеудо-диференцијални симбол. Тада*

$$p(x,D_x):\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

је ограничено пресликавање. Прецизније, за свако $k\in\mathbb{N}$ постоји неко $C_k>0$ такво да

$$|p(x,D_x)f|_{k,\mathcal{S}}\le C_k|p|_k^{(m)}|f|_{m+2(n+1)+k,\mathcal{S}}\qquad\text{за свако } f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Доказ. Пошто $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\hat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ због леме 2.9. Онда

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|p(x,D_x)f(x)|&\le\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^{-n-1}\left|\langle\xi\rangle^{-m}p(x,\xi)\right|\left|\langle\xi\rangle^{n+m+1}\hat{f}(\xi)\right|d\xi\\&\le\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^{-n-1}d\xi|p|_0^{(m)}\left\|\langle\xi\rangle^{n+m+1}\hat{f}\right\|_\infty\\&\le C_m|p|_0^{(m)}|\hat{f}|_{m+n+1,\mathcal{S}}\le C|p|_0^{(m)}|f|_{m+2n+2,\mathcal{S}}\end{aligned}\tag{3.5}$$

према леми 2.9 и леми 1.26, гдје C_m зависи само од m и димензије.

Да бисмо процијенили изводе, израчунавамо

$$\begin{aligned}\partial_{x_j}(p(x,D_x)f(x))&=\partial_{x_j}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\hat{f}(\xi)đ\xi\\&=\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)i\xi_j\hat{f}(\xi)đ\xi+\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\partial_{x_j}p(x,\xi)\hat{f}(\xi)đ\xi\\&=p(x,D_x)\left(\partial_{x_j}f\right)(x)+\left(\partial_{x_j}p\right)(x,D_x)f(x),\end{aligned}$$

гдје смо примијенили теорему 1.23 за размјену интеграције и диференцирање. Стога користећи (3.5), гдје прво f замијенимо са $\partial_{x_j} f$ и потом p замијенимо са $\partial_{x_j} p$, добијамо

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\,\partial_{x_j}\left(p\left(x,D_x\right)f(x)\right|\le C\left(|p|_0^{(m)}\left|\partial_{x_j}f\right|_{m+2n+2,\mathcal{S}}+\left|\partial_{x_j}p\right|_0^{(m)}|f|_{m+2n+2,\mathcal{S}}\right)$$

$$\le C|p|_1^{(m)}|f|_{m+2n+3,\mathcal{S}} \tag{3.6}$$

Слично,

$$\begin{aligned} ix_j p\left(x,D_x\right)f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\partial_{\xi_j}e^{ix\cdot\xi}\right)p(x,\xi)\hat{f}(\xi)đ\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\partial_j\hat{f}(\xi)đ\xi+\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\left(\partial_{\xi_j}p\right)(x,\xi)\hat{f}(\xi)đ\xi \\ &= p\left(x,D_x\right)\left(ix_jf(x)\right)+\left(\partial_{\xi_j}p\right)\left(x,D_x\right)f \end{aligned}$$

и стога

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x_jp\left(x,D_x\right)f(x)\right|\le C\left(|p|_0^{(m)}\left|x_jf\right|_{m+2n+2,\mathcal{S}}+\left|\partial_{\xi_j}p\right|_0^{(m-1)}|f|_{m+2n+2,\mathcal{S}}\right)$$

$$\le C|p|_1^{(m)}|f|_{m+2n+3,\mathcal{S}} \tag{3.7}$$

из (3.5), гдје је $\partial_{\xi_j}p(x,\xi)$ реда $m-1$ и $\left|\partial_{\xi_j}p\right|_0^{(m-1)}\le|p|_1^{(m)}$ према дефиницији семи-норми. Користећи (3.6) и (3.7), математичком индукцијом се лако може доказати да

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha\partial_x^\beta p\left(x,D_x\right)f(x)\right|\le C_{\alpha,\beta}|p||_{|\alpha|+|\beta|}^{(m)}|f|_{m+2(n+1)+|\alpha|+|\beta|,\mathcal{S}}$$

за $x\in\mathbb{R}^n$ и за свако $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$. Како важи

$$\left|p\left(x,D_x\right)f\right|_{k,\mathcal{S}}\le C_k|p|_k^{(m)}|f|_{m+2(n+1)+k,\mathcal{S}}$$

то нам управо доказује теорему. □

Коначно, доказујемо сљедећу једноставну, али важну неједнакост.

Лема 3.8 *(Питријева неједнакост). Нека је* $\langle\xi\rangle=\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *баш јапанска заграда коју смо у уводу дефинисали и нека је* $\xi\in\mathbb{R}^n$*. Тада за свако* $s\in\mathbb{R}$ *важи*

$$\langle\xi\rangle^s\le 2^{|s|}\langle\xi-\eta\rangle^{|s|}\langle\eta\rangle^s,\quad \xi,\eta\in\mathbb{R}^n$$

Доказ. Прије свега важи

$$\langle\xi\rangle^2=\left(1+|\xi|^2\right)\le(1+|\xi|)^2\le(1+|\xi|)^2+(1-|\xi|)^2=2\left(1+|\xi|^2\right)$$

Зато, имамо да

$$\langle\xi\rangle\le(1+|\xi|)\le\sqrt{2}\langle\xi\rangle\quad\text{за све }\xi\in\mathbb{R}^n \tag{3.8}$$

У случају $s\ge 0$ неједнакост троугла имплицира

$$1+|\xi| \leq 1+|\xi-\eta|+|\eta| \leq (1+|\xi-\eta|)(1+|\eta|)$$

и дакле важи

$$\langle\xi\rangle^{S} \leq (1+|\xi-\eta|)^{S}(1+|\eta|)^{S} \leq 2^{s}\langle\xi-\eta\rangle^{s}\langle\eta\rangle^{S}$$

из (3.8) за све $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Ако је $s<0$, можемо користити претходну неједнакост са замијењеном улогом ξ и η уз замјену када s са $-s$ да би закључили

$$\langle\eta\rangle^{-s} \leq 2^{-s}\langle\xi-\eta\rangle^{-s}\langle\xi\rangle^{-s}$$

одакле за произвољно s закључујемо да важи

$$\langle\xi\rangle^{s} \leq 2^{|s|}\langle\eta\rangle^{s}\langle\xi-\eta\rangle^{|s|}$$

□

3.2 Композиција псеудо-диференцијалних оператора: мотивација

Због теореме 3.7, композиција два псеудо-диференцијална оператора $p_1(x, D_x)$ и $p_2(x, D_x)$ је добро-дефинисани ограничени оператор

$$p_1(x, D_x)\, p_2(x, D_x) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Поставља се природно питање да ли је овај оператор опет псеудо-диференцијални оператор, тј. да ли постоји симбол $p \in S^{\infty}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ тако да важи

$$p(x, D_x) = p_1(x, D_x)\, p_2(x, D_x)$$

Ако је то случај, интересантно је како је симбол $p(x,\xi)$ повезан са симболима $p_1(x,\xi)$ и $p_2(x,\xi)$.

Понашање псеудодиференцијалних оператора са композицијом је од посебног интереса за рачунање инверза или барем за апроксимацију инверза псеудодиференцијалних оператора.

Израчунајмо сада композицију $p_1(x, D_x)$ и $p_2(x, D_x)$ формално, занемарујући све техничке потешкоће. Најприје,

$$p_1(x, D_x)\, g(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\eta} p_1(x,\eta) g(y)\, dy\, đ\eta$$

и

$$p_2(x, D_x)\, f(x)\big|_{x=y} = \iint e^{i(y-z)\cdot\xi} p_2(y,\xi) f(z)\, dz\, đ\xi$$

Отуда добијамо за $g(y) = p_2(x, D_x)\, f\big|_{x=y}$

$$
\begin{aligned}
&p_1(x, D_x)\, p_2(x, D_x)\, f(x) \\
&= \iint e^{i(x-y)\cdot\eta} p_1(x,\eta) \left(\iint e^{i(y-z)\cdot\xi} p_2(y,\xi) f(z) dz đ\xi \right) dy đ\eta \\
&= \iiint \int e^{i(x-z)\cdot\xi} e^{-i(x-y)\cdot(\xi-\eta)} p_1(x,\eta) p_2(y,\xi) f(z) dy đ\eta dz đ\xi
\end{aligned}
$$

Користећи смјену $x' = y - x$ и $\xi' = \eta - \xi$, добијамо

$$
\begin{aligned}
&p_1(x, D_x)\, p_2(x, D_x)\, f \\
&= \iint e^{i(x-z)\cdot\xi} \left(\iint e^{-ix'\cdot\xi'} p_1(x, \xi+\xi')\, p_2(x+x', \xi)\, dx' đ\xi' \right) f(z) dz đ\xi
\end{aligned}
$$

Отуда формално симбол за $p_1(x, D_x)\, p_2(x, D_x)$ је

$$
(p_1 \# p_2)(x,\xi) := \iint e^{-ix'\cdot\xi'} p_1(x, \xi+\xi')\, p_2(x+x', \xi)\, dx' đ\xi' \tag{3.9}
$$

Али главни проблем је што овај посљедњи интеграл уопште не постоји у класичном смислу. Дефинисаћемо га као такозвани осцилаторни интеграл:

$$
\begin{aligned}
&Os - \iint e^{-ix'\cdot\xi'} p_1(x, \xi+\xi')\, p_2(x+x', \xi)\, dx' đ\xi' \\
&:= \lim_{\varepsilon\to 0} \iint \chi(\varepsilon x', \varepsilon\xi')\, e^{-ix'\cdot\xi'} p_1(x, \xi+\xi')\, p_2(x+x', \xi)\, dx' đ\xi',
\end{aligned}
$$

гдје је $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ са $\chi(0,0) = 1$. У сљедећем одјељку доказујемо да су осцилаторни интеграли добро дефинисани за одговарајуће подинтегралне функције. Штавише, приказаћемо неколико резултата, који ће оправдати наше формалне прорачуне.

3.3 Осцилаторни интеграл

У овом поглављу бавимо се осцилаторним интегралом, којег смо већ дефинисали, неким његовим својствима и кључним питањем када је тај интеграл добро-дефинисан, тј. када лимес у његовој дефиницији конвергира. Такође овај интеграл ћемо дефинисати на ширем простору функција, тј.простору амплитуда. На крају ћемо се дотаћи и Фубинијеве теореме за осцилаторне интеграле.

Дефиниција 3.9 *Простор амплитуда $\mathcal{A}^m_\tau(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $m, \tau \in \mathbb{R}$, је скуп глатких функција $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таквих да*

$$
\left|\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y,\eta)\right| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\eta|)^m (1+|y|)^\tau
$$

униформно за $y, \eta \in \mathbb{R}^n$ за све $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Штавише, нека је

$$
|a|_{\mathcal{A}^m_\tau, k} := \max_{|\alpha|+|\beta|\le k} \sup_{y,\eta\in\mathbb{R}^n} (1+|\eta|)^{-m}(1+|y|)^{-\tau} \left|\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y,\eta)\right|, \quad k \in \mathbb{N}
$$

придружени низ монотоних-растућих семи-норми.

Примијетимо да $S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}^m_0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Сада долазимо до добре-дефинисаности осцилаторног интеграла:

Теорема 3.10 *Нека је $a \in \mathcal{A}^m_\tau(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), m, \tau \in \mathbb{R}$ и нека је $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ тако да $\chi(0,0) = 1$. Тада*

$$Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} a(y,\eta) dy đ\eta := \lim_{\varepsilon\to 0} \iint \chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) e^{-iy\cdot\eta} a(y,\eta) dy đ\eta$$

постоји и једнак је

$$\begin{aligned} &Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} a(y,\eta) dy đ\eta \\ &= \iint e^{-iy\cdot\eta} \langle y\rangle^{-2l'} \langle D_\eta\rangle^{2l'} \left[\langle\eta\rangle^{-2l} \langle D_y\rangle^{2l} a(y,\eta)\right] dy đ\eta, \end{aligned} \tag{3.10}$$

гдје су $l, l' \in \mathbb{N}_0$ одабрани тако да $2l > n+m$ и $2l' > n+\tau$ и подинтегрална функција је у $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Конкретно, дефиниција не зависи од избора χ и

$$|Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} a(y,\eta) dy đ\eta| \leq C_{m,\tau} |a|_{\mathcal{A}^m_\tau, 2(l+l')}, \tag{3.11}$$

гдје је $C_{m,\tau} > 0$ независно од a.

Доказ. Користећи $D^\alpha_y e^{-iy\cdot\eta} = (-\eta)^\alpha e^{-iy\cdot\eta}$ и $D^\beta_\eta e^{-iy\cdot\eta} = (-y)^\beta e^{-iy\cdot\eta}$ за $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n_0$, имао

$$\langle\eta\rangle^{-2l} \langle D_y\rangle^{2l} e^{-iy\cdot\eta} = e^{-iy\cdot\eta} \quad \text{и} \quad \langle y\rangle^{-2l'} \langle D_\eta\rangle^{2l'} e^{-iy\cdot\eta} = e^{-iy\cdot\eta} \tag{3.12}$$

Пошто $\chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ за фиксирано $\varepsilon > 0$, можемо користити парцијалну интеграцију и добити

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &:= \iint \chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) e^{-iy\cdot\eta} a(y,\eta) dy đ\eta \\ &= \iint e^{-iy\cdot\eta} \langle\eta\rangle^{-2l} \langle D_y\rangle^{2l} (\chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) a(y,\eta)) dy đ\eta \\ &= \iint e^{-iy\cdot\eta} \langle y\rangle^{-2l'} \langle D_\eta\rangle^{2l'} \left[\langle\eta\rangle^{-2l} \langle D_y\rangle^{2l} (\chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) a(y,\eta))\right] dy đ\eta \end{aligned}$$

С друге стране, $\{\chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta)\}_{0<\varepsilon<1} \equiv \{\chi_\varepsilon(y,\eta)\}_{0<\varepsilon<1}$ је ограничено у $\mathcal{A}^0_0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) = C^\infty_b(\mathbb{R}^{2n})$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) = 1$ униформно на компактним скуповима и $\lim_{\varepsilon\to 0} \partial^\alpha_y \partial^\beta_\eta \chi_\varepsilon(y,\eta) = 0$ униформно за $(y,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ако $(\alpha,\beta) \neq 0$. Дакле постоје константе $C_{\alpha,\beta}$ независне од $0 < \varepsilon < 1$ и $a \in \mathcal{A}^m_\tau$ тако да

$$\left|\partial^\alpha_y \partial^\beta_\eta (\chi_\varepsilon(y,\eta) a(y,\eta))\right| \leq C_{\alpha,\beta} |a|_{\mathcal{A}^m_\tau, |\alpha|+|\beta|} \langle\eta\rangle^m \langle y\rangle^\tau \tag{3.13}$$

Штавише, пошто $\langle\xi\rangle^s \in S^s_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$,

$$\left|\partial^\alpha_\eta \langle\eta\rangle^s\right| \leq C_{s,\alpha} \langle\eta\rangle^{s-|\alpha|} \tag{3.14}$$

Комбинујући (3.13) и (3.14), постоје константе $C_{l,\alpha}$ независне од $0 < \varepsilon < 1$ тако да

$$\left|\partial_\eta^\alpha \left[\langle\eta\rangle^{-2l} \langle D_y\rangle^{2l} (\chi_\varepsilon(y,\eta)a(y,\eta))\right]\right| \le C_{l,\alpha}|a|_{\mathcal{A}_\tau^m,2l+|\alpha|}\langle\eta\rangle^{m-2l}\langle y\rangle^\tau$$

Сходно томе, постоје константе $C_{l,l'}$ независно од $0<\varepsilon<1$ и a тако да

$$\begin{aligned}&\left|\langle y\rangle^{-2l'} \langle D_\eta\rangle^{2l'} \left[\langle\eta\rangle^{-2l} \langle D_y\rangle^{2l} (\chi_\varepsilon(y,\eta)a(y,\eta))\right]\right| \\ &\qquad \le C_{l,l'}|a|_{\mathcal{A}_\tau^m,2(l+l')}\langle\eta\rangle^{m-2l}\langle y\rangle^{\tau-2l'} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ако сада одаберемо $2l > n+m$ и $2l' > n+\tau$, тада $\langle\eta\rangle^{m-2l}\langle y\rangle^{\tau-2l'} \in L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, због леме 1.26. Отуда Лебегова теорема о доминираној конвергенцији, $\chi(\varepsilon y,\varepsilon\eta)\to_{\varepsilon\to 0} 1$, и $\partial_y^\alpha\partial_\eta^\beta\chi(\varepsilon y,\varepsilon\eta)\to_{\varepsilon\to 0} 0$ за $(\alpha,\beta)\neq 0$ подразумијева

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \iint e^{-iy\cdot\eta}\langle y\rangle^{-2l'} \langle D_\eta\rangle^{2l'} \left[\langle\eta\rangle^{-2l} \langle D_y\rangle^{2l} a(y,\eta)\right] dy đ\eta$$

Дакле, граница у дефиницији осцилаторног интеграла постоји и важи (3.10). Штавише, представљање (3.10) показује да дефиниција не зависи од избора χ. Коначно, пуштајући да $\varepsilon\to 0$ у (3.15), тада нам (3.11) слиједи из (3.10) и леме 1.26. $\square$

Посљедица 3.11 *Нека је $a_j\in\mathcal{A}_\tau^m(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ ограничен низ тако да*

$$\lim_{j\to\infty}\partial_y^\alpha\partial_\eta^\beta a_j(y,\eta) = \partial_y^\alpha\partial_\eta^\beta a(y,\eta) \qquad \text{за свако } y,\eta\in\mathbb{R}^n$$

за све $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$ и неко $a\in\mathcal{A}_\tau^m(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. Тада

$$\lim_{j\to\infty} Os-\iint e^{-iy\cdot\eta}a_j(y,\eta)dyđ\eta = Os-\iint e^{-iy\cdot\eta}a(y,\eta)dyđ\eta$$

Доказ. Претпоставке имплицирају да

$$\begin{aligned}&\lim_{j\to\infty}\langle y\rangle^{-2l'} \langle D_\eta\rangle^{2l'} \left[\langle\eta\rangle^{-2l} \langle D_y\rangle^{2l} a_j(y,\eta)\right]\\ &= \langle y\rangle^{-2l'} \langle D_\eta\rangle^{2l'} \left[\langle\eta\rangle^{-2l} \langle D_y\rangle^{2l} a(y,\eta)\right]\end{aligned}$$

за све $y,\eta\in\mathbb{R}^n$. Штавише, (3.15) имплицира

$$\begin{aligned}&\left|\langle y\rangle^{-2l'} \langle D_\eta\rangle^{2l'} \left[\langle\eta\rangle^{-2l} \langle D_y\rangle^{2l} (\chi(\varepsilon y,\varepsilon\eta)a_j(y,\varepsilon))\right]\right|\\ &\le C_{l,l'}\left|a_j\right|_{\mathcal{A}_\tau^m,2(l+l')}\langle\eta\rangle^{m-2l}\langle y\rangle^{\tau-2l'}.\end{aligned}$$

Пошто је низ a_j ограничен у $\mathcal{A}_\tau^m$, $|a_j|_{\mathcal{A}_\tau^m,2(l+l')}\le C$ униформно за $j\in\mathbb{N}$. Отуда репрезентација (3.10) и Лебегова теорема о доминираној конвергенцији имплицирају тврдњу посљедице. $\square$

Примјер 3.12 *Нека је $u\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тада $a(y,\eta)=e^{ix\cdot\eta}u(y)\in\mathcal{A}_0^0(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ и*

$$Os-\iint e^{i(x-y)\cdot\eta}u(y)dyđ\eta$$

је добро дефинисан. Осцилаторни интеграл можемо израчунати експлицитно: Ако изаберемо $\chi(y,\eta)=\psi(y)\psi(\eta)$, гдје $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ са $\psi(0)=1$, онда

$$
\begin{aligned}
Os - \iint e^{i(x-y)\cdot\eta} u(y) dy đ\eta &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \psi(\varepsilon y) u(y) \left(\int e^{i(x-y)\cdot\eta} \psi(\varepsilon\eta) đ\eta \right) dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \psi(\varepsilon y) u(y) \varepsilon^{-n} \mathcal{F}^{-1}[\psi] \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \psi\left(\varepsilon\left(x-\varepsilon y'\right)\right) u\left(x-\varepsilon y'\right) \mathcal{F}^{-1}[\psi]\left(y'\right) dy' \\
&= \int u(x) \mathcal{F}^{-1}[\psi]\left(y'\right) dy' = u(x) \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[\psi]\right](0) \\
&= u(x)\psi(0) = u(x)
\end{aligned}
$$

због теореме 2.1 става 5. и пошто $\lim_{\varepsilon\to 0} \psi\left(\varepsilon\left(x-\varepsilon y'\right)\right) u\left(x-\varepsilon y'\right) = \psi(0)u(x) = u(x)$. *Такође смо користили* $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[u]] = u$ *за* $u \in C_b^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Лема 3.13 *Нека је* $a \in \mathcal{A}_\tau^m\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right), m, \tau \in \mathbb{R}$, *и нека* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. *Тада*

$$
Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} y^\alpha a(y,\eta) dy đ\eta = Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} D_\eta^\alpha a(y,\eta) dy đ\eta
$$

$$
Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} \eta^\alpha a(y,\eta) dy đ\eta = Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} D_y^\alpha a(y,\eta) dy đ\eta
$$

Доказ. Прије свега напоменимо да $D_\eta^\alpha a(y,\eta), D_y^\alpha a(y,\eta) \in \mathcal{A}_\tau^m\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right), y^\alpha a(y,\eta) \in \mathcal{A}_{\tau+|\alpha|}^m\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$ и $\eta^\alpha a(y,\eta) \in \mathcal{A}_\tau^{m+|\alpha|}\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$. Стога су осцилаторни интеграли добро дефинисани.

Доказујемо само први идентитет пошто се доказивање другог врши на исти начин. Штавише, довољно је размотрити случај $|\alpha| = 1$. (Онда општи случај слиједи математичком индукцијом.)

Ако $|\alpha| = 1$, онда $y^\alpha = y_j$ за $1 \le j \le n$. Штавише, бирамо χ у дефиницији осцилаторног интеграла као $\chi(y,\eta) = e^{-|(y,\eta)|^2/2}$. Онда

$$
\begin{aligned}
\iint \chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) e^{-iy\cdot\eta} y_j a(y,\eta) dy đ\eta &= -\iint \chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) \left(D_{\eta_j} e^{-iy\cdot\eta}\right) a(y,\eta) dy đ\eta \\
&= \iint e^{-iy\cdot\eta} D_{\eta_j} (\chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) a(y,\eta)) dy đ\eta
\end{aligned}
$$

Користећи $D_{\eta_j} \chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) = i\varepsilon^2 \eta_j \chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta)$, добијамо

$$
D_{\eta_j}(\chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) a(y,\eta)) = \chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) D_{\eta_j} a(y,\eta) + i\varepsilon^2 \chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) \eta_j a(y,\eta).
$$

Дакле

$$
\begin{aligned}
\iint \chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) e^{-iy\cdot\eta} y_j a(y,\eta) dy đ\eta &= \iint \chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) e^{-iy\cdot\eta} D_{\eta_j} a(y,\eta) dy đ\eta \\
&\quad + i\varepsilon^2 \iint \chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) e^{-iy\cdot\eta} \eta_j a(y,\eta) dy đ\eta
\end{aligned}
$$

Пуштајући лимес $\varepsilon \to 0$ добијамо прву једнакост. □

Коначно, долазимо до Фубинијеве теореме.

Теорема 3.14 *(Фубинијева теорема за осцилаторне интеграле). Нека је* $a \in \mathcal{A}_\tau^m\left(\mathbb{R}^{n+k} \times \mathbb{R}^{n+k}\right), m, \tau \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$. *Онда*

$$b(y,\eta) := Os - \iint e^{-iy'\cdot\eta'} a\left(y, y', \eta, \eta'\right) dy' đ\eta' \in \mathcal{A}_\tau^m\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$$

гдје је интеграција у односу на $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, *и*

$$\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta b(y,\eta) = Os - \iint e^{-iy'\cdot\eta'} \partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta a\left(y, y', \eta, \eta'\right) dy' đ\eta' \tag{3.16}$$

Штавише,

$$\begin{aligned} &Os - \iiint \int e^{-iy\cdot\eta - iy'\cdot\eta'} a\left(y, y', \eta, \eta'\right) dy dy' đ\eta đ\eta' \\ &= Os - \iint e^{-iy\cdot\eta}\left(Os - \iint e^{-iy'\cdot\eta'} a\left(y, y', \eta, \eta'\right) dy' đ\eta'\right) dy đ\eta. \end{aligned}$$

3.4 Двоструки симболи

Композиција $p_1\left(x, D_x\right) p_2\left(x, D_x\right)$, коју смо већ израчунали у претходном одјељку, је примјер псеудо-диференцијалног оператора у општијем облику, конкретно псеудо-диференцијалног оператора са двоструким симболом:

$$p\left(x, D_x, x, D_x\right) u = \iiiint e^{i\left(x-x'\right)\cdot\xi + i\left(x'-x''\right)\cdot\xi'} p\left(x, \xi, x', \xi'\right) u\left(x''\right) dx'' đ\xi' dx' đ\xi$$

за $u \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$, при чему се интеграли морају схватити као итерирани интеграли. Дакле $p\left(x, \xi, x', \xi'\right) = p_1(x,\xi) p_2\left(x', \xi'\right) \in S_{1,0}^{m_1, m_2}\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$ је дефинисан на сљедећи начин:

Дефиниција 3.15 *Нека је* $m, m' \in \mathbb{R}$. *Простор двоструких псеудо-диференцијалних симбола* $S_{1,0}^{m,m'}\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$ *је простор свих глатких функција* $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *тако да*

$$\left|D_\xi^\alpha D_x^\beta D_{\xi'}^{\alpha'} D_{x'}^{\beta'} p\left(x, \xi, x', \xi'\right)\right| \leq C_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}\left(1 + \left|\xi'\right|\right)^{m' - \left|\alpha'\right|}$$

униформно за $x, \xi, x', \xi' \in \mathbb{R}^n$ *за произвољно* $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{N}_0^n$

Примијетимо да $S_{1,0}^{m,m'}\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right) \subset A_0^{\max\left(m, m', m+m'\right)}\left(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}\right)$.

Тврдња о композицији два псеудо-диференцијална оператора ће бити посљедица сљедеће опште теореме:

Теорема 3.16 *Нека су* $m, m' \in \mathbb{R}$ *и нека је* $p \in S_{1,0}^{m,m'}\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$ *двоструки симбол. Онда*

$$p_L(x,\xi) := Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} p(x, \xi+\eta, x+y, \xi) dy đ\eta \in S_{1,0}^{m+m'}\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$$

Штавише, важи асимптотски развој

$$p_L(x,\xi) \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_{x'}^\alpha p\left(x,\xi,x',\xi'\right)\Big|_{x'=x,\xi'=\xi}$$

у смислу да

$$p_L(x,\xi) - \sum_{|\alpha|\le N} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_{x'}^\alpha p\left(x,\xi,x',\xi'\right)\Big|_{x'=x,\xi'=\xi} \in S_{1,0}^{m+m'-N-1}\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\right)$$

за све $N\in\mathbb{N}_0$

Доказ. Прије свега, нека $a_{x,\xi}(y,\eta) := p(x,\xi+\eta,x+y,\xi)$ за све $x,y,\xi,\eta\in\mathbb{R}^n$. Користећи Питријеву неједнакост,

$$\begin{aligned}\left|\partial_\eta^\alpha\partial_y^\beta a_{x,\xi}(y,\eta)\right| &= \left|\partial_\eta^\alpha\partial_y^\beta p(x,\xi+\eta,x+y,\xi)\right| \\ &\le C_{\alpha,\beta}\langle\xi+\eta\rangle^{m-|\alpha|}\langle\xi\rangle^{m'} \le C_{\alpha,\beta}\langle\xi+\eta\rangle^{m}\langle\xi\rangle^{m'} \\ &\le C_{\alpha,\beta}2^{|m|}\langle\eta\rangle^{|m|}\langle\xi\rangle^{m+m'}\end{aligned}$$

Стога $a_{x,\xi}(y,\eta)\in\mathcal{A}_0^{|m|}$ и $|a_{x,\xi}|_{\mathcal{A}_0^{|m|},|m|+2n+2}\le C(1+|\xi|)^{m+m'}$. Дакле

$$|p_L(x,\xi)| = \left| Os-\iint e^{-iy\cdot\eta}p(x,\xi+\eta,x+y,\xi)dy đ\eta \right| \le C(1+|\xi|)^{m+m'} \tag{3.17}$$

због (3.11). Пошто $p\left(x,\xi,x',\eta\right)\in\mathcal{A}_0^{\tilde m}\left(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}\right)$, $\tilde m = \max\left(m_1,m_2,m_1+m_2\right)$, с обзиром на $\left(x,x'\right),(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{2n}$, такође имамо $p(x,\xi+\eta,x+y,\xi)\in\mathcal{A}_0^{\tilde m}\left(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}\right)$ у односу на $(x,y),(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{2n}$. Стога можемо примијенити (3.16) да закључимо да

$$\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta p_L(x,\xi) = Os-\iint e^{-iy\cdot\eta}\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta[p(x,\xi+\eta,x+y,\xi)]dy đ\eta \tag{3.18}$$

Комбиновањем (3.17) и (3.18) се добија

$$\begin{aligned}&\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta p_L(x,\xi)\right| \\ &= \left| Os-\iint e^{-iy\cdot\eta}\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta[p(x,\xi+\eta,x+y,\xi)]dy đ\eta \right| &(3.19)\\ &\le C(1+|\xi|)^{m+m'-|\alpha|}. &(3.20)\end{aligned}$$

Да бисмо доказали асимптотичку експанзију, користимо проширење Тејлоровог реда:

$$\begin{aligned}p(x,\xi+\eta,x+y,\xi) = &\sum_{|\alpha|\le N}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}p_\alpha(x,\xi,x+y,\xi) \\ &+ (N+1)\sum_{|\alpha|=N+1}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\int_0^1(1-\theta)^N p_\alpha(x,\xi+\theta\eta,x+y,\xi)d\theta\end{aligned}$$

гдје $p_\alpha(x,\xi,y,\eta) = \partial_\xi^\alpha p(x,\xi,y,\eta)$. Пошто

$$p_L(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le N} \frac{1}{\alpha!} Os - \iint e^{-iy\cdot\eta}\eta^\alpha p_\alpha(x,\xi,x+y,\xi)dy đ\eta$$
$$+ (N+1) \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{1}{\alpha!} Os - \iint e^{-iy\cdot\eta}\eta^\alpha r_\alpha(x,\xi,y,\eta)dy đ\eta$$

гдје

$$r_\alpha(x,\xi,y,\eta) = \int_0^1 \left(\partial_\xi^\alpha p\right)(x,\xi+\theta\eta,x+y,\xi)(1-\theta)^N d\theta$$

Због леме 3.13 и примјера 3.12

$$\begin{aligned} Os - \iint e^{-iy\cdot\eta}\eta^\alpha p_\alpha(x,\xi,x+y,\xi)dy đ\eta &= Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} D_y^\alpha p_\alpha(x,\xi,x+y,\xi)dy đ\eta \\ &= \partial_\xi^\alpha D_y^\alpha p(x,\xi,y,\eta)\big|_{y=x,\eta=\xi} \end{aligned}$$

Стога остаје да се процијени $r_\alpha(x,\xi,y,\eta)$. Као и на почетку доказа,

$$\begin{aligned} &\left|\partial_\eta^\beta \partial_y^\gamma \left(\left(\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha p\right)(x,\xi+\theta\eta,x+y,\xi)\right)\right| \\ &\le C_{\alpha,\beta,\gamma} 2^{|m|}(1+|\theta\eta|)^{|m|}(1+|\xi|)^{m+m'-|\alpha|} \\ &\le C_{\alpha,\beta,\gamma} 2^{|m|}(1+|\eta|)^{|m|}(1+|\xi|)^{m+m'-|\alpha|}, \end{aligned}$$

гдје $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ не зависи од $\theta \in [0,1]$. Дакле $\{p(x,\xi+\theta\cdot,x+\cdot,\xi)\}_{0\le\theta\le1}$ је униформно ограничено у $\mathcal{A}_0^{|m|}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ као амплитуде за (y,η). Стога закључујемо $r_\alpha(x,\xi,\cdot,\cdot) \in \mathcal{A}_0^{|m|}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ и

$$\left|\partial_\eta^\beta \partial_y^\gamma \left(\left(D_y^\alpha r_\alpha\right)(x,\xi,\eta,y)\right)\right| \le C_{\alpha,\beta,\gamma} 2^{|m|}(1+|\eta|)^{|m|}(1+|\xi|)^{m+m'-|\alpha|}.$$

Ово имплицира

$$\begin{aligned} &|\ Os - \iint e^{-iy\cdot\eta}\eta^\alpha r_\alpha(x,\xi,\eta,y)dy đ\eta\ | \\ &=|\ Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} D_y^\alpha r_\alpha(x,\xi,\eta,y)dy đ\eta\ | \le C_\alpha(1+|\xi|)^{m+m'-|\alpha|} \end{aligned}$$

због (3.11). Коначно, изводи $\partial_\xi^\beta \partial_x^\gamma r_\alpha(x,\xi)$ се процјењују на исти начин као и раније. $\square$

3.5 Композиција псеудо-диференцијалних оператора

У овом поглављу, мада није важно за наставак овог рада, ћемо завршити причу о композицији псеудо-диференцијалних оператора. Због тога, нећемо давати доказе сљедећих тврдњи, које заинтересовани читалац може наћи у [1]. Прије свега, ако $p \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, онда

$$\begin{aligned} p(x,D_x)u &= \int \left(\int e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi)u(y)dy\right) đ\xi \\ &= Os - \iint e^{-ix'\cdot\xi} p(x,\xi) u(x+x')\, dx' đ\xi \end{aligned}$$

за све $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Користећи ову репрезентацију и теорему 3.14, лако добијамо

$$
\begin{aligned}
&p_1(x, D_x)\, p_2(x, D_x)\, u \\
&= Os - \iint e^{-ix'\cdot\xi} p_1(x,\xi) \left(Os - \iint e^{-ix''\cdot\xi'} p_2(x+x',\xi')\, u(x+x'+x'')\, dx'' đ\xi' \right) dx' đ\xi \\
&= Os - \iiiint e^{-ix'\cdot\xi - ix''\cdot\xi'} p_1(x,\xi) p_2(x+x',\xi')\, u(x+x'+x'')\, dx'' đ\xi' dx' đ\xi \\
&= Os - \iiiint e^{-ix'\cdot\eta - iy\cdot\xi'} p_1(x,\xi'+\eta)\, p_2(x+x',\xi')\, u(x+y) dx' đ\xi' dy đ\eta \\
&= Os - \iint e^{-iy\cdot\xi'} \left(Os - \iint e^{-ix'\cdot\eta} p_1(x,\xi'+\eta)\, p_2(x+x',\xi')\, dx' đ\eta \right) u(x+y) dy đ\xi' \\
&= Os - \iint e^{-iy\cdot\xi'} p_1 \# p_2(x,\xi')\, u(x+y) dy đ\xi,
\end{aligned}
$$

гдје смо још користили да $\eta = \xi - \xi'$ и $y = x' + x''$ и $p_1 \# p_2$ дефинисано као у (3.9).

Теорема 3.17 *Нека су $p_j \in S^{m_j}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $j = 1,2$ два псеудо-диференцијална симбола. Онда постоји неко $p_1 \# p_2 \in S^{m_1+m_2}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ тако да*

$$p_1(x, D_x)\, p_2(x, D_x) = (p_1 \# p_2)(x, D_x)$$

Штавише, $p_1 \# p_2$ има сљедећу асимптотичку експанзију:

$$p_1 \# p_2(x,\xi) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p_1(x,\xi) D_x^\alpha p_2(x,\xi)$$

у смислу да

$$p_1 \# p_2(x,\xi) - \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p_1(x,\xi) D_x^\alpha p_2(x,\xi) \in S^{m_1+m_2-N}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

за све $N \in \mathbb{N}$.

Доказ. Нека је $p(x,\xi,x',\xi') = p_1(x,\xi) p_2(x',\xi')$. Тада $p \in S^{m_1,m_2}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ и $p_1 \# p_2(x,\xi) = p_L(x,\xi)$. Стога је теорема посљедица теореме 3.16. $\square$

Отуда је композиција два псеудо-диференцијална оператора опет псеудо-диференцијални оператор. Конкретно,

$$p_1 \# p_2(x,\xi) = p_1(x,\xi) p_2(x,\xi) + r(x,\xi)$$

гдје $r(x,\xi) \in S^{m_1+m_2-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

3.6 Адјунговани оператор псеудо-диференцијалног оператора и (x, y)-форма оператора

Адјунговани оператори псеудо-диференцијалних оператора, као и форме опреатора, су појмови који ће нам користити приликом доказивања огрничености на L^p просторима, што је и тема овог рада.

Дефиниција 3.18 *Нека $A, A^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тада се A^* зове адјунговани оператор оператора A ако*

$$(Au, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (u, A^* v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{за све } u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Адјунговани оператор игра важну улогу у проблемима рјешавања једначина, на примјер.

Надаље, доказаћемо да сваки псеудо-диференцијални оператор $p(x, D_x)$ посједује свој адјунговани оператор $p^*(x, D_x)$, који је поново псеудо-диференцијални оператор (истог реда). Сада расписујемо адјунговани оператор оператора $p(x, D_x)$:

$$\begin{aligned}
(p(x, D_x)\, u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \iint e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\hat{u}(\xi) đ\xi \overline{v(x)} dx \\
&= \iint e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\overline{v(x)} dx \hat{u}(\xi) đ\xi \\
&= \int \hat{u}(\xi) \overline{\int e^{-ix\cdot\xi} \overline{p(x,\xi)} v(x) dx} đ\xi
\end{aligned}$$

гдје смо користили Фубинијеву теорему. Напоменимо да $v, \hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, што импицира да $e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\overline{v(x)} \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ с обзиром на (x, ξ).

Лема 3.19 *Нека су $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), m \in \mathbb{R}$ и $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тада*

$$w(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} p(x,\xi) v(x) dx \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Доказ. Видјети [1], (стр. 66, Лема 3.31) □

Дакле, можемо користити $(\mathcal{F}[u], v)_{L^2} = (2\pi)^n \left(u, \mathcal{F}^{-1}[v]\right)_{L^2}$ и добити

$$\left(p(x, D_x)^* v\right)(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} \overline{p(y,\xi)} v(y) dy đ\xi. \tag{3.21}$$

Овај оператор је псеудо-диференцијални оператор у тзв. y-форми (такође називаној R форми), што је посебан случај оператора форме

$$p(x, D_x, x)\, u := \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x, y, \xi) u(y) dy đ\xi \tag{3.22}$$

за све $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, гдје $p \in S^m_{1,0}\left(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n\right)$, тј.

$$\left|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x \partial^\gamma_y p(x, y, \xi)\right| \le C_{\alpha,\beta,\gamma}(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}$$

за све $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n_0$. Ови оператори се називају псеудодиференцијални оператори у (x, y) форми и $p(x, D_x)$ се зове псеудодиференцијални оператор у x-форми.

Као и раније добијамо

$$p(x, D_x, x)\, u = Os - \iint e^{-ix'\cdot\xi} p(x, x+x', \xi)\, u(x+x')\, dx' đ\xi$$

за све $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3.20 *Нека* $p \in S^m_{1,0}\left(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n\right), m \in \mathbb{R}$. *Тада* $p(x, D_x, x)\, u = p_L(x, D_x)\, u$ *за свако* $u \in C^\infty_b(\mathbb{R}^n)$, *гдје*

$$p_L(x,\xi) = Os - \iint e^{-iy\cdot\eta} p(x, x+y, \xi+\eta) dy d\eta \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Штавише,

$$p_L(x,\xi) \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_y^\alpha p(x,y,\xi)\Big|_{y=x}$$

у смислу да за све $N \in \mathbb{N}_0$

$$p_L(x,\xi) - \sum_{|\alpha|\le N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_y^\alpha p(x,y,\xi)\Big|_{y=x} \in S^{m-N-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

Доказ. Користећи

$$u(x+x') = Os - \iint e^{i\left(x+x'-y\right)\cdot\eta} u(y) dy đ\eta$$

из примјера 3.12, добијамо

$$\begin{aligned} p(x, D_x, x)\, u &= Os - \iiiint e^{-ix'\cdot\xi} e^{i\left(x+x'-y\right)\cdot\eta} p(x, x+x', \xi)\, u(y) dy đ\eta dx' đ\xi \\ &= Os - \iint e^{i(x-y)\cdot\eta} \left(Os - \iint e^{-ix'\cdot(\xi-\eta)} p(x, x+x', \xi)\, dx' đ\xi \right) u(y) dy đ\eta \\ &= Os - \iint e^{i(x-y)\cdot\eta} p_L(x,\xi) u(y) dy đ\eta. \end{aligned}$$

Дакле, примјена теореме 3.16 завршава доказ. □

Посљедица 3.21 *Ако* $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, *тада адјунговани оператор оператора* $p(x, D_x)$ *је* $p^*(x, D_x)$ *гдје*

$$p^*(x,\xi) = Os - \iint e^{-iy\cdot\xi} \overline{p(x+y, \xi+\eta)} dy đ\eta \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

Штавише,

$$p^*(x,\xi) \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{p(x,\xi)}$$

у смислу да за свако $N \in \mathbb{N}_0$

$$p^*(x,\xi) - \sum_{|\alpha| \le N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{p(x,\xi)} \in S_{1,0}^{m-N-1}\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$$

Доказ. Посљедица је директна посљедица (3.21) и теореме 3.20 □

Дефиниција 3.22 *Нека* $p \in S_{1,0}^m\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$. *Тада дефинишемо* $p\left(x, D_x\right) : \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right) \to \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ *са*

$$\left\langle p\left(x, D_x\right) u, \bar{v}\right\rangle := \left\langle u, \overline{p^*\left(x, D_x\right) v}\right\rangle \quad u \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right), v \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Пошто $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right) \subseteq \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, важно је примијетити да, ако $u \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$,

$$\begin{aligned}\left\langle p\left(x, D_x\right) u, \bar{v}\right\rangle &= \left\langle u, \overline{p^*\left(x, D_x\right) v}\right\rangle \\ &= \left(u, p^*\left(x, D_x\right) v\right)_{L^2\left(\mathbb{R}^n\right)} = \int_{\mathbb{R}^n} p\left(x, D_x\right) u(x) \overline{v(x)} dx\end{aligned}$$

за свако $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, тј. дефиниција $p\left(x, D_x\right) u$ у смислу $\mathcal{S}'$ поклапа се са првом дефиницијом $p\left(x, D_x\right) u$ за $u \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Глава 4

Ограниченост псеудо-диференцијалних оператора на L^p просторима

У овој глави, циљ нам је да докажемо ограниченост псеудо-диференцијалних оператора реда нула на L^p просторима и као што је већ речено, даћемо два доказа те теореме. Као припрему за први доказ, доказаћемо ограниченост псеудо-диференцијалних оператора реда нула на L^2 простору, као и важне теореме, као што су Калдерон-Зигмундова декомпозиција, Марћинкјевичева интерполациона теорема, Лебегова теорема диференцијације итд. Један од важнијих резултата је свакако и теорема 4.21 која нам говори о репрезентацији псеудо-диференцијалних оператора преко њиховог језгра. Други доказ, иако са различитим приступом и идејом, такође ће се позивати на теорему 4.21. За крај прокоментарисаћемо неке резултате општије теорије огрderivedничености псеудо-диференцијалних оператора на L^p просторима.

4.1 Ограниченост псеудо-диференцијалних оператора реда нула на L^2 просторима

Главни резултат ове секције је управо као и наслов, сљедећа теорема:

Теорема 4.1 *Нека је* $p \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. *Тада се* $p(x, D_x)$ *(дефинисано над* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*) може проширити до ограниченог оператора* $p(x, D_x) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

Да бисмо доказали жељену теорему, потребно нам је прије тога, доказати сљедеће помоћне леме.

Лема 4.2 *Теорема 4.1 важи ако* $p \in S^{-n-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Доказ. Ако $p \in S^{-n-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, онда је $p(x, \xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ по параметру ξ и дакле

$$
\begin{aligned}
p\left(x, D_x\right) f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi) \hat{f}(\xi) đ\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi) đ\xi f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} k(x, x-y) f(y) dy
\end{aligned}
$$

за свако $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ због Фубинијеве теореме, гдје $k(x,z) := \mathcal{F}^{-1}_{\xi\mapsto z}[p(x,\xi)](z)$. Ова функција задовољава

$$
\left|z^\alpha k(x,z)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi} \partial_\xi^\alpha p(x,\xi) d\xi\right| \le C_\alpha |p|^{(-n-1)}_{|\alpha|}
$$

пошто $\left|\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| \le |p|^{(-n-1)}_{|\alpha|} \langle\xi\rangle^{-n-1-|\alpha|} \in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ по параметру ξ. Слиједи

$$
\left|\left(1+|z|^2\right)^n k(x,z)\right| \le C|p|^{(-n-1)}_{2n}
$$

и дакле

$$
g(z) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |k(x,z)| \le C\left(1+|z|^2\right)^{-n} \in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)
$$

Тада имамо

$$
\begin{aligned}
\left\|p\left(x, D_x\right) f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\le C \left\|\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)|f(y)|dy\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C' \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

због (2.5). Сада је тврђење посљедица леме 1.10 пошто је $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ густ у $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ □

Лема 4.3 *Теорема 4.1 важи за* $p \in S^{-m}_{1,0}\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$ *гдје је* $m > 0$.

Доказ. У циљу доказивања $\left\|p\left(x, D_x\right) f\right\|_2 \le C\|f\|_2$ за $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$, довољно је показати

$$
\left\|p^*\left(x, D_x\right) p\left(x, D_x\right) f\right\|_2 \le C\|f\|_2
$$

пошто

$$
\left\|p\left(x, D_x\right) f\right\|_2^2 = \left(p^*\left(x, D_x\right) p\left(x, D_x\right) f, f\right) \le \left\|p^*\left(x, D_x\right) p\left(x, D_x\right) f\right\|_2 \|f\|_2
$$

Али, ако $p \in S^{-m}_{1,0}\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$, онда

$$
p^*\left(x, D_x\right) p\left(x, D_x\right) = p'\left(x, D_x\right)
$$

гдје $p' \in S^{-2m}_{1,0}\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$. Стога, користећи претходну лему и математичку индукцију можемо добити

$$
\left\|p\left(x, D_x\right) f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}
$$

за свако $p \in S^{-m_k}_{1,0}$ гдје је $m_k = (n+1)/2^k, k \in \mathbb{N}$. Ово доказује лему пошто за свако $m > 0$ постоји неко $k \in \mathbb{N}$ такво да $-m_k > -m$. Поново доказ тврђења леме слиједи из густине скупа $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ у $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$, на основу леме 1.10 □

Коначно, потребно нам је и сљедећа лема.

Лема 4.4 *Ако* $p \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *и* $p(x,\xi) \in \mathbb{R}$ *за свако* $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ *и ако* $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, *тада* $F(p(x,\xi)) \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Доказ. Као прво, $|p(x,\xi)| \leq R$ за неко $R > 0$ и F је ограничено на компактним скуповима. Слиједи $|F(p(x,\xi))| \leq \sup_{|z|\leq R} |F(z)|$. Штавише,

$$\left|\partial_{\xi_j} F(p(x,\xi))\right| \leq \sup_{|z|\leq R} \left|F'(z)\|\partial_{\xi_j} p(x,\xi)\right| \leq C\langle\xi\rangle^{-1},$$
$$\left|\partial_{x_j} F(p(x,\xi))\right| \leq \sup_{|z|\leq R} \left|F'(z)\|\partial_{x_j} p(x,\xi)\right| \leq C.$$

Коначно, процјена од $\left|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x F(p(x,\xi))\right|$ за произвољно $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n_0$ може се доказати коришћењем математичке индукције. □

Доказ. (Теореме 4.1) Ако $p \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, онда $|p(x,\xi)| \leq M$ за свако $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, гдје је $M := |p|^{(0)}_0 \geq 0$. Због тога

$$p'(x,\xi) := M^2 - p(x,\xi)\overline{p(x,\xi)} \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

и $p'(x,\xi) \geq 0$. Сада нека $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ дефинисано са $F(t) = (1+t)^{\frac{1}{2}}$ за $t \geq 0$. Тада $q(x,\xi) := F(p'(x,\xi)) \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ и

$$\begin{aligned} q^*(x, D_x)\, q(x, D_x)\, f &= \mathrm{OP}\left(F(p'(x,\xi))^2\right) f + r(x, D_x) f \\ &= \left(1+M^2\right) f - \mathrm{OP}(\overline{p(x,\xi)}p(x,\xi)) f + r(x, D_x) f \\ &= \left(1+M^2\right) f - p^*(x, D_x)\, p(x, D_x)\, f + r'(x, D_x) f \end{aligned}$$

за $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, гдје $r, r' \in S^{-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ због теореме 3.17 и посљедице 3.21. Слиједи

$$\begin{aligned} &\|p(x, D_x) f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq (p^*(x, D_x)\, p(x, D_x)\, f, f)_{L^2(\mathbb{R}^n)} + (q^*(x, D_x)\, q(x, D_x)\, f, f)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \left(1+M^2\right) \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + (r'(x, D_x) f, f)\,. \end{aligned}$$

Пошто $r' \in S^{-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, имамо $\|r'(x, D_x) f\|_2 \leq C\|f\|_2$ због леме 4.3. Слиједи $\|p(x, D_x) f\|^2_2 \leq \left(1 + M^2 + C\right) \|f\|^2_2$ за свако $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, што имплицира жељени резултат будући да је $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ густ у $L^2(\mathbb{R}^n)$. □

4.2 Сингуларни интегрални оператори инваријантни на транслацију

Сада ћемо се бавити неким основним тврђењима везаним за сингуларне интегралне операторе на простору $\mathbb{R}^n$. Ови оператори се природно појављују приликом проучавања регуларности елиптичких и параболичких једначина. Наш фокус ће бити на операторима инваријантним на транслацију, да би у сљедећој секцији прешли на операторе неинваријантне на транслацију. Најбитнији резултати ове секције биће Калдерон-Зигмундова декомпозиција, Лебегова теорема диференцијације, као и Марћинкјевичева интерполациона теорема.

Иако важни резултати, нама су кључни за доказивање централног тврђења овог рада. Стога, говорећи о сингуларним интегралним операторима, заправо разматрамо операторе облика

$$Tf(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{K}\hat{f}](x) \text{ за све } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{4.1}$$

који задовољавају сљедеће услове:

Претпоставка 4.5 *1.* $\hat{K} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. Постоји неко $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *тако да за свако* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy \quad \text{за скоро свако } x \notin \operatorname{supp} f \tag{4.2}$$

и k *задовољава Хермандеров услов*

$$\int_{|x|>2|y|} |k(x-y) - k(x)|dx \leq B_K \quad \text{за свако } y \in \mathbb{R}^n \tag{4.3}$$

за неко $B_K \in (0, \infty)$.

Напомена 4.6 *1. Прије свега, према Планшереловој теореми, леми 2.14, односно претпоставци* $\hat{K} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *оператор* T *се проширује на ограничени линеарни оператор* $T \in \mathscr{L}\left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)$. *За проширење, (4.2) важи за било које* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *са компактним носачем, што се може доказати апроксимацијом са* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *функцијама.*

2. T *је транслациона инваријантна у смислу да* T *комутира са транслацијом, тј.* $T\tau_h = \tau_h T$ *за свако* $h \in \mathbb{R}^n$, *гдје* $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$ *за све* $x \in \mathbb{R}^n$, *пошто*

$$T(\tau_h f) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{ih\cdot\xi}\widehat{K}(\xi)\hat{f}(\xi)\right] = \tau_h Tf \quad \text{за све } f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n).$$

Хермандеров услов је нека врста услова слабе интеграбилности и глаткоће. Задовољава се нпр. ако

$$|\nabla k(z)| \leq C|z|^{-n-1} \quad \text{за свако } z \neq 0$$

због леме 4.7. Примјер језгра, који задовољава посљедњи услов, је $k(z) = \frac{z_j}{|z|^{n+1}}, j = 1, \ldots, n$, *које је (до множења са константом) језгро такозваних Рисових оператора ако* $n \geq 2$ *и Хилбертова трансформација ако је* $n = 1$.

Лема 4.7 *Нека је* $k : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$ *непрекидно-диференцијабилна функција која задовољава*

$$|\nabla_z k(z)| \leq C|z|^{-n-1} \quad \text{за свако } z \neq 0. \tag{4.4}$$

Тада k *задовољава (4.3).*

Доказ. Прије свега,

$$k(x-y)-k(x)=-\int_0^1 y\cdot\nabla k(x-ty)dt.$$

Стога, ако $|x|>2|y|$, онда

$$\begin{aligned}|k(x-y)-k(x)| &\leq \sup_{t\in[0,1]}|\nabla_z k(x-ty)|\,|y| \\ &\leq C|x|^{-n-1}|y|\end{aligned} \tag{4.5}$$

пошто $|x-ty|\geq\frac{1}{2}|x|$ за све $t\in[0,1]$. Дакле

$$\int_{|x|>2|y|}|k(x-y)-k(x)|dx\leq C\int_{|x|>2|y|}|x|^{-n-1}dx|y|\leq C'$$

униформно за $y\neq 0$. □

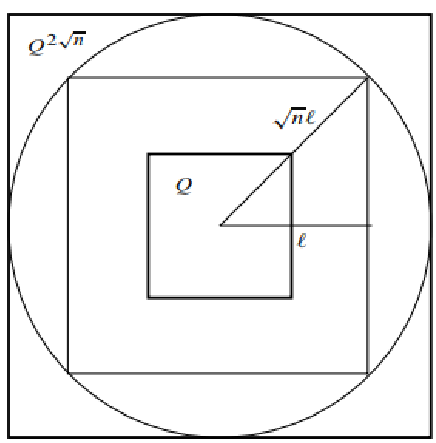
Коначно, примијетимо сљедећу једноставну процјену која слиједи из Хермандеровог услова (4.3), која ће се користити за процену "лошег дијела" b Калдерон-Зигмундове декомпозиције на погодне коцке Q_j :

Лема 4.8 *Нека $k\in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\right)$ задовољава (4.3). Тада за свако $a\in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ са $\operatorname{supp}a\subseteq Q$ и $\int_Q a(x)dx=0$*

$$\int_{\mathbb{R}^n\backslash\widetilde{Q}}|k*a(x)|dx\leq B_K\|a\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

гдје $\widetilde{Q}=Q^{2\sqrt{n}}$ означава коцку са истим центром као Q и са ивицама $2\sqrt{n}$ пута дужине ивица Q, слика 4.1.

Доказ. Пошто $k*a$ комутира са транслацијама, увијек можемо свести на случај да је центар Q исходиште. Примијетимо још да када $x\notin\widetilde{Q}=Q^{2\sqrt{n}}$ и $y\in Q$ подразумијева $|x|>2|y|$.



Слика 4.1. Избор $\widetilde{Q}=Q^{2\sqrt{n}}$ (за $n=2$).

Стога

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus\widetilde{Q}}|k*a(x)|dx &\le \int_{\mathbb{R}^n\setminus\widetilde{Q}}\left|\int_Q (k(x-y)-k(x))a(y)dy\right|dx\\ &\le \int_Q\int_{|x|>2|y|}|k(x-y)-k(x)||a(y)|dxdy\\ &\le B_K\int_Q |a(y)|dy\end{aligned}$$

што доказује тврдњу. □

4.2.1 Калдерон-Зигмундова декомпозиција и Харди-Литлвудов максимални оператор

Почнимо са неким ознакама: У наставку нека је $\Lambda_k = 2^{-k}\mathbb{Z}^k, k\in\mathbb{N}_0$, и означимо са $\mathscr{D}_k, k\in\mathbb{Z}$ скуп свих „дијадичких коцки” са дужином ивице 2^{-k} што значи колекцију свих (затворених) коцки Q са угловима на суседним тачкама решетке Λ_k. Штавише, нека $\mathscr{D}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\mathscr{D}_k$. Коначно, ако је Q произвољна коцка, онда Q^α, $\alpha>0$, означава коцку са истим центром као Q и ивице α пута дуже од ивице од Q. Штавише, кажемо да се двије коцке Q, Q' не поклапају ако $|Q\cap Q'|=0$.[1]

Главни резултат овог одјељка је:

Теорема 4.9 *(Калдерон-Зигмундова декомпозиција).*

Нека је $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ и нека $t>0$. Тада постоје дисјунктни мјерљиви скупови F,Ω такви да је $\mathbb{R}^n=F\cup\Omega$ и

1. *$|f(x)|\le t$ за скоро свако $x\in F$,*
2. *$\Omega=\bigcup_{j\in N}Q_j$, гдје $Q_j, j\in N\subseteq\mathbb{N}$, су дијадичке коцке које се не преклапају и*

$$t<\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(y)|dy\le 2^n t \tag{4.6}$$

Штавише, ако је $f=g+b$, гдје

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{ако } x\in F,\\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}f(y)dy & \text{ако } x\in Q_j,\end{cases}$$

онда

1. *$|g(x)|\le 2^n t$ скоро свако у $\mathbb{R}^n$,*
2. *$b(x)=0$ за свако $x\in F$ и $\int_{Q_j}b(x)dx=0$ за свако $j\in N$.*

[1] Када говоримо о дијадичким коцкама, $|\cdot|$ ће означавати мјеру.

Доказ. (Теореме 4.9 први дио) Нека је $\mathcal{C}_t'$ за дато $t > 0$ скуп свих $Q \in \mathscr{D}$ који задовољавају услов

$$t < \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx$$

и нека је $\mathcal{C}_t$ подскуп свих $Q \in \mathcal{C}_t'$ који су максимални у погледу инклузије у $\mathcal{C}_t'$. Сваки $Q \in \mathcal{C}_t'$ садржано је у неко $Q' \in \mathcal{C}_t$ пошто

$$|Q| \leq \frac{1}{t} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \text{ за све } Q \in \mathcal{C}_t'.$$

Даље, ако $Q \in \mathcal{C}_t \cap \mathscr{D}_k$ и $Q \subset Q' \in \mathscr{D}_{k-1}$, онда због максималности Q имамо да $Q' \notin \mathcal{C}_t'$, тј.

$$\frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} |f(x)| dx \leq t$$

Штавише, пошто $|Q'| = 2^n |Q|$, добијамо

$$t < \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx \leq \frac{2^n}{|Q'|} \int_{Q'} |f(x)| dx \leq 2^n t \quad \text{ за све } Q \in \mathcal{C}_t.$$

Дакле, $\mathcal{C}_t = \{Q_j : j \in N\}$ гдје се Q_j за $j \in N \subseteq \mathbb{N}_0$ не преклапају и (4.6) је задовољено за све $j \in N$.

Сада, нека $F := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in N} Q_j$. Ако $x \in F$, онда $\frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy \leq t$ за свако $Q \in \mathscr{D}$ тако да $x \in Q$. Дакле, остаје да се докаже да је $|f(x)| \leq t$ за скоро свако $x \in F$. У ту сврху нам је потребна Лебегова теорема диференцијације, која је посљедица процјене слабог типа $(1,1)$ такозваног Харди-Литлвудовог максималног оператора, представљеног у наставку. □

Прије него што наставимо доказ теореме 4.9, дефинишемо дијадичку верзију максималног оператора Харди-Литлвуда, односно за $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$(M_d f)(x) = \sup_{x \in Q \in \mathscr{D}} \frac{1}{|Q^3|} \int_{Q^3} |f(y)| dy \quad \text{ за свако } x \in \mathbb{R}^n.$$

Тада је M_d подлинеарно пресликавање из $L^1(\mathbb{R}^n)$ у простор мјерљивих функција. Чак има сљедећу слабу процјену типа $(1,1)$.

Лема 4.10 *Постоји константа C која зависи само од димензије тако да*

$$|\{x : M_d f(x) > t\}| \leq \frac{C \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{t}$$

за свако $t > 0$ и $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Доказ. Нека је дато $t > 0$ и $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Штавише нека је

$$x \in E_t := \{y : M_d f(y) > t\}$$

Тада постоји нека коцка $Q \in \mathscr{D}$ тако да $x \in Q$ и

$$\frac{1}{|Q^3|} \int_{Q^3} |f(y)| dy > t$$

Нека је $k \in \mathbb{N}_0$ такво да $Q \in \mathscr{D}_k$. Пошто Q^3 састоји се од тачно 3^n дијадичких коцака са истом бочном дужином као Q, постоји бар једна коцка $Q' \in \mathscr{D}_k$ са $Q' \cap Q \neq \emptyset$ тако да

$$\frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} |f(y)| dy > \frac{t}{3^n} =: t'$$

Сада користимо фамилију коцки $\mathcal{C}_{t'} = \{Q_j : j \in N\}, N \subseteq \mathbb{N}$, конструисану у првом дијелу доказа теореме 4.9 са t замењеним са t'. Онда $Q' \subseteq Q_j \in C_{t'}$ за неко $j \in N$ и $x \in Q \subseteq Q_j^3$. Пошто је $x \in E_t$ било произољно , $E_t \subseteq \bigcup_{j \in N} Q_j^3$. Тако

$$|E_t| \leq \sum_{j \in N} \left|Q_j^3\right| = \sum_{j \in N} 3^n |Q_j| \leq \frac{3^n}{t'} \sum_{j \in N} \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq C_n \frac{\|f\|_1}{t}$$

пошто се $(Q_j)_{j \in N}$ не преклапају. □

Напомена 4.11 *Уобичајена верзија максималног оператора Харди-Литлвуд је дефинисана као*

$$(Mf)(x) := \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \quad \text{за све } x \in \mathbb{R}^n, f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

гдје супремум преузима све коцке у $\mathbb{R}^n$ које садрже x. Али ова варијанта и дијадичка варијанта M_d су упоредиве у смислу да постоје константе $c, C > 0$ такве да

$$c(M_d f)(x) \leq (Mf)(x) \leq C(M_d f)(x) \text{ за све } x \in \mathbb{R}^n, f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \tag{4.7}$$

Заправо, прва неједнакост са $c = 1$ је очигледна. Да бисмо провјерили другу неједнакост, нека је Q' коцка која садржи x. Затим постоји дијадичка коцка $Q \in D_k$ која садржи x са $2^{(k-1)n} \leq |Q'| \leq 2^{kn}$. Дакле $Q' \subset Q^3$ и $\left|Q^3\right| = 3^n 2^{kn} \leq 6^n |Q'|$. Стога

$$\frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} |f(y)| dy \leq \frac{6^n}{|Q^3|} \int_{Q^3} |f(y)| dy$$

што показује другу неједнакост пошто је Q' са $x \in Q'$ било произвољно.
Због (4.7) и леме 4.10 добијамо

$$|\{x : Mf(x) > t\}| \leq \frac{C\|f\|_1}{t} \tag{4.8}$$

за свако $t > 0$ и $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, гдје C зависи само од димензије.

Посљедица 4.12 *(Лебегова теорема диференцијације)*
Нека је $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Онда

$$f(x) = \lim_{|Q| \to 0, x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy \quad \text{за скоро свако } x \in \mathbb{R}^n.$$

Доказ. Прије свега, без губљења општости можемо претпоставити да $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. У супротном, замјењујемо f са $f_R := f|_{B_R(0)}$ за произвољно $R > 0$ и доказати резултат за f_R, што имплицира тврдњу за f.

Прво показујемо да граница на десној страни постоји скоро свуда. У ту сврху нека

$$Rf(x)=\left|\limsup_{|Q|\to 0, x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy-\liminf_{|Q|\to 0, x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy\right|.$$

Очигледно, $Rf\equiv 0$ за свако непрекидно $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Сада нека је $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $t>0$. Тада за свако $\varepsilon>0$ постоји неко непрекидно $f'\in L^1(\mathbb{R}^n)$ са $\|f-f'\|_1\leq\varepsilon$. Онда

$$Rf(x)=R(f-f')(x)\leq 2M(f-f')(x)$$

и дакле

$$|\{x: Rf(x)>t\}|\leq|\{x: 2M(f-f')(x)>t\}|\leq C\frac{\|f-f'\|_1}{t}\leq C\frac{\varepsilon}{t}.$$

Пошто је $\varepsilon>0$ било произвољно, $|\{x: Rf(x)>t\}|=0$ и пошто је $t>0$ такође било произвољно, $Rf(k)=0$ скоро свуда. Стога

$$\lim_{|Q|\to 0, x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy$$

постоји за скоро свако $x\in\mathbb{R}^n$. Да бисмо доказали тврдњу посљедице, дефинишемо

$$R'f(x)=\left|\lim_{|Q|\to 0, x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy-f(x)\right|.$$

Сличним аргументима као и раније, закључујемо да је $R'f(k)=0$ скоро свуда. □

Доказ. (Теореме 4.9 други 2). Остаје само да се докаже да $|f(x)|\leq t$ за скоро свако $x\in F:=\mathbb{R}^n\setminus\bigcup_{j\in N}Q_j$. Прије свега, ако $x\in F$, онда за свако $Q\in\mathscr{D}$ са $x\in Q$

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|dx\leq t$$

Дакле, бирајући низ $Q_k\in\mathscr{D}$ са $x\in Q_k$ и $|Q_k|\to_{k\to\infty}0$, добијамо $|f(x)|\leq t$ за свако $x\in F$ због посљедице (4.12). Одмах слиједе тврдње за g,b. □

4.2.2 Марћинкјевичева интерполациона теорема

Долазимо до посљедње теореме теорије сингуларних оператора, у случају кад су инваријантни на транслацију, која нам је потребна за даљи рад.

Теорема 4.13 *(Марћинкјевичева интерполациона теорема)*

Претпоставимо да је $1<r\leq\infty$. Нека је T суб-адитивно пресликавање из $L^1(\mathbb{R}^n)+L^r(\mathbb{R}^n)$ у векторски простор мјерљивих функција над $\mathbb{R}^n$, које су слабог типа $(1,1)$ и (r,r), тј.

$$\lambda(t;Tf):=|\{x:|Tf(x)|>t\}|\leq C_q\frac{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{t^q}\tag{4.9}$$

за $q=1$ и $q=r$ ако је $r\leq\infty$ и $\|Tf\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\leq C_\infty\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ ако је $r=\infty$. Онда

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\qquad \text{за свако } f\in L^p(\mathbb{R}^n)$$

и свако $1<p<r$, гдје C_p зависи само од $C_1, C_r, p,$ и r.

Напомена 4.14 *Имајмо на уму да важи*

$$\lambda(t;g) = |\{x : |g(x)| > t\}| \leq \int_{\{x:|g(x)|>t\}} \frac{|g(x)|^q}{t^q} dx \leq \frac{\|g\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{t^q} \tag{4.10}$$

за свако $t > 0$ и $1 \leq q < \infty$.
Дакле, ако $T \in \mathscr{L}(L^q(\mathbb{R}^n))$, (4.9) важи. Стога (4.9) је слабији услов него $T \in \mathscr{L}(L^q(\mathbb{R}^n))$
За сљедећи доказ користићемо то да за било које мјерљиво $g : \mathbb{R}^n \to K$ и $1 \leq p < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(t;g) dt \tag{4.11}$$

Доказ се може наћи као теорема 8.16 у [7].

Доказ. (Теореме 4.13) Прво размотримо случај $r < \infty$. Нека је $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и размотримо функцију расподјеле $\lambda(t;Tf)$, $t > 0$, дефинисану као горе. За дато $t > 0$ дефинишемо $f = f_1 + f_2$ помоћу

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ако } |f(x)| > t \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Онда $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $f_2 \in L^r(\mathbb{R}^n)$ пошто

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^p \, |f_1(x)|^{1-p}\, dx \leq t^{1-p} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

и слично

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^r\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^{r-p} \, |f_2(x)|^p\, dx \leq t^{r-p} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Сада, пошто $|Tf(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$, имамо

$$\{x : |Tf(x)| > t\} \subseteq \{x : |Tf_1(x)| > t/2\} \cup \{x : |Tf_2(x)| > t/2\}.$$

Дакле

$$\begin{aligned} \lambda(t;Tf) &\leq \lambda(t/2;Tf_1) + \lambda(t/2;Tf_2) \\ &\leq \frac{C_1}{t/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|\, dx + \frac{C_r}{(t/2)^r} \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(x)|^r\, dx \\ &= \frac{2C_1}{t} \int_{\{|f(x)|>t\}} |f(x)| dx + \frac{2^r C_r}{t^r} \int_{\{|f(x)|\leq t\}} |f(x)|^r dx, \end{aligned}$$

гдје смо користили слаб тип $(1,1)$ и (r,r) процјену и (4.9). Сада комбинујемо ову процјену са (4.11). У ту сврху множимо све са pt^{p-1} и интегралимо на $\mathbb{R}^n$ по dt, тада на лијевој страни имамо $\|Tf\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, а за десну страну израчунавамо

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{p-1} t^{-1} \left(\int_{\{|f|>t\}} |f(x)| dx \right) dt &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_0^{|f(x)|} t^{p-2} dt dx \\ &= \frac{1}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||f(x)|^{p-1} dx \end{aligned}$$

пошто је $p > 1$ и слично

$$\int_0^\infty t^{p-1}t^{-r}\left(\int_{\{|f|\le t\}}|f(x)|^r dx\right)dt = \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^r\int_{|f(x)|}^\infty t^{p-1-r}dtdx$$
$$= \frac{1}{r-p}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^r|f(x)|^{p-r}dx$$

пошто је $p < r$. Дакле коначно

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ за све } f\in L^p(\mathbb{R}^n)$$

Коначно, ако $r = \infty$, претпостављамо ради једноставности да $C_\infty = 1$. У супротном замијенимо T са $C_\infty^{-1}T$. Затим користимо исто цијепање од f као и раније, али сијечемо на висини $t/2$ умјесто t. Стога $|Tf_2(x)| \le \frac{t}{2}$ пошто $\|T\|_{\mathscr{L}(L^\infty(\mathbb{R}^n))} \le 1$. Дакле

$$\{x : |Tf(x)| > t\} \subseteq \{x : |Tf_1(x)| > t/2\}$$

и $\lambda(t, Tf) \le \lambda(t/2, Tf_1)$. Остатак доказа се ради као и раније са само првим чланом. □

4.3 Сингуларни интегрални оператори неинваријантни на транслацију

У овом поглављу генерализујемо резултате о сингуларним интегралним операторима инваријантним на транслацију из претходног поглавља на случај који није инваријантан на транслацију и са вриједностима функција у произвољном Банаховом простору.

Надаље нека је X_0, X_1 Банахов простор и нека је T линерни оператор који задовољава сљедећу претпоставку:

Претпоставка 4.15 *Нека је $T : L^{p_0}(\mathbb{R}^n; X_0) \to L^{p_0}(\mathbb{R}^n; X_1)$ ограничени линеарни оператор за неко $1 < p_0 \le \infty$, гдје су X_0, X_1 Банахови простори. Штавише, претпоставимо да постоји локално интеграбилно језгро $k : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n\backslash\{0\}) \to \mathscr{L}(X_0, X_1)$ тако да за свако $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n; X_0)$ са компактним носачем*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, x-y)f(y)dy \quad \text{за скоро свако } x \notin \operatorname{supp} f$$

и то k задовољава Хермандер услов

$$\int_{|x|>2|y|}\|k(x,x-y) - k(x,x)\|_{\mathscr{L}(X_0,X_1)}dx \le B_K \quad \text{за свако } y\in\mathbb{R}^n. \tag{4.12}$$

Слично претходном поглављу, услов (4.12) је посљедица сљедећег јачег услова:

Лема 4.16 *Нека је $k : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n\backslash\{0\}) \to \mathscr{L}(X_0, X_1)$ локално интеграбилна функција која је непрекидно диференцибилна по другој промјенљивој и задовољава*

$$\|\nabla_z k(x,z)\|_{\mathscr{L}(X_0,X_1)} \le C|z|^{-n-1} \quad \text{за скоро свако } x\in\mathbb{R}^n, z\ne 0 \tag{4.13}$$

Тада k задовољава (4.12)

Доказ. Доказ је готово исти као и доказ Леме 4.7: Користимо

$$k(x, x-y) - k(x, x) = -\int_0^1 y \cdot \nabla k(x, x-ty)dt$$

Стога, ако је $|x| > 2|y|$, онда

$$\begin{aligned} \|k(x, x-y) - k(x, x)\|_{\mathscr{L}(X_0, X_1)} &\leq \sup_{t\in[0,1]} \|\nabla_z k(x, x-ty)\|_{\mathscr{L}(X_0, X_1)} |y| \\ &\leq C|x|^{-n-1}|y| \end{aligned}$$

пошто $|x - ty| \geq \frac{1}{2}|x|$ за свако $t \in [0, 1]$. Дакле,

$$\int_{|x|>2|y|} \|k(x, x-y) - k(x, x)\|_{\mathscr{L}(X_0, X_1)} dx \leq C \int_{|x|>2|y|} |x|^{-n-1} dx|y| \leq C'$$

униформно за $y \neq 0$ $\square$

Као и прије, као једноставну посљедицу овог посљедњег услова имамо сљедећу L^1-процјену:

Лема 4.17 *Нека је T као горе већ речено. Тада за свако $a \in L^1(\mathbb{R}^n; X_0)$ са $\operatorname{supp} a \subseteq Q$ и $\int_Q a(x)dx = 0$*

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \widetilde{Q}} \|Ta(x)\|_{X_1} dx \leq B_K \|a\|_{L^1(\mathbb{R}^n; X_0)}$$

гдје $\widetilde{Q} = Q^{2\sqrt{n}}$ означава коцку са истим центром као Q и $2\sqrt{n}$ пута дужину странице од Q. Слика 4.1.

Доказ је идентичан доказу Леме 4.8, само замјењујући $|\cdot|$ одговарајућим нормама $\|\cdot\|_Z, Z = X_0, X_1, \mathscr{L}(X_0, X_1)$.

Аналогно скаларним функцијама које се дефинишу за $f \in L^1(\mathbb{R}^n; X)$ максималан оператор је

$$(Mf)(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q \|f(y)\|_X dy,$$

гдје се супремум преузима над свим коцкама $Q \subset \mathbb{R}^n$ које садрже x. Штавише, Калдерон-Зигмундова декомпозиција се може извршити на исти начин јер се конструкција заснива само на величини средње вриједности $|f(x)|, \|f(x)\|_X$, респективно. Стога се опет апсолутна вриједност $|\cdot|$ само замјењује одговарајућим нормама $\|\cdot\|_X$. Онда имамо да се сви резултати претходног поглавља директно преносе на функције векторске вриједности $f \in L^1(\mathbb{R}^n; X)$. Конкретно, постоји слаба врста $(1, 1)$-процјене максималног оператора

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |(Mf)(x)| > t\}| \leq \frac{C}{t} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n; X)}$$

за свако $t > 0$ и Лебегова теорема

$$f(x) = \lim_{x\in Q, |Q|\to 0} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)dy \quad \text{у } X \text{ за скоро свако } x \in \mathbb{R}^n,$$

гдје се користи (као у скаларном случају) да су непрекидне, интеграбилне функције $f : \mathbb{R}^n \to X$ густе у $L^1(\mathbb{R}^n; X)$. Користећи ово, аналогна верзија Калдерон-Зигмундове декомпозиције која је наведена у теореми 4.9 важи за $f \in L^1(\mathbb{R}^n; X)$ поново са очигледним замјенама од $|\cdot|$ од $\|\cdot\|_X$. Тачније, имамо:

Теорема 4.18 *Нека $f \in L^1(\mathbb{R}^n; X_0)$, гдје је X_0 Банахов простор и нека је $t > 0$. Тада постоје дисјунктни мјерљиви скупови F, Ω такви да $\mathbb{R}^n = F \cup \Omega$ и*

1. $\|f(x)\|_{X_0} \leq t$ за скоро свако $x \in F$,

2. $\Omega = \bigcup_{j \in N}$, гдје $Q_j, j \in N \subseteq \mathbb{N}$, су дијадичке коцке које се не поклапају и

$$t < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} \|f(y)\|_{X_0} dy \leq 2^n t.$$

Штавише, ако $f = g + b$, гдје

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ако } x \in F, \\ \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y) dy & \text{ако } x \in Q_j, \end{cases}$$

онда

1. $\|g(x)\|_{X_0} \leq 2^n t$ скоро вако у $\mathbb{R}^n$,

2. $b(x) = 0$ за свако $x \in F$ и $\int_{Q_j} b(x) dx = 0$ за свако $j \in N$.

На основу тога добијамо наше друге главне резултате:

Теорема 4.19 *Нека је T као у претпоставци 4.15. Тада*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \|Tf(x)\|_{X_1} > t\}| \leq \frac{C_1}{t} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n; X_0)} \quad \text{за свако } t > 0 \tag{4.14}$$

за свако $f \in L^1(\mathbb{R}^n; X_0) \cap L^{p_0}(\mathbb{R}^n; X_0)$. Штавише, T проширује на ограничени линеарни оператор $T : L^p(\mathbb{R}^n; X_0) \to L^p(\mathbb{R}^n; X_1)$ за свако $1 < p \leq p_0$.

Доказ. Главни корак састоји у доказивању (4.14).

Нека је $f \in L^1(\mathbb{R}^n; X) \cap L^{p_0}(\mathbb{R}^n; X)$ и нека је $f(x) = g(x) + b(x)$ Калдерон-Зигмундова декомпозиција од f према теореми 4.18 за дато $t > 0$. Лако закључујемо да важи

$$|\{x : \|Tf(x)\|_{X_1} > t\}| \leq |\{x : \|Tg(x)\|_{X_1} > t/2\}| + |\{x : \|Tb(x)\|_{X_1} > t/2\}|$$

и довољно је процијенити сваки сабирак посебно. Примијетимо да важи

$$t|\Omega| = t \sum_{j \in N} |Q_j| \leq \sum_{j \in N} \int_{Q_j} \|f(x)\|_{X_0} dx = \int_{\Omega} \|f(x)\|_{X_0} dx \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n; X_0)}.$$

Да би се процијенило Tg, користимо да $\|g(x)\|_{X_1} \leq 2^n t$ за скоро свако $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = g(x)$ за $x \in F, t|\Omega| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n; X_0)}$ и да $T \in \mathscr{L}(L^{p_0}(\mathbb{R}^n))$:

$$\begin{aligned} |\{x : \|Tg(x)\|_{X_1} > t/2\}| &\leq \frac{2^{p_0}}{t^{p_0}} \int_{\mathbb{R}^n} \|Tg(x)\|_{X_1}^{p_0} dx \leq C \frac{2^{p_0}}{t^{p_0}} \int_{\mathbb{R}^n} \|g(x)\|_{X_0}^{p_0} dx \\ &\leq C_{p_0} t^{-p_0} \left(\int_F t^{p_0 - 1} \|f(x)\|_{X_0} dx + t^{p_0} |\Omega| \right) \\ &\leq C_{p_0} t^{-1} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n; X_0)} \end{aligned}$$

гдје смо користили (4.10) за $x \mapsto \|g(x)\|_{X_0}$.

Да бисмо процијенили Tb, примјењујемо Лему 4.17 на $b_j(x) := b(x)\chi_{Q_j}(x), j \in N$, гдје

$$Tb_j(x) = \int_{Q_j} k(x-y)b_j(y)dy \quad \text{за скоро свако } x \notin Q_j$$

према претпоставци о језгру k. Дакле, ако $\widetilde{Q}_j = Q_j^{2\sqrt{n}}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \widetilde{Q}_j} \|Tb_j(x)\|_{X_1} dx \leq B_K \|b_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n;X_0)} \leq 2B_K \int_{Q_j} \|f(x)\|_{X_0} dx$$

С друге стране, пошто $b \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n; X_0)$, $\sum_{j\in N} b_j$ и дакле $\sum_{j\in N} Tb_j$ конвергира у $L^{p_0}(\mathbb{R}^n; X_0))$ у b и Tb, респективно (ако је N бесконачан). Дакле

$$\|Tb(x)\|_{X_1} \leq \sum_{j\in N} \|Tb_j(x)\|_{X_1} \quad \text{скоро свуда}$$

те такође

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega}} \|Tb(x)\|_{X_1} dx \leq 2B_K \sum_{j\in N} \int_{Q_j} \|f(x)\|_{X_0} dx \leq 2B_k \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n;X_0)},$$

гдје $\widetilde{\Omega} = \bigcup_{j\in N} \widetilde{Q}_j$. Коначно,

$$|\{x : \|Tb(x)\|_{X_1} > t/2\}| \leq |\widetilde{\Omega}| + \frac{2}{t} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \widetilde{\Omega}} \|Tb(x)\|_{X_1} dx \leq \frac{C}{t} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n;X_0)}$$

пошто се слично као за Ω доказује да $t|\widetilde{\Omega}| \leq C\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n;X_0)}$, чиме се завршава доказ (4.14). Коначно, примјењујемо векторску варијанту Марћинкјвичеве интерполационе теореме, Теорема 4.20 у наставку, да завршимо доказ. □

Теорема 4.20 *(Марћинкјевичева интерполациона теорема)*

Претпоставимо да $1 < r \leq \infty$ и да су X_0, X_1 Банахови простори. Нека је T подадитивно пресликавање из $L^1(\mathbb{R}^n; X_0) + L^r(\mathbb{R}^n; X_0)$ на векторски простор јако мјерљивих функција на $\mathbb{R}^n$ са вриједностима у X_1, који је слабог типа $(1,1)$ и (r,r) , тј.

$$\lambda(t; Tf) := |\{x : \|Tf(x)\|_{X_1} > t\}| \leq C_q \frac{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n;X_0)}}{t^q} \tag{4.15}$$

за свако $f \in L^q(\mathbb{R}^n; X_0)$, за $q = 1$ и $q = r$ ако $r < \infty$ и $\|Tf\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;X_1)} \leq C_\infty \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;X_0)}$ ако $r = \infty$ за неко $C_q > 0$. Тада

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n;X_1)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;X_0)} \quad \text{за свако } f \in L^p(\mathbb{R}^n; X_0)$$

за свако $1 < p < r$, гдје C_p зависи само од C_1, C_r, p, и r.

Доказ. Доказ у скаларном случају се готово дословно преноси на случај векторске вриједности јер се процјене заснивају само на величини функција Tf и f. Треба само замијенити $|\cdot|$ са $\|\cdot\|_{X_j}$ за $j = 0, 1$.

Алтернативно, може се примијенити сљедећи аргумент: Нека $x_0 \in X_0$ са $\|x_0\|_{X_0} = 1$ буде произвољно и размотримо пресликавање M_{x_0} из $L^1(\mathbb{R}^n) + L^r(\mathbb{R}^n)$ у скупу мјерљивих (скаларних) функција дефинисаних са

$$M_{x_0}g(x) = \|T(gx_0)(x)\|_{X_1} \quad \text{за свако } g \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^r(\mathbb{R}^n).$$

Тада M_{x_0} задовољава услове скаларне Марћинкјевичеве интерполацијске теореме, тј. теореме 4.13, са константама независним од x_0. Стога за сваки $1 < p < r$ постоји неки C_p (независан од x_0) такав да

$$\|T(gx_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n;X_1)} = \|M_{x_0}g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C_p\|gx_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n;X_0)}$$

за свако $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. То имплицира

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n;X_1)} \leq C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;X_0)}$$

за све једноставне функције $f : \mathbb{R}^n \to X_0$. Пошто су једноставне функције густе у $L^p(\mathbb{R}^n; X_0)$, слиједи тврдња теореме. $\square$

Сљедећа теорема ће нам бити потребна у доказу L^p ограничености псеудо диференцијалних оператора реда 0. Да би њу доказали биће нам потребан већи број помоћних тврђења.

Теорема 4.21 *Нека је $p \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), m \in \mathbb{R}$. Тада постоји глатка функција $k : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \to \mathbb{C}$ тако да*

$$p(x, D_x)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, x-y)u(y)dy \quad \text{за свако } x \notin \operatorname{supp} u \tag{4.16}$$

за свако $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Штавише, за свако $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, N \in \mathbb{N}_0, k$ задовољава

$$\left|\partial_x^\beta \partial_z^\alpha k(x,z)\right| \leq \begin{cases} C_{\alpha,\beta,N}|z|^{-n-m-|\alpha|}\langle z\rangle^{-N} & \text{ако } n+m+|\alpha| > 0 \\ C_{\alpha,\beta,N}(1+|\log|z||)\langle z\rangle^{-N} & \text{ако } n+m+|\alpha| = 0 \\ C_{\alpha,\beta,N}\langle z\rangle^{-N} & \text{ако } n+m+|\alpha| < 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

униформно за $x, z \in \mathbb{R}^n, z \neq 0$. Посебно имамо

$$\langle p(x, D_x)u, v\rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} k(x, x-y)u(y)v(x)d(x,y),$$

за свако $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ за које важи $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} v = \emptyset$ и Шварцово језгро $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ од $p(x, D_x)$ је глатка функција на $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \neq y\}$.

У наставку нам је потребна дијадичка партиција јединице на $\mathbb{R}^n$, који се може конструисати на сљедећи начин: Нека $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ је такво да $\varphi_0(\xi) = 1$ за $|\xi| \leq 1$ и $\varphi_0(\xi) = 0$ за $|\xi| \geq 2$. Штавише, нека је $\varphi_j(\xi) = \varphi_0(2^{-j}\xi) - \varphi_0(2^{-j+1}\xi)$ за $j \in \mathbb{N}$. Тада

$$\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\right\} \quad \text{за свако } j \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{supp} \varphi_0 \subseteq \overline{B_2(0)}$$

и

$$\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(\xi)=\sum_{j=0}^{k}\varphi_j(\xi)=\varphi_0\left(2^{-k}\xi\right)=1$$

за $\xi\in\mathbb{R}^n$ и $k\in\mathbb{N}$ тако да $|\xi|\leq 2^k$. Стога $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$, је подјела цјелине на $\mathbb{R}^n$ подређене дијадне прстенове $\left\{\xi\in\mathbb{R}^n:2^{j-1}\leq|\xi|\leq 2^{j+1}\right\},j\in\mathbb{N}$, и $\overline{B_2(0)}$

Напомена 4.22 *Није тешко доказати да се асимптотично понашање функције $f(\xi)$ кад $|\xi|\to\infty$ може описати уз помоћ ове подјеле цјелине на алтернативни начин:*

$$|f(\xi)|\leq C\langle\xi\rangle^m\quad\Leftrightarrow\quad\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\varphi_j(\xi)f(\xi)|\leq C'2^{jm}\quad\text{за све } j\in\mathbb{N}_0$$

гдје $m\in\mathbb{R}$ и $C'>0$ не зависи од j.
Очигледно, $\varphi_j\in S^{-\infty}_{1,0}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ пошто $\varphi_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Штавише,

$$\begin{array}{ll}\sum_{j=0}^{N}\varphi_j(\xi)=\varphi_0\left(2^{-N}\xi\right)\to_{N\to\infty}1 & \text{тачкасто за све } \xi\in\mathbb{R}^n \text{ и}\\ \sum_{j=0}^{N}\partial_\xi^\alpha\varphi_j(\xi)\to_{N\to\infty}0 & \text{униформно за све } \xi\in\mathbb{R}^n \text{ ако } \alpha\neq 0\end{array}$$

пошто за свако $\xi\in\mathbb{R}^n$ постоје највише два члана различита од нуле у сумама и

$$\partial_\xi^\alpha\varphi_j(\xi)=2^{-|\alpha|(j-1)}\partial_\xi^\alpha\varphi_1\left(2^{-j+1}\xi\right)\qquad\text{за свако } \alpha\in\mathbb{N}_0^n,j\in\mathbb{N}.\tag{4.18}$$

Стога

$$\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(\xi)\hat{f}=\hat{f}\quad\text{ и }\quad\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j\left(D_x\right)f=f\quad\text{ у } \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

пошто $\left|\sum_{j=0}^{N}\varphi_j(\xi)\hat{f}-\hat{f}\right|''_{k,\mathcal{S}}\to_{N\to\infty}0$ за свако $k\in\mathbb{N}$ због Лебегове теореме, гдје је $|\cdot|''_{k,\delta},k\in\mathbb{N}$ еквивалентан низ семи-норми $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ што је дефинисан у королару 2.8 замјеном $\|\cdot\|_\infty$ са $\|\cdot\|_2$.

Уз помоћ дијадичке декомпозиције декомпонујемо псеудо-диференцијални оператор као

$$p\left(x,D_x\right)f=\sum_{j=0}^{\infty}p\left(x,D_x\right)\varphi_j\left(D_x\right)f=\sum_{j=0}^{\infty}p_j\left(x,D_x\right)f\tag{4.19}$$

за свако $f\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, гдје је $p_j(x,\xi)=p(x,\xi)\varphi_j(\xi)\in S^{-\infty}_{1,0}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ и низ конвергира у $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ пошто $p(x,D_x):\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ је непрекидно. Штавише, пошто $p_j(x,\xi)$ има компактан носач по ξ

$$p_j\left(x,D_x\right)f=\int_{\mathbb{R}^n}k_j(x,x-y)f(y)dy\tag{4.20}$$

гдје $k_j(x,z)=\mathcal{F}^{-1}_{\xi\mapsto z}\left[p_j(x,\xi)\right](z)$, слично као у доказу леме 4.2.

Лема 4.23 *Нека $p\in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n),m\in\mathbb{R}$ и нека је $k_j(x,z)$ дефинисано као горе. Тада важи*

$$\left|\partial_x^\beta\partial_z^\alpha k_j(x,z)\right|\leq C_{\alpha,\beta,M}|z|^{-M}2^{j(n+m-M+|\alpha|)}\qquad\text{за свако } z\neq 0,j\in\mathbb{N}_0\tag{4.21}$$

за свако $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n,M\in\mathbb{N}_0$, гдје $C_{\alpha,\beta,M}$ не зависи од $j\in\mathbb{N}_0$ и $z\neq 0$.

Доказ. Прије свега,

$$z^{\gamma}\partial_x^{\beta}D_z^{\alpha}k_j(x,z)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}D_{\xi}^{\gamma}\left[\xi^{\alpha}\partial_x^{\beta}p_j(x,\xi)\right]đ\xi$$

за свако $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^n$. Сада правимо директне процјене горњег интеграла. Прво, интеграл је садржан у лопти $\left\{|\xi|\leq 2^{j+1}\right\}$, који има запремину ограничену умношком од 2^{nj}. Друго, пошто је носач чак садржан у скупу $\left\{2^{j-1}\leq\ |\xi|\leq 2^{j+1}\right\}$ (гдје $j\neq 0$) и $c2^j\leq\langle\xi\rangle\leq C2^j$ ако $2^{j-1}\leq|\xi|\leq 2^{j+1}$,

$$\begin{aligned}\left|D_{\xi}^{\gamma}\left[\xi^{\alpha}\partial_x^{\beta}p_j(x,\xi)\right]\right|&\leq\sum_{0\leq\gamma'\leq\gamma}\begin{pmatrix}\gamma\\ \gamma'\end{pmatrix}\left|D_{\xi}^{\gamma'}\left(\xi^{\alpha}\partial_x^{\beta}p(x,\xi)\right)\right|\left|D_{\xi}^{\gamma-\gamma'}\varphi_j(\xi)\right|\\&\leq C_{\alpha,\beta,\gamma}\sum_{0\leq\gamma'\leq\gamma}\langle\xi\rangle^{m+|\alpha|-|\gamma'|}\chi_{\{2^{j-1}\leq|\eta|\leq 2^{j+1}\}}(\xi)\cdot 2^{-j\left(|\gamma|-|\gamma'|\right)}\\&\leq C'_{\alpha,\beta,\gamma}2^{j(m+|\alpha|-|\gamma|)}\end{aligned}$$

због процјене симбола на $\xi^{\alpha}\partial_x^{\beta}p(x,\xi)\in S_{1,0}^{m+|\alpha|}\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\right)$. Стога

$$\left|z^{\gamma}D_x^{\beta}D_z^{\alpha}k_j(x,z)\right|\leq C_{\alpha,\beta,\gamma}2^{j(n+m+|\alpha|-M)}\qquad\text{било када } |\gamma|=M.$$

Узимање максимума за све γ са $|\gamma|=M$ даје (4.21) и доказује лему. □

Коначно долазимо до жељеног доказа.

Доказ. (Теореме 4.21) Прије свега, због (4.19) и (4.20) имамо

$$p\left(x,D_x\right)u(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}k_j(x,x-y)u(y)dy \tag{4.22}$$

за свако $x\in\mathbb{R}^n,u\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$. (4.16) и (4.17) ћемо доказати тако што ћемо показати да

$$\sum_{j=0}^{\infty}\partial_z^{\alpha}\partial_x^{\beta}k_j(x,z)$$

конвергира апсолутно и равномјерно у односу на $(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\left(\mathbb{R}^n\backslash B_{\varepsilon}(0)\right)$ за свако $\varepsilon>0$ функцији $k(x,z)$ задовољавајући (4.17)

Прво нека $0<|z|\leq 1$. Затим подијелимо суму на

$$\sum_{2^j\leq|z|^{-1}}\partial_z^{\alpha}\partial_x^{\beta}k_j(x,z)\quad\text{ и }\quad\sum_{2^j>|z|^{-1}}\partial_z^{\alpha}\partial_x^{\beta}k_j(x,z)$$

Да бисмо процијенили први збир, користимо лему 4.23 са $M=0$ и добијамо

$$\begin{aligned}\sum_{2^j\leq|z|^{-1}}\left|\partial_z^{\alpha}\partial_x^{\beta}k_j(x,z)\right|&\leq C_{\alpha,\beta}\sum_{j=0}^{\left\lfloor\mathrm{ld}\left(|z|^{-1}\right)\right\rfloor}2^{j(n+m+|\alpha|)}\\&\leq\begin{cases}C_{\alpha,\beta}|z|^{-(m+n+|\alpha|)} & \text{ако } m+n+|\alpha|>0\\ C_{\alpha,\beta}\left(1+|\log|z|^{-1}|\right) & \text{ако } m+n+|\alpha|=0\\ C_{\alpha,\beta} & \text{ако } m+n+|\alpha|<0\end{cases}\end{aligned}$$

гдје $\mathrm{ld} = \log_2$. За други члан користимо лему 4.23 са $M > n + m + |\alpha|$ и процјењујемо

$$\sum_{2^j > |z|^{-1}} \left|\partial_z^\alpha \partial_x^\beta k_j(x,z)\right| \leq C_{\alpha,\beta} |z|^{-M} \sum_{j=\lfloor \mathrm{ld}(|z|^{-1}) \rfloor + 1}^{\infty} 2^{j(n+m+|\alpha|-M)}$$
$$\leq C_{\alpha,\beta} |z|^{-(n+m+|\alpha|)}$$

Коначно, ако $|z| \geq 1$, бирамо $M > \max(n + m + |\alpha|, N)$ у леми 4.23 да закључимо

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left|\partial_z^\alpha \partial_x^\beta k_j(x,z)\right| \leq C_{\alpha,\beta,M} |z|^{-M} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(n+m+|\alpha|-M)}$$
$$\leq C_{\alpha,\beta,M} |z|^{-M} \leq C'_{\alpha,\beta,M} |z|^{-m-n-|\alpha|-N}.$$

Стога $\sum_{j=0}^{\infty} k_j(x,z)$ конвергира апсолутно и униформно у односу на $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash B_\varepsilon(0))$ за свако $\varepsilon > 0$ функцији $k(x,z)$ задовољавајући (4.17). Користећи униформну конвергенцију и (4.22), закључујемо да (4.16) важи за све $x \in \mathbb{R}^n$ са $\mathrm{dist}(x, \operatorname{supp} u) \geq \varepsilon$ за произвољно $\varepsilon > 0$. Стога (4.16) слиједи за све $x \notin \operatorname{supp} u$. $\square$

4.4 Ограниченост псеудо-диференцијалних оператора реда нула на Лебеговим просторима (први доказ)

У претходна два одјељка скупили смо потребне тврдње да би доказали сљедећу теорему:

Теорема 4.24 *Нека је $p \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ и $1 < q < \infty$. Тада се $p(x, D_x)$ проширује на ограничени линеарни оператор $p(x, D_x) : L^q(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$.*

Доказ. Због теореме 4.1 знамо да $p(x, D_x) \in \mathscr{L}\left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)$. Штавише, због теореме 4.21, постоји језгро k такво да (4.16) важи, а k задовољава

$$|\partial_x^\alpha k(x,z)| \leq C|z|^{-n-|\alpha|} \text{ за свако } x \in \mathbb{R}^n, z \neq 0, |\alpha| = 1$$

тј. k задовољава (4.13). Отуда k задовољава Хермандеров услов (4.12) због леме 4.16. Стога $p(x, D_x)$ задовољава све претпоставке теореме 4.19. Дакле, $p(x, D_x)$ се проширује до ограниченог линеарног опeратра

$$p(x, D_x) : L^q(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n) \text{ за свако } 1 < q \leq 2$$

Тврђење за $2 < q < \infty$ доказује се дуалношћу, тј. користимо то што

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(x, D_x) f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{p^*(x, D_x) g(x)} dx \quad \text{ за свако } f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

гдје је $p^* \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ као у посљедици 3.21. Сада се $p^*(x, D_x)$ проширује до ограниченог линеарног оператора на $L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ према првом дијелу, гдје $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Стога

$$
\begin{aligned}
\|p(x,D_x)f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{g\in L^{q'}(\mathbb{R}^n):\|g\|_{L^{q'}}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} p(x,D_x)f(x)\overline{g(x)}dx\right| \\
&\le \sup_{g\in L^{q'}(\mathbb{R}^n):\|g\|_{L^{q'}}=1} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|p^*(x,D_x)g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \|p^*(x,D_x)\|_{\mathscr{L}\left(L^{q'}(\mathbb{R}^n)\right)} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

за свако $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ због теореме 1.23. Дакле $p(x,D_x)$ се проширује до ограниченог линеарног оператора на $L^q(\mathbb{R}^n)$. □

4.5 Ограниченост псеудо-диференцијалних оператора реда нула на Лебеговим просторима (други доказ)

Нека је p симбол. Тада, због теореме 3.7, знамо да псеудо-диференцијални оператор $OP(p)$ пресликава Шаврцов простор $\mathcal{S}$ у $\mathcal{S}$ непрекидно, па важи и секвенционална непрекидност те ако $\varphi_k \to 0$ у $\mathcal{S}$, тада $OP(p)\varphi_k \to 0$ у $\mathcal{S}$ када $k \to \infty$.

Долазимо до другог доказа ограничености псеудо-диференцијалних оператора реда нула на L^p просторима. Напоменимо да ћемо из техничких разлога у (3.3) $đ\xi$ замијенити са $(2\pi)^{-n/2}\xi$.

Теорема 4.25 *Нека је p симбол у $S^0_{1,0}$. Тада $OP(p) : L^q(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ је ограничени линеарни оператор за $1 < q < \infty$.*

Сљедећи резултат игра важну улогу у нашем доказу теореме 4.25. То је посебан случај теореме 2.5 у [8].

Теорема 4.26 *Нека је $m \in C^k(\mathbb{R}^n - \{0\}), k > \frac{n}{2}$, такво да постоји позитивна константа B за коју*

$$
|(D^\alpha m)(\xi)| \le B|\xi|^{-|\alpha|}, \quad \xi \ne 0
$$

за сваки мулти-индекс α за који $|\alpha| \le k$. Тада за $1 < q < \infty$, постоји позитивна константа C, која зависи само од q и n, тако да

$$
\|T\varphi\|_q \le CB\|\varphi\|_q, \quad \varphi \in \mathcal{S}
$$

гдје

$$
(T\varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} m(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.
$$

Сада можемо доказоати теорему 4.25.

Доказ. (Теореме 4.25) Нека је $\mathbb{Z}^n$ скуп свих n-торки у $\mathbb{R}^n$ са цјелобројним координатама. Запишимо $\mathbb{R}^n$ као унију коцки са дисјунктним унутрашњостима, тј. $\mathbb{R}^n = \cup_{m\in\mathbb{Z}^n} Q_m$, гдје је Q_m коцка са центром m, са ивицама дужине један и паралелним са координатним оса. Означимо са Q_0 коцку са центром у координатном почетку. Нека је η нека функција у $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ таква да $\eta(x) = 1$ за свако $x \in Q_0$. За $m \in \mathbb{Z}^n$, дефинишимо p_m са

$$p_m(x,\xi)=\eta(x-m)p(x,\xi), \quad x,\xi\in\mathbb{R}^n$$

Очигледно, $OP(p_m)=\eta(x-m)OP(p)$, и

$$\int_{Q_m}|(OP(p)\varphi)(x)|^q\,dx\le\int_{\mathbb{R}^n}|(OP(p_m)\varphi)(x)|^q\,dx, \quad \varphi\in\mathcal{S}. \tag{4.23}$$

Пошто $p_m(x,\xi)$ има компактан носач у x, из Фубинијеве теореме и због инверзне Фуријеове трансформације имамо

$$\begin{aligned}(OP(p_m)\varphi)(x)&=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}p_m(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi\\&=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\lambda}\widehat{p_m}(\lambda,\xi)d\lambda\right\}\hat{\varphi}(\xi)d\xi\\&=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\lambda}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\widehat{p_m}(\lambda,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi\right\}d\lambda,\end{aligned} \tag{4.24}$$

гдје

$$\widehat{p_m}(\lambda,\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\lambda\cdot x}p_m(x,\xi)dx, \quad \lambda,\xi\in\mathbb{R}^n$$

Лема 4.27 *За све мути-индексе α и позитивне цијеле бројеве N, постоји позитивна константа $C_{\alpha,N}$, која зависи само од α и N, тако да*

$$\left|\left(D_\xi^\alpha\widehat{p_m}\right)(\lambda,\xi)\right|\le C_{\alpha,N}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}(1+|\lambda|)^{-N}, \quad \lambda,\xi\in\mathbb{R}^n$$

Доказ леме 4.27, иако лак, биће дат касније. Ова лема и теорема 4.26 имплицирају да је оператор $\varphi\mapsto T_\lambda\varphi$, дефинисан на $\mathcal{S}$ од стране

$$(T_\lambda\varphi)(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\widehat{p_m}(\lambda,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi \tag{4.25}$$

може се проширити на ограничени линеарни оператор на $L^q(\mathbb{R}^n)$. Штавише, за било који позитиван цио број N, постоји позитивна константа C_N таква да

$$\|T_\lambda\varphi\|_p\le C_N(1+|\lambda|)^{-N}\|\varphi\|_p, \quad \varphi\in\mathcal{S} \tag{4.26}$$

Користећи (4.24)-(4.26) и неједнакост Минковског у интегралном облику,

$$\begin{aligned}\|OP(p_m)\varphi\|_q&=(2\pi)^{-n/2}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\lambda}(T_\lambda\varphi)(x)d\lambda\right|^q dx\right\}^{1/q}\\&\le(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|(T_\lambda\varphi)(x)|^q\,dx\right\}^{1/q}d\lambda\\&=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\|T_\lambda\varphi\|_q\,d\lambda\\&\le C_N(2\pi)^{-n/2}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\lambda|)^{-N}d\lambda\right\}\|\varphi\|_q, \quad \varphi\in\mathcal{S}.\end{aligned}$$

Одабиром N довољно великог, можемо добити још једну позитивну константу C_N тако да

$$\|OP(p_m)\varphi\|_q \leq C_N \|\varphi\|_q, \quad \varphi \in \mathcal{S} \tag{4.27}$$

Дакле, према (4.23) и (4.27)

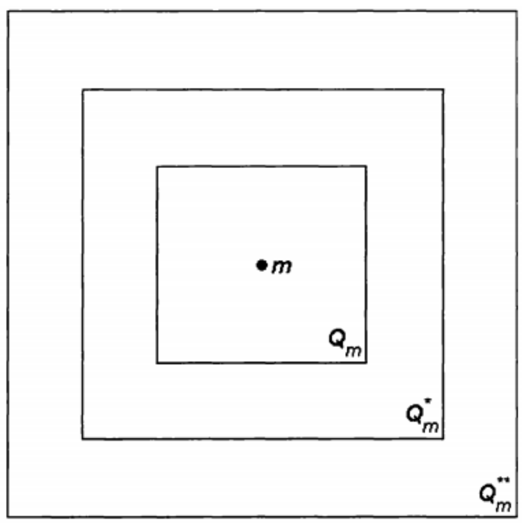
$$\int_{Q_m} |(OP(p)\varphi)(x)|^q \, dx \leq C_N^q \|\varphi\|_q^q, \quad \varphi \in \mathcal{S} \tag{4.28}$$

Сада, представљамо $OP(p)$ као сингуларни интегрални оператор. Тачно, имамо

Лема 4.28 *Нека је k као из теормене 4.21. Тада за сваки довољно велики позитиван цио број N постоји позитивна константа C_N таква да*

$$|k(x,z)| \leq C_N |z|^{-N}, \quad z \neq 0$$

Претпоставимо за тренутак да важи лема 4.28 и такође користимо теорему 4.21. Нека је Q_m^{**} двојник од Q_m, тј. Q_m^{**} има исти центар као Q_m и ивице паралелне са координатним осама и двоструку дужину ивице од ивица Q_m. Нека је Q_m^* друга коцка концентрична са Q_m и Q_m^{**} тако да $Q_m \subset Q_m^* \subset Q_m^{**}$. Штавише, претпостављамо да постоји позитиван број δ такав да $|x-z| \geq \delta$ за свако $x \in Q_m$ и $z \in \mathbb{R}^n - Q_m^*$. Геометрија је илустрована сљедећом сликом.



Слика 4.2.

Нека је $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такво да

$$0 \leq \psi(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^n$$
$$\operatorname{supp}(\psi) \subseteq Q_m^{**}$$

и

$$\psi(x) = 1$$

на околини од Q_m^*. Запишимо $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, гдје је $\varphi_1 = \psi\varphi$, и $\varphi_2 = (1-\psi)\varphi$. Онда

$$OP(p)\varphi = OP(p)\varphi_1 + OP(p)\varphi_2$$

Записујемо са

$$I_m = \int_{Q_m} |(OP(p)\varphi)(x)|^q \, dx$$

и

$$J_m = \int_{Q_m} |(OP(p)\varphi_2)(x)|^q \, dx$$

Тада за сваки довољно велики позитиван цио број N, неједнакост (4.28) имплицира да постоји позитивна константа C_N, таква да

$$\begin{aligned} I_m &= \int_{Q_m} |(OP(p)\varphi_1)(x) + (OP(p)\varphi_2)(x)|^q \, dx \\ &\leq 2^q \int_{Q_m} |(OP(p)\varphi_1)(x)|^q \, dx + 2^q J_m \\ &\leq 2^q C_N^q \|\varphi_1\|_q^q + 2^q J_m \end{aligned} \tag{4.29}$$

Из леме 4.28 и теореме 4.21, постоји позитивна констнта C_{2N} таква да за свако $x \in Q_m$ важи

$$\begin{aligned} |(OP(p)\varphi_2)(x)| &= (2\pi)^{-n/2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} k(x, x-z)\varphi_2(z) dz \right| \\ &= (2\pi)^{-n/2} \left| \int_{\mathbb{R}^n - Q_m^*} k(x, x-z)\varphi_2(z) dz \right| \\ &\leq C_{2N} \int_{\mathbb{R}^n - Q_m^*} |x-z|^{-2N} |\varphi_2(z)| \, dz. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Нека је $\lambda \geq \sqrt{n} + 1$. Онда постоји позитивна константа $C_{\lambda,N}$, која зависи само од λ и N, тако да

$$\frac{|x-z|^{-2N}}{(\lambda + |x-z|)^{-2N}} = \frac{(\lambda + |x-z|)^{2N}}{|x-z|^{2N}} \leq C_{\lambda,N} \tag{4.31}$$

за савко $x \in Q_m$ и $z \in \mathbb{R}^n - Q_m^*$. Дакле, због (4.30) и (4.31),

$$|(OP(p)\varphi_2)(x)| \leq \quad C_{2N} C_{\lambda,N} \int_{\mathbb{R}^n - Q_m^*} (\lambda + |x-z|)^{-2N} |\varphi_2(z)| \, dz, \quad x \in Q_m. \tag{4.32}$$

Даље, примјећујемо то за све $x \in Q_m$ и $z \in \mathbb{R}^n - Q_m^*$,

$$\begin{aligned}\lambda+|x-z| &= \lambda+|x-m+m-z| \\ &\geq \lambda+|m-z|-|x-m| \\ &\geq \left(\lambda-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)+|m-z| \\ &\geq \mu+|m-z|, \end{aligned} \tag{4.33}$$

гдје је $\mu=\frac{\sqrt{n}}{2}+1$. Због (4.32) и (4.33),

$$|(OP(p)\varphi_2)(x)| \leq \quad C_{2N}C_{\lambda,N}\int_{\mathbb{R}^n-Q_m^*}\frac{(\mu+|x-z|)^{-N}|\varphi_2(z)|}{(\mu+|m-z|)^N}dz, \quad x\in Q_m.$$

Неједнакошћу Минковског у интегралном облику и Хелдеровом неједнакошћу имамо да

$$\begin{aligned}&\left(\int_{Q_m}|(OP(p)\varphi_2)(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \\ &\leq C_{2N}C_{\lambda,N}\left\{\int_{Q_m}\left|\int_{\mathbb{R}^n-Q_m^*}\frac{(\mu+|x-z|)^{-N}|\varphi_2(z)|}{(\mu+|m-z|)^N}dz\right|^q dx\right\}^{1/q} \\ &\leq C_{2N}C_{\lambda,N}\int_{\mathbb{R}^n-Q_m^*}\left\{\int_{Q_m}\frac{(\mu+|x-z|)^{-Nq}|\varphi_2(z)|^q}{(\mu+|m-z|)^{Nq}}dx\right\}^{1/q}dz \\ &= C_{2N}C_{\lambda,N}\int_{\mathbf{R}^n-Q_m^*}\frac{|\varphi_2(z)|}{(\mu+|m-z|)^N}\left\{\int_{Q_m}(\mu+|x-z|)^{-Nq}dx\right\}^{1/q}dz \\ &\leq C_{2N}C_{\lambda,N}\left\{\int_{\mathbb{R}^n-Q_m^*}(\mu+|m-z|)^{-Nq'/2}dz\right\}^{1/q'} \\ &\left\{\int_{\mathbb{R}^n-Q_m^*}\frac{|\varphi_2(z)|^q}{(\mu+|m-z|)^{Nq/2}}dz\right\}^{1/q}\end{aligned}$$

Дакле, за било који довољно велики позитиван цио број N, постоји позитивна константа $C_{\lambda,N,q}$, која зависи само од λ, N и q, тако да

$$J_m \leq C_{\lambda,N,q}\int_{\mathbb{R}^n-Q_m^*}\frac{|\varphi_2(z)|^q}{(\mu+|m-z|)^{Nq/2}}dz \tag{4.34}$$

Из (4.29) и (4.34),

$$I_m \leq 2^qC_N^q\int_{Q_m^{**}}|\varphi(x)|^q dx + 2^qC_{\lambda,N,q}\int_{\mathbb{R}^n-Q_m^*}\frac{|\varphi_2(z)|^q}{(\mu+|m-z|)^{Nq/2}}dz.$$

Сумирајући све m у $\mathbb{Z}^n$, добијамо позитивну константу C, која зависи само од n, q, N и λ, тако да

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |(OP(p)\varphi)(x)|^q \, dx \\
\leq & 2^q C_N^q \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \int_{Q_m^{**}} |\varphi(x)|^q dx + \\
& 2^q C_{\lambda,N,q} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n - Q_m^*} \frac{|\varphi_2(z)|^q}{(\mu + |m-z|)^{Nq/2}} dz \\
\leq & C \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q dx + 2^q C_{\lambda,N,q} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n - Q_m} \frac{|\varphi_2(z)|^q}{(\mu + |m-z|)^{Nq/2}} dz \\
= & C \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q dx + 2^q C_{\lambda,N,q} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \sum_{l\neq m} \int_{Q_l} \frac{|\varphi_2(z)|^q}{(\mu + |m-z|)^{Nq/2}} dz.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Али користећи исти аргумент као у извођењу (4.33), добијамо

$$\mu + |m-z| \geq 1 + |m-l| \tag{4.36}$$

за све $z \in Q_l$ и $l \neq m$. Из (4.36),

$$\begin{aligned}
& \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \sum_{l\neq m} \int_{Q_l} \frac{|\varphi_2(z)|^q}{(\mu + |m-z|)^{Nq/2}} dz \\
\leq & \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \sum_{l\neq m} \frac{1}{(1+|m-l|)^{Nq/2}} \int_{Q_l} |\varphi_2(z)|^q \, dz \\
\leq & \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+|m-l|)^{Nq/2}} \int_{Q_l} |\varphi_2(z)|^q \, dz \\
= & \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \int_{Q_l} |\varphi_2(z)|^q \, dz \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+|m-l|)^{Nq/2}} \\
= & \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \int_{Q_l} |\varphi_2(z)|^q \, dz \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+|m|)^{Nq/2}} \\
= & \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+|m|)^{Nq/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_2(z)|^q \, dz.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Стога, због (4.35) и (4.37)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(OP(p)\varphi)(x)|^q \, dx \leq \left\{ C + 2^q C_{\lambda,N,q} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+|m|)^{Nq/2}} \right\} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q dx$$

Пошто је $\mathcal{S}$ густ у $L^q(\mathbb{R}^n)$, слиједи да $OP(p)$ може да се прошири до ограниченог линеарног оператора на $L^q(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Сада долазимо до доказа леми 4.27 и 4.28.

Доказ. (леме 4.27) Нека је β произвољни мулти-индекс. Затим, парцијалном интеграцијом и Лајбницовом формулом,

$$
\begin{aligned}
&(-i\lambda)^{\beta}\left(D_{\xi}^{\alpha}\widehat{p_m}\right)(\lambda,\xi)\\
=&(-i\lambda)^{\beta}D_{\xi}^{\alpha}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\lambda}p_m(x,\xi)dx\\
=&(-i\lambda)^{\beta}D_{\xi}^{\alpha}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\lambda}\eta(x-m)p(x,\xi)dx\\
=&D_{\xi}^{\alpha}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\partial_x^{\beta}e^{-ix\cdot\lambda}\right\}\eta(x-m)p(x,\xi)dx\\
=&(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\partial_x^{\beta}e^{-ix\cdot\lambda}\right\}\eta(x-m)\left(D_{\xi}^{\alpha}p\right)(x,\xi)dx\\
=&(-1)^{|\beta|}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\lambda}\partial_x^{\beta}\left\{\eta(x-m)\left(D_{\xi}^{\alpha}p\right)(x,\xi)\right\}dx\\
=&(-1)^{|\beta|}(2\pi)^{-n/2}\sum_{\gamma\leq\beta}\left(\begin{array}{c}\beta\\ \gamma\end{array}\right)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\lambda}\left(\partial_x^{\gamma}\eta\right)(x-m)\left(\partial_x^{\beta-\gamma}D_{\xi}^{\alpha}p\right)(x,\xi)dx.
\end{aligned}
$$

Користећи својства η и чињеницу да је $p\in S_{1,0}^{0}$, можемо пронаћи позитивну константу $C_{\alpha,\beta}$, која зависи од α и само β, тако да

$$\left|(-i\lambda)^{\beta}\left(D_{\xi}^{\alpha}\widehat{p_m}\right)(\lambda,\xi)\right|\leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|},\quad \lambda,\xi\in\mathbb{R}^n$$

Лема лако слиједи из ове процјене. □

Доказ. (леме 4.28) Посматрајмо специјалан случај за (4.17), када је $\alpha=0,\ \beta=0$ и $m=0$. Тада за произвољно N_0 имамо

$$|k(x,z)|\leq C_{N_0}|z|^{-n}\langle z\rangle^{-N_0}\leq C_{N_0}|z|^{-n-N_0}$$

Дакле, за $N=n+N_0$ имамо жељену тврдњу. □

Напомена 4.29 *Доказ L^q-ограничености псеудо-диференцијалних оператора за $1<q<\infty$ дат у теореми 4.25 заснива се на теореми 4.26. За L^2-ограниченост можемо пружити још један самосталан доказ. Заиста, за све позитивне цијеле бројеве N, из леме 4.27 добијамо позитивну константу C_N тако да*

$$|\widehat{p_m}(\lambda,\xi)|\leq C_N(1+|\lambda|)^{-N},\quad \lambda,\xi\in\mathbb{R}^n$$

Према (4.25) иЕраншереловој теореми, добијамо за све позитивне цијеле бројеве N, позитивну константу C_N такву да

$$\|T_{\lambda}\varphi\|_2=\|\widehat{p_m}(\lambda,\cdot)\hat{\varphi}\|_2\leq C_N(1+|\lambda|)^{-N}\|\hat{\varphi}\|_2=C_N(1+|\lambda|)^{-N}\|\varphi\|_2$$

што је (4.26) за $p=2$. Тиме се избјегава употреба теореме 4.26.

4.6 L^p ограниченост псеудо-диференцијалних оператора са симболима нижег реда

Сада ћемо прокоментарисати фундаменталне теореме ограничености на $L^p(\mathbb{R}^n)$. Напоменимо да сада посматрамо псеудо-диференцијалне симболе из $S_{\rho,\delta}^{m}$ дефинисане као у 3.1. За почетак споменимо случај $p = 2$. У [9], Хермандер даје занимљив резултат о $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $L^p(\mathbb{R}^n)$ ограниченост псеудо-диференцијалних оператора.

Теорема 4.30 *Нека су $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \delta \leq 1$ и $a \in S^m_{\rho,\delta}$. Тада важи*

$$T_a \in \mathcal{L}\left(L^2\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \Longrightarrow m \leq m_0 = \min\left[0, \frac{n}{2}(\rho - \delta)\right].$$

гдје је T_a псеудо-диференцијални оператор придружен симболу a.

Хермандер показује да је обрнуто тачно ако $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Али од стране Калдерона и Веиланкорта [11] имамо:

Теорема 4.31 *(Калдерон и Веиланкорт). Нека су $0 \leq \delta < 1$, $0 \leq \rho \leq 1$ и $a \in S^m_{\rho,\delta}$. Тада је тачно обрнуто од теореме 4.30, односно инклузија $T_a \in \mathcal{L}\left(L^2\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ важи.*

Сада ћемо споменути теореме везане за ограничености, али када је p опште, тј. за $1 \leq p \leq \infty$ имамо сљедећу теорему.

Теорема 4.32 *(Хермандер [9]). Нека су $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$, $\delta < 1$ и $a \in S^m_{\rho,\delta}$. Тада*

$$T_a \in \mathcal{L}\left(L^p\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \Longrightarrow m \leq -n(1-\rho)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|,$$

гдје је T_a псеудо-диференцијални оператор придружен симболу a.

Познато је да за $p = 1$ и $p = \infty$, обрнуто од Хермандерове теореме не важи. За $1 < p < \infty$, Ц. Феферман је доказао обратно тврђење Хермандерове теореме.

Теорема 4.33 *(Феферман [10]). Нека су $1 < p < \infty, 0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$, $\delta < 1$ и $a \in S^m_{\rho,\delta}$ и нека је $m_p = n(1-\rho)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$. Тада важи*

$$T_a \in \mathcal{L}\left(L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\right),$$

гдје је T_a псеудо-диференцијални оператор придружен симболу a.

Закључак

У овом мастер раду бавили смо се питањем ограничености псеудо-диференцијалних оператора на L^p просторима, што је од суштинског значаја за анализу и примјене ових оператора у различитим гранама математике и физике. Такође, бавили смо се и уопштено псеудо-диференцијалним операторима и видјели неке њихове ососбине. Наша анализа обухватила је прије свега ограниченост псеудо-диференцијалних оператора реда 0 на L^p, укључујући и навођење општијих теорема ограничености псеудо-диференцијалних оператора. Радозналијим читаоцима за ову тему препоручујемо радове наведене у секцији под називом Литература који доказују општије теореме ограничености.

Сама прича о ограничености на L^p просторима може се још уопштити и тиме изучавати и на класама симбола $S^m_{\rho,\delta,\lambda}$ гдје је λ глатка функција са реалном вриједношћу, која задовољава два услова:

а) Постоји константа $0 \leq \sigma \leq 1$ стаква да важи $1 \leq \lambda(x,\xi) \leq C\langle x\rangle^{\sigma}\langle\xi\rangle$;

б)Постоји константа $0 \leq \delta < 1$ таква да, за сваку уређену n-торку α и β, имамо

$$\left|\lambda^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\lambda(x,\xi)^{1-|\alpha|+\delta|\beta|}$$

за неку константу $C_{\alpha,\beta}$. Функција λ се назива функција тежине. Заинтересованим читаоцима препоручујемо [6].

Литература

[1] Abels H, *Pseudo-differential and singular integral operators. An introduction with applications.* De Gruyter, Berlin, 2012.

[2] Wong M.W, *An Introduction to Pseudo-Differential Operators,* World Scientific Publishing Company, Singapur, 2014.

[3] S. Pilipović i D. Seleši, *Mera i integral - fundamenti teorije verovatnoće,* Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[4] Ivana Vojnović, *Uvod u napredne teme funkcionalne analize,* Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu, 2022.

[5] Slobodan Aljančić, *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu,* Zavod za udžbenike, Beograd, 2011.

[6] Ashino R, Nagase M, Vaillancourt R, *Pseudodifferential Operators in $L^p(\mathbb{R}^n)$ Spaces,* Cubo 6 (2004.), no. 3, 91-129.

[7] W. Rudin, *Real and complex analysis,* third edn., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[8] Hörmander L, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces* Acta Math. **104** (1960.), pp.93-140.

[9] Hörmander L, *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations,* In Proc. Symposium on Singular Integrals, Amer. Math. Soc., Providence RI, **10** (1967.) 138-183.

[10] Fefferman C, *L^p-bounds for pseudo-differential operators,* Israel J. Math., **14** (1972.) 413-417.

[11] Calderón A. P, Vaillancourt R, *A class of bounded pseudo-differential operators,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **69** (1972.) 1185-1187.

[12] Eceizabarrena Pérez Daniel, *Distribution Theory and Fundamental Solutions of Differential Operators,* Final degree dissertation, 2015.

Биографија

Иван (Игора) Меденица рођен је 19. августа 1998. године у Подгорици. Основну школу ,,Павле Ровински" као и Гимназију ,,Слободан Шкеровић" завршава у родном граду. Основне студије на смјеру Математика (М3), модул Математика финансија, уписује 2017. и завршава са просјечном оцјеном 9.81 септембра 2020. Исте године уписује мастер студије на смјеру Математика (МА). Са положеним свим испитима на мастер студијама октобра 2022, са просјечном оцјеном 10, стиче право на одбрану мастер рада.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:
РБР

Идентификациони број:
ИБР

Тип документације: Монографска документација
ТД

Тип записа: Текстуални штампани материјал
ТЗ

Врста рада: Мастер рад
ВР

Аутор: Иван Меденица
АУ

Ментор: др Ивана Војновић
МН

Наслов рада: Ограниченост псеудо-диференцијалних оператора на L^p просторима
НР

Језик публикације: српски (ћирилица)
ЈП

Језик извода: с / е
ЈИ

Земља публиковања: Србија
ЗП

Уже географско подручје: Војводина
УГП

Година: 2024
ГО

Издавач: Ауторски репринт
ИЗ

Место и адреса: Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 4
МА

Физички опис рада: 4/70/12/0/2/0/0
(број поглавља/страна/лит. цитата/табела/слика/графика/прилога)
ФО

Научна област: Математика
НО

Научна дисциплина: Функционална анализа
НД

Предметна одредница/Кључне речи: ограниченост, Лебегови простори, псеудо-диференцијални оператори, осцилаторни интеграл
ПО

УДК:

Чува се: Библиотека Департмана за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
ЧУ

Важна напомена:
ВН

Извод:
ИЗ

У овом мастер раду се бавимо ограниченошћу псеудо-диференцијалних оператора на L^p просторима, са посебном пажњом на псеудо-диференцијалне операторе реда нула.

У уводном поглављу дајемо преглед основних појмова, тврђења, ознака из функционалне анализе и теорије мјере, с акцентом на Лебегове L^p просторе. У првом поглављу упознајемо се са Фуријеовом трансформацијом и њеним основним особинама, као и са Шварцовим простором брзо-опадајућих функција, што ће нам бити од помоћи при изучавању теорије псеудо-диференцијалних оператора.

У трећем поглављу представљамо псеудо-диференцијалне операторе и њихова основна својства, као и композицију и адјунгованост.

У посљедњем поглављу прво доказујемо огранниченост псеудо-диференцијалних оператора реда нула на L^2 простору, док нам је касније циљ да докажемо у општијем случају, тј. огранниченост псеудо-диференцијалних оператора реда нула на L^p просторима. У ту сврху, даћемо два доказа заснована на [1] и [2]. На крају наводимо општије формулисане теореме о ограничености псеудо-диференцијалних оператора на L^p просторима.

Датум прихватања теме од стране НН већа:
ДП 3.10.2023.

Датум одбране:
ДО

Чланови комисије:
КО

Председник:	Милица Жигић, ванредни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
Члан:	др Ивана Војновић, ванредни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, ментор
Члан:	др Бориша Кузељевић, ванредни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Ivan Medenica
AU

Mentor: Ivana Vojnović, Ph.D.
MN

Title: Boundedness of pseudo-differential operators on L^p spaces
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English/Serbian (cyrillic/latin)
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2024
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 4/70/12/0/2/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Functional Analysis
SD

Subject/Key words: Boundedness, Lebesgue spaces, Pseudo-differential Operators, Oscillatory Integrals
SKW

UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB

In this master's thesis, we investigate the boundedness of pseudo-differential operators on L^p spaces, with special attention to pseudo-differential operators of order zero.

In the introductory chapter, an overview of basic concepts is presented, with claims, notations from functional analysis and theory measures, with emphasis on Lebesgue's L^p spaces. In the second chapter, we introduce the Fourier transform and its basic properties, as well as the Schwarz space of fast-decreasing functions, which will be of help when studying the theories of pseudodifferential operators.

In the third chapter, we present pseudo-differential operators and their basic properties, as well as composition and adjointness.

In the last chapter, we first prove the boundedness of pseudodifferential operators of order zero on the L^2 space, while later we aim to prove in the general case, that is, boundedness of pseudodifferentials operators of order zero on L^p spaces. For this purpose, two proofs based on [1] and [2] will be provided. Finally, we state more generally formulated theorems on the boundedness of pseudodifferential operators on L^p spaces.

Accepted by the Scientific Board on:
ASB 3.10.2023.

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr. Milica Žigić, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Dr. Ivana Vojnović, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Dr. Boriša Kuzeljević, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,