Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku
i informatiku

Marko Gogić

O viskoznim rešenjima eliptičnih jednačina

-Master rad-

Mentor:

dr Marko Nedeljkov

Novi Sad, septembar 2023. god.

Predgovor

Ovaj rad je nastao kao posledica mog interesovanja za pronalaskom najaktuelnijeg dela najšire i najviše istraživane oblasti matematike - parcijalnih diferencijalnih jednačina, i pronalaskom što jače veze između stanja u istraživanju u današnjem trenutku sa pitanjima i temama koje su bile predmet interesovanja naučnika od kraja 19-tog veka. Jedno od najosnovnijih i najvažnijih pitanja u teoriji PDJ koje afektira sve vrste jednačina, jeste pitanje regularnosti njihovih rešenja, kojim sam se, u što širem mogućem kontekstu, tj. kontekstu potpuno nelinearnih PDJ, bavio u ovom radu.

Klasičan primer ispitivanja regularnosti je XIX Hilbertov problem koji je postavljen na drugom međunarodnom matematičkom kongresu, kao jedan od 23 vodeća nerešena problema u matematici tog vremena. Pitanje glasi: Jesu li rešenja problema varijacija uvek analitička? Preciznije, da li su sva rešenja uniformno eliptičnih varijacionih PDJ uvek glatka? Ili, u originalu:

> *Eine der begrifflich merkwürdigsten Thatsachen in den Elementen der Theorie der analytischen Functionen erblicke ich darin, daß es partielle Differentialgleichungen giebt, deren Integrale sämtlich notwendig analytische Funktionen der unabhängigen Variabeln sind, die also, kurz gesagt, nur analytischer Lösungen fähig sind — David Hilbert (1900).*

U savremenoj matematičkoj notaciji, problem se može formulisati na sledeći način:

Hilbertov XIX problem (1900): Razmotrimo bilo koji lokalni minimizator funkcionele energije oblika

$$\mathcal{E}(w) := \int_w L(\nabla w)dx,$$

pri čemu je $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatko i uniformno konveksno i $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Da li je tačno da su svi lokalni minimizatori ovog problema glatki?

Na ovo pitanje dali su pozitivan odgovor, nakon mnogo godina, naučnici De Đordi u radu [**Gio57**] i Neš u radovima [**Nas57**] i [**Nas58**], u formi De Đorđi-Nešove teoreme koju ću dalje najviše koristiti u radu u obliku:

Teorema. *Neka je $v \in H^1(B_1)$ slabo rešenje jednačine $div(A(x)\nabla v) = 0$ u B_1, gde je $0 < \lambda Id \leq A(x) \leq \Lambda Id$. Tada, postoji neko $\alpha > 0$ takvo da je $v \in C^{0,\alpha}(B_{1/2})$ i*

$$\|v\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|v\|_{L^2(B_1)},$$

skoro istovremeno i nezavisno jedan od drugog, za šta je De Đordi dobio Volfovu nagradu [1] 1990, a Neš Abelovu nagradu 2015. godine. Postoje spekulacije da je samo jedan od njih dvojice rešio XIX Hilbertov problem, da bi dobio Filcovu medalju za taj dokaz.

S obzirom na poznati rezultat iz kompleksne analize, koji tvrdi da zato što realni deo bilo koje holomorfne funkcije $u(x,y)$ zadovoljava Laplasovu PDJ (glavni modelni predstavnik svih eliptičnih jednačina), funkcija mora biti realna analitička, tj. može se razviti u stepeni red u okolini svake tačke u svom domenu, što je vrlo korisna osobina u raznim primenama. U daljem razvoju teorije regularnosti eliptičnih PDJ, nastale na temeljima gore navedenih rezultata, u najopštijoj formi, u nastojanju da očuvaju što više korisnih svojstava harmonijskih funkcija, naučnici su definisali eliptičnost, valjanost i uniformnu eliptičnost za potpuno nelinearne eliptične jednačine u formi $F(D^2u, \nabla u, u, x) = 0$, jer nemaju sve jednačine varijacionu formulaciju u terminima funkcionele energije, pri čemu je $F : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ proizvoljna neprekidna funkcija, na sledeći način:

- F je **eliptična:** Ako za bilo koje dve simetrične matrice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takve da je $A \geq B$, važi
$$F(A,p,u,x) \geq F(B,p,u,x),$$
za bilo koje vrednosti $p \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$ i $x \in \Omega$.

- F je **valjana:** Ako za bilo koje dve realne vrednosti $u, v \in \mathbb{R}$ takve da je $u \geq v$, važi
$$F(A,p,u,x) \leq F(B,p,u,x),$$
za bilo koje vrednosti $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, p \in \mathbb{R}^n$ i $x \in \Omega$.

- F je **uniformno eliptična:** Ako postoje $0 < \lambda \leq \Lambda$ (eliptične konstante), takve da za svake simetrične matrice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pri čemu je $B \geq 0$ (tj. pozitivno semidefinitna), imamo
$$\lambda \|B\| \leq F(A+B) - F(A) \leq \Lambda \|B\|.$$
Pošto su na $\mathbb{R}^n$ sve norme ekvivalentne, možemo izabrati bilo koju normu. Obično se, zbog pojednostavljenja računa, uzima $\|B\| = trB$.

Eliptičnost je, kao što će čitaoci u nastavku rada videti, tačno ono što nam treba da dokažemo princip poređenja u najopštijoj formi kao direktnu posledicu principa maksimuma kao jednog od glavnih svojstava Laplasove jednačine i eliptičnih jednačina uopšte. Takođe, uniformna eliptičnost implicira, u suštini, analogno kao u slučaju linearnih jednačina (uopštenja Laplasove jednačine u divergentnom i nedivergentnom obliku), regularnost rešenja.

Za vreme mog dugog analiziranja ove tematike, prvo nailazim na tekst Luisa Silvestrea [**Sil15**], koji je bio osnovno polazište za pisanje ovog rada. Sticajem okolnosti, u neposrednoj prošlosti, pojavile su se dve, po mom mišljenju, vrlo značajne i nedostajuće monografije mladih i prominentnih autora (X. Fernandez-Real i X. Ros-Oton) koje će ostaviti veliki pečat u budućnosti u ovoj oblasti. Prvu [**FR23**] sam najviše koristio u ovom

[1] Volfova nagrada dodeljuje se od strane Volfove fondacije u Izraelu od 1978. godine u šest disciplina i smatra se trećom po značaju u matematici, posle Abelove nagrade i Filcove medalje.

radu, a drugu [**FR24**] preporučujem svima koji su zainteresovani za ovu temu i planiram da je koristim u daljem radu ako budem nastavio da se bavim ovom tematikom.

U skladu sa svim do sada iznetim činjenicama u predgovoru, odlučio sam da koncipiram rad na sledeći način. U prvoj glavi uveo sam neke osnovne pojmove funkcionalne i harmonijske analize, koji su neophodni za preciznu karakterizaciju regularnosti proizvoljne jednačine. Potom, u drugoj glavi, bavio sam se modelnim predstavnikom eliptičnih jednačina: Laplasovom jednačinom i njenim osobinama koje karakterišu sve eliptične PDJ, posebno ističući njihovu probabilističku interpretaciju preko slučajnog hoda, a sa namerom da apostrofiram realnu motivaciju za istraživanjem ovih jednačina. U trećoj glavi, sa istom namerom, bavim se varijacijom problema slučajnog hoda, i verovatnosnom interpretacijom potpuno nelinearnih eliptičnih jednačina, postojanjem njihovih viskoznih rešenja, regularnošću njihovih rešenja i navođenjem nekih još uvek otvorenih problema iz ove oblasti. U četvrtoj glavi, osvrćem se na nelokalnu verziju potpuno nelinearnih eliptičnih jednačina potpuno nelinearne integro-diferencijalne jednačine koje predstavljaju najopštiji okvir u kojem se dalje razvija teorija regularnosti, postojanja i stabilnosti viskoznih rešenja.

Na kraju ovog dugačkog i napornog predgovora, koji naizgled opisuje moju ličnost, želeo bih da se zahvalim svim članovima komisije koji su imenovani za ocenu ovog rada, prvenstveno predsednici komisije, dr Dori Seleši, na svoj posvećenosti, izrazito plemenitoj ličnosti i entuzijazmu u radu koji su mi dosta pomogli tokom školovanja, članu dr Srboljubu Simiću koji mi je predavao Kinetičku teoriju gasova u okviru predmeta Mehanika neprekidnih sredina na master studijama i upoznao me sa Bolcmanovom jednačinom koja upravo predstavlja najaktuelniju temu u teoriji regularnosti nelinearnih PDJ, i na samom kraju mom mentoru, dr Marku Nedeljkovu, koji je najviše zaslužan za to što ću se, kako za sada stvari stoje, uopšte baviti naukom i u istraživačkom radu posvetiti parcijalnim diferencijalnim jednačinama.

Novi Sad, Septembar 2023. Marko Gogić

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Neke parcijalne diferencijalne jednačine nemaju rešenje u klasičnom smislu. Ne postoji funkcija koja je dovoljno glatka da se računanjem njenih parcijalnih izvoda odgovarajućeg reda i uvrštavanjem u jednačinu dobije tačna jednakost. U nekim slučajevima rešenja postoje u uopštenom smislu. Uopštena rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina su funkcije koje nisu odgovarajuće regularnosti (tj. nisu dovoljno glatke) i njihovi izvodi možda ne postoje. Pojam viskoznih rešenja omogućava nam da shvatimo kako nedovoljno glatke neprekidne funkcije mogu da budu rešenja eliptične parcijalne diferencijalne jednačine. Standardna referenca za glavne rezultate u teoriji viskoznih rešenja je *Users guide to viscosity solutions of second order partial differential equations* [**CIL92**].

1.1. Neke osnovne osobine Soboljevih i Helderovih prostora

U ovoj sekciji ćemo dati kratak pregled osnovnih osobina L^p, Soboljevih i Helderovih prostora, uz navođenje rezultata koje ćemo koristiti dalje u ovom radu.

L^p **prostori.** Za dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i $1 \le p < \infty$, prostor $L^p(\Omega)$ je skup

$$L^p(\Omega) := \left\{ u \quad \text{je merljivo na} \quad \Omega \quad : \quad \int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\}.$$

To je Banahov prostor sa normom $\|u\|_{L^p(\Omega)} := (\int_\Omega |u|^p)^{1/p}$.

Kada je $p = \infty$, prostor $L^\infty(\Omega)$ je skup ograničenih funkcija (do na skup mere nula), sa normom $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{esssup}_\Omega |u|$.

Dobro poznat rezultat u ovoj postavci je Lebegova diferencijalna teorema. Pogledati [**EG92**].

Teorema 1.1. *Ako je $u \in L^1(\Omega)$, tada za skoro svako $x \in \Omega$ imamo*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} |u(x) - u(y)| dy = 0.$$

Kada ovo važi u tački $x \in \Omega$, tada kažemo da je x Lebegova tačka od u.

Korisna posledica ove teoreme je sledeće.

Posledica 1.2. *Pretpostavimo da $u \in L^1(\Omega)$ i da je*

$$\int uvdx = 0 \quad \textit{za svako} \quad v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Tada je $u = 0$ skoro svuda na Ω.

Parcijalna integracija. Fundamentalni identitet u izučavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina je sledeća teorema.

Teorema 1.3 (Parcijalna integracija)**.** *Pretpostavimo da je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bilo koji ograničen C^1 domen. Tada za proizvoljno $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ važi*

$$\int_\Omega \partial_i uvdx = -\int_\Omega u\partial_i vdx + \int_{\partial\Omega} uv\nu_i dS, \tag{1.1}$$

gde je ν jedinični vektor normale na $\partial\Omega$ i $i = 1, ..., n$.

Primetimo da kao direktnu posledicu dobijamo teoremu o divergenciji kao i prvi Grinov identitet

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla vdx = -\int_\Omega u\Delta vdx + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu}dS.$$

Zahtevi regularnosti Teoreme 1.3 mogu biti relaksirani. Na primer, dovoljno je da je domen Ω Lipšicov, dok su $u, v \in H^1(\Omega)$ za 1.1-gde je H^1 Soboljev prostor definisan ispod.

Soboljevi prostori. Za zadati proizvoljan domen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i $1 \leq p \leq \infty$, Soboljev prostor $W^{1,p}(\Omega)$ čine sve funkcije čiji (slabi) izvodi su u $L^p(\Omega)$. Naime,

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \partial_i u \in L^p(\Omega) \quad \text{za} \quad i = 1, ..., n\}.$$

Upućujem čitaoca na knjige [**Eva98; Bre11**] i za definiciju slabih izvoda i detaljan opis Soboljevih prostora.

Nekoliko korisnih svojstava Soboljevih prostora su navedeni ispod (pogledati [**Eva98**]):

(S1) Prostori $W^{1,p}(\Omega)$ su kompletni.

(S2) Inkluzija $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ je kompaktna.

(S3) Prostor $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

(S4) Bilo koji ograničen niz $\{u_k\}$ u Hilbertovom prostoru $H^1(\Omega)$ sadrži slabo konvergentan podniz $\{u_{k_j}\}$, tj. postoji $u \in H^1(\Omega)$ takvo da je

$$(u_{k_j}, v)_{H^1(\Omega)} \to (u, v)_{H^1(\Omega)} \quad \text{za svako } v \in H^1(\Omega). \tag{1.2}$$

Dodatno, takvo u će zadovoljavati

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \liminf_{j\to\infty} \|u_{k_j}\|_{H^1(\Omega)}, \tag{1.3}$$

i pošto se $H^1(\Omega)$ kompaktno utapa u $L^2(\Omega)$ imamo da važi

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{j\to\infty} \|u_{k_j}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.4}$$

(S5) Neka je Ω ograničen Lipšicov domen i $1 \leq p \leq \infty$. Tada postoji neprekidan (i kompaktan za $p > 1$) operator traga iz $W^{1,p}(\Omega)$ u $L^p(\partial\Omega)$. Za C^0 funkcije, takav operator traga je jednostavno preslikavanje $u \to u|_{\partial\Omega}$.
Zbog ovoga, proizvoljna $u \in H^1(\Omega)$ funkcija će biti označena preko svog traga $u|_{\partial\Omega}$ na $\partial\Omega$.

(S6) Za $1 \leq p < \infty$, $C^\infty(\Omega)$ funkcije su guste u $W^{1,p}(\Omega)$. Štaviše, ako je Ω ograničen i Lipšicov, $C^\infty(\overline{\Omega})$ funkcije su guste u $W^{1,p}(\Omega)$.

(S7) Za $1 \leq p < \infty$, definišemo prostore $W_0^{1,p}(\Omega)$ kao zatvorenje $C_c^\infty(\Omega)$ na $W^{1,p}(\Omega)$. Slično, označićemo sa $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$. Kada je Ω ograničeno i Lipšicovo, to je prostor funkcija $u \in W^{1,p}(\Omega)$ takvih da je $u|_{\partial\Omega} = 0$.

(S8) Ako $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, tada za bilo koji subdomen $K \subset\subset \Omega$ imamo

$$\left\| \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \right\|_{L^p(K)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

za svako $h \in B_\delta$, za $\delta > 0$ dovoljno malo.
Obrnuto, ako je $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$ i

$$\left\| \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \right\|_{L^p(K)} \leq C,$$

za svako $h \in B_\delta$, tada $u \in W^{1,p}(K)$ i $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq C$. Primetimo da ovo tvrđenje ne važi za $p = 1$.

(S9) Za zadatu proizvoljnu funkciju u definišimo $u^+ = \max\{u, 0\}$ i $u^- = \max\{-u, 0\}$, tako da je $u = u^+ - u^-$. Tada, za bilo koje $u \in W^{1,p}(\Omega)$ imamo da je $u^+, u^- \in W^{1,p}(\Omega)$ i $\nabla u = \nabla u^+ - \nabla u^-$ skoro svuda na Ω.
Specijalno, gradijent Soboljevih funkcija nestane skoro svuda na nivou skupova, tj. $\nabla u(x) = 0$ za skoro svako $x \in \{u = 0\}$.

U ovom kontekstu navodimo sledeću važnu nejednakost.

Teorema 1.4 (Soboljeva nejednakost)**.** *Ako je $p < n$, tada je*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p_*} dx \right)^{1/p_*} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}, \quad \frac{1}{p_*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

za neku konstantu C koja zavisi samo od n i p. Specijalno, imamo neprekidnu inkluziju $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_*}(\mathbb{R}^n)$.

Primetimo da kada $p \to n$ imamo da $p_* \to \infty$. Međutim, u graničnom slučaju kada je $p = n$, nije tačno da su $W^{1,n}$ funkcije ograničene. Ovo se može pokazati ako izaberemo, na primer, $u(x) = \log\log\left(1 + \frac{1}{|x|}\right) \in W^{1,n}(B_1)$. Ipak, u slučaju $p > n$ važi sledeća teorema.

Teorema 1.5 (Murova nejednakost)**.** *Ako je $p > n$, tada*

$$\sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}, \quad \alpha = 1 - \frac{n}{p},$$

za neku konstantu C koja zavisi samo od n i p.

Specijalno, kada je $p > n$ proizvoljna funkcija iz $W^{1,p}$ biće neprekidna (nakon što je potencijalno redefinisana na skupu mere nula). Dalje, u radu će biti korišćene i sledeće nejednakosti na ograničenim domenima.

Teorema 1.6 (Poenkareova nejednakost)**.** *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bilo koji ograničen Lipšicov domen i neka je $p \in [1,\infty)$. Tada, za bilo koje $u \in W^{1,p}(\Omega)$ imamo*

$$\int_\Omega |u - u_\Omega|^p dx \leq C_{\Omega,p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx,$$

gde je $u_\Omega := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u$ i

$$\int_\Omega |u|^p dx \leq C'_{\Omega,p}\Big(\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_{\partial\Omega} |u|_{\partial\Omega}|^p d\sigma\Big).$$

Konstante $C_{\Omega,p}$ i $C'_{\Omega,p}$ zavise samo od n, p i Ω.

Helderovi prostori. Za zadato $\alpha \in (0,1)$, Helderov prostor $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ je skup neprekidnih funkcija $u \in C(\overline{\Omega})$ takvih da je Helderova semi-norma konačna,

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sup_{x,y\in\overline{\Omega}, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

Helderova norma je

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Za $\alpha = 1$ ovo je prostor Lipšicovih neprekidnih funkcija.

Uopštenije, za zadato $k \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in (0,1)$, prostor $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ je skup funkcija $u \in C^k(\overline{\Omega})$ takvih da je sledeća norma konačna

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + [D^k u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

gde je

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \sum_{j=1}^{k} \|D^j u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Primetimo da ovo daje inkluziju

$$C^0 \supset C^{0,\alpha} \supset \text{ Lip } \supset C^1 \supset C^{1,\alpha} \supset ...C^\infty.$$

Često ćemo pisati $\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$ umesto $\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}$.

Često se kao konvencija koristi sledeća notacija. Kada $\beta > 0$ *nije* ceo broj, definišemo $C^\beta(\overline{\Omega}) := C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ gde je $\beta = k + \alpha$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$.

Postoji mnogo svojstava i alternativnih definicija Helderovih prostora. U nastavku navodim neka svojstva (bez dokaza) i definicije koje mogu biti korišćene u poglavljima koja slede. Sva tvrđenja su validna za $\alpha \in (0,1)$.

(H1) Pretpostavimo da je

$$osc_{B_r(x)} u \leq C_\circ r^\alpha \quad \text{ za sve } \quad B_r(x) \subset \overline{B_1},$$

gde je $osc_A u := \sup_A u - \inf_A u$.
Tada je $u \in C^{0,\alpha}(\overline{B_1})$ i $[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{B_1})} \leq CC_\circ$, gde C zavisi samo od n i α.

(H2) Neka je $u_{x,r} := \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} u$. Pretpostavimo da je

$$\|u - u_{x,r}\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C_\circ r^\alpha \quad \text{za sve} \quad B_r(x) \subset \overline{B_1}.$$

Tada je $u \in C^{0,\alpha}(\overline{B_1})$ i $[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{B_1})} \le CC_\circ$, gde C zavisi samo od n i α.

(H3) Neka je $u_{x,r} := \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} u$. Pretpostavimo da je

$$\left(\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} |u - u_{x,r}|^2\right)^{1/2} \le C_\circ r^\alpha \quad \text{za sve} \quad B_r(x) \subset \overline{B_1}.$$

Tada je $u \in C^{0,\alpha}(\overline{B_1})$ i $[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{B_1})} \le CC_\circ$, gde C zavisi samo od n i α.

(H4) Pretpostavimo da za svako x postoji konstanta C_x takva da je

$$\|u - C_x\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C_\circ r^\alpha \quad \text{za sve} \quad B_r(x) \subset \overline{B_1}.$$

Tada je $u \in C^{0,\alpha}(\overline{B_1})$ i $[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{B_1})} \le CC_\circ$, gde C zavisi samo od n i α.
Pretpostavimo da za svako x postoji linearna funkcija $l_x(y) = a_x + b_x(y-x)$ takva da je

$$\|u - l_x\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C_\circ r^{\alpha+1} \quad \text{za sve} \quad B_r(x) \subset \overline{B_1}.$$

Tada je $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B_1})$ i $[Du]_{C^{0,\alpha}(\overline{B_1})} \le CC_\circ$, gde C zavisi samo od n i α.
Pretpostavimo da za svako x postoji kvadratni polinom $P_x(y)$ takav da je

$$\|u - P_x\|_{L^\infty(B_r(x))} \le C_\circ r^{\alpha+2} \quad \text{za sve} \quad B_r(x) \subset \overline{B_1}.$$

Tada je $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B_1})$ i $[D^2u]_{C^{0,\alpha}(\overline{B_1})} \le CC_\circ$, gde C zavisi samo od n i α.

(H5) Neka je $\rho_\circ \in (0,1)$. Pretpostavimo da za svako $x \in B_{1/2}$ postoji niz kvadratnih polinoma $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takvih da

$$\|u - P_k\|_{L^\infty(B_{\rho_\circ^k}(x))} \le C_\circ \rho_\circ^{k(2+\alpha)} \quad \text{za svako} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Tada je $u \in C^{2,\alpha}(B_{1/2})$ i $[D^2u]_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \le CC_\circ$, gde C zavisi samo od n, α i $\rho_\circ$.

(H6) Pretpostavimo da je $\alpha \in (0,1)$, $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \le C_\circ$ i

$$\sup_{x\in B_1, x\pm h\in\overline{B_1}} \frac{|u(x+h)+u(x-h)-2u(x)|}{|h|^\alpha} \le C_\circ.$$

Tada $u \in C^{0,\alpha}(\overline{B_1})$ i $\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B_1})} \le CC_\circ$ gde C zavisi samo od n i α.
Pretpostavimo da je $\alpha \in (0,1)$, $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \le C_\circ$ i

$$\sup_{x\in B_1, x\pm h\in\overline{B_1}} \frac{|u(x+h)+u(x-h)-2u(x)|}{|h|^{\alpha+1}} \le C_\circ.$$

Tada $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B_1})$ i $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B_1})} \le CC_\circ$ gde C zavisi samo od n i α.
Međutim, ovo svojstvo ne važi kada je $\alpha = 0$.

(H7) Pretpostavimo da je $\alpha \in (0,1]$, $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \le C_\circ$ i da za svako $h \in B_1$ imamo

$$\left\|\frac{u(x+h)-u(x)}{|h|^\alpha}\right\|_{C^\beta(B_{1-|h|})} \le C_\circ, \tag{1.6}$$

pri čemu je $C_\circ$ nezavisno od h. Pretpostavimo dodatno da $\alpha+\beta$ nije ceo broj. Tada, $u \in C^{\alpha+\beta}(\overline{B_1})$ i $u_{C^{\alpha+\beta}(\overline{B_1})} \le CC_0$ gde C zavisi samo od n, α i β.
Ovo svojstvo ne važi ako je $\alpha+\beta$ ceo broj.

(H8) Pretpostavimo da $u_i \to u_0$ uniformno na $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ i da je $\|u_i\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_\circ$, gde $\alpha \in (0,1]$ i $C_\circ$ je nezavisno od i. Tada imamo da je $u_0 \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ i

$$\|u_0\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_\circ.$$

Važan rezultat u ovom kontekstu je sledeći specijalan slučaj Arzela-Askoli teoreme.

Teorema 1.7 (Arzela-Askoli). *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0,1)$ i neka je $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz funkcija f_i koji zadovoljava*

$$\|f_i\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_\circ.$$

Tada, postoji podniz f_{i_j} koji konvergira uniformno ka funkciji $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Uopštenije, ovaj rezultat kombinovan sa (H_8) implicira da ako je

$$\|u_i\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_\circ,$$

sa $\alpha \in (0,1)$, tada podniz u_{i_j} će konvergirati u $C^k(\overline{\Omega})$ normi ka funkciji $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$.

U nastavku navodim sledeće korisne nejednakosti koje će biti korišćene u tvrđenjima u radu.

Interpolacione nejednakosti u Helderovim prostorima. Za svako $0 \leq \gamma < \alpha < \beta \leq 1$ i svako $\varepsilon > 0$ imamo

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_\varepsilon \|u\|_{C_{0,\gamma}(\overline{\Omega})} + \varepsilon \|u\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})}, \tag{1.7}$$

gde je C konstanta koja zavisi samo od n i ε. (Kada je $\gamma = 0$, $C^{0,\gamma}$ bi trebalo da bude zamenjeno sa L^∞). Ovo sledi iz interpolacijske nejednakosti

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \|u\|^t_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \|u\|^{1-t}_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})}, \quad t = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma}.$$

Uopštenije, (1.7) važi za Helderove norme višeg reda takođe. Specijalno, koristićemo da je za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i $\alpha \in (0,1)$

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leq C_\varepsilon \|u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \varepsilon [\nabla u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

i

$$\|u\|_{C^2(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^{1,1}(\overline{\Omega})} \leq C_\varepsilon \|u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \varepsilon [D^2 u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}. \tag{1.8}$$

Upućujem čitaoca na **[GT77], Lema 6.35** za dokaz ovih nejednakosti.

Glava 2

Pregled Laplasove jednačine

Eliptične jednačine su, po definiciji, one koje imaju neka zajednička svojstva sa Laplasovom jednačinom. Počećemo sa kratkim pregledom svojstava rešenja Laplasove jednačine: harmonijskih funkcija. U ovoj glavi razmotrićemo funkcije $u : \Omega \to \mathbb{R}$, gde je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ proizvoljan otvoren i ograničen skup. *Dirihleov problem* za Laplasovu jednačinu je

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{na} \quad \Omega, \\ u &= f \quad \text{na} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Granični uslov f treba da bude data funkcija. Dobro je poznato da je Dirihleov problem rešiv ako je f neprekidno i ako Ω zadovoljava uslov regularnosti spolja.

2.1. Interpretacija Laplasove jednačine: slučajan hod.

Koristan način da razmišljamo o Laplasijanu Δ je da primetimo da je to do na multiplikativnu konstantu jedini linearni operator drugog reda koji je translatorno i rotaciono invarijantan. Zaista, Laplasijan možemo posmatrati kao operator koji meri (infinitenzimalnu) razliku između u u x i prosečne vrednosti u u okolini x, u sledećem smislu: za proizvoljnu C^2 funkciju u imamo

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \lim_{r\to 0} \frac{c_n}{r^{n+2}} \left\{ \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u(y)dy - u(x) \right\} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{c_n}{r^{n+2}} \left\{ \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} (u(y) - u(x))dy \right\}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

za neku pozitivnu konstantu c_n. Ovo se može pokazati, na primer, korišćenjem Tejlorovog razvoja $u(y)$ u okolini x. Štaviše, slična formula važi za integral po $\partial B_r(x)$ umesto $B_r(x)$. Pogledati, na primer, [**DV21**].

Razmotrićemo sledeći slučajan hod. Neka je r proizvoljan mali parametar. Počinjemo u tački $X_0 = x \in \Omega$. U svakom koraku, pomeramo se iz X_k u bilo koju tačku $X_{k+1} \in B_r(X_k)$. Biramo ove tačke sa uniformnom raspodelom u lopti poluprečnika r sa centrom u X_k. Kad god se segment od X_k do X_{k+1} preseče sa $\partial\Omega$, zaustavljamo se u toj tački na rubu. Naš cilj je da izračunamo očekivanu vrednost date funkcije f u toj tački na rubu $\partial\Omega$.

Ova očekivana vrednost je funkcija u početnoj tački $x \in \Omega$ i $r > 0$. Tu funkciju označićemo sa $u_r(x)$. Naravno, ako počnemo sa tačkom $x \in \partial\Omega$, tada bi slučajan hod sve vreme ostajao u početnoj tački i dobili bismo $u_r(x) = f(x)$. Ako počnemo u bilo kojoj tački x iz unutrašnjosti Ω, vrednost $u_r(x) = u^k(X_0)$ jednaka je prosečnoj vrednosti u_r u tačkama u koje dolazimo posle prvog koraka $u_r(X_1)$. Dakle, pod uslovom da je r manje od rastojanja između x i $\partial\Omega$

$$u_r(x) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u_r(y)dy.$$

Stoga, dobijamo

$$\int_{B_r(x)} u_r(y) - u_r(x)dy = 0.$$

Primetimo da će funkcija u_r za ovaj slučajan hod konvergirati ka rešenju Laplasove jednačine (2.1).

Kao što možemo da zamislimo, postoji nekoliko varijanti ovog problema u zavisnosti od pravila za slučajni hod i kriterijuma zaustavljanja. Shodno tome, postoji mnogo eliptičnih jednačina koje proizilaze iz problema u teoriji verovatnoće i stohastičkih procesa.

Za kraj ovog odeljka daćemo veoma poznatu verovatnosnu interpretaciju harmonijskih funkcija. Nastojaćemo da diskusija bude što više opisna, da bismo dali intuiciju o Laplasovoj jednačini u terminologiji stohastičkih procesa. U nastavku ovog rada bavićemo se verovatnosnim interpretacijama potpuno nelinearnih jednačina.

Podsetimo se da je *Braunovo kretanje* stohastički proces X_t, $t \geq 0$, koji zadovoljava sledeće uslove:

(1) $X_0 = 0$ skoro sigurno.

(2) X_t ima *nezavisne priraštaje* (nezavisan je od prošlosti).

(3) X_t ima *stacionarne priraštaje*: $X_{t+s} - X_s$ je invarijantan u odnosu na translaciju vremena (ne zavisi od s, tj. raspodela broja događaja koji se pojavljuju u bilo kom vremenskom intervalu zavisi samo od dužine trajanja tog intervala, a ne od njegovog položaja na vremenskoj osi).

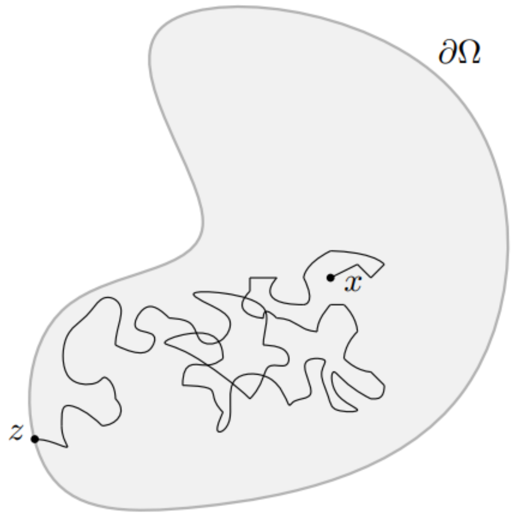
(4) X_t ima *neprekidne trajektorije* ($t \to X_t$ je neprekidno) skoro sigurno.

(5) X_t je *izotropno*, tj. rotaciono simetrično u raspodeli.
Prethodne osobine zapravo određuju stohastički proces X_t do na multiplikativnu konstantu. Druga važna osobina Braunovog kretanja je da je invariantno u odnosu na skaliranje.

(6) $r^{-1}X_{r^2t}$ ima istu raspodelu kao X_t, za bilo koje $r > 0$.

Kao što ćemo videti u nastavku, postoji jaka veza između Braunovog kretanja i Laplasovog operatora.

Očekivana isplata. Dat je regularni domen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i Braunovo kretanje X_t^x koje počinje u x (tj. $X_t^x := x + X_t$), igramo sledeću stohastičku igru: Kada proces X_t^x pogodi rub $\partial\Omega$ prvi put dobijamo *isplatu* $g(z)$, zavisno od tačke pogotka $z \in \partial\Omega$ (pogledati Sliku 2.1).



Slika 2.1: Stohastički proces X_t^x definisan na Ω koji počinje u x do prve tačke pogotka na rubu $z \in \partial\Omega$.

Pitamo se:

Šta je očekivana isplata?

Da bismo odgovorili na ovo pitanje

$$\begin{aligned} \tau &:= \text{vreme prvog prodiranja } X_t^x, \\ u(x) &:= \mathbb{E}[g(X_\tau^x)] \qquad \text{(funkcija vrednosti).} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Vrednost funkcije $u(x)$ je po definiciji odgovor na pitanje iznad. Naime, to je očekivana vrednost od g u prvoj tački gde X_t^x prodire rub $\partial\Omega$.

Da bismo pronašli $u(x)$, pokušaćemo da nađemo vezu sa vrednostima $u(y)$ za $y \neq x$. Tada ćemo videti da ovo zadovoljava PDJ za u i rešavanjem te jednačine možemo naći $u(x)$.

Zaista, hajde da razmotrimo loptu $B_r(x) \subset \Omega$ sa $r > 0$. Za bilo koju takvu loptu mi znamo da će proces X_t^x pogoditi (pre dostizanja $\partial\Omega$ po osobini (4)) neku tačku na rubu $\partial B_r(x)$. Štaviše, bilo koju tačku na rubu $\partial B_r(x)$ će pogoditi sa istom verovatnoćom. To je zato što je proces *rotaciono simetričan* (5).

Pošto proces *ima nezavisne* (2) i *stacionarne priraštaje* (3), to znači da

$$u(x) = \frac{1}{|B_r|} \int_{\partial B_r(x)} u(y)dy. \tag{2.4}$$

Opisno, to je zato što kada proces pogodi rub $\partial B_r(x)$ u tački y, tada jednostavno počinje ponovo igru iz te tačke y. Pošto su sve tačke $y \in \partial B_r(x)$ dostignute prvi put sa istom verovatnoćom, tvrđenje važi.

Kako to možemo učiniti za bilo koje $x \in \Omega$ i $r > 0$, zaključujemo da $u(x)$ zadovoljava osobinu jednakosti u srednjem. Stoga je u harmonijska funkcija i $\Delta u = 0$.

Štaviše, kako takođe znamo da je $u = g$ na $\partial\Omega$ (pošto kad pogodimo rub sigurno dobijamo isplatu), tada u mora biti jedinstveno rešenje

$$(2.5)\qquad \begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{na} \quad \Omega, \\ u &= g \quad \text{na} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Upućujemo zainteresovanog čitaoca na [**Law10**] za interesantan uvod u ovu oblast.

Očekivano vreme pogotka. Sličan stohastički problem ćemo opisati u nastavku. Uzmimo domen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ na kome je funkcija glatka i Braunovo kretanje X_t^x. Pitamo se:

Koje je očekivano prvo vreme u kojem će X_t^x pogoditi $\partial\Omega$?

Da bismo odgovorili na ovo pitanje, argumentovaćemo kao ranije, koristeći da proces mora prvi put pogoditi rub lopte $B_r(x) \subset \Omega$. Zapravo ćemo prvo označiti sa $u(x)$ očekivano vreme pogotka koje tražimo. Tada za bilo koju loptu imamo da će proces X_t^x pogoditi (pre dostizanja $\partial\Omega$) neku tačku na $\partial B_r(x)$, i štaviše, bilo koja tačka $y \in \partial B_r(x)$ biće dostignuta sa istom verovatnoćom. Stoga, ukupno očekivano vreme $u(x)$ će biti očekivano vreme potrebno da se pogodi $\partial B_r(x)$ prvi put plus očekivano vreme kada krenemo iz odgovarajuće tačke $y \in \partial B_r(x)$, što je $u(y)$. Drugim rečima, imamo

$$u(x) = T(r) + \frac{1}{|B_r|}\int_{\partial B_r} u(y)dy.$$

Ovde je $T(r)$ očekivano vreme prvog pogotka X_t^x u rubu $\partial B_r(x)$ - što, jasno, zavisi samo od r i n.

Sada, koristeći osobinu invarijantnosti skaliranja Braunovog kretanja, tj. $r^{-1}X_{r^2t} \sim X_t$, vidimo da je $T(r) = T(1)r^2 = c_1 r^2$ za neku konstantu $c_1 > 0$. Stoga, imamo

$$u(x) = c_1 r^2 + \frac{1}{|B_r|}\int_{\partial B_r} u(y)dy,$$

i sređivanjem izraza nalazimo da je

$$c_1 = -\frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{|B_r|}\int_{\partial B_r} u(y)dy - u(x)\right\}.$$

Konačno, uzimajući da $r \to 0$ i koristeći (2) zaključujemo da je $-\Delta u = c_2$ za neku konstantu $c_2 > 0$. Kako je jasno da imamo $u = 0$ na $\partial\Omega$, očekivano vreme pogotka $u(x)$ je jedinstveno rešenje problema.

$$(2.6)\qquad \begin{cases} -\Delta u &= c_2 \quad \text{na} \quad \Omega, \\ u &= g \quad \text{na} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Razmatrajući heterogeni medijum (u kome je potrebno više vremena za kretanje u nekim oblastima nego drugim), vodeći se istim argumentom vodi do problema

$$(2.7)\qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x) \quad \text{na} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

za $f \geq 0$.

2.2. Neka osnovna svojstva

Kada govorimo o postojanju, jedinstvenosti i regularnosti rešenja *Dirihleovog problema*, tj. Laplasove jednačine sa graničnim uslovom, možemo to posmatrati na tri različita načina: *integralnom reprezentacijom* rešenja, razmatranjem minimizatora *integrala energije* i *principom poređenja.* Generalno, kod svih PDJ efikasan način za dokazivanje postojanja i jedinstvenosti rešenja je *varijacioni metod.* Zato ćemo prvo izabrati taj način posmatranja problema.

Postojanje rešenja: varijacioni metod. Jedan od osnovnih načina za konstrukciju rešenja Dirihleovog problema (1) je varijacionim metodom. Naime, razmatramo konveksnu funkcionelu

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \qquad \text{među funkcijama koje zadovoljavaju} \qquad u|_{\partial\Omega} = g,$$

i tada tražimo funkciju u koja minimizira funkcionelu - pogledati Teoremu 2.2 u nastavku za više detalja o postojanju minimizatora. Primetimo da će takav minimizator u jasno zadovoljavati granični uslov $u = g$ na rubu $\partial\Omega$, dakle mi jedino treba da proverimo dodatno da je $\Delta u = 0$ na Ω.

Ako je u minimizator, tada $\mathcal{E}(u) \leq \mathcal{E}(u+\varepsilon v)$ za svako $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Kako za svako fiksirano v takva funkcija u ε ima minimum za $\varepsilon = 0$, imamo

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathcal{E}(u+\varepsilon v) = 0.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathcal{E}(u+\varepsilon v) = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u + \varepsilon v|^2 dx \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + 2\varepsilon \nabla u \cdot \nabla v + \varepsilon^2 |\nabla v|^2|) dx \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Stoga, ako je u minimizator funkcionele, tada

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = 0 \qquad \text{za svako} \qquad v \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.9}$$

Ako je u *dovoljno glatko* (recimo, $u \in C^2$), tada možemo parcijalnom integracijom (Teorema 1.3) dobiti da je

$$\int_\Omega \Delta u v dx = 0 \qquad \text{za svako} \qquad v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Koristeći Posledicu 1.2, zaključujemo da je $\Delta u = 0$ na Ω, kao što smo želeli.

U slučaju da nemamo dovoljno glatku funkciju u, tada zaključak gore naveden pokazuje da bilo koji minimizator u od $\mathcal{E}$ je *slabo rešenje* u sledećem smislu.

Definicija 2.1. *Kažemo da je u slabo rešenje Dirihleovog problema 2.1 kad god $u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = g$ i*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = 0 \quad \textit{za svako} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

*Ovde $u|_{\partial\Omega}$ je trag (svojstvo **(S5)**) od u na $\partial\Omega$.*

Uopštenije, za dato $f \in L^2(\Omega)$, kažemo da u zadovoljava $-\Delta u = f$ na Ω u slabom smislu kad god $u \in H^1(\Omega)$ i

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v \quad \text{za svako} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Konačno, kažemo da je u *slaba superharmonijska funkcija (slaba subharmonijska)* na Ω, ili zadovoljava $\Delta u \leq 0$ na Ω u slabom smislu ($\Delta u \geq 0$ u slabom smislu) ako je

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \geq 0 \quad \Big(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \leq 0 \Big) \quad \text{za svako} \quad v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0.$$

Primetimo da, ako $H^1(\Omega) \ni u_k \to u \in H^1(\Omega)$ slabo na H^1 i $L^2 \ni f_k \to f \in L^2(\Omega)$ slabo na L^2 su takve da $\Delta u_k = f_k$ na Ω u slabom smislu, tada $\Delta u = f$ u slabom smislu takođe (uzimajući granice u prethodnoj definiciji). Slično, slab limes slabo (sub-)superharmonijske funkcije je (sub-)superharmonijska funkcija.

Sledeće dokazujemo:

Teorema 2.2 (Postojanje i jedinstvenost slabih rešenja). *Pretpostavimo da je $\Omega \subset \mathbb{R}$ proizvoljan ograničen Lipšicov domen i da*

$$\{w \in H^1(\Omega) : w|_{\partial\Omega} = g\} \neq \varnothing. \tag{2.10}$$

Tada postoji jedinstveno slabo rešenje Dirihleovog problema 2.1.

Dokaz. Postojanje. Neka je

$$\theta_\circ := \inf\Big\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w|^2 dx : \quad w \in H^1(\Omega), \quad w|_{\partial\Omega} = g \Big\},$$

odnosno, infimum $\mathcal{E}(w)$ između svih dopustivih funkcija w.

Uzećemo niz funkcija $\{u_k\}$ takvih da je

1. $u_k \in H^1(\Omega)$.
2. $u_k|_{\partial\Omega} = g$.
3. $\mathcal{E}(u_k) \to \theta_\circ$ kada $k \to \infty$.

Na osnovu Poenkareove nejednakosti niz $\{u_k\}$ je uniformno ograničen na $H^1(\Omega)$ i stoga će podniz $\{u_{k_j}\}$ konvergirati ka funkciji u koja je strogo u $L^2(\Omega)$ i slabo u $H^1(\Omega)$. Štaviše, zbog kompaktnosti operatora traga **(S5)**, imaćemo da $u_{k_j}|_{\partial\Omega} \to u|_{\partial\Omega}$ na $L^2(\partial\Omega)$, tako da je $u|_{\partial\Omega} = g$. Dalje, takva funkcija u će zadovoljiti $\mathcal{E}(u) \leq \liminf_{j\to\infty} \mathcal{E}(u_{k_j})$ i stoga će biti minimizator funkcionele energije.

Dakle, konstruisali smo minimizator u funkcionele energije $\mathcal{E}(u)$ zadovoljavajući granični uslov $u|_{\partial\Omega} = g$. Prema argumentu iznad, za bilo koji minimizator u imamo da važi (2.9) Pošto je C_c^∞ gusto u $H_0^1(\Omega)$, sledi da (2.9) važi za svako $v \in H_0^1(\Omega)$ i stoga je to slabo rešenje (2.1)

Jedinstvenost. Ako je u bilo koje slabo rešenje (2.1), tada za svako $v \in H_0^1(\Omega)$ imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u+v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u + \nabla v|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \\ &= \mathcal{E}(u) + 0 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq \mathcal{E}(u),\end{aligned} \tag{2.11}$$

pri čemu se stroga nejednakost dostiže ako je $v \not\equiv 0$. Stoga, ako je u rešenje (2.1) tada je jedinstveno.

Drugim rečima, pokazali smo da je u slabo rešenje (2.1) ako i samo ako je minimizator funkcionele $\mathcal{E}$ i, štaviše, minimizator takve funkcionele energije postoji i jedinstven je.

Napomena 2.3. Zanimljivo pitanje je ustanoviti skup mogućih graničnih uslova $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ takav da važi (2.10) Naravno, kada je Ω bilo koji ograničen Lipšic domen, i g je Lipšicovo, tada je lako pokazati da g ima Lipšicove produžetke unutar Ω i da važi (2.10). Međutim, ako je g veoma neregularna, tada se može desiti da to nije trag ni jedne $H^1(\Omega)$ funkcije, tako da (2.10) ne važi u ovom slučaju. Ispostaviće se da je pravi uslov za g sledeći: S obzirom na bilo koji ograničen Lipšicov domen Ω (2.10) važi ako i samo ako

$$\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{n+1}} dxdy < \infty.$$

Ostavljamo referencu na **[Eva98]** za više detalja.

Jednakost u srednjem i Lijuvilova teorema. Ako je u harmonijska funkcija na Ω (t.j. $\Delta u = 0$ na Ω) i $B_r(x) \subset \Omega$, tada

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y) = \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} u(y) dy. \tag{2.12}$$

Jednakost u srednjem važi isključivo za harmonijske funkcije. Neće važiti za druge eliptične jednačine. Postoje bitna svojstva harmonijskih funkcija koja proizilaze iz jednakosti u srednjem. Jedno od njih je o njihovoj regularnosti.

Teorema 2.4. *Svaka harmonijska funkcija je C^∞. Štaviše, za svaki pozitivan ceo broj k postoji konstanta C (koja zavisi samo od k i od dimenzije) takva da ako je $\Delta u = 0$ u B_r, tada je*

$$\max_{B_{r/2}} |D^k u| \leq \frac{C}{r^k} \max_{B_r} |u|.$$

Ako zamenimo uslov $\Delta u = 0$ sa nejednakošću $\Delta u \geq 0$, jednakost u srednjem takođe postaje nejednakost.

Propozicija 2.5. *Funkcija $u : \Omega \to \mathbb{R}$ zadovoljava $\Delta u \geq 0$ na Ω ako svaki put kada je $B_r(x) \subset \Omega$ važi*

$$u(x) \leq \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

Štaviše, desna strana je monotono rastuća po r, dokle god je $B_r(x) \subset \Omega$.

Obrnuto, ako $u \in C^2(\Omega)$ zadovoljava jednakost u srednjem, tada $\Delta u = 0$ na Ω. Ovo možemo videti, na primer, korišćenjem 2.3 iznad.

U stvari, jednakost u srednjem (2.12) se može koristiti za još jednu (slabu) definiciju harmonijskih funkcija koja zahteva jedino da je u lokalno integrabilno. Slično, nije teško zaključiti da odgovarajuće svojstvo potiče iz definicije slabe superharmoničnosti i subharmoničnosti (pogledati Definiciju 2.1).

Ako je u slaba superharmonijska na Ω ($\Delta u \leq 0$ na Ω u slabom smislu), tada za svako $x \in \Omega$

$$r \to \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u(y)dy \quad \text{je monotono nerastuća za } r \in (0, dist(x, \partial\Omega)). \tag{2.13}$$

(I monotono je nerastuća za slabe subharmonijske funkcije).

Stoga, definisaćemo (slabo) superharmoničnost i subharmoničnost za L^1_{loc} funkcije: kažemo da $u \in L^1_{loc}$ je superharmonijska na Ω ako (2.13) važi za svako $x \in \Omega$. Slično, kažemo da $u \in L^1_{loc}$ je subharmonijska na Ω ako je preslikavanje u (2.13) monotono neopadajuće za svako $x \in \Omega$ i $r \in (0, dist(x, \partial\Omega))$.

Sada ćemo dati dve leme koje će biti korišćene u nastavku i koje uokviruju sadržaj ove teme. Prva lema kaže da tačkasti limes niza superharmonijskih uniformno ograničenih funkcija je superharmonijska funkcija.

Lema 2.6. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i neka je $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz uniformno ograničenih funkcija $w_n : \Omega \to \mathbb{R}$ koji zadovoljava (2.13) i koji tačkasto konvergira ka nekom $w : \Omega \to \mathbb{R}$. Tada w zadovoljava (2.13).*

Dokaz. Neka je $w_\infty := w$ i definisaćemo za $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\varphi_{x,n}(r) := \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} w_n$. Primetimo da je $\varphi_{x,n}(r)$ nerastuće po r za sve $n \in \mathbb{N}$. Naročito, za dato $0 < r_1 < r_2 < R_x$, imamo da je $\varphi_{x,n}(r_1) \geq \varphi_{x,n}(r_2)$ za $n \in \mathbb{N}$. Sada ćemo pustiti da $n \to \infty$ i koristiti da w_n tačkasto konvergira ka w da zaključimo, prema teoremi o dominantnoj konvergenciji (primetimo da je w_n uniformno ograničeno) da je $\varphi_{x,\infty}(r_1) \geq \varphi_{x,\infty}(r_2)$. Tada $w_n = w$ zadovoljava (2.13).

Druga lema pokazuje da superharmonijske funkcije su poluneprekidne sa donje strane.

Lema 2.7. *Pretpostavimo da je w ograničeno i da zadovoljava (2.13) na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Tada je w, do na skup mere 0, poluneprekidno sa donje strane.*

Dokaz. Dokaz je standardan. Ako definišemo $w_0(x) := \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|} \int w$ (koji je dobro definisan, pošto je u proseku monotono nerastući), tada je $w_0(x) = w(x)$ ako je x Lebegova tačka (Teorema 1.1) i zbog toga $w_0 = w$ skoro svuda na Ω. Sada ćemo razmotriti $x_\circ \in \Omega$, i neka $x_k \to x_\circ$ kad $k \to \infty$. Tada, prema teoremi o dominantnoj konvergenciji imamo da je

$$\frac{1}{|B_r(x_\circ)|} \int_{B_r(x_\circ)} w = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|B_r(x_k)|} \int_{B_r(x_k)} w \leq \liminf_{k\to\infty} w_0(x_k)$$

za $0 < r < \frac{1}{2} dist(x_\circ, \partial\Omega)$. Sada, kada pustimo da $r \to 0$ na levoj strani, dostižemo

$$w_0(x_\circ) \leq \liminf_{k\to\infty} w_0(x_k),$$

pa sledi da je w_0 poluneprekidna sa donje strane.

Sa druge strane, dobro poznata teorema koja može biti izvedena iz jednakosti u srednjem je klasifikacija globalno ograničenih harmonijskih funkcija.

Teorema 2.8 (Lijuvilova teorema). *Bilo koje ograničeno rešenje jednačine $\Delta u = 0$ u $\mathbb{R}^n$ je konstantno.*

Dokaz. Neka je u bilo koje globalno ograničeno rešenje $\Delta u = 0$ u $\mathbb{R}^n$. Pošto je u glatka, čak iako u slabom smislu zadovoljava Laplasovu jednačinu, svaki izvod $\partial_i u$ je dobro definisan i takođe harmonijski. Stoga, zahvaljujući nejednakosti u srednjem i teoremi o divergenciji, za bilo koje $x \in \mathbb{R}^n$ i $R \geq 1$ imamo

$$|\partial_i u(x)| = \left| \frac{c_n}{R_n} \int_{B_R(x)} \partial_i u \right| = \left| \frac{c_n}{R_n} \int_{\partial B_R(x)} u(y) \frac{y_i}{|y|} dy \right| \leq \frac{C}{R^n} \int_{\partial B_R(x)} |u|.$$

Korišćenjem $|u| \leq M$ u $\mathbb{R}^n$, nalazimo

$$|\partial_i u(x)| \leq \frac{c_n}{R^n} |\partial B_R(x)| M = \frac{c_n}{R^n} |\partial B_1| R^{n-1} M = \frac{c_n M}{R} \to 0, \text{ kada } R \to \infty.$$

Stoga je $\partial_i u(x) = 0$ za svako $x \in \mathbb{R}^n$ i u je konstanta.

Uopštenije, može se čak dokazati rezultat klasifikacije za funkcije sa polinomijalnim rastom. Za $\gamma \in \mathbb{R}$, $\lfloor \gamma \rfloor$ označava ceo deo, što je najveći ceo broj koji je manji ili jednak od γ.

Propozicija 2.9 (Lijuvilova teorema sa rastom). *Pretpostavimo da je u rešenje $\Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^n$ koje zadovoljava $|u(x)| \leq C(1 + |x|^\gamma)$ za svako $x \in \mathbb{R}^n$ i $\gamma > 0$. Tada, u je polinom stepena najviše $\lfloor \gamma \rfloor$.*

Dokaz. Definisaćemo $u_R(x) := u(Rx)$ i primetimo da je $\Delta u_R = 0$ na $\in \mathbb{R}^n$. Kao u razmatranju prethodne leme funkcije su glatke, pa sa dodatnom pretpostavkom rasta imamo

$$R^k \|D^k u\|_{L^\infty(B_{R/2})} = \|D^k u_R\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C_k \|u_R\|_{L^\infty(B_1)} = C_k \|u\|_{L^\infty(B_R)} \leq C_k R^\gamma.$$

Specijalno, ako je $k = \lfloor \gamma \rfloor + 1$,

$$\|D^k u\|_{L^\infty(B_{R/2})} \leq C_k R^{\gamma - k} \to 0 \text{ kada } R \to \infty.$$

To znači, $D^k u \equiv 0$ na $\mathbb{R}^n$ i u je polinom stepena $k - 1 = \lfloor \gamma \rfloor$.

Princip maksimuma. Princip maksimuma tvrdi sledeće: Ako je $\Delta u \geq 0$ na Ω, i $u \in C(\overline{\Omega})$, tada:

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial \Omega} u.$$

Konkretno, takođe izvodimo *princip poređenja*: ako je $\Delta u \geq \Delta v$ na Ω, i $u \leq v$ na $\partial\Omega$, tada $u \leq v$ na celom domenu Ω.

Kao što ćemo pokazati u nastavku, princip maksimuma zapravo važi za bilo koje slabo rešenje u.

Propozicija 2.10. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bilo koji ograničen otvoren skup. Pretpostavimo da $u \in H^1(\Omega)$ zadovoljava, u slabom smislu,*

$$\begin{cases} -\Delta u & \geq & 0 & na & \Omega, \\ u & \geq & 0 & na & \partial\Omega. \end{cases}$$

Tada, $u \geq 0$ na Ω.

Dokaz. Primetimo da je $-\Delta u \geq 0$ na Ω ako i samo ako je

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \geq 0 \quad \text{za svako} \quad v \geq 0,\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.14}$$

Razmotrićemo $u^- := \max\{-u, 0\}$ i $u^+ := \max\{u, 0\}$, tako da je $u = u^+ - u^-$. Prema tvrđenju **(S9)** imamo da $u^\pm \in H^1(\Omega)$ kad god je $u \in H^1(\Omega)$ i stoga možemo izabrati $v = u^- \geq 0$ u (2.14). Naime, uzimajući da je $u^+u^- = 0$ i da je $\nabla u = \nabla u^+ - \nabla u^-$, dobijamo

$$0 \leq \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u^- dx = -\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx.$$

Pošto je $u^-|_{\partial\Omega} \equiv 0$ ovo implicira $u^- \equiv 0$ na Ω, što je $u \geq 0$ na Ω.

Korisna posledica principa maksimuma je sledeća.

Lema 2.11. *Neka je u bilo koje slabo rešenje*

$$\begin{cases} \Delta u & = & f & na & \Omega, \\ u & = & g & na & \partial\Omega. \end{cases}$$

Tada,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}),$$

za svaku konstantu C koja zavisi samo od prečnika od Ω.

Dokaz. Razmotrićemo funkciju

$$\tilde{u}(x) := \frac{u(x)}{(\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)})}.$$

Želimo da dokažemo da je $|\tilde{u}| \leq C$ na Ω, za neku konstantu C koja zavisi jedino od prečnika od Ω.

Primetimo da takva funkcija $\tilde{u}$ rešava

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} & = & \tilde{f} & \text{na} & \Omega, \\ u & = & \tilde{g} & \text{na} & \partial\Omega, \end{cases}$$

sa $|\tilde{g}| \leq 1$ i $|\tilde{f}| \leq 1$.

Izabraćemo dovoljno veliko R tako da je $B_R \supset \Omega$. Nakon translacije možemo uzeti $R = \frac{1}{2} diam(\Omega)$. U B_R razmotrićemo funkciju

$$w(x) = \frac{R^2 - x^2}{2} + 1.$$

Takva funkcija $w(x)$ zadovoljava

$$\begin{cases} \Delta w &= &-1 & \text{na} & \Omega, \\ w &\geq & 1 & \text{na} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Stoga na osnovu principa poređenja zaključujemo da je

$$\tilde{u} \leq w \quad \text{na} \quad \Omega.$$

Pošto je $w \leq C$ (gde C zavisi samo od R), zaključujemo da je $\tilde{u} \leq C$ na Ω. Ponavljanjem istog argumenta sa $-\tilde{u}$ umesto $\tilde{u}$, pronalazimo da je $|\tilde{u}| \leq C$ na Ω i to je kraj.

Konačno, drugi važan rezultat koji sledi iz principa maksimuma je sledeći. Ovde, kažemo da Ω zadovoljava uslov unutrašnjosti lopte kad god postoji $\rho_0 > 0$ tako da svaka tačka na $\partial\Omega$ može biti dodirnuta iz unutrašnjosti lopte poluprečnika $\rho_\circ > 0$ koja je sadržana u $\overline{\Omega}$. To znači, za svako $x_\circ \in \partial\Omega$ postoji $B_{\rho_\circ}(y_\circ) \subset \Omega$ sa $x_\circ \in \partial B_{\rho_\circ}(y_\circ)$.

Nije teško primetiti da bilo koji C^2 domen zadovoljava takav uslov, i takođe bilo koji domen koji je komplement konveksnog skupa.

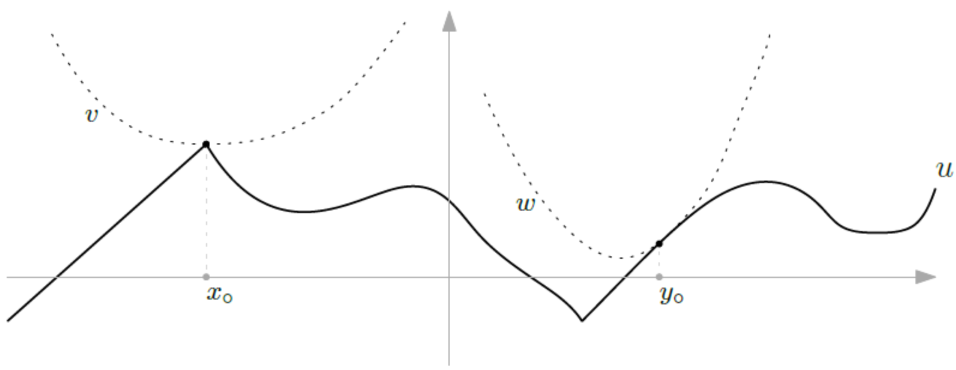
Lema 2.12 (Hopfova lema)**.** *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bilo koji domen koji zadovoljava uslov unutrašnje lopte. Neka je $u \in C(\overline{\Omega})$ bilo koja pozitivna harmonijska funkcija u $\Omega \cap B_2$ gde $u \geq 0$ na $\partial\Omega \cap B_2$*

Tada $u \geq c_\circ d$ na $\Omega \cap B_1$ za neko $c_\circ > 0$, gde je $d(x) := dist(x, \Omega^c)$.

Dokaz. Pošto je u pozitivno i neprekidno na $\Omega \cap B_2$, imamo da je $u \geq c_1 > 0$ na $\{d \geq \rho_\circ/2\} \cap B_{3/2}$ za neko $c_1 > 0$.

Razmotrićemo rešenje $\Delta w = 0$ na $B_{\rho_\circ} \backslash B_{\rho_\circ/2}$ sa $w = 0$ na $\partial B_{\rho_\circ}$ i $w = 1$ na $\partial B_{\rho_\circ/2}$. Iz pretpostavke teoreme može se zaključiti da je $w \geq c_2(\rho_\circ - |x|)$ na $B_{\rho_\circ}$ za neko $c_2 > 0$.

Korišćenjem funkcije $c_1 w(x_\circ + x)$ kao subrešenja u bilo kojoj lopti $B_{\rho_\circ}(x_\circ) \subset \Omega \cap B_{3/2}$, zaključujemo da je $u(x) \geq c_1 w(x_\circ + x) \geq c_1 c_2(\rho_\circ - |x - x_\circ|) \geq c_1 c_2 d$ u $B_{\rho_\circ}(x_\circ)$. Uzimajući da je $c_\circ = c_1 c_2$ i korišćenjem prethodne nejednakosti za svaku loptu $B_{\rho_\circ}(x_\circ) \subset \Omega \cap B_{3/2}$ sledi rezultat.



Slika 2.2: v dodiruje u sa gornje strane u $x_\circ$, w dodiruje u sa gornje strane u $y_\circ$.

Postojanje rešenja. Princip poređenja. Videli smo jedan način da dokažemo postojanje rešenja Dirihleovog problema za Laplasijan korišćenjem *varijacione metode.* Sa ovakvim pristupom, pokazuje se u stvari postojanje *slabog rešenja* $u \in H^1(\Omega)$.

Sada ćemo videti alternativni način da konstruišemo rešenje: preko *principa poređenja.* Sa ovom metodom može se pokazati postojanje viskoznog rešenja $u \in C(\overline{\Omega})$.

Za Laplasovu jednačinu, za ova rešenja (slaba ili viskozna) može se pokazati da su $C^\infty(\Omega)$ i stoga se poklapaju.

Počećemo sa definisanjem subharmoničnosti i superharmoničnosti *u viskoznom smislu.* Važno je napomenuti da u takvoj definiciji funkcija u jedino treba da bude *neprekidna.*

Definicija 2.13. *Funkcija $u \in C(\overline{\Omega})$ je subharmonijska (u viskoznom smislu) ako za svaku funkciju $v \in C^2$ takvu da v dodiruje u od gore u $x_\circ \in \Omega$ (to znači, $v \geq u$ na Ω i $v(x_\circ) = u(x_\circ)$), imamo $\Delta v(x_\circ) \geq 0$ (pogledati Sliku 2.2).*

Definicija *superharmoničnosti* za $u \in C(\Omega)$ je analogna (dodiruje sa donje strane i važi $\Delta v(x_\circ) \leq 0$).

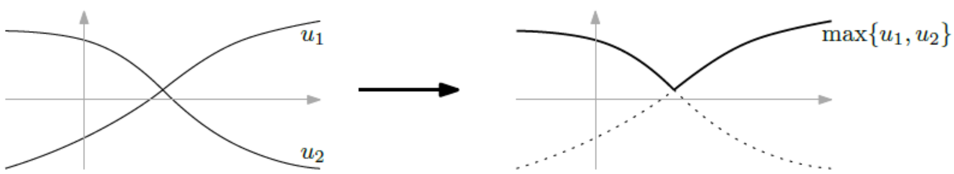
Funkcija $u \in C(\Omega)$ je *harmonijska* ako je i subharmonijska i superharmonijska u viskoznom smislu definisanom iznad.

Ova definicija očigledno se poklapa sa onom koju znamo u slučaju kada $u \in C^2$. Međutim, dozvoljava i funkcije koje nisu C^2, na primer, $u(x) = |x|$ je subharmonijska i $-|x|$ je superharmonijska.

Korisno svojstvo viskoznih subrešenja i superrešenja je sledeće.

Propozicija 2.14. *Maksimum dve subharmonijske funkcije je takođe subharmonijska funkcija. To znači, ako su u_1 i $u_2 \in C(\Omega)$ subharmonijske, tada je funkcija $v := \max\{u_1, u_2\}$ takođe subharmonijska. Pogledati Sliku 2.3*

Slično, minimum dve superharmonijske funkcije je superharmonijska funkcija.



Slika 2.3: Maksimum dve funkcije u_1 i u_2.

Dokaz. Sledi lako iz Definicije 2.13. Neka su u_1 i $u_2 \in C(\overline{\Omega})$ dve subharmonijske funkcije (u viskoznom smislu), tj. neka za svaku funkciju $v \in C^2(\Omega)$ takvu da φ dodiruje u_1 u $x_\circ \in \Omega$ i u_2 u $y_\circ \in \Omega$ od gore (to znači, $\varphi \geq u_1$ i $\varphi \geq u_2$ na Ω i $\varphi(x_\circ) = u_1(x_\circ)$ i $\varphi(y_\circ) = u_2(y_\circ)$), imamo da je $\Delta\varphi(x_0) \geq 0$ i $\Delta\varphi(y_0) \geq 0$. Pošto za funkciju $v := \max\{u_1, u_2\}$ imamo da je φ dodiruje od gore u nekoj od ove dve tačke, tvrđenje direktno sledi.

Štaviše, važi i sledeće:

Propozicija 2.15. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničen domen, i pretpostavimo da $u \in C(\overline{\Omega})$ zadovoljava, u viskoznom smislu*

$$\begin{cases} -\Delta u & \geq & 0 & \textit{na} & \Omega, \\ \quad u & \geq & 0 & \textit{na} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Tada je $u \geq 0$ na Ω.

Dokaz. Nakon reskaliranja, možemo pretpostaviti da je $\Omega \subset B_1$.

Pretpostavimo da u ima negativan minimum na Ω. Tada, pošto je $u \geq 0$ na $\partial\Omega$, imamo $\min_{\overline{\Omega}} u = -\delta$, za $\delta > 0$, i minimum je dostignut na Ω.

Sada ćemo razmotriti slučaj kada je $0 < \varepsilon < \delta$ i $v(x) := -\kappa + \varepsilon(|x|^2 - 1)$, za $\kappa > 0$ (to je dovoljno ravan paraboloid).

Sada, primetimo da je $u - v > 0$ na $\partial\Omega$, i tada možemo izabrati $\kappa > 0$ tako da je $\min_{\overline{\Omega}}(u - v) = 0$. To znači da možemo pomerati paraboloid od ispod rešenja u dok ne ga ne dodirnemo, po pretpostavci, u unutrašnjoj tački. Stoga, postoji $x_\circ \in \Omega$ takvo da je $u(x_\circ) - v(x_\circ) = \min_{\overline{\Omega}}(u - v) = 0$. Zato, za tako izabrano κ, funkcija v dodiruje u sa donje strane u $x_\circ \in \Omega$ i stoga po definiciji viskoznog rešenja, mora da važi

$$\Delta v(x_\circ) \leq 0.$$

Međutim, direktan proračun nam daje $\Delta v \equiv 2n\varepsilon > 0$ na Ω što je kontradikcija.

Zahvaljujući ovim dvema propozicijama, postojanje (viskoznog) rešenja Dirihleovog problema može biti pokazano na sledeći način.

Neka je

$$S_g := \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \text{ je subharmonijska, i } v \leq g \text{ na } \partial\Omega\}$$

i definisaćemo tačkasti supremum

$$u(x) := \sup_{v \in S_g} v(x).$$

Tada može biti dokazano da ako je Ω regularno i g neprekidno, tada $u \in C(\overline{\Omega})$ i $\Delta u = 0$ na Ω i $u = g$ na $\partial\Omega$. Ovo je takozvani *Peronov metod*. Upućujem čitaoca na [**HL97**] za kompletan opis metoda u slučaju Laplasovog operatora.

U glavi 3. ćemo detaljno proći kroz postojanje viskoznog rešenja u uopštenijoj postavci potpuno neliarnih eliptičnih jednačina.

Kratak rezime postojanja rešenja. Imamo dva potpuno različita načina da konstruišemo rešenje: preko metoda energije, ili preko principa maksimuma (poređenja).

U prvom slučaju, konstruisano rešenje pripada $H^1(\Omega)$, u drugom slučaju pripada $C(\overline{\Omega})$. U bilo kom slučaju može se dokazati da je $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ - dokle god su Ω i g dovoljno regularni - i stoga u rešava Dirihleov problem u uobičajenom smislu.

Glava 3

Potpuno nelinearne eliptične jednačine

Nelinearne eliptične PDJ drugog reda u svojoj najopštijoj formi mogu biti zapisane na sledeći način:

$$F(D^2u, \nabla u, u, x) = 0, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Shvatanje pojma regularnosti rešenja ovih jednačina postalo je glavni pravac istraživanja u teoriji PDJ od sredine 20-tog veka.

Ove jednačine se zovu *potpuno nelinearne eliptične jednačine*. Pored samog interesa u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina, one nastaju i u teoriji verovatnoće (stohastičkom upravljanju, diferencijalnim igrama, pogledati u nastavku verovatnosnu interpretaciju) i u geometriji. Zahvaljujući procenama Šauderovog tipa iz klasične teorije o linearnim eliptičnim jednačinama, pod prirodnim pretpostavkama zavisnosti od ∇u, u i x, regularnost za (3.1) može biti redukovana na razumevanje rešenja u najjednostavnijoj formi, gde sve zavisi samo od diferencijalnog operatora drugog reda, tj. Hesijana:

$$F(D^2u) = 0 \quad \text{na} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Zaista, neke od "perturbativnih" metoda koje se koriste za dokazivanje Šauderove procene za linearne jednačine $\sum a_{ij}(x)\partial_{ij}u = f(x)$ na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ koriste se i za potpuno nelinearne jednačine takođe. Zbog jednostavnosti, fokusiraćemo se na izučavanje jednačine (3.2).

U sledećim sekcijama diskutovaćemo uobičajena pitanja koja su od interesa u teoriji eliptičnih PDJ:

- Šta je eliptičnost za rešenja (3.2)?
- Postojanje i jedinstvenost rešenja.
- Regularnost rešenja (3.2).

Nećemo dokazivati sve glavne poznate rezultate ovog poglavlja, nego ćemo dati pregled onoga što je poznato. Upućujem čitaoca na poznate monografije [**CC95**] i [**NTV14**] za više detalja o ovoj oblasti.

3.1. Varijacija problema slučajnog hoda

U sekciji 2.1 diskutovali smo kako da izvedemo Laplasovu jednačinu iz problema slučajnog hoda. U ovoj sekciji diskutovaćemo neke varijacije tog problema koje vode do drugih eliptičnih jednačina.

Podsetimo se da smo definisali slučajan niz tačaka $x := X_0, X_1, X_2, \ldots$. U sekciji 2.1, tačka X_{k+1} je proizvoljno izabrana sa unifomnom raspodelom u lopti poluprečnika r oko X_k.

Ovde želimo da koristimo drugu raspodelu tačaka za izbor X_{k+1}. Možemo ili da izaberemo drugačije raspodele tačaka u $B_r(X_k)$, ili drugačiji oblik oko X_k pri čemu biramo X_{k+1} sa uniformnom raspodelom. Nastavićemo sa poslednjom varijantom. Biramo X_{k+1} u elipsoidu sa centrom u X_k i uniformnom raspodelom. Označićemo ovaj elipsoid sa $E_r(X_k)$. Vrednost r je parametar skaliranja koji čini da se $E_r(X_k)$ širi do tačke kada $r \to 0$.

Kao i pre, označićemo sa $u_r(x)$ očekivanu vrednost funkcije f u prvoj tački gde slučajni hod pogodi granicu $\partial\Omega$. U ovom slučaju tačka x se odnosi na početnu tačku u slučajnom hodu. Tada funkcija u_r zadovoljava

$$\int_{E_r(x)} u_r(y) - u_r(x) dy = 0.$$

Ako pustimo limit kad $r \to 0$, dobićemo funkciju u koja je rešenje jednačine

$$\begin{aligned} \sum_{ij} a_{ij} \partial_{ij} u &= 0 \quad \text{na} \quad \Omega, \\ u &= f \quad \text{na} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Koeficijenti a_{ij} zavise od oblika $E_r(x)$. Ako izaberemo drugačiji elipsoid $E_r(x)$ u svakoj različitoj tački x, to bi vodilo do koeficijenata koji su zavisni od x.

$$\begin{aligned} \sum_{ij} a_{ij}(x) \partial_{ij} u &= 0 \quad \text{na} \quad \Omega, \\ u &= f \quad \text{na} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Koeficijenti $\{a_{ij}(x)\}$ će uvek biti pozitivne matrice. Ovo je ograničenje svojstveno konstrukciji.

Sada ćemo razmotriti sledeći optimizacioni problem. Recimo da možemo da biramo, u svakoj tački $x \in \Omega$, bilo koji koeficijent a_{ij} iz date familije $\{a_{ij}^{\alpha} : \alpha \in \mathcal{A}\}$. Koliko veliku vrednost $u(x)$ možemo da napravimo?

Ispostavlja se da postoji jedinstven izbor koeficijenata koji maksimiziraju vrednosti $u(x)$ za svako $x \in \Omega$. Povezan je sa rešenjem problema

$$\begin{aligned} F(D^2 u) := \sup_{\alpha} \sum_{ij} a_{ij}^{\alpha} \partial_{ij} u &= 0 \quad \text{na} \quad \Omega. \\ u &= f \quad \text{na} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ovo se naziva *Belmanova jednačina.* Funkcija F je eliptična u smislu Definicije 3.2 iz Sekcije 3.3 i data je kao supremum proizvoljne familije linearnih funkcija. Primetimo da bilo koja konveksna funkcija je supremum familije linearnih funkcija, stoga ovaj model vodi do bilo koje jednačine u formi $F(D^2u) = 0$ gde je F eliptična i konveksna (jednostavna jednačina iznad je takođe homogena prvog reda, ali to nije ključno za Belmanovu jednačinu).

Uopšteniji model uključuje igru sa dva igrača. Ovde su koeficijenti izabrani iz dve parametarske familije $a_{ij}^{\alpha\beta}$. Prvi igrač bira α tako da pokuša da maksimizira vrednost $u(x)$, onda drugi igrač bira vrednost β tako da pokuša da minimizira vrednost $u(x)$. Optimalan izbor za oba igrača odgovara rešenju sledeće jednačine

$$\begin{aligned} F(D^2u) := \inf_\beta \sup_\alpha \sum_{ij} a_{ij}^{\alpha\beta} \partial_{ij} u &= 0 \quad \text{na} \quad \Omega, \\ u &= f \quad \text{na} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ovo se zove *Isakova jednačina.* U ovom slučaju F je eliptična funkcija koja je infimum proizvoljne konveksne funkcije. Bilo koja Lipšicova funkcija D^2u može biti zapisana kao infimum konveksne funkcije. Zato nam model omogućava da realizujemo proizvoljne jednačine oblika $F(D^2u) = 0$ pri čemu je F eliptično.

3.2. Verovatnosne interpretacije potpuno nelinearnih jednačina

U ovom poglavlju će biti heuristički opisane verovatnosne interpretacije potpuno nelinearnih eliptičnih PDJ.

Počećemo podsećanjem sledeće verovatnosne interpretacije harmonijskih funkcija:

Imamo Braunovo kretanje X_t^x, koje započinje u $x \in \Omega$, i funkciju isplate $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Kada pogodimo granicu $\partial\Omega$ (prvi put) u tački $z \in \partial\Omega$, dobijamo isplatu $g(z)$. Pitanje je:

Šta je očekivana isplata?

Ispostaviće se da je

$$u(x) := \left\{ \text{očekivana isplata} \right\} = \mathbb{E}[g(X_\tau^x)] \quad \text{zadovoljava} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{na} \quad \Omega \\ u = g & \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

gde je τ prvi trenutak u kom je X_t^x pogodilo $\partial\Omega$.

Sada ćemo videti uopštene „probabilističke igre” koje vode ka uopštenijim eliptičnim PDJ.

Stohastički procesi. Stohastički proces X_t je kolekcija prozvoljnih varijabli indeksiranih na osnovu parametra, koji će ovde biti $t \geq 0$, uzimajući vrednosti u prostoru stanja, koje će ovde biti $\mathbb{R}^n$. Možemo o njima misliti kao o česticama koje se kreću nasumično u $\mathbb{R}^n$, sa vremenom $t \geq 0$.

Najpoznatiji i najvažniji stohastički proces je *Braunovo kretanje*, koje smo već pominjali. Podsetićemo se njegovih karakteristika:

(1) $X_0 = 0$ skoro sigurno.

(2) X_t ima *nezavisne priraštaje* (nezavisan je od prošlosti).

(3) X_t ima *stacionarne priraštaje*: $X_{t+s} - X_s$ je invarijantan u odnosu na translaciju vremena (ne zavisi od s, tj. raspodela broja događaja koji se pojavljuju u bilo kom vremenskom intervalu zavisi samo od dužine trajanja tog intervala, a ne od njegovog položaja na vremenskoj osi).

(4) X_t ima *neprekidne trajektorije* ($t \to X_t$ je neprekidno) skoro sigurno.

(5) X_t je *izotropno*, tj. rotaciono simetrično u raspodeli.

Uopštenija klasa stohastičkih procesa dobija se uklanjanjem pretpostavke (5).

Infinitezimalni generator. Infinitezimalni generator Fellerovog[1] stohastičkog procesa X_t je operator L definisan da deluje na funkcije $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prema

$$Lu(x) := \lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{E}[u(x+X_t)] - u(x)}{t}. \tag{3.3}$$

Uzima C^2 funkciju u i daje Lu.

Za Braunovo kretanje, imamo da je L Laplasijan Δ.

Uopštenije, pod pretpostavkama $(1)-(2)-(3)-(4)$, infinitezimalni generator L će biti eliptični operator drugog reda u obliku

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij}u + \sum_{i}^{n} b_i \partial_i u + cu. \tag{3.4}$$

Za šta je infinitezimalni generator koristan?

Infinitezimalni generator stohastičkog procesa enkodira sve informacije takvog procesa. Zaista, klasična je činjenica da definicija L vodi do formule

$$\mathbb{E}[u(x+X_t)] = u(x) + \mathbb{E}\int_0^t Lu(x+X_s)ds. \tag{3.5}$$

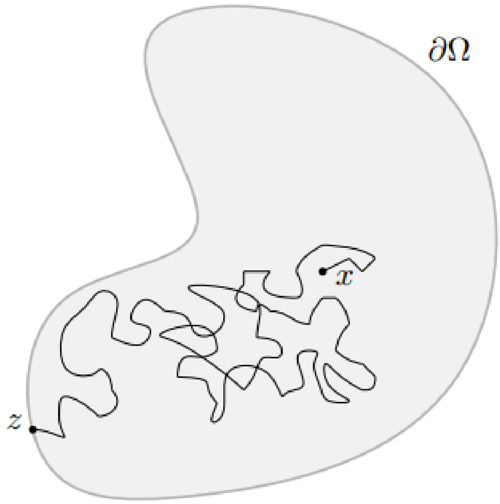
(Ovo je analogno fundamentalnoj teoremi kalkulusa).

Sada možemo da se vratimo na problem „očekivane isplate”:

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ fiksan domen i razmotrimo stohastički proces $(x+X_t)$ koji započinje u $x \in \Omega$ i zadovoljava $(2)-(3)-(4)$ iznad. Za zadatu funkciju isplate $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, dobijamo sledeće: kada X_t^x pogodi granicu $\partial\Omega$ prvi put u $z \in \partial\Omega$, dobijamo isplatu $g(z)$ (pogledati Sliku 3.1)

Šta je očekivana isplata?

[1]Fellerov stohastički proces je proces Markova sa verovatnosnom tranzicionom funkcijom koja je asocirana sa Fellerovom polugrupom.



Slika 3.1: Stohastički proces X_t^x definisan u Ω sa početnom tačkom x dok ne pogodi prvu tačku na rubu $z \in \partial\Omega$.

Naravno, očekivana isplata će zavisiti od $x \in \Omega$. Za Braunovo kretanje, definišemo $u(x)$ kao očekivanu isplatu kada startujemo u x, $\mathbb{E}[g(X_\tau^x)]$, gde je τ vreme prvog pogotka $\partial\Omega$. Tada, pošto je Braunovo kretanje izotropno, u mora zadovoljiti jednakost u srednjem, i stoga je u harmonijsko: $\Delta u = 0$ na Ω.

Sada, za uopštenije stohastičke procese, moramo koristiti (3.5). Zaista, definišemo u kao ranije (očekivana isplata) i primetimo da, ako je $t > 0$ dovoljno malo, tada je $x + X_t$ i dalje unutar Ω, i stoga je očekivana isplata jednostavno jednaka sa $\mathbb{E}[u(x + X_t)]$ (do na malu grešku), tj.

$$u(x) = \mathbb{E}[u(x + X_t)] + o(t) \quad (\text{ za } t > 0 \text{ dovoljno malo}),$$

gde navodimo $o(t)$ zbog činjenice da $x + X_t$ može potencijalno da leži izvan Ω, čak i za proizvoljno malo vreme $t > 0$.

Sada, koristeći definiciju infinitezimalnog generatora (3.3), dobijamo da je

$$Lu(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{E}[u(x + X_t)] - u(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{o(t)}{t} = 0.$$

Stoga, za svako $x \in \Omega$, dobijamo $Lu(x) = 0$. Jasno je da imamo $u = g$ na $\partial\Omega$, stoga u mora biti rešenje

$$\begin{cases} Lu & = & 0 & \text{na} & \Omega, \\ u & = & g & \text{na} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Sumirano:

$$\Big\{ \text{ Očekivana isplata za } X_t \Big\} \longleftrightarrow \Big\{ \text{Dirihleov problem za } L \}$$

Nešto slično se može uraditi da se reše drugi verovatnosni problemi povezani sa X_t:

- Šta je očekivano vreme koje je potrebno da napustimo Ω ako startujemo u x?

$$\begin{cases} -Lu &= 1 \quad \text{na} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

- Šta je gustina verovatnoće $\rho(x,t)$ od X_t u $\mathbb{R}^n$?

$$\begin{cases} \partial_t p - Lp &= 0 \quad \text{na} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ p(\cdot,0) &= \delta_{\{x=0\}} \quad \text{na} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Sledeće ćemo videti šta se dešava kada imamo kontrolu, ili igru sa dva igrača. U tom slučaju dobijamo nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu.

Optimalno zaustavljanje. Započećemo sa problemom optimalnog zaustavljanja. Ovo je vrsta problema koja se vrlo često pojavljuje u matematičkim finansijama.

Dat je proces $X_t \in \mathbb{R}^n$, možemo odlučiti u svakoj instanci vremena da li da se zaustavimo ili ne. Kada se zaustavimo, dobijamo isplatu φ (koja zavisi od tačke u kojoj smo se zaustavili). Cilj je da otkrijemo koja je optimalna strategija tako da maksimizujemo isplatu.

Sada ćemo razmotriti proces $x + X_t$ (startujući u $x \in \mathbb{R}^n$) i isplatu $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Za bilo koje zaustavno vreme θ, dobijamo isplatu $\mathbb{E}[\varphi(x+X_\theta)]$ i stoga želimo da maksimizujemo

$$u(x) := \max_\theta \mathbb{E}[\varphi(x+X_\theta)]$$

među svim mogućim zaustavnim vremenima θ (primetimo da je zaustavno vreme θ zapravo slučajna promenljiva, pogledati **[Eva13]** za više detalja).

Da li možemo da pronađemo PDJ za $u(x)$?

Grubo govoreći, jedina važna stvar koju ovde treba odlučiti je:

Ako smo u x, da li je bolje zaustaviti se ovde i dobiti $\varphi(x)$, ili nastaviti i nadati se boljoj isplati kasnije?

Hajde da pronađemo PDJ za u:

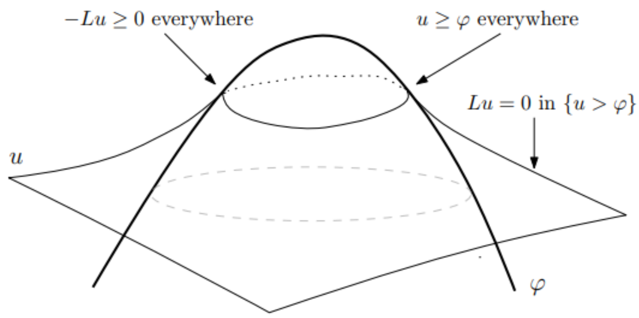
- Prvo, pošto se možemo uvek zaustaviti (uzmimo $\theta = 0$), imamo $u(x) \geq \varphi(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}^n$.
- Drugo, pošto uvek možemo nastaviti na neko vreme (uzmimo $\theta \geq t_\circ > 0$), imamo da je $u(x) \geq \mathbb{E}[u(x+X_t)]$ za $t \leq t_\circ$. Ovo, kombinovano sa (3.4) i (3.5), daje

$$Lu(x) \leq 0 \quad \text{za svako} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

- Treće, u ovim tačkama gde imamo $u(x) > \varphi(x)$, jasno je da se nećemo zaustaviti, pa imamo $u(x) = \mathbb{E}[u(x+X_t)] + o(t)$ za t veoma malo, i stoga je $Lu(x) = 0$ kad god je $u(x) > \varphi(x)$.

PDJ za u je

$$\begin{cases} u &\geq \varphi \quad \text{na} \quad \mathbb{R}^n, \\ -Lu &\geq 0 \quad \text{na} \quad \mathbb{R}^n, \\ Lu &= 0 \quad \text{na} \quad \{u > \varphi\}, \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad \min\{-Lu, u-\varphi\} = 0 \quad \text{na} \quad \mathbb{R}^n.$$



Slika 3.2: Problem prepreke.

Ovo je *problem prepreke* u $\mathbb{R}^n$ (pogledati Sliku 3.2).

Primetimo da jednom kada znamo u, znamo skupove $\{u = \varphi\}$ i $\{u > \varphi\}$ tako da imamo optimalnu strategiju.

Kontrolisana difuzija. Sada ćemo posmatrati drugačiji problem koji je prilično sličan optimalnom zaustavljanju.

Razmotrimo dva stohastička procesa, $X_t^{(1)}$ i $X_t^{(2)}$ sa infinitezimalnim generatorima L_1 i L_2 respektivno. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domen, i neka je $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ isplata. Imamo istu igru kao pre (dobijamo isplatu kada pogodimo granicu), ali sada imamo *kontrolu*: za svako $x \in \Omega$, možemo izabrati da se krećemo u skladu sa $X_t^{(1)}$ ili $X_t^{(2)}$.

Pitanje je tada:

Šta je optimalna strategija ukoliko želimo da maksimiziramo isplatu?

Primetimo da se sada strategija sastoji od izbora između $X_t^{(1)}$ i $X_t^{(2)}$ za svako $x \in \Omega$. Kao i ranije, definišemo

$$u(x) := \max_{\text{svi mogući izbori } a:\Omega \to \{1,2\}} \mathbb{E}[g(X_\tau^a)]$$

(gde je τ vreme pogotka ruba $\partial\Omega$). Primetimo da za svako $a : \Omega \to \{1,2\}$ imamo X_t^a, proces koji može da se menja od tačke do tačke.

Da li postoji PDJ za u?

Optimalni uslovi su:

- Prvo, kada smo u x možemo jednostavno odlučiti da nastavimo sa $X_t^{(1)}$ i stoga je $u(x) \geq \mathbb{E}[u(x + X_t^{(1)})]$ za svako $x \in \Omega$. Ovo nam daje $L_1 u(x) \leq 0$ za svako $x \in \Omega$.
- Slično, možemo uraditi isto za $X_t^{(2)}$ i dobiti $L_2 u(x) \leq 0$ za svako $x \in \Omega$.
- Konačno, ispostaviće se da je ili

$$u(x) = \lim_{t \to 0} \mathbb{E}[u(x + X_t^{(1)})] \quad \text{ili} \quad u(x) = \lim_{t \to 0} \mathbb{E}[u(x + X_t^{(2)})],$$

pošto u blizini x biramo ili $X_t^{(1)}$ ili $X_t^{(2)}$. Ovo znači da je ili $L_1 u(x) = 0$ ili $L_2 u(x) = 0$ za svako $x \in \Omega$.

Stoga, u zadovoljava

$$\begin{cases} -L_1 u & \geq & 0 \quad \text{na} \quad \Omega, \\ -L_2 u & \geq & 0 \quad \text{na} \quad \Omega, \\ \text{ili } L_1 u = & 0 \text{ ili } L_2 u = 0 & \text{na} \quad \Omega, \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad \max\{L_1 u, L_2 u\} = 0 \quad \text{na} \quad \Omega.$$

Uopštenije, ako imamo familiju procesa X_t^α sa $\alpha \in \mathcal{A}$, tada PDJ za u postaje

$$\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \{L_\alpha u\} = 0 \quad \text{na} \quad \Omega. \tag{3.6}$$

Još uopštenije, možemo imati dva igrača, jednog koji želi da maksimizuje isplatu i drugog koji želi da minimizuje isplatu. Postoje dva parametra, $X_t^{\alpha\beta}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$ i svaki igrač kontroliše jedan parameter. Tada je optimalna isplata rešenje PDJ

$$\min_{\beta \in \mathcal{B}} \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \{L_{\alpha\beta} u\} = 0 \quad \text{na} \quad \Omega. \tag{3.7}$$

Jednačina (3.6) iznad se zove *Belmanova jednačina* (stohastička kontrola).

Jednačina (3.7) iznad se zove *Isaakova jednačina* (diferencijalne igre).

Ove dve jednačine su *potpuno nelinearne eliptične jednačine.*

Zaista, pretpostavimo da imamo da važi (3.6) i da su infinitezimalni generatori $L_\alpha u$ u obliku

$$L_\alpha u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)} \partial_{ij} u, \quad (\alpha \in \mathcal{A})$$

sa $a_{ij}^{(\alpha)}$ uniformno eliptičnim: $0 \leq \lambda Id \leq (a_{ij}^{(\alpha)})_{ij} \leq \Lambda Id$. Tada, jednačina (3.6) postaje

$$\max_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)} \partial_{ij} u \right\} = 0 \quad \text{na} \quad \Omega.$$

Ovo je nelinearna funkcija Hesijana $D^2 u$:

$$F(D^2 u) = 0 \quad \text{na} \quad \Omega, \qquad \text{sa} \qquad F(M) := \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)} M_{ij} \right\}.$$

Funkcija $F : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ je maksimum linearnih funkcija. Prema tome, F je *konveksno.*

Štaviše, F je uniformno eliptično u smislu Definicije 3.5:

$$0 \leq \lambda \|N\| \leq \min_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)} N_{ij} \right\} \leq F(M+N) - F(M) \leq \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)} N_{ij} \right\} \leq \Lambda \|N\|$$

za bilo koju simetričnu matricu $N \geq 0$ (koristimo da je $\max f + \min g \leq \max(f+g) \leq \max f + \max g$).

Štaviše, bilo koja konveksna funkcija može biti zapisana kao maksimum linearnih funkcija (pogledati Sliku 3.3) pa važi:

Napomena 3.1. Bilo koja $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ koja je uniformno eliptična i konveksna može biti zapisana kao

$$F(M) = \max_{\alpha\in\mathcal{A}} \left\{ tr(A^{(\alpha)}M) + c_\alpha \right\} \quad \text{(gde su } c_\alpha \text{ konstante).}$$

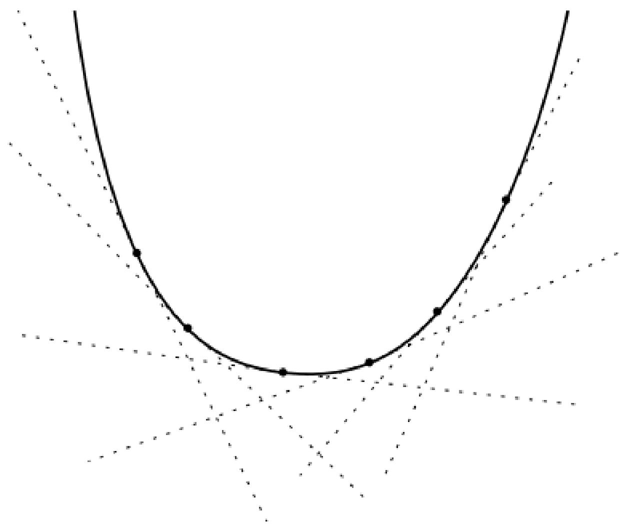
(Ako je F homogeno stepena 1, tada nam ne treba c_α.)

Naročito, svaka potpuno nelinearna uniformno eliptična jednačina

$$F(D^2u) = 0 \quad \text{na} \quad \Omega,$$

pri čemu je F konveksno, može biti zapisana kao Belmanova jednačina

$$\max_{\alpha\in\mathcal{A}} \{L_\alpha u\} = 0 \quad \text{na} \quad \Omega \quad \text{sa} \quad L_\alpha u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)} \partial_{ij} u + c_\alpha.$$



Slika 3.3: Konveksna funkcija kao maksimum linearne funkcije

Konačno, za nekonveksne funkcije ispostaviće se da važi:

Zapažanje. Bilo koje $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ koje je uniformno eliptično (ne i neophodno konveksno), može biti zapisano kao

$$F(M) = \min_{\beta\in\mathcal{B}} \max_{\alpha\in\mathcal{A}} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha\beta)} M_{ij} + c_{\alpha\beta} \right\} = \min_{\beta\in\mathcal{B}} \max_{\alpha\in\mathcal{A}} \left\{ tr(A^{(\alpha,\beta)}M) + c_{\alpha\beta} \right\}.$$

Ovo je zbog toga što bilo koja Lipšicova funkcija F može biti zapisana kao minimum konveksnih funkcija, i konveksna funkcija može biti zapisana kao maksimum linearnih funkcija.

Naročito, svaka potpuno nelinearna eliptična jednačina

$$F(D^2u) = 0 \quad \text{na} \quad \Omega$$

može biti zapisana kao Isakova jednačina

$$\min_{\beta\in\mathcal{B}}\max_{\alpha\in\mathcal{A}}\{L_{\alpha\beta}u\}=0 \quad \text{na} \quad \Omega \quad \text{sa} \quad L_{\alpha\beta}u=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha,\beta)}\partial_{ij}u+c_{\alpha\beta}.$$

Sumirano: Svaka potpuno nelinearna eliptična PDJ ima interpretaciju u kontekstu probabilističke igre.

Probabilistička interpretacija PDJ.

Očekivana isplata	$\longleftrightarrow$	Dirihleov problem $\begin{cases} Lu = 0 & \text{na} \quad \Omega, \\ u = g & \text{na} \quad \partial\Omega. \end{cases}$
Očekivano vreme izlaza (ili tekući troškovi / nehomogena okruženja)	$\longleftrightarrow$	Dirihleov problem $\begin{cases} -Lu = f & \text{na} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{na} \quad \partial\Omega. \end{cases}$
Distribucija procesa	$\longleftrightarrow$	Toplotna jednačina $\partial_t u - Lu = 0.$
Optimalno zaustavljanje	$\longleftrightarrow$	Problem prepreke $\min\{-Lu, u-\varphi\}=0.$
Kontrolisana difuzija	$\longleftrightarrow$	Potpuno nelinearna jednačina $F(D^2u)=0,\ F$ konveksno.
Igra sa dva igrača	$\longleftrightarrow$	Potpuno nelinearna jednačina $F(D^2u)=0.$

Može se takođe razmotriti jednačina koja zavisi od x, ili sa izvodima nižeg reda. Sve jednačine koje ćemo proučavati u ovom poglavlju imaju verovatnosne interpretacije.

3.3. Šta je eliptičnost?

Postoje (najmanje) dva moguća načina da se definiše eliptičnost:

- Linearizacija jednačine.
- "Nametanje" principa poređenja.

Videćemo da su ova dva puta suštinski ista.

Definicija 3.2. *Neka je $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$. Kažemo da je F eliptično ako za bilo koje dve simetrične matrice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takve da je $A \geq B$ (tj. $A - B$ je pozitivno semidefinitno) imamo*

$$F(A) \geq F(B),$$

sa strogom nejednakošću ako $A > B$ (t.j. $A - B$ je pozitivno definitno).

Laplasova jednačina $\Delta u = 0$ odgovara slučaju kad je $F(M) = trM$.
Za linearne jednačine (sa konstantnim koeficijentima)

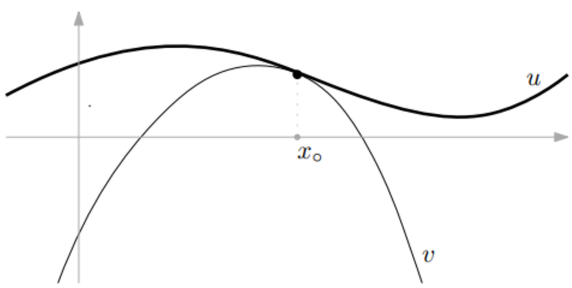
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij}u = 0,$$

F je dato sa $F(M) = tr(AM)$, gde je $A = (a_{ij})_{i,j}$. Ova jednačina je eliptična ako i samo je matrica koeficijenata A pozitivno definitna. Stoga, poklapa se sa pojmom eliptičnosti za linearne jednačine.

Napomena 3.3 (Princip poređenja)**.** Ako C^2 funkcija v dodiruje $u \in C^2$ sa donje strane u tački $x_\circ$ (t.j. $u \geq v$ svuda, i ako je $u(x_\circ) = v(x_\circ)$; pogledati Sliku 3.4), tada sledi da je

$$\nabla u(x_\circ) = \nabla v(x_\circ), \quad D^2u(x_\circ) \geq D^2v(x_\circ).$$

Zbog toga bismo za ove funkcije imali $F(D^2u(x_\circ)) \geq F(D^2v(x_\circ))$ ako je F eliptično. Ovo je od esencijalnog značaja kada dokazujemo princip poređenja.



Slika 3.4: Funkcija v dodiruje u sa donje strane u $x_\circ$.

Propozicija 3.4 (Princip poređenja)**.** *Pretpostavimo da je F eliptično i da je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena oblast. Neka su $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Tada*

$$\begin{cases} u \geq v & \text{na } \partial\Omega, \\ F(D^2u) \leq F(D^2v) & \text{na } \Omega. \end{cases} \implies u \geq v \quad \text{na} \quad \overline{\Omega}.$$

Dokaz. Posmatraćemo dva odvojena slučaja.

Slučaj 1. Pretpostavimo prvo da je $F(D^2u) < F(D^2v)$ na Ω (sa strogom nejednakošću). Ako je zaključak pogrešan, tada bi funkcija $u-v$ imala unutrašnji minimum unutar Ω, neka je to $x_\circ \in \Omega$. Tada, imali bismo $D^2(u-v)(x_\circ) \geq 0$. Zato je $D^2u(x_\circ) \geq D^2v(x_\circ)$ i zbog eliptičnosti F, ovo znači $F(D^2u(x_\circ)) \geq F(D^2v(x_\circ))$. Ovo je kontradikcija sa $F(D^2u) < F(D^2v)$ i zbog toga je $u \geq v$ na $\overline{\Omega}$.

Slučaj 2. Pretpostavimo sada $F(D^2u) \leq F(D^2v)$. Tada možemo definisati

$$\bar{u}(x) := u(x) + \varepsilon(c_\Omega - |x|^2),$$

gde je $c_\Omega > 0$ konstanta takva da je $c_\Omega - |x|^2 > 0$ na $\overline{\Omega}$ (podsetimo se da je Ω ograničeno).

Tada imamo $\bar{u} \geq u$ na $\partial\Omega$ i $D^2\bar{u} = D^2u - 2\varepsilon Id$. Stoga, zbog eliptičnosti,

$$F(D^2\bar{u}) = F(D^2u - 2\varepsilon Id) < F(D^2u) \leq F(D^2v) \quad \text{na} \quad \Omega.$$

Prema Slučaju 1,

$$\begin{cases} \bar{u} & \geq & v & \text{na} & \partial\Omega, \\ F(D^2\bar{u}) & < & F(D^2v) & \text{na} & \Omega. \end{cases} \implies \bar{u} \geq v \quad \text{na} \quad \Omega.$$

Ovo nam daje

$$u(x) + \varepsilon(c_\Omega - |x|^2) \geq v(x) \quad \text{na } \Omega.$$

Kada pustimo $\varepsilon \to 0$ zaključujemo da je $u \geq v$ na Ω.

Dakle, videli smo da je eliptičnost tačno ono što nam je potrebno da bismo dokazali princip poređenja. Videćemo da *uniformna eliptičnost* (analogno slučaju kod linearnih jednačina) implicira regularnost rešenja.

Definicija 3.5. *Neka je $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$. Tada je F uniformno eliptično ako postoje $0 < \lambda \leq \Lambda$ (eliptične konstante), takve da za svake simetrične matrice M, N gde je $N \geq 0$ (tj. pozitivno semidefinitna), imamo*

$$\lambda\|N\| \leq F(M+N) - F(M) \leq \Lambda\|N\|,$$

gde je $\|N\| := tr((N^TN)^{1/2}) = tr(N)$ suma (apsolutnih vrednosti) karakterističnih korena.

Napominjem da izbor matrične norme u prethodnoj definiciji nije standardan. U $\mathbb{R}^n$ sve norme su ekvivalentne i stoga možemo da izaberemo bilo koju normu. Međutim, ova definicija norme nam omogućava da izbegnemo konstante u budućim proračunima.

Naravno, uniformna eliptičnost implicira eliptičnost, u kvantitativnom smislu.

Za linearne jednačine, tj. $F(M) = tr(AM)$, uniformna eliptičnost je ekvivalentna izrazu

$$0 < \lambda Id \leq A \leq \Lambda Id,$$

kao i obično.

Alternativni načini da se vidi eliptičnost su preko linearizacije jednačine:

Pretpostavimo da $F \in C^1$ (što nije uvek slučaj). Razmotrićemo funkcije

$$F_{ij}(M) := \frac{\partial F}{\partial M_{ij}}(M),$$

tj. prve izvode $F(M)$ odgovarajućih komponenti M_{ij} matrice M.

Odmah možemo primetiti da važi:

$$\begin{aligned}
F \text{ je uniformno eliptično} \quad &\iff \quad 0 < \lambda Id \le (F_{ij}(M))_{i,j} \le \Lambda Id, \quad \forall M \\
&\iff \quad \text{linearizovana jednačina je uniformno eliptična.}
\end{aligned}$$

Zbog toga, kad je F barem u C^1, uniformna eliptičnost može biti posmatrana kao uniformna eliptičnost linearizovane jednačine.

Uopšteno, uslov uniformne eliptičnosti implicira da je F Lipšicovo, ali nije uvek u C^1. Postoje, zapravo, važni primeri jednačina $F(D^2u) = 0$ u kojima je odgovarajuće F Lipšicovo, ali nije C^1. U ovom slučaju, prethodna karakterizacija eliptičnosti kroz izvode F i dalje važi, podrazumevajući da su oni sada definisani skoro svuda.

Napomena 3.6 (Konveksna (ili konkavna) jednačina)**.** Važan primer potklase jednačine $F(D^2u) = 0$ su one za koje je F konveksno (ili konkavno). Naime, $F(M)$ kao funkcija $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ je konveksna (ili konkavna). U ovom slučaju, jednačina može biti zapisana kao *Belmanova jednačina*, kao

$$F(D^2u) = \max_{\alpha\in\mathcal{A}}\{L_\alpha u\} = 0,$$

gde je $\{L_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ familija linearnih operatora forme

$$L_\alpha u := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\alpha}\partial_{ij}u + c_\alpha,$$

za familiju koeficijenata $\{a_{ij}^{\alpha}\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ uniformno eliptična, sa eliptičnim konstantama λ i Λ.

Primetimo da ako je u rešenje $F(D^2u) = 0$, gde je F konveksno, tada je $v = -u$ rešenje $G(D^2v) = 0$, sa $G(M) = -F(-M)$ i stoga je G konkavno.

U nastavku ćemo definisati Pučijeve operatore koji će biti korišćeni kod viskoznih rešenja.

Pučijevi operatori. Unutar klase potpuno nelinearnih uniformno eliptičnih operatora sa eliptičnim konstantama λ i Λ, *ekstremalni* ili *Pučijevi* operatori, označeni sa $\mathcal{M}^+$ i $\mathcal{M}^-$, su oni koji dostižu *ekstremne* vrednosti (sa gornje i donje strane). Alternativno, svaki drugi eliptični operator sa istim eliptičnim konstantama određen je u odnosu na njih u smislu Definicije 3.7 ispod.

Definisaćemo $\mathcal{M}^\pm$ na sledeći način.

Definicija 3.7. *Za zadato $0 < \lambda < \Lambda$, ekstremalni ili Pučijevi operatori sa eliptičnim konstantama λ i Λ, $\mathcal{M}^+ : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, definisani su kao*

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^-(M) &:= \inf_{\lambda Id \le (a_{ij})_{i,j} \le \Lambda Id}\left\{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}M_{ij}\right\} = \inf_{\lambda Id \le A \le \Lambda Id}\Big\{tr(AM)\Big\} \\
\mathcal{M}^+(M) &:= \sup_{\lambda Id \le (a_{ij})_{i,j} \le \Lambda Id}\left\{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}M_{ij}\right\} = \sup_{\lambda Id \le A \le \Lambda Id}\Big\{tr(AM)\Big\},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

za bilo koju simetričnu matricu M. To su uniformno eliptični operatori, sa eliptičnim konstantama λ i Λ.

Naročito, iz definicije iznad imamo

$$\mathcal{M}^{\pm}(\alpha M) = \alpha \mathcal{M}^{\pm}(M), \quad \text{za svako} \quad \alpha \geq 0.$$

Primetimo da je $\mathcal{M}^{\pm} = \mathcal{M}^{\pm}_{n,\lambda,\Lambda}$. Uopšteno, međutim, zavisnost eliptičnih konstanti i dimenzije biće jasna u odgovarajućem kontekstu, i stoga ćemo to izostavljati u notaciji.

Ponekad je jednostavnije definisati Pučijeve operatore preko karakterističnih korena odgovarajuće matrice, odgovarajuće ponderisane eliptične konstante, na sledeći način.

Lema 3.8. *Pučijevi operatori definisani kao u (3.8) mogu biti ekvivalentno definisani kao*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{-}(M) &:= \lambda \sum_{\mu_i>0} \mu_i + \Lambda \sum_{\mu_i<0} \mu_i = \lambda \|M_+\| - \Lambda \|M_-\|, \\ \mathcal{M}^{+}(M) &:= \Lambda \sum_{\mu_i>0} \mu_i + \lambda \sum_{\mu_i<0} \mu_i = \Lambda \|M_+\| - \lambda \|M_-\|, \end{aligned} \tag{3.9}$$

gde $\mu_i = \mu_i(M)$ označavaju karakteristične korene simetrične matrice M, matrice M_+ i M_- su takve da je $M_\pm \geq 0, M = M_+ - M_-$ i $\|A\| = tr((A^T A)^{1/2})$.

Dokaz. Dokaz sledi direktno korišćenjem sledećeg preuređenja nejednakosti koji uključuje karakteristične korene i proizvod dve simetrične matrice A i B:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_{n-i}(B) \leq tr(AB) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)\lambda_i(B)$$

gde $\lambda_1(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A)$ označavaju karakteristične korene matrice A u rastućem redosledu i $\lambda_1(B) \leq \cdots \leq \lambda_n(B)$ označavaju karakteristične korene matrice B u rastućem redosledu.

Iz definicije uniformne eliptičnosti F (Definicija 3.5) sledi da za date simetrične matrice M i N važi

$$\lambda \|N_+\| - \Lambda \|N_-\| \leq F(M+N) - F(M) \leq \Lambda \|N_+\| - \lambda \|N_-\|,$$

gde je $N = N_+ - N_-$ i $N_\pm \geq 0$. Stoga, prema Lemi 3.8 važi

$$\mathcal{M}^{-}(N) \leq F(M+N) - F(M) \leq \mathcal{M}^{+}(N). \tag{3.10}$$

Ako izaberemo $M = 0$ vidimo da je

$$\mathcal{M}^{-}(N) \leq F(N) - F(0) \leq \mathcal{M}^{+}(N), \tag{3.11}$$

tako da su ovi operatori kao "najgori slučaj" sa donje i gornje strane - do na konstantu $F(0)$ (Podsetimo se da su $\mathcal{M}^{\pm}$ potpuno nelinearni uniformno eliptični operatori sa eliptičnim konstantama λ i Λ.)

Ako dalje pretpostavimo da je $F(0) = 0$ videćemo da ako je u rešenje bilo koje jednačine oblika $F(D^2u) = 0$, tada važi

$$\mathcal{M}^{-}(D^2u) \leq 0 \leq \mathcal{M}^{+}(D^2u). \tag{3.12}$$

Napomena 3.9. Jednačina (3.12) se naziva *jednačina u nedivergentnom obliku sa ograničenim merljivim koeficijentima.* Zaista, primetimo da za date proizvoljne uniformno eliptične koeficijente $(a_{ij}(x))_{i,j}$ bez pretpostavke o regularnosti za x, ako $u \in C^2$ zadovoljava $\sum_{i,j} a_{ij}(x)\partial_{ij}u$, tada važi (3.12). Sa druge strane, ako (3.12) važi za neko $u \in C^2$, mogu se pronaći neki uniformno eliptični koeficijenti $(a_{ij}(x))_{i,j}$ takvi da je $\sum_{i,j} a_{ij}(x)\partial_{ij}u$.

3.4. Jednačine sa dve promenljive

Pre nego što pređemo na opštu teoriju postojanja i regularnosti za potpuno nelinearnu jednačinu u $\mathbb{R}^n$, proučićemo jednostavniji slučaj: potpuno nelinearne jednačine u dve promenljive.

Osnovna procena regularnosti u ovom kontekstu prati rezultate Nirenberga iz 1953. godine [**Nir53**], kao što ćemo videti u nastavku.

Teorema 3.10. *Neka je $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ uniformno eliptična sa eliptičnim konstantama λ i Λ. Neka je $u \in C^2(B_1)$ rešenje*

$$F(D^2u) = 0 \quad \textit{na} \quad B_1 \subset \mathbb{R}^2.$$

Tada

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \le C\|u\|_{L^\infty(B_1)},$$

za neke konstante $\alpha > 0$ i C koji zavise samo od λ i Λ.

Ideja dokaza je sledeća: definisaćemo $v := \partial_e u$ i diferenciraćemo jednačinu $F(D^2u) = 0$ po e, da dobijemo

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\partial_{ij}v(x) = 0 \quad \text{na} \quad B_1 \subset \mathbb{R}^2, \tag{3.13}$$

gde je $a_{ij}(x) := F_{ij}(D^2u(x))$ za $i,j \in \{1,2\}$. Pošto je F uniformno eliptično, imamo $a_{22}(x) \ge \lambda > 0$. Stoga, možemo podeliti (3.13) sa $a_{22}(x)$ da dobijemo

$$a(x)\partial_{11}(x)v(x) + b(x)\partial_{12}v(x) + \partial_{22}v(x) = 0, \tag{3.14}$$

za neke koeficijente

$$a(x) = \frac{a_{11}(x)}{a_{22}(x)} \quad \text{i} \quad b(x) = \frac{a_{12}(x)+a_{21}(x)}{a_{22}(x)} = \frac{2a_{12}(x)}{a_{22}(x)}.$$

Ako napišemo $w := \partial_1 v$ i diferenciramo (3.14) po x_1, dobijamo

$$\partial_1(a(x)\partial_1 w(x) + b(x)\partial_2 w(x)) + \partial_{22}w(x) = div(A(x)\nabla w) = 0,$$

gde je

$$A(x) := \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

To znači da je w rešenje jednačine u divergentnoj formi i A je uniformno eliptično, sa eliptičnim konstantama koje zavise od λ i Λ. Stoga, prema De Đorđi-Nešovom rezultatu iz radova [**Gio57**], [**Nas57**] i [**Nas58**], važi $\partial_1 v = w \in C^{0,\alpha}(B_{1/2})$. Pošto se uloge x_1 i x_2 mogu zameniti i pošto je $v = \partial_e u$ ($e \in \mathbb{S}^{n-1}$ je proizvoljno), zaključujemo da je $u \in C^{2,\alpha}(B_{1/2})$.

Sada ćemo to formalno i dokazati. Ideja je predstavljena u redovima iznad, gde smo koristili da $u \in C^4$. U realnosti možemo koristiti samo da $u \in C^2$ pa nastavljamo sa centralnim diferencnim količnicima.

Dokaz Teoreme 3.10. Definisaćemo

$$v(x)=\frac{u(x+h)-u(x)}{|h|}\in C^2(B_{1-|h|}),$$

pri čemu je $|h|<\frac{1}{4}$. Pošto je F translaciono invarijanta, imamo

$$F(D^2u(x))=0,\quad F(D^2u(x+h))=0 \quad \text{na} \quad B_{1-|h|}.$$

Tada, prema fundamentalnoj teoremi kalkulusa za linijski integral

$$0=F(D^2u(x+h))-F(D^2u(x))=\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x)\partial_{ij}(u(x+h)-u(x)),$$

gde je

$$a_{ij}(x)=\int_0^1 F_{ij}(tD^2u(x+h)+(1-t)D^2u(x))dt.$$

Pošto je F uniformno eliptično, $(a_{ij})_{i,j}$ je uniformno eliptično (sa istim eliptičnim konstantama). To znači, $v\in C^2(B_{1-|h|})$ je rešenje jednačine u nedivergentnom obliku

$$a_{11}(x)\partial_{11}v(x)+2a_{12}(x)\partial_{12}v(x)+a_{22}(x)\partial_{22}v(x)=0 \quad \text{na} \quad B_{1-|h|},$$

gde je $a_{12}=a_{21}$ i $\partial_{12}v=\partial_{21}v$ jer $v\in C^2$. Iz uslova eliptičnosti, imamo $0<\lambda\leq a_{22}(x)\leq\Lambda$ i možemo podeliti jednačinu sa $a_{22}(x)$ da dobijemo

$$a(x)\partial_{11}v(x)+b(x)\partial_{12}v(x)+\partial_{22}v(x)=0 \quad \text{na} \quad B_{1-|h|}.$$

Neka je

$$A(x):=\begin{pmatrix} a(x) & b(x)\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Provera da je A uniformno eliptična je pravolinijska, sa eliptičnim konstantama λ/Λ i Λ/λ. Neka je $\eta\in C_c^2(B_{1-|h|})$ i primetimo da iz parcijalne integracije dobijamo:

$$\int_{B_{1-|h|}}\partial_2\eta\partial_{12}v=\int_{B_{1-|h|}}\partial_1\eta\partial_{22}v.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
\int_{B_{1-|h|}}\nabla\eta\cdot A(x)\nabla\partial_1 v &= \int_{B_{1-|h|}}\nabla\eta(x)\cdot\begin{pmatrix} a(x)\partial_{11}v(x)+b(x)\partial_{12}v(x)\\ \partial_{12}v(x)\end{pmatrix}dx\\
&=\int_{B_{1-|h|}}\{\partial_1\eta(a(x)\partial_{11}v+b(x)\partial_{12}v)+\partial_2\eta\partial_{12}v\}dx\\
&=\int_{B_{1-|h|}}\partial_1\eta(a(x)\partial_{11}v+b(x)\partial_{12}v+\partial_{22}v)dx\\
&=0.
\end{aligned}$$

Dakle, $\partial_1 v$ je rešenje jednačine sa ograničenim i merljivim koeficijentima $A(x)$ u divergentnom obliku. Stoga, prema De Đorđi-Nešovom rezultatu (teorema iz predgovora), znamo da je $\partial_1 v\in C^\alpha$ i

$$\|\partial_1 v\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})}\leq C\|\partial_1 v\|_{L^\infty(B_{1-|h|})}\leq C\|\partial_1 u\|_{C^{0,1}(B_1)},$$

(primetimo da možemo da idemo od B_1 prema $B_{1-|h|}$ u po istom rezultatu za dovoljno malo $|h|$) za neku konstantu C koja zavisi samo od λ i Λ. Ako pustimo $|h| \to 0$, na osnovu **(H7)**, imamo da je

$$\|\nabla \partial_1 u\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|\partial_1 v\|_{L^\infty(B_{1-|h|})} \leq C\|\partial_1 u\|_{C^{0,1}(B_1)},$$

za neku konstantu C koja zavisi samo od λ i Λ. Na osnovu simetrije, ista nejednakost je tačna za $\partial_2 v$ (i $\partial_2 u$), pa je

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|u\|_{C^{1,1}(B_1)}.$$

Primetimo da, prema interpolaciskoj nejednakosti (1.8) za svako $\varepsilon > 0$ postoji neko $C_\varepsilon > 0$ takva da je

$$\|u\|_{C^{1,1}(B_{1/2})} \leq \varepsilon\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} + C_\varepsilon\|u\|_{L^\infty}(B_1).$$

Sada, dokaz direktno proizilazi iz tvrđenja za regularnost linearnih eliptičnih PDJ.

Stoga, kao što smo videli, u dvodimenzionalnom slučaju prilično je jednostavno pokazati apriori $C^{2,\alpha}$ ocene za rešenja potpuno nelinearnih jednačina. Zahvaljujući ovim procenama, pomoću neprekidnih metoda (pogledati [**GT77**] ili [**HL97**]) može se zapravo pokazati postojanje $C^{2,\alpha}$ rešenja za Dirihleov problem.

Ipak, kao što ćemo videti, ispostaviće se da u većim dimenzijama "apriori procena" više nije moguća i potrebno je dokazati postojanje rešenja na drugi način, preko uvođenja novog tipa slabih rešenja - viskoznih rešenja.

Ovo ćemo uraditi u narednoj sekciji.

3.5. Postojanje rešenja

Prvo pitanje koje treba razumeti je postojanje rešenja: za zadati odgovarajući domen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i odgovarajući granični uslov $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, da li uvek možemo rešiti sledeći Dirihleov problem?

$$\begin{cases} F(D^2u) & = & 0 & \text{na} & \Omega, \\ u & = & g & \text{na} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Primetimo da ovde ne možemo konstruisati rešenje preko minimizatorske funkcionele, pošto potpuno nelinearne jednačine u opštem slučaju ne proizilaze iz funkcionele energije.

Da bismo konstruisali rešenje, imamo samo dve opcije:

- Da dokažemo "apriori procenu" i onda da iskoristimo metod neprekidnosti.
- Da iskoristimo princip poređenja i Peronov metod.

Metod neprekidnosti je razumno jednostavan za korišćenje, ali nam je potrebna $C^{2,\alpha}$ ocena za rešenja do granice. To je veoma težak problem, i zapravo, uopšteno nemamo $C^{2,\alpha}$ ocenu za ove jednačine u $\mathbb{R}^n$.

Stoga, treba da konstruišemo neku vrstu uopštenog pojma rešenja: *viskozna rešenja.*

Pravi koncept ovih rešenja mora biti takav da imamo:

- Postojanje rešenja.
- Princip poređenja (i, naročito, jedinstvenost rešenja).
- Stabilnost (tako da su limesi rešenja isto rešenja).

Primetimo da ako razmatramo samo C^2 rešenja, tada imamo princip poređenja (i to je lako dokazati), ali možda nećemo moći da dokažemo postojanje.

Sa druge strane, ako relaksiramo pojam rešenja, tada ćemo možda moći lako da dokažemo postojanje rešenja, ali tada će biti teže da dokažemo jedinstvenost/princip poređenja.

Pravi koncept uopštenog rešenja je onaj dat u Definiciji 3.11 ispod, poznat kao viskozno rešenje. Za subrešenja u viskoznom smislu, ovaj pojam zahteva samo da je funkcija poluneprekidna sa gornje strane (eng. USC), dok za superrešenja u viskoznom smislu, ovaj pojam može biti proveren na poluneprekidnim funkcijama sa donje strane (eng. LSC). Ovo je važno za dokaz postojanja rešenja.

Podsetićemo se da za funkciju f kažemo da je poluneprekidna sa gornje strane u $x_\circ$ ako je

$$\limsup_{x\to x_\circ} f(x) \le f(x_\circ).$$

Slično, funkcija je poluneprekidna sa donje strane u $x_\circ$ ako je

$$\liminf_{x\to x_\circ} f(x) \ge f(x_\circ).$$

Upućujem čitaoca na **[Sil15]** za lep uvod u viskozna rešenja eliptičnih jednačina.

Definicija 3.11 (Viskozna rešenja)**.** [2] *Neka je $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ uniformno eliptično, i razmotrimo PDJ*

$$F(D^2u) = 0 \quad \text{na} \quad \Omega.$$

- *Kažemo da $u \in USC(\overline{\Omega})$ je **subrešenje**(u viskoznom smislu), i pišemo $F(D^2u) \ge 0$, ako za bilo koje $\phi \in C^2(\Omega)$ takvo da je $\phi \ge u$ na Ω i $\phi(x_\circ) = u(x_\circ)$, $x_\circ \in \Omega$, imamo $F(D^2\phi(x_\circ)) \ge 0$.*
- *Kažemo da $u \in LSC(\overline{\Omega})$ je **superrešenje**(u viskoznom smislu), i pišemo $F(D^2u) \le 0$, ako za bilo koje $\phi \in C^2(\Omega)$ takvo da je $\phi \le u$ na Ω i $\phi(x_\circ) = u(x_\circ)$, $x_\circ \in \Omega$, imamo $F(D^2\phi(x_\circ)) \le 0$.*
- *Kažemo da $u \in C(\overline{\Omega})$ je **rešenje** i pišemo $F(D^2u) = 0$ u viskoznom smislu ako je i subrešenje i superrešenje.*

Primetimo da možda postoje tačke $x_\circ \in \Omega$ u kojima ni jedna funkcija $\phi \in C^2$ ne dodiruje u u $x_\circ$ (ni sa gornje ni sa donje strane). Ovo je dozvoljeno na osnovu prethodne definicije.

[2] Koncept viskoznog rešenja je uveden 1983. od strane Krandala i P.L. Lionsa u istraživanju jednačina prvog reda. Kroz nekoliko godina, rad na viskoznim rešenjima bio je fokusiran na jednačine prvog reda, budući da nije bilo poznato da li uniformno eliptične jednačine drugog reda imaju jedinstveno viskozno rešenje (ili da li princip poređenja važi za ova rešenja). Princip poređenja za viskozna rešenja je konačno dokazan 1988. od strane Jensena **[Jen88]** i u predstojećim godinama koncept je postao vodeći u analizi eliptičnih parcijalnih diferencijalnih jednačina.
U 1994. P.L. Lions je dobio Filcovu medalju za svoj doprinos nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednačinama, jedan od njegovih najvećih doprinosa je bio njegov rad na viskoznim rešenjima **[Var94]**.
Ključni rezultati u teoriji viskoznih rešenja slede iz **[Jen88]** i **[CC95]**.

Teorema 3.12 (Princip poređenja za viskozna rešenja)**.** *Neka je $\Omega \in \mathbb{R}^n$ bilo koji ograničen domen i $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ uniformno eliptična. Pretpostavimo da $u \in LSC(\overline{\Omega})$ i $v \in USC(\overline{\Omega})$ zadovoljavaju*

$$u \geq v \quad \text{na} \quad \partial\Omega, \tag{3.15}$$

i

$$F(D^2u) \leq 0 \leq F(D^2v) \quad \text{na} \quad \Omega \quad \text{u viskoznom smislu.} \tag{3.16}$$

Tada

$$u \geq v \quad \text{na} \quad \overline{\Omega}.$$

Već smo dokazali ovo za C^2 funkcije u u Propoziciji 3.4 i dokaz je bio veoma jednostavan. Za viskozna rešenja dokaz je složeniji.

Glavni korak u dokazu principa poređenja je sledeći.

Propozicija 3.13. *Neka je $\Omega \in \mathbb{R}^n$ bilo koji ograničen domen i $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ uniformno eliptična. Pretpostavimo da $u \in LSC(\overline{\Omega})$ i $v \in USC(\overline{\Omega})$ su ograničene funkcije koje zadovoljavaju (3.15) i (3.16). Tada*

$$\mathcal{M}^-(D^2(u-v)) \leq 0 \quad \text{na} \quad \Omega,$$

gde je $\mathcal{M}^-$ definisano u Lemi 3.8.

Upućujem čitaoca na **[CC95]**, (Teorema 5.3) za dokaz ovakvog rezultata, gde se pretpostavlja da $u, v \in C(\overline{\Omega})$. Isti dokaz važi i pod pretpostavkom koju ćemo ovde prezentovati.

Princip poređenja dobijamo iz prethodne propozicije i sledeće leme.

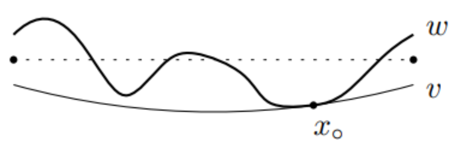
Lema 3.14. *Neka je $\Omega \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan ograničen domen, i pretpostavimo da $w \in LSC(\overline{\Omega})$ zadovoljava*

$$w \geq 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega,$$

i

$$\mathcal{M}^-(D^2w) \leq 0 \quad \text{na} \quad \Omega.$$

Tada, $w \geq 0$ na Ω.



Slika 3.5: Funkcija v klizi od dole dok ne dodirne w u tački $x_\circ$.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Propozicije 2.15. Zaista, primetimo prvo da nakon reskaliranja možemo pretpostaviti da je $\Omega \subset B_1$, i pretpostavimo da w ima negativan minimum na Ω. Tada, pošto je $w \geq 0$ na $\partial\Omega$, imamo $\min_{\overline{\Omega}} w = -\delta$ sa $\delta > 0$ i minimum je dostignut na Ω.

Sada ćemo razmotriti $0<\varepsilon<\delta$ i $v(x):=-\kappa+\varepsilon(|x|^2-1)$, sa $\kappa>0$ (to je dovoljno zaravnjen paraboloid).

Sada, primetimo da je $v<0$ na $\partial\Omega$ i možemo izabrati $\kappa>0$ tako da v dodiruje w sa donje strane u tački unutar Ω. Drugim rečima, postoji $\kappa>0$ tako da je $w\geq v$ na Ω i $w(x_\circ)=v(x_\circ)$ za neko $x_\circ\in\Omega$ (Slika 3.5). Tada, prema definiciji viskoznog superrešenja, imamo

$$\mathcal{M}^-(D^2v)(x_\circ)\leq 0.$$

Međutim, direktan proračun daje $\mathcal{M}^-(D^2v)=\mathcal{M}^-(2\varepsilon Id)\equiv 2\lambda n\varepsilon>0$ na Ω, što je kontradikcija.

Sada kada imamo princip poređenja za viskozna rešenja, možemo koristiti *Peronov metod* da dokažemo postojanje rešenja. To ćemo i uraditi u nastavku, prateći [**Sil15**]

Primetimo najpre da za bilo koju ograničenu funkciju u na $\overline{\Omega}\subset\mathbb{R}^n$, možemo definisati *gornju poluneprekidnu obvojnicu* kao

$$u^*(x):=\sup\{\limsup_k u(x_k):x_k\to x\},$$

gde je supremum izabran među svim nizovima $\overline{\Omega}\ni x_k\to x$. Primetimo da je u^* najmanja funkcija koja zadovoljava $u^*\in USC(\overline{\Omega})$ i $u^*\geq u$. Slično, definisaćemo *donju poluneprekidnu obvojnicu* od u kao

$$u_*(x):=\inf\{\liminf_k u(x_k):x_k\to x\}. \tag{3.17}$$

Trebaće nam sledeća lema koja je uopštenje činjenice da je maksimum subrešenja takođe subrešenje.

Lema 3.15. *Neka je $F:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ uniformno eliptična, i neka je $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ bilo koji ograničen domen.*

Neka je $(u_a)_{a\in\mathcal{A}}$ familija subrešenja: $u_a\in USC(\overline{\Omega})$, i $F(D^2u_a)\geq 0$ na Ω, za svako $a\in\mathcal{A}$. Neka je

$$u(x):=\sup_{a\in\mathcal{A}}u_a,$$

i neka je

$$u^*(x):=\sup\{\limsup_{k\to\infty}u(x_k):x_k\to x\}.$$

Tada je $u^*\in USC(\overline{\Omega})$ subrešenje : $F(D^2u^*)\geq 0$ na Ω.

Dokaz. Podelićemo dokaz u dva koraka.

Korak 1. U prvom delu smo dokazali da ako u^* ima strogi lokalni maksimum u $x_\circ$, tada se mogu izdvojiti nizovi indeksa $a_k\in\mathcal{A}$ za $k\in\mathbb{N}$ i tačaka $x_k\in\overline{\Omega}$ takvi da $x_k\to x_\circ$, u_{a_k} ima lokalni maksimum u x_k i $u_{a_k}(x_k)\to u^*(x_\circ)$.

Prema definiciji $u^*(x_\circ)$ možemo izdvojiti niz indeksa $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $a_j\in\mathcal{A}$, i tačaka $y_j\to x_\circ$, tako da $u_{a_j}(y_j)\to u^*(x_\circ)$. Sada ćemo dokazati da možemo izdvojiti dalji podniz $a_k:=a_{j_k}$ tako da željeni zaključak važi.

Zaista, neka je $r>0$ takvo da je $u^*(y)<u^*(x_\circ)$ za $y\in B_r(x_\circ)\backslash\{x_\circ\}$ i neka je $\rho>0$ tako malo da, ako $K_\rho:=B_r(x_\circ)\backslash B_\rho(x_\circ)$, tada

$$\max_{K_\rho}u^*\leq u^*(x_\circ)-\delta,$$

za neko $\delta > 0$.

Sada primetimo da za dovoljno veliko j, $u_{a_j} \le u^*(x_\circ) - \delta/2$ u K_ρ. Drugačije, postojalo bi $j_m \to \infty$ i z_m takvo da $u_{a_{j_m}}(z_m) > u^*(x_\circ) - \delta/2 \ge \max_{K_\rho} u^* + \delta/2$. Pošto je K_ρ kompaktno, do na podniz $z_m \to z_\infty$ za neko z_∞ u K_ρ takvo da

$$u^*(z_\infty) \ge \limsup_{m\to\infty} u_{a_{j_m}}(z_m) > \max_{K_\rho} u^* + \delta/2.$$

Ovo je kontradikcija. Stoga, $u_{a_j} \le u^*(x_\circ) - \delta/2$ u K_ρ za dovoljno veliko j.

Neka je sada $x_j \in \overline{B_r(x_\circ)}$ tačka gde se dostiže maksimum u_{a_j} u $\overline{B_r(x_\circ)}$. Konkretno, $u_{a_j}(x_j) \ge u_{a_j}(y_j) \to u^*(x_\circ)$, što je $u_{a_j}(x_j) \ge u^*(x_\circ) - \delta/4$ za dovoljno veliko j. Pošto je $u_{a_j} \le u^*(x_\circ) - \delta/2$ u K_ρ (ponovo za dovoljno veliko j), ovo implicira da je $x_j \in B_\rho(x_\circ)$. To znači da u_{k_j} dostiže svoj maksimum u $B_r(x_\circ)$, unutar $B_\rho(x_\circ)$. Ponavljanjem ovog argumenta birajući manje $\rho > 0$, možemo izdvojiti podniz $a_k := a_{j_k}$ da dobijemo željeni rezultat. Primetimo da $x_j \to x_\circ$ i tada prema konstrukciji $u_{a_j}(x_j) \ge u_{a_j}(y_j) \to u^*(x_\circ)$ tako da je $u_{a_j}(x_j) \to u^*(x_\circ)$. Ovo kompletira prvi deo dokaza. Primetimo da do sad nismo iskoristili da je u_a subrešenje.

<u>*Korak 2.*</u> Sada ćemo nastaviti sa drugim delom dokaza, koji dokazuje lemu. Neka je $\phi \in C^2$ takvo da je $\phi(x_\circ) = u^*(x_\circ)$ i $u \le \phi$ u okolini $x_\circ$ (to znači da $u - \phi$ dostiže lokalni maksimum u $x_\circ$), pri čemu $x_\circ \in \Omega$. Razmatrajući da je $\bar\phi(x) = \phi(x) + |x - x_\circ|^4$, imamo da $u - \phi$ dostiže strogi lokalni maksimum u $x_\circ$. Primenjujemo sada prvi deo dokaza sa $v_a := u_a - \bar\phi$. Tada postoji niz indeksa $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i tačaka $x_k \to x_\circ$ tako da $u_{a_k} - \bar\phi$ dostiže lokalni maksimum u x_k i $u_{a_k}(x_k) \to u^*(x_\circ)$ (pošto je $\bar\phi$ neprekidno). Posebno, pošto su u_{a_k} subrešenja u viskoznom smislu, imamo

$$F(D^2\bar\phi(x_k)) \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad F(D^2\bar\phi(x_\circ)) = F(D^2\phi(x_\circ)) \ge 0,$$

na osnovu neprekidnosti F i $D^2\phi$. Stoga je u viskozno subrešenje.

Sada možemo dokazati postojanje viskoznih rešenja. Da bismo to uradili, pretpostavimo da je dat ograničen domen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tako da

$$\text{(3.18)} \qquad \begin{gathered} \text{za svako } x_\circ \in \partial\Omega, \text{ tada postoji neko } \psi_+ \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ tako da} \\ \psi_+(x_\circ) = 0, \quad \psi_+|_{\partial\Omega\setminus\{x_\circ\}} > 0, \text{ i } \mathcal{M}^+(D^2_{\psi_+}) \le 0 \text{ na } \Omega, \end{gathered}$$

gde se podsećamo da je $\mathcal{M}^+$ Pučijev operator definisan u (3.9) sa eliptičnim konstantama λ i Λ. Primetimo da, ako važi (3.18), tada takođe imamo da za svako $x_\circ \in \partial\Omega$ postoji neko $\psi_- \in C^2(\overline{\Omega})$ tako da je $\psi_-(x_\circ) = 0$, $\psi_-|_{\partial\Omega\setminus\{x_\circ\}} < 0$ i

$$\mathcal{M}^-(D^2\psi_-) \ge 0 \text{ na } \Omega,$$

gde je ψ_- jednostavno dato kao $\psi_- = -\psi_+$.

Kasnije ćemo pokazati da bilo koji ograničen C^2 domen zadovoljava (3.18) za bilo koje konstante $0 < \lambda < \Lambda$.

Napomena 3.16. U sledećim rezultatima često ćemo pretpostaviti da je $F(0) = 0$. Inače, ako je $F(0) \ne 0$, tada možemo razmotriti uniformno eliptične operatore $\tilde F_t(D^2u) := F(D^2(u + t|x|^2/2)) = F(D^2u + tId)$. Tada, $\tilde F_t(0) = F(tId)$ i možemo izabrati $t \in \mathbb{R}$ takvo da je $F(tId) = 0$. Zaista, ako $F(0) > 0$, prema (3.11) je $\tilde F_t(0) = F(tId) \le \mathcal{M}^+(tId) + F(0) = tn\lambda + F(0) < 0$ za $t < 0$ dovoljno negativno. Pošto je $\tilde F_t(0) = F(0) > 0$, na osnovu neprekidnost $\tilde F_t$ u t, dokaz je završen za neko $t \in [-\frac{F(0)}{n\lambda}, 0)$. Slučaj $F(0) < 0$ sledi analogno.

Teorema 3.17 (Postojanje i jedinstvenost viskoznog rešenja)**.** *Neka je $F:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ uniformno eliptično sa eliptičnim konstantama λ i Λ i neka je $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ bilo koji ograničen domen takav da važi (3.18) i neka $g\in C(\partial\Omega)$.*

Tada postoji (jedinstveno) viskozno rešenje Dirihleovog problema

$$\begin{cases} F(D^2u) &= 0 \quad na \quad \Omega,\\ \qquad u &= g \quad na \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Dokaz. Jedinstvenost sledi direktno iz principa poređenja, Teorema 3.12 . Zahvaljujući Napomeni 3.16 pretpostavićemo da je $F(0)=0$. Dokaz postojanja sledi na osnovu srednje vrednosti Peronovog metoda, kao što ćemo pokazati.

Sada ćemo definisati skup svih subrešenja kao

$$\mathcal{A}:=\{v\in USC(\overline{\Omega}):F(D^2v)\geq 0 \quad \text{na} \quad \Omega, \quad v\leq g \quad \text{na} \quad \partial\Omega\}.$$

Sada ćemo definisati tačkasti supremum svih subrešenja u $\mathcal{A}$,

$$u(x):=\sup_{v\in\mathcal{A}} v(x).$$

Primetimo da pošto konstantna funkcija $-\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ pripada $\mathcal{A}$, tako da je skup neprazan. Primetimo takođe da svi elementi u $\mathcal{A}$ moraju biti ispod konstante $\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ na osnovu principa poređenja i zbog toga je u ograničeno.

Definisaćemo gornju poluneprekidnu obvojnicu

$$u^*(x)=\sup\{\limsup_{k\to\infty} u(x_k):x_k\to x\}.$$

Primetimo da prema Lemi 3.15 imamo $F(D^2u^*)\geq 0$ na Ω.

Strategija dokaza je sledeća. Prvo ćemo dokazati da $u^*=g$ na $\partial\Omega$. Ovo implicira da $u^*\in\mathcal{A}$ i stoga je $u^*=u$. Kada je ovo završeno, definisaćemo u_* kao donju poluneprekidnu obvojnicu od u i dokazati da je u_* subrešenje. Prema principu poređenja, ovo implicira da je $u_*\leq u$ i stoga je $u_*=u$. Ovo znači da je u neprekidno i da je istovremeno i subrešenje i superrešenje kao što smo tražili.

<u>Korak 1.</u> Započećemo dokazivanjem da je $u^*=g$ na $\partial\Omega$ i da je u^* neprekidno na $\partial\Omega$. Naime, pokazali smo da za svako $x_\circ\in\partial\Omega$ i svako $x_k\to x_\circ$ sa $x_k\in\Omega$, važi $\liminf_{k\to\infty}u^*(x_k)=\limsup_{k\to\infty}u^*(x_k)=g(x_\circ)$.

Neka je $\varepsilon>0$ i definisaćemo

$$w_\varepsilon^-:=g(x_\circ)-\varepsilon+k_\varepsilon\psi_-=g(x_\circ)-\varepsilon-k_\varepsilon\psi_+,$$

gde je izabrano dovoljno veliko $k_\varepsilon>0$ (zavisi od ε, ali takođe i od g i Ω), tako da je $w_\varepsilon^-\leq g$ na $\partial\Omega$ i $\psi_-=-\psi_+$ funkcija data svojstvom (3.18) u $x_\circ$. Takođe ćemo definisati

$$w_\varepsilon^+:=g(x_\circ)+\varepsilon+k_\varepsilon\psi_+$$

gde je $k_\varepsilon>0$ takvo da je $w_\varepsilon^+\geq g$ na $\partial\Omega$ (bez umanjenja opštosti, biramo da budemo veliko koliko je potrebno, možemo pretpostaviti isto kao malopre).

Na osnovu svojstava ekstremalnih operatora (3.8), imamo $\mathcal{M}^-(D^2 w_\varepsilon^-) = k_\varepsilon \mathcal{M}^-(D^2\psi_-) \geq 0$ i $\mathcal{M}^+(D^2 w_\varepsilon^+) = k_\varepsilon \mathcal{M}^+(D^2\psi_+) \leq 0$ na Ω. Naročito, na osnovu (3.11), (podsetimo se da je $F(0) = 0$),

$$F(D^2 w_\varepsilon^-) \geq 0 \quad \text{i} \quad F(D^2 w_\varepsilon^+) \leq 0 \quad \text{na} \quad \Omega,$$

i $w_\varepsilon^- \in \mathcal{A}$. Primetimo da, na osnovu neprekidnosti ψ_-, za svako $\varepsilon > 0$ postoji neko $\delta > 0$ takvo da je $w_\varepsilon^- \geq g(x_\circ) - 2\varepsilon$ na $B_\delta(x_\circ) \cap \Omega$. Ovo znači da $u^* \geq w_\varepsilon^- \geq g(x_\circ) - 2\varepsilon$ na $B_\delta(x_\circ) \cap \Omega$, tako da ako $x_k \to x_\circ$, tada

$$\liminf_{k\to\infty} u(x_k) \geq g(x_\circ) - 2\varepsilon.$$

Sa druge strane, na osnovu principa poređenja, svi elementi u $\mathcal{A}$ su ispod w_ε^+ za bilo koje $\varepsilon > 0$. Ponovo, na osnovu neprekidnosti ψ_+, za svako $\varepsilon > 0$ postoji neko $\delta > 0$ takvo da je $w_\varepsilon^+ \leq g(x_\circ) + 2\varepsilon$ na $B_\delta(x_\circ) \cap \Omega$, tako da ako $x_k \to x_\circ$, tada

$$\limsup_{k\to\infty} u(x_k) \leq g(x_\circ) + 2\varepsilon.$$

Pošto je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, imamo da ako $x_k \to x_\circ$, tada

$$\lim_{k\to\infty} u^*(x_k) = g(x_\circ).$$

Stoga je $u^* = g$ na $\partial\Omega$ i u je neprekidno na $\partial\Omega$. Naročito, imamo da je $u^* \in \mathcal{A}$ i (pošto je $u^* \geq u$) $u^* \equiv u$. Ovo znači da $u \in USC(\overline{\Omega})$ i $F(D^2 u) \geq 0$ na Ω.

<u>*Korak 2.*</u> Sada ćemo pokazati da je u i superrešenje. Da bismo to uradili, razmotrićemo njenu donju poluneprekidnu obvojnicu u_*, (3.17) i dokazati da je $F(D^2 u_*) \leq 0$ na Ω.

Primetimo na početku da ako je u neprekidno na granici (na osnovu koraka 1), tada je $u_* = g$ na $\partial\Omega$. Pretpostavimo na osnovu kontradikcije da u_* nije superrešenje, što znači da postoji neko $x_\circ \in \Omega$ takvo da za neko $\phi \in C^2$ imamo da je $\phi(x_\circ) = u_*(x_\circ), \phi \leq u_*$, ali $F(D^2\phi(x_\circ)) > 0$.

Proglašavanjem $\bar{\phi} = \phi - |x - x_\circ|^4$, ako je neophodno, možemo pretpostaviti da je $\phi < u_*$ ako je $x \neq x_\circ$ i i dalje imamo $F(D\phi(x_\circ)) > 0$. Primetimo da na osnovu neprekidnosti F i $D^2\phi$, imamo $F(D^2\phi) > 0$ na $B_\rho(x_\circ)$ za neko malo $\rho > 0$.

Sa druge strane razmotrimo $\phi + \delta$ za $\delta > 0$ i definišimo $u_\delta := \max\{u, \phi + \delta\}$. Pošto je $\phi(x) < u_*(x) \leq u(x)$ za $x \neq x_\circ$, za dovoljno malo $\delta > 0$ imamo da je $\phi_\delta < u$ izvan $B_\rho(x_\circ)$.

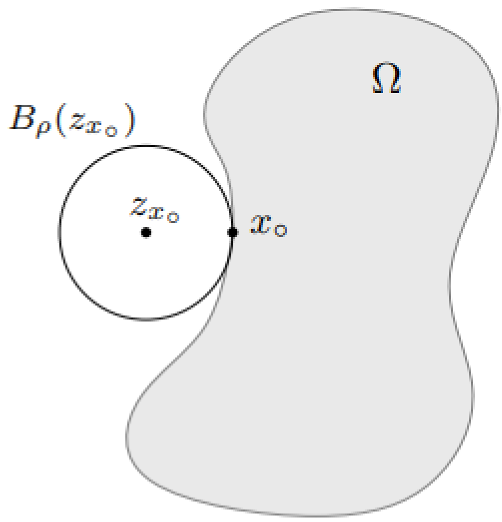
Primetimo sada da je u_δ subrešenje pošto se poklapa sa u izvan $B_\rho(x_\circ)$ i da je to maksimum dva subrešenja na $B_\rho(x_\circ)$. Ovo znači da $u_\delta \in \mathcal{A}$ i stoga je $u_\delta \leq u$. Međutim, ovo znači da je $\phi + \delta \leq u$ svuda na Ω i stoga je $\phi + \delta \leq u_*$ što je kontradikcija. Stoga, u_* mora biti superrešenje.

Prema tome, ponovo na osnovu principa poređenja, pošto je u subrešenje i $u = u_* = g$ na $\partial\Omega$, dobijamo da je $u_* \geq u$ na Ω što znači da je $u = u_*$.

Stoga je u neprekidno, i subrešenje i superrešenje, i $u = g$ na $\partial\Omega$. Ovim zaključujemo dokaz. Kao posledicu navodimo sledeće:

Posledica 3.18. *Neka je Ω bilo koji ograničen C^2 domen, i $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ uniformno eliptična. Tada, za bilo koju neprekidnu funkciju $g \in C(\partial\Omega)$, Dirihleov problem*

$$\begin{cases} F(D^2 u) &= 0 \quad na \quad \Omega, \\ \qquad u &= g \quad na \quad \partial\Omega, \end{cases}$$



Slika 3.6: Reprezentacija konstrukcije iz dokaza posledice 3.18

ima jedinstveno viskozno rešenje.

Dokaz. Rezultat sledi iz prethodne teoreme, samo treba proveriti da li proizvoljan C^2 domen zadovoljava (3.18). Da bismo to uradili, treba da konstruišemo odgovarajuću barijeru u svakoj graničnoj tački $z \in \partial\Omega$.

Primetimo da u svakom jednostavnom slučaju kada je Ω strogo konveksno, takva funkcija ψ_+ iz (3.18) može biti jednostavno hiperravan sa tangentom na Ω postavljenom na nultom nivou u datoj graničnoj tački, takva da je pozitivna na Ω.

Uopšteno, pošto je Ω ograničen C^2 domen, on zadovoljava uslov spoljašnjosti lopte za neki uniformni radijus $\rho > 0$: to znači, za svaku tačku $x_\circ \in \partial\Omega$ postoji neka tačka $z_{x_\circ} = z(x_\circ) \in \Omega^c$ i lopta $B_\rho(z_{x_\circ})$ takva da je $B_\rho(z_{x_\circ}) \subset \Omega^c$ i $B_\rho(z_{x_\circ}) \cap \partial\Omega = \{x_\circ\}$. Pogledati Sliku 3.6.

Sada ćemo konstruisati funkciju ψ_+ razmatranu u (3.18) za C^2 domene. Razmotrićemo funkciju $\psi \in \mathbb{R}^n \backslash B_\rho$ za $\rho > 0$ dato na osnovu uslova spoljašnjosti lopte,

$$\psi(x) = e^{-\alpha\rho^2} - e^{-\alpha|x|^2},$$

za neko $\alpha > 0$ koje je takođe izabrano.

Primetimo da je

$$e^{\alpha|x|^2} D^2\psi(x) = -4\alpha^2 \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \dots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & \dots & \dots & x_n^2 \end{pmatrix} + 2\alpha Id = 2\alpha Id - 4\alpha^2 xx^T.$$

Tada, za $|x| \geq \rho$ imamo

$$e^{\alpha|x|^2}\mathcal{M}^+(D^2\psi) \leq 2\alpha\mathcal{M}^+(Id) - 4\alpha^2\mathcal{M}^-(xx^T) = 2\alpha n\Lambda - 4\alpha^2\lambda|x|^2 \leq 2\alpha(n\Lambda - 2\alpha\lambda\rho^2).$$

Specijalno, ako odaberemo $\alpha \geq \frac{n\Lambda}{2\lambda\rho^2}$ imamo

$$\mathcal{M}(D^2\psi) \leq 0 \quad \text{na} \quad B_\rho^c.$$

Stoga, translacije od ψ su dobri kandidati za funkciju ψ_+ iz (3.18).

Neka je sada $x_\circ \in \partial\Omega$ bilo koja tačka na granici, i uzmimo da je $\psi_+(x) := \psi(x - z_{x_\circ})$. Jasno je da je $\psi_+(x_\circ) = 0$ i da je $\psi_+(x) > 0$ za bilo koje $x \in \overline{\Omega}\backslash\{x_\circ\}$. Sa druge strane, iz diskusije iznad znamo da je $\mathcal{M} + (D^2\psi_+) \leq 0$. Sledi da Ω zadovoljava (3.18).

Napomena 3.19 (Lipšicov domen)**.** Zapravo je moguće dokazati da (3.18) važi za bilo koji ograničen Lipšicov domen takođe. Naročito, ovo garantuje postojanje viskoznih rešenja u takvoj klasi domena.

Konačno, imamo i sledeće.

Propozicija 3.20 (Stabilnost viskoznih rešenja.)**.** *Neka je F_k niz uniformno eliptičnih operatora (sa eliptičnim konstantama λ i Λ) i neka je $u_k \in C(\Omega)$ takav da je $F_k(D^2u_k) = 0$ na Ω u viskoznom smislu.*

Pretpostavimo da F_k konvergira ka F uniformno nad kompaktnim skupovima i da $u_k \to u$ uniformno nad kompaktnim skupovima u Ω. Tada, $F(D^2u) = 0$ na Ω u viskoznom smislu.

Dokaz. Dokaz koristi istu ideju kao dokaz Leme 3.15.

Neka je $x_\circ \in \Omega$ i $\phi \in C^2$ takvo da je $\phi(x_\circ) = u(x_\circ)$ i $\phi \leq u$ na Ω. Ako proglasimo $\bar{\phi}(x) = \phi(x) + |x - x_\circ|^4$ imamo da $u - \bar{\phi}$ dostiže strogi lokalni maksimum u $x_\circ$.

Neka je sada $v_k := u_k - \bar{\phi}$. Do na podniz, na osnovu Koraka 1 u dokazu Leme 3.15, postoji niz $x_k \to x_\circ$ takav da $u_k - \bar{\phi}$ dostiže lokalni maksimum u x_k, i na osnovu uniformne konvergencije $u_k \to u$, takođe imamo $u_k(x_k) \to u(x_\circ)$. Pošto su u_k subrešenja u viskoznom smislu za operator F_k, imamo da je $F_k(D^2\bar{\phi}(x_k)) \geq 0$. Sada, pošto $x_k \to x_\circ$ i F_k konvergira uniformno ka F, dobijamo da, puštajući $k \to \infty$, $F(D^2\bar{\phi}(x_\circ)) = F(D^2\phi(x_\circ)) \geq 0$.

Konkretno, u je viskozno subrešenje za F. Ako uradimo isto za $-u$, dobijamo da je u viskozno rešenje.

Napomena 3.21. Videli smo da za potpuno nelinearne jednačine $F(D^2u) = 0$ imamo postojanje, jedinstvenost i stabilnost viskoznih rešenja. Isto može biti urađeno za uopštenije jednačine kao što je $F(D^2u, x) = f(x)$, sa neprekidnim koeficijentima u x, pogledati [**CC95**]. Međutim, kada želimo da proučavamo linearne jednačine u nedivergentnom obliku

$$\sum a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) = 0 \tag{3.19}$$

sa ograničenim koeficijentima, ispostavlja se da se viskozna rešenja ne ponašaju tako dobro, pogledati kontraprimer u [**Nir53**] (pogledati i [**Caf+96**]). Ovo je razlog zbog kog, umesto da definišemo viskozna rešenja za specifične jednačine oblika (3.19), ono što radimo je da kažemo da je u rešenje jednačine sa ograničenim merljivim koeficijentima (u nedivergentnom obliku) kad god zadovoljava

$$\mathcal{M}^-(D^2u) \leq 0 \leq \mathcal{M}^+(D^2u)$$

u viskoznom smislu, gde je $\mathcal{M}^{\pm}$ Pučijev ekstremalni operator (podsetimo se Definicije 3.7). Kao što je objašnjeno u Napomeni 3.9, za C^2 funkcije u ove dve nejednačine su ekvivalentne izrazu da je u rešenje za neke koeficijente $a_{ij}(x)$.

Rezime: Za viskozna rešenje sada imamo sve što nam je potrebno da bismo proučavali pojam regularnosti:

- Postojanje rešenja.
- Princip poređenja.
- Stabilnost u okvirima uniformnosti.

3.6. Regularnost rešenja: pregled

U poslednjoj sekciji smo videli da za bilo koji (glatki) domen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i bilo koji (neprekidni) granični uslov g, možemo pronaći jedinstveno viskozno rešenje $u \in C(\overline{\Omega})$ Dirihleovog problema

$$\begin{cases} F(D^2u) &= & 0 & \text{na} & \Omega, \\ u &= & g & \text{na} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Sada, osnovno pitanje je regularnost:

Ako $u \in C(B_1)$ je rešenje $F(D^2u) = 0$ na B_1,
šta možemo da kažemo o regularnosti u?

Da li je naredna implikacija tačna?

$$\begin{cases} F \in C^\infty \\ \text{uniformno je eliptično} \\ F(D^2u) = 0 \quad \text{na} \quad B_1 \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} \quad u \in C^\infty(B_{1/2}). \tag{3.20}$$

Ovo je na neki način analogno Hilbertovom XIX problemu.

Regularnost za potpuno nelinearne jednačine: prvi rezultati. Pretpostavimo da je u neprekidno na odgovarajućem domenu i da je $F \in C^\infty$ uniformno eliptično. Tada:

$$F(D^2u) = 0 \quad \underset{\partial e}{\rightarrow} \quad \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij}(D^2u)\partial_{ij}(\partial_e u) = 0,$$

gde je

$$F_{ij} := \frac{\partial F}{\partial M_{ij}}$$

izvod od $F(M)$ u odnosu na M_{ij}. Stoga, ako označimo

$$a_{ij}(x) := F_{ij}(D^2u(x)),$$

tada ćemo imati

$$a_{ij}(x) \quad \text{je uniformno eliptično,} \quad 0 < \lambda Id \leq (a_{ij}(x))_{i,j} \leq \Lambda Id,$$

zahvaljujući uniformnoj eliptičnosti od F.

Označavajući sa

$$v = \partial_e u,$$

imamo

$$F(D^2u) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = \partial_e u \quad \text{je rešenje} \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}(\partial_e u) = 0,$$

gde je $a_{ij}(x) = F_{ij}(D^2u(x))$.

Sada, ako je $u \in C^2$ (ili $C^{2,\alpha}$), tada koeficijenti $a_{ij}(x)$ su neprekidni (ili $C^{0,\alpha}$) i odatle dobijamo , na osnovu procene Šauderovog tipa,

$$u \in C^2 \Rightarrow a_{ij} \in C^0 \Rightarrow v \in C^{1,\alpha} \Rightarrow u \in C^{2,\alpha} \Rightarrow \ldots \Rightarrow u \in C^\infty,$$

gde koristimo argument unapređenja regularnosti, kao što je to opisano u propoziciji koja sledi.

$$u \in C^{2,\alpha} \Rightarrow a_{ij} \in C^{0,\alpha} \Rightarrow u \in C^{3,\alpha} \Rightarrow a_{ij} \in C^{1,\alpha} \Rightarrow \ldots \Rightarrow u \in C^\infty.$$

Drugim rečima, ovo sugeriše sledeći rezultat.

Propozicija 3.22. *Neka je F uniformno eliptična i C^∞. Neka je u bilo koje rešenje $F(D^2u) = 0$ u B_1 i pretpostavimo da $u \in C^2$. Tada, $u \in C^\infty$.*

Dokaz. Ideja je predstavljena u tekstu iznad, ali je dovoljno koristiti da je $u \in C^2$ (u prethodnoj argumentaciji koristili smo da je $u \in C^3$). Da bismo to uradili, koristimo inkrementalne količnike.

Neka je $u \in C^2(B_1)$ i neka $h \in \mathbb{R}^n$ za dovoljno malo $|h|$. Primetimo da je F translatorno invarijantno pa je

$$F(D^2u(x)) = 0, \quad F(D^2u(x+h)) = 0 \quad \text{na} \quad B_{1-|h|}.$$

Tada,

$$0 = F(D^2u(x+h)) - F(D^2u(x)) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}(u(x+h) - u(x)),$$

gde je

$$a_{ij}(x) = \int_0^1 F_{ij}(tD^2u(x+h) + (1-t)D^2u(x))dt$$

Ovo je fundamentalna teorema kalkulusa. Naročito, pošto je F uniformno eliptično, $(a_{ij})_{i,j}$ je uniformno eliptično (sa istim eliptičnim konstantama). Pošto $u \in C^2$ i F je glatko, a_{ij} je neprekidno. To znači da je $\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|}$ rešenje jednačine u nedivergentnom obliku

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}\left(\frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}\right) = 0 \quad \text{na} \quad B_{1-|h|},$$

za neke neprekidne i uniformno eliptične koeficijente a_{ij}. Prema “apriori proceni” za jednačine sa neprekidnim koeficijentima , znamo da za bilo koje $\alpha \in (0,1)$ imamo

$$\left\| \frac{u(\cdot+h) - u}{|h|} \right\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C \left\| \frac{u(\cdot+h) - u}{|h|} \right\|_{L^\infty(B_{3/4})} \leq C\|u\|_{C^{0,1}(B_{3/4})},$$

za neke konstante C koje su nezavisne od h. Na osnovu osobina Helderovih prostora iz uvodnog poglavlja, dobijamo da $u \in C^{2,\alpha}(B_{1/2})$ i arumentom pokrivanja $u \in C^{2,\alpha}$ unutar B_1.

Sada nastavljamo iterativno.

Pošto je $u \in C^2$ unutar B_1, imamo da je $\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|} \in C^{2,\alpha}$ unutar $B_{1-|h|}$ za svako h. Pošto je kao i F glatko, ovo implicira da $a_{ij} \in C^{0,\alpha}$ unutar $B_{1-|h|}$. Ovo znači da je $\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|}$ rešenje nedivergentnog oblika jednačine sa Helderovim neprekidnim koeficijentima, i na osnovu teoreme o Šauderovim procenama u nedivergentnom obliku, dobijamo uniformne granice u $C^{2,\alpha}$ normi za $\frac{u(\cdot+h)-u}{|h|}$, pa je $u \in C^{3,\alpha}$ unutar B_1. Možemo ponoviti ovaj argument iterativno, kao što je opisano u razmatranjima iznad, korišćenjem procena višeg reda iz posledice Šauderove teoreme, da bismo dobili željeni rezultat.

Ovo je slično onome što se dešava u Hilbertovom XIX problemu: u tom slučaju garantujemo $C^1 \Rightarrow C^\infty$.

Primetimo, međutim, da za potpuno nelinearne jednačine, "praznina koja mora biti popunjena" (iz C^0 u C^2) je "veća" nego u Hilbertovom XIX problemu (iz H^1 u C^1).

Sada, centralno pitanje na koje mora biti odgovoreno je:

Da li je tačno da su rešenja uvek C^2?

Naročito, pitamo se da li viskozna rešenja su uvek klasična rešenja ili ne, i stoga, da li Dirihleov problem uvek priznaje klasično rešenje.

Regularnost potpuno nelinearnih jednačina. Važno zapažanje u prethodnom argumentu je sledeće:

$$\begin{cases} u \text{ je rešenje} \\ F(D^2u) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v = \partial_e u \text{ je rešenje } \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{ij} v = 0, \\ \text{gde je } a_{ij}(x) = F_{ij}(D^2u(x)). \end{cases}$$

Ovo znači da su, barem formalno, izvodi bilo kog rešenja bilo koje potpuno nelinearne jednačine rešenja jednačine sa ograničenim merljivim koeficijentima.

Ovo možemo argumentovati ispravno posmatranjem sledećih inkrementalnih količnika:

Podsetimo se iz (3.10) ekvivalencije

$$\begin{gathered} F \text{je uniformno eliptično} \\ \Updownarrow \\ \mathcal{M}^-(D^2(u-v)) \le F(D^2u) - F(D^2v) \le \mathcal{M}^+(D^2(u-v)), \end{gathered}$$

gde su $\mathcal{M}^\pm$ Pučijevi operatori. Stoga je

$$\mathcal{M}^-(D^2(u(x+h)-u(x))) \le F(D^2u(x+h)) - F(D^2u(x)) \le \mathcal{M}^+(D^2(u(x+h)-u(x))).$$

Koristeći da je $F(D^2u)=0$ i označavajući

$$v_h(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{|h|},$$

dostižemo

$$\begin{cases} \mathcal{M}^+(D^2v_h) & \geq & 0 \\ \mathcal{M}^-(D^2v_h) & \leq & 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \text{jednačina sa granicama} \\ \text{merljivi koeficijenti} \end{pmatrix}.$$

Sada je pitanje: u slučaju jednačine u divergentnom obliku dokazali smo

$$\begin{cases} \text{jednačina sa granicama} \\ \text{merljivi koef. } div(A(x)\nabla v) = 0 \end{cases} \implies \quad v \in C^{0,\alpha} \quad \text{(Džordž-Neš).}$$

Da li postoji sličan rezultat za jednačine u nedivergentnom obliku? Odgovor je DA.

Teorema 3.23 (Krylov-Safonov, 1979.)**.** *Neka su $0<\lambda\leq\Lambda$ eliptične konstante i $v\in C(B_1)$ bilo koje rešenje jednačine*

$$\begin{cases} \mathcal{M}^+(D^2v) & \geq & 0 \quad na \quad B_1, \\ \mathcal{M}^-(D^2v) & \leq & 0 \quad na \quad B_1, \end{cases} \tag{3.21}$$

u viskoznom smislu. Tada

$$\|v\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|v\|_{L^\infty(B_1)}$$

za neko malo $\alpha>0$ i C koje zavisi samo od n,λ i Λ.

Ovaj rezultat je dokazan u **[KS79]** (za klasična rešenja). Pogledati i **[Moo19]** za noviji i jednostavniji dokaz i **[SS21]** za proširenje rezultata.

Podsetimo se da (videti kraj sekcije 3.3), za C^2 funkcije, (3.21) je zapravo ekvivalentno sa činjenicom da je v rešenje jednačine tipa $\sum_{i,j} a_{ij}(x)\partial_{ij}v$ za neke uniformno eliptične koeficijente. Ovo je razlog zbog kog (3.21) zovemo *jednačina u nedivergentnom obliku sa ograničenim merljivim koeficijentima.*

Kao posledicu ovog rezultata dobijamo sledeće. Pretpostavimo zbog jednostavnosti da je $F(0)=0$, drugačije videti Napomenu 3.16.

Teorema 3.24 (Krylov-Safonov, 1979.)**.** *Neka je F uniformno eliptično, $F(0)=0$ i $u\in C(B_1)$ bilo koje viskozno rešenje problema*

$$F(D^2u)=0 \quad na \quad B_1.$$

Tada,

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|u\|_{L^\infty(B_1)}$$

za neko malo $\alpha>0$ i C koje zavisi samo od n,λ i Λ.

Dokaz. Na osnovu Propozicije 3.13 (za $v\equiv 0$), funkcija $u\in C(B_1)$ je rešenje jednačine sa ograničenim merljivim koeficijentima

$$\begin{cases} \mathcal{M}^+(D^2u) & \geq & 0 \quad \text{na} \quad B_1, \\ \mathcal{M}^-(D^2u) & \leq & 0 \quad \text{na} \quad B_1. \end{cases}$$

Stoga je na osnovu Teoreme 3.23, $u \in C^{0,\alpha}$ unutar B_1. Sada, za $\beta \in (0,1]$ uzimamo

$$v_h(x) := \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|^\beta},$$

koja je (ponovo prema Propoziciji 3.13) takođe rešenje jednačine sa ograničenim merljivim koeficijentima

$$\begin{cases} \mathcal{M}^+(D^2 v_h) & \geq & 0 & \text{na} & B_{1-|h|}, \\ \mathcal{M}^-(D^2 v_h) & \leq & 0 & \text{na} & B_{1-|h|}. \end{cases}$$

Tada, ponovo na osnovu Teoreme 3.23, imamo

$$\|v_h\|_{C^{0,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|v_h\|_{L^\infty(B_{1-|h|})} \leq C\|u\|_{C^\beta(B_1)}.$$

Prema H7 zaključujemo da je

$$\|u\|_{C^{\alpha+\beta}(B_{1/2})} \leq C\|u\|_{C^\beta(B_1)},$$

pri čemu vodimo računa da $\alpha + \beta$ nije ceo broj i da je $\beta \leq 1$.

Koristeći procenu za $\beta = \alpha, 2\alpha, \cdots, k\alpha$ dobija se $C^{1,\alpha}$ regularnost u konačnom broju koraka.

Napomena 3.25. Obratimo pažnju na to da je:

- $C^{0,\alpha}$ procena za ograničene merljive koeficijente, prema Teoremi 3.23 je najbolje što možemo da dobijemo u dimenziji $n \geq 3$; pogledati [**Saf87**]
- U izvesnom smislu, Teorema 3.23 je analogna rezultatu Džordž-Neša za jednačinu u divergentnom obliku. Međutim, nije dovoljno da se dobije C^2 regularnost za rešenja potpuno nelinearnih jednačina.

Rezime: Imamo $F(D^2u) = 0 \Rightarrow u \in C^{1,\alpha}$ (za neko malo $\alpha > 0$).
Štaviše, $u \in C^2 \Rightarrow u \in C^\infty$. Međutim, još nemamo ideju da li važi implikacija

$$u \in C^{1,\alpha} \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad u \in C^2.$$

U dvodimenzionalnom slučaju, kao što smo videli u Teoremi 3.10 (kao “a priori procena”), ispostaviće se da može da se uradi nešto bolje, i da su sva rešenja u $C^{2,\alpha}$. Ovo je zato što u $\mathbb{R}^2$ rešenja jednačine sa ograničenim merljivim koeficijentima nisu samo $C^{0,\alpha}$ nego i $C^{1,\alpha}$.

Kao posledicu imamo sledeće.

Teorema 3.26. *Neka je $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ uniformno eliptično i glatko. Neka je $u \in C(B_1)$ bilo koje viskozno rešenje jednačine*

$$F(D^2u) = 0 \quad \text{na } B_1 \subset \mathbb{R}^2.$$

Tada $u \in C^\infty$.

Ovo je kompletan odgovor na (3.20) u dve dimenzije.

U više dimenzija, poznati rezultat zaključen (nezavisno) od strane Evansa [**Eva82**] i [**Kry82**] daje sledeće.

Teorema 3.27. *[Evans-Krylov, 1982] Neka je F proizvoljna* **konveksni** *(ili konkavni) uniformno eliptični operator, sa $F(0) = 0$. Neka je $u \in C(B_1)$ bilo koje viskozno rešenje jednačine*

$$F(D^2u) = 0 \quad \text{na } B_1.$$

Tada,

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|u\|_{L^\infty(B_1)},$$

za neko $\alpha > 0$ i C koje zavisi samo od n, λ i Λ. Naročito, ako je F glatko, tada $u \in C^\infty$.

Upućujemo čitaoca na [**CS10**] za kraći dokaz ovog rezultata.

Stoga, za bilo koje rešenje (3.2) sa uniformno eliptičnim i glatkim F imamo:

- Ako je $u \in C^2$, tada $u \in C^\infty$.
- $u \in C^{1,\alpha}$ uvek (Krylov-Safonov, 1979).
- U dve dimenzije, $u \in C^\infty$ (Nirenberg, 1952).
- Ako je F konveksno, tada $u \in C^\infty$ (Evans-Krylov, 1982).

Pitanje: Šta se dešava uopšteno?

Decenijama je bio otvoren problem da li su sva rešenja C^2 ili ne. Pitanje je konačno dobilo odgovor od strane Nadirašvilija i Vladutsa 2000-te. [**NV07**], [**NV08**], [**NV13**].

Teorema 3.28 (Nadirashvili-Vladuts, 2007-2013)**.** *Postoje rešenja jednačine (3.2) koja nisu C^2. Ovi kontraprimeri postoje u dimenzijama $n \geq 5$.*

Štaviše, za svako $\tau > 0$, postoji dimenzija n i eliptične konstante λ i Λ, takve da postoje rešenja u jednačine $F(D^2u) = 0$ pri čemu $u \notin C^{1,\tau}$.

Upućujemo na monografiju [**NTV14**] za detalje.

Nije poznato šta se dešava u $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$. Ovo je jedan od najznačajnijih otvorenih problema u eliptičnim PDJ.

3.7. Dalji rezultati i otvoreni problemi

Kao što je objašnjeno iznad, jedno od glavnih otvorenih pitanja u odnosu na problem

$$F(D^2u) = 0 \quad \text{na} \quad B_1 \subset \mathbb{R}^n \tag{3.22}$$

je sledeće:

Neka je u proizvoljno rešenje (3.22) u $\mathbb{R}^3$ ili $\mathbb{R}^4$. Da li važi $u \in C^2$?

Videli smo da uopšteno nije tačno da su rešenja potpuno nelinearnih jednačina (u dimenzijama $n \geq 5$) u C^2 pod pretpostavkom da je F jednostavno uniformno eliptično. Konveknost je, sa druge strane, jak uslov pod kojim je C^2 regularnost dostignuta, što nažalost ne važi u nekim važnim primenama. Čak i sa ovim uslovom, i dalje je nejasno šta je optimalna regularnost rešenja kada je F konveksno i uniformno eliptično (ne nužno glatko). Teorema 3.27 daje samo „a priori” $C^{2,\alpha}$ regularnost za neko malo $\alpha > 0$.

Ova zapažanja motivišu, sa jedne strane, prefinjenije izučavanje regularnosti (i veličine singularnosti) rešenja uopštenih nelinearnih eliptičnih jednačina, i sa druge strane, motivišu izučavanje optimalne regularnosti pod pretpostavkom konveksnosti.

Parcijalna regularnost. Podsetimo se da zahtev eliptičnosti za F implicira da je F Lipšicovo. Pod malo strožom pretpostavkom da je F takođe i C^1, sledeći rezultat o *parcijalnoj regularnosti* su dokazali Armstrong, Silvestre i Smart [**ASS12**]

Teorema 3.29 ([**ASS12**]). *Neka je F uniformno eliptično i pretpostavimo dodatno da $F \in C^1$. Neka je $u \in C^0(B_1)$ bilo koje viskozno rešenje jednačine (3.27).*

Tada postoji neko $\varepsilon > 0$ koje zavisi samo od n, λ, Λ i zatvoren podskup $\sum \subset \overline{B_1}$ sa dimenzijom $dim_{\mathcal{H}} \sum \leq n - \varepsilon$ tako da je $u \in C^2(B_1 \setminus \sum)$.

Ovde $dim_{\mathcal{H}}$ označava Hausdorfovu dimenziju skupa, pogledati [**Mat95**]. Primetimo da ako je $dim_{\mathcal{H}} \sum \leq n - \varepsilon$, tada $\sum$ ima meru nula.

Ovaj rezultat je najpoznatiji rezultat iz parcijalne regularnosti za nekonveksne potpuno nelinearne jednačine u dimenziji $n \geq 3$. Primetimo da nije poznato da li je veličina skupa singulariteta optimalna (mogla bi biti mnogo manja). Štaviše, važan otvoren problem je ustanoviti da li isto tvrđenje važi bez pretpostavke regularnosti za $F \in C^1$.

Optimalna regularnost kada je F konveksno. Kada je F konveksno i uniformno eliptično, poznato je da su rešenja (3.22) u $C^{2,\alpha}$ za neko malo $\alpha > 0$. Ako $F \in C^\infty$, argument unapređenja regularnosti koji proističe iz procena Šauderovog tipa, tada daje veću regularnost za u, ali je potrebna i veća regularnost za F. Šta se dešava ako samo zahtevamo da je F konveksno i uniformno eliptično?

Pošto je F konveksno, izraz (3.22) može biti reformulisan kao supremum linearno uniformnih operatora kao

$$\sup_{a \in \mathcal{A}} L_a u = 0 \quad \text{na} \quad B_1 \subset \mathbb{R}^n, \tag{3.23}$$

što je poznato i kao Belmanova jednačina, gde svaki od operatora L_a je linearno uniformno eliptični operator.

Pitanje koje ostaje otvoreno ovde je:

Šta je optimalna regularnost za rešenja Belmanove jednačine?

U jednostavnijem modelu samo dva različita operatora, prethodna jednačina je

$$\max\{L_1 u, L_2 u\} = 0 \quad \text{na} \quad B_1 \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.24}$$

Najpoznatiji rezultat u ovom smeru je dokazan od strane Kafarelija, De Silve i Savina u 2018, i uspostavlja optimalnu regularnost za rešenja (3.23) u dve dimenzije.

Teorema 3.30 ([**CSS18**]). *Neka je u bilo koje viskozno rešenje (3.23) na $B_1 \subset \mathbb{R}^2$. Tada*

$$\|u\|_{C^{2,1}(B_{1/2})} \leq C \|u\|_{L^\infty(B_1)},$$

za neku konstantu C zavisno od samo λ i Λ.

Pristup korišćen u [**CSS18**] da demonstrira ovaj rezultat ne važi u dimenzijama $n \geq 3$ i stoga ostaje otvoreno pitanje:

Neka je u proizvoljno rešenje (3.23) i $n \geq 3$. Da li je tačno da $u \in C^{2,1}$?

Glava 4

Nelokalne jednačine

Ova glava se fokusira na nelokalne jednačine. Dobar izvor za razne rezultate o nelokalnim jednačinama je vikipedija [**wik**], naročito beleške sa predavanja koja su održana na jednom letnjem kursu na Univerzitetu u Čikagu [**Sil**].

U prethodnim glavama diskutovali smo kako linearne i nelinearne eliptične jednačine mogu biti izvedene iz problema slučajnog hoda kada skalarni parametar r konvergira ka 0. Jednačine koje ćemo razmotriti u ovoj glavi uključuju takođe one integro-diferencijalne jednačine koje imamo pre nego što pustimo $r \to 0$. Eliptične jednačine drugog reda su ekstremni slučajevi nelokalnih jednačina. U linearnom slučaju želeli bismo da proučimo jednačine koje su opšteg oblika

$$a_{ij}\partial_{ij}u + b\cdot\nabla u + \int_{\mathbb{R}^n}(u(x+h)-u(x)-h\cdot\nabla u(x)\mathbb{1}_{B_1}(h))K(h)dh = 0 \quad \text{za svako} \quad x\in\Omega.$$

Operatori sa leve strane se pojavljuju u teoriji verovatnoće kao generatori Levijevih procesa. Ti operatori su uopštenja difuzije ili Braunovog kretanja, sa prekidima. Ovi slučajni procesi *skaču* sa tačke na neku drugu udaljenu tačku. Jezgro K opisuje frekvenciju ovih skokova.

Prirodno, mogli bismo da razmotrimo jednačine gde koeficijenti a_{ij}, b ili jezgro K zavise od x. Možemo takođe izgraditi nelinearne probleme kao u Belmanovoj ili Isakovoj jednačini, koji korespondiraju sa problemima u stohastičkom upravljanju ili stohastičkim igrama.

Sa čisto analitičkog aspekta, ovo su jedine jednačine koje zadovoljavaju globalni princip maksimuma.

Da bismo ovo objasnili, daćemo prvo neke definicije.

Definicija 4.1. *Neka je F proizvoljno preslikavanje koje skup ograničenih i dva puta neprekidno-diferencijabilnih funkcija $C^2(\Omega)$ na $\mathbb{R}^n$ slika na skup neprekidnih funkcija $C(\Omega)$. Kažemo da je ovo preslikavanje eliptično ako za svake dve funkcije u i v koje zadovoljavaju*

$$\max(u-v) = u(x_0)-v(x_0) \geq 0 \quad \textit{za neku tačku} \quad x_0\in\Omega,$$

važi da je $F[u](x_0) \leq F[v](x_0)$.

Specijalan slučaj su operatori sa kojima smo se upoznali ranije

$$F[u](x) = F(D^2u, \nabla u, u, x),$$

pri čemu je F eliptičan i valjan, kao i ranije. Razlika je u tome što je kod nelokalnih operatora F dozvoljeno da zavise od vrednosti funkcije u u svim tačkama, a ne samo od onih koje su u okolini x.

Dirihleov problem za nelokalne jednačine bi imao sledeću formu

$$\begin{aligned} F[u] &= 0 \quad \text{na} \quad \Omega, \\ u &= f \quad \text{na} \quad \mathbb{R}^n \backslash \Omega. \end{aligned}$$

Primetimo da je granični uslov dat u čitavom komplementu domena jednačine Ω. Ne bi imalo smisla da se daju granične vrednosti samo na $\partial\Omega$. To je zato što će vrednosti funkcije u izvan Ω uticati na vrednosti $F[u]$ unutar Ω. Sa aspekta modela u verovatnoći, to je zato što Levijevi procesi mogu iskočiti iz domena Ω i skočiti na bilo koju tačku izvan.

Postoji stari rezultat *Courrége*-a [**Cou65**] koji kaže da su jedini linearni operatori koji su eliptični u smislu Definicije 4.1 oni koji su opšteg oblika

(4.1)
$$F[u](x) = a_{ij}(x)\partial_{ij}u + b(x)\cdot\nabla u - c(x)u + \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+h) - u(x) - h\cdot\nabla u(x)\mathbb{1}_{B_1}(h))K(x,h)dh.$$

Ovde za svako $x \in \Omega$, $a_{ij}(x)$ je pozitivna matrica, $b(x)$ je proizvoljan vektor, $c(x) \leq 0$ i jezgro $K(x,h) \geq 0$ mora zadovoljiti

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x,h)\min(1, |h|^2)dh < +\infty. \tag{4.2}$$

(Zapravo jezgro $K(x,h)$ bi trebalo razumeti kao nenegativnu meru koja može biti i neregularna.)

Uslov (4.2) je ono što garantuje da integral u definiciji $F[u]$ konvergira ako je u ograničeno i dva puta neprekidno-diferencijabilno, tj. $u \in C^2$. Zaista, za dovoljno veliko h

$$(u(x+h) - u(x) - h\cdot\nabla u(x)\mathbb{1}_{B_1}(h)) = u(x+h) - u(x) \quad \text{je ograničeno.}$$

Za malo h,

$$(u(x+h) - u(x) - h\cdot\nabla u(x)\mathbb{1}_{B_1}(h)) \approx \langle D^2u(x), h, h\rangle = O(|h|^2).$$

Izraz $h\cdot\nabla u(x)$ je ovde da obezbedi neophodno poništavanje oko početka $h = 0$.

Nelinearnu verziju *Courrége*-ove teoreme su skoro objavili Giljen i Švab [**GS12**] pod dodatnom pretpostavkom da je $F[u]$ *Freše* diferencijabilan. Hipoteza kaže da su svi nelinearni operatori F oblika:

$$F[u](x) = \min_a \max_b L_{ab}u(x),$$

gde je L_{ab} familija linearnih operatora oblika 4.1. Zanimljivo je da su ovo operatori koji odgovaraju uopštenoj Isakovoj jednačini koja je izvedena iz Levijevih procesa.

U nastavku sledi prirodna definicija viskoznog rešenja.

Definicija 4.2. *Kažemo da funkcija $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadovoljava nejednakost $F[u] \geq 0$ na Ω (subrešenje) u viskoznom smislu ako je u poluneprekidna sa gornje strane na Ω i svaki put kada postoji funkcija φ koja je C^2 u okolini x, $\varphi \geq u$ na $\mathbb{R}^n$ i $\varphi(x) = u(x)$, tada $F[\varphi](x) \geq 0$.*

Obrnuta nejednakost (superrešenje) definisana je okretanjem svih nejednakosti. Rešenje je funkcija koja je subrešenje i superrešenje u isto vreme.

Definicija je esencijalno ista kao one date pre. Jedini detalj koji treba razmotriti je to da test funkcija φ mora biti definisana i zadovoljavati nejednakost $\varphi \geq 0$ u čitavom prostoru $\mathbb{R}^n$, ali se jedino zahteva da je C^2 u okolini dodirne tačke x. Ovo je zgodno jer za sve praktične svrhe jedino treba da razmotrimo test funkcije φ koje su jednake sa u van neke okoline x.

Teorija viskoznih rešenja i nekoliko rezultata regularnosti za klasične eliptične parcijalne diferencijalne jednačine imaju prirodno proširenje na nelokalne jednačine.

Laplasov operator je prvi primer klasičnog eliptičnog operatora. U istom maniru, prvi primer nelokalnog operatora je frakcioni Laplasijan. Za $s \in (0,1)_{\mathbb{Q}}$, definišemo

$$\Delta^s u(x) = c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+h) - u(x)) \frac{1}{|h|^{n+2s}} dh.$$

U ovom slučaju izostavljamo korektivni uslov $h \cdot \nabla u(x) \mathbb{1}_{B_1}(h)$ zato što je neparan i integral bi bio 0. Bez obzira na to, ako je $s \geq 1/2$, ovaj uslov bi trebao da bude tu implicitno da obezbedi konvergenciju integrala u blizini početka.

Ime je motivisano sledećim identitetom nakon računanja Furijeove transformacije

$$\widehat{\Delta^s u(\xi)} = -|\xi|^{2s} \hat{u}(\xi). \tag{4.3}$$

Konstanta $c_{n,s}$ mora biti izabrana tako da važi identitet iznad.

Kada $s \to 1$, vraćamo običan Laplasijan. Ovde broj s treba posmatrati kao parametar. Operator Δ^s je nelokalni eliptični operator reda $2s$.

4.1. Regularnost

Ključni koncept u razvoju rezultata regularnosti za klasične eliptične parcijalne diferencijalne jednačine je *uniformna eliptičnost.* Za linearne jednačine, uniformna eliptičnost nam govori da su koeficijenti $\{a_{ij}\}$ uporedivi u svakoj tački sa identičkom matricom. Za nelokalne jednačine možemo definisati uniformnu eliptičnost reda $\sigma \in (0,2)$ zahtevajući da su naši operatori uporedivi sa operatorima frakcionog Laplasijana $\Delta^{\sigma/2}$.

Razmotrimo linearnu nelokalnu jednačinu u obliku

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(x+h) - u(x) - h \cdot \nabla u(x) \mathbb{1}_{B_1}(h)) K(x,h) dh = 0.$$

Da bismo pojednostavili naš zapis, napravićemo simetričnu pretpostavku $K(x,h) = K(x,-h)$. Izraz $h \cdot \nabla u(x) \mathbb{1}_{B_1}(h) K(x,h)$ je neparan u h i treba da da integral koji je 0. Reformulisaćemo jednačinu u

$$PV \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+h) - u(x)) K(x,h) dh =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}} (u(x+h) - u(x)) K(x,h) dh = 0$$

Pošto integral može da ima singularitet u početku, jednačinu moramo shvatiti u kontekstu glavne Košijeve vrednosti.

U ovoj tački ima smisla da kažemo da linearna integro-diferencijalna jednačina će biti uniformno eliptična reda $\sigma \in (0,2)$ ako je jezgro $K(x,h)$ uporedivo sa jezgrom Δ^s. To znači da postoje konstante $\Lambda \geq \lambda > 0$ takve da

$$\lambda \frac{c_{n,s}}{|h|^{n+\sigma}} \leq K(x,h) \leq \Lambda \frac{c_{n,s}}{|h|^{n+\sigma}}. \tag{4.4}$$

Iako ovaj izbor deluje prirodno, nekako je proizvoljan. Klasa nelokalnih operatora je veoma bogata. Dok se jednačine drugog reda sastoje od matrica $\{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ za svaku tačku x, nelokalne jednačine mogu imati jezgro funkcije $K(x, \cdot)$ u svakoj tački x. Postoji mnogo varijacija.

Daćemo sledeću teoremu za nelokalne jednačine.

Teorema 4.3. *Neka je $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ rešenje jednačine*

$$PV \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+h) - u(x)) K(x,h) dh = 0 \qquad \text{za svako } x \in B_1.$$

Pretpostavićemo da je $K(x,h) = K(x,-h)$ i da K zadovoljava (4.4). Nemamo pretpostavke regularnosti za K u odnosu na x i h. Tada važi sledeća procena:

$$\|u\|_{C^{\alpha(B_{1/2})}} \leq C \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Konstanta $\alpha > 0$ i C zavise od λ, Λ, dimenzije n i σ. Ove konstante degenerišu kada $\sigma \to 0$, ali ne kad $\sigma \to 2$.

Definišemo $\mathcal{L}_0$ kao klasu nelokalnih operatora. Kažemo da $L \in \mathcal{L}_0$ ako operator L ima formu

$$L[u](x) = PV \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+h) - u(x)) K(h) dh,$$

pri čemu je $K(h) = K(-h)$ i

$$\lambda \frac{c_{n,\sigma/2}}{|h|^{n+\sigma}} \leq K(h) \leq \Lambda \frac{c_{n,\sigma/2}}{|h|^{n+\sigma}}.$$

Koristeći ovu klasu $\mathcal{L}_0$ definišemo nelokalnu verziju Pučijevih operatora.

$$M^+_{\mathcal{L}_0}[u](x) = \sup\{L[u](x) : L \in \mathcal{L}_0\},$$
$$M^-_{\mathcal{L}_0}[u](x) = \inf\{L[u](x) : L \in \mathcal{L}_0\}.$$

Za nelokalne jednačine ekstremalni operatori $M^+_{\mathcal{L}_0}$ i $M^-_{\mathcal{L}_0}$ igraju istu ulogu kao Pučijevi operatori za klasične eliptične jednačine. Naročito, možemo reformulisati teoremu iznad kao

Teorema 4.4. *Neka je $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija koja zadovoljava sledeće dve nejednakosti u viskoznom smislu*

$$M_{\mathcal{L}_0}^{+}[u](x) \geq 0 \ \text{na} \ B_1,$$

$$M_{\mathcal{L}_0}^{-}[u](x) \leq 0 \ \text{na} \ B_1.$$

Tada $u \in C^{\alpha}(B_{1/2})$ za neko $\alpha > 0$ i

$$\|u\|_{C^{\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}.$$

Konstanta $\alpha > 0$ i C zavise od λ, Λ, dimenzije n i σ. Ove konstante degenerišu kada $\sigma \to 0$, ali ne kad $\sigma \to 2$.

Takođe ćemo koristiti ekstremalne operatore $M_{\mathcal{L}_0}^{+}$ i $M_{\mathcal{L}_0}^{-}$ da definišemo uniformnu eliptičnost proizvoljnog nelokalnog operatora.

Definicija 4.5. *Kažemo da je nelokalni operator F eliptičan u odnosu na klasu $\mathcal{L}_0$ ako za bilo koje druge dve funkcije u i v ograničene na $\mathbb{R}^n$ i C^2 u okolini tačke x imamo*

$$M_{\mathcal{L}_0}^{-}[v](x) \leq F[u+v](x) - F[u](x) \leq M_{\mathcal{L}_0}^{+}[v](x).$$

Koristeći ovu definiciju, možemo dati sledeću teoremu:

Teorema 4.6. *Neka je F nelokalni operator, eliptični u odnosu na $\mathcal{L}_0$ i invarijantan u odnosu na translaciju (tj. $F[u(\cdot + h)](x) = F[u](x+h)$). Ako je $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija koja zadovoljava*

$$F[u] = 0 \ \text{na} \ B_1 \ \text{u viskoznom smislu},$$

tada $u \in C^{1,\alpha}(B_1)$ za neko $\alpha > 0$. Štaviše, važi procena

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C\|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}.$$

Ovde C i α zavise samo od dimenzija i eliptičnih konstanti λ, Λ i σ.

Zaključak

S obzirom na mnogo širi spektar primena i nastavljajući prirodan tok razvoja teorije regularnosti viskoznih rešenja, poslednjih godina veliki broj istraživača u veoma značajnim univerzitetskim centrima usmerio se ka istraživanju nelokalnih jednačina. Imajući u vidu da do sada najopštija forma PDJ u kojoj se pričalo o regularnosti, postojanju i stabilnosti viskozih rešenja predstavlja samo granični slučaj nelokalnih jednačina, može se konstatovati da njihovo poznavanje sa teorijskog aspekta omogućava mnogo bolje upoznavanje samih PDJ.

Pored teorijskog stanovišta, sa praktične strane postoji mnogo primera gde nelokalne jednačine daju značajno bolje modele u odnosu na parcijalne diferencijalne jednačine. Pokušaću da navođenjem najznačajnijih primena motivišem čitaoce da obrate što više pažnju na istraživanje u ovoj, zaista popriličnо aktuelnoj oblasti PDJ.

- U finansijskoj matematici poseban značaj zauzima izučavanje modela koji uključuju procese sa skokom. Model određivanja cena za američke opcije uključuje problem prepreke koji je najpoznatiji primer problema slobodne granice, a koji se može reformulisati u potpuno nelinearnu integro-diferencijalnu jednačinu.

- Algoritmi za redukciju šuma u nelokalnoj verziji obrade slike u stanju su da detektuju obrasce na bolji način od onih modela koji su zasnovani na PDJ. Jednostavan model za uklanjanje šuma je nelokalni srednji tok zakrivljenosti.

- Bolcmanova jednačina, čije pitanje regularnosti za klasična rešenja još uvek predstavlja otvoren problem, modeluje evoluciju razređenih gasova i ona je u suštini integralna jednačina, koja se može tumačiti kao nelokalna integro-diferencijalna verzija neke potpuno nelinearne jednačine.

- U konformalnoj geometriji, konformno invarijanti operatori kodiraju informacije o mnogostrukostima i oni uključuju frakcione stepene Laplasijana koji su karakteristični primeri nelokalnih jednačina.

Mislim da, s obzirom na veliki broj eminentnih autora poput Nirenberga, Kafarelija[1], Krilova, Evansa i Figalija, koji su razvijali teoriju viskoznih rešenja za potpuno nelinearne eliptične jednačine i na gore naveden veliki broj primena njihovih nelokalnih uopštenja u privredne i komercijalne svrhe, ovu oblast možemo smatrati izuzetnom presečnom tačkom kvalitetne akademske prakse i motivacije za istraživanjem iz problema u svakodnevnom životu.

[1] Luis Angel Kafareli, dobitnik Abelove nagrade ove 2023. godine

Literatura

[ASS12] S. N. Armstrong, L. Silvestre, and C. K. Smart. *Partial regularity of solutions of fully nonlinear uniformly elliptic equations.* Comm. Pure Appl. Math. **65**, 2012, pp. 1169–1184.

[Bre11] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2011.

[CC95] L. Caffarelli and X. Cabré. *Fully Nonlinear Elliptic Equations.* American Mathematical Society Colloquium Publications **43**, American Mathematical Society, 1995.

[Caf+96] L. Caffarelli, M. Crandall, M. Kocan, and A. Święch. *On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients.* Comm. Pure Appl. Math. **49**, 1996, pp. 365–398.

[CSS18] L. Caffarelli, D. De Silva, and O. Savin. *Two-phase anisotropic free boundary problems and applications to the Bellman equation in 2D.* Arch. Rat. Mech. Anal **228**, 2018, pp. 477–493.

[CS10] L. Caffarelli and L. Silvestre. *On the Evans-Krylov theorem.* Proc. Amer. Math. Soc. **138**, 2010, pp. 263–265.

[Cou65] P. Courrége. *Sur la forme intégro-différentielle des opérateurs de c_k^∞ dans c satisfaisant au principe du maximum.* Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du Potentiel, 1965, 10(1):1–38.

[CIL92] M. G. Crandall, H. Ishii, and P. L. Lions. *Users guide to viscosity solutions of second order partial differential equations.* American Mathematical Society Colloquium Publications, Bulletin of the American Mathematical Society, 1992, 27(1):1–67.

[DV21] S. Dipierro and E. Valdinoci. *Elliptic Partial Differential Equations from an Elementary Viewpoint.* preprint arXiv, 2021.

[Eva82] L. C. Evans. "Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order eliptic equations". In: *Comm. Pure Appl. Math* 35 (1982), pp. 333–363.

[Eva98] L. C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1998.

[Eva13] L. C. Evans. *An Introduction to Stochastic Differential Equations.* American Mathematical Society, 2013.

[EG92] L. C. Evans and R. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press, 1992.

[FR23] X. Fernandez-Real and X. Ros-Oton. *Regularity Theory for Elliptic PDE.* Zurich Lectures in Advanced Mathematics, EMS books, 2023.

[FR24] X. Fernandez-Real and X. Ros-Oton. *Integro-Differential Elliptic Equations*. Forthcoming book, available at the webpages of the authors, 2024.

[GT77] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften vol. **224**, Springer-Verlag, 1977.

[Gio57] E. De Giorgi. *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*. Memorie della Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze Fisiche, Matematicahe e Naturali **3**, 1957, pp. 25–43.

[GS12] N. Guillen and R. W Schwab. *Aleksandrov–Bakelman–Pucci type estimates for integro-differential equations*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2012, 206(1):111–157.

[HL97] Q. Han and F. Lin. *Elliptic Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1997.

[Jen88] R. Jensen. *The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations*. Arch. Rational Mech. Anal. **101**, 1988, pp. 1–27.

[Kry82] N. V. Krylov. *Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46**, 1982, pp. 487–523.

[KS79] N.V. Krylov and M.V. Safonov. *An estimate for the probability of a diffusion process hitting a set of positive measure*. Doklady Akademii Nauk SSSR **245**, 1979, pp. 18–20.

[Law10] G. F. Lawler. *Random Walk and the Heat Equation*. American Mathematical Society, 2010.

[Mat95] P. Mattila. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*. Cambridge University Press, 1995.

[Moo19] C. Mooney. *A proof of the Krylov-Safonov theorem without localization*. Comm. Partial Differential Equations **44**, 2019, pp. 681–690.

[NTV14] N. Nadirashvili, V. Tkachev, and S. Vladuts. *Nonlinear Elliptic Equations and Nonassociative Algebras*. AMS Mathematical Surveys and Monographs, 2014.

[NV07] N. Nadirashvili and S. Vladuts. *Nonclassical solutions of fully nonlinear elliptic equations*. Geom. Funct. Anal. **17**, 2007, pp. 1283–1296.

[NV08] N. Nadirashvili and S. Vladuts. *Singular viscosity solutions to fully nonlinear elliptic equations*. J. Math. Pures Appl. **89**, 2008, pp. 107–113.

[NV13] N. Nadirashvili and S. Vladuts. *Singular viscosity solutions of Hessian elliptic equations in five dimensions*. J. Math. Pures Appl. **100**, 2013, pp. 769–784.

[Nas57] J. F. Nash. *Parabolic equations*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **43**, 1957, pp. 754–758.

[Nas58] J. F. Nash. *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*. Amer. J. Math. **80**, 1958, pp. 931–954.

[Nir53] L. Nirenberg. *On nonlinear elliptic Partial Differential Equations and Hölder Continuity*. Comm. Pure Appl. Math **6**, 1953, pp. 103–156.

[Saf87] M. V. Safonov. *Unimprovability of estimates of Hölder constants for solutions of linear elliptic equations with measurable coefficients*. (Russian) Mat. Sb.(N.S) **132**, 1987, pp. 275–288.

[SS21] D. De Silva and O. Savin. *Ouasi-Harnack inequality*. Amer. J Math. **143**, 2021, pp. 307–331.

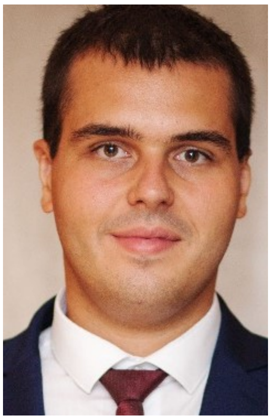
[Sil15] L. Silvestre. *Viscosity solutions to elliptic equations*. Lecture Notes available at the webpage of the author, 2015.

[Sil] L. Silvestre. *Lecture notes on nonlocal equations*. URL: `https://web.ma.utexas.edu/mediawiki/index.php/Lecture_notes_on_nonlocal_equations?`. (accessed: 25.08.2023.)

[Var94] S. R. S. Varadhan. *The work of Pierre-Louis lions*. In Proceedings of the ICM, 1994.

[wik] Nonlocal equations wiki. URL: `https://web.ma.utexas.edu/mediawiki/index.php/Starting_page?`. (accessed: 25.08.2023.)

Biografija



Rođen sam 02.10.1995. u Novom Sadu. Odrastao sam do 10. godine u Kuli, gde sam upisao Osnovnu školu "Isa Bajić". Od četvrtog razreda pohađao sam Osnovnu školu "Sonja Marinković" u Novom Sadu i završio je kao kandidat za đaka generacije i nosilac diplome "Vuk Karadžić" 2010. godine. Kroz osnovnu školu, posebno u višim razredima, takmičio sam se iz matematike i svih prirodnih nauka.

Iste godine upisao sam gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj" (smer: obdareni učenici u matematičkoj gimnaziji), u Novom Sadu, koju takođe završavam kao nosilac Vukove diplome, 2014. godine. U toku četvrtog razreda bio sam stipendista programa "Energija znanja" sprovođenog pod pokroviteljstvom A.D. Naftna industrija Srbije.

Potom upisujem osnovne akademske studije na Departmanu za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu, smer matematika (M3), modul Teorijska matematika.

Nakon toga, na istom fakultetu, uz konsultacije sa sadašnjim mentorom menjam smer i upisujem master akademske studije, smer Primenjena matematika (MB), modul Tehnomatematika. Položio sam sve ispite predviđene planom i programom rada sa prosečnom ocenom 9.60 i tako stekao pravo na prijavu i odbranu ovog master rada.

Za vreme master studija radio sam kao spoljni saradnik sa talentovanim učenicima u gimnaziji "Jovan Jovanović Zmaj" i predavao predmete Linearna algebra i analitička geometrija i Analiza s algebrom.

Planiram ove godine da upišem Doktorsku školu matematike i da u što kraćem roku počnem da se bavim naučnim radom u oblasti teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina i funkcionalne analize.

Novi Sad, Septembar 2023. — Marko Gogić

Ključna dokumentacijska informacija

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Marko Gogić
AU

Mentor: dr Marko Nedeljkov
MN

Naslov rada: O viskoznim rešenjima eliptičnih jednačina
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski / engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2023
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 4/74/38/0/9/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Parcijalne diferencijale jednačine
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Eliptične PDJ, viskozna rešenja, nelokalne jednačine, nelinearne eliptične PDJ, potpuno nelinearne integro-diferencijalne jednačine, Hilbertov XIX problem
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U radu se bavim generalno konceptom viskoznih rešenja PDJ kao neke alternative klasičnim rešenjima kad funkcija koja zadovoljava jednačinu nije dovoljno glatka, koji je inicijalno dat u [**CIL92**] i u kontekstu eliptičnih jednačina drugog reda u najopštijem slučaju potpuno nelinearnih. Bavim se proširivanjem ovog pojma na nelokalne integro-diferencijalne jednačine kod kojih, nasuprot tradicionalnim parcijalnim difrencijalnim jednačinama kod kojih je, da bi smo znali da li važe u nekoj tački bilo dovoljno proveriti šta se dešava u proizvoljno maloj okolini te tačke, kod nelokalnih jednačina treba proveriti šta se dešava u nekoj udaljenoj tački. Motivacija za proučavanje ovakvih jednačina dolazi iz realnog života, ali prvenstveno iz teorije stohastičkog upravljanja (igara) jer se ove jednačine pojavljuju kao infitezimalni generatori nekih stohastičkih procesa npr. Levijevog procesa. Drugi primer dolazi iz dinamike fluida – Bolcmanova jednačina koje je očigledno nelokalnog karaktera. Bitni predstavnici ovakvih jednačina su svakako Belmanova i Isakova jednačina. Čak i problem minimalne površi koji ulazi u geometrijsku teoriju PDJ ima takav karakter, kao i problem prepreke (Obstacle problem). Pošto je Laplasova PDJ osnovni predstavnik eliptičnih PDJ, njihovih osnovnih osobina i metoda rešavanja, u drugoj glavi je dat pregled nekih osobina harmonijskih funkcija kao njenih rešenja, a to su teorema o usrednjenju, tj. jednakost i nejednakost u srednjem, princip maksimuma i neke njegove posledice kao što su princip poredjenja. Potom je komentarisana regularnost, postojanje i jedinstvenost resenja Laplasove jednačine. U nastavku govori se o probabilističkoj tj. stohastičkoj interpretaciji ovih jednačina i dalje u trećoj glavi prelazimo na konkretnu interpretaciju potpuno nelinearnih jednačina. Potom sam se u trećoj glavi bavio principom poredjenja za potpuno nelinearne jednačine i postojanjem rešenja i na kraju pitanjem regularnosti rešenja ovih jednačina i pregledom osnovih rezultata poznatih u literaturi koji su bili poznati još mnogo pre uvođenja koncepta viskoznih rešenja. Ova problematika se prirodno nastavlja na rešenje jednog od problema koje je postavio Hilbert na drugom međunarodnom matematičkom kongresu 1900. godine u Parizu, a to je - da li su rešenja problema varijacija uvek analitička, kako je on to tada rekao. Odgovor na ovo pitanje dali su De Đorđi i Neš nezavisno tek pedesetih godina 20. veka a to je u suštini pitanje regularnosti nelinearnih eliptičnih jednačina ili, preciznije, pitanje koje nam dolazi iz nelinearne varijacione analize. Najpreciznijim današnjim jezikom to pitanje bi se moglo preformulisati u: da li je svaki lokalni minimizator funkcionele energije gladak? Razmatranjem pitanja regularnosti nelokalnih jednačina za koje nelinearne eliptične jednačine drugog reda predstavljaju samo granični slučaj, kojim se bavim u poslednjoj glavi dajem mnogo širi i opštiji kontekst ovoj temi koja je od posebnog značaja poslednjih godina u naučnoj zajednici PDJ. U ovoj temi ima dosta otvorenih problema, kako sa čisto analitičke tačke gledišta, tako i sa stohastičke u teorijskom smislu, te i sa pronalaženjem novih potpunijih interpretacija ovih jednačina u širokom spektru tema. Monografija [**FR23**] navedena u spisku literature objavljenja je ove godine, a prva prošle godine, što govori u prilog aktuelnosti ove oblasti.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:

DP 26.06.2023.

Datum odbrane: septembar 2023.
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Dora Seleši, redovni profesor, Prirodno-matematichki fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematichki fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Srboljub Simić, redovni profesor, Prirodno-matematichki fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Key word documentation

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Marko Gogić
AU

Mentor: Marko Nedeljkov, Ph.D.
MN

Title: About viscosity solutions of elliptic equations
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English/Serbian (latin)
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2023
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 4/74/38/0/9/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Partial differential equations
SD

Subject/Key words: Elliptic PDE, viscosity solution, nonlocal equation, nonlinear elliptic PDE, fully nonlinear integro-differential equation, Hilbert XIXth problem
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:In my work, I am generally concerned with the concept of viscosity solutions (VS) of PDEs (Partial Differential Equations) as an alternative to classical solutions when the function satisfying the equation is not sufficiently smooth. This concept was initially introduced in **[CIL92]**. I extend this concept to non-local integro-differential equations, which differ from traditional partial differential equations in that, to determine their validity at a point, one must consider what happens at a distant point, as opposed to merely examining a small neighborhood. The motivation for studying such equations comes from real-life applications, primarily in the field of stochastic control (games), where these equations arise as infinitesimal generators of certain stochastic processes, such as Levy processes. Another example comes from fluid dynamics, specifically the Boltzmann equation, which is evidently non-local in nature. Significant representatives of such equations include the Bellman and Isaacs equations. Even problems like the minimal surface problem, which is part of the geometric theory of PDEs, exhibit this non-local character, as does the obstacle problem. Since the Laplace PDE is a fundamental representative of elliptic PDEs, their basic properties and solution methods are covered in the second section. This includes discussions of harmonic functions and their properties, such as the mean value theorem, the maximum principle, and related consequences. Next, I delve into the probabilistic or stochastic interpretation of these equations and proceed in the third section to discuss specific interpretations for fully nonlinear equations. In the third section, I address the comparison principle for fully nonlinear equations, and I explore the existence of solutions, concluding with questions about the regularity of these solutions and an overview of fundamental results known in the literature long before the introduction of the concept of viscosity solutions. This topic naturally leads to addressing one of the problems posed by Hilbert at the Second International Mathematical Congress in Paris in 1900: whether the solutions of variational problems are always analytic, as he phrased it at the time. The answer to this question was provided independently by De Giorgi and Nash in the 1950s, essentially dealing with the regularity of nonlinear elliptic equations or, more precisely, questions stemming from nonlinear variational analysis. In today's most precise language, this question could be reformulated as follows: Is every local minimizer of the energy functional smooth? By considering the regularity of non-local equations, where second-order nonlinear elliptic equations represent only a special case, I provide a much broader and more general context for this topic, which has been of particular importance in the PDE scientific community in recent years. This field presents numerous open problems from both a purely analytical perspective and a stochastic theoretical standpoint, as well as in the search for new, more comprehensive interpretations of these equations across a wide range of topics. The last book mentioned in the literature list was published this year, and the first one last year, emphasizing the current relevance of this area of research.
AB

Accepted by the Scientific Board on:

ASB 26.06.2023.

Defended: September 2023.
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dora Seleši Ph.D, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Marko Nedeljkov Ph.D, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Srboljub Simić Ph.D, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad.