UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Matija Adam Horvat

O toplotnoj jednačini sa nelinearnom provodljivošću i izvorom toplote

Master rad

Mentor:
doc. dr Srđan Trifunović

Novi Sad, 2023.

Predgovor

> Writing a book is an adventure. To begin with it is a toy and an amusement. Then it becomes a mistress, then it becomes a master, then it becomes a tyrant. The last phase is that just as you are about to be reconciled to your servitude, you kill the monster and fling him to the public.
>
> *Winston Churchill*

Do 20-tih godina XX veka teorija parcijalnih diferencijalnih jednačina je bila matematička disciplina koja se bavila pre svega nalaženjem rešenja jednačina koja su bila C^k funkcije, odnosno posedovali su određenu diferencijabilnost u smislu klasične analize, ovakva rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina danas nazivamo klasičnim rešenjima. Potrebu za promenom perspektive uočili su matematičari koji su se u ovom periodu bavili rešavanjem parcijalnih diferencijalnih jednačina, pre svega u radovima italijanskih matematičara Levija i Tonelija.

Na scenu sredinom 30-tih godina XX veka stupa teorija o slabim rešenjima parcijalnih diferencijalnih jednačina, sa ruskim matematičarom Sergejom Soboljevljim, koji je prvi formalizovao ovakav pogled na parcijalne diferencijalne jednačine, definišu ći nove prostore funkcija koje danas nose njegovo ime i dokazao utapanja između njih i konačno uveo je pojam slabog izvoda i odredio šta znači da je neka funkcija slabo rešenje određenog problema parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Pojam slabih izvoda je dodatno usavršio francuski matematičar Loran Švarc u svom renomiranom radu *La theorie des distributions* iz 1950. godine, uvodeći pojam distribucija koje danas nalaze široku primenu u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina.

U ovom radu potrudiću se da čitaocu približim ovakav *moderan* pogled na parcijalne diferencijalne jednačine, koji su uveli Soboljev i Švarc, prelazeći prvo osnove vektorskih prostora integrabilnih funkcija da bih konačno definisao prostore Soboljeva i na samom kraju, kao krunu celog rada, svu prethodno navedenu teoriju primenio na jedan nelinearan problem.

Nelinearni problemi parcijalnih diferencijalnih jednačina, u trenutku dok ovo pišem su i dalje neistražena oblast u matematici, većinu stvari koje su poznate o parcijanim diferencijalnim jednačinama tiču se linearnih problema, tako četiri najpoznatije i najistraženije jednačine, transportna jednačina, jednačina provođenja toplote, Laplasova jednačina i talasna jednačina, su sve linearne jednačine koje opisuju određene fizičke fenomene.

Ono što je dosta manje istraženo u teoriji jesu nelinearne jednačine, iako se njima mnogo preciznije opisuju fizički principi. Dakle, možemo zamisliti ovo kao jedan kantar, na jedan kraj stavljamo koliko precizno želimo da neki fizički fenomen opišemo na matematički način preko određene jednačine ili sistema jednačina, dok na drugom kraju kantara treba da vagamo koliko je ta jednačina operativna sa stanovišta matematičke teorije i cilj je pronaći adekvatan balans, da jednačina verno opisuje fizički fenomen, a istovremeno da je operativna sa stanovišta matematičke teorije.

U ovom radu bavim se jednim nelinearnim paraboličnim problemom, definišem šta znači biti slabo rešenje za dati problem te potom razmatram postupak traženja slabih rešenja uz određene pretpostavke za početni uslov i dokazujem jedinstvenost tako dobijenog slabog rešenja.

Da bih ovo uspešno učinio, pre svega dajem detaljan pregled matematičke teorije koja je potrebna za rešavanje ovakvog problema, što se može videti u prvih pet glava. U prvoj glavi je dat kratak pregled standardnog univerzitetskog kursa teorije mere i integracije, te su stoga sva tvrđenja navedena bez dokaza.

Druga glava u potpunosti je posvećena Lebegovim prostoimaa, gde je detaljno obrađena teorija Lebegovih prostora i dati su dokazi za većinu tvrđenja, a tvrđenja sa izostavljenim dokazom (zbog težnje da rad ostane kompaktne sadržine) imaju referencu da zainteresovani čitaoc može pronaći dokaz.

U trećoj glavi data je definicija distribucija, bez ulaženja u dubinu teorije, koja je veoma bogata, da bih mogao da uvedem pojam slabog izvoda koji je značajan za dalji tok rada.

Četvrta glava ima, pored naravno samog rešenja problema, centralnu ulogu u ovom radu. Tu sam dao pregled teorije prostora Soboljeva, opet zbog sažetosti formata prešao sam samo deo veoma bogate teorije koji mi bio potreban za primenu na rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Peta glava bavi se teorijom fiksne tačke, dokazujem teoremu o fiksnoj tački koja je potrebna za rešavanje problema koji sam obradio.

Konačno, kruna celog rada je šesta i poslednja glava, kažu da najbolje se ostavlja za kraj, pa sam se toga i držao. Glavni deo ovog rada jeste rešavanje jednog nelinearnog paraboličnog problema, koji je jedna varijacija na standardnu, svima dobro poznatu, toplotnu jednačinu. Definisao sam šta znači da je neka funkcija slabo rešenje jednačine koju sam razmatrao, te sam demonstrirao jedan mogući pristup za rešavanje nelinearnih paraboličnih jednačina na primeru date jednačine, te konačno sam argumentovao i da je slabo rešenje kako sam ga konstruisao datim postupkom, nužno jedinstveno.

* * *

Zahvaljujem svom ocu i majci koji su mi pružali podršku, uvek bili tu za mene i verovali u mene kroz sve ove godine i uvek ću im biti zahvalan što su od mene napravili čoveka koji sam danas.

Takođe se zahvaljujem svom mentoru na svim konstruktivnim kritikama i savetima koje mi udelio, kao i na strpljenju koje je imao da me sasluša.

Konačno, zahvaljujem svima onima koje sam tokom godina upoznao i sreo i koji su uticali pozitivno na moj put ka napretku.

U Novom Sadu 2023. godine
Matija Adam Horvat

Sadržaj

Glava 1

Uvod

U uvodnom delu dajemo kratak pregled osnovnih definicija i tvrđenja teorije mere, kao i Lebegovog[1] integrala koji je esencijalan pojam u daljem toku rada. Dokazi svih ovih tvrđenja se obrađuju u standardnom univerzitetskom kursu teorije mere i mogu se pronaći u [5].

1.1 Osnovi teorije mere

Centralni pojam teorije mere jeste pojam σ-algebre i pojam merljivih skupova.

Definicija 1.1. *Kolekcija $\mathcal{A}$ podskupova skupa X naziva se σ-algebra ukoliko zadovoljava uslove*

(i) $X, \varnothing \in \mathcal{A}$

(ii) ako $A, B \in \mathcal{A}$ *onda* $A \backslash B \in \mathcal{A}$

(iii) ako $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ *onda* $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Dakle σ-algebra je kolekcija podskupova nekog skupa koja sadrži ceo skup i prazan skup i koja je zatvorena za prebrojive unije i konačne razlike. Za svaku kolekciju skupova postoji najmanja σ-algebra koja je sadrži.

Teorema 1.1. *Neka je X proizvoljan skup i $\mathcal{F}$ familija podskupova skupa X. Tada postoji jedinstvena minimalna σ-algebra koja sadrži familiju $\mathcal{F}$ u oznaci $\sigma(\mathcal{F})$.*

Jedna značajna σ-algebra je ona σ-algebra koja u sebi sadrži topologiju određenog prostora, takvu σ-algebru nazivamo Borelova[2] σ-algebra.

Definicija 1.2. *Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}^n$ u oznaci $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene skupove.*

Sada uvodimo pojam mere skupa.

[1] Henri Léon Lebesgue (1845 - 1941) - francuski matematičar
[2] Émile Borel (1871 - 1956) - francuski matematičar

Definicija 1.3. *Prebrojivo aditivna funkcija* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ *naziva se mera na* σ*-algebri* $\mathcal{A}$.

Definicija 1.4. *Uređena trojka* $(X, \mathcal{A}, \mu)$*, gde je* X *proizvoljan skup,* $\mathcal{A}$ σ*-algebra na* X *i* μ *mera, naziva se prostor mere.*

Sada definišemo Lebegovu meru na skupu $\mathbb{R}^n$, Lebegova mera je u suštini uopštenje zapremine skupa iz prostora $\mathbb{R}^3$ na prostor $\mathbb{R}^n$. Lebegovu meru prvo definišemo na paralelopipedima čije su stranice paralelne koordinatnim osama te ovu meru proširimo na sve skupove na koje je to moguće uraditi.

Definicija 1.5. *Neka je* $B := \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$. *Definišemo* $\mathrm{vol}(B) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$. *Za proizvoljan skup* $A \in \mathbb{R}^n$ *definišemo spoljnu meru*

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{B \in \mathcal{U}} \mathrm{vol}(B) : \mathcal{U} \textit{ je prebrojiv pokrivač od } A \textit{ takav da } B = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \right\}.$$

Za skup A *kažemo da je merljiv po Lebegu ako za svaki skup* $S \subset \mathbb{R}^n$ *važi*

$$\lambda^*(S) = \lambda^*(S \cap A) + \lambda^*(S \backslash A).$$

Kolekcija skupova koji su merljivi po Lebegu čine σ*-algebru i konačno definišemo* $\lambda(A) := \lambda^*(A)$ *za svaki Lebeg merljiv skup* A.

Dalje ćemo podrazumevati da su svi integrali dati kao integrali po Lebegovoj meri na $\mathbb{R}^n$ za odgovarajuće n.

1.2 Merljive funkcije

U ovom poglavlju uvodimo definiciju merljive funkcije i dajemo osnovna tvrđenja vezana za merljive funkcije. Pomoću njih definišemo Lebegov integral što je pojam koji će biti od esencijalnog značaja u daljem toku rada.

Definicija 1.6. *Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *prostor sa* σ*-algebrom. Funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$ *je merljiva u odnosu na* $\mathcal{A}$ *ako važi* $\{x : f(x) < c\} \in \mathcal{A}$ *za sve* $c \in \mathbb{R}$.

Jedan ekvivalentan uslov merljivosti dat je preko Borelove σ-algebre na $\mathbb{R}$.

Teorema 1.2. *Funkcija* f *je merljiva u odnosu na* σ*-algebru* $\mathcal{A}$ *ako i samo ako* $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *za sve skupove* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Navodimo osnovne osobine koje poseduju merljive funkcije.

Tvrđenje 1.3 (Osobine merljivih funkcija)**.** *Neka su funkcije* f, g *i* f_n *gde* $n \in \mathbb{N}$ *sve merljive u ondnosu na* σ*-algebru* $\mathcal{A}$. *Tada*

(i) Za svaku Borelovu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija* $\varphi \circ f$ *je merljiva u odnosu na* $\mathcal{A}$

(ii) *Za sve* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *funkcija* $\alpha f + \beta g$ *je merljiva u odnosu na* $\mathcal{A}$

(iii) *Funkcija* fg *je merljiva u odnosu na* $\mathcal{A}$

(iv) *Ako je* $g \neq 0$ *onda je funkcija* f/g *merljiva u odnosu na* $\mathcal{A}$

(v) *Ako postoji konačna granična vrednost* $f_\infty(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *za sve* x *onda je funkcija* f_∞ *merljiva u odnosu na* $\mathcal{A}$

(vi) *Ako su funkcije* $\sup\limits_n f_n$ *i* $\inf\limits_n f_n$ *konačne za svako* x *onda su merljive u odnosu na* $\mathcal{A}$

Definišemo pojam jednostavnih funkcija na koje ćemo se vratiti prilikom definisanja integrala.

Definicija 1.7. *Neka je* $\mathcal{A}$ σ*-algebra na skupu* X *i neka su* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *disjunktni merljivi skupovi i* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. *Jednostavna funkcija je funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$ *oblika*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(x),$$

gde je funkcija I_A *indikator skupa* A.

Značaj jednostavnih funkcija je u tome što one aproksimiraju merljive funkcije.

Tvrđenje 1.4. *Neka je* $\mathcal{A}$ σ*-algebra na skupu* X. *Tada za svaku ograničenu* $\mathcal{A}$*-merljivu funkciju* f *postoji niz jednostavnih funkcija* f_n *koji konvergira ka* f *uniformno na* X. *Štaviše, možemo birati da niz bude rastući.*

Navodimo jedan od značajnijih rezultata teorije mere, čuvenu teoremu Egorova[3] koja se tiče uniformne konvergencije niza merljivih funkcija.

Teorema 1.5 (Egorov). *Neka je* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor sa merom* μ *i neka je* f_n *niz* μ*-merljivih funkcija takvih da skoro svuda postoji konačna granična vrednost* $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. *Tada za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji skup* $X_\varepsilon \in \mathcal{A}$ *takava da* $\mu(X \backslash X_\varepsilon) < \varepsilon$ *i da niz funkcija* f_n *konvergira uniformno ka* f *na* X_ε.

Još jedna značajna teorema teorije mere jeste teorema Luzina[4] čiji rezultat nam omogućava aproksimaciju merljivih funkcija neprekidnim funkcijama na kompaktnim skupovima proizvoljno velike mere.

Teorema 1.6 (Luzin). *Neka je* $E \subset \mathbb{R}^n$ *skup merljiv po Lebegu. Funkcija* $f : E \to \mathbb{R}$ *je merljiva ako i samo ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji kompaktan skup* $K_\varepsilon \subset E$ *i neprekidna funkcija* f_ε, *tako da* $\lambda(E \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$ *i* $f = f_\varepsilon$ *na* K_ε.

[3] Дми́трий Фёдорович Его́ров (1869 - 1931) - ruski matematičar
[4] Никола́й Никола́евич Лу́зин (1883 - 1950 - ruski matematičar)

1.3 Lebegov integral

U ovom poglavlju definišemo i dajemo osnovne osobine Lebegovog integrala koji je centralni objekat u izučavanju Lebegovih prostora L^p, a samim tim i prostora Soboljeva[5] $W^{1,p}$.

Razmatramo prvo slučaj nenegativnih jednostavnih funkcija. Neka je $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(x)$, za neke $a_i \geq 0$ i $A_i \subset \mathbb{R}^n$ merljive po Lebegu. Tada definišemo Lebegov integral jednostavne funkcije f

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx := \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(A_i),$$

gde λ označava Lebegovu meru na $\mathbb{R}^n$.

Definišemo sada integral za proizvoljnu merljivu funkciju.

Definicija 1.8. *Neka je f λ-merljiva funkcija, gde λ označava Lebegovu meru na $\mathbb{R}^n$ i neka je $f(x) \geq 0$ skoro svuda. Definišemo*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx := \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx : \varphi \geq 0 \text{ jednostavna funkcija i } \varphi(x) \leq f(x) \text{ skoro svuda}\right\}$$

Ako je ova vrednost konačna za f kažemo da je integrabilna. U opštem slučaju za funkciju f kažemo da je integrabilna ako su obe funkcije f^+ i f^- integrabilne i definišemo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x)\,dx.$$

U nastavku slede osnovne osobine Lebegovog integrala

Tvrđenje 1.7. *Neka je f_n niz jednostavnih funkcija takvih da da je $f_n \geq 0$ i da važi $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ skoro svuda za sve $n \in \mathbb{N}$ i da su integrali funkcija f_n uniformno ograničeni. Tada je funkcija $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ integrabilna i važi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\,dx.$$

Tvrđenje 1.8 (Osobine integrala)**.** *Neka su funkcije f i g integrabilne. Tada*

(i) $|f|$ je integrabilna i važi

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx.$$

(ii) Ako je $f \leq g$ skoro svuda onda je

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx.$$

[5] Сергéй Львóвич Сóболев (1908 - 1989) - sovjetski matematičar

(iii) Za svaki merljiv skup $A \subset \mathbb{R}^n$ je funkcija fI_A integrabilna i definišemo

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) I_A(x)\,dx.$$

(iv) Ako je $f(x) \geq 0$ za skoro svako x onda je

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \geq 0.$$

(v) Ako je $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\;dx = 0$ onda je $f = 0$ skoro svuda

(vi) Za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ funkcija $\alpha f + \beta g$ je integrabilna i važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)\;dx = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx + \beta \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx.$$

Tvrđenje 1.9. *Svaka merljiva ograničena funkcija f je integrabilna na skupu $A \subset \mathbb{R}^n$ konačne Lebegove mere i važi*

$$\left| \int_A f(x)\,dx \right| \leq \sup_{x \in A} |f(x)|\,\lambda(A).$$

Značajna osobina koju poseduje Lebegov integral jeste apsolutna neprekidnost.

Teorema 1.10 (Apsolutna neprekidnost Lebegovog integrala)**.** *Neka je f integrabilna funkcija. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da*

$$\textit{ako } \lambda(A) < \delta \textit{ onda } \int_A |f(x)|\;dx < \varepsilon.$$

Slede najznačajnije teoreme o Lebegovom integralu koje se tiču prolaska granične vrednosti kroz integral.

Teorema 1.11 (Bepo Levi[6] teorema o monotonoj konvergenciji)**.** *Neka je f_n niz integrabilnih funkcija takvih da je $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ za skoro svako x za svako $n \in \mathbb{N}$. Ako je*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\,dx < \infty$$

onda je funkcija $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ skoro svuda konačna, integrabilna i važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\,dx.$$

[6]Beppo Levi (1875 - 1961) - italijanski matematičar

Teorema 1.12 (Fatuova[7] lema). *Neka je f_n niz nenegativnih integrabilnih funkcija koji konvergira ka funkciji f skoro svuda i neka*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\,dx \leq K < \infty,$$

za neko $K > 0$. Tada je funkcija f integrabilna i važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \leq K$$

štaviše

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\,dx.$$

Posledica 1.1. *Neka je f_n niz integrabilnih funkcija i neka je g integrabilna funkcija.*

(i) Ako je $f_n \geq g$ skoro svuda i

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\,dx < \infty$$

onda je funkcija $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ integrabilna i važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\,dx.$$

(ii) Ako je $f_n \leq g$ skoro svuda i

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\,dx > -\infty$$

onda je funkcija $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ integrabilna i važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\,dx.$$

Teorema 1.13 (Lebegova teorema o dominantnoj konvergnciji). *Neka niz integrabilnih funkcija f_n konvergira skoro svugde funkciji f. Ako postoji integrabilna funkcija Φ takva da*

$$|f_n(x)| \leq |\Phi(x)| \text{ skoro svuda za svako } n \in \mathbb{N}$$

onda je funkcija f integrabilna i važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\,dx,$$

dodatno,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_n(x)|\,dx = 0.$$

[7] Pierre Fatou (1878 - 1929) - francuski matematičar

1.4 Korisne teoreme opšteg karaktera

U ovom odeljku navodimo teoreme opšteg karaktera koje se obrađuju na standardnim kursevima običnih diferencijalnih jednačina i funkcionalne analize, a koje su nam potrebne u nastavku.

Teorema 1.14 (Nejednakost Gronvola[8]). *(i) (Diferencijalni oblik) Neka $u \in C(0,T)$ i u diferencijabilna na $(0,T)$ zadovoljava nejednakost*

$$\frac{du}{dt} \leq a(t)u + b(t) \quad na\ (0,T),$$

gde su $a, b \in L^1(0,T)$. Tada važi nejednakost

$$u(t) \leq e^{\int_0^t a(s)ds} u(0) + \int_0^t b(s) e^{\int_s^t a(r)dr} ds$$

za sve $t \in (0,T)$.

(ii) (Integralni oblik) Neka $u \in C(0,T)$ zadovoljava nejednakost

$$u(t) \leq u(0) + \int_0^t a(s)u(s)ds + \int_0^t b(s)ds \quad na\ (0,T),$$

gde su $a, b \in L^1(0,T)$ i dodatno važi $a \geq 0$. Tada važi

$$u(t) \leq u(0) e^{\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t b(s) e^{\int_s^t a(r)dr} ds$$

za sve $t \in (0,T)$.

Sledi jedan od najvažnijih rezultata funkcionalne analize koji nam omogućava traženje relativno kompaktnih podskupova skupa neprekidnih preslikavanja između metričkih, odnosno vektorskih prostora.

Teorema 1.15 (Arzela[9]-Askoli[10]). *Neka je (X,d) kompaktan metrički prostor i $(E, \|\cdot\|_E)$ Banahov prostor. Neka je $A \subset C(X:E)$ skup neprekidnih preslikavanja iz X u E koji zadovoljava sledeće osobine*

(i) A je kolekcija uniformno ekvineprekidnih funkcija, tj.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X\ d(x,x') < \delta \implies \forall f \in A\ \|f(x) - f(x')\|_E < \varepsilon.$$

(ii) Za sve $x \in X$ zatvaranje skupa $\{f(x) : f \in A\}$ je kompaktan skup.

Tada je skup A relativno kompaktan.

[9]Cesare Arzelà (1847 - 1912) - italijanski matematičar
[10]Giulio Ascoli (1843 - 1896) - italijanski matematičar

Još jedan veoma značajan rezultat funkcionalne analize koji se tiče kompaktnih skupova u određenim slabim topologijama na Banahovim prostorima jeste čuvena teorema Banah[11]-Alaoglu[12].

Teorema 1.16 (Banah-Alaoglu). *Neka je X Banahov prostor. Tada je zatvorena jedinična lopta u X', $B = \{x' \in X' : \|x'\|_{X'} \leq 1\}$ *-slabo kompaktan skup, gde je sa X' označen topološki dual prostora X.*

[11]Stefan Banach (1892 - 1945) - poljski matematičar
[12]Leonidas Alaoglu (1914 - 1981) - američki matematičar

Glava 2

Lebegovi prostori $L^p(\Omega)$

Lebegove prostore čini kolekcija funkcija koje su u određenom smislu integrabilne, tako je L^1 prostor funkcija koje su integrabilne, L^2 prostor funkcija čiji kvadrat je integrabilna funkcija i tako redom za sve $p \geq 1$.

U nastavku dajemo detaljno definiciju i osnovne osobine koje poseduju L^p prostori.

2.1 Definicija i osnovne osobine

Definicija 2.1. *Neka je $1 \leq p < \infty$, Lebegov prostor $L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je kolekcija svih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$ za koje važi*

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

Lebegov prostor $L^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je kolekcija svih funkcija koje su ograničene skoro svuda na Ω.

Od velikog značaje nam je činjenica da ovakva kolekcija funkcija čini jedan vektorski prostor sa poljem skalara $\mathbb{R}$, što nam omogućava da sabiramo integrabilne funkcije i ostanemo i dalje u istoj kolekciji.

Tvrđenje 2.1. *$L^p(\Omega)$ je realan vektorski prostor, za $1 \leq p \leq \infty$.*

Dokaz. Tvrđenje dokazujemo za slučaj $1 \leq p < \infty$, dok tvrđenje za $p = \infty$ sledi trivijalno. Primetimo da važi $0 \in L^p(\Omega)$. Neka važi $f, g \in L^p(\Omega)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Dokažimo da tada važi $\alpha f \in L^p(\Omega)$ kao i $f + g \in L^p(\Omega)$.

$\underline{1^\circ\ \alpha f \in L^p(\Omega)}$

$$\int_\Omega |\alpha f(x)|^p \, dx = |\alpha|^p \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

$\underline{2^\circ\ f + g \in L^p(\Omega)}$ Prvo, primetimo da iz konveksnosti funkcije $|\cdot|^p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sledi da za sve $a, b \in \mathbb{R}$ važi

$$\left| \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \right|^p \leq \frac{1}{2}\, |a|^p + \frac{1}{2}\, |b|^p \, .$$

Množenjem sa 2^p dobijamo da važi

$$|a+b|^p \leq 2^{p-1}\left(|a|^p + |b|^p\right).$$

Sada izvodimo zaključak

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f+g|^p \, dx &\leq \int_\Omega 2^{p-1}\left(|f|^p + |g|^p\right) dx \\ &= 2^{p-1}\int_\Omega \left(|f|^p + |g|^p\right) dx < \infty.\end{aligned}$$

Dakle, $L^p(\Omega)$ zaista jeste vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. $\square$

Kroz seriju tvrđenja pokazujemo da je L^p normiran i kompletan realan vektorski prostor.

Definicija 2.2. *Preslikavanje* $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *definišemo sa*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

za svako $p \in [1, \infty)$. *Za* $p = \infty$ *definišemo preslikavanje* $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)} : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *sa*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| = \inf\left\{\sup_{x\in\Omega\setminus N} |f(x)| : \lambda(N) = 0\right\}.$$

Dokažimo prvo jednu tehničku lemu koja će nam biti potrebna za dokaz narednog tvrđenja.

Lema 2.1. *Neka su* $a, b > 0$, $1 < p < \infty$ *i* q *takvo da važi* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Tada važi:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Dokaz. Funkcija ln je konkavna, tj. $-\ln$ je konveksna funkcija te važi da je

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln\left(a^p\right) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln a + lnb = \ln(ab).$$

Kako je još ln monotona funkcija to važi da je $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$. $\square$

Nejednakost koju je dokazao Helder[1] 1889. godine predstavlja jednu od najznačajnijih nejednakosti vezanih za teoriju integracije i više puta u toku radu ćemo se podsećati date nejednakosti.

[1] Ludwig Otto Hölder (1859 - 1937) - nemački matematičar

Teorema 2.2 (Nejednakost Heldera). *Neka je* $1 < p < \infty$ *i* q *takvo da važi* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *i neka* $f \in L^p$ *i* $g \in L^q$*. Tada* $fg \in L^1$ *i važi* $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Dokaz. Koristeći prethodnu lemu dobijamo da važi

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{L^q(\Omega)}}. \tag{2.1.1}$$

Integracijom (2.1.1) nad Ω i koristeći činjenicu da je Lebegov integral monoton dobijamo da važi

$$\int_\Omega \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}\, dx \leq \int_\Omega \left(\frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{L^q(\Omega)}} \right) dx.$$

Primetimo da je desna strana jednačine jednaka 1 te dobijamo

$$\int_\Omega |f(x)|\, |g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

□

Sledeća nejednakost, nam obezbeđuje da su L^p prostori normirani vektorski prostori, a kasnije ćemo dokazati i da su kompletni.

Teorema 2.3 (Nejednakost Minkovskog[2]). *Neka* $p \in [1, \infty)$ *i* $f, g \in L^p$*. Tada* $f + g \in L^p$ *i važi:*

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dokaz. Za $p = 1$ tvrđenje trivijalno važi. Primetimo da važi

$$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x) + g(x)|^{p-1} \left(|f(x)| + |g(x)| \right).$$

Kako $|f+g|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}} = L^{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}}$, to imamo prema nejednakosti Heldera

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)|\, dx \leq &\left(\int_\Omega |f(x) + g(x)|^p\, dx \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &+ \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)|\, dx \leq &\left(\int_\Omega |f(x) + g(x)|^p\, dx \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &+ \left(\int_\Omega |g(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

[2]Hermann Minkowski (1864 - 1909) - nemački matematičar

Dakle, imamo sada

$$\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,dx \le \left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Deljenjem obe strane jednačina sa $\left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1-\frac{1}{p}}$ dobijamo

$$\left(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Tvrđenje 2.4. *Preslikavanje* $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *je norma na* $L^p(\Omega)$ *za sve* $1 \le p \le \infty$.

Dokaz. $1^\circ\ p \neq \infty$ Homogenost sledi direktno iz osobina Lebegovog integrala, a nejednakost trougla iz nejednakosti Minkovskog.
$2^\circ\ p = \infty$ Homogenost i nejednakost trougla slede direktno iz osobina esncijalnog supremuma. □

Dokažimo sada da Lebegovi prostori poseduju još jednu značajnu osobinu, tačnije pokažimo da su prostori L^p kompletni normirani prostori.

Teorema 2.5. $L^p(\Omega)$ *je Banahov prostor za svako* $1 \le p \le \infty$.

Dokaz. $1^\circ\ p \neq \infty$ Neka je $\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ Košijev[3] niz u prostoru $L^p(\Omega)$.
Odaberimo podniz datog niza $\langle f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\rangle$ takav da je zadovoljeno
$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\| \le 2^{-k}$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Posmatrajmo rastući niz funkcija $g_m(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^m \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right|$, kao i niz funkcija
$f'_m = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^m \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right)$. Primetimo da za svako $m \in \mathbb{N}$, po nejednakosti trougla važi da je $|f'_m(x)| \le g_m(x)$ tj. ako dokažemo da $\|g_\infty\|_p < \infty$ odatle će slediti da i $\|f'_\infty\|_p \le \|g_\infty\|_p < \infty$ odnosno
$f'_\infty \in L^p$. Naime, po teoremi o monotonoj konvergenciji imamo da je

$$\begin{aligned}
\|g_\infty\|_p &= \lim_{m\to\infty} \|g_m\|_p \\
&\le \lim_{m\to\infty}\left(\|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^m \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p\right) \\
&\le \lim_{m\to\infty}\left(\|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^m 2^{-k}\right) < \infty.
\end{aligned}$$

[3]Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) - francuski matematičar

Dakle, $g_\infty \in L^p$, pa samim tim i $f'_\infty \in L^p$. Definišimo sada $f := f'_\infty$. Primetimo da je $f'_m = f_{n_m}$ jer je suma teleskopirajuća te važi $f_{n_m}(x) \to f(x)$ za skoro svako x. Dokažimo da ova konvergencija takođe važi u normi prostora L^p.

$$\begin{aligned}|f(x) - f'_m(x)|^p &\leq (|f(x)| + |f'_m(x)|)^p \\ &\leq 2^{p-1}\left(|f(x)|^p + |f'_m(x)|^p\right) \\ &\leq 2^p\,|g_\infty(x)|\,.\end{aligned}$$

Sada možemo primeniti Lebegovu teoremu o dominantnoj konvergenciji na $|f(x) - f'_m(x)|^p$ te dobijamo da $\|f - f_{n_m}\|_p \to 0$ kada $m \to \infty$. Konačno, koristeći činjenicu da je niz Košijev dobijamo, za dato $\varepsilon > 0$ i n dovoljno veliko

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_m}\|_p + \|f_{n_m} - f\|_p < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Dakle, niz $\langle f_n \, : n \in \mathbb{N}\rangle$ jeste konvergentan i njegova granica je u prostoru L^p.
2° $p = \infty$ Ako je $\langle f_n \, : n \in \mathbb{N}\rangle$ Košijev niz u prostoru $L^\infty(\Omega)$ onda uniformno konvergira na skupu $\Omega\backslash N$, gde je N skup mere nula, te je granica niza ograničena funkcija skoro svuda te je u prostoru L^∞. $\square$

Za određene vrednosti eksponenta su L^p prosotri separabilni, naime važi

Teorema 2.6. *Skup $C_0(\Omega)$ je gust u $L^p(\Omega)$ za $1 \leq p < \infty$.*

Dokaz. Dokazujemo tvrđenje iz dva koraka, prvo pokazujemo da je skup $S := \{s : \Omega \to \mathbb{R} : s \text{ jednostavna, merljiva i } \mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty\}$ gust u $L^p(\Omega)$. Očigledno, $S \subset L^p(\Omega)$. Neka je $f \in L^p(\Omega)$ i bez umanjenja opštosti neka je $f \geq 0$. Tada postoji rastući niz jednostavnih merljivih funkcija s_n takvih da $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = f$. Dalje, kako je $s_n \geq 0$ imamo da važi $|f - s_n|^p \leq |f|^p$, a kako $f \in L^p$ to je $|f| \in L^1$ imamo po Lebegovoj teoremi o dominantnoj konvergenciji da

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f - s_n|^p = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |f - s_n|^p = 0.$$

Dakle, $||s_n - f||_p \to 0$. Dokažimo sada da je $C_0(\Omega)$ gust u S. Neka $s \in S$ i $\varepsilon > 0$, tada po teoremi Luzina (Teorema 1.6) postoji funkcija $g \in C_0(\Omega)$ takva da važi $|g| \leq ||s||_\infty$ i $\mu(\{x \in \Omega : s(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$. Sada imamo

$$\begin{aligned}||g - s||_p^p &= \int_\Omega |g - s|^p \\ &= \int_{g\neq s} |g - s|^p \\ &\leq \int_{g\neq s} (|g| + |s|)^p \\ &\leq \int_{g\neq s} (\|s\|_\infty + \|s\|_\infty)^p \\ &< 2^p\,\|s\|_\infty^p\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Kako je ε birano proizvoljno to kada $\varepsilon \to 0$ dobijamo da je $C_0(\Omega)$ gust u S koji je sam gust u $L^p(\Omega)$ čime je tvrđenje dokazano. $\square$

Posledica 2.1. *Za $1 \leq p < \infty$, prostor $L^p(\Omega)$ je separabilan.*

Dokaz. Sledi iz činjenice da je $C_0(\Omega)$ seprarabilan. $\square$

2.2 Konvolucija

Definišemo operaciju konvolucije koja će nam poslužiti da aproksimiramo integrabilne funkcije glatkim funkcijama, primenjujući molifikaciju.

Definicija 2.3. *Konvolucija funkcija u i v data je preko integrala*

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy.$$

Iz definicije sledi da je konvolucija komutativna operacija, a po nejednakosti Heldera sledi da možemo garantovati dobru definisanost ako $u \in L^p$, a $v \in L^{p'}$, ovo takođe važi i za $u \in L^1$ i $v \in L^\infty$.

2.3 Aproksimacije glatkim funkcijama

Elemente L^p prostora možemo aproksimirati proizvoljno precizno sa glatkim funkcija i uz dodatne pretpostavke na domen možemo čak i tvrditi da te funkcije imaju kompaktan nosač.

Definicija 2.4. *Neka je J nenegativna realna funkcija takva da $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ koja zadovoljava osobine*

(i) $J(x) = 0$ *za* $|x| \geq 1$;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} J(x)\, dx = 1.$

Za $\varepsilon > 0$ definišemo funkciju $J_\varepsilon = \varepsilon^{-n} J\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$. Tada funkcija J_ε zadovoljava uslove

(i) $J_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $J_\varepsilon(x) = 0$ *za* $|x| \geq \varepsilon$;

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x)\, dx = 1.$

Funkciju koja zadovoljava date uslove nazivamo molifajer, a konvoluciju

$$J_\varepsilon * u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)u(y)dy$$

nazivamo regularizacija funkcije u.

Funkcija koja nam može poslužiti kao molifajer je na primer

$$J(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

gde je C konstanta koju biramo tako da važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} J(x)\, dx = \int_{B_1(0)} J(x)\, dx = 1.$$

Teorema 2.7. *Neka je u funkcija definisana na $\mathbb{R}^n$ koja je identitički jednaka nuli izvan skupa Ω.*

(i) Ako $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ onda $J_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(ii) Ake $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ i važi $\operatorname{supp}(u) \Subset \Omega$ onda $J_\varepsilon * u \in C_0^\infty(\Omega)$ ako je $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(u), \partial\Omega)$;

(iii) Ako $u \in C(\Omega)$ i $G \Subset \Omega$ onda $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon * u(x) = u(x)$ i ova konvergencija je uniformna na G;

(iv) Ako $u \in L^p(\Omega)$ i $p < \infty$ onda $J_\varepsilon * u \in L^p(\Omega)$ i važi $\|J_\varepsilon * u\|_p \leq \|u\|_p$ i $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \|J_\varepsilon * u - u\|_p = 0$.

Dokaz. *(i)* Tvrđenje direktno sledi iz jednačine

$$\begin{aligned} D^\alpha J_\varepsilon * u(x) &= D^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} u(y) J_\varepsilon(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) D^\alpha J_\varepsilon(x-y) dy \\ &= u * D^\alpha J_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

(ii) Sledi iz činjenice da je $\operatorname{supp}(u * J_\varepsilon) \subset \operatorname{supp}(u) + \overline{B_\varepsilon(0)}$.

(iii) Neka je G proizvoljan kompaktan podskup od Ω. Kako je G kompaktan, postoji $r > 0$ tako da je $G \subset \overline{B_r(0)}$. Dalje, kako je u neprekidna funkcija, ona je i uniformno neprekidna na kompaktnom skupu $\overline{B_{r+\varepsilon}(0)}$, tj. za svako $\eta > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da kada važi $|x - y| < \delta$ onda mora da važi $|u(x) - u(y)| < \eta$. Neka je $x \in G$ i $\eta > 0$ proizvoljno. Onda biramo $\varepsilon \in (0, \delta)$

i važi

$$\begin{aligned}
|J_\varepsilon * u(x) - u(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) J_\varepsilon(y) dy - u(x) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) J_\varepsilon(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} u(x) J_\varepsilon(y) dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y) - u(x)| \, J_\varepsilon(y) dy \\
&= \int_{\overline{B_\varepsilon(0)}} |u(x-y) - u(x)| \, J_\varepsilon(y) dy \\
&< \int_{\overline{B_\varepsilon(0)}} \eta J_\varepsilon(y) dy = \eta.
\end{aligned}$$

Poslednja nejednakost važi jer $x \in \overline{B_r(0)} \subset \overline{B_{r+\varepsilon}(0)}$ i $x - y \in \overline{B_{r+\varepsilon}(0)}$ i $\varepsilon < \delta$. Kako je η bilo proizvoljno time po definiciji sledi konvergencija.

(iv) Ako $u \in L^p(\Omega)$ onda važi

$$\begin{aligned}
|J_\varepsilon * u(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(y) \, |u(x-y)| \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (J_\varepsilon(y))^{\frac{p-1}{p}} \, (J_\varepsilon(y))^{\frac{1}{p}} \, |u(x-y)| \, dy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(y) dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(y) \, |u(x-y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(y) \, |u(x-y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

gde smo u pretposlednjoj jednakosti koristili nejednakost Heldera. Sada izvodimo zaključak

$$\begin{aligned}
\|J_\varepsilon * u\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_\Omega |J_\varepsilon * u(x)|^p \, dx \\
&\leq \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(y) \, |u(x-y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}p} \, dx \\
&= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(y) \, |u(x-y)|^p \, dy \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_\Omega J_\varepsilon(y) \, |u(x-y)|^p \, dx dy = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p .
\end{aligned}$$

Dokažimo sada konvergenciju u normi prostora $L^p(\Omega)$. Neka je $\eta > 0$ dato. Kako je skup $C_0(\Omega)$ gust u $L^p(\Omega)$, biramo $v \in C_0(\Omega)$ takvo da $\|u - v\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\eta}{3}$. Prema gornjem razmatranju imamo i da $\|J_\varepsilon * u - J_\varepsilon * v\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\eta}{3}$. Za ε dovoljno malo je nosač od $J_\varepsilon * v - v$ ograničen te po (iii) $J_\varepsilon * v \to v$ uniformno te za dovoljno malo ε važi $\|J_\varepsilon * v - v\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\eta}{3}$. Sumirajući imamo

$$\|J_\varepsilon * u - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|J_\varepsilon * u - J_\varepsilon * v\|_{L^p(\Omega)} + \|J_\varepsilon * v - v\|_{L^p(\Omega)} + \|u - v\|_{L^p(\Omega)} < \eta,$$

čime je dokaz završen.

$\square$

Posledica 2.2. *Skup $C_0^\infty(\Omega)$ je gust u $L^p(\Omega)$ za $p < \infty$.*

Naredna teorema je veoma značajna u smislu da ako nađemo gornju i donju granicu za eksponente L^p prostora u kojima leži neka funkcija možemo tvrditi i da leži u svim prostorima sa eksponentima između najmanjeg i najvećeg.

Teorema 2.8 (Interpolaciona nejednakost)**.** *Neka je $1 \leq p < q < r \leq \infty$ i neka važi*

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r}$$

za neko $\theta \in (0,1)$. Ako $u \in L^p \cap L^r$, onda $u \in L^q$ i važi

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\theta \|u\|_r^{1-\theta}.$$

Dokaz. Postavimo $s := \frac{p}{\theta q}$. Primetimo da je $s \geq 1$ i da je $1 - \frac{1}{s} = \frac{q(1-\theta)}{r}$ te je Helderov par od s, $s' = \frac{r}{q(1-\theta)}$. Sada po nejednakosti Heldera

$$\begin{aligned}
\|u\|_q^q &= \int_\Omega |u(x)|^{\theta q} |u(x)|^{(1-\theta)q}\, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |u(x)|^{\theta q s}\, dx\right)^{1/s} \left(\int_\Omega |u(x)|^{(1-\theta)qs'}\, dx\right)^{1/s'} \\
&= \|u\|_p^{\theta q} \|u\|_r^{(1-\theta)q}.
\end{aligned}$$

$\square$

2.4 Duali prostora $L^p(\Omega)$

Teorema koja nam opisuje duale prostora L^p jeste čuvena Risova[4] teorema o reprezentaciji, za dokaz pogledati [5] ili [6].

Teorema 2.9 (Risova teorema o reprezentaciji)**.** *(i) Neka je $1 < p < \infty$ i neka $F \in (L^p(\Omega))'$. Tada postoji $v \in L^{p'}(\Omega)$ takvo da za sve $u \in L^p(\Omega)$ važi*

$$F(u) = F_v(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx.$$

Štaviše, $\|v\|_{p'} = \|F\|$, tj. $(L^p(\Omega))'$ je izometrički izomorfan $L^{p'}(\Omega)$.

(ii) Neka je $p = 1$ i $F \in (L^1(\Omega))'$. Tada postoji $v \in L^\infty(\Omega)$ takvo da za sve $u \in L^1(\Omega)$ važi

$$F(u) = F_v(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx.$$

Štaviše, $\|v\|_\infty = \|F\|$, tj. $(L^1(\Omega))'$ je izometrički izomorfan $L^\infty(\Omega)$.

[4]Riesz Frigyes (1880 - 1956) - mađarski matematičar

□

Kao direktnu posledicu dobijamo refleksivnost prostora L^p za $p \notin \{1, \infty\}$

Teorema 2.10. *Prostori $L^p(\Omega)$ su refleksivni za $1 < p < \infty$.*

Dokaz. Sledi po Risovoj teoremi o reprezentaciji za prostore L^p za $p \notin \{1, \infty\}$. □

Tvrđenje ovog tipa ne važi za L^1 prostore, naime on nije refleksivan jer je njegov dual prostor L^∞, a dual prostora L^∞ je širi prostor od prostora L^1.

Glava 3

Distribucije

Uopštene funkcije ili distribucije (poznate i kao Švarcove[1] distribucije) uvodimo radi mogućnosti traženja izvoda funkcija koje nisu glatke, pa čak ni neprekidne. Ovakav tip izvoda, koji uvodimo nazvaćemo slabim izvodom.

Ideja je sledeća, posmatrajmo $C^1(\mathbb{R}^n)$ funkciju f i proizvoljnu $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ funkciju φ. Tada primenom parcijalne integracije imamo da važi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx,$$

gde je član bez integrala jednak nuli, budući da φ ima kompaktan nosač. Naš cilj je da ovakvo ponašanje izvoda prenesemo na funkcije koje nisu nužno klase C^1 niti neprekidne. Da bismo to mogli precizno definisati potreban nam je pojam distribucija (uopštenih funkcija).

3.1 Prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ je prostor beskonačno diferrencijabilnih funkcija koje su jednake nuli izvan nekog kompaktnog skupa, gde se topologija razlikuje od standardne topologije zadate supremum normom na $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Uvodimo prvo prostor glatkih funkcija koje su identički jednake nuli izvan (zatvorene) lopte datog poluprečnika.

Definicija 3.1. *Prostor $\mathcal{D}_r(\mathbb{R}^n)$ sastoji se od beskonačno diferencijabilnih funkcija koje su identički jednake nuli na skupu $\mathbb{R}^n \backslash B_r(0)$, gde je $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$, gde je topologija data prebrojivom familijom seminormi*

$$p_k(\varphi) := \max_{k_1+\cdots+k_l=k} \max_{|x|\leq r} \left|\partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_l}^{k_l} \varphi(x)\right| .$$

Sada uvodimo prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ kao uniju svih prostora $\mathcal{D}_r(\mathbb{R}^n)$

[1] Laurent Schwartz (1915 - 2002) - francuski matematičar

Definicija 3.2. *Prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sastoji se od svih beskonačno diferencijabilnih funkcija sa ograničenim nosačem tj. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_r(\mathbb{R}^n)$ koji je snabdeven seminormama*

$$p_{\langle a_k\rangle}(\varphi) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \max_{|\alpha|=0,\dots,a_k} \max_{k\le|x|\le k+1} |D^\alpha\varphi(x)|\,,$$

gde za nizove $\langle a_k\rangle$ uzimamo sve nizove prirodnih brojeva.

Primetimo da su sve seminorme iz definicije dobro definisane za sve beskonačno diferencijabilne funkcije sa ograničenim nosačem, jer samo konačno mnogo sabiraka u sumi je različito od nule.

Kako je topologija data ovim seminormama na prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ često neoperativna (prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nije čak ni metrizabilan, pogledati [6]), mi ćemo preuzeti sekvencijalni pristup, bez ulaženja dublje u topološku prirodu prostora, gde posmatramo konvergenciju nizova u prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Definicija 3.3. *Niz funkcija $\langle\varphi_j\rangle \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ konvergira ka funkciji $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ako su sve funkcije φ_j i φ identički jednake nuli na istom kompaktnom skupu i za svaki multiindeks α imamo uniformnu konvergenciju $D^\alpha\varphi_j \rightrightarrows D^\alpha\varphi$.*

3.2 Definicija i izvod distribucija

Distribucije, odnosno uopštene funkcije definišemo na sekvencijalni način kao linearna neprekidna preslikavanja prostora $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ u skup realnih brojeva snabdeven standardnom topologijom.

Definicija 3.4. *Prostor svih linearnih funkcionela F na prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ takvih da $F(\varphi_j) \to 0$ za svaki niz $\langle\varphi_j\rangle$ koji konvergira nuli u prosotru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ označavamo sa $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, a njegove elemente nazivamo distribucijama.*

Oznaka $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ opravdana je sledećim tvrđenjem, za dokaz pogledati [6].

Teorema 3.1. *Prostor $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definisan gore je tačno topološki dual prostora $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Definišemo sada izvod distribucije.

Definicija 3.5. *Neka je $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Parcijalni izvod distribucije F u oznaci $\partial_{x_i}F$ je element $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dat identitetom*

$$\partial_{x_i}F(\varphi) = -F(\partial_{x_i}\varphi).$$

U daljem tekstu podrazumevaćemo da su svi izvodi uzeti u distributivnom smislu, čak i kada radimo sa glatkim funkcijama. Za detaljan pregled teorije distribucija pogledati [7]

Glava 4

Prostori Soboljeva

Prostori Soboljeva, nazvani po ruskom matematičaru Sergeju Soboljevu, predstavljaju veoma značajne vektorske prostore koji su našli široku primenu u nalaženju slabih rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Glavna motivacija jeste smeštanje funkcija i izvoda tih funkcija u određene Lebegove prostore, da bismo osigurali integrabilnost, da možemo tražiti rešenja jednačina u slabom smislu.

Definicija 4.1. *Za pozitivan ceo broj $m \in \mathbb{Z}^+$ i $1 \leq p \leq \infty$ definišemo preslikavanje:*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \quad za\ 1 \leq p < \infty;$$
$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Definišemo i vektorske prostore na kojima je dato preslikavanje norma:

(i) $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ *za* $0 \leq |\alpha| \leq m\}$ *gde je izvod uzet u distributivnom smislu;*

(ii) $W_0^{m,p}(\Omega)$ *je zatvaranje prostora* $C_0^\infty(\Omega)$ *u normi prostora* $W^{m,p}(\Omega)$.

Naime, dato preslikavanje ne samo što je norma na $W^{m,p}(\Omega)$, već je prostor $W^{m,p}(\Omega)$ snabdeven tom normom kompletan prostor.

Teorema 4.1. $W^{m,p}(\Omega)$ *je kompletan.*

Dokaz. Neka je $\langle u_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ Košijev niz u prostoru $W^{m,p}(\Omega)$. Tada su za $|\alpha| \leq m$ nizovi $\langle D^\alpha u_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ Košijevi u $L^p(\Omega)$ pa po kompletnosti prostora $L^p(\Omega)$ postoje funkcije u i u_{alpha} takve da $u_n \to u$ i $D^\alpha u_n \to u_\alpha$ u normi prostora $L^p(\Omega)$. Dalje, kako je $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ onda funkcije $D^\alpha u_n$ i u_α određuju distribucije. Za svako

$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ važi, po Helderovoj nejednakosti, za $p^{'} = \frac{p}{p-1}$

$$\begin{aligned} |D^\alpha u_n(\varphi) - u_\alpha(\varphi)| &= \left| \int_\Omega (D^\alpha u_n(x) - u_\alpha(x))\varphi(x)\, dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |D^\alpha u_n(x) - u_\alpha(x)|\, |\varphi(x)|\, dx \\ &\leq \|\varphi\|_{p'} \|D^\alpha u_n - u_\alpha\|_p . \end{aligned}$$

Dakle, $D^\alpha u_n(\varphi) \to u_\alpha(\varphi)$ za svako $\varphi \in C^{\infty_0(\Omega)}$. Po definiciji distrtibutivnog izvoda imamo za svako $\varphi \in C^{\infty_0(\Omega)}$

$$u_\alpha(\varphi) = \lim_{n\to\infty} D^\alpha u_n(\varphi) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} u_n(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi).$$

Dakle, $u_\alpha = D^\alpha u$ gde je izvod uzet u distributivnom smislu na Ω za sve $|\alpha| \leq m$, odnosno dobili smo da $u \in W^{m,p}(\Omega)$, a kako važi $\|u_n - u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \to 0$ to je prostor $W^{m,p}(\Omega)$ kompletan. □

4.1 Aproksimacija glatkim funkcijama

Često problemi koje rešavamo nisu uvek rešivi globalno na nekom određenom domenu, ali umemo da ih rešimo lokalno. Sledeći rezultat nam opravdava ovakvu tehniku rešavanja problema, odnosno omogućava nam spajanje lokalnih rešenja u rešenje koje je globalno.

Teorema 4.2 (Particija jedinice). *Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ proizvoljan skup i neka je $\mathcal{U}$ kolekcija otvorenih skupova koji pokrivaju A tj. $A \subset \bigcup_{u\in\mathcal{U}} U$. Tada postoji kolekcija Ψ funkcija $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ koja zadovoljava:*

(i) Za svako $\psi \in \Psi$ i svako $x \in \mathbb{R}^n$ važi $0 \leq \psi(x) \leq 1$;

(ii) Za $K \Subset A$ za sve sem konačno mnogo $\psi \in \Psi$ važi $\psi = 0$ na K;

(iii) Za svako $\psi \in \Psi$ postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da $\operatorname{supp}(\psi) \subset U$;

(iv) Za svako $x \in A$ važi $\sum_{\psi\in\Psi} \psi(x) = 1$.

Želimo da ideju regularizacije funkcija korišćenjem molifajera prenesemo sa L^p prostora na $W^{m,p}$ prostore, naime pokazaćemo da svaku funkciju iz $W^{m,p}$ možemo aproksimirati glatkim funkcijama.

Teorema 4.3. *Neka je J_ε standardna molifikaciona funkcija i neka je $1 \leq p < \infty$. Ako $u \in W^{m,p}(\Omega)$ i $\Omega_0 \subset \Omega$ sa kompaktnim zatvorenjem unutar Ω, onda $u^\varepsilon := J_\varepsilon * u \to u$ u normi prostora $W^{m,p}(\Omega_0)$.*

Dokaz. Prvo, primetimo da za sve $|\alpha| \leq m$ važi da $D^\alpha u^\varepsilon = J_\varepsilon * D^\alpha u$. Zaista

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(x) &= D^\alpha \int_\Omega J_\varepsilon(y) u(x-y) dy \\ &= \int_\Omega J_\varepsilon(y) D^\alpha u(x-y) dy \\ &= J_\varepsilon * D^\alpha u. \end{aligned}$$

Sada kako $D^\alpha u \in L^p(\Omega) \supset L^p(\Omega_0)$ i birajući ε dovoljno malo takvo da $\operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega) < \varepsilon$ dobijamo da važi $D^\alpha u^\varepsilon = J_\varepsilon * D^\alpha u \to D^\alpha u$ u normi prostora $L^p(\Omega_0)$. Kako ovo važi za sve $|\alpha| \leq m$ dobijamo da $u^\varepsilon \to u$ u normi prostora $W^{m,p}(\Omega_0)$. □

Rezultat koji smo upravo izveli nam daje aproksimaciju samo na relativno kompaktnim podskupovima skupa Ω, ovaj rezultat možemo podići na čitav skup Ω, birajući skupove sa kompaktnim zatvorenjem koji pokrivaju Ω i sabirajući aproksimacije odgovarajućom particijom jedinice.

Ako pretpostavimo restriktivnije uslove na geometriju skupa Ω, pre svega na njegov rub $\partial\Omega$, možemo dobiti aproksimaciju funkcijama koje su glatke na $\overline{\Omega} \supset \Omega$.

Teorema 4.4. *Neka je skup Ω ograničen i takav da je $\partial\Omega$ C^1. Ako $u \in W^{m,p}(\Omega)$ za $1 \leq p < \infty$ onda postoji niz funkcija $u_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$ takav da $u_k \to u$ u normi prostora $W^{m,p}(\Omega)$.*

Dokaz. Neka je tačka $x^0 \in \partial\Omega$ proizvoljna fiksirana tačka sa ruba oblasti Ω. Kako je $\partial\Omega$ C^1 to postoji C^1 funkcija $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ i realan broj $r > 0$ tako da važi

$$\Omega \cap B_r(x^0) = \left\{ x \in B_r(x^0) : x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1}) \right\}.$$

Definišimo $V := \Omega \cap B_{\frac{r}{2}}(x^0)$ i $x^\varepsilon := x + \lambda\varepsilon e_n$, gde $x \in V$, e_n n-ti vektor standardne baze $\mathbb{R}^n$, a brojevi $\lambda > 0$ i $\varepsilon > 0$ su takvi da za sve $x \in V$ važi da $B_\varepsilon(x^\varepsilon) \subset \Omega \cap B_r(x^0)$ za sve $x \in V$. Dalje definišemo v^ε kao molifikaciju funkcije u^ε koja je data vrednošću funkcije u u tački x^ε, ovo je opravdano činjenicom da je tačka x^ε dovoljno odmaknuta od ruba da je možemo molifikovati sa J_ε. Dokažimo da $v^\varepsilon \to u$ u normi prostora $W^{m,p}(V)$. Neka je α multiindeks takav da $|\alpha| \leq m$. Važi sledeće

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \leq \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)},$$

a oba člana sa desne strane teže nuli kada ε teži nuli, prvi zbog molifikacije, a drugi zbog neprekidnosti translacije. Neka je $\eta > 0$ dato. Kako je skup $\partial\Omega$ kompaktan to možemo pronaći konačno mnogo tačaka x_i^0 tako da lopte iz gornjeg razmatranja pokrivaju $\partial\Omega$, označimo odgovarajuće skupove sa V_i, tada postoje funkcije $v_i \in C^\infty(\overline{V_i})$ takve da $\|v_i - u\|_{m,L^p(V)_i} \leq \eta$. Biramo otvoren skup $V_0 \Subset \Omega$ takav da $\Omega \subset \bigcup_{i=0}^N V_i$. Po prethodnoj teoremi onda postoji funkcija v_0 takva $\|v_0 - u\|_{m,L^p(V)_0} \leq \eta$. Konstruišući funkciju v kao zbir funkcija v_i koristeći odgovarajuću particiju jedinice završavamo dokaz. □

4.2 Ekstenzije

Cilj ovog poglavlja je dobro definisati proširenje funkcije iz prostora Soboljeva $W^{1,p}(\Omega)$ na funkciju koja će sada biti deo prostora $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Iako deluje na prvi pogled da uvek možemo funkciju proširiti da bude identički jednaka nuli izvan Ω stvar je mnogo suptilnija. Naime može se desiti da proširenje funkcije nema dobro definisan slab izvod na $\partial\Omega$, stoga treba pristupiti proširenju sa malo više pažnje. Ako pretpostavimo određene uslove za skup Ω možemo dobiti rezultate o proširenim funkcijama.

Teorema 4.5 (Teorema o ekstenziji)**.** *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničen i takav da $\partial\Omega$ je C^1. Tada postoji ograničen linearan operator*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

takav da za sve $u \in W^{1,p}(\Omega)$ važi:

(i) *$Eu = u$ skoro svuda u Ω;*

(ii) *Eu ima nosač unutar ograničenog skupa $V \supset \Omega$;*

(iii) $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Dokaz. Prvo, pretpostavimo da je $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Neka je fiksirano $x^0 \in \partial\Omega$. Pretpostavimo prvo da u nekoj okolini x^0 važi da rub $\partial\Omega$ skupa Ω leži u ravni $x_n = 0$. Prema tome postoji otvorena lopta B sa centrom u x^0 dovoljno malog radijusa tako da

$$\begin{cases} B^+ := B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \overline{\Omega} \\ B^- := B \cap \{x_n < 0\} \subset \mathbb{R}^n \backslash \Omega \end{cases}.$$

Definišimo

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & x \in B^+ \\ -3u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}) & x \in B^- \end{cases}.$$

Dokažimo da $\overline{u} \in C^1(B)$. Uvodimo oznake $u^- := \overline{u}|_{B^-}$, $u^+ := \overline{u}|_{B^+}$. Dokažimo da je $D^\alpha u^-|_{\{x_n=0\}} = D^\alpha u^+|_{\{x_n=0\}}$ za sve α takve da $|\alpha| \leq 1$. Prvo primetimo da je $u^+ = u^-$ na $\{x_n = 0\}$ i da je za sve $i = 1, 2, \ldots, n-1$ zadovoljeno $u^+_{x_i} = u^-_{x_i}$ na $\{x_n = 0\}$. Pokažimo još da važi $u^+_{x_n} = u^-_{x_n}$ na $\{x_n = 0\}$.

$$u^-_{x_n}(x) = 3u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) - 2u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}).$$

Ubacivanjem $x_n = 0$ u gornju jednakost dobijamo da za $x_n = 0$ važi $u^+_{x_n} = u^-_{x_n}$, što sa prethodnim razmatranjem nam daje da je $u \in C^1(\Omega)$. Takođe po definiciji $\overline{u}$ postoji konstanta C takva da važi

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(B)^+}.$$

Razmotrimo sada slučaj kada ne postoji okolina x^0 tako da $\partial\Omega$ leži u jednoj ravni. Tada možemo naći C^1-difeomorfizam koji će "izravnati" $\partial\Omega$ u okolini x^0. Označimo taj difeomorfizam sa Φ i neka je $y = \Phi(x)$, tada je $x = \Phi^{-1}(y)$ i definišimo $u'(y) := u(\Phi^{-1}(y))$. Sada ponovimo gornje razmatranje za u' i dobijamo

$$\left\|\overline{u'}\right\|_{W^{1,p}(B)} \leq C \left\|u'\right\|_{W^{1,p}(B)^+}.$$

Označimo $W := \Phi^{-1}(B)$, tada vraćanjem u x koordinate dobijamo

$$\left\|\overline{u}\right\|_{W^{1,p}(W)} \leq C \left\|u\right\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Kako je $\partial\Omega$ kompaktan postoji konačno mnogo tačaka $x_i^0 \in \partial\Omega$takvih da postoje otvoreni skupovi W_i i ekstenzije $\overline{u_i}$ funkcije u na W_i tako da $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^m W_i$. Odaberimo otvoren $W_0 \Subset \Omega$ takav da $\Omega \bigcup_{i=0}^m W_i$ i neka je $\{\xi\}_{i=0}^m$ odgovarajuća particija jedinice. Definišemo $\overline{u} = \sum_{i=0}^m \xi_i \overline{u_i}$. Koristeći gornje ocene dobijamo konačno

$$\left\|\overline{u}\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\|u\right\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

i važi daje nosač ograničen skup, i da $\Omega \subset \operatorname{supp} \overline{u}$. Uvodimo sada oznaku $Eu := \overline{u}$. Razmotrimo sada slučaj kada $u \notin C^\infty$. Kako $u \in W^{1,p}(\Omega)$ postoji niz funkcija $u_k \in C^\infty(\Omega)$ koji konvergira ka u u normi prostora $W^{1,p}(\Omega)$. Sada po linearnosti operatora E i gornjim ocenama važi

$$\left\|Eu_k - Eu_l\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\|u_k - u_l\right\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Dakle, niz Eu_k je Košijev te konvergira ka Eu. $\square$

4.3 Nejednakosti Soboljeva

U ovom delu pokazujemo veoma važna utapanja prostora $W^{1,p}(\Omega)$ u određene Lebegove prostore u zavisnosti od osobina oblasti Ω. Primetimo da iz $W^{1,p} \subset L^q$ možemo dovoljno puta primenivši podskup dobiti da za proizvoljno m važi $W^{m,p} \subset L^q$ za neko q. U početku razmatrammo slučaj za $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Teorema 4.6 (Nejednakost Galjardo[1]-Nirenberg[2]-Soboljev)**.** *Neka je $1 \leq p < n$. Definišemo $p^\star = \dfrac{np}{n-p}$. Tada postoji konstanta C takva da*

$$\left\|u\right\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

za sve $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Dokaz. Dokazujemo prvo slučaj $p = 1$. Kako je nosač od u kompaktan to važi

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) dy_i,$$

[1]Emilio Gagliardo (1930 - 2008) - italijanski matematičar
[2]Louis Nirenberg (1925 - 2020) - kanadsko-američki matematičar

za sve $1 \le i \le n$, te dalje važi

$$\begin{aligned}|u(x)| &\le \int_{-\infty}^{x_i} |u_{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)|\, dy_i \\ &\le \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)|\, dy_i.\end{aligned}$$

Variranjem koordinata i stepenovanjem sa $\frac{1}{n-1}$ dobijamo

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \le \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Dobijenu nejednakost sada integralimo, prvo po x_1

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 &\le \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u|\, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}(n-1)} dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u|\, dy_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}},\end{aligned}$$

gde nejednakost sledi iz uopštene Helderove nejednakosti. Sada integralimo dalje po x_2 i slično kao malopre dobijamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \le \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u|\, dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u|\, dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u|\, dy_i dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}}.\end{aligned}$$

Ponavaljajući postupak za sve preostale promenljive dobijamo konačno

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, d^n x &\le \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} |\nabla u|\, dx_1 \ldots dx_{i-1} dy_i dx_{i+1} \ldots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\, d^n x \right)^{\frac{n}{n-1}}.\end{aligned}$$

Stepenovanjem sa $\frac{n-1}{n}$ dobijamo tvrđenje za $p = 1$. Za dokaz kada je $p > 1$ posmatramo funkciju $|u|^\gamma$ gde je $\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}$ i primenimo ocenu koju smo malopre dobili. Tada imamo

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla |u|^{\gamma}|\, dx \\ &= \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |\nabla u|\, dx \\ &\leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Kako je $\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{np}{n-p} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1}$ i važi $p^\star = \frac{np}{n-p}$ to važi

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^\star}\, dx\right)^{\frac{1}{p^\star}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Sada dokazujemo tvrđenje bez ograničavanja na glatke funkcije, već za proizvoljne funkcije iz prostora $W^{1,p}$ za oblasti koje zadovoljavaju određene uslove.

Teorema 4.7. *Neka je Ω ograničen otvoren podskup skupa $\mathbb{R}^n$, i neka je rub $\partial\Omega$ C^1. Ako je $1 \leq p < n$ i $u \in W^{1,p}(\Omega)$ onda $u \in L^{p^\star}(\Omega)$ i važi ocena*

$$\|u\|_{L^{p^\star}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Dokaz. Kako je $\partial\Omega$ C^1, postoji ekstenzija funkcije u $Eu =: \overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ takva da $\overline{u} = u$ na Ω, $\overline{u}$ ima kompaktan nosač i važi $\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Kako $\overline{u}$ ima kompaktan nosač postoji niz funkcija $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tako da $u_n \to \overline{u}$ u normi prostora $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Po zaključku prethodne teoreme imamo da važi

$$\|u_m - u_l\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u_m - \nabla u_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

za sve $l, m \in \mathbb{N}$. Dakle, niz u_n je Košijev u normi prostora $L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)$ te po kompletnosti Lebegovih prostora imamo da $\overline{u} \in L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)$ i važi ocena

$$\|\overline{u}\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Sada kako je $\overline{u} = u$ na skupu Ω imamo da važi uzimajući restrikciju norme na skup $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\|u\|_{L^{p^\star}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

□

Sada dajemo tvrđenje istog karaktera, ovog puta sa $W_0^{1,p}$ prostorima. Sada možemo pristupiti sa opštijim uslovima za granicu domena Ω.

Teorema 4.8. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničen i otvoren skup i neka $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ za $1 \leq p < n$. Tada važi ocena*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

za sve $q \in [1, p^\star]$. Specijalno važi

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dokaz. Neka $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onda postoji niz funkcija $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ koji konvergira funkciji u u normi prostora $W^{1,p}(\Omega)$. Sada funckije u_n možemo produžiti nulom na $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ i primenom nejednakosti Galjardo-Nirenberg-Soboljev dobijamo kako za sve u_n važi $\|u_n\|_{L^{p^\star}(\Omega)} \leq C \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}$ da takođe važi $\|u\|_{L^{p^\star}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$. □

Slučaj $p = n$ je poseban po tome što on predstavlja jedan patološki slučaj. Naime, za očekivati je da po razmatranju od malopre, kako je $p^\star = \frac{np}{n-p} = \infty$ za $p = n$ da imamo da za sve $u \in W^{1,n}(\Omega)$ važi $u \in L^\infty(\Omega)$, međutim postoje kontraprimeri koji ovo tvrđenje demantuju, na primer birajući skup $\Omega = \operatorname{Int} B_1(0)$ i funkciju $u = \ln\ln\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)$ dobijamo da $u \in W^{1,n}(\Omega)$, ali $u \notin L^\infty(\Omega)$, za dokaz pogledati [2].

Dalje navodimo bez dokaza teoreme o utapanju prostora Soboljeva u određene Helderove prostore kada je $p > n$, za dokaz pogledati [2, 5.6.2].

Teorema 4.9. *Neka je Ω otvoren ograničen podskup skupa $\mathbb{R}^n$ takava da je njegov rub $\partial\Omega$ C^1. Ako $u \in W^{1,p}(\Omega)$ onda $u \in C^{0,1-\frac{n}{p}}(\Omega)$.*

Sumirajući rezultate prethodnih tvrđenja dobijamo konačnu teoremu o utapanjima prostora Soboljeva.

Teorema 4.10 (Nejednakosti Soboljeva)**.** *Neka je Ω ograničen otvoren podskup skupa $\mathbb{R}^n$ sa C^1 rubom i neka $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Tada*

(i) Ako $mp < n$ onda $u \in L^q(\Omega)$ gde je q dato identitetom $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ i važi ocena

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

(ii) Ako $mp > n$ onda $u \in C^{m-\left[\frac{n}{p}\right],\gamma}(\Omega)$, i važi ocena

$$\|u\|_{C^{m-\left[\frac{n}{p}\right],\gamma}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)},$$

gde je

$$\gamma = \begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}, & \text{ako } \frac{n}{p} \notin \mathbb{N} \\ \text{proizvoljan realan broj iz intervala } (0,1), & \text{ako } \frac{n}{p} \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Za dokaz drugog dela tvrđenja pogledati [2, 5.6.3 Theorem 6]

Uzimajući određene vrednosti eksponenta Lebegovog prostora dobijamo da su utapanja Soboljeva kompaktna, naime važi sledeće tvrđenje.

Teorema 4.11 (Relih[3]-Kondrašov[4])**.** *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen i da je $\partial\Omega$ C^1. Ako je $1 \leq p < n$ onda $W^{1,p}(\Omega) \Subset L^q(\Omega)$ za sve $1 \leq q < p^\star$.*

[3]Franz Rellich (1906 - 1955) - nemački matematičar

[4]Владимир Иосифович Кондрашов (1909 - 1971) - sovjetski matematičar

Dokaz. Kako je Ω ograničen skup on je konačne Lebegove mere te za sve $q < p$ po teoremi o utapanjima Soboljeva imamo da $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ i važi

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Treba još da pokažemo da svaki ograničen niz u $W^{1,p}(\Omega)$ ima konvergentan podniz u $L^q(\Omega)$. Označimo taj niz sa $\langle u_m : n \in \mathbb{N}\rangle$. Važi da je $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty$. Po teoremi o eksteniji možemo pretpostaviti da sve funkcije u_n imaju kompaktan nosač unutar nekog skupa $V \supset \Omega$ i da važi $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < \infty$. Posmatramo prvo izglačane funkcije $u_m^\varepsilon := u_n * J_\varepsilon$, gde je J_ε standardna molifikaciona funkcija. Sve funkcije u_m^ε imaju nosač unutar V. Prvo dokazujemo da date funkcije konvergiraju uniformno po m u normi prostora $L^q(V)$.

$$\begin{aligned}
u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x-y)u_m(y)dy - u_m(x)\\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B_\varepsilon(x)} J\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)(u_m(y) - u_m(x))\,dy\\
&= \int_{B_1(0)} J(z)\,(u_m(x-\varepsilon z) - u_m(x))\,dz\\
&= \int_{B_1(0)} J(z)\int_0^1 \frac{d}{dt}\,(u_m(x - t\varepsilon z))\;dt\,dy\\
&= -\varepsilon\int_{B_1(0)} J(z)\int_0^1 \nabla u_m(x-t\varepsilon z)\cdot z\,dt\,dy.
\end{aligned}$$

Dakle, integracijiom po skupu V dobijamo da važi

$$\begin{aligned}
\int_V |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|\;dx &\leq \varepsilon\int_{B_1(0)} J(z)\int_0^1\int_V |\nabla u_m(x-t\varepsilon z)|\,|z|\;dx\;dt\,dz\\
&\leq \varepsilon\int_{B_1(0)} J(z)\int_0^1\int_V |\nabla u_m(w)|\;dw\;dt\,dz\\
&= \varepsilon\int_V |\nabla u_m(w)|\;dw.
\end{aligned}$$

Dalje, kako je skup V ograničen i $u_m \in W^{1,p}(V)$ da važi

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon\,\|\nabla u_m\|_{L^1(V)} \leq \varepsilon C\,\|\nabla u_m\|_{L^p(V)}.$$

Dakle, kako $u_m \in W^{1,p}(V)$ imamo da $u_m^\varepsilon \to u_m$ u normi prostora $L^1(V)$ uniformno po m. Dalje kako je $1 \leq q < p^\star$ po interpolacionoj nejednakosti imamo

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta\,\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^\star}(V)}^{1-\theta},$$

gde je θ odabrano tako da važi $\frac{1}{q} = \theta + \frac{1-\theta}{p^\star}$. Po nejednakosti Galjardo-Nirenberg-Soboljev imamo

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq C\,\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta.$$

Dakle, konvergencija je uniformna po m u normi prostora $L^q(V)$ kada $\varepsilon \to 0$. Dokažimo sada da je za sve $\varepsilon > 0$ niz $\langle u_m^\varepsilon \rangle$ uniformno ograničen i ekvineprekidan. Neka $x \in V$, tada

$$
\begin{aligned}
|u_m^\varepsilon(x)| &\le \int_{B_\varepsilon(x)} J_\varepsilon(x-y)\,|u_m(y)|\,dy \\
&\le \|J_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \le \frac{C}{\varepsilon^n} < \infty,
\end{aligned}
$$

za proizvoljno m, odnosno niz $\langle u_m^\varepsilon \rangle$ je uniformno ograničen za svako $\varepsilon > 0$. Slično, dobijamo

$$
|\nabla u_m^\varepsilon| \le \|\nabla J_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_m\|_{L^1(V)} \le \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} < \infty,
$$

te po teoremi srednje vrednosti dobijamo da je niz $\langle u_m^\varepsilon \rangle$ niz ekvineprekidnih funkcija za svako $\varepsilon > 0$. Sada, kako je skup V kompaktan, po teoremi Arzela-Askoli možemo iz niza $\langle u_m^\varepsilon \rangle$ izvući uniformno konvergentan podniz na V, koji je dalje konvergentan u normi prostora $L^q(V)$. Kako je dati niz aproksimacija polaznog niza $\langle u_m \rangle$, a niz konvergira uniformno po m kaada $\varepsilon \to 0$ znači da i iz polaznog niza $\langle u_m \rangle$ možemo izvući konvergentan podniz u normi prostora $L^q(V)$ čime je dokaz završen. □

4.4 Slaba i jaka konvergencija nizova funkcija

U ovom odeljku dajemo opštu teoriju o slaboj i jakoj konvergenciji u Banahovim prostorima sa posebnim osvrtom na prostore Soboljeva i Lebegove prostore. Prvo definišemo jaku konvergenciju za proizvoljan Banahov prostor X.

Definicija 4.2. *Neka je X Banahov prostor. Za niz elemenata $x_k \in X$ kažemo da jako konvergira ili konvergira u normi ka elementu $x \in X$ u oznaci*

$$
x_k \to x
$$

ako važi

$$
\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\|_X = 0.
$$

Primetimo da ako imamo jako konvegentan niz $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ u Banahovom prostoru X, čiji je limes $x \in X$ onda za svako $y \in X'$, gde je X' topološki dual prostora X važi

$$
\lim_{k\to\infty} \langle x_k, y \rangle = \lim_{k\to\infty} y(x_k) = y(x) = \langle x, y \rangle .
$$

Zaista, za $\varepsilon > 0$ dato, možemo pronaći k dovoljno veliko da $\|x_k - x\|_X < \frac{\varepsilon}{\|y\|_{X'}}$, tj. možemo pronaći dovoljno veliko k tako da važi

$$
|y(x_k) - y(x)| = |y(x_k - x)| \le \|y\|_{X'} \|x_k - x\|_X < \varepsilon.
$$

Pokažimo primerom da obratno ne mora da važi.

Primer 4.1. Posmatrajmo Banahov prostor $L^2(\mathbb{R}^n)$ za neko fiksirano $n \in \mathbb{N}$ i neka je $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ proizvoljno takvo da $f \neq 0$. Konstruišimo niz funkcija $f_k(x) := k^{\frac{n}{2}} f(kx)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $k \geq 1$. Neka je $g \in L^2(\mathbb{R}^n) = [L^2(\mathbb{R}^n)]'$ proizvoljno. Tada za $k \geq 1$ imamo

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) g(x)\, dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} k^{\frac{n}{2}} f(kx) g(x)\, dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} k^{-\frac{n}{2}} f(z) g\left(\frac{z}{k}\right)\, dz \right| \\ &\leq k^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(z) g\left(\frac{z}{k}\right) \right|\, dz \leq k^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} . \end{aligned}$$

Puštajući limes $k \to \infty$ dobijamo

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) g(x)\, dx = 0$$

za proizvoljno $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dokažimo, međutim, da ne važi $f_k \to 0$.

$$\begin{aligned} \|f_k - 0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} (f_k(x))^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} k^n (f(kx))^2\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(f\left(\frac{z}{k}\right)\right)^2\, dz = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} , \end{aligned}$$

za svako $k \geq 1$, odnosno ne važi $f_k \to 0$.

Prethodni primer i razmatranje pre primera motiviše nas da uvedemo novu vrstu konvergencije u Banahovim prostorima.

Definicija 4.3. *Neka je X Banahov prostor. Za niz elemenata $x_k \in X$ kažemo da slabo konvergira ka elementu $x \in X$ u oznaci*

$$x_k \rightharpoonup x$$

ako za svako $y \in X'$, gde je X' topološki dual od X važi

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_k, y \rangle = \langle x, y \rangle .$$

Slično, uvodimo dualni pojam slaboj konvergenciji

Definicija 4.4. *Neka je X Banahov prostor takav da je $X = Y'$, gde je Y neki Banahov prostor. Za niz elemenata $x_k \in X$ kažemo da *-slabo konvergira ka elementu $x \in X$ u oznaci*

$$x_k \overset{*}{\rightharpoonup} x$$

ako za svako $y \in Y$ važi

$$\lim_{k\to\infty} \langle y, x_k \rangle = \langle y, x \rangle .$$

Dokažimo sada značajno tvrđenje koje nam karakteriše slabo i *-slabo sekvencijalno kompaktne skupove u Banahovim prostorima.

Tvrđenje 4.12. *Neka je X Banahov prostor i $A \subset X$ ograničen u normi prostora X. Tada*

(a) *Ako je X refleksivan onda je A slabo relativno kompaktan;*

(b) *Ako je $X = Y'$ za neki Banahov prostor Y onda je A *-slabo relativno kompaktan.*

Dokaz. Kako je skup $A \subset X$ ograničen postoji $M > 0$ takvo da

$$A \subset \{x \in X : \|x\|_X \leq M\} =: B_M.$$

(a) Kako je X refleksivan to je $X = X''$ te po teoremi Banah-Alaoglua (Teorema 1.16) dobijamo da je B_M slabo kompaktan u X, te je $A \subset B_M$ slabo relativno kompaktan.

(b) Kako postoji Banahov prostor Y takav da $Y' = X$ to po direktnoj primeni teoreme Banah-Alaoglua (Teorema 1.16) imamo da je B_M *-slabo kompaktan u X, pa je i $A \subset B_M$ *-slabo relativno kompaktan.

□

Posmatrajmo sada prostore Soboljeva i Lebegove prostore imajući u vidu prethodno tvrđenje. Naime za $1 < p < \infty$ znamo da su prostori $L^p(\Omega)$ i $W^{m,p}(\Omega)$ za sve $m \in \mathbb{N}$, za $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ refleksivni prostori, dok za prostor $L^\infty(\Omega)$ je poznato da $L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))'$ dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 4.13. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ za neko $n \in \mathbb{N}$. Tada*

(i) *Ako je $1 < p < \infty$ i $A \subset L^p(\Omega)$ ograničen, onda je A slabo relativno kompaktan;*

(ii) *Ako je $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$ i $A \subset W^{m,p}(\Omega)$ ograničen, onda je A slabo relativno kompaktan;*

(iii) *Ako je $A \subset L^\infty(\Omega)$ ograničen, onda je A *-slabo relativno kompaktan.*

Navodimo bez dokaza jedan od najvećih rezultata teorije Banahovih prostora koja se tiče kompaktnosti u slabim topologijama na Banahovim prostorima. Generalizacije i dokazi ove teoreme su bili tema mnogih naučnih publikacija, a dokaz se može pronaći recimo u [10, Chapter III].

Teorema 4.14 (Eberlejn[5]-Šmuljan[6])**.** *Neka je X Banahov prostor i $A \subset X$. A je slabo relativno kompaktan ako i samo ako je A slabo relativno sekvencijalno kompaktan.*

Dakle, imamo za prostore Soboljeva i Lebegove prostore sledeći rezultat

[5] William Frederick Eberlein (1917 - 1986) - američki matematičar

[6] Витольд Львович Шмульян (1914 - 1944) - ruski matematičar

Teorema 4.15. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ za neko $n \in \mathbb{N}$ i neka je $1 < p < \infty$. Tada važi:*

(i) Svaki niz ograničen u normi prostora $L^p(\Omega)$ poseduje slabo konvergentan podniz;

(ii) Za sve $m \geq 1$ svaki niz ograničen u normi prostora $W^{m,p}(\Omega)$ poseduje slabo konvergentan podniz.

Dalje dokazujemo jednu značajnu teoremu, poznatu kao Aubin[7]-Lions[8] lema, koja nam osigurava konvergenciju u normi za uniformno ograničene nizove funkcija. Dokaz teoreme počiva na jednoj tehničkoj lemi čiji dokaz ovde izostavljamo, za dokaz date leme i još primena teoreme Aubin-Lions pogledati [9, Section 3.1.1]

Lema 4.1. *Neka su X_0, X i X_1 Banahovi prostori takvi da se X_0 kompaktno utapa u X, a X se neprekidno utapa u X_1. Tada za svako $\eta > 0$, postoji konstanta C_η koja zavisi isključivo od η tako da za sve $v \in X_0$ važi*

$$\|v\|_X \leq \eta \|v\|_{X_0} + C_\eta \|v\|_{X_1}.$$

Teorema 4.16 (Aubin-Lions lema). *Neka su X_0, X i X_1 Banahovi prostori, takvi da su X_0 i X_1 refleksivni. Neka se X_0 kompaktno utapa u X, a X neprekidno utapa u X_1. Za svako p i q takvo da $1 < p, q < \infty$ definišemo*

$$W := \{u : u \in L^p(0,T;X_0),\ u_t \in L^q(0,T;X_1)\}.$$

Tada se W kompaktno utapa u $L^p(0,T;X)$.

Dokaz. Neka je niz $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno ograničen u W, tj. da važi

$$\|u_n\|_{L^p(0,T;X_0)} + \|(u_n)_t\|_{L^q(0,T;X_1)} \leq M. \tag{4.4.1}$$

Dokažimo da postoji podniz datog niza koji konvergira u normi prostora $L^p(0,T;X)$. Pre svega iz refleksivnosti prostora $L^p(0,T;X_0)$ i (4.4.1) sledi da postoji podniz, koji radi rasterećenja notacije i dalje označavamo sa $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, i $u \in L^p(0,T;X_0)$ takav da $u_n \rightharpoonup u$, $n \to \infty$ u prostoru $L^p(0,T;X_0)$. Uvodimo oznaku $v_n = u_n - u$. Dakle, dokazujemo da $v_n \to 0$, $n \to \infty$ u normi prostora $L^p(0,T;X)$. Ako uvedemo oznaku $r := \min\{p,q\}$, onda je $W \subset W^{1,r}(0,T;X_1)$, jer je po pretpostavki teoreme $X_0 \subset X_1$. Po utapanjima Soboljeva, kako je dimenzija prostora $[0,T]$ jednaka 1, i $r > 1$ imamo da se prostor W neprekidno utapa u $C([0,T];X_1)$. Dakle, imamo da je za svako $t \in [0,T]$

$$\|v_n(t)\|_{X_1} \leq K,$$

za neku konstantu K, odnosno

$$\|v_n(t)\|_{X_1}^p \leq K^p,$$

[7]Jean-Pierre Aubin (rođen 1939) - francuski matematičar
[8]Jacques-Louis Lions (1928 - 2001) - francuski matematičar

a kako je skup $[0,T]$ konačne Lebegove mere, to je konstantna funkcija K^p integrabilna po Lebegu. Dakle, ako pokažemo da za svako $t \in [0,T]$ $\|v_n(t)\|_{X_1} \to 0$, $n \to \infty$, imamo po Lebegovoj teoremi da je

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n(t)\|^p_{L^p(0,T;X_1)} = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \|v_n(t)\|^p_{X_1}\, dt = 0,$$

odnosno dobijamo da $v_n \to 0$ u normi prostora $L^p(0,T;X_1)$. Dokažimo sada da za proizvoljno $t \in [0,T]$ važi $\|v_n(t)\|_{X_1} \to 0$, $n \to \infty$.

$$v_n(t) = v_n(s) - \int_t^s v_n'(\tau)\, d\tau. \tag{4.4.2}$$

Množenjem (4.4.2) sa $\frac{1}{\gamma-t}$ i integracijom po promenljivoj $s \in [t,\gamma]$ izvodimo

$$v_n(t) = \frac{1}{\gamma-t}\int_t^\gamma v_n(s)\, ds - \frac{1}{\gamma-t}\int_t^\gamma \int_t^s v_n'(\tau)\, d\tau\, ds.$$

Primetimo da drugi integral možemo zapisati u drugačijem obliku

$$\int_t^\gamma \int_t^s v_n'(\tau)\, d\tau\, ds = \int_t^\gamma (\gamma-\tau)\, v_n'(\tau)\, d\tau.$$

Dalje, izvodimo

$$\|v_n(t)\|_{X_1} \le \frac{1}{\gamma-t}\left\|\int_t^\gamma v_n(s)\, ds\right\|_{X_1} + \int_t^\gamma \|v_n'(\tau)\|_{X_1}\, d\tau. \tag{4.4.3}$$

Kako važi

$$\begin{aligned}\int_t^\gamma \|v_n'(\tau)\|_{X_1}\, d\tau &\le (\gamma-t)^{1-\frac{1}{q}} \|v_n'\|_{L^q(t,\gamma;X_1)}\\ &\le (\gamma-t)^{1-\frac{1}{q}} \|v_n'\|_{L^q(0,T;X_1)}\\ &\le 2\,(\gamma-t)^{1-\frac{1}{q}} M,\end{aligned}$$

to za svako $\varepsilon > 0$ možemo birati γ dovoljno blizu t tako da

$$\int_t^\gamma \|v_n'(\tau)\|_{X_1}\, d\tau < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.4}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Za tako odabrano γ iz činjenice da $v_n \rightharpoonup 0$, $n \to \infty$ u $L^p(0,T;X_0)$, imamo da $\displaystyle\int_t^\gamma v_n(s)\, ds \rightharpoonup 0$ u X_0, pa kako je utapanje $X_0 \hookrightarrow X$ kompaktno i utapanje $X \hookrightarrow X_1$ neprekidno to važi $\displaystyle\int_t^\gamma v_n(s)\, ds \to 0$ u X_1 te možemo pronaći n dovoljno veliko tako da

$$\frac{1}{\gamma-t}\left\|\int_t^\gamma v_n(s)\, ds\right\|_{X_1} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4.5}$$

Dakle, iz (4.4.3), (4.4.4) i (4.4.5) izvodimo da za $n \in \mathbb{N}$ dovoljno veliko važi

$$\|v_n(t)\|_{X_1} < \varepsilon,$$

odnosno, važi $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n(t)\|_{X_1} = 0$ za svako $t \in [0,T]$, što smo i hteli da pokažemo. Dakle, imamo da $v_n \to 0$ u normi prostora $L^p(0,T;X_1)$. Konačno iz leme 4.1 imamo da za proizvoljno $\eta > 0$ važi

$$\|v_n\|_{L^p(0,T;X)} \leq \eta \|v_n\|_{L^p(0,T;X_0)} + C_\eta \|v_n\|_{L^p(0,T;X_1)}.$$

Za $\varepsilon > 0$ dato birajući $\eta = \frac{\varepsilon}{2M}$ važi da postoji dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$ tako da $\|v_n\|_{L^p(0,T;X_1)} < \frac{\varepsilon}{2C_\eta}$, odnosno za n dovoljno veliko važi

$$\|v_n\|_{L^p(0,T;X)} < \frac{\varepsilon}{2M} M + C_\eta \frac{\varepsilon}{2C_\eta} = \varepsilon,$$

odnosno $v_n \to 0$, $n \to \infty$ u normi prostora $L^p(0,T;X)$, tj. $u_n \to u$, $n \to \infty$ u normi prostora $L^p(0,T;X)$. □

4.4.1 Donja slaba poluneprekidnost normi na Lebegovim prostorima i prostorima Soboljeva

Definicija 4.5. *Za funkcionelu Φ na Banahovom prostoru X kažemo da je donje slabo poluneprekidna ako za svaki slabo konvergentan niz $x_k \rightharpoonup x$ u X važi*

$$\liminf_{k\to\infty} \Phi(x_k) \geq \Phi(x).$$

Dokažimo da norme na $L^p(\Omega)$, pa samim tim i norme na $W^{m,p}(\Omega)$ poseduju osobinu donje slabe poluneprekidnosti na svojim odgovarajućim prostorima, za $p \in (1,\infty)$.

Teorema 4.17. *Neka je $1 < p < \infty$ i $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Tada je $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ donje slabo poluneprekidno preslikavanje.*

Dokaz. Neka je niz $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^p(\Omega)$ takav da $u_k \rightharpoonup u \in L^p(\Omega)$. Dokažimo da je

$$\liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{L^p(\Omega)} \geq \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Kako je funkcija $|\cdot|^p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna to za sve $x, y \in \mathbb{R}$ važi

$$|x|^p - |y|^p \geq py\,|y|^{p-2}(x-y).$$

Dakle, za skoro svako $z \in \Omega$ važi

$$|u_k(z)|^p - |u(z)|^p \geq pu(z)\,|u(z)|^{p-2}(u_k(z) - u(z)). \tag{4.4.6}$$

Integraleći nejednakost (4.4.6) po $z \in \Omega$ dobijamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_k(z)|^p\,dz - \int_\Omega |u(z)|^p\,dz &\geq p\int_\Omega u(z)\,|u(z)|^{p-2}(u_k(z)-u(z))\,dz \\ &= p\left(\int_\Omega u(z)\,|u(z)|^{p-2}\,u_k(z)\,dz \right. \\ &\quad \left. - \int_\Omega u(z)\,|u(z)|^{p-2}\,u(z)\,dz\right).\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Dokažimo da $u\,|u|^{p-2} \in [L^p(\Omega)]' = L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Naime važi

$$\left\|u\,|u|^{p-2}\right\|^{\frac{p}{p-1}}_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} = \int_\Omega \left(|u|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\,dz = \int_\Omega |u|^p\,dz = \|u\|^p_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

Dakle, zaista $u\,|u|^{p-2} \in [L^p(\Omega)]' = L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, te po slaboj konvergenciji $u_k \rightharpoonup u$ u $L^p(\Omega)$ imamo

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega u(z)\,|u(z)|^{p-2}\,u_k(z)\,dz &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u(z)\,|u(z)|^{p-2}\,u_k(z)\,dz \\ &= \int_\Omega u(z)\,|u(z)|^{p-2}\,u(z)\,dz.\end{aligned}$$

Sada, primenjujući lim inf na nejednakost (4.4.7) dobijamo

$$\liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{L^p(\Omega)} - \|u\|_{L^p(\Omega)} \geq 0,$$

odnosno, imamo

$$\liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{L^p(\Omega)} \geq \|u\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

□

Posledica 4.1. *Neka je* $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *i* $m \in \mathbb{N}$. *Tada je* $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ *donje slabo poluneprekidno preslikavanje.*

Dokaz. Direktno iz prethodne teoreme i definicije norme Soboljeva. □

Glava 5

Teorija fiksne tačke

U ovoj glavi obrađujemo jednu od mnogih teorema koje obezbeđuju postojanje fiksne tačke određenog operatora, konkretno dokazujemo Šauderov[1] princip fiksne tačke. U dokazu Šauderovog principa koristi se još jedan princip fiksne tačke, koji ovde navodimo bez dokaza.

Teorema 5.1 (Brauerov[2] princip fiksne tačke)**.** *Neprekidno preslikavanje F iz n-dimenzionog simpleksa S u Banahovom prostoru $\mathbb{B}$ u sebe samog ima fiksnu tačku.*

Dokaz Brauerovog principa može se pronaći u literaturi na temu funkcionalne analize ili teorije fiksne tačke, recimo u [3].

Teorema 5.2 (Šauderov princip fiksne tačke)**.** *Neprekidno preslikavanje kompaktnog konveksnog skupa $\Omega \subset \mathbb{B}$, gde je $\mathbb{B}$ Banahov prostor, u sebe samog ima fiksnu tačku.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Kako je Ω kompaktan on mora imati konačnu ε-mrežu, označimo elemente te mreže sa $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Označimo dalje sa Ω_0 konveksni omotač elemenata $x_1, \ldots, x_m$. Zbog uslova teoreme važi da je $\Omega_0 \subset \Omega$, primetimo još da je dimenzija od Ω_0 konačna, označimo sa $n \leq m-1$. Primetimo da se Ω_0 može izraziti kao unija n-simpleksa tako da važi da su tačke $x_1, \ldots, x_m$ među temenima tih simpleksa i da svaka dva simpleksa ili se ne seku ili im je presek zajednička k-dimenziona strana (k-simpleks). Dalje, napravimo potpodelu svakog od tih sipleksa, dovoljno duboku da dijametri svih podsimpleksa budu maji od ε. Označimo dobijene simplekse sa $S_1, \ldots, S_p$. Po konstrukciji, kolekcija temena svih ovih simpleksa čini konačnu ε-mrežu i ona sadrži sve tačke $x_1, \ldots, x_m$ i svi ovi simpleksi se seku isključivo po zajedničkim stranama manje dimenzije. Posmatrajmo sada neprekidno preslikavanje $F : \Omega \to \Omega$. Po kompaktnosti skupa Ω sledi da je F i uniformno neprekidno preslikavanje, tj. za sve $\varepsilon > 0$ možemo pronaći $\delta > 0$ tako da $\|x-y\| < \delta$ implicira $\|F(x) - F(y)\| < \varepsilon$ za sve $x, y \in \Omega$. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da su svi dijametri potpodele takođe manji i od δ, u suprotnom pravimo dublju potpodelu da dijametri budu manji

[1]Juliusz Schauder (1899 - 1943) - poljski matematičar
[2]Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 - 1966) - holandski matematičar

od $\min\{\varepsilon, \delta\}$. Sada konstruišemo preslikavanje $F_\varepsilon : \Omega_0 \to \Omega_0$ koje je simplicijelna aproksimacija preslikavanja F. Definišimo F_ε u temenima simpleksa $S_1, \ldots, S_p$. Neka je z jedno od temena tih simpleksa. Kako $F(z) \in \Omega$ i temena ovih simpleksa čine ε-mrežu, postoji neko teme $\bar{z}$ takvo da je $\|F(z) - \bar{z}\| < \varepsilon$. Definišemo $F_\varepsilon(z) := \bar{z}$.

Neka je sada $x \in \Omega_0$ takvo da x nije teme niti jednog simpleksa iz potpodele. Pretpostavimo da $x \in S_k$ za neko k. Označimo temena od S_k sa $x_0^k, \ldots, x^k + n$ i izrazimo x u simplicijalnim koordinatama simpleksa S_k na sledeći način

$$x = \sum_{i=0}^{n} a_i^k x_i^k, \quad a_i^k \geq 0, \ \sum_{i=0}^{n} a_i^k = 1.$$

Definiš emo sada $F_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i^k F_\varepsilon\left(x_i^k\right)$. Ako je simpleks S_k jedinstven onda je ovako preslikavanje dobro definisano. Međutim ako $x \in S_k \cap S_l$ onda je po konstrukciji x unutar s-dimenzionog simpleksa, tj. važi da je $x_{i_j}^k = x_{i_j}^l$ za $j = 1, 2, \ldots, s$ i važi

$$x = \sum_{i=0}^{n} a_i^k x_i^k = \sum_{i=0}^{n} a_i^l x_i^l,$$

gde je $a_i^k = a_i^l = 0$ za sve $i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$. Dakle, vrednost preslikavanja ne zavisi od izbora simpleksa ako x pripada više od jednog, te je preslikavanje dobro definisano za sve $x \in \Omega_0$. Po konstrukciji važi da $F_\varepsilon : \Omega_0 \to \Omega_0$ i da je neprekidno. Po Brauerovom principu fiksne tačke sledi da preslikavanje F_ε ima fiksnu tačku $x_\varepsilon \in \Omega_0$ takvo da $F_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Neka su $z_0, \ldots, z_n$ temena simplksa koji sadrži tav cku x_ε. Po konstrkciji važi da je $\|z_i - z_j\| < \delta$ te je $\|F(z_i) - F(z_j)\| < \varepsilon$. Takođe po definiciji imamo da je $\|F_\varepsilon(z_i) - F(z_i)\| < \varepsilon$ dobijamo da je

$$\|F_\varepsilon(z_i) - F_\varepsilon(z_j)\| \leq \|F_\varepsilon(z_i) - F(z_i)\| + \|F(z_i) - F(z_j)\| + \|F_\varepsilon(z_j) - F(z_j)\| < 3\varepsilon.$$

Dalje, x_ε možemo izraziti u obliku $x_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n} a_i^\varepsilon z_i$ i koristeći da je $x_\varepsilon = F_\varepsilon(x_\varepsilon)$ dobijamo da je $x_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n} a_i^\varepsilon F_\varepsilon\left(z_i\right)$. Sada imamo

$$\|x_\varepsilon - F_\varepsilon(z_j)\| = \left\| \sum_{i=0}^{n} a_i^\varepsilon \left(F_\varepsilon\left(z_i\right) - F_\varepsilon\left(z_j\right)\right) \right\| < 3\varepsilon \sum_{i=0}^{n} a_i^\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Konačno, koristeći da je $\|x_\varepsilon - z_i\| < \delta$ imamo $\|F(x_\varepsilon) - F(z_i)\| < \varepsilon$ te izvodimo nejednakost

$$\|x_\varepsilon - F(x_\varepsilon)\| \leq \|x_\varepsilon - F_\varepsilon(z_i)\| + \|F_\varepsilon(z_i) - F(z_i)\| + \|F(x_\varepsilon) - F(z_i)\| < 5\varepsilon.$$

Dakle, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $x_\varepsilon \in \Omega$ takvo da je $\|x_\varepsilon - F(x_\varepsilon)\| < 5\varepsilon$.

Uzmimo niz brojeva $\varepsilon_k \to 0$ i definišemo $x_k := x_{\varepsilon_k}$. Kako je Ω kompaktan i zatvoren možemo bez gubljenja opštosti pretpostaviti da je niz x_k konvergentan i da $x_k \to x^* \in \Omega$. Sada konačno imamo

$$\|x^* - F(x^*)\| \leq \|x^* - x_k\| + \|x_k - F(x_k)\| + \|F(x_k) - F(x^*)\|$$

i sva tri sabirka sa desne strane teže nuli kada $k \to \infty$ jer je F neprekidno. Dakle, važi $x^* = F(x^*)$. $\square$

Posledica 5.1. *Neka je $S \subset \mathbb{B}$ zatvoren i konveksan, gde je $\mathbb{B}$ Banahov prostor i $F : S \to S$ neprekidno. Ako je skup $F(S) \subset S$ relativno kompaktan onda preslikavanje F ima fiksnu tačku.*

Glava 6

Postavka i rešenje problema

Posmatramo sledeći nelinearni početni problem

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot \left(\left(1+u^2\right) \nabla u \right) = f, & na\ (0,T)\times\Omega \\ u(0,\cdot) = u_0 & na\ \Omega \\ \partial_n u = 0 & na\ (0,T)\times\partial\Omega \end{cases}. \tag{6.0.1}$$

gde je $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ograničen domen sa C^1 granicom, a f i u_0 su poznate funkcije.

Pretpostavimo da (6.0.1) ima rešenje u klasičnom smislu, i neka je $\varphi \in C^1([0,T]\times\Omega)$ funkcija takva da $\varphi(T,\cdot) = 0$. Tada množenjem jednačine (6.0.1) funkcijom φ i integraleći po skupu $[0,T]\times\Omega$ dobijamo

$$\int_0^T \int_\Omega u_t \varphi\, dx\, dt - \int_0^T \int_\Omega \nabla \cdot \left(\left(1+u^2\right) \nabla u \right) \varphi\, dx\, dt = \int_0^T \int_\Omega f\varphi\, dx\, dt. \tag{6.0.2}$$

Primenjujući formulu za parcijalnu integraciju na integrale s leve strane jednakosti dobijamo da važi

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega u_t \varphi\, dx\, dt &= \int_\Omega u\varphi\, dx \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \int_\Omega u\varphi_t\, dx\, dt \\ &= -\int_\Omega u_0 \varphi(0,x)\, dx - \int_0^T \int_\Omega u\varphi_t\, dx\, dt \end{aligned} \tag{6.0.3}$$

kao i

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \nabla \cdot \left(\left(1+u^2\right) \nabla u \right) \varphi\, dx\, dt &= \int_0^T \int_{\partial\Omega} \varphi \left(1+u^2\right) \nabla u \cdot n d\sigma\, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \left(\left(1+u^2\right) \nabla u \right)\, dx\, dt \\ &= -\int_0^T \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \left(\left(1+u^2\right) \nabla u \right)\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{6.0.4}$$

Dakle, ubacivanjem (6.0.3) i (6.0.4) u jednakost (6.0.2) dobijamo da za klasična rešenja problema (6.0.1) važi

$$-\int_0^T \int_\Omega u\varphi_t\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega \left(1+u^2\right) \nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx\, dt - \int_\Omega u_0 \varphi(0,x)\, dx = \int_0^T \int_\Omega f\varphi\, dx\, dt, \tag{6.0.5}$$

za sve funkcije $\varphi \in C^1([0,T]\times\Omega)$ takve da $\varphi(T,\cdot)=0$. Birajući niz funkcija $\varphi_n \in C^1([0,T]\times\Omega)$ takvih da $\varphi_n \to \chi_{[0,t]}$ za $t\in[0,T]$ i ubacivanjem u (6.0.2) dobijamo

$$\int_0^T\int_\Omega u_t\chi_{[0,t]}\,dx\,ds - \int_0^T\int_\Omega \nabla\cdot\left(\left(1+u^2\right)\nabla u\right)\chi_{[0,t]}\,dx\,ds = \int_0^T\int_\Omega f\chi_{[0,t]}\,dx\,ds,$$

odnosno imamo

$$\int_0^t\int_\Omega u_t\,dx\,ds - \int_0^t\int_\Omega \nabla\cdot\left(\left(1+u^2\right)\nabla u\right)\,dx\,ds = \int_0^t\int_\Omega f\,dx\,ds, \tag{6.0.6}$$

te kako za prvi integral u (6.0.6) važi

$$\int_0^t\int_\Omega u_t\,dx\,ds = \int_\Omega u(t)\,dx - \int_\Omega u_0\,dx$$

i kako za drugi integral po teoremi divergencije važi

$$\int_0^t\int_\Omega \nabla\cdot\left(\left(1+u^2\right)\nabla u\right)\,dx\,ds = \int_0^t\int_{\partial\Omega}\left(1+u^2\right)\underbrace{\nabla u\cdot n}_{=\partial_n u=0}\,d\sigma\,ds = 0$$

dobijamo konačno

$$\int_\Omega u(t)\,dx = \int_0^t\int_\Omega f\,dx\,ds + \int_\Omega u_0\,dx. \tag{6.0.7}$$

Dalje, ako odaberemo niz funkcija $\phi_n \in C^1([0,T]\times\Omega)$ takvih da $\phi_n\to\chi_{[0,t]}u$ za neko $t\in[0,T]$ i ubacimo u (6.0.2) dobijamo

$$\int_0^t\int_\Omega u\frac{du}{ds}\,dx\,ds + \int_0^t\int_\Omega\left(1+u^2\right)|\nabla u|^2\,dx\,ds = \int_0^t\int_\Omega fu\,dx\,dt.$$

Sada kako je $u\frac{du}{ds}=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(u^2)$ dobijamo

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u(t)^2\,dx + \int_0^t\int_\Omega\left(1+u^2\right)|\nabla u|^2\,dx\,ds = \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2\,dx + \int_0^t\int_\Omega fu\,dx\,ds. \tag{6.0.8}$$

Motivisani identitetima (6.0.5), (6.0.7) i (6.0.8) uvodimo pojam slabog rešenja problema (6.0.1) na sledeći način.

Definicija 6.1. *Funkcija $u\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))\cap L^5(0,T;L^5(\Omega))$ je slabo rešenje problema* (6.1) *ako zadovoljava*

$$-\int_0^T\int_\Omega u\varphi_t\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega\left(1+u^2\right)\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx\,dt - \int_\Omega u_0\varphi(0,x)\,dx = \int_0^T\int_\Omega f\varphi\,dx\,dt,$$

za sve funkcije $\varphi\in C^1([0,T]\times\Omega)$ takve da $\varphi(T,\cdot)=0$ na Ω i važi

$$\int_\Omega u(t)\,dx = \int_\Omega u_0\,dx + \int_0^t\int_\Omega f\,dx\,ds$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u(t)^2\,dx + \int_0^t\int_\Omega\left(1+u^2\right)|\nabla u|^2\,dx\,ds \le \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2\,dx + \int_0^t\int_\Omega fu\,dx\,ds,$$

za sve $t\in[0,T]$.

U odeljcima koji slede dokazujemo tvrđenje

Teorema 6.1. *Za date funkcije* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *i* $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ *postoji jedinstveno slabo rešenje jednačine* (6.0.1) *u smislu definicije 6.1.*

6.1 Aproksimirani problem

Problem (6.0.1) aproksimiramo metodom Galjorkina[1]. Neka je $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormirana baza prostora $L^2(\Omega)$ i ujedno ortogonalna baza prostora $W^{1,2}(\Omega)$, za funkcije w_i možemo birati rešenja problema

$$\begin{cases} \Delta w = -\lambda_i w, & na\ \Omega \\ \partial_n w = 0, & na\ \partial\Omega \end{cases}.$$

za detaljan pregled zašto je ovakav izbor opravdan pogledati [2, 6.5 Theorem 1] i iz eliptične teorije je poznato da važi $w_i \in C^1(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$. Uvodimo oznaku $X^k := \operatorname{span}\{w_i\}_{i=1}^{k}$, gde span predstavlja skup svih linearnih kombinacija.

Neka je prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ fiksiran. Aproksimirani problem konstruišemo na sledeći način. Tražimo funkciju $u^k = u^k(t,x) \in C([0,T];X^k)$ u obliku

$$u^k(t,x) := \sum_{i=1}^{k} a_i^k(t) w_i(x) \tag{6.1.1}$$

koja rešava sledeći početni problem

$$\begin{cases} \left\langle u_t^k, w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle \left(1 + \left(u^k\right)^2\right) \nabla u^k, \nabla w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle f^k, w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ \left\langle u^k, w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)}\Big|_{t=0} = \langle u_0, w_i \rangle_{L^2(\Omega)} \end{cases}, \tag{6.1.2}$$

za sve $i = 1, \dots, k$. Ovde aproksimiramo funkciju f sa nizom glatkih funkcija $f^k \in C^\infty([0,T] \times \Omega)$, gde je sa f^k označena regularizacija funkcije f sa standardnom molifikacionom funkcijom $J_{\frac{1}{k}}$ i važi da $f^k \to f$, $k \to \infty$ u normi prostora $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ i dodatno važi $\left\|f^k\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$, pogledati Teoremu 2.7. Motivisani definicijom 6.1 uvodimo pojam slabog rešenja aproksimiranog problema (6.1.2).

Definicija 6.2. *Za funkciju* $u^k \in C([0,T];X^k) \cap W^{1,\infty}(0,T;X^k)$ *kažemo da je slabo rešenje aproksimiranog problema* (6.1.2) *ako zadovoljava*

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \left\langle u^k, \varphi_t^k \right\rangle_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \left\langle \left(1 + \left(u^k\right)^2\right) \nabla u^k, \nabla \varphi^k \right\rangle_{L^2(\Omega)} dt \\ &= \int_0^T \left\langle f^k, \varphi^k \right\rangle_{L^2(\Omega)} dt + \left\langle u_0^k, \varphi^k\big|_{t=0} \right\rangle_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

[1] Бори́с Григо́рьевич Галёркин (1871 - 1945) - ruski matematičar

gde je $\varphi^k \in C^1([0,T]; X^k)$ *takvo da* $\varphi^k(T, \cdot) = 0$ *dato sa*

$$\varphi^k(t,x) := \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega \varphi w_i \, dx \, w_i,$$

za svaku funkciju $\varphi \in C^1([0,T] \times \Omega)$ *takvu da* $\varphi(T, \cdot) = 0$.

Primetimo da za funkcije φ^k važi da $\varphi^k \to \varphi$ uniformno kada $k \to \infty$. Naime, kako je skup Ω konačne mere znamo da je $C^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ te za svako $t_0 \in [0,T]$ imamo da $\varphi|_{t=t_0} \in L^2(\Omega)$, odnosno za svako $t_0 \in [0,T]$ možemo $\varphi|_{t=t_0}$ zapisati u bazi prostora $L^2(\Omega)$, $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ na sledeći način

$$\varphi|_{t=t_0} = \sum_{i=0}^{\infty} \int_\Omega \varphi|_{t=t_0} w_i \, dx \, w_i.$$

Dakle, za svako $t_0 \in [0,T]$ imamo da $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi^k\big|_{t=t_0} = \varphi|_{t=t_0}$, odnosno imamo $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{0\le t\le T} \left|\varphi - \varphi^k\right| = 0$, što smo i hteli da pokažemo.

6.1.1 Uniformne ocene za rešenja aproksimiranog problema

U ovom odeljku izvodimo apriorne ocene za slaba rešenja aproksimiranog probleme koje će nam biti kasnije potrebne.
Posmatrajmo aproksimirani problem (6.1.2) i za svako i množimo (6.1.2) sa a_i^k i uzimamo sumu po $i = 1, \ldots, k$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} a_i^k(t) \left\langle u_t^k, w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{k} a_i^k(t) \left\langle \left(1 + \left(u^k\right)^2\right) \nabla u^k, \nabla w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ = \sum_{i=1}^{k} a_i^k(t) \left\langle f^k, w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{6.1.3}$$

Kako funkcije $a_i^k(t)$ ne zavise od promenljive x dobijamo sledeći izraz za gradijent funkcije u^k

$$\nabla u^k = \nabla \sum_{i=1}^{k} a_i^k(t) w_i(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i^k(t) \nabla w_i(x). \tag{6.1.4}$$

Iz linearnosti skalarnog proizvoda, (6.1.1) i (6.1.4) imamo da je (6.1.3) ekvivalentno

$$\left\langle u_t^k, u^k \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle \left(1 + \left(u^k\right)^2\right) \nabla u^k, \nabla u^k \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle f^k, u^k \right\rangle_{L^2(\Omega)}. \tag{6.1.5}$$

Raspisujući po definiciji skalarne proizvode u (6.1.5) dobijamo

$$\int_\Omega u_t^k u^k \, dx + \int_\Omega \left(1 + \left(u^k\right)^2\right) \nabla u^k \cdot \nabla u^k \, dx = \int_\Omega f^k u^k \, dx,$$

te kako je $u^k u_t^k = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u^k\right)^2$ imamo

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u^k\right)^2 dx + \int_\Omega \left|\nabla u^k\right|^2 dx + \int_\Omega \left(u^k\right)^2 \left|\nabla u^k\right|^2 dx = \int_\Omega f^k u^k \, dx. \tag{6.1.6}$$

Kako važi

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left|\nabla u^k\right|^2 dx \geq 0,\\
&\int_\Omega \left(u^k\right)^2 \left|\nabla u^k\right|^2 dx \geq 0
\end{aligned}$$

iz (6.1.6) izvodimo zaključak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u^k(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_\Omega f^k u^k \, dx \leq \left\|f^k(t)\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|u^k(t)\right\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\left\|f^k(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|u^k(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right).
\end{aligned} \tag{6.1.7}$$

Po nejednakosti Gronvola (Teorema 1.14) iz (6.1.7) sledi

$$\left\|u^k(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^t \left(\left\|u^k(0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \left\|f^k(s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\right), \tag{6.1.8}$$

za sve $t \in [0, T]$. Pomnožimo takođe početni uslov sa $a_i^k(0)$ i uzmimo sumu po $i = 1, \ldots, k$ i slično kao gore dobijamo

$$\left\langle u^k(0), u^k(0)\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle u_0, u^k(0)\right\rangle_{L^2(\Omega)}. \tag{6.1.9}$$

Iz (6.1.9) primenjujući nejednakost Koši-Švarca i nejednakost geometrijske i aritmetičke sredine sledi

$$\begin{aligned}
\left\|u^k(0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \left\langle u^k(0), u^k(0)\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle u_0, u^k(0)\right\rangle_{L^2(\Omega)}\\
&\leq \left\|u_0\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|u^k(0)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\left(\left\|u_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|u^k(0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right),
\end{aligned}$$

odnosno izvodimo zaključak

$$\left\|u^k(0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left\|u_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{6.1.10}$$

Sada vraćajući se na (6.1.8) i primenjujući (6.1.10) i uzimajući kvadratni koren imamo

$$\begin{aligned}
\left\|u^k(t)\right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sqrt{e^t}\sqrt{\left\|u_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \left\|f^k(s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds}\\
&\leq \sqrt{e^t}\left(\left\|u_0\right\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\int_0^t \left\|f^k(s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds}\right),
\end{aligned}$$

te konačno primenimo supremum po $t \in [0,T]$ da dobijemo

$$\left\|u^k\right\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} = \left\|u^k\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_1 \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right). \quad (6.1.11)$$

Vraćajući se na (6.1.6) i integraleći po $t \in [0,T]$ dobijamo

$$\int_\Omega \left(u^k(T)\right)^2 dx + \int_0^T \int_\Omega \left|\nabla u^k\right|^2 dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega \left(u^k\right)^2 \left|\nabla u^k\right|^2 dx\,dt \leq \int_0^T \int_\Omega f^k u^k\,dx\,dt + \int_\Omega \left(u^k(0)\right)^2 dx,$$

odnosno

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega \left|\nabla u^k\right|^2 dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega \left(u^k\right)^2 \left|\nabla u^k\right|^2 dx\,dt &\leq \int_0^T \int_\Omega f^k u^k\,dx\,dt + \int_\Omega \left(u^k(0)\right)^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(f^k\right)^2 dx\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(u^k\right)^2 dx\,dt + \int_\Omega u_0^2\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{1}{2}T\left\|u^k\right\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\overset{(6.1.11)}{\leq} C_2\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right)\end{aligned}$$

tj. imamo da važi

$$\left\|\nabla u^k\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \left\|u^k \nabla u^k\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_2\left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right), \quad (6.1.12)$$

što zajedno sa činjenicom da je

$$\left\|u^k\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq T\left\|u^k\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$$

i (6.1.11) daje

$$\left\|u^k\right\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} \leq C_3\left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right). \quad (6.1.13)$$

Konačno sumirajući (6.1.11), (6.1.12) i (6.1.13) dobijamo

$$\begin{aligned}&\left\|u^k\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \left\|u^k\right\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} \\ &\qquad + \left\|u^k \nabla u^k\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right),\end{aligned}$$

za odgovarajuću konstantu C.
Iz ocena koje smo do sada izveli imamo da važi, uvodeći oznaku $Q := C\left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right)$

$$\left\|u^k\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq Q; \quad (6.1.14)$$

$$\left\|u^k\right\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} \leq Q; \quad (6.1.15)$$

$$\left\|u^k \nabla u^k\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq Q. \quad (6.1.16)$$

Izvedimo još dodatno jače ocene. Kako je $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ po utapanjima Soboljeva (Teorema 4.10) je $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, odnosno imamo da važi

$$\left\|u^k\right\|_{L^2(0,T;L^6(\Omega))} \leq C_0 \left\|u^k\right\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} \overset{(6.1.15)}{\leq} C_0 Q, \tag{6.1.17}$$

za odgovarajuću konstantu C_0, koja ne zavisi od k. Dalje, primetimo da je $u^k \nabla u^k = \frac{1}{2} \nabla \left(u^k\right)^2$ te iz (6.1.16) sledi

$$\left\|\nabla \left(u^k\right)^2\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_1 Q, \tag{6.1.18}$$

kao i da iz (6.1.14) sledi direktno

$$\left\|\left(u^k\right)^2\right\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leq C_2 Q, \tag{6.1.19}$$

a iz utapanja Lebegovih prostora i (6.1.19) imamo

$$\left\|\left(u^k\right)^2\right\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq C_3 \left\|\left(u^k\right)^2\right\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leq C_3 Q \tag{6.1.20}$$

i takođe iz (6.1.18) sledi

$$\left\|\nabla \left(u^k\right)^2\right\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))} \leq C_4 \left\|\nabla \left(u^k\right)^2\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_5 Q. \tag{6.1.21}$$

Sada iz (6.1.20) i (6.1.21) imamo

$$\left\|\left(u^k\right)^2\right\|_{L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega))} \leq C_6 Q. \tag{6.1.22}$$

Dalje, po utapanjima Soboljeva imamo da je $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, tj.

$$\left\|\left(u^k\right)^2\right\|_{L^2(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\Omega))} \leq C_7 \left\|\left(u^k\right)^2\right\|_{L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega))} \overset{(6.1.22)}{\leq} C_8 Q, \tag{6.1.23}$$

a po utapanjima Lebegovih prostora sledi

$$\left\|\nabla \left(u^k\right)^2\right\|_{L^2(0,T;L^{\frac{3}{2}}(\Omega))} \leq C_9 \left\|\nabla \left(u^k\right)^2\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \overset{(6.1.18)}{\leq} C_{10} Q, \tag{6.1.24}$$

te iz (6.1.23) i (6.1.24) imamo

$$\left\|\left(u^k\right)^2\right\|_{L^2(0,T;W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega))} \leq C_{11} Q. \tag{6.1.25}$$

Ponovo primenjujući utapanja Soboljeva i utapanja Lebegovih prostora iz (6.1.25) dobijamo

$$\left\|\left(u^k\right)^2\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{12} \left\|\left(u^k\right)^2\right\|_{L^2(0,T;L^3(\Omega))} \leq C_{13} \left\|\left(u^k\right)^2\right\|_{L^2(0,T;W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega))} \leq C_{13} Q. \tag{6.1.26}$$

Imamo, kombinujući (6.1.18) i (6.1.26) i utapanja Soboljeva

$$\left\|\left(u^k\right)^2\right\|_{L^2(0,T;L^6(\Omega))} \leq C_{14}\left\|\left(u^k\right)^2\right\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} \leq C_{15}Q. \tag{6.1.27}$$

Primenjujući teoremu o interpolaciji Lebegovih prostora (Teorema 2.8) na (6.1.19) i (6.1.27) za $\theta = \frac{1}{4}$ izvodimo konačno zaključak

$$\left\|\left(u^k\right)^2\right\|_{L^{\frac{8}{3}}(0,T;L^{\frac{8}{3}}(\Omega))} \leq \left\|\left(u^k\right)^2\right\|^{\theta}_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}\left\|\left(u^k\right)^2\right\|^{1-\theta}_{L^2(0,T;L^6(\Omega))} \leq C_{16}Q. \tag{6.1.28}$$

6.1.2 Rešavanje aproksimiranog problema metodom fiksne tačke

Način na koji pristupamo rešavanju datog problema, jeste polazeći od nečeg što znamo da rešimo, to je linearna parabolična jednačina. Glavna ideja je da aproksimirani problem napišemo kao problem fiksne tačke za određeni operator te pronalaskom adekvatnog kompaktnog skupa dobijemo fiksnu tačku po principu Šaudera, koja će ustvari biti rešenje problema (6.1.2).

Posmatrajmo sledeću linearizaciju aproksimiranog problema (6.1.2)

$$\begin{cases} \left\langle u_t^k, w_i\right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle\left(1+\tilde{u}^2\right)\nabla u^k, \nabla w_i\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle f^k, w_i\right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ \left\langle u^k, w_i\right\rangle_{L^2(\Omega)}\Big|_{t=0} = \langle u_0, w_i\rangle_{L^2(\Omega)} \end{cases}, \tag{6.1.29}$$

gde je $\tilde{u}$ data funkcija. Raspišimo član $\left\langle\left(1+\tilde{u}^2\right)\nabla u^k, \nabla w_i\right\rangle_{L^2(\Omega)}$.

$$\begin{aligned} \left\langle\left(1+\tilde{u}^2\right)\nabla u^k, \nabla w_i\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \left(1+\tilde{u}^2\right)\nabla u^k \cdot \nabla w_i\, dx \\ &= \int_\Omega \left(1+\tilde{u}^2\right)\sum_{j=1}^k a_j^k(t)\nabla w_j \cdot \nabla w_i\, dx \\ &= \sum_{j=1}^k a_j^k(t) \underbrace{\int_\Omega \left(1+\tilde{u}^2\right)\nabla w_j \cdot \nabla w_i\, dx}_{:=g_{i,j}(t)}. \end{aligned}$$

Primetimo da su funkcije $g_{i,j}(t)$ dobro definisane i neprekidne ako važi da $\tilde{u} \in C([0,T];L^2(\Omega))$, i važi ocena

$$\begin{aligned} |g_{i,j}(t)| &= \left|\int_\Omega \left(1+\tilde{u}^2\right)\nabla w_j \cdot \nabla w_i\, dx\right| \leq \int_\Omega \left|1+\tilde{u}^2\right| \left|\nabla w_j \cdot \nabla w_i\right|\, dx \\ &\leq \int_\Omega \left|\nabla w_j \cdot \nabla w_i\right|\, dx + \int_\Omega \tilde{u}^2 \left|\nabla w_j \cdot \nabla w_i\right|\, dx \\ &\leq \|\nabla w_j\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w_i\|_{L^2(\Omega)} + \max_{x\in\Omega}\left|\nabla w_j \cdot \nabla w_i\right| \int_\Omega \tilde{u}^2\, dx \\ &\leq \lambda_j\lambda_i + \beta_j\beta_i \|\tilde{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{6.1.30}$$

gde za svao $i = 1, \ldots .k$ uvodimo oznaku $\beta_i := \max_{x\in\Omega} |\nabla w_i|$, što je dobro definisano jer $w_i \in C^1(\Omega)$. Dalje, uzimajući maksimum po $t \in [0,T]$ imamo iz (6.1.30)

$$\|g_{i,j}\|_{C([0,T])} \le \lambda_j \lambda_i + \beta_j \beta_i \|\tilde{u}\|^2_{C([0,T];L^2(\Omega))} .$$

Primetimo da za proizvod $\left\langle u_t^k, w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)}$ u jednačini (6.1.29) važi

$$\left\langle u_t^k, w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{da_i^k}{dt}$$

i uvodeći oznaku $f_i^k(t) := \left\langle f^k, w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)}$, dobijamo za sve $i = 1, \ldots, k$

$$\begin{aligned} \frac{da_i^k}{dt} &= -\sum_{j=1}^{k} a_j^k(t) g_{i,j}(t) + f_i^k(t), \\ a_i^k(0) &= \langle u_0, w_i \rangle_{L^2(\Omega)} , \end{aligned} \tag{6.1.31}$$

odnosno imamo sistem od k linearnih običnih diferencijalnih jednačina, gde su nepoznate funkcije $a_i^k(t)$. Po teoriji običnih diferencijalnih jednačina, pogledati [8], ovaj sistem ima jedinstveno neprekidno rešenje $\mathbf{a}^k(t) = \begin{pmatrix} a_1^k(t) \\ \vdots \\ a_k^k(t) \end{pmatrix}$.

Kako je $g_{i,j} \in C([0,T])$ za sve $i, j = 1, \ldots, k$, i kako je funkcija f^k neprekidna po vremenskoj promenljivoj, tj. $f^k \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ dobijamo takođe $f_i^k \in C([0,T])$. Onda imamo da važi $\frac{da_i^k}{dt} \in C([0,T])$ te za rešenje jednačine važi $\mathbf{a}^k \in C^1([0,T])$, odnosno imamo da $u^k \in C^1([0,T]; X^k)$.

Definišimo operator $\mathcal{M} : B_R^k \to B_R^k$ koji funkciji $\tilde{u}$ dodeljuje rešenje u^k problema (6.1.29), gde je skup B_R^k data sa

$$B_R^k = \left\{ \psi \in C([0,T]; X^k) : \|\psi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \le R \right\},$$

gde je $R = C \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right)$. Primetimo, ako $\tilde{u} \in B_R^k$ onda i $u^k \in B_R^k$ što sledi slično kao (6.1.11) izvodimo

$$\left\|u^k\right\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \le C \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right),$$

za svaki izbor funkcije $\tilde{u}$, te možemo uzeti $\tilde{u} \in B_R^k$. Dakle, operator $\mathcal{M}$ je dobro definisan. Dokažimo još i da je neprekidan.

Tvrđenje 6.2. *Operator $\mathcal{M} : B_R^k \to B_R^k$ je neprekidan.*

Dokaz. Neka $\tilde{u}_m \to \tilde{u}$ u normi prostora $C([0,T]; L^2(\Omega))$. Dokažimo da onda i $u_m \to u$, gde je za svako $m \in \mathbb{N}$, u_m slika operatorom $\mathcal{M}$ funkcije $\tilde{u}_m$, a u je slika od $\tilde{u}$, operatorom $\mathcal{M}$, izostavljamo indeks k da rasteretimo notaciju.
Posmatrajmo jednačine

$$\langle u_t, w_i \rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle \left(1 + \tilde{u}^2\right) \nabla u, \nabla w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle f^k, w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} \tag{6.1.32}$$

$$\left\langle (u_m)_t , w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle \left(1 + \tilde{u}_m^2\right) \nabla u_m, \nabla w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle f^k, w_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} , \tag{6.1.33}$$

uz uslov

$$\langle u, w_i\rangle_{L^2(\Omega)}\Big|_{t=0} = \langle u_0, w_i\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u_m, w_i\rangle_{L^2(\Omega)}\Big|_{t=0}, \tag{6.1.34}$$

za sve $i = 1, \ldots, k$. Napravimo razliku (6.1.32) i (6.1.33) i početnih uslova (6.1.34) za svako $i = 1, \ldots, k$, i dobijamo problem

$$\begin{cases} \langle u_t - (u_m)_t\,, w_i\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle (1+\tilde{u}^2)\,\nabla u - (1+\tilde{u}_m^2)\,\nabla u_m, \nabla w_i\rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \\ \langle u - u_m, w_i\rangle_{L^2(\Omega)}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}, \tag{6.1.35}$$

za sve $i = 1, \ldots, k$. Množimo (6.1.35) sa $a_i - a_{m_i}$ za svako $i \in \{1, \ldots, k\}$ i sumiramo po i

$$\langle u_t - (u_m)_t\,, u - u_m\rangle_{L^2(\Omega)} + \left\langle \left(1+\tilde{u}^2\right)\nabla u - \left(1+\tilde{u}_m^2\right)\nabla u_m, \nabla\left(u - u_m\right)\right\rangle_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Raspisujući skalarne proizvode po definiciji imamo da važi

$$\int_\Omega (u-u_m)\,(u-u_m)_t\;dx = -\int_\Omega \nabla\left(u-u_m\right)\cdot\left(\left(1+\tilde{u}^2\right)\nabla u - \left(1+\tilde{u}_m^2\right)\nabla u_m\right)\,dx.$$

Primetimo da je $(u-u_m)\,(u-u_m)_t = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u-u_m\right)^2$ i raspišimo integral sa desne strane

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u-u_m)^2\;dx = &-\int_\Omega |\nabla u|^2\;dx - \int_\Omega \tilde{u}^2\,|\nabla u|^2\;dx + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u_m\,dx \\ &+\int_\Omega \tilde{u}_m^2\nabla u\cdot\nabla u_m\,dx + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u_m\,dx + \int_\Omega \tilde{u}^2\nabla u\cdot\nabla u_m\,dx \\ &-\int_\Omega |\nabla u_m|^2\;dx - \int_\Omega \tilde{u}_m^2\,|\nabla u_m|^2\;dx.\end{aligned} \tag{6.1.36}$$

Jednakosti (6.1.36) dodamo i oduzmemo $\int_\Omega 2\tilde{u}\tilde{u}_m\nabla u\cdot\nabla u_m\,dx$ da bi dobili

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u-u_m)^2\;dx = &\int_\Omega (u-u_m)^2\,\nabla u\cdot\nabla u_m\,dx - \int_\Omega |\nabla u|^2\;dx - \int_\Omega \tilde{u}^2\,|\nabla u|^2\;dx \\ &-\int_\Omega |\nabla u_m|^2\;dx - \int_\Omega \tilde{u}_m^2\,|\nabla u_m|^2\;dx + 2\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u_m\,dx \\ &+2\int_\Omega \tilde{u}_m\nabla u_m\cdot\tilde{u}\nabla u\,dx.\end{aligned} \tag{6.1.37}$$

Primenjujući nejednakost Koši-Švarca na desnu stranu (6.1.37) dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u-u_m)^2\,dx \leq{}& \int_\Omega (\tilde{u}-\tilde{u}_m)^2\,\nabla u\cdot\nabla u_m\,dx - \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega \tilde{u}^2\,|\nabla u|^2\,dx \\
&- \int_\Omega |\nabla u_m|^2\,dx - \int_\Omega \tilde{u}_m^2\,|\nabla u_m|^2\,dx \\
&+ 2\sqrt{\int_\Omega \tilde{u}^2\,|\nabla u|^2\,dx}\sqrt{\int_\Omega \tilde{u}_m^2\,|\nabla u_m|^2\,dx} \\
&+ 2\sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}\sqrt{\int_\Omega |\nabla u_m|^2\,dx} \\
\leq{}& \int_\Omega (\tilde{u}-\tilde{u}_m)^2\,\nabla u\cdot\nabla u_m\,dx - \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega \tilde{u}^2\,|\nabla u|^2\,dx \\
&- \int_\Omega |\nabla u_m|^2\,dx - \int_\Omega \tilde{u}_m^2\,|\nabla u_m|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
&+ \int_\Omega \tilde{u}^2\,|\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u_m|^2\,dx + \int_\Omega \tilde{u}_m^2\,|\nabla u_m|^2\,dx \\
={}& \int_\Omega (\tilde{u}-\tilde{u}_m)^2\,\nabla u\cdot\nabla u_m\,dx \\
\leq{}& \max_{x\in\Omega}|\nabla u\cdot\nabla u_m|\int_\Omega (\tilde{u}-\tilde{u}_m)^2\,dx.
\end{aligned} \tag{6.1.38}$$

Konačno, integralaći (6.1.38) po vremenskoj promenljivoj na skupu $[0,t]$ i uzimajući maksimum po $t\in[0,T]$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\max_{0\leq t\leq T}\int_\Omega (u-u_m)^2\,dx \leq{}& \int_0^T \max_{x\in\Omega}|\nabla u\cdot\nabla u_m|\int_\Omega (\tilde{u}-\tilde{u}_m)^2\,dx\,dt \\
\leq{}& \int_0^T \max_{x\in\Omega}|\nabla u\cdot\nabla u_m|\,dt\,\max_{0\leq t\leq T}\int_\Omega (\tilde{u}-\tilde{u}_m)^2\,dx,
\end{aligned}$$

odnosno imamo

$$\|u-u_m\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq \sqrt{2\int_0^T \max_{x\in\Omega}|\nabla u\cdot\nabla u_m|\,dt}\,\|\tilde{u}-\tilde{u}_m\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}.$$

Treba još pokazati da je $\int_0^T \max_{x\in\Omega} |\nabla u \cdot \nabla u_m|\, dt$ ograničeno.

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \max_{x\in\Omega} |\nabla u \cdot \nabla u_m|\, dt &= \int_0^T \max_{x\in\Omega} \left| \sum_{i=1}^k a_i(t)\nabla w_i(x) \cdot \sum_{j=1}^k a_{m_j}(t)\nabla w_j(x) \right| dt \\
&= \int_0^T \max_{x\in\Omega} \left| \sum_{i,j=1}^k a_i(t)a_{m_j}(t)\nabla w_i(x) \cdot \nabla w_j(x) \right| dt \\
&\le \int_0^T \sum_{i,j=1}^k |a_i(t)| \left|a_{m_j}(t)\right| dt \max_{x\in\Omega} |\nabla w_i(x) \cdot \nabla w_j(x)| \\
&\le \sum_{i,j=1}^k \int_0^T |a_i(t)| \left|a_{m_j}(t)\right| dt \max_{x\in\Omega} |\nabla w_i(x)| \max_{x\in\Omega} |\nabla w_j(x)| \\
&\le \sum_{i,j=1}^k T \max_{0\le t\le T} |a_i(t)| \left|a_{m_j}(t)\right| \beta_i\beta_j \\
&\le T \sum_{i,j=1}^k \underbrace{\max_{0\le t\le T} |a_i(t)|}_{:=\alpha_i} \underbrace{\max_{0\le t\le T} \left|a_{m_j}(t)\right|}_{:=\alpha_{m_j}} \beta_i\beta_j \\
&\le \underbrace{Tk \max_{1\le i\le k} \alpha_i \max_{1\le j\le k} \alpha_{m_j} \max_{1\le i\le k} \beta_i \max_{1\le j\le k} \beta_j}_{:=\Gamma(k,R)} .
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$
\|u - u_m\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \le \sqrt{2\Gamma kT}\, \|\tilde{u} - \tilde{u}_m\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} ,
$$

čime je dokaz završen. □

Dakle, operator koji funkciji $\tilde{u} \in B_R^k$ dodeljuje rešenje $u^k \in B_R^k$ linearizovanog aproksimiranog problema (6.1.29) je neprekidan, i imamo da $u^k \in C^1([0,T];X^k) \cap B_R^k$. Dokažimo još da je u^k ograničeno u normi prostora $C^1([0,T];X^k)$, tj. dokazujemo da je $\left\|u_t^k\right\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \le K$ za neku konstantu K. Prvo, primetimo da važi

$$
\left\|u_t^k\right\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} = \max_{0\le t\le T} \sqrt{\int_\Omega \sum_{i=1}^k \left(\frac{da_i}{dt}\right)^2 w_i^2\, dx} \le \max_{0\le t\le T} \sum_{i=1}^k \left|\frac{da_i}{dt}\right| .
$$

Ocenimo sada $\frac{da_i}{dt}$, po (6.1.31) imamo

$$\begin{aligned}
\left|\frac{da_i}{dt}\right| &= \left|-\sum_{j=1}^{k} a_j(t) g_{i,j}(t) + f_i^k(t)\right| \leq \sum_{j=1}^{k} |a_j(t)|\,|g_{i,j}(t)| + \left|f_i^k(t)\right| \\
&\overset{(6.1.30)}{\leq} \sum_{j=1}^{k} |a_j(t)| \left(\lambda_j\lambda_i + \beta_j\beta_i \|\tilde{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \underbrace{\max_{t\in[0,T]} \left\|f^k\right\|_{L^2(\Omega)}(t)}_{:=K_f(k)} \\
&\leq \max_{1\leq j\leq k} |a_j(t)| \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_j\lambda_i + \beta_j\beta_i \|\tilde{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + K_f(k) \\
&\leq \underbrace{\sum_{j=1}^{k} |a_j(t)|}_{\leq\frac{1}{2}\left(k+\|u\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}\right)} \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_j\lambda_i + \beta_j\beta_i \|\tilde{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + K_f(k) \\
&\leq \frac{1}{2}(k+R) \underbrace{\sum_{j=1}^{k} (\lambda_j\lambda_i + \beta_j\beta_i R)}_{:=K_1(k,R)} + K_f(k) =: K'(k,R),
\end{aligned} \tag{6.1.39}$$

ondnosno $\left\|u_t^k\right\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq kK' =: K(k,R)$.

Sada imamo za svako $\tilde{u} \in B_R^k$ rešenje problema (6.1.29) $u^k \in C^1([0,T];X^k) \cap B_R^k$ takvo da $\left\|u_t^k\right\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq K$, gde je K konstanta koja zavisi isključivo od k i R za svako $k \in \mathbb{N}$. Primetimo da je onda ovakvo u^k i rešenje (6.1.29) u slabom smislu, za dato $\varphi \in C^1([0,T] \times \Omega)$ takvo da $\varphi(T,\cdot) = 0$, množenjem (6.1.29) sa $\int_\Omega \varphi w_i\,dx$ i sumiranjem po $i = 1,\ldots,k$ te integracijom po $t \in [0,T]$ dobijamo da važi

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \left\langle u^k, \varphi_t^k\right\rangle_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \left\langle \left(1+\tilde{u}^2\right)\nabla u^k, \nabla\varphi^k\right\rangle_{L^2(\Omega)} dt \\
&= \int_0^T \left\langle f^k, \varphi^k\right\rangle_{L^2(\Omega)} dt + \left\langle u_0^k, \varphi^k\big|_{t=0}\right\rangle_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

gde je φ^k dato kao u definiciji 6.2. Dalje, kako je $\left\|u_t^k\right\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq K$, dobijamo po teoremi srednje vrednosti da je funkcija $\left\|u^k(t)\right\|_{L^2(\Omega)}$ Lipšic[2] neprekidna sa konstantom K, odnosno $u^k \in \mathrm{Lip}_K([0,T];X^k) \cap B_R^k$, što je klasa ekvineprekidnih funkcija. Sada, po teoremi Arzela-Askoli sledi da je skup $\mathrm{Lip}_K([0,T];X^k) \cap B_R^k$ relativno kompaktan unutar B_R^k, te prema posledici teoreme Šaudera o fiksnoj tački sledi da operator $\mathcal{M}$ ima fiksnu tačku unutar skupa B_R^k, odnosno postoji funkcija $u^k \in C([0,T];X^k)$ takva da $\left\|u^k\right\| \leq R$ koja je slabo rešenje problema

[2] Rudolf Lipschitz (1832 - 1903) - nemački matematičar

(6.1.2) u smislu definicije 6.2 tj. važi

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \langle u^k, \varphi_t^k \rangle_{L^2(\Omega)}\, dt + \int_0^T \left\langle \left(1 + \left(u^k\right)^2\right) \nabla u^k, \nabla \varphi^k \right\rangle_{L^2(\Omega)} dt \\
&= \int_0^T \langle f^k, \varphi^k \rangle_{L^2(\Omega)}\, dt + \langle u_0^k, \varphi^k|_{t=0} \rangle_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

gde je φ^k dato kao u definiciji 6.2. Takođe, iz ocene (6.1.39) imamo da $u^k \in W^{1,\infty}(0,T;X^k)$, odnosno $u^k \in B_R^k \cap W^{1,\infty}(0,T;X^k)$.

6.2 Konvergencija rešenja aproksimiranog problema ka slabom rešenju

Polazeći od ocena koje smo izveli u odeljku 6.1.1 po Teoremi 4.15 postoji podniz niza u^k koji slabo konvergira, označimo slabi limes sa u i bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je baš u^k taj konvergentan podniz, odnosno imamo sledeće slabe konvergencije

$$\begin{aligned}
u^k &\rightharpoonup u, && u\ L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)) \\
\nabla u^k &\rightharpoonup \nabla u, && u\ L^2(0,T;L^2(\Omega)),
\end{aligned}$$

dok po konstrukciji imamo sledeće jake konvergencije

$$\begin{aligned}
f^k &\to f, && u\ L^2(0,T;L^2(\Omega)); \\
u_0^k &\to u_0, && u\ L^2(\Omega); \\
\varphi^k &\to \varphi, && u\ C^1([0,T]\times\Omega).
\end{aligned}$$

Izvedimo sada jaku konvergenciju $u^k \to u$ u nekom prostoru, da bismo to odradili potrebna nam je ocena norme za u_t. Pretpostavimo da je $\psi \in C_0^\infty((0,T)\times\overline{\Omega})$, onda iz jednačine imamo da važi

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega u_t^k \psi \, dx\, dt &= \int_0^T \int_\Omega u_t^k \psi^k \, dx\, dt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega \left(1 + \left(u^k\right)^2\right) \nabla u^k \cdot \nabla \psi^k \, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega f^k \psi^k \, dx\, dt \\
&\le \int_0^T \int_\Omega \left| \nabla u^k \cdot \nabla \psi^k \right| dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega \left| \left(u^k\right)^2 \nabla u^k \cdot \nabla \psi^k \right| dx\, dt \\
&\quad + \int_0^T \int_\Omega \left| f^k \psi^k \right| dx\, dt \\
&\le \left\| \nabla u^k \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \left\| \nabla \psi \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \left\| f^k \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \left\| \psi \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\quad + \left\| \left(u^k\right)^2 \right\|_{L^{\frac{8}{3}}(0,T;L^{\frac{8}{3}}(\Omega))} \left\| \nabla u^k \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \left\| \nabla \psi \right\|_{L^8(0,T;L^8(\Omega))},
\end{aligned}$$

gde je

$$\psi^k = \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega \psi w_i \, dx \, w_i.$$

Sada, po (6.1.15) imamo da je $\left\|\nabla u^k\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{17}$ i kako je $\left\|f^k\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq Q$, te iz (6.1.28) sledi

$$\int_0^T \int_\Omega u_t^k \psi \, dx \, dt \leq C_{18} \|\psi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + C_{19} \|\nabla\psi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + C_{20} \|\nabla\psi\|_{L^8(0,T;L^8(\Omega))}, \tag{6.2.1}$$

te po utapanjima Lebegovih prostora iz (6.2.1) sledi

$$\int_0^T \int_\Omega u_t^k \psi \, dx \, dt \leq C_{21} \|\psi\|_{L^8(0,T;L^8(\Omega))} + C_{22} \|\nabla\psi\|_{L^8(0,T;L^8(\Omega))} + C_{23} \|\nabla\psi\|_{L^8(0,T;L^8(\Omega))},$$

te konačno imamo da važi

$$\int_0^T \int_\Omega u_t^k \psi \, dx \, dt \leq C_{24} \|\psi\|_{L^8(0,T;W^{1,8}(\Omega))},$$

odnosno važi

$$\left\|u_t^k\right\|_{L^{\frac{8}{7}}(0,T;\,[W^{1,8}(\Omega)]')} \leq C_{24}. \tag{6.2.2}$$

Po teoremi Relih-Kondrašova (Teorema 4.11) imamo da se prostor $W^{1,2}(\Omega)$ kompaktno utapa u prostore $L^p(\Omega)$ za sve $1 \leq p < 6$. Pronađimo odgavarujuću vrednost eksponenta p iz datog intervala da bismo imali utapanje iz $L^p(\Omega)$ u $[W^{1,8}(\Omega)]'$. Ako se $W^{1,8}(\Omega)$ utapa u $[L^p(\Omega)]'$, onda važi $L^p(\Omega) \hookrightarrow [W^{1,8}(\Omega)]'$, a po utapanjima Soboljeva, pošto je $8 > 3$ imamo da $W^{1,8}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$, te kako je skup Ω ograničen, onda $W^{1,8}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ za proizvoljno p, stoga odaberimo $p = 2$. Dakle, imamo $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow [W^{1,8}(\Omega)]'$, gde je prvo utapanje kompaktno. Dakle, kako imamo sledeće slabe konvergencije

$$\begin{aligned} u^k &\rightharpoonup u, && u\ L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)); \\ u_t^k &\rightharpoonup u_t, && u\ L^{\frac{8}{7}}(0,T;\ \left[W^{1,8}(\Omega\right]')]). \end{aligned}$$

po teoremi Aubin-Lionsa (Teorema 4.16) dobijamo

$$u^k \to u, \qquad u\ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{6.2.3}$$

Dokažimo da imamo konvergenciju u normi u prostoru sa većim eksponentom. Po teoremi o interpolaciji (Teorema 2.8) za prostore $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ i $L^{\frac{16}{3}}(0,T;L^{\frac{16}{3}}(\Omega))$ i uzimajući $\theta = \frac{1}{25}$ dobijamo

$$\left\|u^k - u\right\|_{L^5(0,T;L^5(\Omega))} \leq \left\|u^k - u\right\|^{\theta}_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \left\|u^k - u\right\|^{1-\theta}_{L^{\frac{16}{3}}(0,T;L^{\frac{16}{3}}(\Omega))},$$

pa iz ocene (6.1.28) i jake konvergencije (6.2.3) dobijamo

$$u^k \to u, \qquad u\ L^5(0,T;L^5(\Omega)),$$

te direktno sledi

$$\left(u^k\right)^2 \to u^2, \qquad u\ L^{\frac{5}{2}}(0,T;L^{\frac{5}{2}}(\Omega)). \tag{6.2.4}$$

Neka je sada $\psi \in C_0^\infty((0,T)\times\overline{\Omega})$. Posmatramo integral

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega \left(u^k\right)^2 \nabla u^k\cdot\nabla\psi\,dx\,dt &= \int_0^T\int_\Omega \left(\left(u^k\right)^2 - u^2\right)\nabla u^k\cdot\nabla\psi\,dx\,dt\\ &+ \int_0^T\int_\Omega u^2\nabla u^k\cdot\nabla\psi\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Uzimajući limes $k\to\infty$, iz (6.2.4) i uniformne ograničenosti ∇u^k dobijamo da prvi integral sa desne strane konvergira ka nuli, tj. dobijamo

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_0^T\int_\Omega \left(u^k\right)^2\nabla u^k\cdot\nabla\psi\,dx\,dt &= \lim_{k\to\infty}\int_0^T\int_\Omega u^2\nabla u^k\cdot\nabla\psi\,dx\,dt\\ &= \int_0^T\int_\Omega u^2\nabla u\cdot\nabla\psi\,dx\,dt,\end{aligned}$$

a kako važi

$$\int_0^T\int_\Omega \left(u^k\right)^2\nabla u^k\cdot\nabla\psi\,dx\,dt \le \left\|\left(u^k\right)^2\right\|_{L^{\frac{5}{2}}(0,T;L^{\frac{5}{2}}(\Omega))}\left\|\nabla u^k\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|\nabla\psi\|_{L^{10}(0,T;L^{10}(\Omega))}$$

imamo sledeću slabu konvergenciju

$$\left(u^k\right)^2\nabla u^k \rightharpoonup u^2\nabla u \qquad u\ L^{\frac{10}{9}}(0,T;L^{\frac{10}{9}}(\Omega)).$$

Konačno, sumirajmo konvergencije koje imamo

$$\begin{aligned}&\left(u^k\right)^2\nabla u^k \rightharpoonup u^2\nabla u, && u\ L^{\frac{10}{9}}(0,T;L^{\frac{10}{9}}(\Omega));\\ &u^k\to u, && u\ L^5(0,T;L^5(\Omega));\\ &f^k\to f, && u\ L^2(0,T;L^2(\Omega));\\ &u_0^k\to u_0, && u\ L^2(\Omega).\end{aligned}$$

Dalje, kako $\varphi^k\to\varphi$ u $C^1([0,T]\times\Omega)$ dobijamo da sledeći integrali konvergiraju

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega\left(1+\left(u^k\right)^2\right)\nabla u^k\cdot\nabla\varphi^k\,dx\,dt \to \int_0^T\int_\Omega\left(1+u^2\right)\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx\,dt;\\ &\int_0^T\int_\Omega u^k\varphi_t^k\,dx\,dt\to\int_0^T\int_\Omega u\varphi_t\,dx\,dt;\\ &\int_0^T\int_\Omega f^k\varphi^k\,dx\,dt\to\int_0^T\int_\Omega f\varphi\,dx\,dt;\\ &\int_\Omega u_0^k\varphi^k(0,x)\,dx\to\int_\Omega u_0\varphi(0,x)\,dx,\end{aligned}$$

kada $k\to\infty$, odnosno niz slabih rešenja aproksimiranog problema (6.1.2) konvergira ka slabom rešenju polazne jednačine (6.0.1). Pokažimo da važe i nejednakosti iz definicije 6.1. Prvo, birajući niz test funkcija $\varphi_n \in C^1([0,T] \times \Omega)$ takvih da $\varphi_n \to \chi_{[0,t_0]}$ za neko $t_0 \in [0,T]$ dobijamo, za svako $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^T \int_\Omega \left(1 + \left(u^k\right)^2\right) \nabla u^k \cdot \nabla \varphi_n^k \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega \left(1 + u^2\right) \nabla u \cdot \nabla \varphi_n \, dx \, dt;$$
$$\int_0^T \int_\Omega u^k \left(\varphi_n^k\right)_t \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega u \left(\varphi_n\right)_t \, dx \, dt;$$
$$\int_0^T \int_\Omega f^k \varphi_n^k \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega f \varphi_n \, dx \, dt;$$
$$\int_\Omega u_0^k \varphi_n^k(0,x) \, dx \to \int_\Omega u_0 \varphi_n(0,x) \, dx,$$

kada $k \to \infty$, odnosno za sve $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_\Omega u \left(\varphi_n\right)_t \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \left(1 + u^2\right) \nabla u \cdot \nabla \varphi_n \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega f \varphi_n \, dx \, dt \\ + \int_\Omega u_0 \varphi_n(0,x) \, dx. \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Kako je $\chi_{[0,t_0]}$ funkcija isključivo po vremenu to je $\nabla \chi_{[0,t_0]} = 0$, odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} \nabla \varphi_n = 0$ i takođe, kako izvod posmatramo distributivno imamo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\varphi_n\right)_t = -\delta_{t_0}$ i konačno $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(0,\cdot) = 1$. Dakle, puštajući da $n \to \infty$ iz jednačine (6.2.5) imamo

$$\int_\Omega u(t_0) \, dx = \int_0^{t_0} \int_\Omega f \, dx \, ds + \int_\Omega u_0 \, dx.$$

Primetimo da iz utapanja Soboljeva imamo da je zadovoljeno $W^{1,\frac{8}{7}}(0,T;[W^{1,8}(\Omega)]') \subset C([0,T];[W^{1,8}(\Omega)]')$ te kako je $u \in W^{1,\frac{8}{7}}(0,T;[W^{1,8}(\Omega)]')$ imamo da je $\int_\Omega u(t) \, dx$ dobro definisano za sve $t \in [0,T]$.
Da bismo izveli drugu nejednakost, posmatrajmo jednakost (6.1.6)

$$\int_\Omega \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(u^k\right)^2 \, dx + \int_\Omega \left|\nabla u^k\right|^2 \, dx + \int_\Omega \left(u^k\right)^2 \left|\nabla u^k\right|^2 \, dx = \int_\Omega f^k u^k \, dx$$

te integralimo datu jednakost po vremenskoj promenljivoj po skupu $[0,t]$ za neko $t \in [0,T]$ te dobijamo

$$\frac{1}{2} \int_\Omega u^k(t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left(1 + \left(u^k\right)^2\right) \left|\nabla u^k\right|^2 dx \, ds = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(u_0^k\right)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega f^k u^k \, dx \, ds,$$

te iz donje slabe poluneprekidnosti norme prostora Soboljeva i Lebegovih prostora (Teorema 4.17) i jake konvergencije $u_0^k \to u_0$ u $L^2(\Omega)$ i $f^k \to f$ u $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

kada $k \to \infty$ izvodimo zaključak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega u(t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left(1+u^2\right)|\nabla u|^2 \, dx\, ds &\le \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega u^k(t)^2 dx \\
&\quad + \lim_{k\to\infty} \int_0^t \int_\Omega \left(1+\left(u^k\right)^2\right)\left|\nabla u^k\right|^2 dx\, ds \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega \left(u_0^k\right)^2 dx \\
&\quad + \lim_{k\to\infty} \int_0^t \int_\Omega f^k u^k \, dx\, ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2 \, dx + \int_0^t \int_\Omega f u \, dx\, ds,
\end{aligned}$$

odnosno važi nejednakost

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u(t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left(1+u^2\right)|\nabla u|^2 \, dx\, ds \le \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2 \, dx + \int_0^t \int_\Omega f u \, dx\, ds.$$

6.3 Jedinstvenost slabih rešenja

Pretpostavimo sada da imamo dva slaba rešenja u_1 i u_2 u smislu definiceije 6.1 problema (6.0.1). Tada važi

$$\int_0^T \int_\Omega u_i \varphi_t \, dx\, dt = \int_0^T \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \left(1+u_i^2\right)\nabla u_i \, dx\, dt - \int_0^T \int_\Omega f\varphi \, dx\, dt - \int_\Omega u_0 \varphi(0)\, dx, \tag{6.3.1}$$

za sve test funkcije $\varphi \in C^1([0,T]\times\Omega)$ takve da $\varphi(T) = 0$ za $i = 1, 2$.

Pravimo razliku (6.3.1) za $i = 1$ i $i = 2$ dobijamo

$$\int_0^T \int_\Omega (u_1 - u_2)\,\varphi_t \, dx\, dt = \int_0^T \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \left(\left(1+u_1^2\right)\nabla u_1 - \left(1+u_2^2\right)\nabla u_2\right) dx\, dt. \tag{6.3.2}$$

Uzmimo sada za funkciju φ sledeće

$$\varphi(t,x) := \int_T^t \left(u_1(s,x) - u_2(s,x) + \frac{1}{3}u_1^3(s,x) - \frac{1}{3}u_2^3(s,x)\right) ds. \tag{6.3.3}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
&\varphi_t = u_1(t,x) - u_2(t,x) + \frac{1}{3}u_1^3(t,x) - \frac{1}{3}u_2^3(t,x);\\
&\nabla\varphi = \int_T^t \left(\left(1+u_1^2\right)\nabla u_1 - \left(1+u_2^2\right)\nabla u_2\right) ds;\\
&\varphi(T,\cdot) = 0.
\end{aligned}$$

Iako ovakav izbor test funkcije nije sam po sebi C^1 funkcija, uzimajući regularizaciju φ^ε funkcije φ dobijamo C^∞ funkciju te puštajući da $\varepsilon \to 0$ dobijamo da je ovakav izbor test funkcije opravdan.
Ubacivanjem izbora (6.3.3) za test funkciju u (6.3.2) izvodimo sledeće

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (u_1 - u_2)\left(u_1 - u_2 + \frac{1}{3}u_1^3 - \frac{1}{3}u_2^3\right) dx\, dt = \\
&= \int_0^T \int_\Omega \left(\left(1+u_1^2\right)\nabla u_1 - \left(1+u_2^2\right)\nabla u_2\right) \int_T^t \left(\left(1+u_1^2\right)\nabla u_1 - \left(1+u_2^2\right)\nabla u_2\right) ds\, dx\, dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_T^t \left(\left(1+u_1^2\right)\nabla u_1 - \left(1+u_2^2\right)\nabla u_2\right) ds\right)^2 dx\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(0 - \left(\int_T^0 \left(\left(1+u_1^2\right)\nabla u_1 - \left(1+u_2^2\right)\nabla u_2\right) ds\right)^2\right) dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_T^0 \left(\left(1+u_1^2\right)\nabla u_1 - \left(1+u_2^2\right)\nabla u_2\right) ds\right)^2 dx \leq 0.
\end{aligned}$$

S druge strane, kako je preslikavanje $r \mapsto r + \frac{1}{3}r^3$ monotono to imamo da važi

$$(u_1 - u_2)\left(u_1 - u_2 + \frac{1}{3}u_1^3 - \frac{1}{3}u_2^3\right) \geq 0 \tag{6.3.4}$$

te je

$$\int_0^T \int_\Omega (u_1 - u_2)\left(u_1 - u_2 + \frac{1}{3}u_1^3 - \frac{1}{3}u_2^3\right) dx\, dt \geq 0,$$

odakle sledi

$$\int_0^T \int_\Omega (u_1 - u_2)\left(u_1 - u_2 + \frac{1}{3}u_1^3 - \frac{1}{3}u_2^3\right) dx\, dt = 0. \tag{6.3.5}$$

Iz (6.3.4) i (6.3.5) izvodimo zaključak

$$(u_1 - u_2)\left(u_1 - u_2 + \frac{1}{3}u_1^3 - \frac{1}{3}u_2^3\right) = 0, \qquad \textit{skoro svuda u } [0,T]\times\Omega,$$

a kako je

$$\begin{aligned}
(u_1 - u_2)\left(u_1 - u_2 + \frac{1}{3}u_1^3 - \frac{1}{3}u_2^3\right) &= (u_1 - u_2)^2\left(1 + \frac{1}{3}\left(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2\right)\right) \\
&= (u_1 - u_2)^2 \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3}\left(\left(u_1 + \frac{u_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}u_2^2\right)\right)}_{\geq 1 > 0}
\end{aligned}$$

imamo da je $u_1 = u_2$ skoro svuda u $[0,T]\times\Omega$.

Zaključak

U ovom radu obradili smo jedan nelinearni parabolični problem parcijalnih diferencijalnih jednačina. Da bismo to uradili dat je detaljan pregled potrebne teorije za pristupanje ovakvom tipu problema.

U uvodnom delu smo se podsetili poznate teorije koja se tiče Lebegovog integrala, te smo u glavi 2 dali detaljan pregled teorije L^p prostora.

U glavi 3 smo uveli pojam distribucije i definisali šta znači biti slabi izvod te smo to odmah primenili u sledećoj glavi koja se ticala prostora Soboljeva, koji imaju centralnu ulogu u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Dokazali smo značajna tvrđenja koja važe za prostore Soboljeva, među kojima se može izdvojiti čuvena teorema o utapanjima prostora Soboljeva.

Dodatno pokazali smo da se funkcije iz prostora Soboljeva uz određene uslove mogu aproksimirati glatkim funkcijama.

Takođe smo dokazali teoremu o fiksnoj tački pomoću koje smo konstruisali slabo rešenje rešenje za dati problem.

Konačno u poslednjoj glavi smo se zabavili jednim nelinearnim paraboličnim problemom. Problem je bio jedna nelinearna varijacija na klasičnu toplotnu jednačinu, gde smo imali dodatni kvadratni član, koji je znatno promenio analizu čitave jednačine, pošto jednačina nije bila linearna. Uz date pretpostavke na regularnost početnog uslova i člana jednačine koji ne zavisi od promenljive pristupili smo rešavanju date jednačine.

Videli smo jednu moguću tehniku rešavanja nelinearnih paraboličnih jednačina, aproksimacijom jednačine u konačnoj bazi te rešavanjem linearizacije jednačine a potom smo pokazali da niz ovakvih rešenja konvergira ka slabom rešenju polazne jednačine. Konačno, jedinstvenost slabog rešenja pokazali smo argumentom monotonosti.

Literatura

[1] Adams R. A., Fournier J. J. *Sobolev spaces.* (Pure and Applied Mathematics) 2nd Edition

[2] Lawrence C. Evans *Partial Differential Equations.* Second Edition, American Mathematical Society (2010)

[3] L. V. Kantorovich, G. B. Akilov *Functional analysis.* Pergamon Press, Elsevier Ltd (1982)

[4] Haim Brezis *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer-Verlag (2010)

[5] Vladimir I. Bogachev *Measure Theory.* Volume 1, Springer (2007)

[6] Vladimir I. Bogachev, Oleg G. Smolyanov *Real and Functional Analysis.* Moscow Lectures 4, Springer (2020)

[7] Francois Treves *Topological Vector Spaces, Distributions And Kernels.* Academic Press (1970)

[8] Philip Hartman *Ordinary Differential Equations.* Society for Industrial and Applied Mathematics (2002)

[9] Songmu Zheng *Nonlinear Evolution Equations.* Chapman & Hall/CRC (2004)

[10] Joseph Diestel *Sequences and Series in Banach Spaces.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (1984)

Biografija

Matija Adam Horvat rođen je 02.09.1999. u opštini Savski venac u Beogradu u Saveznoj Republici Jugoslaviji. Detinjstvo provodi u Herceg Novom do 2006. godine kada dolazi u Sremske Karlovce gde upisuje osnovnu školu koju pohađa do 7. razreda kada se upisuje u gimnaziju Jovan Jovanović Zmaj gde završava 7. i 8. razred. Srednjoškolsko obrazovanje stiče u gimnaziji Jovan Jovanović Zmaj na smeru obdareni učenici u matematičkoj gimnaziji. Po sticanju srednjoškolskog obrazovanja 2018. godine upisuje osnovne studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu koje uspešno završava 2021. godine i stiče stručno zvanje matematičara. Odmah po sticanju visokoškolskog obrazovanja upisuje master studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu 2021. godine. Položio je sve ispite po planu master sudija matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu i time stekao pravo na odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Matija Adam Horvat
AU

Mentor: dr Srđan Trifunović
ME

Naslov rada: O toplotnoj jednačini sa nelinearnom provodljivošću i izvorom toplote
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srb / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2023.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (6/80/10/0/0/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Parcijalne diferencijalne jednačine
ND

Ključne reči: parciajlne diferencijalne jednačine, parabolična jednačina, prostori Soboljeva, slabo rešenje, toplotna jednačina, metod Galjorkina, nelinearna diferencijalna jednačina
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom radu bavimo se problematikom rešavanja jednog nelinearnog problema parcijalnih diferencijalnih jednačina. U prvih pet glava uvodimo neophodne pojmove i rezultate matematičke teorije koje primenjujemo na rešavanje nelinearne parabolične jednačine. Šesta glava je u potpunosti posvećena rešavanju problema, pristup koji preuzimamo jeste traženje slabog rešenja datog problema metodom Galjorkina u konačnoj bazi te argumentovanjem konvergencije ka slabom rešenju problema. Kako dati postupak ne garantuje jedinstvenost to smo posebno argumentovali.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 04.09.2023.
DP

Datum odbrane: 08.09.2023.
DO

Članovi komisije:
Predsednik: dr Srboljub Simić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor: dr Srđan Trifunović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Boris Muha, redovni profesor, Prirodoslovno-matematički fakultet, Univerzitet u Zagrebu
ČK

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Matija Adam Horvat
AU

Mentor: Srđan Trifunović, Ph.D.
MN

Title: Heat equation with nonlinear conductivity term and a heat source
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: srb / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2023.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (6/80/10/0/0/0/0)(chapters/pages/quotations/tables/pictures/graphics/enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Partial differential equations
SD

Subject/Key words: partial differential equations, parabolic equation, Sobolev space, weak solution, heat equation, Galyerkin's method, nonlinear differential equation
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: In this paper we are dealing with the problematics of solving a nonlinear problem in partial differential equations. In the first five chapters we introduce necessary concepts and results of mathematical theory which we then use to solve a nonlinear parabolic equation. Chapter six is fully dedicated to the solution of the problem, the approach we are using is finding a solution using Galyerkin's method in finite basis and then we argue that the solution converges to the weak solution of the problem. As the given method does not guarantee uniqueness, we argument for it separately.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 04.09.2023.
ASB

Defended: 08.09.2023.
DE

Thesis defend board:
President: Srboljub Simić, Ph.D, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Mentor: Srđan Trifunović, Ph.D, assistant professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: Marko Nedeljkov, Ph.D, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: Boris Muha, Ph.D, full professor, Faculty of Science, University of Zagreb
DB