UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Andrijana Sekulić

Ojlerov broj

Master rad

Mentor:
dr Milica Žigić

Novi Sad, 2023.

Sadržaj

Predgovor

Ovaj master rad posvećen je nevjerovatnom broju e, kog često nazivamo i Ojlerov broj. Broj e ima zanimljivu istoriju i bitnu ulogu u matematici, umjetnosti, tehnologiji i prirodi. U narednim poglavljima ćemo istražiti različite aspekte ovog broja i njegovu primjenu u matematici i svijetu oko nas.

U prvoj glavi, počinjemo istraživanje broja e od samih početaka, uz osvrt na Džona Nepiera čija su rana istraživanja otvorila put ka razumjevanju ovog broja. Tu smo prikazali njegov način razmišljanja i kako je postepeno razvijao svoj sistem računanja. Zatim smo u drugom poglavlju analizirali problem sa kamatom za koji se posebno interesovao švajcarski matematičar Jakob Bernuli. U trećem poglavlju smo počeli od nekih osobina broja e. Predstavili smo broj e kao graničnu vrijednost, prikazali da se može izraziti kao beskonačni red i rekli nešto više o grafiku eksponencijalne funkcije. Poslije toga smo u prvom podpoglavlju definisali broj e preko limesa. U drugom podpoglavlju smo dokazali iracionalnost broja e, a u trećem smo dokazali transcedentnost Ljuvilove konstante i broja e.

U drugoj glavi pažnju posvećujemo Ojlerovoj jednačini za koju važi da je jedna od najljepših teorema u matematici jer povezuje pet bitnih brojeva: e, π, i, 1 i 0. Potom u drugom poglavlju pričamo o životu Leonarda Ojlera i uočavamo da Ojlerova jednačina predstavlja poseban slučaj opšteg Ojlerovog rezultata. Taj opšti rezultat je Ojlerov identitet za koji smo vidjeli da povezuje eksponencijalnu funkciju i trigonometrijske funkcije. Zatim smo u prvom podpoglavlju predstavili dva pokušaja koja su bila blizu otkrića Ojlerovog identiteta prije nego što ga je sam Ojler otkrio. Drugo podpoglavlje sadrži dva dokaza Ojlerovog identiteta koje je on dokazao, dok u trećem podpoglavlju navodimo neke od posljedica Ojlerovog identiteta.

Treća glava je posvećena logaritamskoj spirali i njenim interesantim svojstvima koja je izdvajaju od ostalih krivih i čine je čudesnom spiralom kako je zvao Jakob Bernuli. Takođe smo se bavili njenom ulogom u prirodi i umjetnosti i rekli nešto više o zlatnom pravougaoniku.

U četvrtoj glavi smo predstavili problem lančanice - visećeg lanca koji je tada zainteresovao mnoge matematičare posebno Johana Bernulija. On je pokazao vezu između krive visećeg lanca i eksponencijalnih funkcija. Pored toga u poglavlju smo prikazali da većina trigonometrijskih formula ima svoje hiperboličke ekvivalente i naveli smo neke od njih.

U poslednjoj petoj glavi predstavljeni su zanimljivi brojevi i formule u kojima se javlja broj e: eksponencijalni integral, Laplasovu transformaciju, Stirlingovu formulu i još neke. Takođe smo spomenuli i jedan zanimljiv događaj vezan za nove simbole brojeva e i π koje je predložio i koristio u svom radu Benjamin Pirs.

* * *

Ovim putem se želim iskreno zahvaliti dr Milici Žigić, mom mentoru, na uloženom trudu i vremenu, pomoći i stručnim sugestijama koje mi je pružila prilikom izrade ovog master rada.

Takođe želim da se zahvalim dr Boriši Kuzeljeviću i dr Ivani Vojnović koji su prihvatili da budu članovi komisije i odvojili svoje vrijeme za realizaciju odbrane master rada.

Na kraju, najveću zahvalnost dugujem mojoj porodici, momku i prijateljima koji su mi bili najveća podrška od početka studiranja.

Ovaj master rad posvećujem svom bratu Njegošu.

Andrijana Sekulić

Glava 1

Uvod

Ojlerova konstanta, često označavana kao "e", predstavlja jednu od najznačajnijih i najintrigantnijih matematičkih konstanti. Njeno ime dolazi od slavnog švajcarskog matematičara Leonarda Ojlera, koji je prvi detaljno proučavao njene osobine. Ova konstanta je prisutna u širokom spektru matematičkih disciplina i ima duboke veze s osnovnim matematičkim konceptima, teorijom brojeva, analizom, i primjenama u različitim granama prirodnih i društvenih nauka.

Ojlerova konstanta se definiše kao granica niza realnih brojeva $(1 + 1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, kada n teži beskonačnosti, što rezultira približnoj numeričkoj vrijednosti 2,71828. Iako se na prvi pogled čini da je riječ o jednostavnom broju, dublje razumijevanje ove konstante otkriva niz kompleksnih osobina koje su privukle pažnju matematičara kroz vijekove.

Broj e je baza prirodnog logaritma ili Nepierovog logaritma $\ln x$ što ćemo detaljnije objasniti u uvodnom dijelu rada, a takođe u istom dijelu ćemo pokazati i transcedentnost i iracionalnost broja e. Za izradu ove glave smo koristili literaturu [1], [2], [3], [5], [7], [10], [11], [12], [13] i [14].

1.1 Džon Nepier

Slika 1.1: Džon Nepier

Džon Nepier (1550 - 1617) bio je matematičar i škotski teološki pisac poznat po tome što je započeo koncept logaritama kao matematičkog alata za pomoć u računima. Džon Nepier rođen je 1550. godine u dvorcu Merčiston, blizu Edinburga u Škotskoj. Bavio se matematičkim istraživanjima tokom slobodnog vremena i bio aktivan kao protestantski vjernik. Vjerske kontroverze tog vremena često su ometale njegove naučne aktivnosti. Veći dio svog slobodnog vremena posvetio je proučavanju matematike, posebno metodama za olakšavanje računanja. Najpoznatiji od tih doprinosa su logaritmi koji nose njegovo ime.

Godine 1594. počeo je raditi na logaritmu, postepeno razvijajući svoj sistem računanja. Time je omogućeno brzo određivanje korijena, proizvoda i koeficijenata iz tablica eksponenata fiksnog broja koji se koristi kao osnova. Nemamo podatke kako je Nepier prvi put došao do ideje koja će ga na kraju dovesti do otkrića. On je dobro poznavao trigonometriju i bez sumnje je bio upoznat sa formulom $\sin(A)\cdot\sin(B) = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$. Njihov značaj leži u činjenici da proizvod dva trigonometrijska izraza kao što je $\sin(A)\cdot\sin(B)$ može se izračunati tako što nađemo zbir ili razliku drugih trigonometrijskih izaraza, u ovom slucaju $\cos(A-B)$ i $\cos(A+B)$. Pošto je lakše sabirati i oduzimati nego množiti i dijeliti ove formule daju primitivni sistem redukcije sa jedne aritmetičke operacije na drugu, jednostavniju. Vjerovatno je ovo bila ideja koja je Nepiera navela na pravi put. Druga jednostavnija ideja uključivala je termin geometrijske progresije, niz brojeva sa fiksnim odnosom između uzastopnih članova. Na primjer niz 1, 2, 4, 6, 8, 16, ... čini geometrijsku progresiju sa zajedničkim odnosom 2. Ako označimo odgovarajući odnos sa q, počevši od 1, članovi progresije su 1, q, q^2, q^3, itd. (primjetimo da je n-ti član q^{n-1}). Davno prije Nepierovog vremena, primjećeno je postojanje jednostavne veze između članova geometrijske progresije i odgovarajćih eksponenata, ili indeksa, odgovarajućeg odnosa. Njemački matematičar Michael Stifel (1487-1567), u svojoj knjizi *Aritmethica integra* (1544), formulisao je ovu relaciju na sljedeći način: ako pomnožimo bilo koja dva člana progresije 1, q, q^2,..., rezultat bi bio isti kao da smo sabrali odgovarajuće eksponente. Na primjer, $q^2 \cdot q^3 = (q\cdot q)\cdot(q\cdot q\cdot q) = q\cdot q\cdot q\cdot q\cdot q = q^5$, rezultat koji se mogao dobiti tako što saberemo eksponente 2 i 3. Slično, dijeljenje jednog člana geometrijske progresije drugim članom je ekvivalentno sa oduzimanjem njihovih eksponenata: $q^5/q^3 = (q\cdot q\cdot q\cdot q\cdot q)/(q\cdot q\cdot q) = q\cdot q = q^2 = q^{5-3}$. Tako imamo jednostavna pravila $q^m \cdot q^n = q^{m+n}$ i $q^m/q^n = q^{m-n}$.

Međutim, problem nastaje ako je eksponent imenioca veći od eksponenta brojioca, kao ovdje q^3/q^5, naše pravilo daje rezultat $q^{3-5} = q^{-2}$, izraz koji nismo definisali. Da bismo riješili ovaj problem, definišemo q^{-n} da bude $1/q^n$, pa je tako $q^{3-5} = q^{-2} = 1/q^2$. Imajući na umu ove definicije, sada možemo beskonačno proširiti geometrijsku progresiju u oba pravca: ..., $q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, q^0 = 1, q, q^2, q^3, \ldots$ .Vidimo da je svaki član stepen zajedničkog odnosa q i da eksponenti -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... čine aritmetički niz (u aritmetičkom nizu je razlika između uzastopnih članova konstantna, u ovom slučaju 1). Ova veza je ključna ideja za logaritame; ali dok je Stifel imao na umu samo cjelobrojne vrijednosti eksponenta, Nepierova ideja je bila da je proširi na kontinuirani niz vrijednosti. Njegov način razmišljanja je bio sljedeći: ako bismo mogli da napišemo proizvoljan pozitivan broj kao stepen nekog datog broja, fiksiranog broja (kasnije smo ga nazvali baza), tada bi množenje i dijeljenje brojeva bilo ekvivalentno sa sabiranjem i oduzimanjem njihovih ekponenata. Štaviše, podizanje broja na n-ti stepen (što znači pomnožiti taj broj n puta) bi bilo ekvivalentno sabiranju eksponenata n puta samim sobom - što je isto pomnožiti ga sa n - i pronaći n-ti korijen broja bi bilo ekvivalentno sa n ponovljenih oduzimanja - što je dijeljenje sa n. Ukratko, svaka aritmetička operacija bi bila svedena na onu ispod nje u hijerarhiji operacija, čime bi se značajno umanjio napor pri obavljanju numeričkih računica.

Sada ćemo ilustrovati kako ova ideja radi birajući za bazu broj 2. Tabela 1.1 prikazuje uzastopne stepene broja 2, počevši od $n = -3$ i završavajući sa $n = 12$. Pretpostavimo da želimo pomnožiti 32 sa 128. Nađemo u tabeli eksponente koji odgovaraju brojevima 32 i 128 i nalazimo da su oni 5 i 7, redom. Sabirajući ove eksponente dobijamo 12. Sada obrnutim procesom tražimo broj čiji odgovarajući eksponent je 12; taj broj je 4,096. Kao drugi primjer, pretpostavimo da želimo naći 4^5. Pronalazimo eksponent koji odgovara broju 4, a to je 2, i ovaj put množimo ga sa 5 i dobijamo 10. Onda tražimo broj čiji je eksponent 10 i pronalazimo da je to 1024. I zaista, $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = 1024$.

Tabela 1.1 Stepeni broja 2

n	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096

Naravno, takva složena šema nije potrebna za računanje isključivo s cijelim brojevima; metoda bi bila praktična i korisna samo ako bi je bilo moguće primijeniti na bilo koje brojeve, cijele brojeve ili razlomke. Ali da bi to moglo funkcionisati potrebno je prvo popuniti praznine u tabeli između brojeva. Možemo to uraditi na dva načina: uzimajući da nam je eksponent razlomak ili birajući za bazu dovoljno mali broj tako da njen stepen sporo raste. Kada nam je eksponent razlomak definišemo sa $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ (na primjer, $2^{5/3} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32} \approx 3,17480$). Ovo saznanje još nije bilo otkriveno za vrijeme Nepierovog života, pa je ostala druga opcija tj. izbor dovoljno malog broja kao osnove. Naredni izazov bio je izabrati taj dovoljno mali broj. Očigledno ako bi za bazu uzeli veoma mali broj tada bi stepen rastao veoma sporo i ponovo bi imali sistem koji nije praktičan. Nakon dugogodišnjeg rada na ovom problemu, Nepier pronalazi rješenje u odabiru broja koji je blizu jedinici, ali ne preblizu. Konkretno, odlučuje se za $,9999999$ ili $1 - 10^{-7}$.

Odgovor na pitanje zašto je Nepier izabrao baš ovu specifičnu opciju leži u njegovom nastojanju da smanji upotrebu decimalnih razlomaka. Iako su razlomci bili korišćeni hiljadama godina prije Nepiera, uglavnom su bili izražavani kao obični razlomci, odnosno kao odnosi cijelih brojeva. Decimalni razlomci, koji se odnose na proširenje decimalnog sistema na brojeve manje od 1, tada su bili nedavno uvedeni u Evropu i nisu još bili potpuno prihvaćeni. Kako bi smanjio upotrebu decimalnih razlomaka, Nepier je postupio suštinski: podijelio je jedinicu na veliki broj manjih dijelova i smatrao svaki od tih dijelova novom jedinicom. S obzirom na svoj cilj da olakša naporne trigonometrijske račune, Nepier je slijedio tadašnju praksu u trigonometriji gdje su poluprečnici jediničnog kruga bili podeljeni na 10.000.000 ili 10^7 dijelova. Na ovaj način, ako se od cijelog broja oduzme njegov 10^7 dio, dobija se broj najbliži 1 u ovom sistemu, odnosno $1 - 10^{-7}$ ili $0,9999999$. Nepier je ovaj broj odabrao kao zajednički odnos kako bi pojednostavio računanje.

Kasnije se posvetio problemu pronalaženja narednih članova svog niza putem zahtjevnih i ponovljenih oduzimanja. Iako ovo svakako nije bio jedan od najinspirativnijih zadataka pred naučnikom, Nepier je odlučno istrajao i posvetio dvadeset godina svog života (1594–1614) kako bi uspješno dovršio zadatak. Njegova početna tablica sadržala je samo 101 unos, započevši s $10^7 = 10.000.000$, zatim $10^7 \cdot (1 - 10^{-7}) = 9.999.999$, a potom $10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^2 = 9.999.998$, te tako dalje sve do $10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{100} = 9.999.900$ (zanemarivši decimalni dio $0,0004950$). Svaki član bio je dobijen oduzimanjem njegovog 10^7 dijela od prethodnog člana. Nakon toga je proces ponovljen, iznova započinjući s 10^7, ali ovog puta koristeći odnos posljednjeg broja u odnosu na prvi u originalnoj tablici, odnosno $9.999.900 : 10.000.000 = 0,99999$ ili $1 - 10^{-5}$. Druga tablica imala je pedeset i jedan unos, gdje je posljednji bio $10^7 \cdot (1 - 10^{-5})^{50}$ ili veoma blizu 9.995.001. Sljedeća tablica sadržala je dvadeset i jedan unos, koristeći odnos $9.995.001 : 10.000.000$; posljednji unos u toj tablici bio je $10^7 \cdot 0,9995^{20}$, ili približno 9.900.473. Na kraju, iz svakog unosa u toj posljednjoj tablici, Nepier je generisao dodatnih šezdeset osam unosa, koristeći odnos $9.900.473 : 10.000.000$, ili veoma blizu $0,99$; poslednji unos je bio $9.900.473 \cdot 0,99^{68}$ ili veoma blizu 4.998.609 - otprilike polovina početnog broja.

Danas bi se takav zadatak, naravno, riješio pomoću računara; čak bi i digitron omogućio završetak posla za nekoliko sati. Međutim, Nepier je svoje računanje obavljao samo pomoću papira i olovke. Njegova briga bila je minimizirati upotrebu decimalnih razlomaka. Nakon što je završio ovaj zahtjevan i obiman zadatak, ostalo je još da da ime svom stvaranju. Na početku je svakom eksponentu svakog stepena dao ime "vještački broj", ali kasnije se odlučio za termin "logaritam", riječ koja znači "odnos broja". U modernoj notaciji, to se može reći na način da, ako je (u njegovoj prvoj tabeli) $N = 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^L$, tada je eksponent L (Nepierov) logaritam broja N. Nepierova definicija logaritama se razlikuje u nekoliko aspekata od moderne definicije (koju je 1728. godine uveo Leonard Ojler): ako je $N = b^L$, gdje je b fiksni pozitivan broj različit od 1, tada je L logaritam (po bazi b) broja N. Tako u Nepierovom sistemu $L = 0$ odgovara $N = 10^7$ (što znači da je Nepierov $\log 10^7 = 0$), dok u modernom sistemu $L = 0$ odgovara $N = 1$ (što znači da je $\log_b 1 = 0$). Još važnije, osnovna pravila za operacije s logaritmima - na primjer, da je logaritam proizvoda jednak zbiru pojedinačnih logaritama - ne važe za Nepierovu definiciju.

Na kraju, važno je napomenuti da Nepierovi logaritmi opadaju s rastućim brojevima zbog činjenice da je $1 - 10^{-7}$ manje od 1. Nasuprot tome, uobičajeni logaritmi koje koristimo, s bazom 10, rastu kako brojevi rastu. Nepier nije znao da je praktično na korak od otkrića broja koji će, stotinu godina kasnije, biti prepoznat kao temelj logaritama i koji će imati istaknutu ulogu u matematici, odmah nakon broja π. Taj broj, e, definiše se kao granica niza $(1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$, dok n teži beskonačnosti.

Konačno, 1614. godine je diskutovao o logaritmu u tekstu pod naslovom *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Opis divne logaritamske tabele), koji je prvo objavio na latinskom, a kasnije i na engleskom jeziku. Kasnije dijelo, *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Konstrukcija divne logaritamske tabele) objavio je posthumno njegov sin Robert 1619. godine. Ovako definisani logaritmi u savremenom dobu nose naziv Nepierovi logaritmi i vrlo često se miješaju sa prirodnim logaritmima (logaritmi čija je baza e). Poznati engleski

MIRIFICI

LOGARITHMORVM CANONIS DESCRIPTIO,

Ejusque usus, in utraque Trigonometria; *vt etiam in omni Logistica Mathematica,* amplissimi, facillimi, *& expeditissimi explicatio.*

ACCESSERVNT OPERA POSTHVMA;

Primò, Mirifici ipsius canonis constructio, & Logarithmorum ad naturales ipsorum numeros habitudines.

Secundò, Appendix de alia, eâque præstantiore Logarithmorum specie construenda.

Tertiò, Propositiones quædam eminentissimæ, ad Triangula sphærica mirâ facilitate resolvenda.

Autore ac Inventore IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, &c. Scoto.

EDINBVRGI,
EXCVDEBAT ANDREAS HART.
ANNO 1619.

Slika 1.2: Naslovna strana izdanja iz 1619. godine Nepierovog *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* koja takođe sadrži i *Constructio.*

matematičar Henri Brigs posjetio je Nepiera 1615. godine kako bi zajedno radili na revidiranoj tabeli, koja je omogućila brže i lakše računanje. Njih dvojica zajedno su modifikovali logaritme i tako su se pojavili logaritmi koje mi danas poznajemo (logaritmi sa bazom 10). Na taj način su logaritmi pronašli primjenu u različitim oblastima, uključujući astronomiju i druge prirodne nauke.

Upotreba logaritama se brzo proširila širom Evrope. Nepierov *Descriptio* je preveo na engleski jezik Edvard Rajt i pojavio se u Londonu 1616. U drugom izdanju prevoda Edvarda Rajta (London, 1618), u prilogu koji je vjerovatno napisao Vilijam Otred, pojavljuje se ekvivalentna izjava da je $\log_e 10 = 2,302585$. Ovo se čini kao prvo eksplicitno prepoznavanje uloge broja e u matematici. Ali odakle potiče ovaj broj? U čemu leži njegova važnost? Da bismo odgovorili na ova pitanja, sada moramo da se okrenemo jednoj temi koja se na prvi pogled čini dalekom od eksponenata i logaritama: matematici finansija.

1.2 Broj e

"The letter e may now no longer be used to denote anything other than this positive universal constant."

(Edmund Landau)

U godinama koje su uslijedile nakon Nepiera, mnogi matematičari su nastavili raditi s logaritmima, uključujući logaritme po osnovi e (kasnije nazvane prirodnim logaritmima). Međutim, nisu prepoznali broj e u svom radu. S obzirom na to, retrospektivno gledajući, ovi rani razvoji i radovi s logaritmima su pomogli oblikovati naše razumijevanje broja e kasnije.

Problem sa kamatom

Dakle, šta tačno predstavlja ovaj broj e i kako se pojavio? Godine 1683. švajcarski matematičar Jakob Bernuli je razmatrao probleme računanja kamata. Kada imamo određenu sumu novca koju ulažemo po određenoj kamatnoj stopi tokom nekoliko godina, koliko će brzo rasti? Odgovor zavisi od toga koristimo li prostu ili složenu kamatu, i koliko često računamo kamatu. Na primjer, pretpostavimo da ulažemo 100 dinara po godišnjoj stopi od 10 procenata tokom nekoliko godina. Sa prostom kamatom, iznos raste linearno – na 110 dinara poslije jedne godine, 120 dinara poslije dvije godine, i tako dalje. Nakon k godina, naših 100 dinara je poraslo na $100 + 10k$ dinara. Šta se događa sa složenom kamatom? Nakon jedne godine, iznos raste na 110 dinara, kao i prethodno. Ali nakon dvije godine dodali smo još 10 procenata, ne na 100 dinara, već na 110 dinara, što daje $110 + 11 = 121$ dinar. Nakon tri godine, dodali smo još 10 procenata na 121 dinar, što daje 133,10 dinara, i tako dalje. Nakon k godina, naših 100 dinara je poraslo na $100 \cdot 1,1^k$.

Sada promjenimo problem. Bernuli je želio saznati šta će se dogoditi ako češće računamo kamatu – recimo, n puta godišnje ili čak neprekidno. Pretpostavimo da kamatu sada računamo polugodišnje ($n = 2$). Tada nakon prvog perioda iznos raste za $\frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ procenata na $100 \cdot 1,05 = 105$ dinara, a nakon drugog perioda raste za dodatnih 5 procenata, ne na 100 dinara, već na 105 dinara, dajući nam $105 + 5,25 = 110,25$ dinara – to jest, $100 \cdot 1,05^2$. Sada pretpostavimo da računamo kamatu svaka tri mjeseca ($n = 4$). Tada nakon prvog perioda iznos raste za $\frac{1}{4} \cdot 10 = 2\frac{1}{2}$ procenata na $100 \cdot 1,025 = 102,50$ dinara, nakon drugog perioda postaje $100 \cdot 1,025^2 \approx 105,06$ dinara, nakon trećeg perioda postaje $100 \cdot 1,025^3 \approx 107,69$ dinara, i do kraja godine postaje $100 \cdot 1,025^4 \approx 110,38$ dinara.

Na sličan način, ako računamo kamatu n puta godišnje, tada se nakon svakog perioda iznos povećava za $10/n$ procenata – to jest, množi se sa $1+0,1/n$ – a na kraju godine postaje $100 \cdot (1+0,1/n)^n$. Na primer, ako računamo kamatu svaki mjesec, tada je krajnji iznos $100 \cdot (1+0,1/12)^{12} = 110,47$ dinara i ako računamo svakog dana tada je krajnji iznos $100 \cdot (1 + 0,1/365)^{365} = 110,51$ dinara. Kako se godina dalje dijeli na manje periode, šta se događa sa ovim iznosima? Da li neprekidno rastu ili konvergiraju ka nekoj granici? I šta se dešava ako se kamata računa neprekidno? Ispostavlja se da u oba slučaja teži ka granici malo ispod od 110,52 dinara, koja se dobija množenjem 100 dinara sa $e^{0,1}$, gde je e eksponencijalni broj. Dakle, šta je ovaj broj e?

Da bismo saznali, ponovićemo prethodni postupak, ali ćemo početi sa samo 1 dinarom i povećati kamatnu stopu na nerealnu godišnju stopu od 100 procenata. Šta se dešava kada se godina podijeli na kraće periode? Dobijamo sljedeći popis krajnjih iznosa u dinarima, izračunatih na pet decimala:

period	*godina*	*pola godine*	*četvrtina godine*	*dva mjeseca*	*mjesec*
konačni iznos	*2,00000*	*2,25000*	*2,44141*	*2,52153*	*2,61304*
period	*sedmica*	*dan*	*sat*	*minute*	*sekunde*
konačni iznos	*2,69260*	*2,71417*	*2,71813*	*2,71828*	*2,71828*

Ono što smo uradili da dobijemo ove rezultate jeste da smo primjetili da ako godinu podijelimo na n perioda, tada se nakon svakog perioda iznos množi sa $1 + 1/n$, tako da je krajnji iznos $(1 + 1/n)^n$. Takođe primećujemo da, kako n beskonačno raste, ovi brojevi teže ka graničnoj vrijednosti koja odgovara računanju kamate neprekidno. Ta granična vrijednost je eksponencijalni broj koji je Ojler nazvao e. (Bernuli ga je nazvao b, ali nema naznake da su bilo koji od njih namjerno izabrali prvo slovo svog imena za ovu konstantu.)

Na isti način, ako je kamatna stopa x, tada se krajnji iznos dobija množenjem početne sume sa graničnom vrijednošću niza $(1+x/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, što se ispostavlja da je jednako e^x. Na primjer, kao što smo vidjeli ranije kada je kamatna stopa bila 10 procenata ili 0,1, granična vrijednost se dobija množenjem početne sume od 100 dinara sa $e^{0,1} \approx 1,1052$, što daje 110,52 dinara.

1.3 Osobine broja e

Najveći napreci u razumjevanju logaritama, eksponencijalne funkcije i veza između njih ostvareni su u ranom 18. vijeku. Glavna ličnost u ovoj priči bio je Leonard Ojler, koji je istraživao glavna svojstva eksponencijalnog broja "e" i funkcije $y = e^x$, i koji je "e" postavio u centar diskusija o logaritamskoj funkciji. Njegova čuvena knjiga *"Introductio in Analysin Infinitorum"* iz 1748. godine, sadržala je mnoge rezultate iz njegovih prethodnih radova. Evo nekih od njegovih glavnih saznanja.

e kao granična vrijednost

Vidjeli smo da je "e" granica brojeva $(1 + 1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, kako n beskonačno raste, i da je "e^x" granica brojeva $(1 + x/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, za bilo koji broj x. Da bismo skratili, koristeći notaciju granica, možemo zapisati:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = e \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n = e^x.$$

e se može izraziti kao beskonačni red

Kako je već okrio Isak Njutn broj e je takođe zbir beskonačnog reda

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{1.1}$$

gdje su brojevi u imeniocima faktorijeli $n!$.

Značenje te jednakosti je da parcijalne sume

$$s_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

gdje $n \in \mathbb{N}$, konvergiraju ka broju e kad n teži beskonačno (ili što je isto, vrijednost $e - s_n$ je dovoljno mala, čim je n dovoljno velik).

Čak se može i pokazati da je brzina konvergencije faktorijelna, tj. važi

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq e - s_n \leq \frac{3}{(n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

U opštem slučaju, za bilo koje x,

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \ldots.$$

Ovaj red konvergira za sve vrijednosti x. Zapravo, ovi redovi brzo konvergiraju jer faktorijeli veoma brzo rastu; na primjer, uzimajući samo prvih deset članova za e, dobijamo približnu vrednost $e \approx 2,7182787\ldots$, što je tačno na pet decimala.

Pokazujemo vezu između dva izraza za e^x - kao granice i kao beskonačnog reda:

Počinjemo sa binomnom formulom za

$$\begin{aligned}(1+a)^n = 1 &+ \frac{n}{1!} \cdot a + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot a^3 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cdot a^4 + \cdots, n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Ako ubacimo $a = \frac{x}{n}$ dobijamo

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 &+ \frac{n}{1!} \cdot \left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^3 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^4 + \cdots, n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

što možemo još zapisati

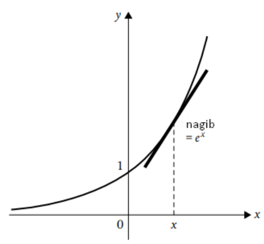
$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 &+ \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)x^3 \\ &+ \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)x^4 + \cdots, n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Sada pustimo limes da teži beskonačno. Tada lijeva strana konvergira e^x i svaka zagrada oblika $(1 - k/n)$ na desnoj strani konvergira ka 1, pa imamo

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

Grafik funkcije e^x

Grafik funkcije e^x je prikazan na slici 1.3. Jedna od njegovih najvažnijih osobina je ta da je nagib u svakoj tački x grafika takođe e^x - što znači da je nagib u svakoj tački jednak vrijednosti y.



Slika 1.3: Grafik funkcije e^x

Ako zapišemo

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

i uradimo izvod desne strane dobijamo

$$0+\frac{1}{1!}(1)+\frac{1}{2!}(2x)+\frac{1}{3!}(3x^2)+\frac{1}{4!}(4x^3)+\cdots = 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots = e^x.$$

Odatle slijedi da je nagib u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$ grafika funkcije $y = e^x$ jednak e^x. U jeziku diferencijalnih jednačina, sledi da je $y = e^x$ riješenje jednačine $dy/dx = y$. Zapravo, jedina riješenja ove diferencijalne jednačine su $y = e^x$ i $y = C \cdot e^x$, gde je C konstanta.

Takođe možemo nacrtati grafike drugih eksponencijalnih funkcija kao što su $y = 2^x$, ili opšte $y = k^x$ za bilo koji broj $k > 1$. Ovdje oblik krive je sličan onom kod $y = e^x$, a nagib grafika u tački x je $\ln(k) \cdot k^x$. Ako je $k = e$, tada je $\ln(k) = 1$ i nagib je e^x kao i ranije.

1.3.1 Izvođenje broja e

Definisaćemo broj e preko limesa. Primjetimo niz $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$ i dokažimo da je on konvergentan. Uočimo pored niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ čiji je opšti član

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ukoliko postoji $\lim_{n\to\infty} b_n$, onda će postojati i $\lim_{n\to\infty} a_n$ i oni imaju istu vrijednost:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty} b_n}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Teorema 1. *Ako je niz realnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ opadajući i ograničen odozdo, tada je taj niz konvergentan.*

Prvo ćemo pokazati da je niz (b_n) opadajući. Imamo da je

$$\begin{aligned}\frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1}}{(n-1)^n(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Koristići Bernulijevu nejednakost dobijamo da je

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odavde imamo da je

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} > \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{n}{n^2}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1} = 1,$$

$b_{n-1} > b_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, te je niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ opadajući.

Ostaje nam još da pokažemo da je niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen odozdo. S obzirom da su svi članovi niza $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivni, taj niz je ograničen nulom odozdo. Ovaj niz možemo preciznije ograničiti ukoliko primjenimo Bernulijevu nejednakost dobijamo:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1 + \frac{n+1}{n} > 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kako smo pokazali da je niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ opadajući i ograničen odozdo, na osnovu Teoreme 1 slijedi da je niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Samim tim smo pokazali i da je niz $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$ konvergentan.

Na kraju definišemo

$$\boxed{e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

1.3.2 Iracionalnost broja e

Ljuvil je u radu iz 1844. godine naveo primjere transcedentnih brojeva koji su predstavljeni u vidu neprekidnih razlomaka. Podsjetimo se da je, *regularan* *neprekidan razlomak* izraz oblika

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \dots}}}}$$

za neke cijele brojeve a, b, c, d, e, $\dots$, pri čemu je dozvoljeno beskonačno mnogo sabiranja. Jasno, ako je broj sabiraka konačan, neprekidni razlomak je racionalan broj. Ako je zadat neprekidan razlomak, prvo se postavlja pitanje da li je on neki realan broj, tj. da li konvergira. U slučaju konvergencije, postavlja se pitanje da li je granična vrijednost niza definisanog neprekidnim razlomkom racionalan ili iracionalan broj. Godine 1737. Ojler je dokazao da je e iracionalan broj, što znači da se ne može izraziti kao razlomak $\frac{a}{b}$ gde su a i b cijeli brojevi. Primećujući da konačni neprekidni razlomci (konačna kompozicija razlomaka) predstavljaju racionalne brojeve, dokazao je da beskonačni neprekidni razlomci (beskonačna kompozicija razlomaka) odgovaraju iracionalnim brojevima. Zatim je pokazao da se e može izraziti kao beskonačni neprekidni razlomak, kao što je prikazano ispod (gde se prirodni brojevi 1, 2, 3, 4, ... pojavljuju i kao brojioci i kao imenioci):

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}$$

Sada ćemo pokazati jednostavan i elegantan Ojlerov dokaz da je broj e iracionalan. Dokaz se zasniva na prikazu broja e pomoću beskonačnog reda navedenog u (1.1).

Teorema 2. *Broj e je iracionalan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno da je broj e racionalan, tj. $e = m/n$ gdje su $m, n \in \mathbb{N}$. Na osnovu identiteta (1.1) može se pokazati da je broj $e \in (2, 3)$. Sa jedne strane jasno je da je $e > 2$, a sa druge imamo:

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \cdots \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + + \frac{1}{8} + \cdots = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Kako $e \in (2,3)$ zaključujemo da e nije prirodan broj pa mora biti $n \geq 2$. Budući da je $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ (vidi (1.1)) dobijamo jednakost $\frac{m}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Kada pomožimo sa $n!$, dobijamo

$$m(n-1)! = n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}$$

tj.[1]

$$\begin{aligned} 0 < m(n-1)! - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Na samom početku je $m(n-1)! - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ prirodan broj jer je $\frac{n!}{k!}$ prirodan broj za svaki broj $k = 0, 1, \ldots, n$.

S druge strane, on bi morao biti sadržan u intervalu $(0, \frac{1}{2})$, a to nije moguće. Ovom kontradikcijom dobijamo da je broj e iracionalan. $\square$

1.3.3 Transcedentnost broja e

Definicija 1. *Broj x_0 nazivamo **algebarskim brojem** ako postoji prirodni broj n i cijeli brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_n \neq 0$ takvi da je*

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = 0,$$

*tj. ako je x_0 korijen algebarske jednačine sa cjelobrojnim koeficijentima. Broj koji nije algebarski zove se **transcedentni broj**.*[2]

Dakle, transcendentan broj je realni broj koji ne zadovoljava ni jednu algebarsku jednačinu sa cjelobrojnim koeficijentima. Svi transcendentni brojevi su iracionalni i u teoriji se mogu zapisati kao decimalni brojevi s beskonačno mnogo decimala koje se ne ponavljaju.

Zapažanje 1. *Označimo sa $\mathcal{A}_m$, $m = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ skup svih algebarskih brojeva koji su riješenja jednačine $a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = 0$. Taj skup je konačan pa je skup $\mathcal{A} = \bigcup_{m=1}^{\infty} (\mathcal{A}_m)$ svih algebarskih brojeva prebrojiv. Prema tome skup, $\mathcal{T} = \mathcal{A}^c$ skup svih transcedentnih brojeva je neprebrojiv.*

[1] Pretposlednja jednakost u (1.2) slijedi iz formule za zbir beskonačnog geometrijskog reda $1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}$, koja važi za sve realne brojeve $q \in (-1, 1)$. Ovu formulu smo u pretposlednjoj jednakosti primjenili za $q = \frac{1}{3}$.

[2] lat. transcendere - prekoračiti

Kako dokazujemo da je broj α transcedentan?

Transcedentnost broja α možemo pokazati tako što pretpostavimo suprotno, tj. da postoji nenula polinom $P(z)$ sa cjelobrojnim koeficijentima takav da je $P(\alpha) = 0$. Kada stavimo broj α u polinom $P(z)$ dobijamo cijeli broj N koji je između 0 i 1. Broj koji dobijemo je u kontradikciji sa *fundamentalnim principom teorije brojeva* [3], pa zaključujemo da je broj α transcedentan.

Ojler je među prvima definisao transcendentne brojeve u današnjem smislu. Ljuvil je 1844. prvi dokazao egzistenciju transcendentnih brojeva, a 1851. je dao prvi decimalni prikaz takvog broja, tzv. Ljuvilovu konstantu:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(10^{-k!}) = 0,110001000000000000000000100\ldots$$

Ljuvil je 1844. godine otkrio da se algebarski brojevi ne mogu aproksimirati racionalnim brojevima sa relativno malim imeniocima. Drugim riječima, otkrio je da ako je α algebarski broj i $\frac{p}{q}$ racionalan broj pribižno jednak broju α, tada q mora biti ekstremno veliki u odnosu na razliku α i $\frac{p}{q}$. Iz ovoga slijedi da ukoliko broj L može biti aproksimiran sa izrazito velikom tačnošću beskonačnim nizom razlomaka, koji imaju relativno male imenioce, tada L ne može biti algebarski broj. Odnosno tada je L transcendentan broj.

Sada ćemo navesti definicije nekih pojmova koji će se spominjati u nastavku.

Definicija 2. *Neki polinom je* ***nesvodljiv*** *nad poljem ako se ne može rastaviti u proizvod polinoma (nižeg stepena) sa koeficijentima iz tog polja.*

Definicija 3. *Neka je $P_n(x)$ oznaka za polinom stepena n, sa realnim koeficijentima. Realan broj x_* je* ***algebarski broj reda n*** *ako je $P_n(x_*) = 0$ i ne postoji polinom manjeg stepena, $P_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $m < n$, takav da je $P_m(x_*) = 0$.*

Na primjer, $x_* = \sqrt{2}$ je algebarski broj reda 2, a $x_* = \sqrt[3]{2}$ je algebarski broj reda 3. Jasno, bilo koji racionalan broj p/q je algebarski broj reda 1, jer je x_* nula polinoma $P_1(x) = qx - p$. Drugim riječima, ako je x_* algebarski broj reda $n > 1$, onda x_* ne pripada skupu $\mathbb{Q}$. Znamo od ranije da za svaki racionalan broj x postoji niz razlomaka $(p_k/q_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tako da je

$$x = \lim_{k\to\infty} p_k/q_k, \quad \text{pri čemu je} \lim_{k\to\infty} q_k = \infty.$$

Teorema 3. *Neka je x_* algebarski broj reda $n > 1$ i neka niz $(p_k/q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira ka x_*. Tada za dovoljno veliki indeks k važi*

$$\left|x_* - \frac{p_k}{q_k}\right| > \frac{1}{q_k^{n+1}}.$$

[3]Fundamentalni princip teorije brojeva: Ne postoje cijeli brojevi izmedu 0 i 1.

Dokaz. Neka je $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ polinom za koji važi $P_n(x_*) = 0$ i $P_m(x_*) \neq 0$ za svaki broj $m \in \mathbb{N}$, $m < n$ i neka je $x_k = p_k/q_k$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$P_n(x_k) = P_n(x_k) - P_n(x_*) = a_1(x_k - x_*) + a_2(x_k^2 - x_*^2) + \cdots + a_n(x_k^n - x_*^n),$$

odakle je

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x_k)}{x_k - x_*} &= a_1 + a_2(x_k + x_*) + a_3(x_k^2 + x_k x_* + x_*^2) + \cdots \\ &\quad + a_n(x_k^{n-1} + x_k^{n-2} x_* + \cdots + x_k x_*^{n-2} + x_*^{n-1}).\end{aligned}$$

Za dovoljno veliki indeks k važi $|x_k - x_*| < 1$, pa je $|x_k| < |x_*| + 1$, odakle slijedi

$$\begin{aligned}\left|\frac{P_n(x_k)}{x_k - x_*}\right| &< |a_1| + 2|a_2|(|x_*| + 1) + 3|a_3|(|x_*| + 1)^2 + \cdots + n|a_n|(|x_*| + 1)^{n-1} \\ &= M.\end{aligned}$$

Neka je $x_k = p_k/q_k$ takav da je $q_k > M$. Tada iz

$$\left|\frac{P_n(x_k)}{x_k - x_*}\right| < M < q_k$$

slijedi $|x_k - x_*| > |P_n(x_k)|/q_k$. Radi lakšeg zapisa, za taj broj x_k uvodi se oznaka $x_k = p/q$.

Jasno, $P_n(p/q) \neq 0$, jer bi u suprotnom bilo

$$P_n(x) = \left(x - \frac{p}{q}\right) P_{n-1}(x)$$

za neki polinom stepena $n - 1$. Odavde je

$$0 = P_n(x_*) = \left(x_* - \frac{p}{q}\right) P_{n-1}(x_*),$$

pa je x_* algebarski broj reda (najviše) $n - 1$, što je u suprotnosti sa uslovom zadatka.

Dakle, $P_n(p/q) \neq 0$ pa je

$$\begin{aligned}\left|P_n\left(\frac{p}{q}\right)\right| &= \left|a_0 + a_1\frac{p}{q} + \cdots + a_n\frac{p^n}{q^n}\right| \\ &= \frac{1}{q^n}|a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \cdots + a_n q^n| \neq 0.\end{aligned}$$

Odavde je $|a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \cdots + a_n q^n| \geq 1$, jer su svi sabirci cijeli brojevi.

Prema tome, iz $|x_k - x_*| > |P_n(x_k)|/q_k$ slijedi

$$\left|x_* - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q}\left|P_n\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q}\frac{1}{q^n} = \frac{1}{q^{n+1}},$$

čime je teorema dokazana. $\square$

Ljuvil je dokazao da je broj $\sum_{k=1}^{\infty}(10^{-k!})$ transcedentan na sljedeći način. Neka je

$$x_m = \sum_{k=1}^{m}(10^{-k!}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^{2!}} + \cdots + \frac{1}{10^{m!}} = \frac{p}{10^{m!}},$$

za odgovarajući broj $p \in \mathbb{N}$, pri čemu će se m naknadno odrediti.

Tada je, sa jedne strane,

$$\begin{aligned}
|x - x_m| &= \sum_{n=m+1}^{\infty}(10^{-n!}) \\
&= \frac{1}{10^{(m+1)!}} + \frac{1}{10^{(m+2)!}} + \cdots \\
&= \frac{1}{10^{(m+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10^{(m+2)}} + \frac{1}{10^{(m+3)(m+2)}} + \cdots\right) \\
&< \frac{1}{10^{(m+1)!}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right) \\
&= \frac{2}{10^{(m+1)!}} = \frac{10}{10^{(m+1)!}},
\end{aligned}$$

a sa druge strane, iz Ljuvilove teoreme slijedi

$$|x - x_m| > \frac{1}{10^{(n+1)m!}}$$

za dovoljno velik broj $m \in \mathbb{N}$.

Dakle,

$$\frac{10}{10^{(m+1)!}} > |x - x_m| > \frac{1}{10^{(n+1)m!}},$$

odakle je

$$(n+1)m! > (m+1)! - 1.$$

Neka je $m = n+1$ za zadati broj n (algebarski red broja x). Tada je

$$\begin{aligned}
(n+1)(n+1)! > (n+2)! - 1 &= (n+1+1)\cdot(n+1)! - 1 \\
&\Leftrightarrow (n+1)(n+1)! > (n+1)(n+1)! + (n+1)! - 1 \\
&\Leftrightarrow 1 > (n+1)!,
\end{aligned}$$

što nije moguće. Dakle, ne postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x_* = \sum_{k=1}^{\infty}(10^{-k!})$ algebarski broj reda n, odnosno ne postoji polinom $P_n(x)$ koji se anulira u x_*. Drugim riječima, x_* je *transcedentan broj.*

Pokazali smo da je broj e iracionalan, sada ćemo dokazati i da je e transcedentan broj. Dokaz za transcedentnost broja e dao je Čarls Hermit 1873. godine.

Teorema 4. *Broj e je transcedentan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je broj e algebarski broj. Tada postoji prirodan broj N i cijeli brojevi $a_0, a_1, \dots, a_N$ takvi da važi

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_N e^N = 0. \tag{1.3}$$

Neka je

$$g(x) = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Za ovako definisanu funkciju g važi

$$(e^{-x})' = -e^{-x}, (e^{-x})'' = e^{-x}, (e^{-x})''' = -e^{-x}, \dots, (e^{-x})^{(n)} = (-1)^n e^{-x}.$$

Ukoliko takvu funkciju $g(x)$ uvrstimo u formulu

$$\begin{aligned} &\alpha \int_0^1 f(\alpha x) g^{(n+1)}(\alpha x) dx = f(\alpha) g^{(n)}(\alpha) - f'(\alpha) g^{(n-1)}(\alpha) + \cdots \\ &+ (-1)^n f^{(n)}(\alpha) g(\alpha) - [f(0) g^{(n)}(0) - f'(0) g^{(n-1)}(0) + \cdots + (-1)^n f^{(n)}(0) g(0) \end{aligned} \tag{1.4}$$

koja je izvedena iz formule za parcijalnu integraciju, pa dobijamo

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} \alpha \int_0^1 f(\alpha x) e^{-\alpha x} dx &= (-1)^n [e^{-\alpha} (f(\alpha) + f'(\alpha) + \cdots + f^{(n)}(\alpha)) \\ &- (f(0) + f'(0) + \cdots + f^{(n)}(0))] \end{aligned} \tag{1.5}$$

Označimo sa

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(n)}(x) \tag{1.6}$$

i pomnožimo (1.5) sa $(-1)^{(n+1)} e^{\alpha}$. Tada je

$$\alpha e^{\alpha} \int_0^1 f(\alpha x) e^{-\alpha x} dx = e^{\alpha} F(0) - F(\alpha),$$

tj.

$$e^{\alpha} F(0) = F(\alpha) + \alpha e^{\alpha} \int_0^1 f(\alpha x) e^{-\alpha x} dx. \tag{1.7}$$

Ukoliko pomnožimo jednačinu (1.3) sa $F(0)$ i ubacimo u (1.7) dobijamo

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{N} a_k e^k F(0) = a_0 F(0) + \sum_{k=1}^{N} a_k e^k F(0) \\ &= a_0 F(0) + \sum_{k=1}^{N} a_k F(k) + \sum_{k=1}^{N} k a_k e^k \int_0^1 f(kx) e^{-kx} dx, \end{aligned} \tag{1.8}$$

odnosno

$$a_0F(0) + \sum_{k=1}^{N} a_kF(k) = -\sum_{k=1}^{N} ka_ke^k \int_0^1 f(kx)e^{-kx}dx \tag{1.9}$$

Ideja dokaza je da izaberemo odgovarajući polinom f tako da desna strana jednakosti (1.9) po apsolutnoj vrijednosti bude manja od 1, a lijeva strana cijeli broj različit od nule (koji je onda po apsolutnoj vrijednosti veći ili jednak 1). Kontradikcija koju bismo u tom slučaju dobili bi osporila početnu pretpostavku.

Sada ćemo navesti lemu koju ćemo koristiti u nastavku dokaza.

Lema 1. *Neka je h polinom sa cjelobrojnim koeficijentima. Tada za polinom*

$$f(x) = \frac{x^{m-1}h(x)}{(m-1)!}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2$$

važi:

1. $f^{(s)}(0) = 0, \quad s < m-1;$
2. $f^{(m-1)}(0) = h(0);$
3. $m | f^{(s)}(r), \quad s \geq m, \quad r \in \mathbb{Z}.$ □

Neka je za proizvoljni prosti broj p

$$h(x) = (x-1)^p(x-2)^p...(x-N)^p.$$

Tada polinom

$$f(x) = \frac{x^{p-1}h(x)}{(p-1)!} \tag{1.10}$$

zadovoljava uslove Leme 1 pa važi

$$\begin{aligned} f^{(s)}(0) &= 0, \quad s = 0,1,2,\ldots,p-2, \\ f^{(p-1)}(0) &= h(0) = [(-1)^N N!]^p, \\ p|f^{(s)}(r), &\quad s \geq p, \quad r \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Primjetimo, da je polinom f definisan sa (1.10) stepena $n = Np + p - 1$ tada zbog (1.6) i prvog uslova iz Leme 1 važi

$$F(0) = f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + ... + f^{(Np+p-1)}(0).$$

Ako ovu jednakost pomnožimo sa a_0 i uvrstimo drugi uslov iz Leme 1 dobijamo

$$a_0F(0) = a_0[(-1)^N N!]^p + a_0f^{(p)}(0) + \cdots + a_0f^{(Np+p-1)}(0). \tag{1.11}$$

Kako je a_0 cijeli broj, prema trećem uslovu Leme 1 zaključujemo da su članovi $a_0 f^{(p)}(0), \ldots, a_0 f^{(Np+p-1)}(0)$ cijeli brojevi djeljivi sa p. S obzirom da prostih brojeva ima beskonačno mnogo, možemo izabrati prost broj p tako da važi

$$p > a_0 \quad \text{i} \quad p > N. \tag{1.12}$$

Tada broj $a_0[(-1)^N N!]^p$ sigurno nije djeljiv sa prostim brojem p, a samim tim ni cijela desna strana u (1.11) nije djeljiva sa p. Dakle, $a_0 F(0)$ je cijeli broj koji nije djeljiv sa p.

U nastavku dokaza ćemo koristiti posljedicu:

Posljedica 1. *Ako je x_0 nula polinoma f višestrukosti r, onda je x_0 nula polinoma $f^{(s)}$, $s = 0, 1, \ldots, r-1$, pri čemu se pod $f^{(0)}$ podrazumijeva sama funkcija.* □

S obzirom da je $k = 1, 2, \ldots, N$ nula polinoma f višestrukosti p, prema Posljedici 1 važi

$$f^{(s)}(k) = 0, \quad s \leq p-1, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Stoga je

$$F(k) = f^{(p)}(k) + f^{(p+1)}(k) + \cdots + f^{(Np+p-1)}(k).$$

Iz trećeg uslova Leme 1 slijedi da je $F(k)$ cijeli broj dijeljiv sa p pa je suma

$$\sum_{k=1}^{N} a_k F(k)$$

dijeljiva sa p, jer su a_k, $k = 1, 2, \ldots, N$ cijeli brojevi. Dakle, na lijevoj strani jednakosti (1.9) se nalazi broj koji je zbir jednog cijelog broja koji nije djeljiv sa p i jednog cijelog broja koji je djeljiv sa p, pa je on cijeli broj koji nije djeljiv sa p (zbog čega je različit od nule). Tada je apsolutna vrijednost tog cijelog broja barem 1 pa za desnu stranu jednakost (1.9) možemo zapisati

$$\left| -\sum_{k=1}^{N} k a_k e^k \int_0^1 f(kx) e^{-kx} dx \right| \geq 1. \tag{1.13}$$

Posmatrajmo sada funkciju $f(kx)$. Primjetimo da za $x \in [0,1]$ i nenegativne cijele brojeve r, $k \leq N$ važi

$$|kx - r| \leq N.$$

Prema (1.10) slijedi

$$\begin{aligned} |f(kx)| &= \frac{1}{(p-1)!}|kx|^{p-1}|kx-1|^p|kx-2|^p \cdots |kx-N|^p \\ &\leq \frac{N^{Np+p-1}}{(p-1)!} < \frac{N^{(N+1)p}}{(p-1)!}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

S obzirom da važi $0 < e^{-kx} \le 1$ imamo

$$\begin{aligned}
|-\sum_{k=1}^{N} k a_k e^k \int_0^1 f(kx)e^{-kx}dx| &\le \sum_{k=1}^{N} |k a_k e^k \int_0^1 f(kx)e^{-kx}dx| \\
&\le \sum_{k=1}^{N} k|a_k|e^k \int_0^1 |f(kx)|e^{-kx}dx < \sum_{k=1}^{N} k|a_k|e^k \int_0^1 \frac{N^{(N+1)p}}{(p-1)!}dx \\
&< \frac{N^{(N+1)p}}{(p-1)!} \sum_{k=1}^{N} k|a_k|e^k = \frac{(N^{(N+1)})^{p-1}}{(p-1)!} N^{N+1} \sum_{k=1}^{N} k|a_k|e^k.
\end{aligned}$$

Kako je

$$\lim_{p\to\infty} \frac{(N^{N+1})^{p-1}}{(p-1)!} = 0,$$

postoji prost broj p za koji vrijedi

$$\frac{(N^{N+1})^{p-1}}{(p-1)!} < \frac{1}{N^{N+1}\sum_{k=1}^{N} k|a_k|e^k}. \tag{1.15}$$

Na kraju dobijamo da je

$$|-\sum_{k=1}^{N} k a_k e^k \int_0^1 f(kx)e^{-kx}dx| < 1. \tag{1.16}$$

Ako su za prost broj p zadovoljene nejednačine (1.12), onda važi (1.13), a ako je zadovoljena nejednačina (1.15), onda važi (1.16). Za dovoljno veliki prost broj p biće zadovoljene i nejednačine (1.12) i (1.13), a tada (1.15) i (1.16) vode u kontradikciju. Dakle, broj e je transcedentan. □

Tvrđenje 1. *Svaki transcedentan broj je iracionalan. Obrnuto ne važi.*

Dokaz. Dovoljno je uočiti da je svaki racionalan broj $\frac{p}{q}$, $\quad p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ rješenje algebarske jednačine $p - qx = 0$. □

Obrnuto ne važi, tj. postoje iracionalni brojevi koji nisu transcedentni, na primjer: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,... su ustvari korijeni iz racionalnih brojeva pa su kao takvi algebarski brojevi jer je $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ korijen algebarske jednačine $p - qx^n = 0$. Iz tvrđenja 1 slijedi da ukoliko dokažemo transcedentnost nekog broja odmah slijedi i iracionalnost tog broja. Stoga je bilo dovoljno da smo samo pokazali transcedentnost broja e iz čega bi slijedila njegova iracionalanost.

Glava 2

Ojlerova jednačina

U ovoj glavi reći ćemo nešto više o jednoj značajnoj teoremi u matematici, Ojlerovoj jednačini, za koju su mnogi matematičari smatrali da je najljepša. Počinjemo od života Leonarda Ojlera jednog od najvećih matematičkih genija čija su istraživanja obuhvatala skoro sve grane matematike. Vidjećemo još i da je Ojlerova jednačina poseban slučaj opšteg rezultata, Ojlerovog identiteta, koji povezuje eksponencijalnu funkciju i trigonometrijske funkcije. Zatim ćemo predstaviti i dva pokušaja pronalaska ovog identiteta prije nego što ga je sam Ojler otkrio. Na kraju ćemo dati dva dokaza Ojlerovog identiteta i navešćemo neke njegove posljedice. Kao teorijsku osnovu u ovoj glavi koristili smo literaturu [9] i [12].

2.1 Najljepša teorema u matematici

"*Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty – a beauty cold and austere, like that of sculpture.*"

(Bertrand Russell)

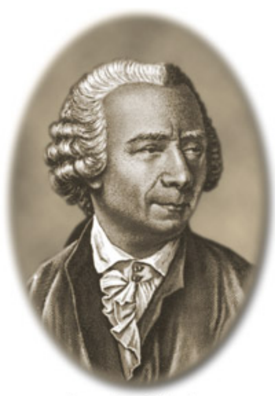
Teorema je istinita matematička tvrdnja koju treba dokazati. Primjeri nekih teorema uključuju dobro poznatu Pitagorinu teoremu o pravouglim trouglovima, kao i Euklidovu teoremu koja tvrdi da postoji beskonačno prostih brojeva. Dokazivanje teorema može biti jednostavno i brzo, ili dugotrajno i zahtjevno, kao što je slučaj sa Fermatovom posljednjom teoremom za koju je trebalo dugo godina da se dokaže. Generalno, matematičari obično preferiraju dokaze koji su efikasni, inventivni, iznenađujući ili elegantni - čak i lijepi.

Koja je najljepša teorema u matematici? Matematičari su tokom dugo godina sprovodili razne ankete kako bi dobili odgovor na ovo pitanje. Matematički časopis *The Mathematical Intelligencer* sproveo je takvu anketu 1988. godine, gdje su navedene dvadeset četiri teoreme i čitaoci su bili pozvani da svakom daju "ocjenu za ljepotu". Iako je bilo mnogo vrijednih konkurenata, pobjednik je bila "Ojlerova jednačina".

Jednačina je matematički izraz, zadat simbolički, da su dvije stvari iste. Godine 2004. popularni časopis *Physics World* sproveo je anketiranje svojih čitalaca kako bi otkrio koje su *najveće jednačine ikada*. Čak i među fizičarima Ojlerova jednačina bila je blizu drugoplasiranim Maksveolovim jednačinama za elektromagnetizam.

Ojlerova jednačina važi za jednu od najljepših jednačina u matematici jer ona izražava vezu između brojeva e, π, i i 1. Mnogi matematičari i fizičari kroz istoriju ostali su oduševljeni njenom ljepotom i dubinom. Jedan od najuticajnijih američkih fizičara i dobitnik Nobelove nagrade Ričard P. Fajnman predstavio je Ojlerovu jednačinu kao "najizvanredniju formulu u matematici" i nazvao je draguljem matematike. Ova jednačina bila je čak testirana i u eksperimentu koji su izvršili neurolozi. Skenirana je moždana aktivnost matematičara prilikom posmatranja različitih jednačina. Rezultati su otkrili da su isti dijelovi mozga koji se aktiviraju prilikom gledanja umjetnosti bili aktivirani i pri ocjeni "ljepote" matematike, a Ojlerova jednačina često je ocjenjivana kao najlepša. Ojlerova jednačina često se pojavljuje u svijetu nauke i matematike, a izvan akademske sfere pojaviljivala se u popularnoj TV seriji kao što su Simpsonovi.

2.2 Ojler, Ojlerova jednačina i identitet


Leonhard Euler
(1707-1783)

Švajcarska je bila rodno mjesto mnogih vodećih ličnosti u matematici početkom osamnaestog vijeka, a najznačajniji matematičar koji je potekao iz Švajcarske tog vremena - ili bilo kog vremena - bio je Leonard Ojler (1707-1783). Rano u karijeri, Ojler je stekao međunarodni ugled. Pisao je radove svih nivoa, uključujući i udžbenički materijal za korišćenje u ruskim školama. Uglavnom je pisao na latinskom, a ponekad na francuskom, iako mu je njemački bio maternji jezik. Tokom svog života, objavio je više od 500 knjiga i radova. Gotovo pola vijeka nakon njegove smrti, dijela Ojlera nastavila su da se pojavljuju u publikacijama Akademije u Sankt Peterburgu. Bibliografska lista Ojlerovih radova, uključujući i posthumna dijela, sadrži 886 stavki, a očekuje se da će njegova sabrana dijela (uključujući prepisku), koja se sada objavljuju pod švajcarskim pokroviteljstvom, obuhvatiti čak 82 obimne knjige. Njegova matematička istraživanja prosječno su iznosila oko 800 stranica godišnje, nijedan matematičar nije ikada premašio obim rada ovog čovjeka.

Od 1727. do 1783. godine, Ojlerova pera su neprestano doprinosila znanju u gotovo svakoj grani čiste i primenjene matematike, od najelementarnijih do najnaprednijih. Štaviše, u većini aspekata, Ojler, najuspešniji tvorac notacija svih vremena, pisao je jezikom i notacijama koje danas koristimo. Po dolasku u Rusiju 1727. godine, bio je angažovan na eksperimentima u vezi sa gađanjem topova, i u rukopisu sa rezultatima, napisanom vjerovatno 1727. ili 1728. godine, Ojler je koristio slovo e više od desetak puta da predstavi osnovu sistema prirodnih logaritama. Koncept ovog broja bio je poznat još od izuma logaritama prije više od vijeka, ali standardna notacija za njega nije postala uobičajena. U pismu Goldbahu 1731. godine, Ojler je ponovno koristio svoje slovo e za "taj broj čiji je hiperbolički logaritam jednak 1". Prvi put se pojavio u štampanom obliku u Ojlerovoj knjizi *Mechanica* iz 1736. godine. Ova notacija, možda predložena prvim slovom reči "eksponencijalna", uskoro je postala standardna. Ojlerova upotreba simbola π 1737. godine, a kasnije u njegovim mnogim popularnim udžbenicima, doprinijela je tome da bude široko poznat i korišćen. Simbol i za $\sqrt{-1}$ je još jedna notacija koju je prvi put koristio Ojler, mada je u ovom slučaju usvajanje došlo pred kraj njegovog života, 1777. godine. Tri simbola e, π i i, za koje je u velikoj mjeri bio zaslužan Ojler, mogu se kombinovati sa dva najvažnija cijela broja, 0 i 1, u čuvenoj jednakosti $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Ojlerova jednačina obično se javlja u jednom od dva ekvivalentna oblika:

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0 \quad \text{ili} \quad e^{i\pi} = -1.}$$

Takođe se pojavljuje i u obliku $e^{\pi i} + 1 = 0$ ili $e^{\pi i} = -1$, kada se π pojavljuje prije i (kao u $2i, 3i$ itd.).

Pitamo se zašto je baš Ojlerova jednačina tako popularna i istovremeno važna u matematici? Odgovor leži u činjenici da ona povezuje pet najvažnijih brojeva u matematici:

1 - osnova našeg sistema brojanja

0 - broj koji izražava "ništa"

π - osnova mjerenja kruga

e - broj povezan s eksponencijalnim rastom

i - "imaginarni" broj, kvadratni korijen od -1.

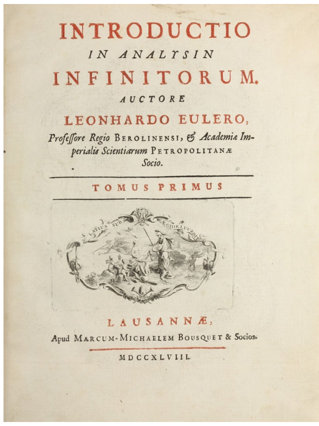
Takođe, uključuje tri osnovne matematičke operacije sabiranje (+), množenje ($\cdot$) i stepenovanje, i pojam jednakosti (=).

Vidjećemo da je Ojlerova jednačina poseban slučaj opšteg rezultata koji je objavio 1748. godine u svom djelu *"Introductio in Analysin Infinitorum"* (Uvod u analizu beskonačnosti), jednoj od najvažnijih matematičkih knjiga ikada napisanih (vidi Sliku 2.1). Ovaj opšti rezultat je *Ojlerov identitet*,

$$\boxed{\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}}$$

koji na lijep i jednostavan način povezuje eksponencijalnu funkciju i trigonometrijske funkcije. Ojlerov identitet se nalazio i na švajcarskoj poštanskoj marki (Slika 2.2).

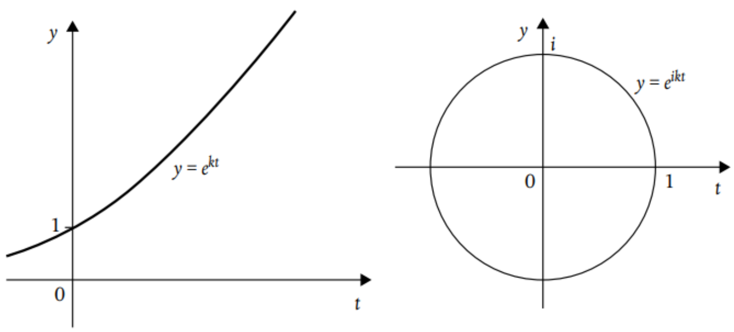
Iako na prvi pogled može izgledati prilično apstraktno, Ojlerova jednačina i identitet su od fundamentalnog značaja za fizičare i inženjere. Kao što ćemo vidjeti, eksponencijalne funkcije oblika e^{kt} opisuju stvari koje rastu (ako je $k >$



Slika 2.1: Ojlerov *Introductio in Analysin Infinitorum*, 1748

Slika 2.2: Ojler i njegov identitet, $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

0) ili opadaju (ako je $k < 0$) s vremenom t, a one koje takođe uključuju broj i, poput e^{ikt}, opisuju kružno kretanje (vidi Sliku 2.3).



Slika 2.3: Grafici funkcija $y = e^{kt}(k > 0)$ i $y = e^{ikt}$

2.2.1 Ojlerova jednačina

Jednačina koja povezuje ove brojeve 0, 1, e, i, π je veoma značajna. Da bismo shvatili Ojlerovu jednačinu moramo obratiti pažnju na sljedeće povezanosti: trigonometrijske funkcije $y = \sin(x)$ i $y = \cos(x)$ povezane su sa krugom, eksponencijalne i logaritamske funkcije $y = e^x$ i $y = \ln(x)$ povezane su sa hiperbolom, dok su hiperbola i krug međusobno povezani (krive drugog reda).

Postavlja se pitanje postoje li direktne veze između logaritamskih i eksponencijalnih funkcija sa trigonometrijskim funkcijama. Iako se čini da nema očiglednih veza, uvođenje kompleksnih brojeva dovodi do takvih veza, a shvatanje toga je jedno od najvećih otkrića Ojlera. U svom dijelu "Introductio" iz 1748. godine, Ojler je predstavio Ojlerov identitet:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Prije nego što je Ojler otkrio svoje čuvene identitete, već su postojali neki drugi rezultati koji su bili veoma blizu otkrića istih.

Dva blizu pokušaja

Godine 1702. Johan Bernuli je predstavio formulu za površinu kružnog isječka što dovodi do sljedeće jednačine koja povezuje π i logaritam negativnog broja:

$$\pi = \frac{1}{i}\ln(-1).$$

Takođe je dobio identitet

$$\operatorname{arctg} x = \frac{i}{2}\ln\frac{i+x}{i-x},$$

koji ukazuje da inverzni tangenti i logaritmi kompleksnih brojeva su, na neki način, isti. Oko 1712. godine, Rodžer Kouts je proučavao površine elipsoida i otkrio da, za bilo koji ugao φ,

$$\ln(\cos\varphi + i\sin\varphi) = i\varphi.$$

Dalje ćemo pogledati rezultate Bernulija i Rodžera Koutsa koji su bili blizu otkrića Ojlerovog identiteta.

Johan Bernuli

Logaritamska funkcija $y = \ln x$ je definisana za pozitivne vrijednosti x. Pitamo se može li se definisati kada je vrijednost x negativna? Ovo pitanje je izazvalo mnogo neslaganja između Lajbnica, koji je smatrao da je logaritam negativnog broja "nemoguć", i Bernulija, koji je koristio osnovnu jednačinu

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$$

da bi dokazao, za bilo koji broj x,

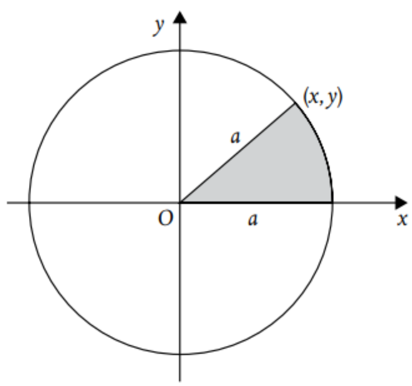
$$\begin{aligned} 2\ln(-x) &= \ln(-x) + \ln(-x) = \ln((-x)\cdot(-x)) = \ln(x^2) = \ln(x\cdot x) \\ &= \ln x + \ln x = 2\ln x, \end{aligned}$$

i tako za sve x, $\ln(-x) = \ln(x)$. Posebno, $\ln(-1) = \ln 1 = 0$.

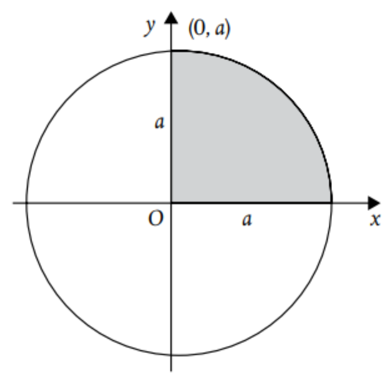
Bernuli je koristeći da je logaritam proizvoda jednak zbiru logaritama izveo da je logaritam parna funkcija.

Kao što smo već pomenuli, 1702. godine Bernuli je istraživao površinu kružnog isječka sa poluprečnikom a i centrom u tački O - osjenčena površina na Slici 2.4 ograničena sa x - osom i duži koja povezuje tačku O sa tačkom (x, y) na krugu. On je dobio da je površina

$$\frac{a^2}{4i}\ln\frac{x+iy}{x-iy}.$$



Slika 2.4: Površina kružnog isječka



Slika 2.5: Površina kružnog isječka

Zanemarujući trenutno značenje logaritma kompleksnog broja, Ojler je kasnije primjetio da se ova formula pojednostavljuje na $a^2/4i\ln(-1)$ kada je $x = 0$. Pošto takav kružni isječak očigledno ima površinu koja nije nula (vidite sliku 2.5), zaključio je da logaritam broja -1 ne može biti nula, što je u suprotnosti sa Bernulijevim rezultatom iznad. Takođe, budući da je ovaj kružni isječak četvrtina kruga sa površinom $\pi a^2/4$,

$$\frac{\pi a^2}{4} = \frac{a^2}{4i}\ln(-1),$$

pa je tako $\ln(-1) = i\pi$. Iako je Ojler eksplicitno zapisao ovaj izraz, on nije koristio eksponencijalne funkcije kako bi zaključio da je $e^{i\pi} = -1$, što se naziva Ojlerova jednačina. Zapravo, Ojler je često pripisivao zasluge Bernuliju za otkriće ove vrijednosti $\ln(-1)$, iako je Bernuli nije koristio u svom radu iz 1702. godine, niti u bilo kojem kasnijem radu, uporno tvrdeći da je $\ln(-1)$ jednako 0.

U njegovom radu iz 1702. godine takođe se nalazi nedovršen račun koji uključuje arctg integral, što ga je dovelo do zaključka da 'imaginarni logaritmi izražavaju realne trigonometrijske funkcije".

Bernulijev rezultat arctg

Znamo da je

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Ako sada upotrebimo kompleksne brojeve možemo da razložimo izraz $1/(1+x^2)$ na dva razlomka:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix}\right)$$

jer je $1+x^2 = (1-ix)(1+ix)$. Sada imamo:

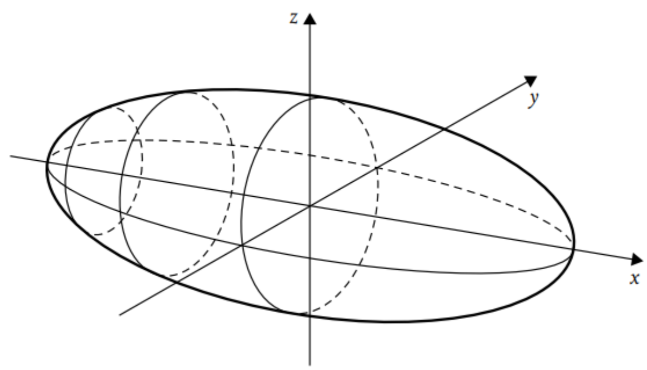
$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg} x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-ix} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+ix} dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{i}{i+x} dx + \frac{1}{2}\int \frac{i}{i-x} dx \\
&= \frac{i}{2}\ln(i+x) - \frac{i}{2}\ln(i-x) \\
&= \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+x}{i-x}\right).
\end{aligned}$$

Rodžer Kouts

Za vrijeme svog kratkog života objavio je samo jedan rad, članak pod nazivom *Logometria*, koji je objavljen 1714. godine. U njemu se nalazila detaljna diskusija o logaritamskoj spirali čija je polarna jednačina oblika $r = e^{k\theta}$, gdje k konstanta. Iako je preminuo u 33. godini njegova matematička dijela, uključujući njegova otkrića, ostavila su značajan trag u matematici. Njegova matematička dijela, koja se odnose na logaritme i geometrijske krive, objavio je njegov rođak u knjizi pod nazivom *Harmonia Mensuarum.*

Kouts je pokušavao da nađe površinu elipsoida koji se dobija rotacijom elipse oko x - ose (Slika 2.6). Detalji su pomalo komplikovani, ali je uspio da pronađe dva matematička izraza za traženu površinu - jedan koji uključuje logaritme i drugi koji uključuje inverznu sinusnu funkciju. Oba izraza uključuju ugao φ, gdje $\cos\varphi = b/a$ i a i b su velika i mala poluosa. Prvo je dokazao da je površina određena izrazom $\ln(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, a nakon toga je pokazao da je to isto proizvod $i\varphi$. Dolaskom do ovih činjenica, zaključuje sljedeći identitet:

$$\ln(\cos\varphi + i\sin\varphi) = i\varphi,$$



Slika 2.6: Cotesov elipsoid

koji mu daje vezu između logaritama i trigonometrijskih funkcija. Da je tada primjenio eksponencijalne funkcije (što nije učinio), otkrio bi Ojlerov identitet u obliku:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Ovo je bio još jedan pokušaj koji je bio blizu otkrića Ojlerovog identiteta.

2.2.2 Ojlerov identitet

Zahvaljujući Ojleru dolazimo do najslavnijeg rezultata koji se odnosi na eksponencijalnu funkciju $y = e^x$ i trigonometrijske funkcije $y = \cos x$ i $y = \sin x$. Znamo da se ove funkcije mogu razviti kao stepeni redovi:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots, \\ \sin x &= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots. \end{aligned}$$

Na prvi pogled čini se da nema očiglednih veza između ovih funkcija. Eksponencijalna funkcija ide u beskonačnost sa porastom x, dok funkcije sin i cos se nalaze u intervalu $[-1, 1]$. Međutim, kao što je Ojler otkrio 1737. godine, zaista postoji fundamentalna veza ako koristimo kompleksan broj i, kvadratni koren od -1. Jedan način da se to pokaže, kao što je Ojler pokazao, jeste da počnemo sa stepenim redom za e^x i zamijenimo x sa ix:

$$e^{ix} = 1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \frac{1}{6!}(ix)^6 + \frac{1}{7!}(ix)^7 + \dots$$

Pošto je $i^2 = -1$, onda slijedi da je $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, itd. i imamo

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{i}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{i}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{i}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 - \frac{i}{7!}x^7 + \dots, \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots\right) + i\left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots\right), \\ &= \cos(x) + i\sin(x). \end{aligned}$$

Kao što se može primjetiti, ovaj rezultat,

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ojlerov identitet je jedna od najizvanrednijih jednačina u matematici.

Ojler je pokazao više od jednog dokaza za svoj identitet. Prikazaćemo i drugačiji pristup u kome je koristio "beskonačno male" vrijednosti. Ovaj pristup se pojavljuje u njegovom dijelu *"Introductio in Analysin Infinitorum"* iz 1748. godine i počinje sa De Moavrovim formulama, koje je Ojler izgleda otkrio nezavisno.

Još jedan dokaz Ojlerovog identiteta

Sabiranjem i oduzimanjem identiteta

$$\begin{aligned} \cos nx + i\sin nx &= (\cos x + i\sin x)^n \quad \text{i} \\ \cos nx - i\sin nx &= (\cos x - i\sin x)^n, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ojler je zaključio da

$$\begin{aligned} \cos nx &= \frac{1}{2}\left[(\cos x + i\sin x)^n + (\cos x - i\sin x)^n\right] \quad \text{i} \\ \sin nx &= \frac{1}{2i}\left[(\cos x + i\sin x)^n - (\cos x - i\sin x)^n\right]. \end{aligned}$$

Zatim je uzeo da je x beskonačno malo, a n beskonačno veliko, i za takav izbor proizvod nx ima konačnu vrijednost v. Ali $x = v/n$ je malo, pa stepeni redovi $\sin x$ i $\cos x$ govore nam da je prva približna vrijednost, $\sin x = x = v/n$ i $\cos x = 1$ (zanemarujući članove u $x^2, x^3, x^4, \dots$). Dobijamo

$$\begin{aligned} \cos v &= \frac{1}{2}\left[(1 + iv/n)^n + (1 - iv/n)^n\right] \quad \text{i} \\ \sin v &= \frac{1}{2i}\left[(1 + iv/n)^n - (1 - iv/n)^n\right]. \end{aligned}$$

Ojler je sada pustio da n beskonačno raste. Tada, za bilo koje z, $(1+z/n)^n$ može se zamjeniti sa njegovom vrijednosti limesa e^z. Pa kako je $(1+iv/n)^n$ zamjenjeno sa vrijednosti e^{iv}, i $(1 - iv/n)^n$ zamjenjeno sa vrijednosti e^{-iv}. Dobijamo

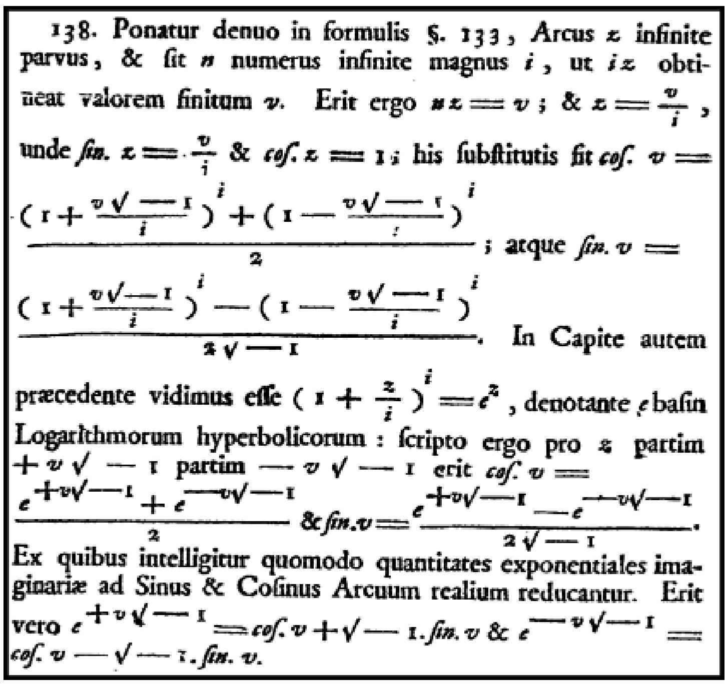
$$\cos v = \frac{1}{2}(e^{iv} + e^{-iv}) \qquad \text{i} \qquad \sin v = \frac{1}{2i}(e^{iv} - e^{-iv})$$

i sređivanjem ovih izraza dobijamo

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v \qquad \text{i} \qquad e^{-iv} = \cos v - i \sin v.$$

Ovaj odlomak iz Ojlerove knjige *Introductio in Analysin Infinitiorum* prikazan je na slici 2.7. Kao što je Ojler i sam rekao:

Iz ovih jednačina mi možemo razumjeti kako se kompleksna eksponencijalna funkcija može izraziti preko sinusa i kosinusa.



138. Ponatur denuo in formulis §. 133, Arcus z infinite parvus, & sit n numerus infinite magnus i, ut iz obtineat valorem finitum v. Erit ergo $nz = v$; & $z = \frac{v}{i}$, unde $\sin. z = \frac{v}{i}$ & $\cos. z = 1$; his substitutis fit $\cos. v = \frac{(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i + (1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2}$; atque $\sin. v = \frac{(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i - (1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}}$. In Capite autem præcedente vidimus esse $(1 + \frac{z}{i})^i = e^z$, denotante e basin Logarithmorum hyperbolicorum: scripto ergo pro z partim $+v\sqrt{-1}$ partim $-v\sqrt{-1}$ erit $\cos. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ & $\sin. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Ex quibus intelligitur quomodo quantitates exponentiales imaginariæ ad Sinus & Cosinus Arcuum realium reducantur. Erit vero $e^{+v\sqrt{-1}} = \cos. v + \sqrt{-1}. \sin. v$ & $e^{-v\sqrt{-1}} = \cos. v - \sqrt{-1}. \sin. v$.

Slika 2.7: Ojlerov identitet, iz knjige *Introductio in Analysin Infinitiorum*

2.2.3 Neke posljedice Ojlerovog identiteta

Ojlerova jednačina

Najvažnija posljedica Ojlerovog identiteta se javlja kada zamjenimo $x = \pi$ kako bismo dobili Ojlerovu jednačinu:

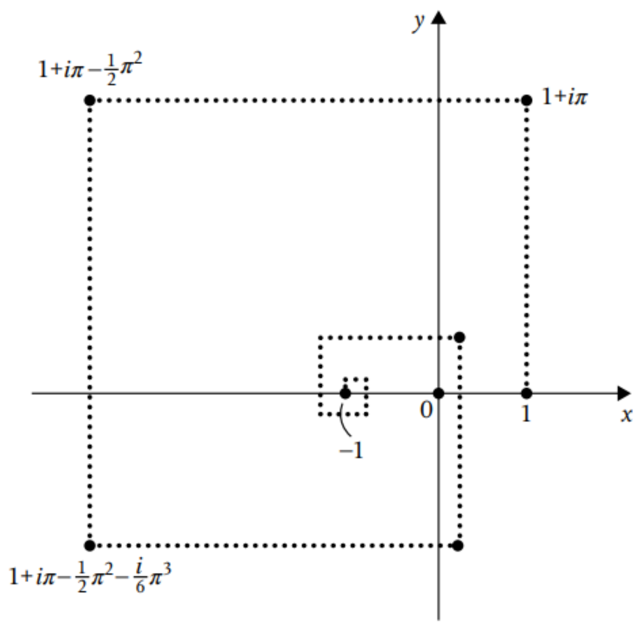
$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0i = -1$$

pa dobijamo da je $e^{i\pi} + 1 = 0$.
Iako je Ojler vjerovatno došao do ovog zaključka, nije ga spomenuo ni jednom radu koji je objavio.

Godine 1959. engleski učitelj L.V.H. Hal prikazao je Ojlerovu jednačinu slikovito. Uvrštavajući $x = i\pi$ u stepeni red za e^x, on je dobio:

$$e^{i\pi} = 1 + i\pi - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{i}{6}\pi^3 + \frac{1}{24}\pi^4 + \frac{i}{120}\pi^5 - \frac{1}{720}\pi^6 - \cdots .$$

Zatim je krenuo od tačke 1 na kompleksnoj ravni, dodao $i\pi$, oduzeo $\frac{1}{2}\pi^2$ i $\frac{i}{6}\pi^3$, dodao $\frac{1}{24}\pi^4$ i $\frac{i}{120}\pi^5$, oduzeo $\frac{1}{720}\pi^6$, itd. Ovo je napravilo spiralni put koji konvergira ka sumi niza, što je $e^{i\pi} = -1$ (Slika 2.8).



Slika 2.8: Halov spiralni grafik

De Moavrova teorema

Vidjeli smo kako je Ojler dokazao svoj identitet pomoću De Moavrovih formula. Obrnuto, Ojlerov identitet nam pruža veoma jednostavan dokaz De Moavrove teoreme: za bilo koji broj n,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)} = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Na neki način, De Moavrova teorema i Ojlerov identitet su ekvivalentni rezultati.

Množenje kompleksnih brojeva

Neka su $[r, \theta]$ i $[s, \varphi]$ kompleksni brojevi napisani u polarnim koordinatama, tada je

$$[r, \theta] \cdot [s, \varphi] = [rs, \theta + \varphi].$$

Ovo smo dokazali pomoću adicionih formula za sinus i kosinus, ali se takođe može lakše dokazati primjenom Ojlerovog identiteta, tj.

$$\begin{aligned}[r,\theta]\cdot[s,\varphi] &= r(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot s(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\ &= re^{i\theta}\cdot se^{i\varphi} = rse^{i(\theta+\varphi)} = [rs,\theta+\varphi].\end{aligned}$$

Sada se podsjetimo da eksponencijalna funkcija zadovoljava osnovni identitet:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b.$$

Ako sada zamjenimo da nam je $a = i\theta$ i $b = i\varphi$, imamo $e^{i\theta+i\varphi} = e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi}$, što možemo još zapisati

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi}.$$

Primjenjujući Ojlerov identitet na svaki član ove jednačine i sređivajući rezultat dobijamo:

$$\begin{gathered}\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) = (\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) =\\ (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi).\end{gathered}$$

Izjednačavanjem realnog i imaginarnog dijela imamo da je:

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\varphi) &= \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \quad \text{i}\\ \sin(\theta+\varphi) &= \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi,\end{aligned}$$

što su adicione formule za sinus i kosinus. Ponovno vidimo da matematički rezultati koji su se prvobitno činili veoma različitim, zapravo su suštinski ekvivalentni.

Povezivanje trigonometrijskih i hiperboličkih funkcija

Ojlerov identitet izražava eksponencijalnu funkciju koristeći $\cos x$ i $\sin x$. Sada ćemo obrnuti ovaj proces. Polazimo od jednačine $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, zamjenjujući x sa $-x$, dobijamo

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x.$$

Sabiranjem i oduzimanjem ove dvije jednačine dobijamo

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{i} \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

Ako sada zamjenimo x sa ix u ovim izrazima za $\cos x$ i $\sin x$, imamo:

$$\begin{aligned}\cos ix &= \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = \cosh x \quad \text{i}\\ \sin ix &= \frac{1}{2i}(e^{-x} - e^{x}) = \frac{1}{i}(-\sinh x) = i\sinh x,\end{aligned}$$

gdje su $\cosh x$ i $\sinh x$ hiperbolične funkcije. Pa je

$$\cosh x = \cos ix \quad \text{i} \quad \sinh x = -i \sin ix, \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R}.$$

Upotrebom kompleksnih brojeva dobili smo jednostavne veze između trigonometrijskih funkcija i hiperboličnih funkcija. Ovo je razlog zašto imaju tako slične osobine, npr. možemo zaključiti iz identiteta $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ da je $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, a to važi jer

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \cos^2 ix - (-i \sin ix)^2 = \cos^2 ix + \sin^2 ix = 1.$$

Korijeni jedinice

Znamo da su n-ti korijeni iz jedinice kompleksni brojevi:

$$\cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n, \quad \text{za} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Zbog Ojlerovog identiteta to je:

$$e^{2k\pi i/n}, \quad \text{za} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Želimo da pokažemo da je suma svih ovih vrijednosti jednaka 0. Ali ako je $z = e^{2\pi i/n}$, tada je ova suma:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1}.$$

Sumirajući ovu geometrijsku progresiju imamo $(z^n - 1)/(z - 1)$, što je 0, jer je $z^n = 1$. Za bilo koje n kompleksni n-ti korijeni od 1 imaju zbir 0. Na primjer, za $n = 2$, imamo

$$e^0 + e^{\pi i} = 1 + (-1) = 0,$$

pa se ovaj rezultat se može smatrati generalizacijom Ojlerove jednačine.

Zlatni presjek

Podsjetimo se da je $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ zlatni presjek, i da je

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad \text{i} \quad \varphi^{-1} - \varphi = -1.$$

Takođe, vidjeli smo da je za svako $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

Ako sada uzmemo da je $x = i \ln \varphi$, onda je $ix = -\ln \varphi$ i $-ix = \ln \varphi$, tada

$$\sin(i \ln \varphi) = \frac{1}{2i}(e^{-\ln \varphi} - e^{\ln \varphi}) = \frac{1}{2i}(\varphi^{-1} - \varphi) = \frac{1}{2i}(-1) = \frac{i}{2}.$$

Množenjem sa 2π i primjenjujući eksponencijalnu funkciju imamo:

$$e^{2\pi \sin(i \ln \varphi)} = e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = -1$$

ili $e^{2\pi \sin(i \ln \varphi)} + 1 = 0$. Ova poslednja jednačina povezuje šest najvažnijih brojeva u matematici: 1, 0, π, e, i i φ.

Šta je $\ln i$, i^i i $\sqrt[i]{i}$?

U ovoj oblasti postoji nekoliko iznenađujućih rezultata koji se odnose na logaritam broja i, i - ti stepen i^i i i - ti korijen $\sqrt[i]{i}$. Bitno je istaći da nijedan od ovih brojeva nema samo jednu vrijednost, tj. svi imaju beskonačno mnogo vrijednosti. Tačnije, poslednja dva rezultata i - ti stepen i^i i i - ti korijen $\sqrt[i]{i}$ (koji na prvi pogled izgledaju veoma kompleksno) zapravo imaju samo realne vrijednosti.

Ranije smo vidjeli neke od problema u vezi sa definisanjem logaritma za negativne brojeve. Ojler je sjajno razjasnio cijeli ovaj problem tako što je definisao logaritam kompleksnog broja.

Šta je $\ln i$?

Znamo da se svaki nenula kompleksan broj može zapisati u polarnom obliku kao:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Logaritmovanjem gornje jednakosti dobijamo:

$$\ln z = \ln re^{i\theta} = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta = \ln|z| + i\arg z, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Ovaj identitet daje logaritam bilo kog nenula kompleksnog broja z. Kako već od ranije znamo funkcija $\arg z$ ima beskonačno mnogo vrijednosti. Iz toga slijedi kako je Ojler otkrio da logaritam nenula kompleksnog broja ima beskonačno mnogo vrijednosti, sve višestrukosti od $2\pi i$.

Imamo dva posebna specijalna slučaja:

1. kada je $z = -1$, $r = |-1| = 1$, i $\theta = \arg(-1) = \pi$ (ili $\pi + 2k\pi$, za bilo koji cijeli broj k). Tako da jedna vrijednost $\ln(-1)$, koja odgovara $\theta = \pi$, je

$$\ln(-1) = \ln 1 + \pi i = \pi i,$$

sve ostale moguće vrijednosti su:

$$\ldots, -5\pi i, -3\pi i, -\pi i, \pi i, 3\pi i, 5\pi i, 7\pi i, \ldots.$$

2. kada je $z = i$, $r = |i| = 1$ i $\theta = \arg i = \pi/2$ (ili $\pi/2 + 2k\pi$, za bilo koji cijeli broj k). Tako da jedna vrijednost $\ln i$, koja odgovara $\theta = \pi/2$, je

$$\ln i = \ln 1 + \pi i/2 = \pi i/2,$$

sve ostale moguće vrijednosti su:

$$\ldots, -11\pi i/2, -7\pi i/2, -3\pi i/2, \pi i/2, 5\pi i/2, 9\pi i/2, 13\pi i/2, \ldots.$$

Šta je i^i i $\sqrt[i]{i}$?

Da bismo našli i - ti stepen i^i koristićemo poslednje rezultate da je

$$\ln i = \pi i/2 \quad \text{(ili da je } \pi/2 + 2k\pi i)$$

Tada je jedna vrijednost i^i:

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2} = 1/\sqrt{e^\pi}$$

realan broj koji približno iznosi $0,2078795763$. Sve druge vrijednosti i^i su oblika $e^{-\pi/2+2k\pi}$, pa i^i ima beskonačno mnogo vrijednosti i sve su realne:

$$\ldots, e^{-9\pi/2}, e^{-5\pi/2}, e^{-\pi/2}, e^{3\pi/2}, e^{7\pi/2}, e^{11\pi/2}, \ldots.$$

Slično, jedna vrijednost $\sqrt[i]{i}$ je

$$\sqrt[i]{i} = i^{1/i} = e^{(1/i)\ln i} = e^{(1/i)(i\pi/2)} = e^{\pi/2} = \sqrt{e^\pi}$$

realan broj koji približno iznosi $4,8104773821$. Sve druge vrijednosti $\sqrt[i]{i}$ su oblika $e^{\pi/2+2k\pi}$, pa i $\sqrt[i]{i}$ ima beskonačno mnogo vrijednosti i sve su realne:

$$\ldots, e^{-7\pi/2}, e^{-3\pi/2}, e^{\pi/2}, e^{5\pi/2}, e^{9\pi/2}, e^{13\pi/2}, \ldots.$$

Na kraju, primjetimo da ukoliko posmatramo jednačinu $\sqrt[i]{i} = e^{\pi/2}$ i stepenujemo obje strane jednakosti sa $2i$, dobijamo

$$(\sqrt[i]{i})^{2i} = i^2 = -1 \quad \text{i} \quad (e^{\pi/2})^{2i} = e^{i\pi},$$

pa je $e^{i\pi} = -1$ i ponovo smo dobili Ojlerovu jednačinu.

Ko je otkrio Ojlerovu jednačinu?

Kako bi se trebala nazvati jednačina $e^{i\pi}+1=0$? Vidjeli smo kako se Ojlerova jednačina može lako izvesti iz rezultata Johana Bernulija i Rodžera Koutsa, ali nijedan od njih to nije učinio. Čak štaviše i sam Ojler nije nigdje eksplicitno naveo ovu jednačinu i sigurno se ne pojavljuje ni u jednom njegovom radu, mada je sigurno shvatio da je ona direktna posljedica njegovog identiteta $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Nije poznato ko je prvi put eksplicitno naveo ovaj rezultat, ali je Žak Franse pisao o tome 1813 - 1814. godine u francuskom matematičkom časopisu.

Međutim, gotovo svi današnji matematičari pripisuju ovaj rezultat Leonardu Ojleru. Iz tog razloga smo svakako opravdali naziv ovog rezultata "Ojlerova jednačina", kako bismo odali počast dostignućima ovog zaista velikog matematičkog genija.

Glava 3

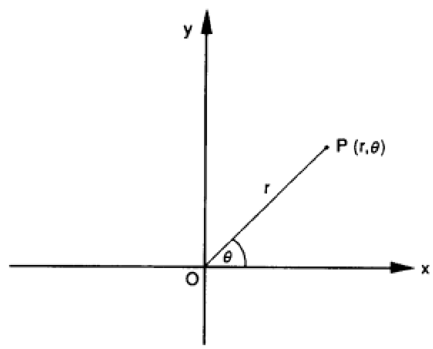
e^{θ}: Čudesna spirala

U ovom poglavlju upoznaćemo se sa logaritamskom spiralom, krivom koja je svojim specifičnim svojstvima očarala mnoge matematičare. Među tim osobinama vidjećemo da je ona sama svoja evoluta, da se ne mijenja prilikom većih geometrijskih transformacija, da svaka prava koja ishodi iz centra siječe spiralu pod istim uglom zbog čega se često naziva još i *jednakougaona spirala.* Ova izuzetna svojstva logaritamske spirale proizlaze iz činjenice da je funkcija e^x jednaka svom izvodu. Pored toga posmatraćemo i ulogu logaritamske spirale u prirodi i umjetnosti. Za realizaciju ovog poglavlja koristili smo literaturu [4] i [7].

3.1 Spira mirabilis

Među mnogim krivama koje su interesovale matematičare od kako je Dekart uveo analitičku geometriju 1637. godine dvije su se posebno istakle: cikloida i logaritamska spirala. Ova posljednja kriva posebno je zaintrigirala Jakoba Bernulija, ali prije toga ćemo reći nešto više o polarnim koordinatama. Ideja Dekarta bila je da pronađe tačku P u ravni i da toj tački dodijeli uređeni par (x, y), gdje x predstavlja vrijednost sa x - ose, a y vrijednost sa y - ose. Ali takođe možemo pronaći položaj tačke P tako što je stavimo da bude na rastojanju r od neke fiksne tačke O (obično centar koordinatnog sistema) i ugla θ između prave OP i pozitivne poluprave x - ose (slika 3.1). Uređeni par (r, θ) predstavlja *polarne koordinate* tačke P.

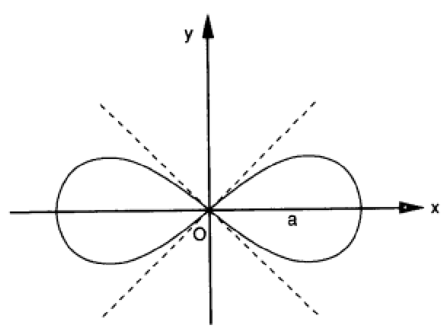
U pravouglom koordinatnom sistemu jednačina kao što je $y = f(x)$ određuje kako se y koordinata mijenja u zavisnosti od x koordinate. Na primjer, $y = 1$ opisuje horizontalnu liniju gdje y uvijek 1 i ne zavisi od izbora x. Dok u polarnim sistemima jednačine oblika $r = g(\theta)$ opisuju krive gdje svaka tačka (r, θ) predstavlja koordinate tačke u ravni i određuje kako se mijenja udaljenost r u zavisnosti od ugla θ. Na primjer, jednačina $r = 1$ ovdje opisuje krug sa poluprečnikom 1 i centrom u tački O. I obrnuto, ista kriva ima različite jednačine u pravouglom ili polarnom koordinatnom sistemu: gore spomenuti krug ima



Slika 3.1: Polarne koordinate

jednačinu $r = 1$ u polarnom sistemu, a $x^2 + y^2 = 1$ u pravouglom sistemu.

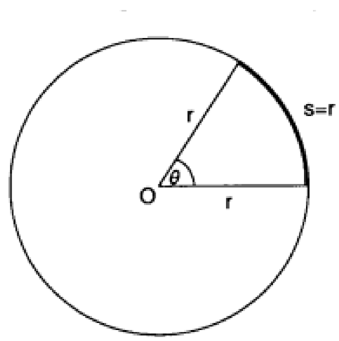
Na slici 3.2 prikazana je figura osam poznata i kao Bernulijeva lemniskata, čija je polarna jednačina $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ mnogo jednostavnija od one u pravouglom koordinatnom sistemu: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Polarni koordinatni



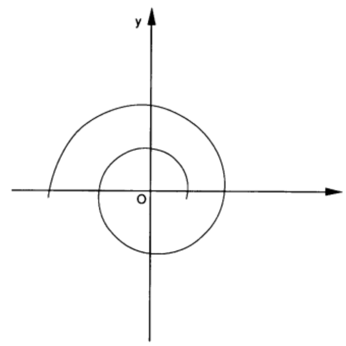
Slika 3.2: Bernulijeva lemniskata

sistemi su korišteni povremeno i prije Bernulijevog vremena, Njutn je u svom radu *Method of Fluxions*, spomenuo ih kao jedan od osam različitih koordinatnih sistema pomoću kojih se mogu opisati spiralne krive. Međutim, prvi je opširno koristio polarne koordinate Jakob Bernuli primjenjujući ih na različite krive i tako je istraživao razne njihove osobine.

Transformisanje krivih u polarni koordinatni sistem omogućilo je Jakobu da istraži dosta novih krivih. Od svih krivih njegova omiljena bila je logaritamska spirala, čija je jednačina $\ln r = a\theta$ gdje a predstavlja konstantu i ln je prirodni logaritam. Danas se ova jednačina obično piše obrnuto $r = e^{a\theta}$, ali u vrijeme Bernulija eksponencijalna funkcija nije još uvijek bila posmatrana kao posebna funkcija (čak ni broj e nije imao poseban simbol). Ugao θ mijerimo u radijanima, a ne u stepenima. Luk kruga iste dužine kao i poluprečnik tog kruga formira ugao od 1 radijana (slika 3.3).



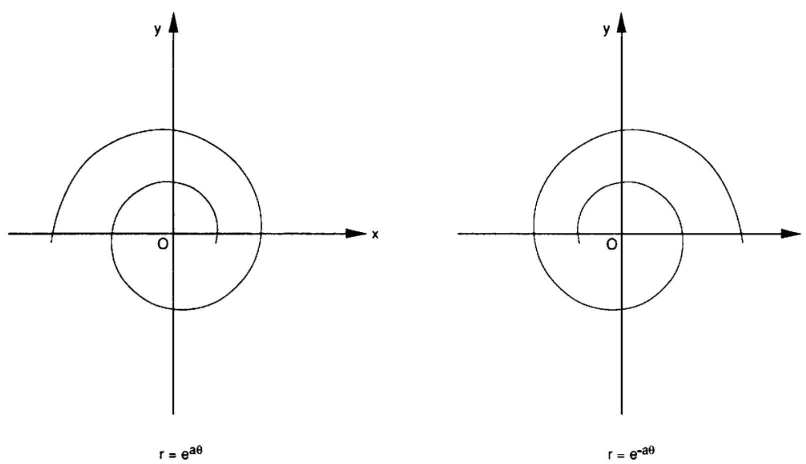
Slika 3.3: Ugao 1 radijan



Slika 3.4: Logaritamska spirala

Kako je obim kruga jednak $2r\pi$, što je tačno 2π radijana (≈ 6.28): to je 2π radijana $= 360°$ (punom krugu), iz čega slijedi da je jedan radijan isto što i $360°/2\pi$, ili približno $57°$.

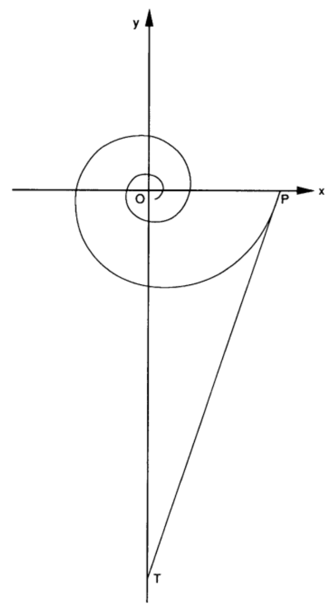
Ako nacrtamo jednačinu $r = e^{a\theta}$ u polarnim koordinatama, dobićemo krivu kao na slici 3.4, logaritamsku spiralu. Konstanta a određuje brzinu rasta spirale. Ako je a pozitivno, udaljenost r od centra O se povećava kako se okrećemo u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, formirajući lijevoruku spiralu; ako je a negativno r se smanjuje i dobijamo desnoruku spiralu (slika 3.5).



Slika 3.5: Lijevoruka i desnoruka spirala

Najvažnija osobina logaritamske spirala je: ukoliko povećamo ugao θ za jednaku vrijednost, rastojanje r od centra O se povećava u jednakim razmjerama, tj. u geometrjiskom nizu. Ovo slijedi iz identiteta $e^{a(\theta+\varphi)} = e^{a\theta} \cdot e^{a\varphi}$, gdje $e^{a\varphi}$ faktor koji predstavlja odgovarajući odnos.

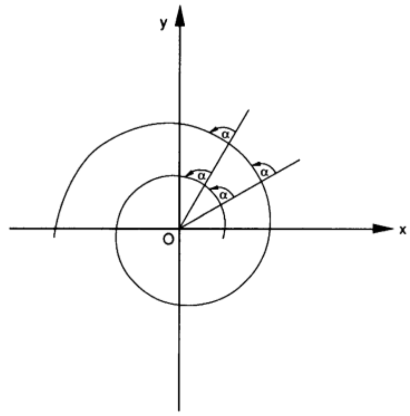
Ako pratimo spiralu unazad iz bilo koje fiksne tačke P na njoj, moraćemo da napravimo beskonačan broj rotacija prije nego što stignemo do centra, ali ukupno pređena udaljenost je konačna. Zanimljiva činjenica je otkrivena 1645. godine od strane Evanđeliste Toričeli (1608-1647), učenika Galilea koji je poznat pretežno po svojim eksperimentima u fizici. On je pokazao da je dužina luka od tačke P do centra jednaka dužini tangente na spiralu u tački P, mjerenoj između tačke P i y-ose (slika 3.6).



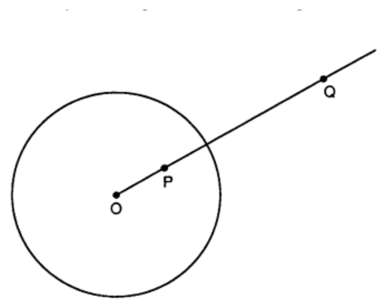
Slika 3.6: Udaljenost PT jednaka je dužini luka od tačke P do O.

Izuzetna svojstva logaritamske spirale zavise od činjenice da je funkcija e^x jednaka svom izvodu. Na primjer, svaka prava koja ishodi iz centra O sječe spiralu pod istim uglom. Ovo svojstvo posjeduje jedino logaritamska spirala zbog čega se još često naziva i *jednakougaona spirala* (slika 3.7). Zbog ove osobine ona se dovodi u blisku vezu sa krugom, za koji je ugao presjeka $90°$. Zaista, krug je logaritamska spirala čija je brzina rasta jednaka 0, uzimajući da je $a = 0$ u jednačini $r = e^{a\theta}$, dobijamo $r = e^0 = 1$, polarnu jednačinu jediničnog kruga.

Ono što je najviše fasciniralo Jakoba Bernulija u vezi logaritamske spirale je činjenica da se ona ne mijenja prilikom većih geometrijskih transformacija. Posmatrajmo, na primjer transformaciju inverzije. Tačka P čije su polarne koordinate (r, θ) se slika na taćku Q sa polarnim koordinatama $(1/r, \theta)$ (slika 3.8). Obično se izgled krive mijenja prilikom inverzije, na primjer hiperbola $y = 1/x$ se transformiše u lemniskatu Bernulija koja je pomenuta ranije. Kod logaritamske spirale promjena r u $1/r$ jednostavno mijenja jednačinu $r = e^{a\theta}$ u $r = 1/e^{a\theta} = e^{-a\theta}$, čija je slika ista kao logaritamska spirala ali suprotne orjentacije.



Slika 3.7: Svojstvo jednakih uglova logaritamske spirale



Slika 3.8: Inverzija jediničnog kruga: $OP \cdot OQ{=}1$

Kao što inverzija transformiše datu krivu u novu, tako možemo dobiti novu krivu konstruišući evolutu originalne krive. Ovaj koncept uključuje centar krivine krive. Krivina u svakoj tački krive mjeri brzinu promjene pravca krive u toj tački i obilježava se grčkim slovom κ (kapa). Njena recipročna vrijednost, $1/\kappa$, zove se poluprečnik krivine i označava se grčkim slovom ρ (ro). Što je manje ρ to je krivina veća u toj tački, i obrnuto. Prava linija ima krivinu 0, pa je njen poluprečnik krivine beskonačan. Krug ima konstantnu krivinu, i njegov poluprečnik krivine je jednostavno njegov poluprečnik.

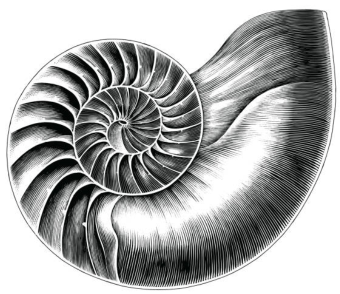
Tačka $p \in \mathbb{R}^2$ se naziva centar krivine u tački q krive $c : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ ako postoji kružnica k sa centrom p koja ima zajedničku tangentu sa krivom c u tački q tako da su krivine isto orijentisanih krivih c i k jednake u tački q. Centri krivine krive k formiraju novu ravansku krivu koja se naziva *evoluta* krive k. Jakob Bernuli je sa velikim oduševljenjem otkrio da je logaritamska spirala sama svoja evoluta.

Kroz vijekove, mnogi matematičari su istraživali osobine i karakteristike logaritamske spirale. Jakob Bernuli je bio posebno očaran ovom spiralom i dao joj je naziv *spira mirabilis* (čudesna spirala). Jedna od njegovih želja bila je da mu na nadgrobnom spomeniku urežu logaritamsku spiralu sa natpisom *Eadem mutata resurgo* (Ustajem ponovo promjenjen).

3.2 Logaritamska spirala u umjetosti i prirodi

Pretpostavlja se da nema krive koja je privukla veću pažnju naučnika, umjetnika i prirodnjaka od logaritamske spirale. Ona posjeduje izuzetna matematička svojstva koja je čine jedinstvenom među krivama u ravni zbog čega je Jakob Bernuli nazvao čudesnom spiralom. Oblik logaritamske spirale često je bio atraktivan i omiljen dekorativni ukras u umjetnosti još od doba antike. Pored kruga (koji je poseban slučaj logaritamske spirale), ona se javlja u prirodi češće od bilo koje druge krive kao što je slučaj sa kućicom nautilusove školjke (slika 3.9).

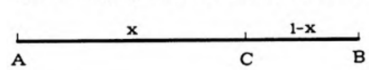
Jedna od najinteresantnijih činjenica o logaritamskoj spirali je ta da izgleda isto iz svakog ugla. Naime, svaka prava koja prolazi kroz centar sječe logaritamsku spiralu pod istim uglom što smo već ranije pomenuli. Zbog toga je poznata i kao *jednakougaona spirala*. U svom čuvenom delu *O rastu i obliku*, engleski prirodnjak Darsi V. Tompson (1860-1948) temeljno istražuje ulogu logaritamske spirale kao dominantnog obrasca rasta mnogih prirodnih oblika, uključujući školjke, rogove, kljove i suncokrete (slika 3.10). Ovdje na listu možemo dodati i spiralnu galaksiju koja nije bila još istražena kada je ova knjiga Tompsona objavljena (slika 3.12).



Slika 3.9: Nautilusova školjka

Slika 3.10: Suncokret

U prvim decenijama XX vijeka pojavilo se interesovanje za grčku umjetnost i njenom vezom sa matematikom. Godine 1914, Teodor Andreja Kuk objavio je delo *The Curves of Life*, obimno dijelo od gotovo pet stotina stranica koje je u potpunosti posvećeno spirali i njenoj ulozi u umjetnosti i prirodi. Džej Hambidž napisao je dijelo *Dynamic Symmetry* (1926) koje je imalo veliki uticaj na generacije umjetnika koji su težili savršenoj ljepoti i harmoniji. Hambidž je koristio zlatni presjek kao osnovno načelo - odnos u kojem se linija mora podijeliti tako da je ukupna dužina u odnosu na duži dio ista kao što je duži dio u odnosu na kraći (slika 3.11). Ovaj odnos se obilježava grčkim slovom φ (fi) i ima vrednost $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1,618\ldots$.

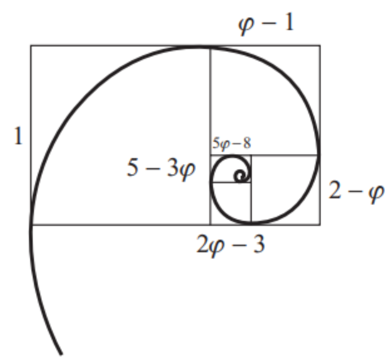


Slika 3.11: Zlatni presjek: C dijeli duž AB tako da je čitava duž u odnosu na duži dio isto što je duži dio u odnosu na kraći dio. Ako je čitava duž jednaka 1, imamo $1/x = x/(1-x)$. Odavde dobijamo kvadratnu jednačinu $x^2 + x - 1 = 0$, čije je pozitivno rješenje $x = (-1+\sqrt{5})/2$ ili približno $0,61803$. Zlatni presjek je recipročna vrijednost ovog broja, ili oko $1,61803$.

Slika 3.12: Spiralna galaksija M100.

Zlatni pravougaonik

Mnogi umjetnici smatraju da pravougaonik čiji je odnos dužine prema širini zlatni odnos φ - poznat kao *zlatni pravougaonik* - ima najskadnije dimenzije, zbog čega ima značajnu ulogu u arhitekturi. Svaki zlatni pravougaonik može poslužiti kao osnova za stvaranje novog zlatnog pravougaonika čija je dužina slična širini originalnog pravougaonika. Ovaj proces može se ponavljati beskonačno, stvarajući niz zlatnih pravougaonika čija se veličina smanjuje do nule (slika 3.13). Dužina i širina n - tog zlatnog pravougaonika mogu se zapisati kao linearni izrazi $a + b\varphi$, gdje su koeficijenti a i b uvijek brojevi iz Fibonačijevog niza (niz brojeva u kojem svaki broj predstavlja zbir prethodna dva broja: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...). Ovi pravougaonici obuhvataju logaritamsku spiralnu liniju poznatu kao *zlatna spirala*, koja je poslužila kao inspiracija Hambidžu (slika 3.13). Pretpostavimo da je donji lijevi ugao prvog pravougaonika početak koordinatnog sistema xy. Može se pokazati da je tačka koja predstavlja graničnu vrijednost spirale $(\frac{1}{5}(1 + 3\varphi), \frac{1}{5}(3 - \varphi))$. Prikazana logaritamska spirala daje konstantan ugao $\xi = \operatorname{arcctg}(\frac{2}{\pi}\ln(\varphi)) = 72,968\ldots^\circ$.



Slika 3.13: *Zlatni pravougaonik* - svaki pravougaonik ima odnos dužine prema širini od $1,61803$.

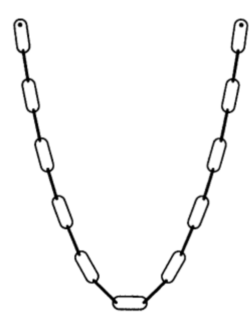
Glava 4

$(e^x + e^{-x})/2$: Viseći lanac

U ovom četvrtom dijelu istražićemo problem lančanice ili visećeg lanca. Vidjećemo u nastavku da je oblik koji zauzima slobodno okačen lanac zapravo kriva $y = \cosh x$ i prikazaćemo sličnosti između trignometrjskih i hiperboličnih funkcija. Sadržaj ovog poglavlja, kao i slike, prate izlaganja knjige [7].

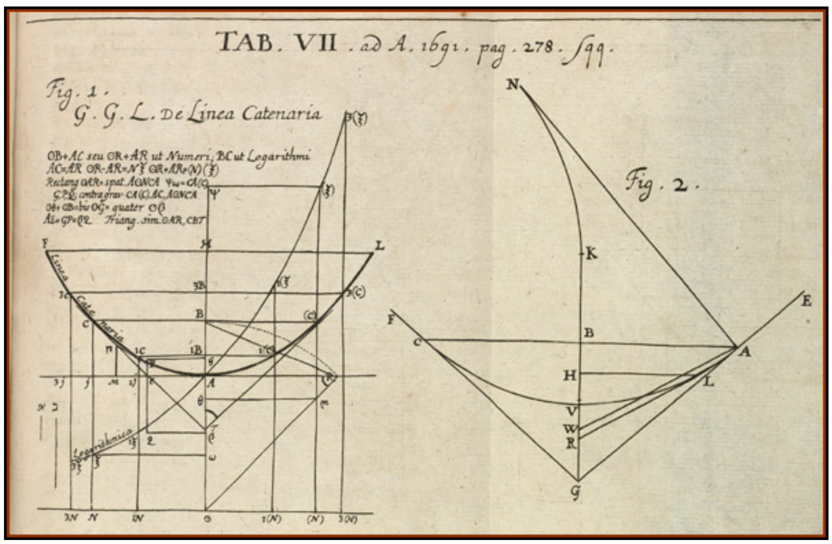
4.1 Problem visećeg lanca

Među mnogim izazovnim problemima koji su interesovali matematičare bio je i problem lančanice - visećeg lanca. Ovaj problem prvi je postavio Jakob Bernuli. U časopisu iz maja 1690. godine *Acta eruditorum* koji je osnovao Lajbnic, Jakob je napisao: „I sada neka bude postavljen ovaj problem: Pronaći oblik koji zauzima konopac dok je opušten i slobodno okačen između dvije fiksne tačke". Galileo je već pokazao interesovanje i smatrao je da je tražena kriva parabola. Ukoliko pogledamo sliku visećeg lanca primjetimo da on liči na parabolu (slika 4.1). Međutim, holandski matematičar Kristijan Hajgens (1629-1695) dokazao je da viseći lanac ne može biti parabola. Pronaći odgovarajuću krivu bio je drugi problem i niko nije znao da ga riješi.



Slika 4.1: Problem lančanice: kriva visećeg lanca

U junu 1691. godine, godinu dana nakon što je Jakob Bernuli postavio problem *Acta* je objavila tri tačna rješenja koja su poslali - Hajgens, Lajbnic i Johan Bernuli. Za viseći lanac se ispostavilo da je kriva čija je jednačina $y = (e^{ax} + e^{-ax})/2a$, gdje a konstanta čija vrijednost zavisi od fizičkih parametara lanca i napona pod kojim je okačen. Bitno je istaći da ova jednačina nije bila tada data u ovom obliku koji je naveden. Broj e još nije imao poseban simbol, a eksponencijalna funkcija nije bila posmatrana kao funkcija samostalno, već kao inverzna funkcija logaritamske funkcije. Jednačina visećeg lanca je nastala iz načina na koji je konstruisana kako se jasno vidi na Lajbnicovoj sopstvenoj skici (slika 4.2).



Slika 4.2: Lajbnicova konstrukcija problema lančanice (1690).

Za $a = 1$ jednačina visećeg lanca postaje

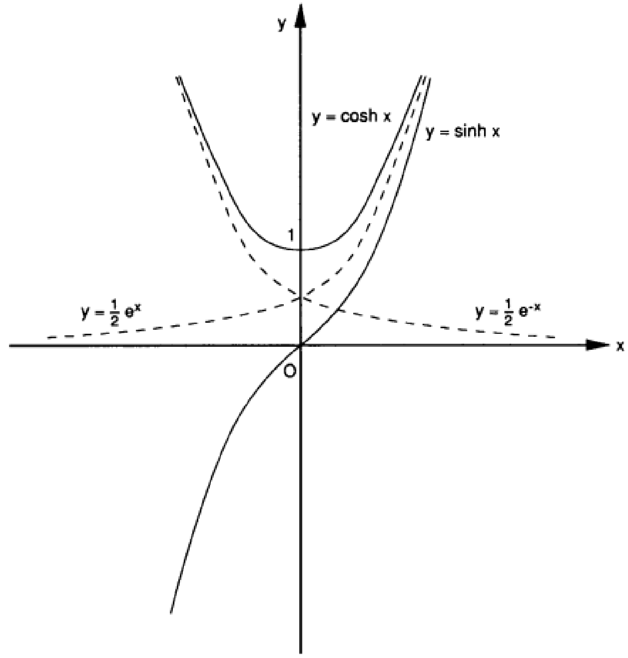
$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Johan Bernuli je pokazao vezu između krive visećeg lanca i eksponencijanih funkcija $y = e^x$ i $y = e^{-x}$. Ako dodamo i oduzmemo ove funkcije, mi dobijamo takozvane *hiperbolične funkcije*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{i} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

čiji su grafici prikazani na slici 4.3.

Kriva $y = \cosh x$ predstavlja oblik koji zauzima slobodno okačen lanac i naziva se lančanica. Sličnosti hiperboličnih funkcija sa trigonometrijskim funkcijama $\cos x$ i $\sin x$ prvi je primjetio Vinćenco Rikati (1707-1775). U 1757. godini on je uveo notaciju $\operatorname{ch} x$ i $\operatorname{sh} x$ za ove funkcije. Takođe je dokazao identitet



Slika 4.3: Grafici funkcija $\sinh x$ i $\cosh x$

.

$\operatorname{ch}^2\varphi - \operatorname{sh}^2\varphi = 1$ (gdje je φ bilo koja nezavisna promjenljiva). Ovo pokazuje da su $\operatorname{ch}\varphi$ i $\operatorname{sh}\varphi$ povezani sa hiperbolom $x^2 - y^2 = 1$ na isti način kao što su $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ povezani sa jediničnim krugom $x^2 + y^2 = 1$. Rikatijeva notacija je ostala skoro nepromjenjena. Danas ove funkcije označavamo sa $\cosh\varphi$ i $\sinh\varphi$ - čita se hiperbolični kosinus od φ i hiperbolični sinus od φ.

Može se vidjeti da većina formula u običnoj trigonometriji ima svoje hiperboličke ekvivalente. Ako uzmemo standardne trignometrijske identitete i zamjenimo $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$ sa $\sinh\varphi$ i $\cosh\varphi$, identitet će biti tačan uz mogućnost promjene znaka u jednom ili više izraza. Na primjer, izvodi običnih trigonometrijskih funkcija su:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x, \quad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

Odgovarajući izvodi hiperboličnih funkcija su:

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x, \quad \frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

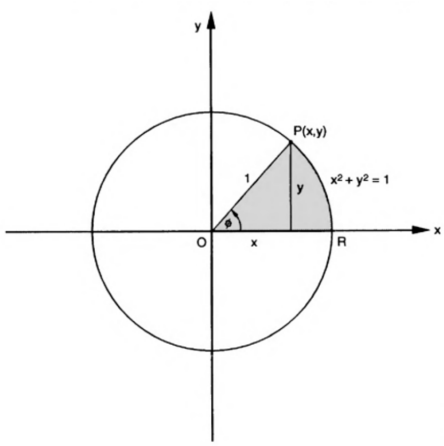
Poželjno bi bilo da svaki odnos između običnih trigonometrijskih funkcija ima svoj ekvivalent među hiperboličnim funkcijama. Međutim, to nije slučaj za razliku od hiperbole krug je zatvorena kriva. Kružne funkcije su periodične - njihova vrijednost se ponavlja svakih 2π radijana. Hiperbolične funkcije nemaju ovu osobinu, i njihova uloga u matematici je manje značajna.

4.2 Izvanredna sličnost

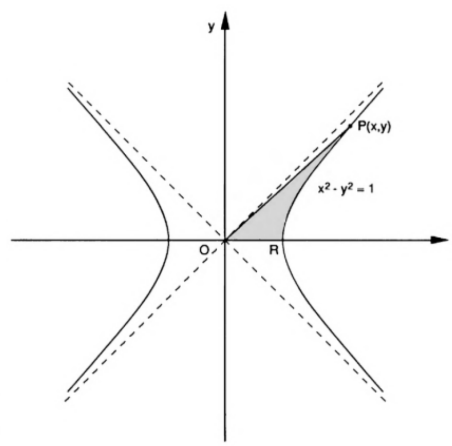
Posmatrajmo jedinični krug sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika 1 - jednačina u pravouglom koordinatnom sistemu $x^2 + y^2 = 1$ (slika 4.4). Neka je $P(x, y)$ tačka na jediničnom krugu i ugao φ ugao između pozitivnog dijela x - ose i prave OP. Trigonometrijske funkcije sinus i kosinus definišu se kao x i y koordinate tačke P:

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi.$$

Ugao φ se takođe može posmatrati i kao dvostruka površina kružnog isječka OPR, s obzirom da je površina data formulom $A = r^2\varphi/2 = \varphi/2$, gdje $r = 1$ poluprečnik.



Slika 4.4: Jedinični krug



Slika 4.5: Prava hiperbola $x^2 - y^2 = 1$

Hiperbolične funkcije se slično definišu preko prave hiperbole $x^2 - y^2 = 1$, čiji grafik se može dobiti rotacijom koordinata za $45°$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu hiperbole $2xy = 1$. Prave $y = \pm x$ su asimptote tog grafika (slika 4.5). Neka je $P(x, y)$ tačka na hiperboli, tada definišemo:

$$x = \cosh\varphi, \quad y = \sinh\varphi,$$

gdje je $\cosh\varphi = (e^{\varphi} + e^{-\varphi})/2$ i $\sinh\varphi = (e^{\varphi} - e^{-\varphi})/2$. Ovdje φ nije ugao između pozitivnog dijela x - ose i prave OP, već samo parametar (promjenljiva).

Evo primjera nekoliko sličnih svojstava trigonometrijskih i hiperboličnih funkcija:

Pitagorina veza

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Simetrije (parne i neparne relacije)

$$\cos(-x) = \cos x \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \cosh(-x) = \cosh x \quad \sinh(-x) = -\sinh x$$

Vrijednosti kada je $x = 0$

$$\cos 0 = 1 \quad \sin 0 = 0 \quad \cosh 0 = 1 \quad \sinh 0 = 0$$

Vrijednosti kada je $x = \pi/2$

$$\cos \pi/2 = 0 \quad \sin \pi/2 = 1 \quad \cosh \pi/2 \approx 2,509 \quad \sinh \pi/2 \approx 2,301$$

Adicione formule

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

Izvodi funkcija

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

Integrali funkcija

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x + c$$

Ovdje su $\arcsin x$ i $\sinh^{-1} x$ inverzne funkcije od $\sin x$ i $\sinh x$.

Postoje još sličnosti između funkcija $\operatorname{tg} x$ (definiše se kao $\sin x/\cos x$) i $\tanh x$ ($= \sinh x/\cosh x$) kao i između preostale tri trigonometrijske funcije $\sec x (= 1/\cos x)$, $\operatorname{cosec} x (= 1/\sin x)$ i $\operatorname{ctg} x (= 1/\operatorname{tg} x)$ i njihovih hiperboličnih ekvivalenata. Periodičnost trigonometrijskih funkcija čini ih značajnim funkcijama u matematici i nauci. Hiperbolične funkcije nemaju ovu osobinu i zbog toga su manje značajne. Međutim, korisne su za opis raznih odnosa između funkcija posebno određenih vrsta neodređenih integrala.

Glava 5

Zanimljivosti o broju e

U poslednjem poglavlju bavićemo se nekim interesantim brojevima i formulama u kojima se pojavljuje broj e. Među njima su eksponencijalni integral, Laplasova transformacija, Stirlingova formula i još neke. Osvrnućemo se i na jedan zanimljiv događaj Benjamina Pirsa koji je smislio nove simbole za konstante π i e. Za izradu ove glave koristili smo literaturu [7] i [8].

5.1 Neki interesantni brojevi u kojima se javlja broj e

$*$ $e^{-e} = 0,065988036\ldots$

Ojler je dokazao da je izraz $x^{x^{x^{x^{x^{x^{x}}}}}}$, kako broj eksponenata raste ka beskonačnosti, teži ka granici ako je x između $e^{-e}(= 1/e^e)$ i $e^{1/e}$.

$*$ $e^{-\pi/2} = 0,207879576\ldots$

Ojler je pokazao 1746. godine da izraz i^i (gdje $i = \sqrt{-1}$) ima beskonačno mnogo vrijednosti, sve su realne: $i^i = e^{-(\pi/2+2k\pi)}$, gdje $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Glavna vrijednost je $e^{-\pi/2}$ (kada je $k = 0$).

$*$ $1/e = 0,367879441\ldots$

Granica niza realnih brojeva $(1-1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, kad n teži beskonačno. Ovaj broj koristi se da izmjeri brzinu opadanja eksponencijalne funkcije $y = e^{-at}$. Kada je $t = 1/a$ imamo $y = e^{-1} = 1/e$. Takođe se pojavljuje i u *problemu pogrešno adresiranih koverti* koji je postavio Nikolas Bernuli: ako n pisama treba da ide u n koverti sa adresom, koja je vjerovatnoća da će svako pismo biti stavljeno u pogrešnu kovertu? Kada n teži beskonačno približna vrijednost je $1/e$.

$*$ $e^{1/e} = 1,444667861\ldots$

Riješenje problema Jakoba Štajnera: pronaći maksimum funkcije $y = x^{1/x} = \sqrt[x]{x}$. Ova vrijednost se dostiže za $x = e$.

* $873/323 = 2,718266254\ldots$

Najbliža racionalna aproksimacija broja e koristeći cijele brojeve manje od 1000. Lako se pamti i podsjeća na racionalnu aproksimaciju $355/113 = 3,14159292\ldots$ za π.

* $e = 2,718281828\ldots$

Baza prirodnog logaritma (zvanog još i Nepierov logaritam) i granica niza realnih brojeva $(1 + 1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, kad n teži beskonačnosti. Broj e je iracionalan i predstavljen je kao beskonačan, jedinstven decimalni zapis. Iracionalnost broja e je dokazao Ojler 1737. godine. Čarls Hermit je 1873. godine pokazao da je transcedentan tj. ne može biti riješenje polinomne jednačine sa cjelobrojnim koeficijentima. Broj e se može geometrijski predstaviti na nekoliko načina. Površina ispod grafika $y = e^x$ od $x = -\infty$ do $x = 1$ jednaka je e, baš kao i nagib istog grafika u $x = 1$. Površina ispod hiperbole $y = 1/x$ od $x = 1$ do $x = e$ jednaka je 1.

* $e + \pi = 5,859874482\ldots \quad e \cdot \pi = 8,539734223\ldots$

Ovi brojevi se rijetko koriste u praktičnim primjenama. Oni su iracionalni ali nije poznato da li su algebarski ili transcedentni brojevi.

* $e^e = 15,15426224\ldots$

Ovaj broj je iracionalan ali nije poznato da li je algebarski ili transcedentni broj.

* $\pi^e = 22,45915772\ldots$

Ovaj broj je iracionalan ali nije poznato da li je algebarski ili transcedentni broj.

* $e^\pi = 23,14069263\ldots$

Aleksandar Gelfond je 1934. godine dokazao da je ovaj broj transcedentan. Iako je broj e^π poznat kao Gelfondova konstanta, prethodno je ovaj broj privukao pažnju američkog matematičara Benjamina Pirsa koji je na tabli pisao često ovu modifikaciju Ojlerovog identiteta:

$$i^i = \sqrt{e^\pi},$$

zatim bi se okrenuo ka svom razredu i rekao: "Gospodo, nemamo najmanjeg pojma šta ova jednačina znači, ali možemo biti sigurni da znači nešto veoma važno".

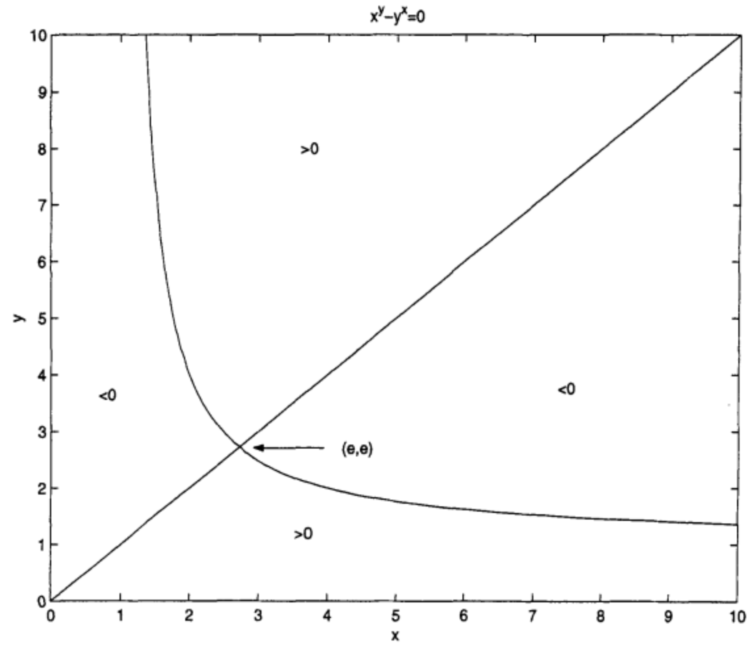
Ali šta je π^e? Za ovaj broj rekli smo da ne znamo da li je alebarski ili transcedentan. Američki matematičar Ivan Niven pitao se šta je veće π^e ili e^π? Nije samo dao odgovor na ovo pitanje da je

$$e^\pi > \pi^e,$$

nego je takođe ustanovio opširnije nejednakosti

$$\beta > \alpha \geq e \implies \alpha^\beta > \beta^\alpha; \quad e \geq \beta > \alpha > 0 \implies \beta^\alpha > \alpha^\beta,$$

gdje e igra glavnu ulogu. Ovaj rezultat je prikazan grafički na slici 5.1.



Slika 5.1: $e^{\pi} > \pi^{e}$

* $e^{e^{e}} = 3814279,104\ldots$

Primjetimo koliko je ovaj broj veći od broja e^e. Sljedeći broj u nizu je $e^{e^{e^{e}}} = 2,33150439... \cdot 10^{1656520}$

* $\gamma = 0,577215664\ldots$

Ovaj broj koji obilježavamo grčkim slovom γ je poznat kao Ojlerova konstanta, to je granična vrijednost niza $1+1/1+1/2+1/3+1/4+\ldots+1/n-\ln n$, $n \in \mathbb{N}$, kad n teži beskonačno. Godine 1781. Ojler je izračunao ovaj broj sa 16 decimala. Činjenica da postoji granica znači da iako niz $1+1/2+1/3+1/4+\cdots+1/n$, $n \in \mathbb{N}$, (poznat kao harmonijski red) divergira kako n ide ka beskonačnosti, razlika između tog reda i $\ln n$ se približava konstantnoj vrijednosti. Nije poznato da li je γ algebarski ili transcendentan, ili čak da li je racionalan ili iracionalan.

* $\ln 2 = 0,693147181\ldots$

Ovo je zbir harmonijskog reda sa promjenljivim znakom, $1-1/2+1/3-1/4+-\cdots$ dobijen iz izraza Nikolasa Merkatora $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + -\cdots$ kad je $x = 1$. Kada stepenujemo broj e sa ovim brojem dobijamo 2: $e^{0,693147181\ldots} = 2$.

5.2 Neke interesantne formule u kojima se javlja broj e

* $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

Zbir beskonačnog reda koji je otkrio Njutn 1665. godine. Može se dobiti od binomnog izraza $(1+1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ako pustimo da n teži beskonačno. Konvergira veoma brzo zbog brzog rasta vrijednosti faktorijela u imeniocima. Na primjer, zbir prvih 11 članova (zaključno sa $1/10!$) je $2,718281801$, stvarna vrijednost zaokružena na 9 decimala iznosi $2,718281828$.

* $e^{\pi i} + 1 = 0$

Ojlerova formula koja je jedna od najpoznatijih u matematici. Povezuje pet osnovnih matematičkih konstanti $0, 1, \pi, e$ i $i = \sqrt{-1}$.

* $$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}$$

Ovaj beskonačni neprekidni razlomak, i mnogi drugi koji uključuju e i π, je otkrio Ojler 1737. godine. On je pokazao da se svaki racionalni broj može zapisati kao konačan neprekidan razlomak, i obrnuto. Dakle, beskonačni neprekidni razlomak uvijek predstavlja iracionalan broj. Još jedan od Ojlerovih beskonačnih neprekidnih razlomaka koji uključuje e jeste:

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \dots}}}$$

* $2 = \dfrac{e^1}{e^{1/2}} \cdot \dfrac{e^{1/3}}{e^{1/4}} \cdot \dfrac{e^{1/5}}{e^{1/6}} \cdot \dots$

Ovaj beskonačni proizvod se može dobiti iz izraza $\ln 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + - \cdots$. Podsjeća na Volisov proizvod $\pi/2 = (2/1) \cdot (2/3) \cdot (4/3) \cdot (4/5) \cdot (6/5) \cdot (6/7) \cdot \cdots$, osim što se u njemu javlja e unutar proizvoda.

Formule koje uključuju e često se koriste u primenjenoj matematici. Evo nekoliko primjera:

* $\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Ovaj određeni integral koristi se u vjerovatnoći. Neodređeni integral od funkcije $e^{-x^2/2}$ ne može se izraziti pomoću elementarnih funkcija.

Još jedan izraz čija primitivna funkcija ne može biti izražena pomoću elementarnih funkcija je funkcija e^{-x}/x. U stvari, integral te funkcije od nekog x do beskonačnosti, definiše novu funkciju poznatu kao *eksponencijalni integral* i označavamo ga sa $Ei(x)$:

$$Ei(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

Određeni integral izraza $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ za datu funkciju $f(t)$ ima vrijednost koja i dalje zavisi od parametra s; stoga, ovaj integral definiše funkciju $F(s)$ od s, poznatu kao *Laplasova transformacija* funkcije $f(t)$ i označena kao $\mathcal{L}\{f(t)\}$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt.$$

Zbog mnogih korisnih osobina Laplasove funkcije - sve zahvaljujući osobinama e^{-st} - ima veliku primjenu, posebno pri rješavanju linearnih diferencijalnih jednačina.

* $n! \sim e^{-n} \cdot n^n \cdot \sqrt{2\pi n}$

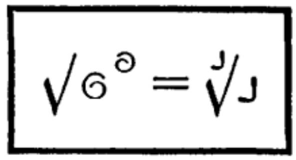
Stirling je 1730. godine objavio ovu formulu koja povezuje brojeve e i π i naveo je još graničnu vrijednost $e = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}}$.

Zanimljiv događaj u istoriji broja e

Benjamin Pirs (1809-1880) postao je profesor matematike na Harvard koledžu već u dvadeset četvrtoj godini. Inspirisan Ojlerovom formulom $e^{\pi i} = -1$ smislio je nove simbole za π i e i koristio ih je u svojim predavanjima. Rekao je da su oznake koje su se koristile tada bile nezgodne i da bi trebalo istaći blisku vezu između ove dvije konstante. On je predložio sledeće karaktere:

Prvi simbol je bio oznaka za broj π, dok je drugi bio za broj e. Primjetimo da su simboli za broj π i e modifikacije slova c (*circumference* - obim) i slova b (*base* - baza).

Pirsov prijedlog je objavljen u časopisu *Mathematical Monthly* u februaru 1859. godine i koristio ih je u svojoj knjizi *Analytic Mechanics* (1855). Ovu notaciju nastavili su da koriste i njegovi sinovi Čarls Sanders Pirs i Džejms Mils Pirs koji su isto bili matematičari. Džejms Mils je u svojoj knjizi *Three and Four Place Tables* iz 1871. ukrasio stranice jednačinom $\sqrt{e^{\pi}} = \sqrt[i]{i}$ (slika 5.1).



Slika 5.2: Simboli za π i e Benjamina Pirsa i i su se pojavili na naslovnoj strani Džejms Mils Pirs knjige *Three and Four Place Tables* (1871)

Nije čudno što Pirsov prijedlog nije prihvaćen sa velikim oduševljenjem. Osim problema pri štampanju njegovih simbola, bilo je teško razlikovati njegov simbol b od c. Njegovi studenti su radije koristili standardne simbole π i e.

Broj e na 100 decimalnih mjesta

$e = 2,71828$	18284	59045	23536
02874	71352	66249	77572
47093	69995	95749	66967
62772	40766	30353	54759
45713	82178	52516	64274

Zaključak

> *"Read Euler, read Euler. He is the master of us all."*
>
> (P. S. de Laplace)

U ovom master radu detaljno smo istražili i analizirali broj e, poznat kao Ojlerov broj, koji se smatra jednim od ključnih konstanti u matematici. Na početku rada smo krenuli od života Džona Nepiera, škotskog matematičara, koji je imao važnu ulogu u defisanju logaritama čime je značajno olakšao račun. Zatim smo kroz problem računanja kamate koji je razmatrao Jakob Bernuli definisali broj e kao graničnu vrijednost niza $(1 + 1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Prikazali smo i neke osobine broja e i kako se može zapisati kao beskonačni red. Takođe smo izveli broj e preko limesa tako što smo posmatrali niz $a_n = (1 + 1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, i dokazali da je on konvergentan. Godine 1737. Ojler je pokazao da je broj e iracionalan što smo u ovom radu i dokazali. Dokazali smo da je broj e još i transcedentan tj. realan broj koji ne zadovoljava ni jednu algebarsku jednačinu sa cjelobrojnim koeficijentima. Nakon toga, istražili smo i jednu od najlepših teorema u matematici, poznatu kao Ojlerova jednačina. Ona izražava vezu između brojeva $e, \pi, i, 1$ i 0. Prikazali smo i dva pokušaja Johana Bernulija i Rodžera Koutsa koji su bili blizu otkrića Ojlerovog identiteta. Poslije toga posebno smo istražili nevjerovatne osobine logaritamske spirale. Jedna od tih osobina je da svaka prava koja ishodi iz centra siječe spiralu pod istim uglom zbog čega se još naziva i jednakougaona. Ukoliko je taj ugao presjeka jednak pravom uglu onda je ta logaritamska spirala zapravo krug. Pored toga posmatrali smo još i problem lančanice - visećeg lanca koji je zaintrigirao mnoge matematičare. Johan Bernuli je pokazao da postoji veza između krive visećeg lanca i eksponencijalnih funkcija, te da je kriva $y = \cosh x$ baš oblika koji zauzima slobodno okačen lanac. Uz to u ovom poglavlju smo još posmatrali sličnosti između trigonometrijskih i hiperboličnih funkcija. Na kraju rada smo istražili zanimljive formule i brojeve u kojima se pojavljuje Ojlerov broj e i jedan događaj u istoriji broja e koji se tiče Benjamina Pirsa i njegovih novih oznaka za brojeve π i e.

Literatura

[1] E. B. Burger, R. Tubbs, *Making transcendende transparent - An Intuitive Approach to Classical Transcendental Number Theory*, Springer, USA, 2004.

[2] R. Courant, H. Robbins, revised by I. Stewart, *What is Mathematics*, Oxford University Press, 1996.

[3] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, RINEHART and company, inc, New York, 1956.

[4] S. R. Finch, *Mathematical Constants*, Cambridge University Press, New York, 2003.

[5] E. Hairer, G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer, 1996.

[6] M. Jukić, *Transcendentnost broja e i* π, Sveučilište J.J. Strossmayera, Osijek, 2001.

[7] E. Maor, *e: The story of a number*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.

[8] B. J. McCartin, *e: The master of all*, Springer Science+Business Media, New York, 2006.

[9] U. C. Merzbach and C. B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2010.

[10] C. A. Pickover, *The Math Book*, Barnes & Noble, 2013.

[11] C. A. Pickover, *Wonders of Numbers*, Oxford University Press, 2000.

[12] R. Wilson, *Euler's pioneering equation*, Oxford University Press, New York, 2018.

[13] `https://personal.pmf.uns.ac.rs/nenad.teofanov/wp-content/uploads/sites/17/2018/03/Liouville-ova-teorema.pdf`

[14] `https://www.britannica.com/biography/John-Napier`

[15] `https://hrcak.srce.hr/file/347575`

Biografija

Andrijana Sekulić rođena je 3. avgusta 1997. godine u Bijeljini. Osnovnu školu ”Knez Ivo od Semberije” u Bijeljini završila je 2012. godine. Nakon završetka osnovne škole upisuje opšti smijer gimnazije ”Filip Višnjić” u Bijeljini, koju završava 2016. godine. Iste godine upisuje osnovne akademske studije matematike na Prirodno - matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, smijer matematika (M3), modul Teorijska matematika. U 2018. godini se prebacuje i nastavlja na integrisanim akademskim studijama, novi smijer Master profesor matematike, na istom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene planom i programom i time stekla pravo na odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Andrijana Sekulić
AU

Mentor: dr Milica Žigić
ME

Naslov rada: Ojlerov broj
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2023.
GO

Vrsta rada: Master rad
VR

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mjesto i adresa: Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5/69/15/2/32/0/0) (broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Istorija matematike
ND

Ključne riječi: Ojlerov broj, izvođenje i osobine broja e, Ojlerova jednačina i identitet, Logaritamska spirala, problem visećeg lanca
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno - matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom master radu smo proučavali Ojlerov broj e koji se definiše kao granica niza realnih brojeva $(1 + 1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, kada n teži beskonačnosti. U uvodnom dijelu rada smo počeli od istorijskog osvrta na život Džona Nepiera i njegovog istraživanja koje je dovelo do otkrića logaritama. Zatim smo izveli broj e i dokazali da je iracionalan i transcedentan. U drugoj glavi smo se upoznali sa najljepšom teoremom, Ojlerovom jednačinom, koja povezuje pet važnih brojeva u matematici: e, π, i, 1 i 0. Dalje smo se bavili Ojlerovim identitetom i nekim njegovim posljedicama. Treća glava posvećena je logaritamskoj spirali i tu smo istražili neke njene interesantne osobine koje je izdvajaju od drugih krivih. Na-

kon toga u četvrtoj glavi razmatrali smo problem lančanice - visećeg lanca kog je postavio Jakob Bernuli. Njegov brat Johan Bernuli je pokazao vezu između krive visećeg lanca i eksponencijalnih funkcija. Na kraju rada smo predstavili neke interesantne brojeve i formule u kojima se pojavljuje broj e.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 3.10.2023.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Boriša Kuzeljević, docent Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Milica Zigić, vanredni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Ivana Vojnović, docent Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Andrijana Sekulić
AU

Mentor: Milica Žigić, PhD
MN

Title: Euler's number
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2023.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (5/69/15/2/32/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: History of mathematics
SD

Subject/Key words: Euler's number, derivatives and properties of the number e, Euler's equation and identity, Logarithmic spiral, problem of a hanging chain
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: In this master's thesis, we studied Euler's number e, which is defined as the limit of $(1 + 1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, as n tends to infinity. In the introduction of the paper, we began with a historical overview of the life of John Napier and his research that led to the discovery of logarithms. Next, we derived the number e and proved its irrationality and transcendence. In the second chapter, we familiarized ourselves with the most beautiful theorem, Euler's equation, which connects five important numbers in mathematics: e, π, i, 1 and 0. We then delved into Euler's identity and some of its consequences. The third chapter is dedicated to the logarithmic spiral, where we explored some of its interesting properties that set it apart from other curves. Afterwards, in the fourth chapter, we discussed the catenary problem - a hanging chain, posed by Jakob Bernoulli. His brother, Johann Bernoulli, demonstrated the connection between the catenary curve and exponential functions. In the conclusion of the paper, we presented some interesting numbers and formulas in which the number e appears.

Accepted by the Scientific Board on: 3rd October 2023
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Boriša Kuzeljević, PhD, Assistant professor at the Faculty of Sciences in Novi Sad
Mentor: dr Milica Zigić, PhD, Associate professor at the Faculty of Sciences in Novi Sad
Member: dr Ivana Vojnović, PhD, Assistant professor at the Faculty of Sciences in Novi Sad