



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU



Dragana Lujić

Razvoj kritičkog mišljenja kroz nastavu matematike u osnovnoj školi

- master rad -

Mentor: dr Zorana Lužanin

Novi Sad, 2024.

Sadržaj

1. UVOD	3
2. KRITIČKO MIŠLJENJE	4
2.1. Definicija kritičkog mišljenja.....	4
2.2. Značaj kritičkog mišljenja.....	7
2.3. Istraživanja o mogućnostima razvoja kritičkog mišljenja.....	11
3. PROCENA KRITIČKOG MIŠLJENJA	15
3.1. Testovi za procenu kritičkog mišljenja	15
3.2. Procena kritičkog mišljenja u nastavi matematike.....	19
3.3. Empirijsko istraživanje	22
4. KRITIČKO MIŠLJENJE U NASTAVI MATEMATIKE	30
4.1. Metode za razvoj kritičkog mišljenja.....	30
4.2. Strategije za rešavanje matematičkih problema.....	33
4.3. Primer časa.....	45
5. ZAKLJUČAK	52
6. LITERATURA	53

1. UVOD

Razvoj kritičkog mišljenja se navodi kao jedan od ciljeva osnovnog obrazovanja i takođe kao jedan od ciljeva nastave matematike od petog do osmog razreda. Iako je značaj kritičkog mišljenja u obrazovanju prepoznat, ono se kroz nastavne sadržaje provlači uglavnom implicitno, tako da često prođe nezapaženo od strane učenika, ali i od strane nastavnika. Ukoliko želimo da podstičemo razvoj kritičkog mišljenja kroz nastavu, onda to mora biti svjesno, ciljano i dobro isplanirano.

U prvom delu ovog rada će biti predstavljen pojam kritičkog mišljenja kroz nekoliko različitih pristupa njegovom definisanju, kao i primeri definicija koji su prilagođeni upotrebi u osnovnoj i srednjoj školi. Zatim će biti navedeni neki od primera upotrebe kritičkog mišljenja u savremenom društvu. Na kraju prvog dela će biti prikazani rezultati objavljenih istraživanja o mogućnostima razvoja kritičkog mišljenja kroz obrazovanje.

U drugom delu rada će biti predstavljeno nekoliko standardizovanih opštih testova za procenu kritičkog mišljenja, kao i način na koji se oni mogu prilagoditi konkretnoj nastavnoj oblasti. Zatim će biti prikazana veza između kritičkog mišljenja i matematičkih problema određene težine, koja se može iskoristiti za procenu kritičkog mišljenja u nastavi matematike. Na kraju drugog dela će biti prikazani rezultati istraživanja u kom su analizirani odgovori učenika osmog razreda prilikom rešavanja zadataka koji sadrže elemente kritičkog mišljenja.

U trećem delu rada će biti predstavljene neke od metoda za razvoj kritičkog mišljenja koje se mogu koristiti u nastavi matematike, kao i konkretne veze između kritičkog mišljenja i nastavnih sadržaja koji se obrađuju na časovima matematike u drugom ciklusu osnovnog obrazovanja. Na kraju će biti prikazan primer organizacije časa u kom su primenjene tehnike koje podstiču razvoj kritičkog mišljenja.

2. KRITIČKO MIŠLJENJE

2.1. Definicija kritičkog mišljenja

Ideja o kritičkom mišljenju se gradila i razvijala još od vremena Antičke Grčke. Još tada su filozofi prepoznali važnost valjane argumentacije i procene ispravnosti mišljenja. Sokrat je razvio metodu postavljanja pitanja čiji je cilj bio dolaženje do istine ili saznanja. Njegova metoda se koristi i danas, zato što je disciplinovano, sistematično, efikasno i svrsishodno ispitivanje važan element kritičkog mišljenja.

Sam pojam kritičkog mišljenja je veoma složen. Iz te složenosti proizilazi mnoštvo različitih definicija. Razlikujemo tri pristupa prilikom određivanja definicije:

1. Navođenje sposobnosti i veština koje autori smatraju elementima kritičkog mišljenja.
2. Navođenje područja primene kritičkog mišljenja, kako onih u kojima je njegova primena neophodna, tako i onih u kojima je poželjna.
3. Navođenje onih karakteristika koje se smatraju specifičnim za kritičko mišljenje i izdvajaju ga od ostalih načina mišljenja. [1]

U nastavku su dati neki od primera definicija kritičkog mišljenja:

- „Kritičko mišljenje čine mentalni procesi, strategije i predstavljanja koje ljudi koriste da reše probleme, donesu odluke i nauče nove pojmove.“ (*Sternberg, 1985*)
- „Kritičko mišljenje je razumno, refleksivno mišljenje koje je fokusirano na odlučivanje o tome u šta da se veruje i šta da se čini.“ (*Ennis, 1987*)
- „Kritičko mišljenje je mišljenje koje olakšava prosuđivanje jer je zasnovano na kriterijumima, samokorigujuće je i osetljivo na kontekst.“ (*Lipman, 1991*)
- „Kritičko mišljenje je mišljenje o mišljenju i evaluacija našeg mišljenja, osećanja i ponašanja koja nam omogućuje da ih pojasnimo i unapredimo.“ (*Huffman, 1994*)
- „Kritičko mišljenje je vrednovanje zaključaka putem logičkog i sistematičnog istraživanja problema, dokaza i rešenja.“ (*Woolfolk, 1998*) [1]

Kako bi se obuhvatili svi aspekti kritičkog mišljenja, nekada je umesto definicije bolje dati objašnjenje pojma. Kritičko mišljenje čine tri dimenzije:

- konativno-afektivna (dispozicije),
- kognitivna,
- metakognitivna.

Konativno-afektivna dimenzija

Dispozicije predstavljaju našu volju, nameru i naviku da primenjujemo kritičko mišljenje u svakodnevnom životu, disciplinovano i sistematično. Bez razvijenih dispozicija kognitivne i metakognitivne veštine nisu produktivne, nego ostaju u domenu teorije. Američka filozofska asocijacija (*eng. American Philosophical Association, APA*) je u studiji u kojoj je

učestvovalo 46 stručnjaka 1989. godine izdvojila 19 dispozicija važnih za kritičko mišljenje. Neke od njih su: radoznalost, otvorenost uma, razumevanje drugačijih mišljenja, pravičnost, spremnost na preispitivanje sopstvenih stavova, sistematičnost, marljivost u traganju za relevantnim informacijama, upornost, itd. [2]

Kognitivna dimenzija

Različiti autori prilikom operacionalizacije svojih definicija izdvajaju različite kognitivne veštine kao ključne za kritičko mišljenje. Veoma je teško ili skoro nemoguće obraditi sve veštine, zbog njihove brojnosti, povezanosti i nijansiranosti u značenju. Otuda se javlja potreba da se izdvoje samo neke, kako bi se moglo efikasno raditi sa njima. Koji skup veština ćemo izabrati zavisi od cilja našeg rada. Američka filozofska asocijacija je 1989. godine izdvojila 6 kognitivnih veština ključnih za kritičko mišljenje. To su interpretacija, analiza, evaluacija, zaključivanje, objašnjavanje i samoregulacija. U svom izveštaju su izdvojili i još 16 podveština koje preciznije određuju i upotpunjuju ove pojmove. [2]

Metakognitivna dimenzija

Metakognitivni aspekt kritičkog mišljenja predstavlja sposobnost da osvestimo, analiziramo, procenjujemo i korigujemo greške u sopstvenom mišljenju. Disciplinovano primenjivanje veština kritičkog mišljenja na sopstveno mišljenje je najteže ostvariv i krajnji cilj razvoja kritičkog mišljenja kod pojedinca.

Richard Paul i Linda Elder svoja razmatranja o kritičkom mišljenju baziraju na njegovom metakognitivnom aspektu, na osnovu kog daju sledeću definiciju:

„Kritičko mišljenje je umeće mišljenja o mišljenju dok mislimo, da bismo unapredili mišljenje. Ono uključuje tri međusobno isprepletane faze: analiza mišljenja, evaluacija mišljenja, unapređenje mišljenja.“ [3]

Kritički misli onaj koji redovno i bez izuzetka primenjuje intelektualne standarde (jasnoća, tačnost, preciznost, relevantnost, dubina, širina, logičnost, značaj i poštenje) na elemente rezonovanja (cilj rezonovanja, ugao gledanja, pretpostavke, implikacije, informacije, zaključci, koncepti i pitanja), te neguje i razvija sopstvene intelektualne vrline (smernost, autonomija, integritet, hrabrost, istrajnost, poverenje u razum, empatija i pravičnost).

„Kad god mislimo, mislimo sa nekim ciljem iz određenog ugla ili perspektive, bazirano na nekim pretpostavkama što vodi do određenih implikacija ili posledica. Koristimo podatke, činjenice i iskustva da donesemo zaključke i sudove bazirano na konceptima i teorijama, kako bismo odgovorili na pitanje ili rešili problem.“ [3]

Kritičko mišljenje u svom punom značenju predstavlja ideal kom se teži, razvija se i doraduje u toku čitavog života.

Ako razmatramo kritičko mišljenje sa ciljem primene u praksi ili za potrebe obrazovanja, prilikom određivanja operativne definicije potrebno je uzeti u obzir i specifične okolnosti u kojima će se ono primenjivati ili razvijati. Specifične okolnosti mogu biti uzrast

ispitanika, društvene prilike, kontekst u okviru kog se predstavlja kritičko mišljenje, cilj rada ili projekta, itd.

2000. godine Institut za psihologiju u Beogradu i Grupa MOST¹ su započeli program za razvoj kritičkog mišljenja namenjen srednjoškolicima, pod nazivom „Kultura kritičkog mišljenja“. U radovima koji su nastali u okviru projekta, autorski tim je predstavio svoju definiciju: „Kritičko mišljenje je osvešćeno evaluativno mišljenje osetljivo na kontekst.“ Takođe, dali su i operativnu definiciju koja je pogodna za rad sa učenicima srednjoškolskog uzrasta i ima sledeću strukturu:

1. Opšte pretpostavke kritičkog mišljenja:
 - uočavanje i razumevanje relacija,
 - izvođenje i zasnivanje sudova,
 - uočavanje logičkih grešaka,
 - dokazivanje i opovrgavanje,
 - razlikovanje prirode sazajnih kategorija.
2. Distinktivne odlike kritičkog mišljenja:
 - evaluativnost,
 - osetljivost na kontekst,
 - metakognitivnost.
3. Manifestacije kritičkog mišljenja:
 - kritička recepcija (čitanje i slušanje),
 - kritička produkcija,
 - konstrukcija znanja,
 - rešavanje problema i donošenje odluka. [4]

Za potrebe razvoja kritičkog mišljenja kod učenika u osnovnoj školi potrebno je još više prilagoditi operativnu definiciju sposobnostima i predznanju učenika. Centar za istraživanja u obrazovanju i inovacije (*eng. Centre for Educational Research and Innovation – CERi*) koji se nalazi u okviru međunarodne Organizacije za ekonomsku saradnju i razvoj (*eng. The Organisation for Economic Co-operation and Development - OECD*) aktivno radi na projektima koji se tiču razvoja kritičkog mišljenja i kreativnosti u školi.

U okviru jednog od projekata, osmišljene su rubrike (tabela 1) koje pojednostavljaju pojam kritičkog mišljenja, kako bi nastavnicima, a i učenicima, bilo jasnije koje tačno podveštine kritičkog mišljenja treba razvijati. Jedna od prednosti ovih rubrika je i mogućnost njihove adaptacije za svaki nastavni predmet pojedinačno. Da bi se bolje uočila struktura, identifikovane su četiri grupe aktivnosti:

- ispitivanje,
- imaginacija,
- akcija,
- osvrt.

¹ Grupa MOST je nevladino i neprofitno udruženje za saradnju i posredovanje u sukobima.

Dispozicije su svesno izostavljene, jer ih je teško objektivno pratiti i ocenjivati, što ne znači da ne treba raditi na njihovom podsticanju. [5]

Kritičko mišljenje <i>Preispitivanje i evaluacija ideja i rešenja</i>	
Ispitivanje	<ul style="list-style-type: none"> • Razumevanje konteksta/okvira i ograničenja problema. • Uočavanje i preispitivanje pretpostavki, proveravanje tačnosti činjenica i interpretacija, analiziranje propusta u znanju.
Imaginacija	<ul style="list-style-type: none"> • Uočavanje i razmatranje alternativnih teorija i mišljenja, poređenje ili zamišljanje drugačijih pristupa problemu. • Uočavanje snage i slabosti dokaza, argumenata, tvrdnji i verovanja.
Akcija	<ul style="list-style-type: none"> • Obrazlaganje rešenja ili rezona na osnovu logičkih, etičkih ili estetskih kriterijuma.
Osvrt	<ul style="list-style-type: none"> • Evaluacija i prepoznavanje neodređenosti ili ograničenja izabranog rešenja ili stanovišta. • Sagledavanje moguće pristrasnosti sopstvene perspektive u poređenju sa drugim perspektivama.

Tabela 1: Rubrika koja opisuje kritičko mišljenje po OECD-u [5]

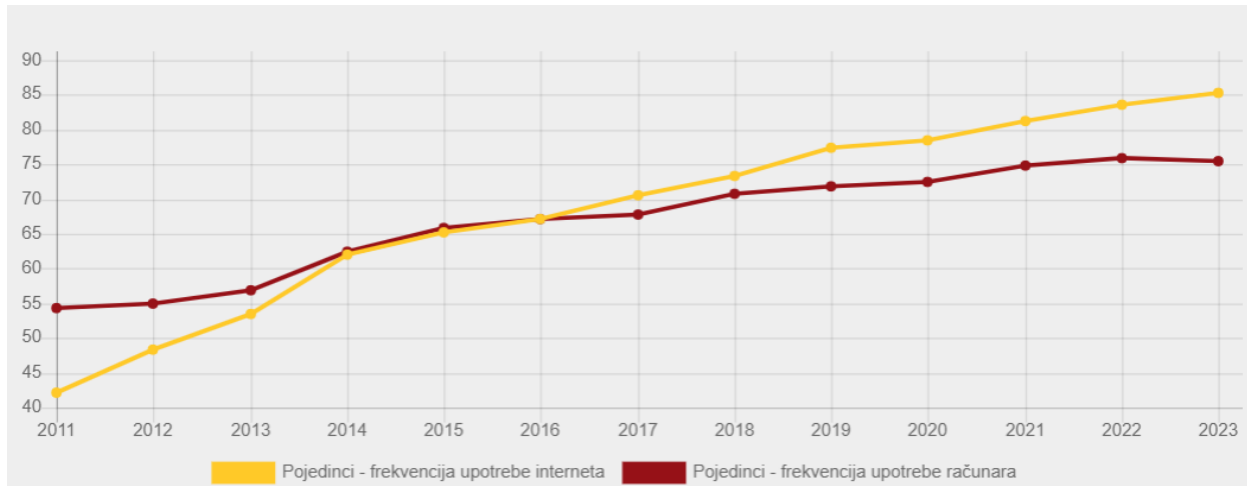
2.2. Značaj kritičkog mišljenja

Pre daljeg ispitivanja mogućnosti razvoja kritičkog mišljenja kroz nastavu, potrebno je pojasniti zašto nam je ono uopšte važno. Organizacija za ekonomsku saradnju i razvoj izdvaja kritičko mišljenje kao jednu od ključnih veština za 21. vek. [6] Značaj kritičkog mišljenja je prepoznat i u „Preporukama o ključnim kompetencijama za celoživotno učenje“, koje je usvojio Savet Evropske unije 2018. godine. [7] Takođe, u Republici Srbiji se na osnovu Zakona o osnovnom obrazovanju i vaspitanju, kritičko mišljenje smatra jednim od ciljeva osnovnog obrazovanja. U nastavku se navode neki od primera upotrebe kritičkog mišljenja.

Informacione tehnologije i kritičko mišljenje

Razvoj informacionih tehnologija je omogućio brz protok velike količine informacija. Do nas svakodnevno dopire veliki broj podataka kroz različite vrste medija. Republički zavod za statistiku svake godine sprovodi istraživanje o upotrebi informaciono-komunikacionih tehnologija među pojedincima starosne dobi od 16 do 74 godine. Prema izveštaju iz oktobra

2023. godine, u Republici Srbiji je u poslednja tri meseca internet koristilo 85,4% ispitanika. Od toga, preko 91% lica je navelo da koristi internet više puta u toku dana. Na grafiku 1 su prikazani podaci o procentu ispitanika koji su u poslednja tri meseca koristili internet ili računar, za period od 2011. do 2023. godine. Vidimo da je procenat stanovništva koji koristi internet u stalnom porastu. [8]



Grafik 1: Prikaz rasta frekvencije upotrebe interneta i računara od 2011 do 2023 [8]

Pored brojnih mogućnosti koje nam pruža internet, ne treba zaboraviti i opasnosti koje on sa sobom nosi. Veći deo informacija sa kojima se susrećemo u toku dana za nas nije ni od kakvog značaja i ni na koji način ne doprinosi kvalitetu našeg života. Možda i veći problem od relevantnosti jeste pouzdanost tih informacija. Da bi se pravilno i bezbedno koristio internet važno je razvijati informacionu pismenost. Neki od elemenata kritičkog mišljenja se nalaze u osnovi informacione pismenosti:

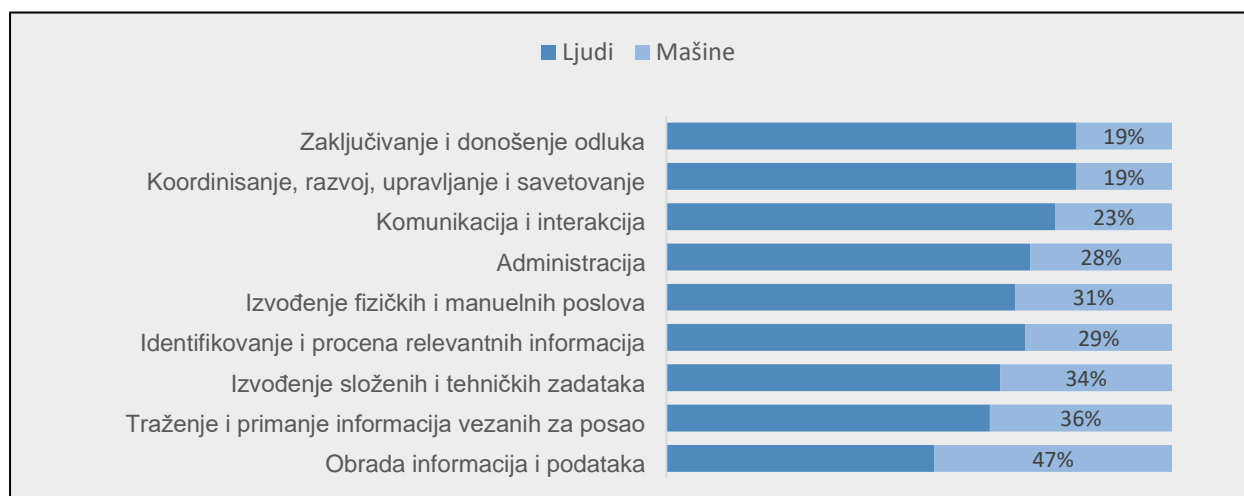
- formulisanje pitanja koja su potrebna da se dođe do tražene informacije,
- određivanje tačnosti i relevantnosti,
- uočavanje razlike među činjenicama, uglovima gledanja, mišljenjima,
- identifikovanje netačnih informacija i informacija koje obmanjuju,
- odabir informacija prema zadatom problemu ili pitanju. [9]

Poslovi u budućnosti

Često možemo čuti kako živimo u svetu koji se brzo menja. Zanimanja koja ranije nisu postojala, danas su veoma tražena, pojavljuju se nove tehnologije i novi stilovi života. Iz ekonomskih i praktičnih razloga, delovi procesa koje je ranije obavljao čovek se danas automatizuju gde god je to moguće. Umesto rutinskih zadataka, čovek dobija drugačija zaduženja, koja su složenija i više koriste ljudske potencijale.

Na grafiku 2 je prikazan odnos rada ljudi i mašina u nekim delatnostima u 2018. godini. Prema procenama Svetskog ekonomskog foruma udeo posla koji obavljaju mašine će se povećavati. U nekim oblastima, poput obrade podataka, očekuje se da mašine preuzmu veći deo posla u odnosu na ljude. Međutim, procese koji zahtevaju mišljenje višeg reda je teže

automatizovati, pa postoje oblasti poput zaključivanja i donošenja odluka, u kojima i dalje ključnu ulogu ima ljudski faktor. [10]



Grafik 2: Prikaz odnosa rada ljudi i mašina po delatnostima u 2018. god. [10]

Da bi opstao u datim okolnostima, čovek mora da se prilagodi i razvije one sposobnosti koje su potrebne za nove radne zadatke. Kritičko mišljenje je visoko rangirano među 10 najtraženijih veština, a procenjuje se da će tako biti i u budućnosti. Osim kritičkog mišljenja tu se nalaze inovativnost, kreativnost, aktivno učenje, rešavanje složenih problema, itd. [10]

Demokratsko društvo

U demokratskom sistemu građani imaju pravo i obavezu da biraju svoje predstavnike. Kako bi se ostvario pun potencijal takvog društvenog uređenja, neophodno je da građani aktivno učestvuju, da budu informisani i da svoje stavove zasnivaju na argumentima. Neki elementi kritičkog mišljenja važni za demokratsko društvo su:

- Razlikovanje činjenica od pretpostavki. Sposobnost da prepoznamo kada je uz informaciju koju dobijamo dodato i određeno tumačenje. Takvo tumačenje može i ne mora da bude obmanjujuće, ali je važno da ga uočimo.
- Preispitivanje autoriteta, vrednosti i prihvaćenih normi. Ako je nešto prihvaćeno od velikog broja ljudi, ne mora značiti da je ispravno.
- Uočavanje korelacija i mogućih posledica. Svaka tvrdnja ili akcija ima svoje implikacije, tj. posledice kojih treba da budemo svesni.
- Sagledavanje problema iz različitih perspektiva. Razumevanje drugačijih mišljenja. Svako od nas izvodi zaključke na osnovu informacija koje ima, ali i na osnovu sopstvenog iskustva. Da bismo bolje razumeli situaciju potrebno je analizirati i mišljenja sa kojima se možda ne slažemo.
- Preispitivanje sopstvenih stavova i uverenja. Otkrivanje pogrešnih pretpostavki i predrasuda u našem rasuđivanju. Na naše zaključivanje deluje i niz faktora kojih često nismo svesni, poput društvenih normi na koje smo naučeni, našeg emotivnog stanja, socijalno-ekonomskog statusa, itd.

Kritičko mišljenje i konstrukcija znanja

Cilj obrazovanja više nije samo prenošenje informacija, usvajanje činjenica i ovladavanje određenim postupcima. Savremeno obrazovanje treba da osposobi učenike za celoživotno učenje i sistematičnu konstrukciju znanja. Nije dovoljno samo da pasivno prikupljamo informacije. Važnije je kako organizujemo prikupljeno znanje, kako ga povezujemo i nadograđujemo, i da li umemo da ga primenimo.

Kritičko mišljenje nam je potrebno da bismo procenili relevantnost i primenljivost određenih saznanja, zatim da bismo utvrdili relacije među pojmovima i povezanost sa znanjem koje već posedujemo. Ako još dodamo i kreativnost, opremljeni smo za izvođenje novih zaključaka i stvaranje ili otkrivanje novih veza među pojmovima.

Za produblјivanje znanja, bolje razumevanje i njegovu upotrebu potrebno nam je kritičko mišljenje. Ali isto tako, za kritičko mišljenje nam je potreban određen nivo znanja, tj. osnova sa kojom i nad kojom možemo da radimo. Jedna od osobina kritičkog mišljenja je njegova kontekstualnost. Ne možemo kritički misliti o nečemu o čemu ne znamo ništa. Kritičko mišljenje i znanje u okviru određenog domena se nadopunjuju. Da bismo uspešno razvijali kritičko mišljenje, moramo da razvijamo i domensko znanje. [11]

Možemo izdvojiti tri kategorije veština koje se međusobno preklapaju (slika 1) i zavise jedna od druge:

1. tehničke veštine,
2. kreativnost i veštine kritičkog mišljenja,
3. lične i socijalne veštine (socijalno-emocionalne veštine).

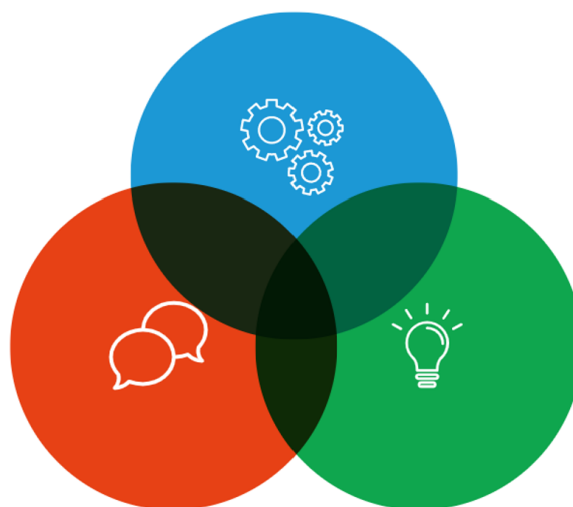
Obrazovni ciljevi obuhvataju sve tri kategorije, ali se u nastavnoj praksi najveći akcenat stavlja na tehničke veštine. One obuhvataju usvajanje gradiva, poznavanje i izvođenje određenih procedura i postupaka. Testiranje, ispitivanje i ocenjivanje u školi se najčešće odnosi na ovu grupu veština. Lične i socijalne veštine kao što su motivisanost, istrajnost, disciplinovanost, posvećenost, kolegijalnost, otvorenost, komunikativnost i slično, takođe se prate i podstiču kroz nastavu, ali u manjoj meri direktno utiču na ocenu u odnosu na tehničke veštine.

Tehničke veštine

Znati šta i znati kako

Lične i socijalne veštine

*Samopouzdanje,
energija,
istrajnost, strast,
liderstvo, saradnja,
komunikacija*



Kreativnost i veštine kritičkog mišljenja

*Istraživanje,
imaginacija,
akcija,
metakognitivnost*

Slika 1: Međusobna zavisnost između kategorija veština [5]

Pored međusobne povezanosti tehničkog znanja i kritičkog mišljenja postoji i povezanost ove dve grupe sa ličnim i socijalnim veštinama. Da bismo razvijali tehničke veštine, kreativnost ili veštine kritičkog mišljenja važna nam je motivacija, trud, upornost, posvećenost, prilagodljivost, saradnja sa drugima, i slično. Sa druge strane, komunikacija i saradnja u okviru određene oblasti u mnogome zavise od tehničkog znanja u toj oblasti. Poznavanje pojmova i rečnika koji je karakterističan za datu oblast je važno za međusobno razumevanje i komunikaciju, a proističe iz tehničkog znanja. Takođe, kreativnost pozitivno utiče na samopouzdanje, energiju i posvećenost. Metakognitivni aspekt kritičkog mišljenja, ukoliko je ono dovoljno razvijeno, može pomoći da osvestimo i bolje kontrolišemo sopstvene emocije i ponašanje. Preispitivanjem naših misli, stavova, osjećanja i ponašanja uočavamo veze među njima. Uočavamo loše pretpostavke pri zaključivanju, pristrasnosti i predrasude koje negativno utiču na naše emocije, lične i socijalne veštine. Zbog međusobne povezanosti sve tri kategorije veština, važno je razvijati ih zajedno. [5]

2.3. Istraživanja o mogućnostima razvoja kritičkog mišljenja

Snežana I. Mirkov i Dragana Ž. Stokanić su 2015. godine objavile rezultate svog istraživanja o stavovima i aktivnostima nastavnika koji se tiču podsticanja kritičkog mišljenja kod učenika. U istraživanju je učestvovao 1441 nastavnik iz četrdeset osnovnih škola u Srbiji. Cilj istraživanja je bio da se utvrde struktura i zastupljenost stavova koje nastavnici izražavaju prema podsticanju kritičkog mišljenja kod učenika i aktivnosti koje preduzimaju u nastavi, kao i da se ispituju odnosi između stavova i aktivnosti. Na osnovu dobijenih rezultata zaključeno je da nastavnici smatraju da je važno podsticati kritičko mišljenje, diskusiju na času, argumentaciju i slobodu mišljenja kod učenika. Uočena je korelacija između godina starosti i

dužine radnog staža nastavnika sa stavovima o podsticanju kritičkog mišljenja, pri čemu mlađi nastavnici pokazuju veću spremnost i otvorenost za podsticanje kritičkog mišljenja i inovativne metode, dok su stariji nastavnici skloniji insistiranju na disciplini umesto na učeničkoj inicijativi. Uprkos razlikama po pitanju stavova, nisu uočene značajne razlike kada je u pitanju aktivnost na času. To znači da iako mlađi nastavnici pokazuju pozitivniji odnos prema podsticanju kritičkog mišljenja kod učenika u odnosu na svoje starije i iskusnije kolege, u svakodnevnoj praksi uglavnom izostaje primena inovativnih ideja. [12]

Osim volje da se podstiče kritičko mišljenje, neophodno je imati i konkretan plan, odnosno strategiju pomoću koje se to može realizovati. Postavlja se pitanje koje metode rada daju rezultate, koje od njih su efikasnije i koji faktori utiču na razvoj kritičkog mišljenja kod učenika. Ovim temama se bavi veliki broj studija i istraživanja.

Abrami i drugi su 2008. godine objavili prve rezultate svoje meta-analize čiji je cilj bio da sumira dostupne empirijske podatke o mogućnostima razvoja kritičkog mišljenja u obrazovanju. Analizom je obuhvaćeno 117 studija u kojima je učestvovalo ukupno 20 698 ispitanika. Pri analizi je korišćena Enisova podela na četiri moguća pristupa podučavanju kritičkog mišljenja, a to su: opšti pristup, infuzija, imerzija i mešoviti pristup. [13]

Opšti pristup – kritičko mišljenje se uči kao izdvojen predmet. Ovakav pristup podrazumeva definiciju kritičkog mišljenja u kojoj se izdvajaju opšti principi ili opšte sposobnosti i veštine kritičkog mišljenja. On ne isključuje kontekstualnu dimenziju kritičkog mišljenja, nego daje mogućnost upotrebe primera iz više različitih oblasti. Mogućnost transfera znanja nije dovoljno istražena kada je u pitanju upotreba kritičkog mišljenja u različitim domenima. Ako bismo rekli da je transfer moguć, opšti pristup bi bio vrlo pogodan zato što nije vezan za sadržaj isključivo jednog nastavnog predmeta ili samo za jednu naučnu oblast. Međutim, treba imati u vidu i drugu teoriju o prirodi kritičkog mišljenja u kojoj se ističe njena predmetna specifičnost. Prema toj teoriji veštine kritičkog mišljenja se na različite načine manifestuju u različitim oblastima u tolikoj meri da se dovodi u pitanje mogućnost njihovog uopštavanja. [14]

Infuzija – kritičko mišljenje se uči u okviru već postojećih predmeta, ali kao jasno definisan cilj. Ovakav pristup zahteva izuzetno dobro poznavanje nastavnog predmeta i oblasti u okviru koje se predaje. Potrebno je na smislen i adekvatan način povezati gradivo sa kritičkim mišljenjem, prepoznajući gde se ono prirodno pojavljuje i koristi.

Imerzija – kritičko mišljenje se uči u okviru već postojećih predmeta, ali implicitno, ne navode se njegovi opšti principi. Ovakav pristup često uključuje postavljanje pitanja u vezi sa gradivom koja podstiču razmišljanje, diskusije, insistiranje na argumentaciji i slično.

Mešoviti pristup – kombinacija opšteg pristupa sa infuzijom ili imerzijom. Uz razvoj kritičkog mišljenja kroz određeni nastavni predmet, kao zasebna celina se uče i njegovi opšti principi.

Svaki od ova četiri pristupa utiče na razvoj kritičkog mišljenja kod učenika. Prema rezultatima koje su dobili Abrami i ostali, najveći efekat ima mešoviti pristup, a najmanji imerzija. Umeren efekat imaju infuzija i opšti pristup. Na osnovu ovih rezultata se može

zaključiti da je potrebno objasniti učenicima na koji način treba da razmišljaju. To ne znači da im treba govoriti šta da misle, nego ih treba učiti ispravnim načinima razmišljanja, kako u konkretnom nastavnom predmetu, tako i u svakodnevnom životu. [13]

Abrami i drugi su 2015. godine objavili rezultate proširene meta-analize kojom su obuhvatili 684 studije. Pored Enisove podele na opšti pristup, infuziju, imerziju i mešoviti pristup, za potrebe analize je razvijen još jedan sistem kategorizacije koji razlikuje individualno učenje, dijalog, problemsko učenje ili kontekstualno učenje (*eng. authentic or anchored instruction*) i mentorstvo.

Individualno učenje je metoda koja se bazira na učenikovom samostalnom radu, gde učenik sam čita, istražuje, uči i rešava probleme. Ova metoda nije uključena u rezultate meta-analize jer je u većini obuhvaćenih studija samostalan rad učenika približno jednako zastupljen i u eksperimentalnoj i u kontrolnoj grupi.

Metoda dijaloga obuhvata 11 potkategorija koje se mogu svrstati u tri grupe: postavljanje pitanja, diskusija i debata (Sokratov dijalog). Pitanja mogu da postavljaju učenici učenicima, učenici nastavniku ili nastavnik učenicima. Diskusija i debata se mogu izvoditi u paru, u grupama, u čitavom odeljenju, zatim pismeno, usmeno, uživo ili online. Stepen uključenosti nastavnika može da varira, od minimalne pomoći, gde učenici sami preuzimaju inicijativu, pa do potpunog vođenja od strane nastavnika, čime se postiže veća kontrola u radu.

Problemsko ili kontekstualno učenje obuhvata sledeće potkategorije: primenjeno rešavanje problema, studije slučaja, simulacije, igre i igranje uloga. Gradivo se učenicima predstavlja kroz probleme iz realnog života koji su im donekle poznati i zanimljivi i koji ih podstiču da se aktivno uključe. U ovoj metodi akcenat se stavlja na sam put kojim se dolazi do saznanja, na proces koji dovodi do rešavanja problema. Cilj ovakvog načina predavanja je da umesto memorisanja činjenica i informacija, učenici (sami ili uz pomoć nastavnika) otkrivaju, povezuju i dolaze do novih saznanja.

Mentorstvo predstavlja individualan rad sa jednim učenikom i uglavnom se zasniva na ispravljanju grešaka. Mentor može da bude nastavnik, drugi učenik ili zaposleni, u slučaju prakse.

Prema dobijenim rezultatima zaključeno je da dijalog poboljšava razvoj kritičkog mišljenja. Posebno efikasnim se pokazao slučaj kada nastavnik postavlja pitanja, kao i slučaj kada nastavnik vodi diskusiju u kojoj učestvuje ili grupa učenika ili čitavo odeljenje. Takođe, izlaganje učenika autentičnim problemskim situacijama i primerima ima važnu ulogu u razvoju kritičkog mišljenja, posebno ako se koriste metode rešavanja problema i igranje uloga. Kombinacija metode dijaloga i problemskog ili kontekstualnog učenja daje bolje rezultate nego svaka od ovih metoda pojedinačno. Zanimljivo je da mentorstvo samo ne pokazuje značajne rezultate, ali kada se doda dijalogu i kontekstualnom učenju znatno povećava njihov pozitivan efekat.

Osim ovih rezultata, zapaženo je da se kritičko mišljenje, u nekom obliku, može razvijati na svim nivoima obrazovanja, od osnovne škole do visokog obrazovanja, kao i kroz sve nastavne oblasti. Metode za razvoj kritičkog mišljenja koje ga povezuju sa specifičnim

predmetnim sadržajima su pokazale bolje rezultate u odnosu na metode koje koriste opšti pristup. Takođe, razvoj kritičkog mišljenja ima pozitivan učinak na predmetna postignuća. Primećeno je i da se bolji rezultati dobijaju ako se za merenje koriste nestandardizovani testovi. Ovo može biti posledica načina dizajniranja takvih testova. Oni se uglavnom prave za merenje uspešnosti konkretne metode koja se sprovodi, te samim tim bolje gađaju onu grupu veština kritičkog mišljenja na koju se data metoda odnosila. [15]

3. PROCENA KRITIČKOG MIŠLJENJA

3.1. Testovi za procenu kritičkog mišljenja

Kako zbog složene prirode pojma kritičko mišljenje ne postoji jedinstvena definicija koja ga u potpunosti određuje, tako ne postoji ni jedinstven test za njegovu procenu. Da bismo izabrali test koji najviše odgovara našim potrebama moramo prvo odrediti cilj testiranja, a zatim i elemente kritičkog mišljenja koje želimo da obuhvatimo tim testom. Testiranje kritičkog mišljenja može da se vrši radi selekcije kandidata prilikom zapošljavanja ili prilikom upisa u određenu školu. Takođe, testiranje može da se vrši i u okviru nekog istraživanja ili u cilju praćenja razvoja kritičkog mišljenja kod učenika. Ukoliko se testiranje vrši više puta, na samom početku i kasnije u toku procesa učenja, učenici mogu da prate svoj napredak i dobiju povratnu informaciju o svom radu. Takođe, povratnu informaciju dobijaju i nastavnici koji mogu bolje da izaberu i prilagode nastavne metode koje koriste.

Postoji više standardizovanih testova koji se koriste za procenu kritičkog mišljenja. Oni se razlikuju u komponentama kritičkog mišljenja koje obuhvataju, ciljnoj grupi kojoj su namenjeni, kao i samoj formi testa.

Ennis – Weir Critical Thinking Essay Test je primer testa za procenu kritičkog mišljenja u kom ispitanici kao odgovor pišu esej. Osmislili su ga Robert H. Ennis i Eric Weir 1985. godine. Test se može koristiti kao dodatni alat u okviru nastave ili prilikom istraživanja. Namenjen je učenicima srednjih škola i studentima. Test čini pismo uredniku izmišljenih novina na koje ispitanik treba da odgovori. U pismu se iznosi određeni predlog ili tvrdnja i argumenti koji ga potkrepljuju. Argumenti su raspoređeni u osam paragrafa tako da svaki paragraf predstavlja primer bar jednog načina zaključivanja ili neke greške pri zaključivanju. Zadatak ispitanika je da u svom eseju proceni valjanost svakog od tih argumenata, kao i pisma u celini, te da obrazloži svoju evaluaciju. Testovi sa pitanjima otvorenog tipa pružaju mogućnost ispitanicima da pokažu svoju kreativnost i da daju odgovore koji možda nisu očekivani ili predviđeni. Međutim, to za sobom povlači određene poteškoće prilikom bodovanja. Iako postoje detaljna uputstva i kriterijumi, bodovanje ponekad zavisi od procene pregledača. Takođe, često je potrebno više vremena za pregledanje, u odnosu na testove sa pitanjima zatvorenog tipa, kao i bolja pripremljenost pregledača. [16]

Neki od testova kritičkog mišljenja koji se sastoje samo od pitanja zatvorenog tipa su *California Critical Thinking Skills Test (CCTST)* i *Watson-Glaser Critical Thinking Appraisal (WGCTA)*. Oba testa su namenjena ispitanicima starijim od 16 godina. Mogu se koristiti za različite namene, od upotrebe u obrazovanju do selekcije kandidata za posao. Tokom godina oba testa su dobijala novije verzije, prevedeni su i adaptirani za upotrebu i na drugim jezicima i mogu se raditi online. CCTST je objavljen 1990. godine. Sastoji se od 34 pitanja od kojih svako ima više ponuđenih odgovora. [17] WGCTA je objavljen 1964. godine. Njegova poslednja verzija, iz 2018. godine, sadrži 40 pitanja svrstanih u pet kategorija: izvođenje zaključaka, uočavanje pretpostavki, dedukcija, evaluacija argumenata i interpretacija. [18] U nastavku je naveden primer pitanja iz kategorije Izvođenje zaključaka. [19] Ispitanik na osnovu priložene izjave treba da proceni tačnost zaključka:

Raste broj ljudi koji uče kako da poprave svoje uređaje i uče druge da urade isto. Uputstva kako popraviti elektronske uređaje se lako mogu pronaći na internetu. Prošle godine je u svetu generisana rekordna količina elektronskog otpada, pri čemu je manje od petine od toga reciklirano. Produžavanje veka trajanja pametnih telefona i drugih elektronskih uređaja za samo jednu godinu bi bilo ekvivalentno uklanjanju dva miliona automobila sa puta, sa aspekta smanjenja emisije CO₂.

Zaključak: Elektronski uređaji su značajan izvor otpada.

- Tačno*
- Verovatno tačno*
- Nedovoljno podataka*
- Verovatno netačno*
- Netačno*

Testovi zatvorenog tipa su jednostavni za pregledanje. Međutim, oni ne mogu da obuhvate i proces razmišljanja kojim je ispitanik došao do odgovora. Takođe, oni ne odražavaju spontanu reakciju ispitanika u realnoj situaciji, već mu daju mogućnost da od ponuđenih odgovora prepozna i izabere najbolji.

Primer testa koji se sastoji i od pitanja otvorenog tipa i od pitanja zatvorenog tipa je *Halpern Critical Thinking Assessment*. Test je namenjen ispitanicima starijim od 15 godina. Može se koristiti na različite načine u obrazovanju ili kao dodatni alat prilikom selekcije kandidata za posao. Sastoji se od opisa 25 situacija iz svakodnevnog života. Nakon svake opisane situacije slede pitanja na koja ispitanik treba da odgovori svojim rečima, a zatim i pitanja u kojima treba da izabere jedan od ponuđenih odgovora. Test se može raditi u određenom programu na računaru, tako da je pregledanje pojednostavljeno. Pitanja zatvorenog tipa program pregleda automatski, dok je za pitanja otvorenog tipa potreban pregledač koji će analizirati odgovore i bodovati ih na osnovu precizno određene skale. Kroz odgovore na pitanja otvorenog tipa ispitanici mogu da pokažu ne samo kognitivne veštine kritičkog mišljenja nego i dispozicije. U nastavku je dat primer jedne opisane situacije i odgovarajućih pitanja. [20]

U časopisu namenjenom roditeljima i nastavnicima nedavno se pojavio izveštaj koji jasno ukazuje da adolescenti koji puše cigarete takođe imaju tendenciju da postižu slabije rezultate u školi. Kako je broj popušenih cigareta dnevno rastao, prosečan školski uspeh je opadao. Predlog koji je iznet u ovom izveštaju je da bismo mogli poboljšati školske rezultate sprečavanjem adolescenata da puše.

Pitanje 1: Na osnovu ovih informacija, da li biste podržali datu ideju kao način poboljšanja školskih rezultata adolescenata koji puše? Obrazložite zašto da ili zašto ne.

Pitanje 2: Na osnovu ovih informacija, koja od sledećih tvrdnji je najverovatnija?

- Rezultati u školi će se verovatno poboljšati ako sprečimo adolescente da puše, jer istraživači zaključuju da s porastom pušenja opadaju rezultati.*

- Školski rezultati bi se mogli poboljšati ako sprečimo adolescente da puše, ali ne možemo biti sigurni, jer znamo da rezultati opadaju kada pušenje raste, ali ne znamo šta se dešava kada pušenje opada.
- Ne možemo znati da li će se školski rezultati poboljšati ako sprečimo adolescente da puše, jer znamo samo da postoji veza između pušenja i školskih rezultata, ali ne znamo da li pušenje uzrokuje promene u školskim rezultatima.
- Verovatno neće biti uticaja na školske rezultate ako sprečimo adolescente da puše, jer je časopis namenjen roditeljima i nastavnicima, pa je verovatno pristrasan protiv pušenja kod adolescenata.

Postoje testovi namenjeni isključivo za merenje dispozicija. Primer takvog testa je *California Critical Thinking Dispositions Inventory*, koji je osmišljen 1992. godine. Namenjen je studentima, mada se može koristiti i u srednjim školama. Sastoji se od 75 pitanja u formi Likertove skale. Ovim testom je obuhvaćeno sedam dispozicija:

- radoznalost,
- sistematičnost,
- analitičnost,
- sklonost ka traganju za istinom,
- otvorenost uma,
- samopouzdanje,
- kognitivna zrelost. [21]

Možemo primetiti da postoji veliki izbor testova kritičkog mišljenja koji su namenjeni učenicima srednjih škola i studentima. Prema Pijaževovoj teoriji kognitivnog razvoja, stadijum formalnih operacija se dostiže u toku adolescencije. Ključne odlike ovog stadijuma su:

- hipotetičko-deduktivno mišljenje,
- apstraktno mišljenje,
- sistematično i metodično traganje za rešenjem,
- propoziciono mišljenje²,
- egocentrizam u mišljenju. [22]

Dakle, prilikom kreiranja testova koji su namenjeni studentima i starijim ispitanicima imamo više mogućnosti i slobode, jer su oni prošli kroz sve stadijume kognitivnog razvoja. Međutim, prilikom kreiranja testova za učenike osnovnih škola moramo uzeti u obzir njihov stepen kognitivnog razvoja i prilagoditi testove specijalno za taj uzrast. Robert H. Ennis i Jason Millman su 1982. godine objavili *Cornell Critical Thinking Tests* koje čine dve forme: *Level X* i *Level Z*. Tokom godina, testovi su dobili nova izdanja, tako da su i danas aktuelni. *Level X* je namenjen učenicima drugog ciklusa osnovne škole i srednjoškolicima. Sastoji se od 71 pitanja sa ponuđenim odgovorima, kojima se proverava indukcija, dedukcija, ispitivanje

² Propoziciono mišljenje je kognitivni proces u kom osoba može razumeti, proceniti i analizirati logičku valjanost tvrdnje na osnovu same strukture tvrdnje. Na primer, iskaz „p i ne p“ je uvek netačan.

verodostojnosti i uočavanje pretpostavki. U nastavku je dat primer pitanja za Level X formu. [23]

„Niža od dve osobe koje nose zelene šešire je žensko. Znam, jer sam video njenu dugu kosu kada je skinula šešir.“ Šta je verovatno uzeto kao činjenica prilikom zaključivanja?

- A. Sve ženske osobe imaju dugu kosu.
- B. Samo ženske osobe imaju dugu kosu.
- C. Osoba koja nosi zeleni šešir će verovatno biti žensko.

Level Z je namenjen naprednim srednjoškolcima i studentima. Sastoji se od 52 pitanja sa ponuđenim odgovorima. Ovim testom se osim indukcije, dedukcije, ispitivanja verodostojnosti i uočavanja pretpostavki proverava još i semantika, definisanje i predviđanje prilikom planiranja eksperimenata. [24] U nastavku je dat primer pitanja za Level Z formu. [25]

Dva čoveka raspravljaju o pravu glasanja osamnaestogodišnjaka. Svaka stavka predstavlja skup izjava i zaključak, koji je podvučen. Nemojte se baviti time da li su zaključci i izjave tačni. Označite svaku od stavki prema sledećem sistemu:

- *Ako zaključak nužno proizilazi iz datih izjava, označite A.*
- *Ako zaključak protivreči datim izjavama, označite B.*
- *Ako zaključak ni nužno ne proizilazi ni protivreči datim izjavama, označite C.*

Svaku stavku razmatrajte nezavisno od ostalih:

1. *„Osamnaestogodišnjacima treba dozvoliti da glasaju, jer svako ko će trpeti ili dobiti od odluke donete od strane birača bi trebalo da ima pravo glasa. Jasno je da će osamnaestogodišnjaci trpeti ili dobiti od odluke birača.“*
2. *„Slažem se da svako ko će trpeti ili dobiti od odluke donete od strane birača treba da ima pravo glasa. Tačno je da će osamnaestogodišnjaci trpeti ili dobiti od tih odluka. Ali to se odnosi i na desetogodišnjake. Dakle, osamnaestogodišnjaci ne bi trebalo da imaju pravo glasa.“*
3. *„Većina osamnaestogodišnjaka ne zna razliku između ispravnog i pogrešnog. Pravo glasa ne bi trebalo da pripada članovima grupe ako većina njih ne zna ovu razliku. Očigledno je da osamnaestogodišnjaci ne bi trebalo da imaju pravo glasa.“*

Svi do sada navedeni testovi su opšti testovi kritičkog mišljenja. Nisu vezani ni za jedan konkretan domen nego se baziraju na svakodnevnim situacijama i opštim pojmovima koji bi trebalo da su poznati svim ispitanicima. Međutim, kritičko mišljenje može da se procenjuje i u okviru nekog određenog domena. Sa namerom da se kritičko mišljenje podstiče u okviru različitih oblasti i nastavnih predmeta u toku školovanja, javlja se i potreba za specifičnim testovima za procenu kritičkog mišljenja, čiji bi sadržaj odgovarao tim oblastima i nastavnim predmetima.

Jedan takav primer je test koji je razvila grupa autora sa Katoličkog univerziteta u Levenu. Test je usmeren na kritičko mišljenje u oblasti fizike, tj. konkretno u oblasti

Elektriciteta i magnetizma. Pri njegovoj izradi autori su se oslanjali na standardizovane opšte testove kritičkog mišljenja, ali su sadržaj prilagodili znanju koje očekuju da imaju studenti druge godine mašinstva nakon odslušanog predmeta Elektricitet i magnetizam. [26]

Izrada testa se odvijala u nekoliko faza. Prvo, autori su morali da odrede definiciju kritičkog mišljenja koju žele da koriste kao osnovu testa, tj. da precizno izdvoje one elemente kritičkog mišljenja koje žele da obuhvate svojim testom. Da bi to postigli analizirali su pet opštih testova kritičkog mišljenja i u skladu sa unapred određenim kriterijumima izabrali su *Halpern Critical Thinking Assessment (HCTA)* kao model. Na osnovu izdvojenih opštih veština kritičkog mišljenja definisali su odgovarajuće veštine u zadatoj oblasti. Takođe, izabrali su konkretan sadržaj predmeta Elektricitet i magnetizam koji će koristiti u testu. Prateći formu pitanja na izabranom modelu i na osnovu svega prethodno definisanog kreirali su 19 pitanja. Za svako pitanje su kreirali uputstvo za pregledanje i definisali moguće odgovore. [26]

Zatim je usledila faza provere pitanja. Prvo su pitanja pregledala tri stručnjaka iz oblasti fizike koji do tada nisu učestvovali u izradi testa. Njihov cilj je bio da provere da li su pitanja u skladu sa ciljem testiranja, da li su adekvatna za ciljnu grupu ispitanika, da li su informacije date u pitanjima tačne i da li su pitanja jasno formulisana. Nakon toga su usledili razgovori sa šest studenata i pilot testiranje. U toku razgovora studenti su čitali pitanja i naglas razmišljali o odgovorima, te za svako pitanje dali svoju procenu da li je pitanje teško i zašto. Pomoću ovih razgovora autori su mogli da vide da li studenti razumeju pitanja na onaj način kako su pitanja zamišljena. Pilot testiranje je radilo 19 ispitanika. Cilj pilot testiranja je bio da se odredi vreme koje je potrebno za izradu testa i da se proveri adekvatnost uputstva za pregledanje. Nakon ove faze urađena je revizija i korekcija testa. Konačna verzija je imala 20 pitanja, od kojih je 18 pitanja otvorenog tipa i dva pitanja su sa ponuđenim odgovorima. U nastavku je naveden primer jednog pitanja otvorenog tipa. [26]

Hana sprovodi sledeći eksperiment: približava pozitivno naelektrisanu šipku metalnoj limenci. Izvođenje eksperimenta pokazuje da šipka privlači limenku. Hana je zbunjena rezultatom svog eksperimenta. Očekivala je da će šipka istovremeno privlačiti negativne elektrone metala i odbijati pozitivno jezgro, suprotne sile se poništavaju, što bi značilo da će limenka ostati nepomična. Na koji način možeš učiniti Hanin argument konzistentnim sa eksperimentom? Ukaži na sva moguća objašnjenja.

Na kraju, konačnu verziju testa je radilo 45 studenata koji ni na koji način nisu učestvovali u razvoju testa. Pošto su autori želeli da utvrde da li njihov test zaista meri kritičko mišljenje, istih 45 studenata je zatim radilo i HCTA. Nakon pregleda testova i analize utvrđeno je da postoji korelacija između rezultata na ova dva testa. Dakle, ovo jeste jedan način kako se može kreirati test kritičkog mišljenja koji se odnosi na neku određenu oblast ili jedan nastavni predmet. [26]

3.2. Procena kritičkog mišljenja u nastavi matematike

Za potrebe testiranja kritičkog mišljenja u nastavi matematike nastavnici mogu sami da kreiraju testove po modelu nekog izabranog standardizovanog testa kritičkog mišljenja. Ovaj proces zahteva dosta rada, vremena i istraživanja. Poželjna je i saradnja sa kolegama kako bi testovi bili što kvalitetniji. Osim kroz testove, kritičko mišljenje učenika treba kontinuirano

pratiti i procenjivati i u toku rada. Za to je neophodno prepoznati gde se kritičko mišljenje prirodno pojavljuje u nastavi matematike.

OECD je 2000. godine pokrenuo Međunarodni program procene postignuća učenika *PISA (Programme for International Student Assessment)*. Cilj ovog programa je procena kvaliteta sistema obrazovanja u zemljama članicama OECD-a širom sveta. PISA testiranja se sprovode svake treće godine. Na njima se proverava funkcionalna pismenost petnaestogodišnjaka u oblasti matematike, prirodnih nauka ili razumevanja pročitano. Testovi su formulisani tako da ne proveravaju koliko su učenici u stanju da reprodukuju ono što su učili u školama, već koliko mogu da primene svoje znanje i na osnovu datih informacija izvedu određene zaključke ili reše zadate probleme u realnim životnim situacijama. [27]

Pitanja koja se pojavljuju na testu matematičke pismenosti, u okviru PISA testiranja, su na osnovu kompleksnosti klasifikovana u osam nivoa. Opisi postignuća za svaki nivo se nalaze u tabeli 2.

Nivo	Opis postignuća
6	Na nivou 6, učenici mogu da rade sa apstraktnim problemima i pokazuju kreativnost i fleksibilno razmišljanje pri pronalasku rešenja. Na primer, mogu prepoznati kada se neki postupak koji nije naveden u zadatku može primeniti u nestandardnom kontekstu ili kada je u obrazloženju neophodno pokazati dublje razumevanje matematičkog koncepta. Mogu povezati različite izvore i načine prikaza informacija, uključujući efikasnu upotrebu simulacija ili proračunskih tablica kao dela njihovog rešenja. Učenici na ovom nivou imaju sposobnost kritičkog mišljenja i dobrog vladanja simboličkim i formalnim matematičkim operacijama i odnosima, koje koriste da jasno izraze svoje rasuđivanje. Mogu da razmatraju primerenost svojih postupaka s obzirom na rešenje i početnu situaciju.
5	Na nivou 5, učenici mogu da razvijaju i rade sa modelima kompleksnih situacija, identifikujući ograničenja i specifikujući pretpostavke. Mogu da primene sistematične, dobro planirane strategije za rešavanje problema prilikom rešavanja složenih zadataka, kao što su odlučivanje o tome kako sprovesti eksperiment, osmišljavanje optimalnog postupka ili rad sa kompleksnijim vizualizacijama koje nisu navedene u zadatku. Učenici pokazuju veću sposobnost rešavanja problema čija rešenja često zahtevaju upotrebu matematičkog znanja koje nije navedeno u zadatku. Učenici na ovom nivou promišljaju o svom radu i razmatraju matematičke rezultate u realnom životnom kontekstu.
4	Na nivou 4, učenici mogu efikasno da rade sa eksplicitnim modelima kompleksnih konkretnih situacija, koji ponekad uključuju i dve promenljive, kao i sa nedefinisanim modelima koje razvijaju služeći se sofisticiranim načinom računarskog razmišljanja ³ . Učenici na ovom nivou počinju primenjivati neke aspekte kritičkog mišljenja, poput evaluacije rezultata na osnovu kvalitativnih procena u slučajevima kada izračunavanja nisu moguća na osnovu datih informacija. Mogu da selektuju i povezuju podatke date na različite načine, uključujući simboličke ili

³ Pod računarskim razmišljanjem podrazumevaju se procesi razmišljanja, koji se dešavaju tokom formulisanja problema i pronalaska rešenja za njih, kao i načini njihovog prezentovanja u formi koja omogućava njihovo rešavanje od strane računara. [28]

	<p>grafičke, direktno ih povezujući sa aspektima realnih životnih situacija. Na ovom nivou, učenici mogu da konstruišu i iznose objašnjenja i argumente na osnovu svojih interpretacija, rezonovanja i metodologije.</p>
3	<p>Na nivou 3, učenici mogu da osmisle strategije za rešavanje problema, uključujući strategije koje zahtevaju donošenje odluka kroz nekoliko koraka ili fleksibilnost u razumevanju poznatih koncepata. Na ovom nivou učenici počinju da koriste veštine računarskog razmišljanja za razvoj svoje strategije za rešavanje. Umeju da reše zadatke koji zahtevaju izvođenje nekoliko različitih rutinskih proračuna, koji nisu jasno definisani u postavci problema. Mogu da koriste prostornu vizualizaciju kao deo strategije za rešavanje ili da utvrde na koji način mogu koristiti simulaciju za prikupljanje podataka. Učenici na ovom nivou mogu da interpretiraju i koriste podatke iz različitih izvora i načina reprezentacije, kao i da rezonuju direktno na osnovu njih, uključujući uslovno donošenje odluka upotrebom dvosmerne tabele. Obično pokazuju određenu sposobnost za rad sa procentima, razlomcima, decimalnim brojevima i proporcijama.</p>
2	<p>Na nivou 2, učenici mogu da prepoznaju situacije u kojima treba da osmisle jednostavne strategije za rešavanje problema, uključujući izvođenje jednostavnih simulacija sa jednom promenljivom. Mogu da izvuku relevantne informacije iz jednog ili više izvora koji koriste nešto složenije načine prikaza podataka, kao što su dvosmerne tabele, dijagrami, ili dvodimenzionalni prikazi trodimenzionalnih objekata. Učenici na ovom nivou pokazuju osnovno razumevanje funkcionalne zavisnosti i mogu rešiti zadatke u kojima se pojavljuju jednostavne razmere. Dobijene rezultate interpretiraju doslovno.</p>
1a	<p>Na nivou 1a, učenici mogu da odgovore na pitanja u jednostavnom kontekstu gde su sve potrebne informacije date, a pitanja jasno formulisana. Informacije mogu biti prikazane u različitim jednostavnim formatima, a učenici ponekad moraju koristiti dva izvora istovremeno kako bi izvukli relevantne informacije. Učenici umeju da sprovedu jednostavne, rutinske postupke prema direktnim uputstvima u konkretnim situacijama, što ponekad može zahtevati višestruko ponavljanja postupka prilikom rešavanja problema. Mogu izvoditi radnje koje su očigledne ili koje zahtevaju minimalnu sintezu informacija, ali u svakom slučaju radnje moraju jasno proizilaziti iz datih uputstava. Učenici na ovom nivou mogu koristiti osnovne algoritme, formule, procedure ili konvencije za rešavanje problema koji često uključuju cele brojeve.</p>
1b	<p>Na nivou 1b, učenici mogu da odgovore na pitanja u lako razumljivom kontekstu, gde su svi potrebni podaci jasno dati u jednostavnom prikazu (npr. tabelarnom ili grafičkom), te prema potrebi mogu prepoznati kada su neki podaci suvišni i mogu biti zanemareni u odnosu na konkretno postavljeno pitanje. Umeju da izvode jednostavne računске operacije sa celim brojevima, koje slede iz jasno propisanih instrukcija, definisanih u kratkom, sintaktički jednostavnom tekstu.</p>
1c	<p>Na nivou 1c, učenici mogu da odgovore na pitanja u lako razumljivom kontekstu, gde su svi potrebni podaci jasno dati u jednostavnom, poznatom formatu (npr. mala tabela ili slika) i definisani u veoma kratkom, sintaktički jednostavnom tekstu. Umeju da prate jasne instrukcije koje opisuju jedan korak ili operaciju.</p>

Tabela 2: Opisi postignuća osam nivoa matematičke pismenosti [29]

Analizom opisa postignuća možemo da uočimo da se počevši od nivoa 4 kao ishodi pojavljuju i neki elementi kritičkog mišljenja. Na nivou 4, to su evaluacija rezultata i argumentacija. Na nivou 5, to su identifikacija ograničenja i pretpostavki, te izbor i vrednovanje različitih strategija. Na nivou 6 se eksplicitno navodi kritičko mišljenje, kao i evaluacija postupka rešavanja. Možemo da zaključimo da se potreba za kritičkim mišljenjem prirodno pojavljuje prilikom rešavanja kompleksnih problemskih situacija.

Prema rezultatima PISA testiranja iz 2022. godine, prosečan rezultat na testu matematičke pismenosti učenika u Srbiji je iznosio 440 bodova, što je značajno ispod OECD proseka koji iznosi 472 boda. U tabeli 3 je data distribuciju postignuća, prema nivoima postignuća, za učenike iz Srbije i OECD prosek. Najveći broj učenika u Srbiji je ostvario rezultate koji odgovaraju nivou postignuća 2 (26,3%) i nivou postignuća 1a (25%). Znatno manje učenika u Srbiji je ostvarilo rezultate koji odgovaraju nivoima postignuća 4, 5 i 6, u odnosu na OECD prosek. [29]

Nivo	<1c	1c	1b	1a	2	3	4	5	6
Skor	manje od 234	234-295	296-357	358-420	421-482	483-544	545-606	607-668	više od 668
Srbija u %	0,7	3,6	13,8	25,0	26,3	18,1	8,8	3,0	0,8
OECD prosek u %	0,3	2,3	9,8	18,7	23,3	22,0	14,9	6,7	2,0

Tabela 3: Distribucija postignuća učenika iz Srbije i OECD prosek na testu matematičke pismenosti 2022. godine [29]

3.3. Empirijsko istraživanje

Na osnovu PISA istraživanja vidimo da učenici u Srbiji ostvaruju slabije rezultate, u odnosu na OECD prosek, pri rešavanju zadataka u kojima se pojavljuju određeni elementi kritičkog mišljenja. Za potrebe ovog rada sprovedeno je empirijsko istraživanje čiji je cilj detaljna analiza odgovora koje daju učenici osmog razreda osnovne škole prilikom rešavanja ovakvih zadataka.

Metodologija

U istraživanju je učestvovao 61 učenik osmog razreda iz Osnovne škole „Žarko Zrenjanin“ u Gospođincima. Među njima je bilo 30 dečaka i 31 devojčica. Učenici su radili test na redovnom času matematike u pristustvu predmetnog nastavnika. Za rešavanje testa su imali 20 minuta. Test čine tri zadatka, koji su zajedno sa načinom bodovanja preuzeti iz „Matematička pismenost: PISA 2003 i PISA 2006“. [27] Zadaci su izabrani tako da dva zadatka (Otpaci i Zemljotres) odgovaraju 4. nivou postignuća. Prvi zadatak (Otpaci) je otvorenog tipa, gde učenici treba sami da napišu odgovor, dok je drugi zadatak (Zemljotres) zatvorenog tipa i učenici biraju između četiri ponuđena odgovora. Treći zadatak (Pljačke) je otvorenog tipa i odgovara 5. ili 6. nivou postignuća, u zavisnosti od kompletnosti odgovora.

Rezultati istraživanja

Prema uputstvu za bodovanje iz „Matematička pismenost: PISA 2003 i PISA 2006“, svaki zadatak nosi maksimalno jedan bod. Minimalan broj bodova na testu je 0, a maksimalan 3. Odgovori na prva dva zadatka (Otpaci i Zemljotres) mogu biti ili tačni ili netačni, tako da se boduju sa 1 ili 0. Odgovor na treći zadatak (Pljačke) može biti i polovičan, tako da bodovanje za ovaj zadatak može biti 1, 0,5 ili 0.

U tabeli 4 su prikazani rezultati testa. Naveden je ukupan broj učenika koji su ostvarili određen broj bodova na testu, kao i raspodela na dečake i devojčice.

Ostvareni bodovi	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Dečaci	11	2	11	0	3	2	1
Devojčice	10	1	14	1	3	2	0
Ukupan broj učenika	21	3	25	1	6	4	1

Tabela 4: Ostvareni bodovi na testu

Iz tabele vidimo da je 0 bodova na testu ostvario 21 učenik, što je približno 34%. Treba imati u vidu da su sva tri zadatka složeni, netipični zadaci koji zahtevaju određene elemente kritičkog mišljenja kao što su interpretacija, zaključivanje i argumentovanje. Najviše učenika, njih 25, što je približno 41%, je ostvarilo 1 bod na testu. Učenici koji su ostvarili 0,5 ili 1,5 bodova su u trećem zadatku dali odgovor koji odgovara 5. nivou postignuća, ali su rešili nijedan ili jedan zadatak koji odgovara 4. nivou postignuća. Dakle, oni su dali dobar ili delimično dobar odgovor na teže pitanje, ali nisu dali dobre odgovore na lakša pitanja. To objašnjava zašto su samo tri učenika ostvarila 0,5 bodova i samo jedan učenik je ostvario 1,5 bodova. Na sva tri pitanja potpuno tačne odgovore dao je jedan učenik.

U nastavku su navedeni zadaci koji su upotrebljeni na testu i analiza rezultata za svaki od njih pojedinačno.

Prvi zadatak: OTPACI

Zadatak

Radeći zadatak koji se odnosi na životnu sredinu, đaci su sakupili podatke o vremenu raspadanja različitih vrsta otpadaka koje ljudi bacaju, što je prikazano u tabeli 5.

Vrste otpadaka	Vreme raspadanja
Kora od banane	1-3 godine
Kora od pomorandže	1-3 godine
Kartonska kutija	0,5 godine
Žvakaća guma	20-25 godina
Novine	Nekoliko dana
Plastične čaše	Više od 100 godina

Tabela 5: Vreme raspadanja otpadaka

Jedan đak predlaže da se ti rezultati predstave dijagramom u stupcima.

Navedi jedan razlog zašto dijagram u stupcima ne odgovara za predstavljanje tih podataka.

Rezultati

Za ovaj zadatak postoje dva moguća tipa tačnih odgovora:

1. Naveden je razlog koji se zasniva na velikoj razlici podataka.
2. Naveden je razlog koji se zasniva na promenljivosti podataka kada je reč o izvesnim kategorijama.

20 učenika, što je približno 33%, je tačno rešilo prvi zadatak. Od toga:

- 6 učenika je navelo razlog koji se zasniva na velikoj razlici podataka. Primer odgovora koji su dali učenici: „Vremenski period između više od 100 godina i nekoliko dana je previše velik da bi se predstavio dijagramom.“
- 14 učenika je navelo razlog koji se zasniva na promenljivosti podataka. Pri tome, 8 učenika je navelo ispravan razlog, ali na uopšten način. Primer odgovora: „Dijagram u stupcima ne odgovara, jer nije određen tačan broj godina za vreme raspadanja.“ Dakle, zaključak je ispravan, ali obrazloženje može biti konkretnije. U ovakvom odgovoru deo informacija se podrazumeva i nije eksplicitno naveden. Preostalih 6 učenika je u svoj odgovor uvrstilo i konkretne podatke iz zadatka, na osnovu kojih su formirali svoj argument. Ovakav odgovor je jasan, precizan i potpun. Primer odgovora: „Razlog je što kod kore banane, kore pomorandže i novina nije tačno određeno vreme raspadanja i ono varira.“

41 učenik nije tačno rešio prvi zadatak. Od toga, 7 učenika, što je približno 11% od ukupnog broja učenika koji su radili test, uopšte nije odgovorilo na pitanje. Među pogrešnim odgovorima od kojih je većina sa nedovoljno dobrim argumentima ili sa pogrešnim zaključcima, izdvaja se 11 odgovora iz kojih se vidi da učenici nisu dobro razumeli zadatak. 5 učenika je odgovorilo da smatra da je tabela bolja za prikaz datih podataka u odnosu na dijagram, bez ikakvog daljeg objašnjenja ili argumenta. Oni nisu razumeli da treba da navedu razlog, zašto stubičasti dijagram nije odgovarajući za prikaz datih podataka, nego su mislili da treba da biraju između tabele i dijagrama. Takođe, 6 učenika je odgovorilo da se dati podaci mogu predstaviti pomoću stubičastog dijagrama.

Drugi zadatak: ZEMLJOTRES

Zadatak

U dokumentarnoj emisiji o zemljotresima i njihovoj učestalosti raspravljalo se i o mogućnosti predviđanja zemljotresa. Jedan geolog je tvrdio: „U toku narednih dvadeset godina, verovatnoća da će Zedgrad pogoditi zemljotres je dva prema tri.“

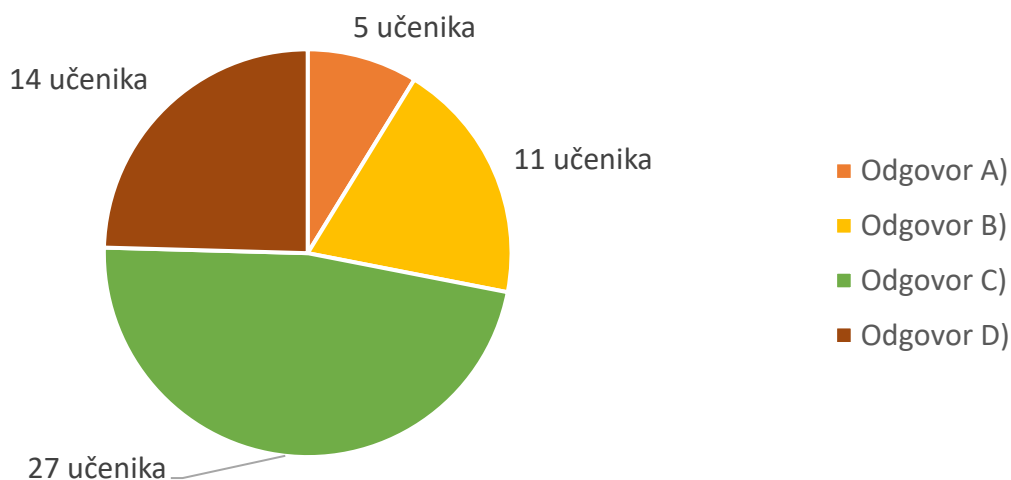
Koja od sledećih rečenica najbolje izražava to što je geolog hteo da kaže?

- A) Pošto je $\frac{2}{3} \cdot 20 = 13,3$, dakle, za 13, odnosno 14 godina dogodiće se zemljotres u Zedgradu.
- B) $\frac{2}{3}$ je više od $\frac{1}{2}$, tako da možemo biti sigurni da će Zedgrad pogoditi zemljotres u narednih 20 godina.
- C) Veća je verovatnoća da će Zedgrad pogoditi zemljotres u narednih 20 godina, nego da ga neće pogoditi.
- D) Ne možemo reći šta će se dogoditi jer niko ne može biti siguran kada će se dogoditi zemljotres.

Rezultati

U ovom zadatku tačan odgovor je pod C).

3 učenika, što je približno 5% od ukupnog broja učenika koji su radili test, nije uopšte odgovorilo na ovo pitanje. Jedan učenik je dao odgovor koji nije ponuđen: „Ni jedna od rečenica nije tačna, zato što su šanse 2:3, znači da ima više šanse da se ne dogodi nego da se dogodi.“ Distribucija preostalih odgovora je prikazana grafikom 3.



Grafik 3: Distribucija izabranih odgovora u zadatku Zemljotres

Drugi zadatak je tačno rešilo 27 učenika, što je približno 44%. Učenici su ispod zadatka imali prazan prostor, koji su mogli da iskoriste za računanje, obrazloženje ili komentar. Nisu bili u obavezi da ga koriste. Za rešavanje zadatka je bilo dovoljno samo da zaokruže jedan od ponuđenih odgovora, što je i učinilo 15 učenika. 23 učenika je u prazan prostor napisalo odgovor, bilo pisanjem čitave rečenice ili samo naznačavanjem slova ispred izabranog odgovora. 20 učenika, što je približno 33% od ukupnog broja učenika koji su rešavali test, je u dodatni prostor napisalo obrazloženje ili komentar. Kada je odgovor praćen dodatnim obrazloženjem, osim ispravnosti samog odgovora možemo analizirati i proces zaključivanja koji je doveo do njega i ukazati na eventualne greške pri zaključivanju. U nastavku su data četiri primera:

- „A) najbolje izražava, jer je prikazan postupak.“
U ovom primeru vidimo da je učenik krenuo od pogrešne pretpostavke, da ukoliko je prikazan postupak tvrđenje mora biti tačno, i na osnovu nje došao do netačnog odgovora.
- „Mislim da je odgovor pod C) najbliži, jer nam govori da će zemljotres svakako pogoditi Zedgrad u narednih 20 godina.“
Obzirom da su u zadatku dati ponuđeni odgovori, može da se desi ovakva situacija, gde je učenik izabrao tačan odgovor, ali je obrazloženje i razmišljanje koje ga je dovelo do tog odgovora pogrešno. U ovom konkretnom slučaju objašnjenje čak bolje odgovora odgovoru B) i pokazuje nam da učenik zapravo ne razume dobro pojam verovatnoće.
- „Da je geolog rekao 1:3, bilo bi da je veća verovatnoća da se zemljotres ne desi u narednih 20 godina.“
Na osnovu ovog komentara, koji je upotrebio zaokružen odgovor pod C), možemo da zaključimo da je učenik dobro razumeo početnu tvrdnju, da razume pojam verovatnoće i da može da koristi date informacije, da ih transformiše i predstavlja na različite načine.
- „ $\frac{2}{3} \cdot 100\% = \frac{200}{3}\% = 66,\bar{6}\%$ Verovatnoća da će taj grad pogoditi zemljotres je $66,\bar{6}\%$, a to je veće od 50%, tako da je veća verovatnoća da će ga pogoditi nego da neće.“
U ovom primeru učenik je date informacije ispravno predstavio koristeći matematički zapis, primenio je svoje znanje iz matematike i dobijeni rezultat interpretirao u konkretnoj situaciji. Na ovakav način su dva učenika obrazložila, zapravo argumentovala, svoj odgovor u drugom zadatku, iako se to od njih u zadatku nije eksplicitno tražilo. Treba napomenuti i da je jedan od tih učenika na testu ostvario maksimalnih 3 boda, dok je drugi učenik ukupno imao 2 boda.

Treći zadatak: PLJAČKE

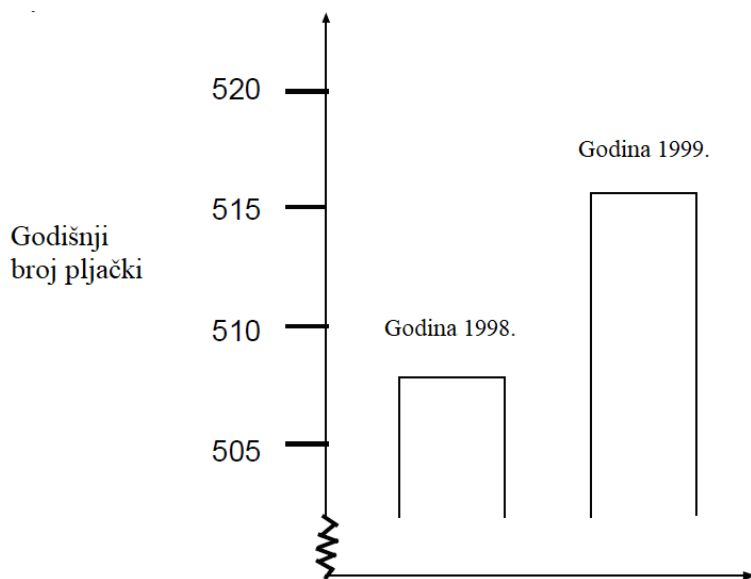
Zadatak

TV reporter je prikazao grafikon 4 i rekao:

„Grafikon pokazuje da je porast pljački u razdoblju između 1998. i 1999. ogroman.“

Smatraš li da je izjava reportera tačna interpretacija grafikona?

Obrazloži odgovor.



Grafik 4: Porast pljački u razdoblju između 1998. i 1999. godine

Rezultati

U tabeli 6 je prikazana raspodela bodova koje su učenici ostvarili u trećem zadatku.

Broj bodova	0	0,5	1
Broj učenika	51	8	2
Broj učenika izražen u procentima	84%	13%	3%

Tabela 6: Raspodela bodova u zadatku Pljačke

Oba učenika koja su u ovom zadatku ostvarila maksimalan broj bodova, svoj argument su zasnovala na činjenici da je razmatran samo jedan ograničen deo grafikona. Na primer: „Izjava reportera nije tačna, jer gllrafikon ne pokazuje ogromnu razliku u brojevima, ali vizuelno izgleda kao da je mnogo porastao.“ Učenik je uočio razliku u vizuelnom prikazu grafikona i stvarnim podacima, koji su predstavljeni brojčano, svoj sud je bazirao na stvarnim podacima i u svom argumentu se osvrnuo na moguće zablude koje proizilaze iz takvog grafičkog prikaza.

U uputstvu za pregledanje, osim ovog tipa odgovora, predviđene su još dve mogućnosti:

1. Odgovor može da sadrži tačne argumente u terminima odnosa ili procenta porasta. Primer koji je dat u uputstvu za pregledanje: „Ne, to je godišnje samo 8 ili 9 pljački više. U odnosu na 507, to nije značajna cifra.“ ili „Ne, 8 pljački više, to je povećanje za 1,5%. Mislim da to nije mnogo.“
2. Naznačeno je da su potrebne indikacije o faktoru vremena da bi se mogao formirati stav. Primer koji je dat u uputstvu za pregledanje: „Ne može se reći ni DA ni NE. Ukoliko je broj pljački u 1997. isti kao i u 1998, onda se može reći da je broj pljački izrazito povećan u 1999.“ [27]

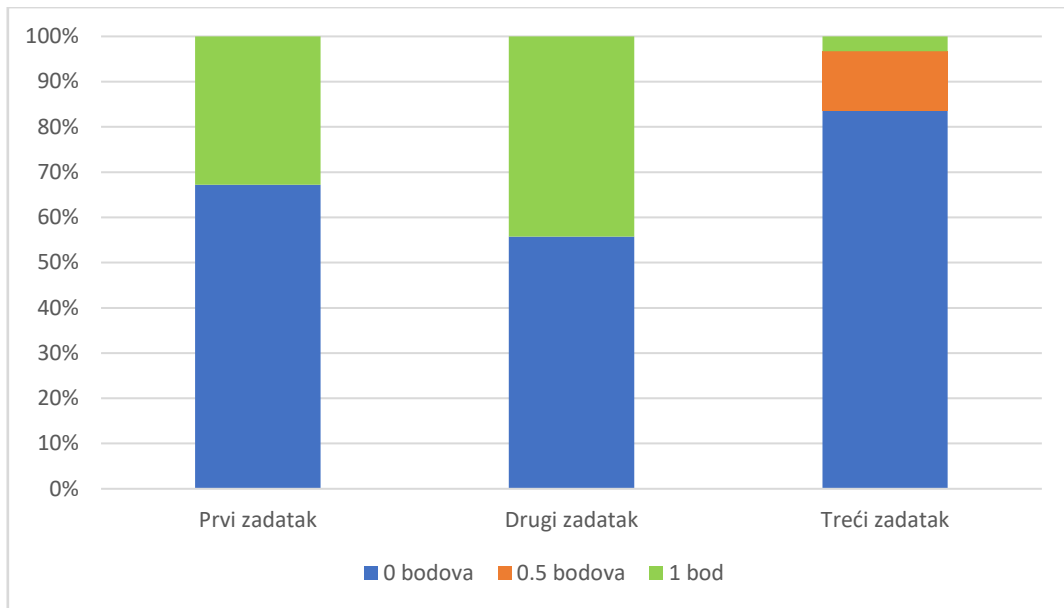
Odgovori u kojima je iskazan tačan ili približno tačan porast broja pljački, ali nije upoređen sa ukupnim brojem, su bodovani sa 0,5 bodova. Primer odgovora koji su dali učenici: „Smatram da je ovo netačna izjava, zato što je bilo za 7 ili 8 pljački više. To nije dovoljno da se formuliše kao ogroman porast.“ Takve odgovore su dali učenici koji su u suštini primetili da se utisak koji ostavlja grafički prikaz razlikuje od podataka koji su dati grafikonom i izabrali da svoj argument zasnuju na brojevnim vrednostima. Međutim, da bismo za neki broj ili količinu mogli da tvrdimo da je ogromna ili nije, moramo imati referentnu vrednost, tj. moramo znati u odnosu na šta je ogromna ili nije.

U trećem zadatku, 0 bodova je ostvario 51 učenik, što je približno 84% od ukupnog broja učenika. Od toga:

- 5 učenika uopšte nije odgovorilo na pitanje. To je približno 8% od ukupnog broja učenika koji su radili test.
- 17 učenika je odgovorilo da smatra da izjava reporetera nije tačna, ali su naveli netačno ili nepotpuno objašnjenje. Oni su izveli dobar zaključak, ali ga nisu adekvatno argumentovali. Odgovori variraju od „Nije tačna.“ do „Mislim da izjava reportera nije tačna, zato što je rekao da je porast pljački ogroman, dok na grafikonu vidimo da razlika nije toliko velika.“ U prvom primeru nije navedeno nikakvo obrazloženje iako se ono eksplicitno traži u zadatku. U drugom primeru dato je obrazloženje koje nije dovoljno precizno. Kada se argumentuje neko tvrđenje ili stav, potrebno je dati konkretne, jasne i nedvosmislene informacije koje ga potkrepljuju.
- 21 učenik je odgovorio da smatra da je izjava reportera tačna. Oni su na osnovu prikazanih podataka izveli pogrešan zaključak. Od toga, 3 učenika su u svom odgovoru naveli i obrazloženje zasnovano na vizuelnom prikazu grafikona na osnovu kog su pogrešno zaključili da je broj pljački udvostručen. Primer odgovora: „Smatram da je izjava reportera tačna, jer po grafikonu se vidi da se broj pljački duplirao za godinu dana.“ Preostalih 18 učenika svoj odgovor nije obrazložilo ili ga je obrazložilo na neki drugi način. Na primer: „Smatram da je izjava reportera tačna. U jednoj godini bi trebalo biti manje pljački.“
- 8 učenika nije odgovorilo ni da je izjava tačna, ni da nije. Na primer: „Broj pljački je povećan, ali zavisi kako za koga. Ja smatram da nije tako drastičan.“ ili „Više pljački je bilo 1999. godine.“ Neki od učenika nisu zapravo ni odgovorili na postavljeno pitanje, nego su dali svoj komentar u vezi sa temom koja je prikazana u zadatku. Na primer: „Manje su uhvatili pljačkaša 1998. godine, jer možda nije bilo dovoljno policajaca u 1999. godini.“

Analiza svih rezultata

Na grafiku 5 je prikazana raspodela ostvarenih bodova po zadacima. Možemo da zaključimo da učenici ostvaruju slabije rezultate u zadacima u kojima treba sami da formulišu odgovor. Iako često izvedu dobar zaključak, poteškoće se javljaju prilikom obrazlaganja odgovora. Argumenti koje navode su često nepotpuni, neprecizni ili neodređeni. Potrebno je dodatno raditi na preciznosti izražavanja i dobroj argumentaciji. Takođe, izostanak bilo kakvog odgovora, u nekim slučajevima, ukazuje na nezainteresovanost, slabu motivisanost ili preveliku razliku između težine zadataka i znanja kod nekih učenika.



Grafik 5: Raspodela ostvarenih bodova po zadacima

4. KRITIČKO MIŠLJENJE U NASTAVI MATEMATIKE

4.1. Metode za razvoj kritičkog mišljenja

Prilikom pojednostavljivanja i izdvajanja osobina koje spadaju u kritičko mišljenje, sa ciljem primene u obrazovanju, više se naglašavaju one osobine koje se ranije nisu toliko pojavljivale i svesno negovale kroz samo obrazovanje. Tako je nastala rubrika (tabela 7) koja preciznije opisuje kritičko mišljenje u nastavi matematike i pritom je prilagođena direktnoj upotrebi u učionici. [5]

Kritičko mišljenje <i>Preispitivanje i evaluacija ideja i rešenja</i>	
Ispitivanje	Uoči i ispitaj pretpostavke i uobičajene načine da se postavi ili reši matematički problem.
Imaginacija	Razmotri pristupanje matematičkom problemu iz nekoliko različitih perspektiva.
Akcija	Objasni prednosti i ograničenja različitih načina postavljanja ili rešavanja matematičkog problema zasnovano na logičkim ili drugim mogućim kriterijumima.
Osvrt	Osvrni se na izabrani matematički pristup ili rešenje u odnosu na druge moguće alternative.

Tabela 7: Rubrika prilagođena primeni u nastavi matematike [5]

Sada kada je jasno šta je to kritičko mišljenje u matematici na nivou osnovne škole, može se dalje govoriti o metodama i tehnikama za rešavanje matematičkih problema koje podstiču razvoj kritičkog mišljenja, ali i o pogodnim pedagoškim metodama.

U priručniku za nastavnike „Naši učenici u svetu kritičkog mišljenja i medijske pismenosti“, koji je izdao Zavod za unapređivanje obrazovanja i vaspitanja u saradnji sa Ambasodom Sjedinjenih Američkih Država u Beogradu, ističe se značaj dobro postavljenih pitanja za razvoj kritičkog mišljenja:

„Kritičko mišljenje se podstiče pitanjima koja zahtevaju angažovanje intelektualnih procesa, a ne pitanjima koja traže samo bazično razumevanje informacija. Od načina na koji se postavljaju pitanja zavisi i kakvo učenje razvijamo!“ [30]

Jedna od pedagoških metoda koja se oslanja na postavljanje metakognitivnih pitanja u svim fazama učenja (obrada novog gradiva, vežbanje) je *IMPROVE* metoda. Njena prednost je mogućnost prilagođavanja različitim uzrastima, tako da je pogodna i za osnovnu školu. Naziv *IMPROVE* predstavlja akronim engleskih reči (*Introducing, Metacognitive, Practising, Reviewing, Obtaining, Verifying, Enrichment*) koje opisuju sedam faza koje čine ovu metodu:

- Upoznavanje celog odeljenja sa novim materijalima, konceptima, problemima ili procedurama uz modelovanje metakognitivnih procesa.
- Postavljanje metakognitivnih samousmerenih pitanja u malim grupama ili individualno.
- Vežbanje uz primenu metakognitivnih pitanja.
- Revizija novih materijala upotrebom metakognitivnih pitanja u kojoj učestvuju i učenici i nastavnik.
- Ovladavanje višim i nižim kognitivnim procesima.
- Proveravanje razvoja kognitivnih i metakognitivnih veština.
- Dodatne i dopunske aktivnosti. [31]

Metakognitivna pitanja, koja se provlače kroz sve faze, možemo svrstati u četiri kategorije prema njihovoj ulozi (tabela 8).

Razumevanje	Šta je zapravo problem? Da li mogu da ga prepričam svojim rečima? Da li mogu da opišem problem bez upotrebe brojeva?
Povezivanje	Na koji način je zadati problem sličan ili različit od problema koji sam već rešavao? Obrazloži.
Izbor strategije	Koje strategije su prikladne za rešavanje ovog problema i zašto? Obrazloži.
Osvrt	Da li rešenje ima smisla? Da li se problem može rešiti na drugačiji način? Da li sam zapeo u rešavanju? Zašto?

Tabela 8: Četiri kategorije metakognitivnih pitanja [31]

Takođe, uočavamo da izdvojene kategorije u velikoj meri odgovaraju opisu kritičkog mišljenja koje je dato u rubrici (tabela 7).

Pri rešavanju matematičkog problema ne prolazimo samo pravolinijski kroz kategorije pitanja, moguće je vraćanje na neku kategoriju, prolaženje u više iteracija i slično. Stoga, pitanja za osvrt imaju tri moguća cilja:

1. Da vode učenika u praćenju sopstvenog napretka pri rešavanju problema.
2. Da pomognu učeniku da napravi izmene i prilagodi strategije za rešavanje kada naiđe na prepreku.
3. Da usmere učenika da se osvrne i analizira šta je bilo dobro u rešavanju (šta je radilo), šta se može iskoristiti za druge probleme, da li postoji i neki drugi način da se reši zadati problem i slično.

U nastavku će biti data lista pitanja koja se mogu koristiti za vođenje i kontrolu procesa rešavanja matematičkih problema. To su pitanja koja na početku uvodi nastavnik kroz modelovanje metakognitivnih procesa, a kasnije se od učenika očekuje postepeno usvajanje i njihova samostalna upotreba. Naravno, lista pitanja nije ni jedinstvena ni konačna, nego predstavlja jedan manji pregled mogućih pitanja:

- Da li razumem značenje reči u ovom problemu? Šta je pitanje?
- Da li sam već rešavao nešto slično? Kako?
- Šta od onoga što već znam mi može pomoći da rešim zadatak?
- Koliko vremena imam da rešim zadatak?
- Zašto je problem postavljen na ovaj način? Da li mogu da ga preformulišem?
- Šta prvo da radim? Odakle da počnem?
- Šta je poznato? Šta su pretpostavke? Šta su uslovi?
- Da li imam sve potrebne informacije za rešavanje ovog problema?
- U kom pravcu treba da idem?
- Da li se problem može razložiti na manje podprobleme?
- Šta radim? Zašto ovo radim?
- Da li sam na dobrom putu?
- Kako mi ovo pomaže? Šta ću uraditi sa dobijenim rezultatom?
- Kako da nastavim?
- Da li sam dobro uočio sve što je dato i sve što se traži?
- Koje informacije su korisne ili važne da ih imam u vidu/razmotrim/upotrebim?
- Da li treba da nastavim u drugom pravcu?
- Ne znam šta dalje. Zašto? Da li sam iskoristio sve informacije?
- Da li je svaki urađeni korak ispravan?
- Kako da izračunam rešenje? Koje operacije mi predstavljaju problem?
- Da li rešenje ima smisla? Na koji način može da se interpretira s obzirom na zadati problem? Koliko rešenja treba da dobijem?
- Da li zaključci koje sam izveo važe uvek ili samo u određenim slučajevima?
- Da li je ovaj način rešavanja bio dobar? Da li sam mogao nešto da uradim drugačije?
- Da li ovaj način razmišljanja mogu da primenim i na druge probleme? Kako?
- Da li treba još jednom da prođem kroz zadatak?

Ovakva pitanja aktiviraju mišljenje višeg reda, kritičko mišljenje i samoregulaciju. Podstiču aktivno učenje i daju učeniku veću kontrolu nad samim procesom rešavanja problema. Takođe, mogu pozitivno da utiču i na osećanja koja se javljaju kod učenika prilikom rešavanja matematičkih problema. [31]

Kategorije metakognitivnih pitanja i sama pitanja se u velikoj meri poklapaju sa algoritmom za rešavanje matematičkih problema koji je Đerđ Polja opisao u knjizi „Kako rešiti matematički zadatak?“, koja je prvi put objavljena 1945. godine. Dakle, prilikom rešavanja matematičkih problema implicitno se koristi i razvija kritičko mišljenje. Da bi podsticanje kritičkog mišljenja bilo efikasnije, poželjno je eksplicitno ukazivati učenicima na situacije u kojima se ono pojavljuje i opremiti ih alatima koje mogu da koriste prilikom rešavanja problema, kao što su navedena pitanja. [32]

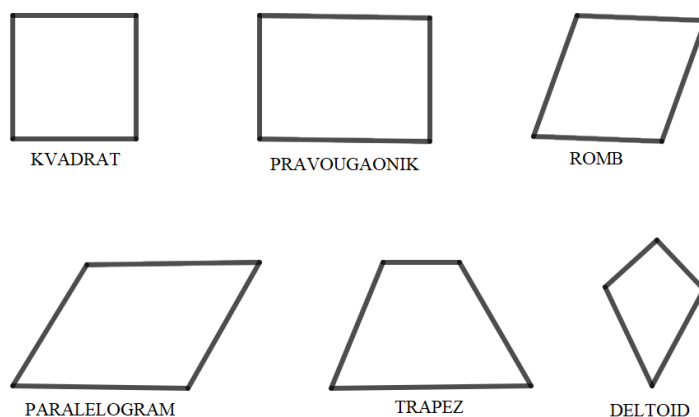
4.2. Strategije za rešavanje matematičkih problema

Jedna od kategorija metakognitivnih pitanja je izbor strategije. Strategije za rešavanje matematičkih problema se uglavnom uče implicitno kroz rešavanje različitih tipova zadataka. U nastavku su izdvojene neke od strategija i istaknuta je njihova povezanost sa kritičkim mišljenjem.

Dobro osmišljene podele koje ističu određene osobine

Primer primene ove strategije je klasifikacija figura prema nekim zajedničkim osobinama, uočavanje sličnosti i razlika među njima. Tema Četvorougao se obrađuje u 6. razredu osnovne škole. U okviru ove teme učenici se upoznaju sa osobinama kvadrata, pravougaonika, paralelograma, romba, trapeza i deltoida.

Zadatak: Uoči sličnosti i razlike između figura na slici 2 i na osnovu toga ih grupiši na odgovarajući način. Obrazloži svoju podelu. Zašto misliš da je takva podela najbolja?



Slika 2: Vrste četvorougla

Ovaj zadatak nema jedno tačno rešenje. On od učenika zahteva da uoče veze između pojmova, sličnosti i razlike. Zatim da posmatraju problem iz različitih perspektiva, da izaberu kriterijume za klasifikaciju, te obrazlože i argumentuju svoj izbor. Pri rešavanju ovog zadatka koristi se i sledeća strategija.

Poređenje pojmova, grupa ili veličina

Videli smo da poređenjem uočavamo sličnosti i razlike, ali isto tako možemo da uočimo i način promene.

Zadatak: Ispitaj da li su vrednosti dve veličine x i y date u tabeli direktno proporcionalne. Obrazloži odgovor.

a)

x	2	1	0	4
y	8	4	0	16

b)

x	6	4	0	2
y	3	2	1	1

Prilikom rešavanja ovog zadatka učenici uočavaju odnose između veličina, porede ih, uočavaju pravilnosti, izvode zaključke. Takođe, na osnovu podataka koje su dobili analizom tabela i svog znanja o direktnoj proporcionalnosti treba da argumentuju svoj odgovor. Način rešavanja ovog zadatka, kao i kod većine matematičkih zadataka, nije jedinstven. Tako da su moguće različite argumentacije, zavisno od toka misli koji je doveo do rešenja.

Transformisanje izraza ili problema

Prilikom rešavanja zadatka ili matematičkog problema često je potrebno reformulisati zadatak da bismo bolje uočili šta je nepoznata, šta se traži, šta su zadati podaci, šta su polazne pretpostavke. Pritom ističemo i informacije za koje mislimo da će nam biti važne ili korisne. Ovo je značajan korak u rešavanju složenijih matematičkih problema jer nam pomaže da razumemo šta je tačno problem i da odvojimo bitno od nebitnog. Reformulisanje se ne radi samo na početku nego i u toku rešavanja, svaki put kada želimo da vidimo šta smo do sad uradili i šta još treba da se uradi. Možemo reformulisati čitav zadatak ili neki njegov segment. U zadacima koji sadrže matematičke izraze često koristimo transformacije izraza, tj. sukcesivne primene pažljivo izabranih matematičkih operacija koje pojednostavljuju izraz ili ga organizuju tako da možemo da izvedemo određene zaključke.

Pokušaj (pogađanje) i provera

Primer primene strategije pokušaj i provera je pismeno deljenje višecifrenih brojeva. Ako želimo da podelimo 129 sa 17, prvo pitanje koje postavljamo je koliko puta se 17 sadrži u 129. Odgovor na ovo pitanje ne znamo. Možemo da zaključimo da je manje od 10 ($17 \cdot 10 = 170$), ali i dalje ne znamo tačan broj. Ovde je potrebno da napravimo prvi pokušaj, pogađamo otprilike koji bi to broj mogao da bude, recimo 8. Sledi provera, $17 \cdot 8 = 136$, što je veće od 129. Na osnovu pokušaja i provere zaključujemo da je traženi broj manji od 8. Pošto je razlika brojeva 129 i 136 manja od 17, sledeći pokušaj će biti broj 7. I zaista, $17 \cdot 7 = 119$ što znači da se 17 u 129 sadrži 7 puta i da je ostatak pri deljenju 10.

Prvi pokušaj može da bude u potpunosti uspešan, ali i ne mora. Ono što je sigurno je da iz svakog pokušaja treba da izvučemo neki zaključak, dobijamo novu informaciju koja nam pomaže da pojednostavimo ili rešimo problem. Takođe, pokušaj može da bude čisto pogađanje ili da iza sebe ima neke uslove i ograničenja koja ga usmeravaju i preciznije određuju. Naravno,

što imamo više uslova, ograničenja i informacija o onome što treba da dobijemo to naš pokušaj ima veće šanse da bude uspešan. Dakle, prilikom izbora onoga što će biti naš pokušaj treba da razmotrimo sve uslove, ograničenja i dosadašnje zaključke, zatim treba da uzmemo u obzir cilj tog pokušaja, šta ćemo dobiti ako on bude uspešan, ali i šta ćemo dobiti ako ne bude uspešan. Takođe, na izbor donekle utiče i sledeća strategija.

Osećaj za brojeve

Osećaj za brojeve se razvija postepeno kroz nastavu matematike u osnovnoj školi ali i kroz svakodnevni život. Tome doprinose različite aktivnosti koje uključuju brojeve: matematičke operacije sa brojevima, poređenje brojeva, zaokrugljivanje, procenjivanje, stavljanje brojeva u različit kontekst (novac, vreme, temperatura, broj stanovnika, dimenzije različitih objekata, itd.).

Ako želimo da predstavimo brojeve poput 3,256 ili $\frac{3}{28}$ na brojevnoj pravoj naš cilj uglavnom nije da to uradimo potpuno precizno, nego da ih predstavimo približno u odnosu na druge brojeve koji su nam u datoj situaciji bitni. Tu ponovo koristimo naš osećaj za brojeve. Za 3,256 možemo reći da je malo veće od 3,250 što je zapravo 3 cela i jedna četvrtina i može se lako prikazati na brojevnoj pravoj. Za $\frac{3}{28}$ imamo više mogućnosti: $\frac{3}{28} > \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$ ili $\frac{3}{28} > \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ ili $\frac{3}{28} < \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$. Da li ćemo koristiti neku od ovih aproksimacija ili nešto potpuno drugačije, da li ćemo koristiti samo jednu ili više aproksimacija, sve zavisi od toga šta nam se traži u zadatku i za šta u datim okolnostima procenimo da je najbolji izbor.

Uz brojeve često se pojavljuju i merne jedinice.

Zadatak: Kolika može biti visina od poda do plafona u dnevnoj sobi u jednoj stambenoj zgradi? Zaokruži tačan odgovor: 250 cm, 250 mm, 25 m, 100 cm, 2500 l. Obrazloži svoj odgovor.

Zadatak: Dopuni prazna mesta odgovarajućim mernim jedinicama (km², ha, a, m²) tako da rečenice budu tačne: Nacionalni park Tara obuhvata površinu od 22000 __. Kostina vikendica je napravljena na placu površine 16 __. Površina Republike Srbije je 88361 __. Površina Sofijinog stana je 68 __.

Procena rezultata pre računanja, zatim provera koliko je dobijeni rezultat blizu te procene

Procena rezultata pre računanja se oslanja na osećaj za brojeve, na sposobnost postavljanja hipoteza i donošenje odluka i onda kada nemamo sve potrebne informacije. Koristimo je iz dva razloga. Prvi razlog je da dobijemo predstavu o tome do čega treba da dođemo na kraju, što često može da bude od koristi prilikom rešavanja zadatka i da nam da ideju kada naidemo na poteškoće pri rešavanju. Drugi razlog se tiče osvrta na rešenje na kraju zadatka. Kada pravimo procenu, pre računanja, u obzir uzimamo ograničenja, uslove i kontekst koji je dat u zadatku. Procena koju smo napravili na početku nam pomaže da odgovorimo na pitanja: Da li rešenje ima smisla? Na koji način može da se interpretira s obzirom na zadati

problem? Koliko rešenja treba da dobijem? Provera koliko je dobijeni rezultat blizu prvobitne procene je važna i zbog evaluacije početnog rasuđivanja. Na taj način možemo da uočimo koliko nedostatak nekih informacija utiče na naše zaključivanje. Takođe možemo da detektujemo greške koje smo napravili pri zaključivanju.

Korišćenje različitih tehnika da prikažemo podatke (crtanje tabela, skica, crteža, dijagrama i grafikona)

Prilikom rešavanja geometrijskih zadataka jedan od prvih koraka jeste crtanje skice. Skice i crteži nam pomažu da bolje vizualizujemo i lakše zamislimo objekat nad kojim radimo, što značajno utiče na razumevanje problema. Pomaže nam da bolje organizujemo informacije koje imamo, da lakše uočimo odnose i izvedemo zaključke. Po sličnom principu prikazivanje podataka na različite načine nam pomaže i u svim drugim oblastima matematike, ne samo u geometriji.

Zadatak: Posle poskupljenja od 16%, cena džempera je 1740 dinara. Kolika je bila cena džempera pre poskupljenja?

Kao i svaki zadatak u matematici i ovaj možemo rešiti na više načina. Jedan od načina je da podatke prikažemo u tabeli (tabela 9).

cena (din)	procenti (%)
x	100
1740	116

Tabela 9: Primer grafičkog prikaza podataka

Pošto je u pitanju direktna proporcionalnost (kako se povećavaju procenti, tako se povećava i cena), strelice koje pokazuju način promene imaju isti smer. Prateći strelice lako postavljamo odgovarajuću proporciju $x : 1740 = 100 : 116$.

Ovaj metod se može koristiti i za direktnu i za obrnutu proporcionalnost (razlika je u usmerenju strelica). Predstavljajući podatke u tabeli učenici mogu lakše da uoče odnos između zadatih veličina i da izdvoje ključne informacije iz tekstualnog zadatka.

Takođe, još jedan primer u kom se često koristi predstavljanje podataka na različite načine jesu linearne funkcije. Linearne funkcije na određen način opisuju odnos između dve veličine, zavisno i nezavisno promenljive. Taj odnos možemo predstaviti u tabeli, pomoću grafika ili formulom. Svaki od njih ima svoje prednosti. Koji ćemo izabrati u konkretnom slučaju zavisi od toga koje informacije o funkciji su nam potrebne.

Kada govorimo o tehnikama za predstavljanje podataka važno je pomenuti i Venov dijagram. Venov dijagram se uvodi u petom razredu u okviru nastavne teme Skupovi. Najčešće se koristi za ilustraciju operacija nad skupovima i rešavanje određenog tipa tekstualnih zadataka.

Zadatak: U jednom odeljenju petog razreda je sprovedena anketa „Koji sport voliš da gledaš?“. Učenici su mogli da izaberu najviše dva odgovora od ponuđenih:

- a) fudbal,*
- b) košarka,*
- c) odbojka,*
- d) tenis,*
- e) neki drugi sport,*
- f) ne volim da gledam sport.*

15 učenika je zaokružilo fudbal, 8 učenika je zaokružilo tenis, a od toga je 5 učenika zaokružilo oba sporta. Ako 12 učenika u svom odgovoru nije izabralo ni fudbal ni tenis, koliko je učenika u tom odeljenju?

Ovakvi zadaci samo pokazuju način upotrebe Venovog dijagrama, međutim mogućnosti njegove primene su mnogo šire. U priručniku za nastavnike „Naši učenici u svetu kritičkog mišljenja i medijske pismenosti“, Venov dijagram je prepoznat kao jedna od tehnika za podsticanje kritičkog mišljenja:

„On ostavlja prostor da se napišu sličnosti i razlike između dve ili više stavki (stvari, ljudi, mesta, događaja i ideja). Može uspešno da se primeni na širok spektar tema.“ [30]

Možemo da zaključimo da Venov dijagram, ali i ostale tehnike za prikazivanje podataka, predstavljaju alat za čiju adekvatnu upotrebu je neophodno kritičko mišljenje, jer one za sobom povlače organizovanje podataka, reformulisanje problema, izdvajanje bitnog od nebitnog, uočavanje odnosa i zavisnosti, planiranje.

Sistematično isključivanje mogućih hipoteza/procedura/teorema koje bismo koristili

Filtriranje našeg znanja i odbacivanje svega što nije u vezi sa zadatim problemom se najčešće u velikoj meri dešava nesvesno i automatski. Ako treba da rešimo zadatak nejednačinu u skupu celih brojeva verovatno nećemo razmišljati o Pitagorinoj teoremi. Naše misli se usmeravaju na ono što će nam koristiti za konkretan problem koji rešavamo. Međutim, nekada je potrebno da svesno analiziramo i odbacimo određene metode ili postupke koji imaju veze sa problemom ali u konkretnom slučaju nisu adekvatne. Na primer, u sedmom razredu osnovne škole se obrađuju polinomi, a u okviru teme i rastavljanje polinoma na činioce. Učenici za to koriste razliku kvadrata, kvadrat binoma, zakon distributivnosti ili njihovu kombinaciju.

Zadatak: Rastavi na proste činioce polinom $20a^3 - 5a$.

Da bismo rešili zadatak moramo da izaberemo adekvatnu strategiju. Proveravamo da li možemo da koristimo razliku kvadrata. Pošto u datom binomu ne možemo da prepoznamo razliku kvadrata koristićemo nešto drugo. Uslov za primenu kvadrata binoma takođe nije ispunjen. Na redu je zakon distributivnosti. Uočavamo da $5a$ deli oba monoma i transformišemo dati polinom.

$$20a^3 - 5a = 5a \cdot (4a^2 - 1)$$

Da li je ovo kraj zadatka? Proveravamo šta se tačno tražilo u zadatku i šta smo mi dobili. 5 i a su prosti činiooci, tako da je ostalo još da proverimo da li se $4a^2 - 1$ može dalje rastaviti. Ponovo proveravamo da li su ispunjeni uslovi za razliku kvadrata, kvadrat binoma ili zakon distributivnosti, ali sada za $4a^2 - 1$. Ovde uočavamo razliku kvadrata i dolazimo do rešenja:

$$20a^3 - 5a = 5a \cdot (4a^2 - 1) = 5a \cdot (2a - 1) \cdot (2a + 1)$$

Međutim, izbor odgovarajuće strategije nije uvek ovako jednostavan i jednoznačan. To nam ilustruje sledeći primer.

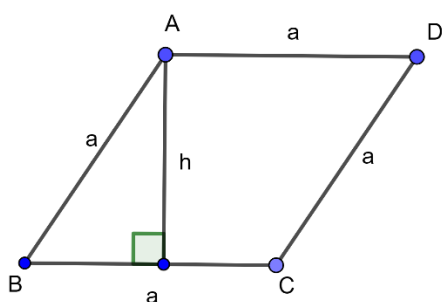
Zadatak: Razlika kvadrata dva uzastopna parna prirodna broja je 68. O kojim brojevima je reč?

Postavljamo jednačinu $(2n + 2)^2 - (2n)^2 = 68$. Ovde kao prvi korak možemo da koristimo i zakon distributivnosti i razliku kvadrata i kvadrat binoma. Svaki učenik pojedinačno treba da donese odluku i izabere jednu od te tri mogućnosti. Koje kriterijume će pritom da koristi? Koji način je efikasniji? Koji je očigledniji? Koji način smatra najlakšim za računanje?

Ovakve odluke najčešće donosimo u trenutku, bez mnogo svesne analize. Ako želimo da razvijamo kritičko mišljenje treba što više da osvestimo proces donošenja odluka. U ovom konkretnom slučaju poželjno je i osvrnuti se na različite argumentacije, odnosno obrazloženja koja učenici imaju za svoj izbor.

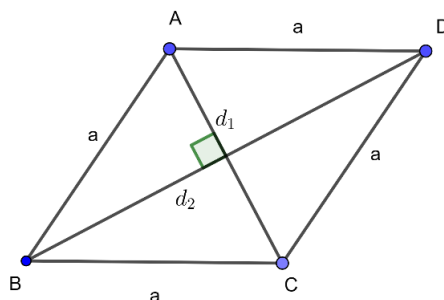
Upotreba formula

Kao što često treba da izaberemo odgovarajuće procedure i teoreme koje ćemo koristiti, tako često biramo i odgovarajuće formule. Upotreba formula ubrzava proces izračunavanja. Ponekad imamo više različitih formula koje opisuju isti pojam, u zavisnosti od toga iz koje perspektive ga posmatramo. Kao primer možemo da uzememo romb.



$$P = a \cdot h$$

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$



Romb je paralelogram koji ima sve jednake stranice i njegovu površinu možemo da izračunamo na isti način kao i površinu svakog paralelograma. Sa druge strane, romb je i deltoid, njegove dijagonale su međusobno ortogonalne. Tako da površinu romba možemo da izračunamo i kao poluproizvod njegovih dijagonala. Dakle, imamo dve formule za površinu

romba koje su nastale kao rezultat posmatranja romba iz različitih perspektiva i koje koriste različite podatke za izračunavanje. Koji od njih ćemo koristiti zavisi od problema koji rešavamo, nekada ćemo koristiti jednu, nekada drugu, a nekada obe.

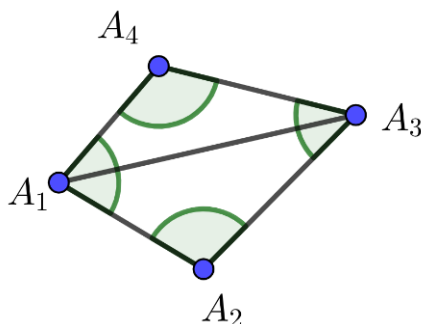
Pojednostavlјivanje problema posmatranjem specijalnih slućajeva; uočavanje šablona i pravilnosti, zatim njihovo opisivanje i upotreba; pravljenje uopštenja u vezi sa brojevima

Ove tri strategije su veoma povezane i međusobno isprepletene tako da ih često kombinujemo prilikom rešavanja zadataka. Njihova upotreba se može videti u naredna dva primera.

Zadatak: Koliki je zbir unutrašnjih uglova konveksnog mnogougla koji ima n stranica?

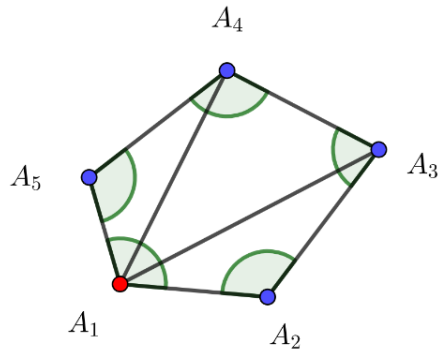
Da bismo dobili ideju kako da izračunamo zbir uglova u n -touglu, posmatraćemo prvo neke specijalne slućajeve, na primer $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ i $n = 6$, što su trougao, četvorougao, petougao i šestougao, respektivno. Zbir uglova u trouglu nam je poznat od ranije i iznosi 180° .

Svaki četvorougao možemo podeliti na dva trougla povlaćeći dijagonalu iz jednog temena, tako da je zbir uglova u četvorouglu zapravo zbir svih unutrašnjih uglova u ta dva trougla $S_4 = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$ (slika 3).



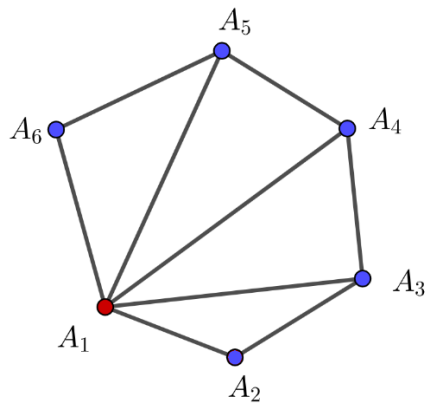
Slika 3: Podela četvorougla na trouglove

Pitamo se da li isti način razmišljanja možemo da primenimo i na petougao. Kod petougla možemo da povučemo dve dijagonale iz jednog temena i na taj način ga delimo na tri trougla (slika 4). Ponovo je zbir svih uglova u petouglu jednak zbiru svih uglova u tim trougovima $S_5 = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.



Slika 4: Podela petougla na trouglove

Sada već možemo da pretpostavimo koliki će biti zbir uglova u šestouglu. Iz jednog temena šestougla možemo povući 3 dijagonale (slika 5). Te dijagonale dele šestougao na 4 trougla, tako da je ukupan zbir uglova $S_6 = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.



Slika 5: Podela šestougla na trouglove

Hajde da vidimo šta sve možemo da zaključimo na osnovu dosadašnjih razmatranja. Da li uočavamo neke pravilnosti? Koje hipoteze smo koristili? Da li možemo da dokažemo te hipoteze? Da li argumenti koje smo koristili važe samo u konkretnim datim slučajevima ili važe uvek?

Kada pomoću svih dijagonala iz jednog temena mnogougla taj mnogougao podelimo na trouglove, ukupan zbir uglova u tim trouglovima će biti jednak zbiru uglova u mnogouglu. Ovo je hipoteza koju smo koristili. Da li je ovo tvrđenje tačno? Zašto? Da li važi za svaki mnogougao? Da li mogu da ga dokažem?

U kakvoj su vezi broj temena mnogougla i broj trouglova na koje je on podeljen na opisani način? Ovu vezu možemo da uspostavimo direktno ili postupno poredeći ih sa brojem dijagonala iz jednog temena. Dijagonala iz jednog temena imamo za 3 manje nego temena (jer se ne računa teme iz kog polaze sve dijagonale i dva njemu susedna temena). Trouglova imamo za jedan više od broja dijagonala iz jednog temena. Dakle, svaki n -tougao možemo da podelimo na $n - 2$ trouglova što određuje formulu za izračunavanje zbira unutrašnjih uglova: $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

Zadatak: Koliko je $(-1)^n$ za $n \in \mathbb{N}$?

Hajde ponovo da posmatramo neke specijalne slučajeve:

$$(-1)^1 = -1$$

$$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$(-1)^3 = (-1)^2 \cdot (-1) = -1$$

$$(-1)^4 = (-1)^3 \cdot (-1) = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$(-1)^5 = (-1)^4 \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$$

Uočavamo da $(-1)^n$ kada je n neparno ima vrednost -1 , a kada je n parno ima vrednost 1 . Neparne brojeve pomoću matematičkih simbola možemo da zapišemo kao $2k + 1$, a parne prirodne brojeve zapisujemo kao $2k + 2$, pri čemu je $k \in \mathbb{N}_0$. Sada možemo matematičkim simbolima da izrazimo našu hipotezu. Važi $(-1)^{2k+1} = -1$ i $(-1)^{2k+2} = 1$ gde je $k \in \mathbb{N}_0$.

Međutim, ovo je samo hipoteza koju smo napravili na osnovu nekoliko specijalnih slučajeva. Moramo da proverimo da li je ona istinita i da li važi uvek. Dakle, treba da je dokažemo matematički.

$$(-1)^{2k+2} = (-1)^{2 \cdot (k+1)} = ((-1)^2)^{k+1} = 1^{k+1} = 1$$

$$(-1)^{2k+1} = (-1)^{2k} \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$$

Pošto smo dokazali svoju hipotezu možemo da zaključimo sledeće:

$$(-1)^n = \begin{cases} -1, & n = 2k + 1 \\ 1, & n = 2k + 2 \end{cases} \text{ za } k \in \mathbb{N}_0$$

U oba ova primera smo koristili induktivno zaključivanje koje obuhvata posmatranje specijalnih slučajeva, uočavanje pravilnosti i šablona, njihovo opisivanje i pravljenje uopštenja. Pritom je bilo veoma važno uočiti hipoteze, razlikovati ih od činjenica, ispitati njihovu tačnost i obezbediti valjanu argumentaciju.

Rastavljanje složenijeg problema na jednostavnije i rešavanje svakog od njih odvojeno

Zadatak: Majka je poslala Ivana u obližnju prodavnicu da kupi tečni deterdžent za veš. Kako se deterdžent prodaje u pakovanjima različitih zapremina i njihove cene se menjaju u odnosu na to da li su na akciji, Ivan je dobio zadatak da kupi pakovanje koje je u tom trenutku najpovoljnije, tj. ima najpovoljniji odnos cene i količine koja se dobije za tu cenu. Ivan je u prodavnici pronašao četiri različita pakovanja deterdženta koji treba da kupi. Pakovanje od 990ml je trenutno na akciji i košta 500 dinara. Pakovanje od 1980ml košta 1250 dinara, a

pakovanje od 2970ml košta 1650 dinara. Najveće pakovanje od 3740ml košta 1800 dinara. Koje pakovanje Ivan treba da izabere?

Ovaj zadatak možemo da rešimo na više načina. Jedan način bi bio da za svako pakovanje izračunamo koliko košta 1ml. Time se dati problemski zadatak transformiše u četiri odvojena zadatka izračunavanja i peti u kom poredimo dobijene vrednosti. Drugi način bi bio da dati problemski zadatak transformišemo u tri nešto jednostavnija u kojima bi za dva različita pakovanja određivali koje je povoljnije. Koji god način da izaberemo, zbog složenosti zadatka, potrebno je da prođemo kroz nekoliko koraka da bismo ga rešili.

Strategiju rastavljanja na jednostavnije probleme često koristimo pri rešavanju složenih problemskih zadataka, zato što nam pomaže da detektujemo koji su koraci potrebni da dođemo do rešenja, a zatim i da napravimo plan akcije.

Razlikovanje bitnih od nebitnih informacija

Često u tekstualnim problemskim zadacima imamo više informacija nego što nam je zaista potrebno. Te informacije ne doprinose rešavanju problema. Njihov cilj je da nam dočaraju kontekst, da nas zainteresuju ili da predstavljaju problem u realnom okruženju. Da bismo razumeli zadatak i uopšte znali sa čim radimo, potrebno je razlikovati dodatne informacije, koje nam u konkretnoj situaciji nisu bitne, od informacija koje direktno ili indirektno utiču na rešenje problema.

Zadatak: Za pripremu Maksinog omiljenog kolača za 7 osoba potrebno je:

- 200g šlaga,
- 400g čokolade za kuvanje,
- 350g višanja,
- 280g mlevenog keksa,
- 1l slatke pavlake.

Koliko je grama višanja potrebno da se napravi ovakav kolač za 11 osoba?

Možemo preformulisati ovaj zadatak tako da izdvojimo samo bitne informacije: Za 7 osoba je potrebno 350g višanja, koliko grama višanja je potrebno za 11 osoba?

Razlikovanje bitnih od nebitnih informacija koristimo tokom čitavog procesa rešavanja zadatka. Ukoliko smo razložili problem na nekoliko jednostavnijih problema, verovatno nam u svakom od njih neće biti potrebne sve informacije koje imamo. Pojmovi bitno i nebitno su relativni u odnosu na kontekst u kom ih posmatramo. Evaluacija informacija na osnovu uočenih relacija, zavisnosti i implikacija predstavlja suštinu ove strategije.

Uočiti ono što je dato i ono što se traži, i proveriti da li smo iskoristili sve što je dato

Podsetimo se elemenata rezonovanja koji su navedeni na strani 5:

„Kad god mislimo, mislimo sa nekim ciljem iz određenog ugla ili perspektive, bazirano na nekim pretpostavkama što vodi do određenih implikacija ili posledica. Koristimo podatke, činjenice i iskustva da donesemo zaključke i sudove bazirano na konceptima i teorijama, kako bismo odgovorili na pitanje ili rešili problem.“

Ove dve rečenice veoma dobro opisuju i proces rešavanja matematičkih problema. Kada rešavamo matematički problem polazimo od nekih pretpostavki, što uključuje informacije koje su nam date, i krećemo se ka cilju koji je definisan onim što se traži u zadatku. Zato je pre svega važno uočiti polazne pretpostavke i krajnji cilj, ono što je dato i ono što se traži. Povremeno u toku rešavanja je potrebno vraćati se na polazne pretpostavke i proveravati da li smo sve uzeli u obzir i da li smo sve upotrebili. To je važno da ne bismo zaboravili neki od uslova ili prevideli neko ograničenje. Osim toga, u situacijama kada nemamo ideju šta da radimo i ne znamo u kom pravcu dalje da rešavamo zadatak, korisno je ponovo proći kroz ceo postupak i podsetiti se svih informacija koje imamo, zato što možda neke od njih povlače implikacije koje još nismo uočili.

Konstrukcija unazad

U situacijama kada ne znamo šta dalje da radimo, osim proveravanja da li smo iskoristili sve što je dato, korisna tehnika je i konstrukcija unazad. Krećemo od kraja i transformišemo ono što treba da dobijemo. Kakvu transformaciju vršimo, da li transformišemo izraz ili detektujemo koje veličine nas vode direktno do rešenja, zavisi od same prirode onoga što treba da dobijemo. Ovakav pristup kombinuje analizu i sintezu i pomaže nam da bolje sagledamo problem, da razvijemo nove ideje i lakše isplaniramo proces rešavanja.

Upotreba tehnika čitanja za razumevanje složenih, nepoznatih i nerutinskih zadataka, kao i tekstualnih zadataka

Za analizu teksta kojim je opisan neki problem, a samim tim i za njegovo bolje razumevanje, korisna je upotreba različitih tehnika koje podstiču aktivno čitanje. Jedna od strategija koja se može primenjivati prilikom rešavanja matematičkih problema je čitanje zadatka nekoliko puta, svaki put sa različitim ciljem. Prilikom prvog čitanja brzo prolazimo kroz zadatak i upoznajemo se sa kontekstom, dobijamo okvirnu ideju o čemu se radi u zadatku (*eng. skimming*). U drugom i trećem čitanju izdvajamo ključne pojmove, nepoznate reči, informacije koje su nam date i detektujemo šta se tačno traži (*eng. scanning*). Zatim zadatak čitamo detaljno, analizirajući koliko dobro smo uradili prethodni korak i usmeravajući se na veze i implikacije koje možda do tada nismo uočili. Obrada teksta na ovaj način podstiče čitaoca da se aktivira i zaista usmeri svoju pažnju na tekst.

Kroz ovih 17 strategija za rešavanje matematičkih problema možemo da uočimo da se kritičko mišljenje prirodno pojavljuje u nastavi matematike. Rešavajući zadatke na časovima učenici svesno ili nesvesno već koriste ove tehnike sa više ili manje uspeha. To nas dovodi do pitanja zašto nam je uopšte potrebna IMPROVE metoda kada strategije same za sebe već koriste kritičko mišljenje. Odgovor se krije u razlici između imerzije i infuzije o kojima je bilo reči u glavi 2. Upotrebom IMPROVE metode se eksplicitno ukazuje na metakognitivna pitanja kojima se prati i reguliše proces rešavanja matematičkih problema i učenja uopšte, zatim se

eksplicitno ukazuje na strategije koje se koriste i modeluju se logički ispravni načini razmišljanja i zaključivanja. Dakle, da bismo zaista razvijali kritičko mišljenje neophodno je eksplicitno i sistematično ukazivati na situacije u kojima ga koristimo i način na koji ga koristimo. [33] Osim infuzije, Abramijeva meta-analiza kao efikasne metode izdvaja problemsko ili kontekstualno učenje i dijalošku metodu.

Problemska nastava je „tip nastave koju karakteriše samostalna istraživačka aktivnost kroz koju učenici, savlađujući problemske teškoće, pronalaze nova rešenja i tako usvajaju naučne istine“. Osnovu problemske nastave predstavlja stvaranje problemske situacije. [34]

Ideja problemske situacije za nastavnu jedinicu Površina kruga: Učenici jednog odeljenja su, inspirisani nedeljom italijanske kuhinje, odlučili da naprave tematsko veče. Dogovorili su se da jedu picu i gledaju film o Pinokiju. Istraži ponudu u picerijama u gradu i pomozu im da naprave porudžbinu. Imaj u vidu da je budžet za organizaciju večeri ograničen.

Složenost problemske situacije se može prilagoditi znanju i sposobnostima učenika obezbeđivanjem dodatnih informacija koje će ga učiniti određenijim. Problem je zadatak koji ima sledeća obeležja:

1. nešto nepoznato, neku prazninu koju treba otkriti i popuniti na osnovu podataka i odnosa koji nisu izričito dati;
2. različit broj mogućnosti za rešavanje (jedna ili više);
3. veliku kompleksnost (za rešenje treba koristiti veliki broj složenih logičkih operacija);
4. rešenje se nalazi ne pomoću nekog ustaljenog obrasca (algoritma) nego je za to potreban stvaralački pristup i iskustvo;
5. rešenjem problema produbljuje se znanje, usvajaju nove strukture saznavanja i razvijaju umne sposobnosti. [34]

Problemska nastava se lepo kombinuje sa grupnim radom, gde svaka grupa izlaže i obrazlaže svoj predlog rešenja. Na taj način do izražaja dolazi postojanje više različitih rešenja u zavisnosti od polaznih pretpostavki i kriterijuma koji su razmatrani. Pojedinačna izlaganja i diskusija koja treba da ih prati podrazumevaju upotrebu dijaloške metode. Dijaloška metoda, iako veoma prirodna, nije nimalo jednostavna za primenu. Razgovor u učionici treba da bude otvoren i podsticajan, ali isto tako i dobro isplaniran, usmeren i sa određenim ciljem. Dijaloška metoda takođe zahteva i dobru atmosferu u učionici, gde je svaki učenik slobodan da iskaže svoje mišljenje i ideje, bez straha od nerazumevanja ili podsmeha od strane drugih učenika. Greške treba da budu prihvaćene kao sastavni deo učenja, kao prirodna pojava prilikom formiranja mišljenja ili rešavanja problema. Osim veštine izražavanja, podjednako je važna i veština slušanja. Učenici treba da slušaju jedni druge i da zaista razmatraju mišljenja koja se razlikuju od njihovog, da uzimaju u obzir i drugačije perspektive. Dijalog treba da bude podsticajan, ohrabrujuć i argumentovan. Učenici treba da pokažu strpljenje, poštovanje, otvorenost, kolegijalnost, razumevanje i da budu podrška jedni drugima. [5]

4.3. Primer časa

U nastavku je data priprema za čas na kom su primenjuju neke od metoda koje podstiču razvoj kritičkog mišljenja.

Osnovni podaci o času

Nastavna tema:	Razlomci
Nastavna jedinica:	Množenje i deljenje decimalnih brojeva
Obrazovni standardi:	Učenik ume da: MA.1.1.4. Izvrši jednu računsku operaciju sa brojevima istog zapisa, pomažući se slikom kad je to potrebno. MA.2.1.4. Koristi brojeve i brojevine izraze u jednostavnim realnim situacijama. MA.1.4.1. Koristi odgovarajuće jedinice za merenje dužine, površine, zapremine, mase, vremena i uglova. MA.3.4.1. Po potrebi pretvara jedinice mere računajući sa njima. MA.3.4.2. Proceni i zaokrugli date podatke i računa sa takvim približnim vrednostima; izražava ocenu greške. [35]

Ciljevi časa:	<ul style="list-style-type: none">• Uvežbavanje osnovnih računskih operacija sa decimalnim brojevima• Razvijanje sposobnosti opažanja, uočavanja relacija, logičkog i kritičkog mišljenja• Razvijanje sposobnosti jasnog i preciznog izražavanja i korišćenja osnovnog matematičkog jezika• Razvijanje veštine komunikacije
Ishodi časa:	Nakon uspešno završenog časa učenik će moći da: <ul style="list-style-type: none">• Izračuna vrednost jednostavnijeg brojevnog izraza sa decimalnim brojevima• Koristi decimalne brojeve u jednostavnim realnim situacijama• Zaokrugli broj i računa sa dobijenim približnim vrednostima

Tip časa:	Čas utvrđivanja
Nastavne metode:	Metoda predavanja, metoda dijaloga, problemska metoda
Oblici rada:	Frontalni rad, rad u grupi

Nastavna sredstva:	Nastavna sredstva korišćena za pripremu časa: „Matematika: udžbenik za četvrti razred osnovne škole“, Milica Ćuk, Branko Marković, Nova škola, Beograd, 2023. „Matematika 5: udžbenik za peti razred osnovne škole“, Nebojša Ikodinović, Slađana Dimitrijević, Klett, Beograd, 2022. Nastavna sredstva potrebna za realizaciju časa: Merna traka dužine 5m, papir pogodan za pravljenje kutija, 6 pakovanja od 5 čokoladnih bananica, jedno pakovanje od 16 čokoladnih bananica
Tehnički uslovi:	Tabla, marker, lenjir
Učenikova sredstva:	Sveska, olovka, lenjir, makaze, lepljiva traka ili lepak

Tok časa sa detaljnom razradom

UVODNI DEO ČASA

Trajanje:	5 minuta
Nastavne metode:	Metoda dijaloga, metoda predavanja
Oblici rada:	Frontalni rad
Tok:	<p>Nastavnik pokazuje učenicima jednu čokoladnu bananicu i postavlja sledeću problemsku situaciju: Šta mislite koliko najviše čokoladnih bananica može da stane u ovu učionicu? Zamislite da možemo da je popunimo čitavu, od poda do plafona, od jednog do drugog zida. Da li bi taj broj bio blizu 20 000, 200 000 ili 2 000 000? (Nastavnik ove brojeve zapisuje na tabli.) Neka podignu ruku oni koji misle da je to broj blizu 20 000. (Nastavnik ispod broja 20 000 zapisuje koliko se učenika javilo, a zatim isti postupak ponavlja za preostala dva broja.) Cilj današnjeg časa je da približno odredimo taj broj.</p> <p>Pitanja: Šta prvo da radimo? Odakle da počnemo? Očekivani odgovori:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Nemamo ideju. • Možemo početi da slažemo čokoladne bananice. • Možemo izmeriti dimenzije učionice. <p>Krenućemo od analize učionice.</p> <p>Pitanje: Kako nazivamo geometrijsko telo koje najbolje opisuje oblik ove učionice? Očekivani odgovori:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Kvadar. • Ne znamo. <p>Ukoliko se niko od učenika nije javio da da odgovor, nastavnik ukazuje na još neke primere kvadra koje učenici u tom trenutku mogu da vide (npr. ormar, sunđer, knjiga, itd.) i eventualno na kraju sam daje odgovor.</p>

	<p>Nastavnik podseća učenike da su o kvadru učili u četvrtom razredu, crta skicu kvadra na tabli i objašnjava šta je kvadar i šta je zapremina kvadra.</p> <p>Kvadar je geometrijsko telo ograničeno sa 6 ravnih površi koje imaju oblik pravougaonika. Veličina dela prostora koju zauzima neko telo naziva se zapremina tog tela i obeležava se slovom V. Ako dužinu kvadra označimo sa a, širinu sa b i visinu sa c, onda zapreminu kvadra računamo kao njihov proizvod $V = a \cdot b \cdot c$.</p>
Aktivnosti nastavnika:	<p>Postavlja problemsku situaciju; nastoji da zainteresuje učenike i da ih podstakne da razmišljaju i procenjuju; podseća učenike na gradivo koje su učili u četvrtom razredu, a koje će im biti potrebno za rad na ovom času; zapisuje važne pojmove i podatke na tabli.</p>
Aktivnosti učenika:	<p>Razmišljaju, procenjuju i aktivno učestvuju u nastavi; prisećaju se i pokušavaju da odgovore na nastavnikova pitanja; zapisuju važne pojmove i formule u sveske.</p>

SREDIŠNJI DEO ČASA

Trajanje:	30 minuta
Nastavne metode:	Metoda dijaloga, problemska metoda
Oblici rada:	Frontalni rad, rad u grupi
Tok:	<p>Vraćamo se na pitanje koliko je čokoladnih bananica potrebno da bi se popunila cela učionica. Za početak treba da odredimo koliki je prostor koji treba da popunimo, tj. kolika je zapremina učionice.</p> <p>Pitanje: Da li imamo sve potrebne informacije da bismo odredili zapreminu učionice?</p> <p>Očekivani odgovori:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Nemamo, tako da ne možemo izračunati zapreminu učionice. • Nemamo, ali možemo izmeriti dimenzije učionice, pa računati na osnovu njih. <p>Dakle, da bismo izračunali zapreminu učionice potrebne su nam njene dimenzije. Nastavnik pita učenike da li neko želi da izmeri dimenzije učionice pomoću merne trake i od onih koji su se javili bira dva učenika. Ukoliko se niko do učenika nije javio, nastavnik bira dva učenika koji su do tada pokazali najmanje interesovanje za čas.</p> <p>Prilikom merenja učenici nailaze na sledeći problem: Kako izmeriti dužinu učionice kada merna traka nije dovoljno duga. Rešenje problema je merenje potrebne dužine iz više delova i sabiranje dobijenih vrednosti. Ukoliko učenici koji vrše merenje sami ne reše problem, nastavnik ga postavlja celom odeljenju.</p> <p>Očekivani odgovori:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Možemo meriti iz delova i na kraju sabrati dobijene vrednosti. • Ne možemo izmeriti, potrebna nam je duža merna traka.

Dodatna pitanja koja nastavnik postavlja ukoliko je potrebno: Da li ste već rešavali nešto slično? Šta od onoga što znate od ranije vam može pomoći da rešite problem?

Ukoliko su učenici koji vrše merenje sami rešili problem, nastavnik ukazuje ostatku odeljenja na postojanje problema i njegovo rešenje, podsećajući ih da su na početku petog razreda učili o merenju dužine, nadovezivanju i sabiranju duži.

Nastavnik na tabli zapisuje dimenzije učionice koje su dobijene merenjem (dužina učionice $a = 9m$, širina učionice $b = 6m$, visina učionice $c = 3m$) i postavlja prvi zadatak.

Zadatak 1. Izračunati zapreminu učionice.

Rešenje: $V_u = 9m \cdot 6m \cdot 3m = 162m^3$.

Nastavnik pita učenike da li neko želi da reši zadatak 1. na tabli i od učenika koji su se javili bira onog koji pokazuje najslabije znanje iz matematike. Ukoliko se niko od učenika nije javio, nastavnik bira jednog od učenika koji iz matematike imaju ocenu 2 ili približan nivo znanja.

Nakon rešenog prvog zadatka, nastavnik postavlja sledeća pitanja: Kako da nastavimo? Da li smo iskoristili sve informacije? Da li treba da nastavimo u drugom pravcu?

Očekivani odgovori:

- Sa učionicom ne možemo više ništa da radimo, možda da krenemo od čokoladne bananice.
- Nismo još ništa radili sa čokoladnim bananicama.
- Ne znamo.

Pažnju usmeravamo na čokoladnu bananicu. Njenu dužinu možemo približno izmeriti lenjirom.

Pitanje: Koju mernu jedinicu ćemo koristiti da iskažemo dimenzije čokoladne bananice? Zašto?

Očekivani odgovori:

- Koristićemo milimetre, da bismo mogli dimenzije čokoladne bananice da iskažemo celim brojevima.
- Koristićemo centimetre, zato što kasnije prilikom poređenja dimenzije učionice treba da iskažemo u istoj mernoj jedinici.

Da bismo mogli da ih uporedimo, prostor koji zauzimaju čokoladne bananice i prostor koji zauzima učionica treba da budu izraženi u istoj mernoj jedinici. Obzirom da je lakše veće merne jedinice pretvoriti u manje, koristićemo centimetre.

Zadatak 2. Izračunati zapreminu učionice izraženu u cm^3 .

Rešenje: $V_u = 9m \cdot 6m \cdot 3m = 900cm \cdot 600cm \cdot 300cm = 162\,000\,000cm^3$.

Pošto smo izračunali zapreminu učionice, vraćamo se razmatranju čokoladnih bananica. One su nepravilnog oblika tako da njihovu zapreminu ne možemo izračunati kao zapreminu kvadra.

Pitanja: Da li neko ima ideju šta možemo dalje da uradimo? Da li možemo nekako da preformulišemo problem? Da li možemo da pristupimo problemu na neki drugi način?

Očekivani odgovori:

- Možemo da pokušamo da ređamo čokoladne bananice pa da vidimo koliko prostora zauzimaju.
- Možemo prvo da popunimo neki manji prostor čokoladnim bananicama, pa da posmatramo odnos tog prostora i učionice.
- Nemamo ideju.

Nastavnik pruža dodatne informacije, kako bi pomogao učenicima da nastave sa rešavanjem problema: Čokoladne bananice se osim pojedinačno prodaju i u pakovanjima od 5, 10 i 16 bananica. Pakovanja od 5 i 16 bananica su kartonske kutije u obliku kvadra koje možemo koristiti prilikom računanja.

Nastavnik deli učenike u 6 grupa, tako da je u svakoj grupi 4 ili 5 učenika. Grupe se formiraju na osnovu mesta sedenja, tako da je potrebno minimalno premeštanje učenika. Svaka grupa dobija po jedno pakovanje od 5 čokoladnih bananica, dok se jedno pakovanje od 16 čokoladnih bananica nalazi na nastavnikovom stolu i po dva učenika iz svake grupe mogu da priđu i da ga analiziraju.

Zadatak 3. Svaka grupa treba približno da odredi koliko najviše čokoladnih bananica može da stane u učionicu. Pritom, mogu da koriste već postojeće kutije u kojima se pakuje 5 ili 16 bananica, kao i da naprave svoje kutije. Za rešavanje zadatka imaju 12 minuta, nakon čega će po jedan predstavnik iz svake grupe čitavom odeljenju saopštiti broj koji su dobili i u jednom minutu obrazložiti na koji način su došli do tog broja.

Primeri mogućih rešenja:

1. Učenici su koristili pakovanje od 5 bananica. Dužina kutije je $17,8cm$, širina je $11,8cm$ i visina je $2,5cm$. Zapremina kutije je $V_1 = 17,8cm \cdot 11,8cm \cdot 2,5cm = 525,1cm^3$. Broj ovakvih kutija koje mogu stati u učionicu je $V_u:V_1 = 162000000cm^3:525,1cm^3 \approx 308512,66$. Pošto u svaku kutiju staje 5 bananica, ukupan broj bananica koji može stati u učionicu je $308512,66 \cdot 5 \approx 1\,542\,563$. Ukoliko su učenici primetili da u kutiji u kojoj se pakuje 5 bananica ima viška prostora i da u nju zapravo može stati 6 bananica, ukupan broj bananica koji može stati u učionicu je $308512,66 \cdot 6 \approx 1\,851\,076$.
2. Učenici su koristili pakovanje od 16 bananica. Dužina kutije je $28cm$, širina je $11,8cm$ i visina je $4cm$. Zapremina kutije je $V_2 = 28cm \cdot 11,8cm \cdot 4cm = 1321,6cm^3$. Broj ovakvih kutija koje mogu stati u učionicu je $V_u:V_2 = 162000000cm^3:1321,6cm^3 \approx 122578,69$. Pošto u svaku kutiju staje 16 bananica, ukupan broj bananica koji može stati u učionicu je $122578,69 \cdot 16 \approx 1\,961\,259$. Ukoliko su učenici

	<p>primetili da u kutiji u kojoj se pakuje 16 bananica ima viška prostora i da u nju zapravo može stati 18 bananica, ukupan broj bananica koji može stati u učionicu je $122578,69 \cdot 18 \approx 2\,206\,416$.</p> <p>3. Učenici su sami napravili kutiju u koju može da stane 4 bananice. Približna dužina takve kutije je $10,5\text{cm}$, širina je $6,8\text{cm}$ i visina je 4cm. Zapremina kutije je $V_3 = 10,5\text{cm} \cdot 6,8\text{cm} \cdot 4\text{cm} = 285,6\text{cm}^3$. Broj ovakvih kutija koje mogu da stanu u učionicu je $V_u:V_3 = 162000000\text{cm}^3:285,6\text{cm}^3 \approx 567226,89$. Pošto u svaku kutiju staje 4 bananice, ukupan broj bananica koji može stati u učionicu je $567226,89 \cdot 4 \approx 2\,268\,907$.</p> <p>4. Učenici su sami napravili kutiju u koju može da stane 1 bananica. Približna dužina takve kutije je 10cm, širina je $3,5\text{cm}$ i visina je 2cm. Zapremina kutije je $V_4 = 10\text{cm} \cdot 3,5\text{cm} \cdot 2\text{cm} = 70\text{cm}^3$. Broj ovakvih kutija koje mogu da stanu u učionicu je $V_u:V_4 = 162000000\text{cm}^3:70\text{cm}^3 \approx 2314285,71$. Pošto u svaku kutiju staje 1 bananica, ukupan broj bananica koji može stati u učionicu je približno $2\,314\,285$.</p> <p>Dok učenici rešavaju zadatak, nastavnik nadgleda njihov rad i sugerise im da pokušaju da reše zadatak na više načina, naglašavajući da je cilj pronaći najveći takav broj. Obzirom da je vreme za rešavanje ograničeno na 12 minuta, potrebno je da svi članovi grupe aktivno učestvuju u rešavanju, kako bi u razmatranje uzeli što više mogućnosti. Takođe, nastavnik sugerise da jedan minut na početku iskoriste za dogovor, planiranje i podelu zaduženja, kao i jedan minut na kraju za analizu rezultata, izvođenje zaključaka i formulisanje odgovora. Prilikom izlaganja rezultata, nastavnik na tabli za svaku grupu beleži broj koji su dobili i u kratkim crtama način na koji su došli do tog broja.</p>
Aktivnosti nastavnika:	Vodi učenike kroz proces rešavanja problema postavljanjem pitanja i zadavanjem konkretnih zadataka; beleži ključne podatke na tabli; deli učenike u grupe, nadgleda njihov rad, daje smernice i sugestije; nastoji da sve učenike aktivno uključi u rešavanje problema; održava disciplinu i radnu atmosferu.
Aktivnosti učenika:	Pokušavaju da odgovore na nastavnikova pitanja; javljaju se da rade zadatke pred tablom; poštuju pravila komunikacije; aktivno učestvuju u radu grupe; vrše potrebna merenja i izračunavanja samostalno ili uz pomoć drugih učenika i nastavnika; razmenjuju mišljenja, porede rezultate i izvode zaključke; poštuju zadate rokove; predstavljaju svoje rezultate pred celim odeljenjem.

ZAVRŠNI DEO ČASA

Trajanje:	10 minuta
Nastavne metode:	Metoda dijaloga
Oblici rada:	Frontalni rad

Tok:	<p>Nakon što je nastavnik na tabli zabeležio sve rezultate sledi diskusija. Diskusiju vodi nastavnik postavljajući sledeća pitanja:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Koja grupa je dobila najveći broj? Koji je to broj? Kojim postupkom su došli do tog broja? Da li je njihov postupak ispravan? • Da li su neke dve grupe koristile isti postupak za rešavanje? Da li su dobile isti rezultat? Od čega to zavisi? • Da li možemo sa sigurnošću da kažemo da smo odredili koliko najviše čokoladnih bananica može da stane u ovu učionicu, da ne može više od ovog broja koji smo dobili? Zbog čega to misliš? Da li neko misli drugačije? • Da li možeš da zamisliš još neki način na koji može da se reši zadatak, koji nismo uzeli u obzir? Da li bi taj način rešavanja bio bolji ili precizniji u odnosu na one koje smo koristili? • Koliko preciznost prilikom merenja ili računanja utiče na rezultat? <p>Na kraju časa nastavnik zadaje zadatak za domaći: Kod kuće izaberite jedan predmet i jednu prostoriju. Odredite približno koliko takvih predmeta može da stane u tu prostoriju. Napišite detaljan postupak i dajte procenu preciznosti svog rešenja.</p>
Aktivnosti nastavnika:	Postavlja pitanja, podstiče i organizuje diskusiju; zadaje domaći zadatak.
Aktivnosti učenika:	Poštuju pravila komunikacije; pažljivo slušaju druge učenike; izražavaju svoje mišljenje; analiziraju rezultate i izvode zaključke; razmatraju različite pristupe rešavanju problema; zapisuju domaći zadatak.

5. ZAKLJUČAK

Kritičko mišljenje je prepoznato kao jedna od ključnih veština u savremenom društvu, podložnom brzim promenama usled razvoja i napretka digitalnih tehnologija. U skladu sa tim, jedan od ciljeva obrazovanja je i razvoj kritičkog mišljenja kod učenika. Zbog kompleksnosti pojma ne postoji jedna opšteprihvaćena definicija. U zavisnosti od potreba i konteksta koriste se različite formulacije i različiti aspekti kritičkog mišljenja. Istraživanja su pokazala da se kritičko mišljenje, u nekom obliku, može razvijati na svim nivoima obrazovanja, počevši od osnovne škole, kao i kroz sve nastavne oblasti.

Da bi se mogao pratiti razvoj kritičkog mišljenja kod učenika, potrebno je koristiti adekvatne testove i mehanizme za njegovu procenu. Postoje različiti standardizovani opšti testovi koji se zasnivaju na situacijama iz svakodnevnog života i najčešće su namenjeni učenicima srednjih škola, studentima ili odraslim osobama. Neki od tih testova se mogu prilagoditi tako da odgovaraju određenoj nastavnoj oblasti i radu sa učenicima u osnovnoj školi. Obzirom da se kritičko mišljenje prirodno pojavljuje u nastavi matematike, to se može iskoristiti za kreiranje zadataka kojim će se, osim konkretnog gradiva iz matematike, proveravati i određeni aspekti kritičkog mišljenja. Primer takvih zadataka su zadaci kojima se proverava matematička pismenost u okviru PISA testiranja.

Istraživanje koje je sprovedeno među učenicima osmog razreda je pokazalo da, pri rešavanju zadataka koji sadrže određene elemente kritičkog mišljenja, učenici ostvaruju slabije rezultate u zadacima u kojima treba sami da formulišu i obrazlože odgovor. Argumenti koje navode u obrazloženju su često nepotpuni, nejasni i neodređeni. Takođe, motivisanost učenika znatno utiče na njihova postignuća.

Jedan od načina za podsticanje kritičkog mišljenja kod učenika je postavljanje dobrih pitanja u toku nastavnog procesa. Cilj postavljanja pitanja je aktiviranje i osvešćivanje mentalnih procesa koji se odvijaju prilikom istraživanja, učenja, rešavanja matematičkih problema, itd. Kroz date primere zadataka i primer časa pokazano je kako se različite metode, koje podstiču razvoj kritičkog mišljenja, mogu kombinovati sa gradivom na časovima matematike u višim razredima osnovne škole. Preduslovi za razvoj kritičkog mišljenja su dobro osmišljeni i isplanirani časovi od strane nastavnika, aktivno učestvovanje učenika na času i dovoljno vremena koje imaju na raspolaganju i učenici i nastavnici za realizaciju takvog vida nastave.

6. LITERATURA

- [1] Krnjaić, Z. T., Pavlović Babić, D., & Gošović, R. (2000). Kritičko mišljenje i šta je to? Konceptualizacija i relevantni pojmovi. *Psihologija*, 33(3-4), 385-398.
- [2] Facione, Peter. (1989). *Critical Thinking: A Statement of Expert Consensus for Purposes of Educational Assessment and Instruction. Research Findings and Recommendations*. 315.
- [3] Paul, R., & Elder, L. (2006). *Critical Thinking: Learn the Tools the Best Thinkers Use*. Pearson Prentice Hall.
- [4] Pavlović Babić, D., Krnjaić, Z. T., Pešić Matijević, J., & Gošović, R. (2001). Struktura sposobnosti i veština kritičkog mišljenja. *Psihologija*, 34(1-2), 195-208.
- [5] Vincent-Lancrin, S., et al. (2019), *Fostering Students' Creativity and Critical Thinking: What it Means in School, Educational Research and Innovation*, OECD Publishing, Paris, <https://doi.org/10.1787/62212c37-en>.
- [6] <https://pisa2022-maths.oecd.org/#Twenty-First-Century-Skills>. (Pristupljeno 20.02.2023)
- [7] https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CONSIL:ST_9009_2018_INIT&from=EN. (Pristupljeno 20.02.2023)
- [8] <https://www.stat.gov.rs/sr-latn/oblasti/upotreba-ikt/upotreba-ikt-pojedinci/>. (Pristupljeno 10.12.2023)
- [9] Lazarević, D. (2007), *Obrazovanje mladih za korišćenje informacija sa Interneta - oslonci u razvoju kritičkog mišljenja*, *Nastava i vaspitanje*, vol. 56, no. 2, pp. 109-118.
- [10] <https://www.weforum.org/publications/the-future-of-jobs-report-2018/> (Pristupljeno 10.03.2023)
- [11] Pešić, J. (2007) *Uloga znanja u kritičkom mišljenju*. Zbornik Instituta za pedagoška istraživanja, vol. 39, br. 1, str. 32-47.
- [12] Mirkov, S. I., & Stokanić, D. Ž. (2015). Podsticanje kritičkog mišljenja kod učenika - stavovi i aktivnosti nastavnika. *Inovacije u nastavi - časopis za savremenu nastavu*, 28(1), 25-41. <https://doi.org/10.5937/inovacije1501025M>
- [13] Abrami, Philip & Bernard, Robert & Borokhovski, Eugene & Wade, Anne & Surkes, Michael & Tamim, Rana & Zhang, Dai. (2008). *Instructional Interventions Affecting Critical Thinking Skills and Dispositions: A Stage 1 Meta-Analysis*. *Review of Educational Research - REV EDUC RES*. 78. 1102-1134. 10.3102/0034654308326084.
- [14] Pešić, J. (2011) *Sličnosti i razlike u konceptualizovanju kritičkog mišljenja*, *Psihološka istraživanja*, 14(1), pp. 5-23. doi:10.5937/PsIstra1101005P.
- [15] Abrami, P. C., Bernard, R. M., Borokhovski, E., Waddington, D. I., Wade, C. A., & Persson, T. (2015). *Strategies for Teaching Students to Think Critically: A Meta-Analysis*. *Review of Educational Research*, 85(2), 275-314. <https://doi.org/10.3102/0034654314551063>
- [16] Ennis R. H. & Weir E. E. (1985). *The ennis-weir critical thinking essay test : an instrument for teaching and testing*. Midwest Publications.
- [17] Kobrin, Jennifer & Sato, Edynn & Lai, Emily & Weegar, Johanna. (2016). *Examining the Constructs Assessed by Published Tests of Critical Thinking*.
- [18] Watson G., Glaser E. M. (2018). *Technical manual and user guide: Watson–Glaser™ III Critical Thinking Appraisal*.
- [19] <https://www.talentlens.com/about/practice-tests.html> (Pristupljeno 23.12.2023)

- [20] de Bie, H., Wilhelm, P., & van der Meij, H. (2015). The Halpern Critical Thinking Assessment: Toward a Dutch appraisal of critical thinking. *Thinking Skills and Creativity*, 17, 33–44.
- [21] Facione NC, Facione PA, Sanchez CA. Critical thinking disposition as a measure of competent clinical judgment: the development of the California Critical Thinking Disposition Inventory. *J Nurs Educ*. 1994 Oct;33(8):345-50. doi: 10.3928/0148-4834-19941001-05. PMID: 7799093.
- [22] Ilić, M. (2013). Pedagoške implikacije Pijažeeve teorije intelektualnog razvoja za nastavu i učenje. *Inovacije u nastavi - časopis za savremenu nastavu*, 26(4), 100-113.
- [23] Ennis, Robert H. (1984). Problems in Testing Informal Logic Critical Thinking Reasoning Ability. *Informal Logic* 6 (1).
- [24] Robert H. Ennis (1993) Critical thinking assessment, *Theory Into Practice*, 32:3, 179-186, DOI: 10.1080/00405849309543594
- [25] <https://www.criticalthinking.com/cornell-critical-thinking-test-level-z.html> (Pristupljeno 26.12.2023)
- [26] Tiruneh, D., De Cock, M., Weldeslassie, A.G., Elen, J., & Janssen, R. (2017). Measuring Critical Thinking in Physics: Development and Validation of a Critical Thinking Test in Electricity and Magnetism. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15, 663-682.
- [27] Pavlović Babić, D., & Baucal A. (2009). *Matematička pismenost: PISA 2003 i PISA 2006*. Zavod za vrednovanje kvaliteta obrazovanja i vaspitanja.
- [28] Anđelković, N. (2019). *Igre za razvoj računarskog razmišljanja sa decom predškolskog uzrasta bez upotrebe tehnologije*. Beograd: EdTech Center – Centar za obrazovne tehnologije za zapadni Balkan.
- [29] OECD (2023), *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*, PISA, OECD Publishing, Paris, <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>.
- [30] Vljaković Bojić, V., Miladinović N., Milijić Subić D., & Milošević I. (2022). *Priručnik za nastavnike: Naši učenici u svetu kritičkog mišljenja i medijske pismenosti*. Zavod za unapređivanje obrazovanja i vaspitanja.
- [31] Mevarech, Z. and B. Kramarski (2014), *Critical Maths for Innovative Societies: The Role of Metacognitive Pedagogies*, Educational Research and Innovation, OECD Publishing, Paris, <https://doi.org/10.1787/9789264223561-en>.
- [32] Polya, G. (1966). *Kako ću riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, Zagreb.
- [33] Buchberger, I., Bolčević, V. i Kovač, V. (2017). Kritičko mišljenje u obrazovanju: dosadašnji doprinosi i otvoreni smjerovi. *Metodički ogledi*, 24 (1), 109-129. <https://doi.org/10.21464/mo45.124.109129>
- [34] Vilotijević M., & Vilotijević N., (2016). *Modeli razvijajuće nastave I*, Učiteljski fakultet, Beograd.
- [35] Stanojević, D. (ur.) (2010). *Obrazovni standardi za kraj obaveznog obrazovanja za nastavni predmet Matematika*. Beograd: Ministarstvo prosvete Republike Srbije, Zavod za vrednovanje kvaliteta obrazovanja i vaspitanja.

Biografija

Dragana Lujić je rođena 17. februara 1996. godine u Bijeljini. Osnovnu školu „Stevan Nemanja“ u Dragaljevcu završila je 2010. godine, kao nosilac Vukove diplome i đak generacije. Iste godine je upisala Gimnaziju „Filip Višnjić“ u Bijeljini, opšti smer, koju je završila 2014. godine. Nakon završetka srednje škole, upisala je osnovne akademske studije Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike, a potom 2018. godine upisuje petu godinu integrisanih akademskih studija, smer Master profesor matematike, na istom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene planom i programom i time stekla uslov za odbranu master rada.

Novi Sad, 2024.

Dragana Lujić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Dragana Lujić

AU

Mentor: dr Zorana Lužanin

MN

Naslov rada: Razvoj kritičkog mišljenja kroz nastavu matematike u osnovnoj školi

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski i engleski

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2024.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

MA

Fizički opis rada: 5/59/35/9/5/5/0

(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Metodika matematike

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: kritičko mišljenje, procena kritičkog mišljenja, nastava matematike, osnovna škola

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Tema ovog master rada je razvoj kritičkog mišljenja kroz nastavu matematike u osnovnoj školi. U prvom delu rada je predstavljena definicija kritičkog mišljenja, značaj kritičkog mišljenja u savremenom društvu i rezultati objavljenih istraživanja o mogućnostima razvoja kritičkog mišljenja kroz obrazovanje. U drugom delu su navedeni neki od opštih testova za procenu kritičkog mišljenja, mogućnosti procene kritičkog mišljenja u nastavi matematike i prikaz empirijskog istraživanja koje je sprovedeno među učenicima osmog razreda. U trećem delu su date neke od metoda za razvoj kritičkog mišljenja i primer njihove primene u okviru nastavne jedinice „Množenje i deljenje decimalnih brojeva“.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 20.12.2023.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Andreja Tepavčević, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor: dr Zorana Lužanin, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Goran Radojev, vanredni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION**

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Dragana Lujić

AU

Mentor: Zorana Lužanin, Ph.D.

MN

Title: Development of critical thinking in middle school mathematics classroom

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: Serbian and English

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2024.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences,
University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: 5/59/35/9/5/5/0

(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Teaching of mathematics

SD

Subject/Key words: critical thinking, assessment of critical thinking, teaching mathematics,
middle school

SKW**UC:**

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: The topic of this master's thesis is the development of critical thinking in middle school mathematics classroom. In the first part are presented the definition of critical thinking, the significance of critical thinking in contemporary society, and the results of published research papers on the possibilities of developing critical thinking through education. In the second part are presented several general tests for assessing critical thinking, as well as the possibilities for assessing critical thinking in mathematics education, and the results of empirical research conducted among eighth-grade students. In the third part are shown some methods for developing critical thinking and an example of their application within the teaching unit "Multiplication and division of decimal numbers."

AB

Accepted by the Scientific Board on: 20.12.2023.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

- President: Andreja Tepavčević, Ph.D., Full Professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad
- Mentor: Zorana Lužanin, Ph.D., Full Professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad
- Member: Goran Radojev, Ph.D., Associate Professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad