Универзитет у Новом Саду
Природно-математички факултет
Департман за математику и информатику

Маја Самарџић

Чех-Стоунова компактификација природних бројева

Мастер рад

Ментор:
др Бориша Кузељевић

Нови Сад, 2023

Садржај

Предговор

Под појмом компактификација подразумева се проширење тополошког простора који није компактан до компактног простора. Битан услов је да је полазни простор густ у новом простору. Бројни су начини којима се може достићи наведено проширење. Сваки од њих, заправо, представља контролисање тачака простора од „бесконачног бега” додавањем простору на одређен начин тих „тачака из бесконачности” и спречавањем тог „бега”. Само неке од компактификација ћемо поменути, а од највеће важности за нашу причу ће бити Чех-Стоунова компактификација.

Један пример некомпактног простора је реална права са уобичајеном топологијом. Ако бисмо тој правој додали једну „тачку у бесконачности”, коју ћемо означавати са ∞, добили бисмо простор који је компактан. Резултат те компактификације је кружница - која је компактан скуп, као затворен и ограничен подскуп Еуклидове равни. У овој компактификацији, сваки низ који тежи у бесконачно на реалној правој ће конвергирати ка тачки ∞. Да се приближимо интуицији, овај процес може се описати и на следећи начин: најпре ограничимо реалну праву на отворен интервал $(-\pi, \pi)$ на x-оси, а затим савијемо крајеве овог интервала у позитивном смеру y-осе и померамо их један према другом све док не добијемо кружницу са једном тачком која недостаје. Ова тачка ∞ је наша нова „тачка у бесконачности”. Додавањем те тачке добили смо компактну кружницу. Оваква конструкција назива се *компактификација Александрова* или *компактификација реалне праве једном тачком*. За тополошки простор X компактификацију Александрова означавамо са αX.

Компактификације у којима је компактан простор Хауздорфов називамо *компактификације Хауздорфа*. Оне су од великог значаја за следећи низ закључака:

- Сваки компактан простор Хауздорфа је простор Тихонова;
- Сваки потпростор простора Тихонова је, такође, простор Тихонова;
- Сваки простор са компактификацијом Хауздорфа је простор Тихонова.

Важи и обрнуто. Стога, тополошки простор има компактификацију Хаусдорфа **акко** је Тихоновљев. Ако је то случај, онда постоји јединствена, до на хомеоморфизам, „највећа" Хуздорфова компактификација простора X коју називамо *Чех-Стоунова компактификација*. Означавамо је са βX. Простор βX има особину да свака непрекидна функција f која пресликава X на Хауздорфов простор K може бити проширена до непрекидне функције g која пресликава βX на K на јединствен начин, тако да је рестрикција функције g заправо функција f.

У овом раду ћемо се углавном базирати на $\beta\omega$, Чех-Стоунову компактификацију скупа ω са дискретном топологијом. Циљ овог рада је дати увод у простор $\beta\omega$, односно, Стоунов простор Булове алгебре $\mathcal{P}(\omega)$ - алгебре свих подскупова скупа ω.

Постоји неколико аргумената који су подстакли писање овог рада. Пре свега, решено је неколико важних питања која се односе на структуру простора $\beta\omega$, тако да сада имамо јаснију слику тог простора. Даље, резулати који се односе на простор $\beta\omega$ имају широку примену у различитим областима математике. Простор $\beta\omega$ је место које је интересантно за сусрет истраживача из области топологије, теорије скупова, бесконачне комбинаторике, Булових алгебри, и чак понекад теорије бројева и анализе.

Како је главни извор за писање овог рада био [1], углавном ћемо ствари посматрати из перспективе једног тополога. Дакле, језик којим се овде обраћамо је тополошки, међутим, на неколико места било је природније користити језик Булових алгебри уместо језика Стоунових простора, па ћемо бити слободни да га и употребимо. Напомињемо перспективу на самом почетку овог рада да бисмо дали читаоцу идеју о томе шта може да очекује у наставку. Још једна додатна напомена јесте да нам није циљ да будемо сасвим комплетни. Неколико резултата који су од већег значаја оставће без детаљних доказа, или пак, без доказа уопште, јер је област којој приступамо изузетно комплексна. На референце ћемо се, углавном, позивати тамо где дајемо завршне резултате локалног проблема о коме дискутујемо.

Следеће чињенице су нека од важних сазнања до којих се дошло у вези са простором $\beta\omega$:

(1) Конзистентно је да П-тачке не постоје у простору $\beta\omega \setminus \omega$ [3];

(2) Неке, али не све тачке простора $\beta\omega \setminus \omega$ су слабе П-тачке [4];

(3) Свака тачка простора $\beta\omega \setminus \omega$ је $\mathfrak{c}$-тачка [6].

Резултат (1) најинтересантнији је онима који се баве теоријом скупова; (2) фасцинира тополога; а (3) се преплиће и са Буловим алгебрама и са топологијом. С обзиром на нашу перспективу, ми ћемо дискутовати део који се односи на тврђење (2), а (1) и (3) остављамо по страни.

Ако бисмо покушали да дамо сликовит приказ простора којим се бавимо, простора $\beta\omega$, онда би то изгледало овако: простор $\beta\omega$ замислимо као чудовиште с три главе.

Ако радимо у моделу у ком важи Хипотеза континуума (eng. Continuum Hypothesis - **CH**), онда ћемо видети само прву главу тог чудовишта. Та глава је насмејана, срдачна, мила, и настоји да нам да осећај пријатности док радимо са овим моделом. Нема много отворених питања у вези са простором $\beta\omega$ која су остала без одговора, под претпоставком да важи CH. Заправо, углавном се не ради са $\beta\omega$ или $\beta\omega \setminus \omega$, већ са Буловом алгебром која задовољава извесно својство комплетности које карактерише Булову алгебру $\mathcal{P}(\omega)/fin$. То је тема Поглавља 2. У том поглављу се дискутује о просторима $\beta\omega$ и $\beta\omega \setminus \omega$, све време уз претпоставку да важи и Хипотеза континуума. Почињемо са увођењем својства комплетности које карактерише $\mathcal{P}(\omega)/fin$, а затим радимо са Буловим алгебрама које задовољавају то својство комплетности. Пошто смо у моделу у ком признајемо егзистенцију CH, онда ће трансфинитна индукција бити дужине ω_1, и пошто узимамо у обзир Булове алгебре под наведеним условима, можемо увек да наставимо трансфинитну индукцију све до ω_1. Треба приметити да нигде у Поглављу 2 не користимо специјалну структуру простора $\beta\omega$, осим изузетка - својства комплетности простора $\beta\omega \setminus \omega$.

Ако радимо у моделу у ком узимамо у обзир негацију Хипотезе континуума, сусрешћемо се са другом главом чудовишта $\beta\omega$. Та глава ће константно покушавати да нас збуни, и никада нећемо били у могућности да проценимо говори ли истину или лаж. Ту главу простора $\beta\omega$ ћемо разматрати у Поглављу 3. Доћи ћемо до закључка да су сви осим три резултата добијених у Поглављу 2 конзистентно нетачни.

Након читања прва два поглавља, читалац ће имати осећај да је $\beta\omega$ одвратно чудовиште, пошто ће се испоставити да сва тврђења у вези с тим простором почивају на посебном скупу теоријских претпоставки. Шта се, заправо, у произвољном ZFC моделу, може рећи о простору $\beta\omega$?? Одговор на ово питање је: поприлично. Трећа глава нашег чудовишта је његова глава посматрана у произвољном моделу ZFC. У односу на прве две главе, трећа глава делује прилично нејасна, али неки њени делови су изузетно јасни. Ако неко жели да види без нејасноћа овај део, мора да уложи изузетне напоре, да измишља разне комбинаторне аргументе. У том случају, требало би разматрати специјална својства простора $\beta\omega$, а не само глобалне особине. О некима од резултата које нам пружа поглед из произвољног ZFC модела биће речи у Поглављу 4 и Поглављу 5.

Напомена

Овом приликом посебну захвалност изражавам свом ментору др Бориши Кузељевићу на пруженом огромном стрпљењу и бескрајној подршци, уложеном труду и времену, несебично пренетом знању и великој мотивацији за писање овог рада.

Захваљујем се и члановима комисије, др Борису Шоботу и др Милошу Курилићу који су својим саветима, корекцијама и сугестијама допринели да овај рад изгледа што боље.

Хвала и мојим пријатељима и породици који су имали љубави и разумевања током читавих студија и ипак, безусловно веровали у мене.

Рад посвећујем свом брату.

Маја

Поглавље 1

Увод

Да би се разумела суштина овог рада, неопходно је знати елементарне ствари у вези са Буловим алгебрама и Чех-Стоуновом компактификацијом. Изузетно добра и свеобухватна теоријска подлога је [7], а базичне ствари биће наведене и у овом раду.

1.1 Булове алгебре

Посебан значај међу уређеним скуповима имају они чији сви коначни подскупови, или још више, сви подскупови, имају инфимум и супремум.

Мрежа је уређени скуп $(L, \leq)$ у коме за свака два елемента a и b постоји $\inf\{a, b\}$ и $\sup\{a, b\}$.

Тврђење 1.1.1. *Ако је $(L, \leq)$ мрежа, онда $\inf M$ и $\sup M$ постоје за сваки непразни коначни подскуп M скупа L.*

Ако за сваки подскуп мреже - укључујући и празан скуп и сам скуп L, постоји инфимум и супремум, тада говоримо о **потпуној (комплетној) мрежи**. Узимајући у обзир особине бинарних операција, дефинише се мрежа као алгебарска структура.

Дефиниција 1.1.2. Нека је L непразни скуп, а $\wedge$ и $\vee$ бинарне операције на њему. Тада је уређена тројка $(L, \wedge, \vee)$ **мрежа** (односно мрежа као алгебарска структура, алгебра), ако важе:
a) закони комутативности;
b) закони асоцијативности;
c) закони апсорпције.

Сваки уређен скуп $(L, \leq)$ који је мрежа, истовремено је и мрежа као алгебарска структура $(L, \wedge, \vee)$. Бинарне операције $\wedge$ и $\vee$ су у мрежи $(L, \leq)$ редом инфимум и супремум, а закони наведени у дефиницији изнад су њихове особине.

Лема 1.1.3. *Ако је* $(L, \wedge, \vee)$ *мрежа, онда је бинарна релација* $\leq$, *дефинисана са*

$$x \leq y \text{ ако и само ако је } x \wedge y = x \qquad (1)$$

релација поретка на L.

Лема 1.1.4. *У мрежи* $(L, \wedge, \vee)$ *је* $x \leq y$, *ако и само ако је* $x \vee y = y$.

Лема 1.1.5. *У односу на поредак дефинисан са (1), сваки двочлани подскуп* $\{x, y\}$ *мреже* $(L, \wedge, \vee)$ *има инфимум и супремум, при чему је:*

$$\inf\{x, y\} = x \wedge y, \quad \sup\{x, y\} = y \vee x.$$

Дефиниција 1.1.6. Мрежа $(L, \wedge, \vee)$ је **дистрибутивна** ако важи било који од идентитета:

$$\begin{array}{ll} (\forall x, y, z \in L) & x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ (\forall x, y, z \in L) & x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \end{array}$$

Дефиниција 1.1.7. Булова алгебра[1] је алгебарска структура, односно, уређена шесторка $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$, при чему је B непразан скуп, $\wedge$ и $\vee$ су бинарне, $\neg$ је унарна операција, а 0 и 1 су константе, тако да важе следећи идентитети:

$$\left.\begin{array}{l} b1 : x \wedge y = y \wedge x \\ b2 : x \vee y = y \vee x \end{array}\right. \text{(комутативни закони)}$$

$$\left.\begin{array}{l} b3 : x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ b4 : x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{array}\right. \text{(дистрибутивни закони)}$$

$$\left.\begin{array}{l} b5 : x \wedge 1 = x \\ b6 : x \vee 0 = x \end{array}\right. \text{(особине нуле и јединице)}$$

$$\left.\begin{array}{l} b7 : x \wedge x' = 0 \\ b8 : x \vee x' = 1 \end{array}\right. \text{(особине комплемента)}$$

$$b9 : 0 \neq 1.$$

Аксиоме изнад дате су у дуалним паровима, осим последње аксиоме, која је самодуална.[2] При томе је дуално тврђење оно које се из датог тврђења добија заменом свих појављивања једне бинарне операције другом и обратно, и једне константе другом и обратно. Очигледно је да у класи Булових алгебри важи следеће правило:

Принцип дуалности за Булове алгебре - *Ако се неко тврђење може извести из аксиома б1 - б9, онда се и одговарајуће дуално тврђење може извести из тих аксиома.*

[1] George Boole, енглески математичар (1815-1864)

[2] Та аксиома обезбеђује да елементи који одговарају константама 0 и 1 буду различити. Ако би алгебра задовољавала све аксиоме б1 - б8 и $\neg b9 : 0 = 1$, онда се лако показује да би та алгебра имала тачно један елеменат.

Пример 1.1.8 (Алгебра отворено-затворених скупова). Нека је (X, τ_X) тополошки простор и нека је $Clopen(X)$ фамилија свих отворено-затворених скупова у X. Тада је структура $(Clopen(X), \cap, \cup, ', \emptyset, X)$ Булова алгебра.

Дефиниција 1.1.9. Нека је X произвољан скуп. Скуп $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ је **алгебра скупова** ако важи:
(1) $0 \in A \wedge X \in A$;
(2) $a \in A \Rightarrow X \setminus a \in A$;
(3) $(a \in A \wedge b \in A) \Rightarrow (a \cap b \in A \ \wedge \ a \cup b \in A)$.

Тврђење 1.1.10. *Свака алгебра скупова је и Булова алгебра.*

Тврђење 1.1.11. *У свакој Буловој алгебри важе следећи идентитети:*
$a) : x \wedge 0 = 0$
$b) : x \vee 1 = 1$
$c) : x \wedge (x \vee y) = x$
$d) : x \vee (x \wedge y) = x$ *(закони апсорпције)*
$e) : x \wedge x = x$
$f) : x \vee x = x$ *(закони идемпотентности)*
$g) : x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
$h) : x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z.$ *(закони асоцијативности)*

Булова алгебра $\mathcal{B}$ је **потпуна** (комплетна), ако је потпуна као мрежа, односно, ако сваки непразан подскуп скупа $\mathcal{B}$ има супремум и инфимум.

Пример 1.1.12. Као основни пример Булове алгебре узима се Булова алгебра партитивног скупа $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup, ', \emptyset, A)$ произвољног непразног скупа A, у односу на скуповне операције пресек и унију, уређен иклузијом. Комплемент сваког елемента партитивног скупа је његов скуповни комплемент. Ова Булова алгебра је потпуна.

Пример 1.1.13. Још један пример Булове алгебре је алгебра коју образују сви коначни и коконачни (чији је комплемент коначан) подскупови скупа $\mathbb{N}$ природних бројева, у односу на скуповне операције пресек, унију, комплемент и уобичајене константе $\emptyset$ и $\mathbb{N}$. Ова алгебра је пребројива и није потпуна. Пребројивост ове алгебре је скуповно својство саме колекције.

Пример 1.1.14 (Алгебра регуларно-отворених скупова). Нека је (X, τ_X) тополошки простор. Кажемо да је отворен скуп U, подскуп скупа X, **регуларно-отворен** ако важи $\mathbf{U} = \mathrm{int_X}\, \mathrm{cl_X}\, \mathbf{U}$. Корисно је напоменути да је скуп $\mathrm{int_X}\, \mathrm{cl_X}\, U$ регуларно-отворен за сваки отворен скуп X.

Са $\mathbf{RO(X)}$ ћемо означити фамилију свих регуларно-отворених скупова у (X, τ_X). Дакле,

$$RO(X) = \{U \subseteq X : U \text{ je регуларно-отворен}\}.$$

Тада је структура $RO(X)$ комплетна Булова алгебра, под следећим операцијама:

$U \wedge V = U \cap V$
$U \vee V = \mathrm{int_X}\, \mathrm{cl_X}\, (U \cup V)$
$U' = \mathrm{int_X}(X \setminus U)$.

Булова алгебра се може дефинисати и као дистрибутивна мрежа $(B, \wedge, \vee)$ у којој постоје елементи 0 и 1, тако да за сваки елемент $x \in B$ постоји елемент $y \in B$ тако да важи $x \wedge y = 0$ и $x \vee y = 1$. Елементи 0 и 1 су јединствени, а одатле следи и јединственост елемента y за дато x. Једнакошћу $x \wedge y = x$ уводи се релација поретка $(x \leq y)$ на Буловим алгебрама.

Дефиниција 1.1.15. Булова подалгебра $\mathcal{B}_1$ Булове алгебре $\mathcal{B}$ је Булова алгебра дефинисана на непразном подскупу B_1 скупа B (носача алгебре $\mathcal{B}$), а операције су рестрикције на B_1 одговарајућих операција из B. То значи да је носач Булове подалгебре непразни подскуп дате Булове алгебре затворен за операције, укључујући и нуларне тј. константе 0 и 1: оне морају бити исте за обе алгебре.

Дакле, да би непразни подскуп Булове алгебре представљао њену подалгебру, он по дефиницији мора бити затворен у односу на све три операције и садржати обе константе. Затвореност се може обезбедити и са мање услова, као што следи у наставку.

Тврђење 1.1.16. *Непразан подскуп Булове алгебре је њена подалгебра, ако је затворен у односу на унарну и било коју од две бинарне операције.*

Пресек произвољног непразног скупа подалгебри дате Булове алгребе је, такође, подалгебра. Закључујемо да је и пресек свих подалгебри Булове алгебре $\mathcal{B}$ које садрже њен подскуп C, затворен за операције из $\mathcal{B}$. Стога је то подалгебра дате Булове алгебре и кажемо да је она **генерисана** скупом C. То је најмања подалгебра која садржи C. Елементи скупа C су генератори добијене подалгебре.

Потпуност Булове алгебре и потпуност њене подалгебре нису ни у каквој вези, односно, свака од њих може бити потпуна, а да она друга не буде. А и ако су обе потпуне, бесконачни инфимуми и супремуми не морају се поклапати. Из тог разлога, **потпуна подалгебра** потпуне Булове алгебре $\mathcal{B}$ дефинише као њена Булова подалгебра $\mathcal{C}$, таква да инфимум (у $\mathcal{B}$) произвољног подскупа из $\mathcal{C}$ припада $\mathcal{C}$.

Пример 1.1.17. Булова алгебра коначних и коконачних подскупова пребројивог скупа није потпуна, а подалгебра је потпуне Булове алгебре одговарајућег партитивног скупа.

Дефиниција 1.1.18. Функција f из Булове алгебре $\mathcal{B}$ у Булову алгебру $\mathcal{C}$ је **хомоморфизам** ако је сагласна са свим операцијама:

$$\begin{gathered} f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \\ f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \\ f(\neg x) = \neg(f(x)) \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1. \end{gathered}$$

Подразумевамо да су операције у обе алгебре означене истим симболима.

Хомоморфизам из Булове алгебре $\mathcal{B}$ у Булову алгебру $\mathcal{C}$ који је бијекција је **изоморфизам**.

Хомоморфизам из Булове алгебре $\mathcal{B}$ у Булову алгебру $\mathcal{C}$ који је инјекција је **утапање**.

Ослањајући се на Де Моргaнове законе, лако долазимо до следећег тврђења.

Тврђење 1.1.19. *Бијекција f из Булове алгебре $\mathcal{B}$ у Булову алгебру $\mathcal{C}$ је изоморфизам ако и само ако за све x, y из $\mathcal{B}$ важи:*

$$f(\neg x) = \neg(f(x)) \text{ и } f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

Важи и дуално тврђење - за изоморфизам Булових алгебри довољно је постојање бијекције сагласне са операцијама $\neg$ и $\vee$.

Још један битан закључак је да су коначне Булове алгебре изоморфне са Буловим алгебрама партитивних скупова, а то важи и за неке бесконачне Булове алгебре. Поред тога, битну улогу игра и следеће тврђење у вези са изоморфизмима.

Тврђење 1.1.20. (Стоунова теорема репрезентације за Булове алгебре) *Свака Булова алгебра изоморфна је са подалгебром Булове алгебре партитивног скупа.*

У делу који следи уводимо идеју о ултрафилтерима, која омогућава разне конструкције у математичкој логици, математичкој анализи и топологији. У овој секцији долази на примену лема Зорна - која је један од еквивалената аксиоме избора, о којој ћемо накнадно говорити.

Дефиниција 1.1.21. Пар $\langle A, \leq_A \rangle$ је **парцијално уређен скуп** или **парцијално уређење** ако је $\leq_A$ релација поретка на скупу A. Пар $\langle A, <_A \rangle$ је **строго парцијално уређење** ако је $<_A$ релација строгог поретка на A.

Дефиниција 1.1.22. Парцијално уређење $\langle A, \leq_A \rangle$ је **линеарно** ако су свака два елемента упоредива, тј. ако за произвољне $a, b \in A$ важи или $a \leq_A b$, или $b \leq_A a$.

Дефиниција 1.1.23. Нека је $\langle A, \leq_A \rangle$ парцијално уређење. За скуп $X \subseteq A$ кажемо да је **ланац** ако је уређење $\langle X, \leq_A \rangle$ линеарно.

Лема 1.1.24 (Лема Зорна[3]). *Ако је $\langle P, \leq_P \rangle$ парцијално уређен скуп у коме сваки ланац има горње ограничење, онда у P постоји максимални елемент.*

Лема Зорна гарантује постојање неглавног ултрафилтера на произвољном бесконачном скупу. Почињемо основним дефиницијама.

Дефиниција 1.1.25. Нека је $\mathcal{B}$ Булова алгебра. Тада непразан скуп $I \subseteq \mathcal{B}$ називамо **идеал** ако за свако $a, b \in B$ важи следеће:

(1) $0 \in I$;
(2)Ако $a, b \in I$, онда и $a \vee b \in I$;
(3)Ако $a \in I$ и $b \leq a$, онда и $b \in I$.

Идеал I Булове алгебре $\mathcal{B}$ називамо **прави идеал** акко $1 \notin I$.

Дефиниција 1.1.26. Нека је I прави идеал Булове алгебре $\mathcal{B}$. Дефинишемо скупове:

- $a \sim_I b \Leftrightarrow (a \wedge b') \vee (b \wedge a') \in I$, за $a, b \in \mathcal{B}$
  Овако дата релација $a \sim_I b$ је релација еквиваленције.

- Са $a/I = \{b \in \mathcal{B} : (a \wedge b') \vee (b \wedge a') \in I\}$, за $a \in \mathcal{B}$, означавамо класу еквиваленције елемента a. Некада ћемо уместо a/I писати $[a]_I$.

- $\mathcal{B}/I = \{a/I : a \in \mathcal{B}\}$.

Дефиниција 1.1.27. Нека је $\mathcal{B}$ Булова алгебра. Тада непразан скуп $D \subseteq \mathcal{B}$ називамо **филтер** ако за свако $a, b \in B$ важи следеће:

(1) $0 \notin D$ и $1 \in D$;
(2)Ако $a, b \in D$, онда и $a \wedge b \in D$;
(3)Ако $a \in D$ и $a \leq b$, онда и $b \in D$.

Филтер F Булове алгебре $\mathcal{B}$ називамо **прави филтер** акко $0 \notin F$.

Скуп $I \subseteq \mathcal{B}$ је **идеал** акко је скуп $I^* = \{a' \mid a \in I\}$ филтер. Скуп I^* називамо и **дуалним филтером** идеала I. Слично, за произвољан филтер D ћемо са D^* означавати његов **дуални идеал**.

[3] Max Zorn (1906-1993), амерички математичар немачког порекла

Пример 1.1.28. Нека је $\mathcal{B}$ произвољна Булова алгебра, и нека је $a > \mathbf{0}$. Тада је скуп

$$D_a = \{b \in \mathcal{B} \mid a \leq b\}$$

филтер Булове алгебре $\mathcal{B}$. D_a зовемо још и **главним филтером** генерисаним елементом a. Филтер који није главни је **неглавни** филтер.

Дефиниција 1.1.29. Нека је $\mathcal{B}$ Булова алгебра, и нека је $X \subseteq \mathcal{B}$ непразан. Кажемо да скуп X има **својство коначног пресека - с.к.п** ако инфимум сваког непразног коначног подскупа A скупа X није једнак $\mathbf{0}$.

Термин *коначан пресек* долази отуда што је

$$\inf_{\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle} \{A_1, ..., A_n\} = A_1 \cap ... \cap A_n.$$

Изразе облика $a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n$ називамо *коначним пресецима.* Сваки филтер има својство коначног пресека. А с друге стране, свака фамилија са с.к.п може да се допуни до филтера.

За филтер $\mathcal{U}$ Булове алгебре $\mathcal{B}$ кажемо да је *ултрафилтер* ако је максималан у смислу инклузије, односно, ако не постоји неки други филтер Булове алгебре $\mathcal{B}$ који је прави надскуп скупа $\mathcal{U}$.

Дефиниција 1.1.30. Филтер $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ је **максимални филтер** или **ултрафилтер** ако и само ако за сваки филтер $\Phi \subset \mathcal{B}$ из $\mathcal{U} \subset \Phi$ следи $\mathcal{U} = \Phi$.

Тврђење 1.1.31. *Нека је D филтер Булове алгебре $\mathcal{B}$. Следећи искази су еквивалентни:*

1. *D је ултрафилтер;*
2. *$(\forall a \in \mathcal{B})(a \in D \vee a' \in D)$;*
3. *$(\forall a, b \in \mathcal{B})(a \vee b \in D \Rightarrow a \in D \vee b \in D)$.*

Тврђење 1.1.32 (Теорема о ултрафилтеру). *Сваки филтер Булове алгебре $\mathcal{B}$ може се проширити до ултрафилтера.*

Тврђење 1.1.33. *Нека је $\mathcal{B}$ произвољна Булова алгебра и нека скуп $A \subseteq \mathcal{B}$ има својство коначног пресека. Тада постоји ултрафилтер D Булове алгебре $\mathcal{B}$, такав да је $A \subseteq D$.*

Дефиниција 1.1.34. Нека је $\mathcal{B}$ произвољна Булова алгебра.

- Са $st(\mathcal{B})$ ћемо означавати фамилију свих ултрафилтера Булове алгебре $\mathcal{B}$.

- Нека је $a \in \mathcal{B}$ произвољно. Са a^* ћемо означавати фамилију свих ултрафилтера Булове алгебре $\mathcal{B}$ који садрже a.

Непосредно се проверава да важи:

- $(a \wedge b)^* = a^* \cap b^*$;
- $(a \vee b)^* = a^* \cup b^*$;
- $(a')^* = st(\mathcal{B}) \setminus a^*$;
- $\mathbf{0}^* = \emptyset$;
- $\mathbf{1}^* = st(\mathcal{B})$;

Тврђење 1.1.35 (Стоунова дуалност). *Нека је $\mathcal{B}$ произвољна Булова алгебра. Тада:*

1. *Фамилија $S_B = \{a^* \mid a \in B\}$ генерише топологију на скупу $st(\mathcal{B})$ у којој је $st(\mathcal{B})$ тотално неповезан компактан Хауздорфов тополошки простор.*
2. $(\mathcal{B}, \wedge, \vee, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1}) \cong (S_B, \cup, \cap, ', \mathbf{0}^*, \mathbf{1}^*)$.
   Другим речима, свака Булова алгебра изоморфна је некој алгебри скупова.
3. *$\mathcal{B}_1$ је Булова подалгебра алгебре $\mathcal{B}$ акко је $st(\mathcal{B}_1)$ непрекидна слика простора $st(\mathcal{B})$.*

1.2 Ординали и кардинали

У теорији скупова скупови су дати аксиоматски, тј. њихово постојање и основна својства дати су одговарајућим формалним аксиомама. **Зермело - Френкел теорија скупова са аксиомом избора** (eng. Zermelo - Fraenkel set theory with the axiom of choice included - **ZFC**) је стандардни облик аксиоматске теорије скупова, и као такав се најчешће узима за основу математике. Аксиоме ZFC подељене су у више група, а од значаја су **аксиоме постојања**, на основу којих се доказује да постоје разни коначни скупови. Међу њима су посебно интересантни:

$$(*) \qquad \emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ \ldots$$

Дефиниција 1.2.1. Нека је x посматрани скуп. Скуп $x^+ = x \cup \{x\}$ називамо **следбеник** скупа x.

На тај начин можемо даље дефинисати и следбеника скупа x^+: $(x^+)^+ = x^{++}$. Ова конструкција може се наставити у бесконачност, а то нам осигурава аксиома бесконачности, још једна од аксиома из ZFC система.

Аксиома 1.2.2. (Аксиома бесконачности) Постоји скуп x који задовољава следеће услове:
(1) $\emptyset \in x$
(2) $(\forall a \in x)(a \in x \Rightarrow a \cup \{a\} = a^+ \in x)$.

Од важности ће нам бити и следећа аксиома.

Аксиома 1.2.3. (Аксиома замене) Ако је x скуп и $S(u, v)$ формула са слободним промењљивим u, v такав да за сваки u из x класа $\{v|S(u, v)\}$ јесте скуп, тада:

$$(\exists y)\ (\exists f : x \to y)\ (\forall u \in x)\ f(u) = \{v|S(u, v)\}.$$

Дефиниција 1.2.4. Скуп x називамо **индуктивним** ако:
(1) $\emptyset \in x$
(2) $(\forall a \in x)(a \in x \Rightarrow a \cup \{a\} = a^+ \in x)$.

Аксиома бесконачности нам, заправо, говори да постоји индуктиван скуп.

Постоје подскупови горе дефинисаног скупа x, који задовољавају услове (1) и (2) аксиоме бесконачности (тј. индуктивног скупа). Пресек свих таквих подскупова, такође, задовољава исте услове. Означићемо тај пресек са ω.

Тврђење 1.2.5. *Нека је L нейразна класа која садржи индуктивне скупове. Тада је $\bigcap L = \omega$ такође индуктивни скуп.*

Дакле, својство *бити индуктиван* затворено је за пресек. Може се показати да су елементи од ω управо скупови наведени у $(*)$, и да је ω **јединствен** такав скуп.

Последица 1.2.6. *Постоји најмањи индуктивни скуп ω (у смислу инклузије).*

Потребно је дефинисати појам добро уређеног скупа који ће бити круцијалан за увођење појма ординала.

За парцијално уређен скуп $\langle A, \leq_A \rangle$ кажемо да је **добро уређен** ако сваки непразан подскуп скупа A има минимум. Пример добро уређеног скупа је ω.

Тврђење 1.2.7. *Релација $\in$ скуповне припадности на сваком $x \in \omega$ генерише строго добро уређење.*

Тврђење 1.2.8. *$\langle \omega, \in \rangle$ је строго добро уређење.*

Ослањајући се на аксиому избора, долазимо до тврдње да се сваки скуп може добро уредити.

Аксиома 1.2.9 (Аксиома избора (eng. Axiom of choice-AC)). За сваку фамилију $\{X_i : i \in I\}$ непразних подскупова постоји бар једна функција избора, то јест функција $x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$, таква да за свако $i \in I$ важи $x(i) \in X_i$.

Постоји више еквиваленатa аксиоме избора. Ми овде, поред леме Зорна, наводимо још један најпознатији.

Лема 1.2.10 (Хауздорфов[4] принцип максималности). *У сваком непразном парцијално уређеном скупу постоји максималан ланац.*

Како бисмо комплетно припремили терен за увођење ординала, морамо прво рећи нешто о индукцији и рекурзији. Принцип индукције, као средство за доказивање тврђења, и Принцип рекурзије, као метода за конструкцију математичких објеката, играју битне улоге у математичком свету. Даћемо кратак приказ ова два принципа у специјалном случају, када су у питању индукција и рекурзија на скупу природних бројева. Ове особине збрајамо у важна својства скупа ω, као последицу чињенице да је то најмањи индуктивни скуп.

Теорема 1.2.11 (Индукција). *Нека је $\langle A, \leq_A \rangle$ добро уређење. Нека је X подскуп скупа A, такав да за свако $a \in A$ из $(\cdot, a)$[5] $\subseteq X$ следи да $a \in X$. Тада је $X = A$.*

Доказ: Претпоставимо супротно, нека је $A \setminus X$ непразан. Тада постоји

$$a = \min_{\leq_A}(A \setminus X).$$

Непосредно одавде следи да је $(\cdot, a) \subseteq X$, па по условима теореме закључујемо да $a \in X$, што је у супротности са избором скупа A. Дакле, $X = A$. $\square$

Теорема 1.2.12 (Рекурзија). *Нека је $\langle A, \leq_A \rangle$ добро уређење, и нека је f произвољна функција са доменом $\mathcal{P}(A \times A)$. Тада постоји јединствена функција g са доменом A, таква да за свако a из A важи*

$$g(a) = f(g \restriction (\cdot, a)). \tag{1}$$

Доказ:
Јединственост:
Нека функције g_1 и g_2 задовољавају (1). Индукцијом показујемо да је $g_1 = g_2$. Нека је $a \in A$ тако да је $g_1 \restriction (\cdot, a) = g_2 \restriction (\cdot, a)$. Тада је

$$g_1(a) = f(g_1 \restriction (\cdot, a)) = f(g_2 \restriction (\cdot, a)) = g_2(a),$$

[4] Felix Hausdorff (1868-1942), немачки математичар

[5] $(\cdot, a) = \{x | x \in A \wedge x <_A a\}$

одакле на основу теореме индукције следи да је $g_1 = g_2$.

Егзистенција:

Нека је X скуп свих $a \in A$ за које постоји јединствена функција g_a са доменом $(\cdot, a)$, таква да за свако $x <_A a$ важи

$$g_a(x) = f(g_a \restriction (\cdot, a)).$$

Одавде произилази да за произвољне $a, b \in X$, из $b <_A a$ следи да је

$$g_b = g_a \restriction (\cdot, b).$$

Чак и више од тога, ако постоји $M_a = \max\limits_{\leq_A}(\cdot, a)$, онда је

$$g_a = (\bigcup\{g_b \mid b <_A a\}) \,\cup\, \{\langle M_a, g_a(M_a)\rangle\},$$

а у супротном је $g_a = (\bigcup\{g_b \mid b <_A a\})$. Приметимо да смо овим заправо показали да из $(\cdot, a) \subseteq X$ следи да $a \in X$, одакле по претходној теореми следи да је $X = A$. Сада тражену функцију g можемо дефинисати на следећи начин:

- Ако је $A = (\cdot, a]$, онда је

$$g \stackrel{\text{def}}{=} (\bigcup\{g_b \mid b \in A\}) \,\cup\, \{\langle a, f(g_a)\rangle\};$$

- Ако A нема максимум, онда је

$$g \stackrel{\text{def}}{=} (\bigcup\{g_a \mid a \in A\}).$$

□

Дефиниција 1.2.13. Кажемо да је скуп A **коначан** ако постоје $n \in \omega$ и бијекција $f : A \to n$. У супротном кажемо да је скуп A **бесконачан**.

Дефиниција 1.2.14. За скуп A кажемо да је **транзитиван** ако је сваки елемент елемента скупа A и сам елемент скупа A, тј.

$$x \in a \;\wedge a \in A \Rightarrow x \in A.$$

Претходна дефиниција може се еквивалентно изрећи и на следећи начин.

Дефиниција 1.2.15. Скуп A је **транзитиван** ако је сваки елемент скупа A уједно и подскуп скупа A, тј.

$$(\forall a)(a \in A \Rightarrow a \subseteq A).$$

Пример 1.2.16. Као пример транзитивних скупова може се узети баш $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, док $\{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}$ нису транзитивни скупови.

Тврђење 1.2.17. *Сваки елеменӣ скуӣа ω је ӣранзиӣиван скуӣ.*

Тврђење 1.2.18. *Скуӣ ω је ӣранзиӣиван скуӣ.*

Тврђење 1.2.19. *Важи следеће: $\bigcup \omega = \omega$.*

Доказ: Из транзитивности скупа ω следи да је $\bigcup \omega \subseteq \omega$.

Што се тиче обратне инклузије, ако $x \in \omega$, онда због индуктивности скупа ω мора бити и

$$x \cup \{x\} \in \omega.$$

Сада је $x \cup \{x\} \subseteq \bigcup \omega$ и $x \in x \cup \{x\}$, одакле следи да $x \in \bigcup \omega$. □

Скуп ω је један модел Пеанових аксиома. На следећи начин смо скуп природних бројева дефинисали као скупове помало необично, преко скупа ω. Број 1 је представљен као елемент броја 2, односно,као његов подскуп, као и сваког другог већег природног броја итд.:

$0 \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$

$1 = 0^+ \stackrel{\text{def}}{=} 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}$

$2 = 1^+ \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$

$3 = 2^+ \stackrel{\text{def}}{=} 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$

$$\ldots$$

Дакле, скуп природних бројева је, заправо, $\mathbb{N} = \omega$.

Стога, аксиома бесконачности обезбеђује постојање скупа природних бројева у оквиру теорије ZFC.

Ординални бројеви (кратко **ординали**) представљају уопштење редних бројева *ӣрви, друӣи, ӣрећи, ...* и у вези су са продужењем чина бројања и надаље, преко низа природних бројева. До идеје таквог уопштења први је дошао Кантор који је ординалне бројеве приближно описао као *„резулӣаӣ айсӣраховања свих друӣих својсӣава добро уређеноӣ скуӣа осим ӣореӣка њеӣових елеменаӣа”.*

Ординални бројеви се могу дефинисати као класе свих добро уређених скупова за релацију уређајног изоморфизма[6]. Други начин, који потиче од фон Нојмана и који ћемо, углавном, узимати за основ, јесте да се ординални бројеви уведу као посебни добро уређени скупови, који се на

[6]Уређени скупови $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ су **уређајно изоморфни** уколико постоји бијекција (обострано једнозначно пресликавање) $f : A \to \mathrm{B}$ тако да важи

$$x \leq_A y \Leftrightarrow f(x) \leq_B f(y) \qquad (x, y \in A).$$

одређени начин образују полазећи од празног скупа. Ослањајући се на тај начин, уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 1.2.20. Скуп α је **ординал** акко је α транзитиван скуп и ако је добро уређен релацијом $\in$.

Пример 1.2.21. Празан скуп ($\mathbf{0}$) је пример ординала. Такође, за ма који ординал α, његов следбеник $\alpha + 1$ је ординал.

Ординални број је, поред природних бројева, и скуп ω који долази после свих природних бројева 1, 2, 3, ... Затим следе $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, ..., где је уопште $\alpha^+ = \alpha + 1 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \cup \{\alpha\}$. С обзиром да релација припадања по дефиницији на сваком ординалу индукује строго добро уређење, за сваки ординал α важи

$$\alpha \notin \alpha.$$

Користећи **аксиому замене** непосредно се закључује да сви ординални бројеви $\omega + n$, за $n < \omega$

$$\omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2,\ ...$$

чине скуп. Унија тог скупа са скупом ω је наредни ординални број који се обично означава са $\omega \cdot 2$ или $\omega + \omega$. Потом следе $\omega \cdot 2 + 1$, $\omega \cdot 2 + 2$, $\omega \cdot 2 + 3$, ..., а после њих долази $\omega \cdot 3$. На тај начин долазимо до низа ординалних бројева:

$$\omega,\ \omega \cdot 2,\ \omega \cdot 3, ...$$

Поново, применом аксиоме замене закључујемо да после свих њих долази нов ординални број, тзв. ω^2. После се бројање слично продужава: ω^2, $\omega^2 + 1$, $\omega^2 + 2$, ..., $\omega^2 + \omega$, $\omega^2 + \omega + 1$, ..., $\omega^2 + \omega \cdot 2$, $\omega^2 + \omega \cdot 2 + 1$, ..., $\omega^2 + \omega \cdot 3$, $\omega^2 + \omega \cdot 4$, ..., $\omega^2 \cdot 2$, $\omega^2 \cdot 3$, ..., ω^3, ..., ω^4, ..., ω^ω, ..., $\omega^{(\omega^\omega)}$, ... итд.

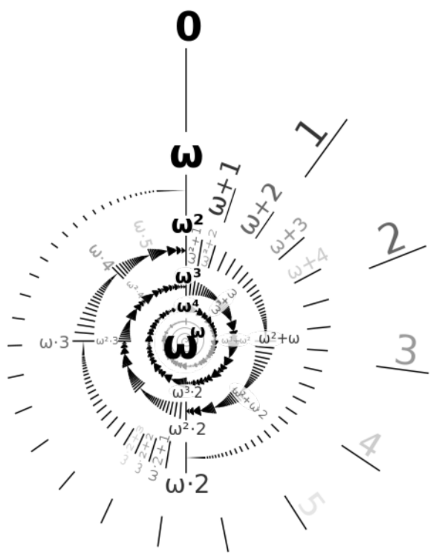
Сваки добро уређен скуп x уређајно је изоморфан тачно једном ординалном броју α (у фон Нојмановом смислу); α је тзв. **ординални број** скупа x. Ординали заправо представљају *канонску репрезентацију* добро уређених скупова.

Лема 1.2.22. *Нека је α произвољни ординал. Сви елементи ординала α су такође ординали.*

Лема 1.2.23. *Нека су α и β ординали такви да је $\alpha \subseteq \beta$. Тада је или $\alpha = \beta$ или $\alpha \in \beta$.*

Лема 1.2.24. *Нека су α и β произвољни ординали. Тада је или $\alpha \subseteq \beta$, или је $\beta \subseteq \alpha$.*

Лема 1.2.25. *Нека је A произвољан скуп чији су сви елементи ординали. Тада је и скуп $\bigcup A$ ординал.*



Слика 1.1: Спирала ординала. Види [14]

Претходна разматрања сумирајмо следећом теоремом.

Теорема 1.2.26. *Нека је на класи Ord свих ординала дефинисана бинарна релација* $\leq$ *са*

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$$

и нека је $\alpha < \beta$ *ако* $\alpha \in \beta$, *тј. ако* $\alpha \leq \beta$ *и* $\alpha \neq \beta$. *Тада важи:*

- $\leq$ *је добро уређење класе Ord;*
- *Ако је* x *произвољан скуп чији су сви елементи ординали, онда је ординал* $\bigcup x$ $\leq$*-супремум скупа* x *у класи Ord;*
- *За сваки ординал* α *је или* $\alpha = \bigcup \alpha$, *или* $\alpha = \bigcup \alpha + 1$;
- *За сваки ординал* α *је* $\alpha < \alpha + 1$ *и између* α *и* $\alpha + 1$ *нема других ординала;*
- *За сваки скуп* x *постоји ординал* α *такав да* $\alpha \notin x$.

Ординал α ћемо звати **граничним** ординалом ако је $\alpha = \bigcup \alpha$. У супротном је $\alpha = \bigcup \alpha + 1$, па у том случају ординал α зовемо и **следбеником**. На пример, 0 и ω су гранични ординали, а $\omega + 1$ је следбеник ординал.

Теорема 1.2.27 (Трансфинитна индукција на класи свих ординала Ord). *Ако је* $\alpha \subset Ord$ *и* $\alpha \neq 0$, *онда* α *има најмањи елемент.*

Са ординалним бројевима се трансфинитном рекурзијом дефинишу и операције *сабирање, множење, степеновање*...

За избројавање елемената коначних скупова користе се природни бројеви 1, 2, 3, ..., и упоређивање скупова према броју елемената је елементаран и очигледан поступак. Када је бесконачност у питању, интуиција се губи. У вези са избројавањем елемената бесконачних скупова уводе се тзв. **кардинални бројеви** или **кардинали**. Кардинали су иницијални (фон Нојманови) ординали.

Дефиниција 1.2.28. Скуп A је **еквипотентан (равномоћан)** скупу B, у ознаци $A \sim B$, ако и само ако постоји бијекција $f : A \to B$.

Слично као ординални бројеви, и кардинални бројеви могу се увести на више начина. Рецимо, једна могућност је да он буде класа свих еквипотентних скупова. Друга је да се за кардинални број узме најмањи од свих међусобно еквипотентних ординалних бројева у фон Нојмановом смислу. На пример, сви ординали

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2, ...,$$

су међусобно равномоћни. Најмањи међу њима је ω, па је он одговарајући кардинални број (кардинални број скупа ω се обично означава са $\aleph_0$).

Аксиома избора обезбеђује да се сваки скуп може добро уредити. Посебно, кажемо да је скуп x **добро уређен ординалом** α ако постоји бијекција $f : \alpha \to x$.

Дефиниција 1.2.29. Нека је x произвољан скуп. **Кардинални број** скупа x, у ознаци $|x|$, је најмањи ординал којим се скуп x може добро уредити. Специјално, ординал α је **кардинал** ако је $\alpha = |\alpha|$.

Пример 1.2.30. Сви елементи скупа ω су кардинали. Приметимо да је ω такође кардинал, али $\omega + 1$ није, јер $|\omega + 1| = \omega$. Једна од могућих бијекција дефинисана између ова два ординала је дефинисана са:

- $f(\omega) = 0$;
- $f(n) = n + 1,\ n \in \omega$.

Сличном аргументацијом се показује да за било који бесконачан ординал α важи $|\alpha + 1| = |\alpha|$.

Како се сваки скуп може добро уредити, и како је сваки добро уређен скуп уређајно изоморфан неком ординалу, онда сваки скуп има кардинални број (у фон Нојмановом смислу).

Теорема 1.2.31 (Кантор). *За сваки скуп* x *је* $|x| < |\mathcal{P}(x)|$.

Кардинал је **коначан** уколико је $\alpha < \omega$, а у супротном је **бесконачан**.
Бесконачне кардинале ћемо бележити малим грчким словима, а класу свих кардинала ћемо означавати са *Card*. Канторова теорема, заједно са добром уређеношћу ордината нам обезбеђује следеће:

За сваки кардинал κ постоји најмањи кардинал већи од њега, у ознаци κ^+.

Дефиниција 1.2.32. За кардинал κ кажемо да је **следбеник** ако постоји кардинал λ, тако да је $\kappa = \lambda^+$. У супротном за κ кажемо да је **гранични** кардинал.

Све бесконачне кардинале ређамо по величини у трансфинитни низ **алефа** на следећи начин:

- $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$;
- $\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$;
- $\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \bigcup\limits_{\beta\in\alpha} \aleph_\beta$, у случају граничног ордината β.

Двоструке ознаке за исте скупове ($\aleph_\alpha$ и ω_α) уведене су због разлике у ординалној и кардиналној аритметици. Уз ознаку $\aleph_\alpha$ подразумева се кардинална аритметика, а уз ознаку ω_α ординална аритметика.

Пример 1.2.33. Ако је α произвољан ординал, онда је $\aleph_{\alpha+1}$ следбеник кардинал. У случају када је α гранични ординал, $\aleph_\alpha$ је гранични кардинал.

Тврђење 1.2.34. *Скуп A је бесконачан ако и само ако постоји инјекција $f : A \to A$ која није сирјекција.*

Пример 1.2.35 (Скуп природних бројева је бесконачан). Пресликавање $f : \omega \to \omega$ дато са $f(n) = 2n$ је инјекција и није сирјекција, па је, према претходној теореми, скуп природних бројева бесконачан скуп.

Природни бројеви су тзв. **коначни кардинали**, док су сви остали (попут $\aleph_0$, $\aleph_1$) **бесконачни**. Слично, и за скуп кажемо да је коначан или бесконачан у зависности од његовог кардиналног броја.

Дефиниција 1.2.36. За $X, Y \subseteq \omega$ уводимо следећу ознаку:

$$X \subseteq^* Y \Leftrightarrow |X \setminus Y| < \aleph_0.$$

Дефиниција 1.2.37. Скуп A је **пребројив** ако и само ако је $A \sim \omega$, то јест $|A| = \aleph_0$.
Скуп A је **највише пребројив** ако и само ако је $|A| \leq \aleph_0$, а **непребројив** ако и само ако је $|A| > \aleph_0$.

Тврђење 1.2.38. *Ако је A бесконачан скуп, онда је $|A| \geq \aleph_0$. Другим речима, $\aleph_0$ је најмањи бесконачан кардинални број.*

Дефиниција 1.2.39. Кардинални број $|\mathcal{P}(\omega)|$ означавамо са $\mathfrak{c}$.

Дефиниција 1.2.40. Нека је κ кардинал. Кажемо да је скуп $A \subset \kappa$ **кофиналан** у κ ако за све $\xi < \kappa$ постоји неко $\alpha \in A$ тако да је $\xi < \alpha$.

Дефиниција 1.2.41. Нека је κ кардинал. **Кофиналност кардиналног броја** κ је најмања кардиналност кофиналног подскупа κ, у ознаци $cf(\kappa)$.

На пример, $cf(\omega) = \omega$; $cf(\kappa^+) = \kappa^+$, за $\kappa \geq \omega$.

Дефиниција 1.2.42. Нека је X произвољан скуп и нека су α, κ произвољни кардинали. Тада дефинишемо следеће скупове:

- $[X]^\kappa = \{A \subseteq X : |A| = \kappa\}$;
- $[X]^{\leq\kappa} = \{A \subseteq X : |A| \leq \kappa\}$;
- $[X]^{<\kappa} = \{A \subseteq X : |A| < \kappa\}$;
- $\alpha^{<\kappa} = \sup\{\alpha^\lambda : (\lambda \text{ је кардинал}) \text{ и } \lambda < \kappa\}$.

Нека је $n < \omega$. Кажемо да фамилија скупова $\mathfrak{F}$ задовољава **својство n-пресека** ако важи да $\bigcap G \neq \emptyset$ за све $G \in [\mathfrak{F}]^{\leq n}$.

Најмањи ординални број који је непребројив у скуповном смислу, односно, **први непребројиви ординал** означавамо са ω_1. То је супремум-најмање горње ограничење скупа који садржи све пребројиве ординале, укључујући и коначне ординале. Заправо, ω_1 је најмањи ординал који није у бијекцији са ω.
ω_1 је гранични ординал, односно, не постоји ординал α такав да је $\omega_1 = \alpha + 1$. Као и сви ординални бројеви, и ω_1 је добро уређен скуп, у односу на релацију скуповне припадности $\in$. Кардиналност скупа ω_1 је **први непребројив кардинални број** - $\aleph_1$.

Егзистенција скупа ω_1 може се доказати без ослањања на аксиому избора.

Према Канторовој теореми имамо $\aleph_0 = |\omega| < |\mathcal{P}(\omega)| = \mathfrak{c}$. Долазимо до питања да ли постоји скуп A, такав да је $\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$, то јест, да ли је $\mathfrak{c}$ најмањи непребројив кардинални број. Ту долазимо до преплитања појмова $\mathfrak{c}$ и $\aleph_1$. Да ли је то једно те исто? Ово је моменат када долазимо до потребе за дефинисањем Хипотезе континуума. Исказ

Не постоји скуп A такав да је $\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$

назива се **Хипотеза континуума** (eng. Continuum Hypothesis - **CH**). Овај исказ је независан од аксиома теорије ZFC. Другим речима, ни постојање, ни непостојање таквог скупа A не може да се докаже на основу аксиома тог система, па је однос Хипотезе континуума према том систему једнак односу петог Еуклидовог постулата према систему аксиома апсолутне геометрије. Дакле, и CH и $\neg$ CH се може додати систему ZFC, тако да постоје:

- **Канторовске теорије скупова**, у којима важи CH. Назив потиче од тога што је Кантор сматрао да CH следи из ZFC. Конзистентност CH са ZFC показао је Гедел[7] 1940. године.
- **Неканторовске теорије скупова**, у којима важи $\neg$ CH. Конзистентност ZFC и $\neg$ CH са показао је Коен[8] 1963. године.

1.3 Чех-Стоун компактификација

Компактност је тополошка особина која омогућава многе конструкције у математичкој анализи и другим областима математике. Често се (на пример, при проучавању интеграла) користи чињеница да је непрекидна реална функција ограничена и униформно непрекидна над компактним скупом, као и да на компактном скупу достиже минимум и максимум.

Слободно говорећи, компактност омогућава замену бесконачног коначним.

Компактификације (отворених подскупова равни) је први проучавао Каратеодори у контексту аналитичких функција; раније су слични облици коришћени за различите теорије реалних бројева.

Дефиниција 1.3.1. Нека су $(X, \mathcal{O}_X)$ и $(Y, \mathcal{O}_Y)$ тополошки простори и $x_0 \in X$ произвољна тачка. Пресликавање $f : X \to Y$ је **непрекидно у тачки** x_0 акко за сваку околину $V \in \mathcal{U}_Y(f(x_0))$ постоји околина $U \in \mathcal{U}_X(x_0)$ таква да је $f[U] \subset V$.

Дефиниција 1.3.2. Пресликавање $f : X \to Y$ је **непрекидно** акко је непрекидно у свакој тачки $x \in X$.

Тврђење 1.3.3. *Пресликавање $f : X \to Y$ је* **непрекидно** *акко је инверзна слика свакоī оīвореноī скуūа у Y оīворен скуū у X, īј.* $(\forall O \in \mathcal{O}_Y)\,(f^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X)$

Дефиниција 1.3.4. Нека су $(X, \mathcal{O}_X)$ и $(Y, \mathcal{O}_Y)$ тополошки простори. Пресликавање $f : X \to Y$ је **отворено** акко $O \in \mathcal{O}_X \Rightarrow f[O] \in \mathcal{O}_Y$.

[7] Kurt Gödel (рођ. 1906), амерички математичар аустријског порекла
[8] Paul J. Cohen (рођ. 1934), амерички математичар

Дефиниција 1.3.5. Нека су $(X, \mathcal{O}_X)$ и $(Y, \mathcal{O}_Y)$ тополошки простори. Пресликавање $f : X \to Y$ је **затворено** акко $F \in \mathcal{F}_X \Rightarrow f[F] \in \mathcal{F}_Y$.

Дефиниција 1.3.6. Пресликавање $f : X \to Y$ тополошког простора $(X, \mathcal{O}_X)$ у тополошки простор $(Y, \mathcal{O}_Y)$ је **хомеоморфизам** (тополошки изоморфизам) акко је f непрекидна бијекција и ако је $f^{-1} : Y \to X$ непрекидно. У том случају кажемо да су тополошки простори $(X, \mathcal{O}_X)$ и $(Y, \mathcal{O}_Y)$ хомеоморфни и пишемо $(X, \mathcal{O}_X) \approx (Y, \mathcal{O}_Y)$.

Дефиниција 1.3.7. Пресликавање $f : X \to Y$ је **тополошко потапање** акко је сирјективна рестрикција $f \restriction_X : X \to f[X]$ хомеоморфизам, где је $f[X]$ потпростор простора Y.

Потапања су најинтересантнија ако се користи база минималне могуће кардиналности. Зато уводимо следећу дефиницију, која је заснована на чињеници да произвољна непразна класа кардиналних бројева има минимум.

Дефиниција 1.3.8. **Тежина** тополошког простора $(X, \mathcal{O}_X)$ је кардинални број

$$\omega(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ је база топологије } \mathcal{O}\}.$$

Размотрићемо још неке класе пресликавања, која ће нам бити од значаја у наставку приче.

Погледајмо савршена пресликавања. **Савршена пресликавања** су посебан тип непрекидних пресликавања међу тополошким просторима. Та пресликавања слабија су од хомеоморфизама, али су довољно јака да очувају неке тополошке особине које нису увек очуване непрекидним пресликавањима, као што је, на пример, својство локалне компактности.

Дефиниција 1.3.9. Нека су $(X, \mathcal{O}_X)$ и $(Y, \mathcal{O}_Y)$ тополошки простори, и нека је $\pi : X \to Y$ непрекидно, затворено, сирјективно пресликавање такво да је $(\forall y \in Y)$ ($\pi^{-1}[\{y\}]$ је компактно у X). Тада π називамо **савршено пресликавање**.

Дефиниција 1.3.10. Непрекидну сирјекцију $f : S \to T$ називамо **несводљиво пресликавање** ако за сваки затворен скуп A, $A \subseteq S$, $A \neq S$ важи $f[A] \neq T$.

У тополошким просторима су могућности раздвајања тачака отвореним скуповима различите. Исто важи за раздвајање тачке и затвореног скупа који је не садржи, као и за раздвајање два дисјунктна затворена скупа. Вођени тиме, даћемо неке класификације тополошких простора, такозване **аксиоме (својства) сепарације**.

Дефиниција 1.3.11. За тополошки простор $(X, \mathcal{O})$ кажемо да је:

- **$\mathbf{T_0}$-простор** акко
  $\forall x, y \in X\ \exists O \in \mathcal{O}\ \ (|O \cap \{x, y\}| = 1)$
- **$\mathbf{T_1}$-простор** акко
  $\forall x, y \in X\ (x \neq y \Rightarrow \exists O \in \mathcal{O}\ \ (x \in O \not\ni y))$
- **$\mathbf{T_2}$-простор** или **Хауздорфов** акко
  $\forall x, y \in X\ (x \neq y \Rightarrow \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}\ \ (x \in O_1 \wedge y \in O_2 \wedge O_1 \cap O_2 = \emptyset))$
- **регуларан простор** акко
  $\forall F \in \mathcal{F}\ \ \forall x \in X \setminus F\ \ \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}\ (x \in O_1 \wedge F \subset O_2 \wedge O_1 \cap O_2 = \emptyset)$
- **$\mathbf{T_3}$-простор** акко
  регуларан + T_1-простор
- **нормалан простор** акко
  $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}\ \ (F_1 \cap F_2 = \emptyset \Rightarrow \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}\ \ (F_1 \subset O_1\ \wedge\ F_2 \subset O_2\ \wedge$
  $O_1 \cap O_2 = \emptyset))$
- **$\mathbf{T_4}$-простор** акко
  нормалан + T_1-простор
- **комплетно-регуларан простор** акко
  $\forall F \in \mathcal{F}\ \ \forall x \in X \setminus F\ \ \exists f : X \to [0, 1]\ \ (f$ је непрекидна $\wedge$
  $f(x) = 0 \wedge f[F] = \{1\})$
- **$\mathbf{T_{3\frac{1}{2}}}$-простор** акко
  комплетно-регуларан + T_1-простор.

Тополошки простор је T_1-простор акко су сви синглтони затворени скупови.

Тврђење 1.3.12. *Важи:*

$$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

Дефиниција 1.3.13. Топлошки простор $(X, \mathcal{O})$ је

- **Компактан** акко је Хауздорфов и сваки отворени покривач скупа X садржи коначан потпокривач.
- **Низовно компактан** акко сваки низ у скупу X има конвергентан подниз.
- **Пребројиво компактан** акко сваки бесконачан пребројив подскуп скупа X има тачку нагомилавања.
- **Линделефов простор** акко је T_3-простор и ако сваки отворени покривач простора X садржи пребројив потпокривач.

Теорема 1.3.14 (**Теорема о потапању).** *Нека је X простор Тихонова тежине κ. Тада се X може утопити у $[0,1]^{\kappa}$.*

(Видети [11], Теорема 21. б), стр. 169.)

Дефиниција 1.3.15. За тополошки простор кажемо да је **крајње неповезан** ако је затворење сваког његовог отвореног скупа, такође отворен скуп.

Дефиниција 1.3.16. Скуп називамо $\mathbf{F}_{\sigma}$**-скуп** ако се он може представити као пребројива унија затворених скупова.

Дефиниција 1.3.17. Скуп називамо $\mathbf{G}_{\delta}$**-скуп** ако се он може представити као пребројив пресек отворених скупова.

Дефиниција 1.3.18. За тополошки простор кажемо да је **базично неповезан** ако је затворење сваког његовог F_{σ} отвореног скупа, такође отворен скуп.

Сваки крајње неповезан тополошки простор је и базично неповезан. Обрнуто не мора да важи.

Дефиниција 1.3.19. Компактан, потпуно неповезан Хауздорфов простор називамо **Стоунов простор**. Ако је $\mathcal{B}$ Булова алгебра, онда простор ултрафилтера $\mathbf{st}(\mathcal{B})$ називамо Стоунов простор Булове алгебре $\mathcal{B}$.

Ако је X компактан простор, онда Стоунов простор регуларно-отворених скупова обележавамо са **EX**,

$$\mathrm{E}X = st(RO(X)).$$

Пошто је RO(X) комплетна Булова алгебра, следи да је EX **крајње неповезан** простор. Простор EX карактерише и следећа особина:
EX је јединствен крајње неповезан простор за који постоји несводљиво савршено пресликавање $\pi : EX \to X$.
У том случају простор EX називамо **пројективни покривач** простора X. Опширније о овом појму може се пронаћи у [20].

Још један појам који је у вези са компактношћу, а од великог је значаја за текст, јесте *компактификација*.

Дефиниција 1.3.20. Ако је Y компактан простор и $c : X \to Y$ хомеоморфно потапање X у Y такво да је $\overline{c[X]} = Y$, онда пар (Y, c) називамо компактификација простора X.

Са $\mathcal{C}(X)$ означавамо фамилију свих компактификација на X.
Ако простор X може да се потопи у компактан простор Y, тј. ако постоји хомеоморфизам $f : X \to M$ на потпростор $M = f[X]$ простора Y,

тада је пар $(\overline{f[X]}, if)$, где је i потапање скупа M у $\overline{M}$, компактификација простора X. Како сваки простор који може да се потопи у компактан простор има компактификацију, могу се показати нека тврђења која наводимо.

Тврђење 1.3.21. *Тополошки простор X је простор Тихонова($T_3\frac{1}{2}$) акко се може потопити у неки компактан простор.*

Тврђење 1.3.22. *Сваки простор Тихонова има компактификацију (Y, c) тако да је $\omega(Y) = \omega(X)$.*

У наставку, под компактификацијом X нећемо сматрати само пар (Y, c), већ такође и компактан простор Y у који се X може пресликати као густ простор. Компактификацију простора ћемо обично обележавати симболима $cX, c_iX, \alpha X$ итд. где су c, c_i и α симболи за хомеоморфно потапање X у одговарајућу компактификацију. Стога, када компактификацију посматрамо као простор, увек ћемо знати које је хомеоморфно потапање коришћено. На пример, за компактификацију cX простора X имамо:

$$c : X \to cX;$$
$$c \upharpoonright_X : X \to c[X] \text{ је хомеоморфизам};$$
$$\overline{c[X]} = cX.$$

Ако је cX компактификација компактног простора X, онда је $c[X] = X$ и c је хомеоморфизам. Одатле, за сваке две компактификације c_1X и c_2X компактног простора X, пресликавање $f : c_1X \to c_2X$ је хомеоморфизам и $f(c_1(x)) = c_2(x)$ за свако $x \in X$. Уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 1.3.23. Еквивалентност две компактификације c_1 и c_2 простора X подразумева да између c_1X и c_2X постоји хомеоморфизам $f : c_1X \to c_2X$ такав да је $f \circ c_1 = c_2$.

Дакле, било које две компактификације компактног простора су еквивалентне. Специјално, било која компактификација компактног простора X је еквивалентна компактификацији (X, id_X), коју идентификујемо са самим простором X.

Лако се може утврдити да је еквиваленција компактификација релација еквиваленције.

Често ћемо идентификовати евкивалентне компактификације - било која класа еквивалентних компактификација ће се сматрати као појединачна компактификација, односно, као произвољна компактификација у овој класи еквиваленције.

Сада ћемо дефинисати релацију поретка (уређење) на фамилији $\mathcal{C}(X)$. Кажемо да је $c_2X \leq c_1X$ ако постоји непрекидно пресликавање f :

$c_1X \to c_2x$ тако да је $f \circ c_1 = c_2$. Другим речима, неједнакост $c_2X \leq c_1X$ значи да се c_1X може да се пресликати на c_2X на тај начин да се свака тачка простора X, посматраног као потпростор и од c_1X и од c_2X, слика на саму себе. Релација "$\leq$" је релација поретка на фамилији $\mathcal{C}(X)$.

Тврђење 1.3.24. *Компактификације c_1X и c_2X простора X су еквивалентне акко је $c_1X \leq c_2X$ и $c_2X \leq c_1X$.*

Уређење "$\leq$" у фамилији свих компактификација неког простора дефинисао је Лубен.

Дефиниција 1.3.25. Нека је cX компактификација простора X. Скуп $cX \setminus c[X]$, односно, скуп тачака у којима се cX разликује од $c[X]$ назива се **остатак компактификације** cX.

Неке класе простора Тихонова могу се карактерисати особинама остатка компактификација. Сада дајемо такву карактеризацију за локално компактне просторе.

Тврђење 1.3.26. *За сваки простор Тихонова X следећи услови су еквивалентни:*

- *Простор X је локално компактан.*
- *За сваку компактификацију cX простора X, остатак $cX \setminus c[X]$ је затворен у cX.*
- *Постоји компактификација cX простора X, таква да је остатак $cX \setminus c[X]$ затворен у cX.*

Следећа теорема представља важну особину фамилије $\mathcal{C}(X)$ свих компактификација простора X.

Теорема 1.3.27. *Свака непразна потфамилија $C_0 \subset \mathcal{C}(X)$ има најмање горње ограничење (у складу са уређењем дефинисаним на фамилији $\mathcal{C}(X)$).*

Последица 1.3.28. *За сваки простор Тихонова X, у фамилији $\mathcal{C}(X)$ постоји највећи елемент (у складу са уређењем дефинисаним на той фамилији).*

Дефиниција 1.3.29. Највећи елемент у $\mathcal{C}(X)$ назива се **Чех-Стоунова компактификација** простора X или максимална компактификација простора X и означава се са βX.

Постојање највеће компактификације још 1937. године су утврдили Чех и Стоун. Први од два аутора дефинисао је максималну компактификацију, а даљи развој те идеје појављује се и у Тихоновљевим списима из 1930. године. Тадашњи њихови радови, заједно са радовима Стоуна из 1948. године, садрже фундаменталне резултате о компактификацији βX.

Ради поједностављења ћемо простор X поистоветити са потпростором $c[X]$ било које компактификације cX од X, односно, претпоставићемо да је X потпростор било које компактификације cX. Пресликавање простора X у компактификацију cX означаваћемо са c. Изједначавање (идентификација) X и cX омогућава нам да дискутујемо о проширењу пресликавања из простора X на његове компактификације.

Теорема 1.3.30. *Свако непрекидно пресликавање $f : X \to K$ комплетно-регуларног Хауздорфовог простора X на компактан простор K може се проширити на јединствен начин до непрекидног пресликавања $\beta f : \beta X \to K$.*

Ако се свако непрекидно пресликавање комплетно-регуларног Хауздорфовог простора X у компактан простор може непрекидно проширити на компактификацију αX од X, онда је αX еквивалентна Чех-Стоуновој компактификацији простора X.

Пресликавање βf поменуто у горњој теореми називамо **Стоунова екстензија** функције f. Често се напомиње да је особина проширења јасна за једну класу простора - простор $\beta\omega$, пошто је то **Стоунов простор** на скупу $\mathcal{P}(\omega)$. Међутим, за просторе βX, при чему је X произвољно, та особина није баш тако очигледна, делом због тога што то није Стоунов простор Булове алгебре.

Хауздорфови простори који имају базу састављену од отворено-затворених скупова називају се нула-димензионални. Из разлога поједностављења, посматраћемо углавном **јако нула-димензионалне** просторе. То су они простори X за које је βX нула-димензионални простор, или еквивалентно, они простори X за које је βX истоветно са Стоуновим простором Булове алгебре $\mathcal{B}(X)$ која се састоји од свих **отворено-затворених** подскупова простора X. Приметимо још да је у том случају постојање Стоунове екстензије βf о којој смо изнад дискутовали неспорно, пошто егзистенција f имплицира да $\mathcal{B}(K)$ може да се утопи у $\mathcal{B}(X)$.

Претходно наведена теорема (1.3.30) даје нам читав низ последица. У наставку, за све тополошке просторе које разматрамо претпоставићемо да су комплетно-регуларни и Хауздрофови.

Дефиниција 1.3.31. Кажемо да су A и B **потпуно раздвојени подскупови** у тополошком простору X ако постоји непрекидна функција $f : X \to [0, 1]$ таква да је $f[A] = \{0\}$ и $f[B] = \{1\}$.

Последица 1.3.32. *Сваки пар потпуно раздвојених подскупова Тихоновљевог простора X има дисјунктна затварања у βX.*

Последица 1.3.33. *Сваки пар дисјунктних затворених подскупова нормалног простора* X *има дисјунктна затварања у* βX.

Последица 1.3.34. *За сваки отворено-затворен подскуп* A *Тихоновљевог простора* X *затварање* $\overline{A}$ *од* A *у* βX *је отворено и затворено.*

Нека су X и Y Тихоновљеви простори, а cX и $c'Y$ компактификације од X и Y респективно, и нека је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање. Ако постоји непрекидно пресликавање $F : cX \to c'Y$ такво да је $F(x) = f(x)$ за $x \in X$, онда кажемо да се X може непрекидно проширити на компактификације cX и $c'Y$, а F називамо **проширење од f преко cX и $c'Y$**. Ова модификација појма проширења допушта једноставну формулацију следеће важне особине Чех-Стоунове компактификације.

Тврђење 1.3.35. *За сваку компактификацију* αY *Тихоновљевог простора* Y *и свако непрекидно пресликавање* $f : X \to Y$ *Тихоновљевог простора* X *у простор* Y, *постоји непрекидно проширење* $F : \beta X \to \alpha Y$.

Тврђење 1.3.36. *Ако потпростор* M *Тихоновљевог простора* X *има особину да се свака непрекидна функција* $f : M \to I$ *може непрекидно проширити над* X, *онда је затварање* $\overline{M}$ *од* M *у* βX *компактификација од* M *еквивалентна са* βM. *Ако је* M *густ у* X, *онда је* $\beta X = \beta M$.

Последица 1.3.37. *За сваки Тихоновљев простор* X *и простор* T *такав да је* $X \subset T \subset \beta X$ *имамо да је* $\beta T = \beta X$.

Проблеми везани за Чех-Стоунову компактификацију су међу најинтересантнијим проблемима опште топологије. Неки од њих, нарочито проблеми везани за Чех-Стоунову копмактификацију дискретних простора, веома су блиски теорији скупова. Компактификација βX може се одредити на више начина и има доста интересантних особина које могу бити примењене за конструкцију многих занимљивих примера, као и за доказивање неких теорема.

У наставку проучавамо Чех-Стоунове компактификације дискретних простора, првенствено компактификацију $\beta\omega$, при чему је ω простор позитивних целих бројева са дискретном топологијом.

У том случају је, за сваку дату функцију $f : \omega \to \omega$, Стоунова екстензија $\beta f : \beta\omega \to \beta\omega$ дефинисана са $f(x) = \{A \in \mathcal{P}(\omega) : f^{-1}[A] \in X\}$. Лако се уочава да је

$$\beta f(p) = q \ \text{ акко } \ (\forall P \in p)\ f[P] \in q \ \text{ акко } \ (\forall Q \in q)\ f^{-1}[Q] \in p.$$

Поглавље 2

Простори $\beta\omega$ и $\beta\omega \setminus \omega$ уз претпоставку да важи CH

У овом одељку посматраћемо како се понашају простори $\beta\omega$ и $\beta\omega \setminus \omega$ уз претпоставку да важи CH.

Да бисмо могли да зађемо дубље у материју која је тема овог рада, неопходно је увести одређене појмове који ће нам бити од значаја као алати за даљи рад са $\beta\omega$.

Идеал коначних подскупова од ω обележаваћемо са fin, док ће се под ознаком $\mathcal{P}(\omega)/fin$ подразумевати Булова алгебра коју добијамо над скупом $\mathcal{P}(\omega)$. При томе ћемо за скупове $A, B \in \mathcal{P}(\omega)$ рећи да су **еквивалентни** акко $A\Delta B \in fin$. ($A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$)

Као што је већ напоменуто $\beta\omega$ заправо представља Стоунов простор над скупом $\mathcal{P}(\omega)$. Дакле, $\beta\omega = st(\mathcal{P}(\omega))$. Тачке простора $\beta\omega$ могу се поистоветити са ултрафилтерима скупа ω. Разликујемо два типа ултрафилтера: **главне ултрафилтере** и **неглавне ултрафилтере**. Први кореспондирају са тачкама простора ω, а други са тачкама простора $\beta\omega \setminus \omega$.

- За $n < \omega$, идентификујемо n са тачком простора (ултрафилтером) свих скупова који га садрже, односно, са $\{A \in \mathcal{P}(\omega) : n \in A\} \in st(\mathcal{P}(\omega))$.
  Дакле, тачке простора $\beta\omega \setminus \omega$ називамо **неглавни ултрафилтери**. Може се показати и да је тај простор хомеоморфан са Стоуновим простором над $\mathcal{P}(\omega)/fin$:
  $$\beta\omega \setminus \omega \approx st(\mathcal{P}(\omega)/fin)$$
- За $A \subset \omega$ уводимо скуп
  $$A^* = \{x \in \beta\omega \setminus \omega : A \in x\}$$

и

$$\overline{A} = \{x \in \beta\omega : A \in x\}.$$

Јасно је да је колекција $\{A^* : A \in \mathcal{P}(\omega)\}$ база простора $\beta\omega \setminus \omega$ и да је колекција $\{\overline{A} : A \in \mathcal{P}(\omega)\}$ база простора $\beta\omega$. Такође се види да је, заправо, $\beta\omega \setminus \omega = \omega^*$.

Простор ω^* привукао је доста пажње последњих декада и интересантан је за изучавање.

Лема 2.0.1. *а) Ако је $V \subseteq \omega$ бесконачан скуп, онда је $\overline{V}$ хомеоморфно са $\beta\omega$.*

б) Ако су $V, W \subseteq \omega$ бесконачни скупови, онда је $V^* \cap W^* = \emptyset$ акко $|V \cap W| < \omega$.

Дефиниција 2.0.2. Тачку x простора X називамо **П-тачка** ако је пресек пребројиво много околина тачке x такође околина тачке x.

За простор X, са $\mathbf{X}^*$ ћемо означавати **остатак компактификације** $\beta X \setminus X$.

Дефиниција 2.0.3. Нека је $U \subseteq X$ отворен скуп. Тада дефинишемо $Ex(U)$ скупа U

$$Ex(U) = \beta X \setminus cl_{\beta X}(X \setminus U).$$

Можемо запазити да је $Ex(U)$ отворен скуп, и да важи релација $Ex(U) \cap X = U$. Колекција $\{Ex(U) : U \subseteq X \text{ је отворен}\}$ је база топологије над простором βX.

Дефиниција 2.0.4. Нека је $U \subseteq X$ отворен скуп. Тада дефинишемо скуп U' скупа U

$$U' = Ex(U) \cap X^*$$

Лема 2.0.5. *Нека је X нормалан простор, а $Y \subseteq X$ затворен у X. Тада важи $cl_{\beta X} Y = \beta Y$.*
У том случају важи и следећа једнакост

$$cl_{\beta X} Y \setminus Y = Y^*.$$

Дефиниција 2.0.6. Нека је $\langle A, \leq_A \rangle$ парцијално уређење. За скуп $X \subseteq A$ кажемо да је **антиланац** ако су свака два различита елемента скупа X неупоредива, односно за свако x, y из X не важи ни $x \leq_A y$, ни $y \leq_A x$.

Антиланац X је **максималан** ако не постоји антиланац Y такав да је $X \subseteq Y, X \neq Y$.

Дефиниција 2.0.7. Антиланац X је **јак антиланац** ако никоја два елемента из X немају заједничко доње ограничење у X:

$$(\forall x, y \in X)(x \neq y \Rightarrow \neg(\exists z \in X)(z \leq x \wedge z \leq y)).$$

Дефиниција 2.0.8. Парцијално уређен скуп X задовољава **услов пребројивог ланца** и још кажемо „X је **ccc**" (eng. Countable chain condition) ако је сваки јак антиланац скупа X пребројив.

Дефиниција 2.0.9. Нека је $f : X \to I$ непрекидно пресликавање. **Нула-скуп** простора X је било који скуп облика $f^{-1}[\{0\}]$. Комплемент нула-скупа називамо **конула-скуп**.

2.1 Карактеризација Булове алгебре $\mathcal{P}(\omega)/fin$

Нека је $\mathcal{B}$ Булова алгебра, и нека су $F, G \subseteq \mathcal{B}$. Рећи ћемо да $\mathbf{F} < \mathbf{G}$ ако за све $F' \in [F]^{<\omega}$, $G' \in [G]^{<\omega}$ важи $\vee F' < \wedge G'$.

Дефиниција 2.1.1. Нека је $\mathcal{B}$ Булова алгебра. Кажемо да $\mathcal{B}$ **задовољава услов $\mathbf{H}_\omega$** ако за све $F \in [\mathcal{B} \setminus \{1\}]^{\leq\omega}$, и све $G \in [\mathcal{B} \setminus \{0\}]^{\leq\omega}$ такве да је $F < G$, постоји елемент $x \in \mathcal{B}$ такав да важи $F < \{x\} < G$.

Лема 2.1.2. *Булова алгебра $\mathcal{P}(\omega)/fin$ задовољава услов H_ω.*

Доказ: Доказ почињемо показујући следеће помоћно тврђење:

Став: *„Ако $A \in [\mathcal{P}(\omega)/fin]^{\leq\omega}$ и $\{0\} < A$, онда постоји $y \in \mathcal{P}(\omega)/fin$ такво да је $\{0\} < \{y\} < A$."*

Заиста, означимо A као низ $\{a_n : n < \omega\}$, и означимо са $C_n \in [\omega]^\omega$ представника елемента a_n, за све $n < \omega$.

Бирамо индукцијом тачке y_n, за све $n < \omega$, такве да

$$y_n \in \bigcap_{0 \leq i \leq n} C_i \setminus \{y_0, y_1, ..., y_{n-1}\}.$$

Овај пресек је сигурно непразан. Зашто? Како је $\{0\} < A$, следи да је за сваки коначан подскуп X скупа A испуњено $\{0\} < \wedge X$. То значи да ће пресек коначно много представника елемената скупа A увек бити бесконачан, односно, $\{0\} < \inf \bigcap_{0 \leq i \leq n} C_i$ у $\mathcal{P}(\omega)/fin$. Дакле, пресек C_i за $0 \leq i \leq n$ је бесконачан, па када избацимо коначно много изабраних тачака y_i, за $0 \leq i \leq n$, мора остати барем нека тачка у том пресеку.

Означимо скуп таквих тачака са $Y = \{y_n : n < \omega\}$, и нека је y елемент скупа $\mathcal{P}(\omega)/fin$, који кореспондира са Y. Заправо, y је класа еквиваленције из $\mathcal{P}(\omega)/fin$, чији је један представник Y.

Треба још показати да је $\{0\} < \{y\}$ и $\{y\} < A$.

Пошто у Y има бесконачно међусобно различитих тачака, онда ће сигурно бити $\{0\} < \{y\}$.

Скупови C_n, $n < \omega$, су представници елемената $a_n, n < \omega$, из којих се састоји скуп A. За произвољних коначно много $C_{n_1}, ..., C_{n_k}$, према конструкцији знамо да је $Y \setminus (C_{n_1} \cap ... \cap C_{n_k}) \subseteq \{y_0, ..., y_{\max\{n_1,...,n_k\}}\}$. Посматрани скуп Y је такав да је за свако $n_k < \omega$ само коначно много тачака из Y није у C_{n_k}. Дакле, $Y \subseteq C_{n_1} \cap ... \cap C_{n_k}$, као што је и требало показати.

Можемо закључити да $\{y\} < A$.

Односно, $\{\mathbf{0}\} < \{\mathbf{y}\} < \mathbf{A}$.

Сада се враћамо доказу леме.

Изаберимо $F, G \in [\mathcal{P}(\omega)/fin]^{\leq\omega}$, такве да $1 \notin F$, $0 \notin G$ и $F < G$.

Ако $\vee F$ или $\wedge G$ постоје, онда лако долазимо до траженог x, користећи помоћно тврђење које смо управо показали. Зато претпоставимо да то није случај.

Уводимо следећа два низа: $F = \{f_n : n < \omega\}$ и $G = \{g_n : n < \omega\}$. То су низови чији су елементи тачно елементи скупова F и G.

Без умањења општости, можемо претпоставити да важи следећи поредак:

$$f_0 < f_1 < f_2 < ... \text{ и } g_0 > g_1 > g_2 > ...$$

За свако $n < \omega$ изаберимо неке представнике $A_n, B_n \in [\omega]^\omega$ низа f_n, односно g_n.

Индукцијом по $k < \omega$, бирамо тачку $d_k < \omega$, тако да важи

$$d_k \in \bigcap_{0 \leq i \leq k} B_i \setminus (\bigcup_{0 \leq i \leq k} A_i \cup \{d_0, ..., d_{k-1}\})$$

и означимо са D скуп свих таквих d_k, $k < \omega$,

$$D = \{d_k : k < \omega\}.$$

Додатно, дефинишемо и скуп $A' = \bigcup_{k<\omega} (A_k \cap \bigcap_{0 \leq i \leq k} B'_i)$.

Ставимо и $C = A' \cup D$. Тада ће бити и $C \in [\omega]^\omega$, и још:

(1) ако $n < \omega$, онда $|A_n \setminus C| < \omega$,

(2) ако $m < \omega$, онда $|C \setminus B_m| < \omega$.

Нека је још и x елемент скупа $\mathcal{P}(\omega)/fin$, који кореспондира са C. Лако се уочава да из (1) и (2) следи оно што је и требало показати, $\mathbf{F} < \{\mathbf{x}\} < \mathbf{G}$, на исти начин као у доказу помоћног тврђења. $\square$

Дефиниција 2.1.3. Нека је $\mathcal{B}$ Булова алгебра. Кажемо да $\mathcal{B}$ **задовољава услов $\mathbf{R}_\omega$** ако за све непразне $F \in [\mathcal{B} \setminus \{1\}]^{\leq\omega}$, $G \in [\mathcal{B} \setminus \{0\}]^{\leq\omega}$, $H \in [\mathcal{B}]^{\leq\omega}$ такве да је

(1) $F < G$,

(2) $(\forall \tilde{F} \in [F]^{<\omega})\ (\forall \tilde{G} \in [G]^{<\omega})\ (\forall h \in H)((h \not\leq \vee \tilde{F})\ \wedge\ (\wedge \tilde{G} \not\leq h))$

постоји елемент $x \in \mathcal{B}$ такав да важи

(3) $F < \{x\} < G$,

(4) $(\forall h \in H)((h \not\leq x \wedge (x \not\leq h))$.

Један од главних разлога који нам олакшава рад са простором ω^*, под претпоставком да важи CH, јесте лема коју наводимо у наставку.

Лема 2.1.4. *Ако Булова алгебра $\mathcal{B}$ задовољава услов H_ω, онда $\mathcal{B}$ задовољава и услов R_ω.*

Доказ: Нека су $F \in [\mathcal{B} \setminus \{1\}]^{\leq\omega}$, $G \in [\mathcal{B} \setminus \{0\}]^{\leq\omega}$, $H \in [\mathcal{B}]^{\leq\omega}$ такви да задовољавају услове (1) и (2) из претходне дефиниције.

Уводимо следеће низове: $F = \{f_n : n < \omega\}$, $G = \{g_n : n < \omega\}$ и $H = \{h_n : n < \omega\}$. За свако $h \in H$ и за сваки коначан скуп $\tilde{F} \in [F]^{<\omega}$ имамо да је $(\vee\tilde{F})' \wedge h \neq \emptyset$.

Сада ћемо на скупове $\{0\}$ и $\{f' : f \in F\} \cup \{h_n\}$ применити Став који смо показали у оквиру Леме 2.1.2, за све $n < \omega$, и последично ћемо добити да постоји елемент $d_n \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$, за све $n < \omega$, такав да

$$(1) \qquad d_n < h_n \text{ и } (\forall f \in F)(f \wedge d_n = 0 \Leftrightarrow d_n \leq f').$$

На сличан начин можемо пронаћи $e_n \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$, за све $n < \omega$, такав да

$$(2) \qquad \{e_n\} < G \text{ и } e_n \wedge h_n = 0.$$

Ако довољно пажљиво одаберемо d_n и e_n, можемо наместити да важи $e_n \wedge d_m = 0$, за све $n, m < \omega$. Сада ћемо за све $n < \omega$ дефинисати још и

$$\tilde{f}_n = f_n \vee e_n \text{ и } \tilde{g}_n = g_n \wedge d'_n.$$

Приметимо да за све $n, m < \omega$ имамо да $\bigvee_{0 \leq i \leq n} \tilde{f}_i \leq \bigwedge_{0 \leq j \leq m} \tilde{g}_j$.

Ослањајући се на H_ω, можемо пронаћи елемент $x \in \mathcal{B}$ такав да за све $n, m < \omega$

$$\bigvee_{0 \leq i \leq n} \tilde{f}_i \leq x \leq \bigwedge_{0 \leq j \leq m} \tilde{g}_j.$$

Лако се проверава да је ово x баш оно које смо тражили. □

Последица 2.1.5. *Булова алгебра $\mathcal{P}(\omega)/fin$ задовољава услов R_ω.*

Сада долазимо до главног резултата ове секције.

Нека је $\mathcal{B}$ Булова алгебра, и нека је $A \subseteq \mathcal{B}$. Тада $\langle\langle \mathbf{A} \rangle\rangle \subseteq \mathcal{B}$ означава **подалгебру** Булове алгебре $\mathcal{B}$, генерисану скупом A.

Теорема 2.1.6. *Ако је $\mathcal{B}$ Булова алгебра кардиналности највише $\mathfrak{c}$ која задовољава услов H_ω, онда је $\mathcal{B}$ изоморфно са $\mathcal{P}(\omega)/fin$.*

Доказ: Нека су $\mathcal{B}$ и $\mathcal{E}$ Булове алгебре које задовољавају услов H_ω, такве да $|\mathcal{B}|, |\mathcal{E}| \leq \mathfrak{c}$. Ослањајући се на CH, можемо $\mathcal{B}$ записати као низ $\{b_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ и $\mathcal{E}$ као низ $\{e_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Овде ми је CH битна јер, без CH, не бисмо са сигурношћу знали које су дужине низови.

Без губитка општости, претпоставимо да је $e_0 = 0$ и $b_0 = 0$. Трансфинитном индукцијом, за $\alpha < \omega_1$, конструисаћемо пребројиве подалгебре $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{B}$ и $\mathcal{E}_\alpha \subseteq \mathcal{E}$ и изоморфизам $\sigma_\alpha : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{E}_\alpha$, тако да

(1) $b_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ и $e_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$,

(2) ако је $\beta < \alpha$, онда $\mathcal{B}_\beta \subseteq \mathcal{B}_\alpha$, $\mathcal{E}_\beta \subseteq \mathcal{E}_\alpha$ и $\sigma_\alpha \restriction_{\mathcal{B}_\beta} = \sigma_\beta$.

Нека је $\mathcal{B}_0 = \{0, 1\}$, $\mathcal{E}_0 = \{0, 1\}$ и нека $\sigma_0 : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{E}_0$, дефинисано на уобичајен начин.

Претпоставимо да су $\mathcal{B}_\beta, \mathcal{E}_\beta$ и σ_β дефинисани за све $\beta < \alpha < \omega_1$ и да задовољавају наведене услове (1) и (2).

Дакле, узимам један по један елеменат низова $\{b_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ и $\{e_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ и правим даљу конструкцију у зависности од тога где ми се ти чланови низова налазе у односу на подалгебре изгенерисане сваким од њих.
Конкретно, ако $b_\alpha \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{B}_\beta$ и $e_\alpha \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{E}_\beta$, онда дефинишемо структуре $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{B}_\beta$, $\mathcal{E}_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{E}_\beta$ и $\sigma_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \sigma_\beta$.
Ако то није случај, онда претпоставимо да, на пример, $b_\alpha \notin \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{B}_\beta = \mathcal{F}$. Нека је $\sigma = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \sigma_\beta$. Означимо даље партиције фамилије $\mathcal{F}$ на следећи начин:

$$\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} : f < b_\alpha\}, \quad \mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{F} : b_\alpha < f\}, \quad \mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \setminus (\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1).$$

У $\mathcal{F}_0$ ће ми бити сви они елементи из $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{B}_\beta$ који су класа испод b_α. У $\mathcal{F}_1$ ће ми бити сви они елементи из $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{B}_\beta$ који су класа изнад b_α. У $\mathcal{F}_2$ ће бити они преостали елементи из $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{B}_\beta$ који нису ни у $\mathcal{F}_0$, ни у $\mathcal{F}_1$.

Како је σ изоморфизам - чува поредак, а по Леми 2.1.4 Булова алгебра $\mathcal{E}$ задовољава и услов R_ω, онда постоји елемент $e \in \mathcal{E}$ такав да је $\sigma[\mathcal{F}_0] < \{e\}$, $\{e\} < \sigma[\mathcal{F}_1]$, и за све $\tilde{e} \in \sigma[\mathcal{F}_2]$ важиће да они нису упоредиви са e, тј. $\tilde{e} \not\leq e$ и $e \not\leq \tilde{e}$. Ако сада ставимо $\sigma(b_\alpha) = e$ и $\sigma(b'_\alpha) = e'$, онда пресликавање σ може да се прошири до изоморфизма $\tilde{\sigma} : \langle\langle \mathcal{F} \cup \{b_\alpha\} \rangle\rangle \to \langle\langle \sigma[\mathcal{F}] \cup \{e\} \rangle\rangle$.

Ако $e_\alpha \notin \langle\langle \sigma[\mathcal{F}] \cup \{e\} \rangle\rangle$, онда понављамо цео поступак који смо изнад навели, с тим што уместо σ користимо σ^{-1}, и тражимо оригинал из подалгебри од $\mathcal{B}$ који ће се сликати у e_α, јер морамо наместити да нам σ буде изоморфизам, односно бијекција, самим тим и „на” пресликавање.

Тиме смо конструисали подалгебре $\mathcal{B}_\alpha$ и $\mathcal{E}_\alpha$, као и апроксимацију изоморфизма између $\mathcal{B}$ и $\mathcal{E}$.

Дакле, закључујемо да су Булове алгебре $\mathcal{B}$ и $\mathcal{E}$ међусобно изоморфне. По Последици 2.1.5, то значи да су обе Булове алгебре $\mathcal{B}$ и $\mathcal{E}$ изоморфне и са $\mathcal{P}(\omega)/fin$. □

Напомена 2.1.7. Приметимо да ће свака Булова алгебра која задовољава услов H_ω имати кардиналност најмање $\mathfrak{c}$.

2.2 Тополошка карактеризација БА $\mathcal{P}(\omega)/fin$

У овој секцији ћемо дати тополошки превод основних резултата који се односе на карактеризацију Булове алгебре $\mathcal{P}(\omega)/fin$.

Дефиниција 2.2.1. Нека је X простор. Подскуп $A \subseteq X$ назива се **C*-утопљен скуп** простора X ако важи да свако непрекидно пресликавање $f : A \to [0,1]$ може да се прошири до непрекидног пресликавања $\overline{f} : X \to [0,1]$.

Дефиниција 2.2.2. Простор X назива се **F-простор** ако је сваки конула-скуп простора X уједно и C^*-утопљен скуп простора X.

Дефиниција 2.2.3. Нека је $(X, \mathcal{O}_X)$ тополошки простор. Кажемо да X задовољава **услов пребројивог ланца** - „X је **ccc**", ако је свака колекција дисјунктних отворених непразних подскупова простора X пребројива.

Лема која следи у наставку сумира неке релевантне информације у вези са F-просторима.

Лема 2.2.4. *(a) X је F-простор акко βX F-простор.*

(b) Нормалан простор X је F-простор акко свака два дисјунктна отворена F_σ-подскупа простора X имају дисјунктна затворења у X.

(c) Сваки базично неповезан простор је F-простор.

(d) Сваки затворен потпростор нормалног F-простора је, такође, F-простор.

(e) Ако F-простор X задовољава услов пребројивог ланца, онда је тај простор крајње неповезан.

Доказ: (a) Запазимо чињеницу да је скуп X заправо C^*-утопљен скуп простора βX, што нам гарантује Тврђење 1.3.35.
Кренимо од тога да је X F-простор. То значи да је сваки конула-скуп простора X истовремено и C^*-утопљен скуп у X. Следи да свако пресликавање f које слика неки од тих конула-скупова у интервал $[0,1]$ може да се прошири до пресликавања које ће читав

простор X сликати у интервал $[0, 1]$.
Не мора нужно да важи да је сваки конула-скуп простора βX уједно и подскуп простора X. Посматрајмо такав случај. Узмимо неки конула-скуп A простора βX за који важи $A \nsubseteq X$. То даље имплицира да постоји пресликавање $g : \beta X \to [0, 1]$, за које важи $g^{-1}[\{0\}] = \beta X \setminus A$. Дакле, постоји пресликавање g које слика у $\{0\}$ све елементе простора $\beta\omega$, осим оних који припадају скупу A. $A \cap X$ биће конула-скуп у простору X. Посматрајмо сада рестрикцију пресликавања g на скуп X. Добијамо следеће пресликавање: $g \restriction_X : X \to [0, 1]$, такво да је $g^{-1}[\{0\}] = X \setminus (A \cap X) = X \setminus A$. Посматрани скуп $A \cap X$ је, заправо, C^*-утопљен скуп простора X. Дакле, пресликавање f које слика $A \cap X$ може се проширити на читав скуп X.
Пошто су скупови A и X оба отворени, пресликавање f је непрекидно и на $X \cup A$, па се f може проширити на $X \cup A$.
А како је X C^*-утопљен у βX, онда се та пресликавања могу проширити и до пресликавања која ће цео βX сликати у интервал $[0, 1]$.
Закључујемо да су полазни конула-скупови уједно и C^*-утопљени у βX. Следи да је и βX F-простор.
За други смер овог доказа, погледати у [17], Теорема 14.25.

(b), (c) Тривијално.

(d) У овом делу доказа искористићемо карактеризацију дату под (b).
Нека је X нормалан F-простор. Нека је X' затворен потпростор простора X. Треба показати да је потпростор X' такође F-простор. Узмимо нека два F_σ-скупа A, B потпростора X'. Дакле, $A, B \subseteq X'$. Треба показати да они имају дисјунктна затворења у X', и да је X' нормалан простор.
Пошто је $A, B \subseteq X' \subseteq X$, онда су скупови A, B F_σ-скупови и у простору X. За X знамо да је нормалан F-простор, па скупови A и B имају дисјунктна затворења у X, самим тим и у X'.
С обзиром да је X' затворен потпростор нормалног простора X, онда је и потпростор X', такође, нормалан. Позивајући се још једном на део овог тврђења под (b), закључујемо да је и X' F-простор.

(e) Приметимо да је довољно показати да дисјунктни отворени подскупови простора X имају дисјунктна затворења. Ево зашто. Нека важи да свака два дисјунктна отворена скупа имају дисјунктна затворења. Да ли је тада затворење сваког отвореног скупа отворен скуп? Претпоставимо да није. Нека за неки отворен скуп U, затворење $\overline{U}$ није отворен скуп. То значи да постоји $x \in \overline{U}$ тако да свака околина V тачке x има непразан пресек са $X \setminus \overline{U}$. То даље значи $x \in \overline{X \setminus \overline{U}}$, односно $x \in \overline{U} \cap \overline{X \setminus \overline{U}}$. Дакле, $\overline{U} \cap \overline{X \setminus \overline{U}} \neq \emptyset$, што је у контрадикцији са полазном претпоставком.

Нека су $U, V \subseteq X$ отворени и дисјунктни. Како је X F-простор који је и „ccc" (а пошто је X нормалан, онда је и X и сепарабилан), па можемо пронаћи густе конула-скупове $U' \subseteq U$ и $V' \subseteq V$. U' и V' су и C^*-утопљени скупови у X, па функција $f : U' \cup V' \to [0,1]$ дефинисана са $f(x) = 0$, ако $x \in U'$, и $f(x) = 1$, ако $x \in V'$, може да се прошири до пресликавања $\overline{f} : X \to [0,1]$. Пошто је $U \subseteq \overline{f}^{-1}[\{0\}]$ и $V \subseteq \overline{f}^{-1}[\{1\}]$, закључујемо да важи $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

$\square$

Следећи наводи дају тополошки превод услова H_ω.

Лема 2.2.5. *Нека је X компактан нула-димензионални простор. Следећа тврђења су еквивалентна:*

(1) $\mathcal{B}(X)$ задовољава услов H_ω.

(2) X је F-простор и сваки непразан G_δ-скуп простора X има бесконачну унутрашњост (унутрашњост таквих скупова је бесконачан скуп).

Доказ:

(1) $\Rightarrow$ (2) У овом смеру доказа користићемо Лему 2.2.4 (b).
Пошто је простор X компактан (и T_2), он је и нормалан.
Нека су U и V два оворена F_σ-скупа у X таква да је $U \cap V = \emptyset$. Пошто је у компактном, нула-димензионалном простору, сваки отворен F_σ-скуп унија пребројиво много отворено-затворених скупова, можемо написати:

$$U = \underset{n<\omega}{U_n} \quad \text{и} \quad V = \underset{n<\omega}{V_n},$$

при чему су U_n и V_n отворено-затворени скупови за све $n < \omega$. То даље значи да је $U_n \in \mathcal{B}(X)$ и $X \setminus V_n \in \mathcal{B}(X)$, за све $n < \omega$. Такође, како је $U \cap V = \emptyset$, важи и

$$U_{n_1} \cup ... \cup U_{n_k} \subseteq (X \setminus V_{m_1}) \cap ... \cap (X \setminus V_{m_l}),$$

за све $n_1, ..., n_k, m_1, ..., m_l$.
Дакле, $\{U_n : n < \omega\} < \{X \setminus V_n : n < \omega\}$ у $\mathcal{B}(X)$.
Пошто $\mathcal{B}(X)$ задовољава услов H_ω, постоји $W \in \mathcal{B}(X)$ такав да $U_n \subseteq W$ за све $n < \omega$, и $W \subseteq X \setminus V_n$ за $n < \omega$.
Приметимо да је W отворено-затворен скуп.
Сада имамо

$$U \subseteq W \ \text{ и } \ V \subseteq X \setminus W \quad \text{и} \quad W \cap X \setminus W = \emptyset,$$

па је X F-простор према Леми 2.2.4 (b).
Нека је сада B непразан G_δ-скуп у X. Тада је $B = \bigcap_{n<\omega} W_n$, где су W_n отворени скупови за све $n < \omega$. Како је $B \neq \emptyset$, онда постоји $x \in B$, односно, $x \in W_n$ за све $n < \omega$.
Пошто је X нула-димензионалан простор, за свако $n < \omega$ постоји W'_n који је отворено-затворен скуп за који је $x \in W'_n \subseteq W_n$.
Сада је $\{\emptyset\} < \{W'_n : n < \omega\}$ у $\mathcal{B}(X)$, па према H_ω постоји скуп $W' \in \mathcal{B}(X)$ за који је $\{W'\} > \{\emptyset\}$ и $W' \subseteq W'_n$ за $n < \omega$.
Пошто је W' отворен скуп, важи да је $W' \subseteq \inf(B)$, а пошто је $\{W'\} > \{\emptyset\}$, W' је бесконачан скуп.

(2) $\Rightarrow$ (1) Овај смер је тривијалан.

□

Последица 2.2.6. *Нека је X простор. Следећа тврђења су еквивалентна:*

(1) $X \approx \omega^*$,

(2) X је компактан нула-димензионални F-простор тежине $\mathfrak{c}$ у ком сваки непразан G_δ-скуп има бесконачну унутрашњост.

Доказ: Следи директно из Теореме 2.1.6 и Леме 2.2.5. □

Компактан нула-димензионални F-простор тежине $\mathfrak{c}$ у ком сваки непразан G_δ-скуп има бесконачну унутрашњост називамо **простор Паровиченка**. Претходна последица нам говори да је, под претпоставком да важи CH, ω^* јединствен, до на хомеоморфизам, простор Паровиченка.

Последица 2.2.6 је веома важан резултат, пошто је класа простора Паровиченка поприлично велика.

Дефиниција 2.2.7. Простор X је **локално-компактан** ако свака тачка простора X има базу која се састоји од компактних скупова.

Иако локална компактност омогућује бројне компактне околине у свакој тачки локално-компактног простора, за већину простора је довољно пронаћи по једну такву околину у свакој тачки.

Теорема 2.2.8. *Хаусдорфов простор X је локално-компактан акко за сваку тачку простора X постоји компактна околина.*

Из горње теореме следи да је сваки компактан Хаусдорфов простор уједно и локално-компактан.

Дефиниција 2.2.9. Простор X је **σ-компактан** ако се може записати као унија пребројиво много компактних скупова.

Сваки σ-компактан простор је и Линделефов простор.

Теорема 2.2.10 (Тицеова теорема о проширењу). *Нека је X нормалан простор, и нека је $F \subset X$ затворен потпростор. Нека је f непрекидно пресликавање из F у $\mathbb{R}$ или $\mathbb{I}$. Тада постоји непрекидно пресликавање ϕ из X у $\mathbb{R}$ или $\mathbb{I}$, такво да је $\phi(x) = f(x)$, за све $x \in F$.*

Једна од кључних теорема за испитивање простора Паровиченка јесте управо ова која следи у наставку.

Теорема 2.2.11. *Нека је X локално-компактан, σ-компактан и некомпактан простор. Тада је X^* F-простор и сваки непразан G_δ-скуп простора X^* има бесконачну унутрашњост.*

Доказ: Нека је $F \subseteq X^*$ и нека је F неки од F_σ-скупова.
Нека је пресликавање f задато са $f : F \to [0,1]$ непрекидно.

Према [21], ако је X локално-компактан простор, X^* је затворен у βX. X је σ-компактан, па се може записати као пребројива унија компактних скупова.
Пошто је скуп F баш F_σ у X^*, то значи да се F може записати као пребројива унија затворених скупова у X^*. Како знамо да је X^* затворен у βX, онда су скупови F затворени и у простору βX.
Дакле, закључујемо да је скуп F пребројива унија затворених скупова у простору βX, али пошто је βX и компактан простор, онда су ти скупови и компактни у βX. То следи из чињенице да је затворен скуп у компактном простору и компактан скуп.

Ако означимо са $Y = X \cup F$, знајући да су и X и F пребројиве уније компактних скупова, можемо уочити да је унија Y такође пребројива унија компактних скупова тј. σ-компактно. Y је и нормалан простор, јер нормалност је наследна према затвореним просторима.

Како је скуп F затворен у Y, можемо се позвати на Тицеову теорему о проширењу 2.2.10, на основу које пресликавање f можемо проширити до пресликавања $\overline{f} : Y \to [0,1]$. Ставимо да је g рестрикција тог пресликавања, $g = \overline{f} \restriction_X$. Сада, g можемо да проширимо до пресликавања $\overline{g} : \beta X \to [0,1]$. Пошто је очигледно да је $\overline{g} \restriction_F = f$, видимо да је $\tilde{f} = \overline{g} \restriction_{X^*}$ тражено проширење функције f.

Нека је $S \subseteq X^*$ непразан G_δ-скуп. Пошто је скуп $\{U' : U$ отворен у $X\}$ база простора X^*, јасно је да ћемо за све $n < \omega$ пронаћи отворене скупове $U_n \subseteq X$, такве да је

$$\overline{U}_{n+1} \subseteq U_n \text{ и } \emptyset \neq \bigcap_{n<\omega} U'_n \subseteq S.$$

(Мала напомена: Овде се подразумевају затворења у простору X, јер је сваки $U_n \subseteq X$.)
Знамо да је X локално-компактан и σ-компактан, па га можемо записати на следећи начин: $X = \bigcup_{n<\omega} K_n$, при чему је сваки K_n компактан и,

штавише, сваки компактан скуп $K \subseteq X$ садржан је у неком K_n.

За свако $n < \omega$ бирамо непразан отворен скуп $V_n \subseteq U_n$, такав да је

$$\overline{V_n} \text{ компактан скуп и } \overline{V_n} \text{ дисјунктно са скупом } K_n.$$

Даље, бирамо V на следећи начин: $V = \bigcup_{n<\omega} V_n$.
За све $n < \omega$, $V \setminus U_n$ има компактно затворење над скупом X, одакле је

$$V' \subseteq \bigcap_{n<\omega} U'_n \subseteq S.$$

Додатно, $V' \neq \emptyset$ докле год V нема компактно затворење у X.

Остаје још да се покаже да V' није коначан.
Изабраћемо индукцијом бесконачно много тачака у V'.
Нека је $m_1 = 1$, онда постоји тачка $x_1 \in V'$, јер $V'_1 \subseteq V'$.
Претпоставимо да су дати бројеви m_1, ..., m_n, и тачке x_1, ..., x_n које су све различите и све садржане у скупу V', и притом важи $x_i \in V'_i$, за $i \leq n$ и $V'_n \subseteq V'$, за све n.
Индекс m_{n+1} је такав да је $\overline{V_{m_1}} \cup ... \cup \overline{V_{m_n}} \subseteq K_{m_{n+1}}$. Сада бирамо тачку $x_{n+1} \in V'_{m_{n+1}}$, за коју знам да је различита од свих претходних тачака $x_1, ..., x_n$, јер је $\overline{V_{m_1}} \cup ... \cup \overline{V_{m_n}} \subseteq K_{m_{m+1}}$ и још је $\overline{V_{m_{n+1}}}$ дисјунктно са K_{m_n}.

□

Сада ћемо представити интересантну тополошку последицу раније дате Теореме 2.1.6.

Теорема 2.2.12. *Нека је X нула-димензионални, локално-компактан, σ-компактан и некомпактан простор тежине највише $\mathfrak{c}$. Тада су X^* и ω^* хомеоморфни.*

Доказ: Пошто је X нула-димензионални Линделефов простор, X је онда јако нула-димензионални простор и има највише $\mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$ отворено-затворених скупова. Следи да је X^* нула-димензионални компактан простор тежине највише $\mathfrak{c}$. Ако се позовемо на Теорему 2.2.11 и Лему 2.2.5, можемо закључити да $\mathcal{B}(X^*)$ задовољава услов H_ω. Ослањајући се још и на Теорему 2.1.6, долазимо до тога да су Б. алгебре $\mathcal{B}(X^*)$ и $\mathcal{P}(\omega)/fin$ изоморфне, а као последицу тога имамо да су, по Стоуновој дуалности, X^* и ω^* хомеоморфни. □

2.3 Непрекидне слике простора ω^*

У овом одељку бавићемо се карактеризацијом непрекидних слика простора ω^*.

Теорема 2.3.1. *Нека је $\mathcal{B}$ Булова алгебра кардиналности највише ω_1. Тада $\mathcal{B}$ може да се утопи у $\mathcal{P}(\omega)/fin$.*

Доказ: У овом доказу користимо апсолутно исту технику као у доказу „једног смера” Теореме 2.1.6, из $\mathcal{B}$ у $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{fin}$. $\square$

По Стоуновој дуалности (Теорема 1.1.35), Теорема 2.3.1 је еквивалент тврђењу да је сваки компактан и нула-димензионални простор тежине највише ω_1, заправо, непрекидна слика простора ω^*. То даље резултира питањем да ли исти закључак важи и без претпоставке да је простор нула-димензионални. То ће, заиста, и бити случај, што ће се и видети у теореми у наставку.

Лема 2.3.2. *Нека је X компактан простор тежине κ. Тада постоји компактан, нула-димензионални простор Y тежине κ, који може да се преслика сирјекцијом на простор X.*

Доказ: Нека је $\mathcal{B} \in [RO(X)]^\kappa$ тако да је $\mathcal{B}$ база простора X, и нека је $\mathcal{E} = \langle\langle \mathcal{B} \rangle\rangle \subseteq RO(X)$. Приметимо да важи $|\mathcal{E}| = \kappa$.

Тада можемо да одаберемо Y на следећи начин (користећи Теорему 1.1.35): Y је Стоунов простор Булове подалгебре $\mathcal{E}$. $\square$

Теорема 2.3.3. *Сваки компактан простор тежине највише ω_1 је непрекидна слика простора ω^*.*

Доказ: Нека је X компактан простор тежине ω_1, и нека Y испуњава услове из претходно наведене Леме. Ако бисмо се сада позвали на Теорему 2.3.1, онда бисмо $\mathcal{B}(Y)$ могли да „утопимо” у простор $\mathcal{P}(\omega)/fin$. Последично, уз Стоунову дуалност (Теорема 1.1.35), можемо да тврдимо да ω^* може да се преслика на тако изабрано Y функцијом која је сирјекција. $\square$

Последица 2.3.4. *Сваки компактан простор тежине наајвише $\mathfrak{c}$ је непрекидна слика простора ω^*.*

2.4 Затворени потпростори простора $\beta\omega$

У овом одељку даћемо тополошку карактеризацију затворених потпростора простора $\beta\omega$.

Ако је X затворен потпростор простора $\beta\omega$, онда X мора бити тежине највише $\mathfrak{c}$ и, такође, X мора бити нула-димензионални копмактан F-простор, узимајући у обзир Лему 2.2.4 (d). Доћи ћемо до тога да, под CH, ови услови нису само потребни, већ и довољни.

Дефиниција 2.4.1. Нека је X простор. Подскуп $B \subseteq X$ назива се **П-скуп** ако важи да је пресек пребројиво много околина скупа B такође околина од B.

Дефиниција 2.4.2. Нека су X и Y компактни простори. Нека је $A \subseteq X$ затворен скуп и нека је $f : A \to Y$ непрекидна сирјекција. Тада колекцију

$$\mathcal{B} = \{f^{-1}[\{y\}] : y \in Y\} \cup \{\{x\} : x \in X \setminus A\}$$

зовемо **непрекидна декомпозиција скупа** X.

Декомпозициони простор $X/\mathcal{B}$ означаваћемо са $\mathbf{X} \cup_\mathbf{f} \mathbf{Y}$.
Ако је пресликавање $\pi : X \to X \cup_f Y$ декомпозиционо пресликавање, онда можемо поистоветити Y и $\pi[A]$.

Лема 2.4.3. *Нека су X и Y компактни F-простори. Нека је $A \subseteq X$ затворен П-скуп, и нека је функција $f : A \to Y$ непрекидна сирјекција. Тада је $X \cup_f Y$ F-простор.*

Доказ: Нека су U и V дисјунктни отворени F_σ-подскупови од $X \cup_f Y$. Пошто је простор Y F-простор, онда можемо да тврдимо да важи $\overline{(U \cap Y)} \cap \overline{(V \cap Y)} = \emptyset$.

Нека су E и F затворене G_δ-околине од $\overline{(U \cap Y)}$ и $\overline{(V \cap Y)}$ редом, такве да је $E \cap F = \emptyset$. Тада су скупови $U \setminus E$ и $V \setminus F$ дисјунктни, отворени F_σ-подскупови скупа X, при чему оба та скупа немају пресек са скупом A. Како знамо да је X F-простор и да је скуп A заправо П-скуп, важиће следеће:

1. $\overline{(U \setminus E)} \cap \overline{(V \setminus F)} = \emptyset$,
2. $(\overline{(U \setminus E)} \cup \overline{(V \setminus F)}) \cap A = \emptyset$.

На основу (1) и (2) закључујемо $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.
Сада ћемо се осврнути и на Лему 2.2.4 (b), на основу које следи да је простор $X \cup_f Y$ F-простор. □

Дефиниција 2.4.4. Скуп A је **густ у** X ако и само ако сваки непразан отворен подскуп скупа X има непразан пресек са скупом A.

Дефиниција 2.4.5. Скуп A је **нигде густ у** X ако и само ако сваки непразан отворен подскуп скупа X садржи непразан отворен скуп дисјунктан са A.

Лема 2.4.6. *Нека је X компактан простор са својством да сваки непразан G_δ-скуп има бесконачну унутрашњост. Ако је $A \subseteq X$ затворен и нигде густ скуп, и ако је функција $f : A \to Y$ непрекидна сирјекција, онда и простор $X \cup_f Y$ такође има својство да сваки његов непразан G_δ-скуп има бесконачну унутрашњост.*

Дефиниција 2.4.7. За ординал α, $\mathbf{W}(\alpha)$ је тополошки простор дат на скупу $\{\beta : \beta < \alpha\}$ при чему је топологија генерисана фамилијом $\{(\beta, \alpha) : \beta < \gamma < \alpha\}$ и још важи $(\beta, \gamma) = \{\delta : \beta < \delta < \gamma\}$.

Лема 2.4.8. *ω^* садржи нигде густ затворен П-скуп A, који је хомеоморфан са ω^*.*

Доказ: Најпре, пронађимо неки простор који је нула-димензионални, локално-компактан, σ-компактан, тежине $\mathfrak{c}$ и некомпактан. Такав је, на пример, $\omega \times W(\omega_1 + 1)$. Означимо га са Z. По Теореми 2.2.12, простор ω^* можемо да представимо идентификујући га са једним од њему хомеоморфних простора, дакле са Z^*. Сада ћемо покушати да пронађемо одговарајући подскуп у простору Z^*.

Посматрајмо $A = (\omega \times \{\omega_1\})^*$. Тривијално важи $A \approx \omega^*$. Даље, из чињенице да је ω_1 П-тачка простора $W(\omega_1 + 1)$ следи да је и скуп A П-скуп. Јасно је да је овакав изабран скуп A и нигде густ скуп. □

Теорема 2.4.9. *Нека је X простор. Следећа тврђења су еквивалентна:*

1. *X је компактан, нула-димензионални F-простор тежине највише $\mathfrak{c}$,*

2. *X може да се „утопи" у $\beta\omega$ као затворен потпростор,*

3. *X може да се „утопи" у ω^* као нигде густ, затворен П-скуп.*

Доказ: Импликације (2) $\Rightarrow$ (1) и (3) $\Rightarrow$ (2) су тривијалне, тако да је довољно да се покаже да (1) $\Rightarrow$ (3).

Дакле, кренимо од тога да је X компактан, нула-димензионални F-простор тежине највише $\mathfrak{c}$. По претходно наведеној Леми 2.4.8 можемо да пронађемо нигде густ затворен П-скуп A у простору ω^*, који је хомеоморфан са ω^*. Додатно, позивајући се на Последицу 2.3.4, постоји непрекидна сирјекција $f : A \to X$. Обратимо сада пажњу на следећи декомпозициони простор: $Z = \omega^* \cup_f X$.

Пошто је f непрекидна сирјекција, видимо да је простор Z тежине $\mathfrak{c}$ и да је простор Z нула-димензионалан.

Скуп X можемо да идентификујемо са $\pi[X]$, при чему је $\pi[X] \subseteq Z$. Приметићемо да је комплемент од $\pi[X]$ у простору Z заправо исти као комплемент скупа A у простору ω^*. Пошто је комплемент скупа A отворен скуп, онда је отворен и комплемент скупа X (односно, комплемент од $\pi[X]$, а X и $\pi[X]$ смо већ поистоветили).
Како је пресек пребројиво много околина од A такође околина, онда то важи и за $\pi[X] = X$. Дакле, X је П-скуп.
Како је A нигде густ скуп, онда и $\pi[X] = X$ мора бити такође нигде густ.
Закључујемо, скуп X је нигде густ затворен П-скуп простора Z.

Ако се ослонимо на Леме 2.4.3 и 2.4.6, долазимо до тога да је Z компактан F-простор у ком ће сваки непразан G_δ-скуп имати бесконачну унутрашњост. Стога, ако још узмемо у обзир и Последицу 2.2.6, онда видимо да је $Z \approx \omega^*$. □

Дефиниција 2.4.10. Нека је $\mathcal{B}$ Булова алгебра. Кажемо да је алгебра $\mathcal{B}$ **слабо пребројиво комплетна** алгебра (eng. weakly countably complete - **WCC**) акко је Стоунов простор Булове алгебре $\mathcal{B}$ уједно и F-простор.

Преточено на језик Булових алгебри, имамо следеће:
Булова алгебра $\mathcal{B}$ је WCC Булова алгебра акко

$$(\forall B, C \in [\mathcal{B}]^{\leq\omega}) \text{ такве да } (\forall b \in B)(\forall c \in C)(b \wedge c = 0)$$

$$(\exists a \in \mathcal{B})(\forall b \in B)(\forall c \in C)\text{тако да важи } b \leq a \leq c'.$$

Следећа теорема коју наводимо је апсолутна алгебарска последица Теореме 2.4.9.

Теорема 2.4.11. *Нека је $\mathcal{B}$ Булова алгебра. Следећа тврђења су еквивалентна:*

1. *$\mathcal{B}$ је WCC и $|\mathcal{B}| \leq \mathfrak{c}$,*
2. *$\mathcal{B}$ је хомоморфна слика алгебре $\mathcal{P}(\omega)$.*

Последица 2.4.12. *Свака WCC Булова алгебра кардиналности највише $\mathfrak{c}$ је хомоморфна слика комплетне Булове алгебре.*

Сада следи интересантно тврђење за које није неопходна CH.

Теорема 2.4.13. *Нека је X компактан крајње неповезан простор тежине највише $\mathfrak{c}$. Тада скуп X може да се „утопи" у простор $\beta\omega$.*

Доказ: Можемо да претпоставимо по Теореми о потапању (1.3.14) да је $X \subseteq I^{\mathfrak{c}}$, при чему уобичајено важи
$I = [0,1]$. Како је простор $I^{\mathfrak{c}}$ сепарабилан [21], онда постоји непрекидна сирјекција $f : \beta\omega \to I^{\mathfrak{c}}$.

Посматрајмо рестрикцију $g = f \restriction_{f^{-1}[X]}$. Узмимо затворен скуп $Z \subseteq f^{-1}[X]$, такав да је $g \restriction_Z : Z \to X$ несводљиво пресликавање. Егзистенцију таквог скупа Z гарантује нам Лема Зорна 1.1.24, коју можемо применити након што поређамо до на обрнуту инклузију све затворене подскупове скупа $f^{-1}[X]$ који се сирјективно сликају на скуп X.

Даље, тврдимо да је $h = g \restriction_Z$ хомеоморфизам. У ту сврху, изаберимо две различите тачке $x, y \in Z$. Пронађимо у простору Z дисјунктне отворено-затворене околине U и V тачака x и y, редом. Како је h несводљиво пресликавање, биће

$$h(x) \in \overline{\operatorname{int} h[U]}, \quad h(y) \in \overline{\operatorname{int} h[V]}, \quad \operatorname{int} h[U] \cap \operatorname{int} h[V] = \emptyset.$$

Ако узмемо у обзир све горе написано, као и факт да је скуп X крајње неповезан, долазимо до закључка да је

$$\overline{\operatorname{int} h[U]} \cap \overline{\operatorname{int} h[V]} = \emptyset.$$

Крајња последица је управо оно што нам је и требало: $h(x) \neq h(y)$. $\square$

2.5 П-тачке и нехомогеност простора ω^*

Питање хомогености простора ω^* многима је било интересантно за изучавање.

Дефиниција 2.5.1. Простор X је **хомоген** ако за сваке две тачке a и b простора X важи да постоји хомеоморфизам простора X који слика једну тачку на другу.

Грубо речено, проблем хомогености заправо представља одговор на питање да ли су све тачке топлошки на исти начин смештене у простору.

Простор ω јесте хомоген, док за ω^* не можемо са сигурношћу то тврдити. Природно се намеће мисао да ли је, и под којим условима, и простор ω^* хомоген. Доказаћемо да, под претпоставком да важи CH, то неће бити случај. Рудин је то показао налазећи П-тачку у простору ω^*, и тачку у ω^* која није П-тачка. Самим тим, немогуће је наћи хомеоморфизам једне на другу због тога.

Теорема 2.4.9 гарантује да, под претпоставком да важи CH, постоји П-тачка у простору ω^*. Када би све тачке простора ω^* биле П-тачке, онда би компактност тог простора имплицирала да је ω^* коначан, а то очигледно није случај. Стога, ω^* садржи и П-тачке и тачке које то нису, па можемо да закључимо да простор ω^* није хомоген под CH. Такође, испоставиће се да ω^* није хомоген ни у ZFC.

Лема 2.5.2. *Простор ω^* не може се покрити са ω_1 нигде густих скупова.*

Доказ: Нека је $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ фамилија ω_1 нигде густих подскупова простора ω^*.

Ако се присетимо Леме 2.1.2 или Теореме 2.2.11, можемо пронаћи фамилију $\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ непразних отворено-затворених подскупова простора ω^*, тако да за све $\alpha < \omega_1$ важи:

1. $C_\alpha \cap D_\alpha = \emptyset$,
2. ако је $\beta < \alpha$, онда важи $C_\alpha \subseteq C_\beta$.

Стога, било која тачка пресека $\bigcap\limits_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$ не припада $\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} D_\alpha$.

Онда је $\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} D_\alpha \subsetneq \omega^*$. □

Последица 2.5.3. *Простор ω^* садржи П-тачке.*

Доказ: Нека је $\mathcal{A} = \{\overline{U} \setminus U : U \subseteq \omega^* \text{је отворен } F_\sigma\text{-скуп}\}$. По Хипотези континуума, мора да буде $|\mathcal{A}| \leq \omega_1$. Користећи Лему 2.5.2, имамо да је $\omega^* \setminus \bigcup \mathcal{A} \neq \emptyset$ и свака тачка овако записаног скупа је П-тачка. □

За сваке две П-тачке $x, y \in \omega^*$, под CH-претпоставком, постоји аутохомеоморфизам $h : \omega^* \to \omega^*$, такав да је $h(x) = y$, и све П-тачке су тополошки исте. [21]
С обзиром на резултате с почетка овог одељка, долазимо до дилеме да ли су П-тачке и тачке које нису П-тачке једини типови тачака у простору ω^*. Дилему ће решити прича која следи, где видимо да је структура простора ω^* ипак мало шареноликија.

Дефиниција 2.5.4. Тачку x простора X називамо **слаба П-тачка** ако за сваки пребројив скуп $F \subseteq X \setminus \{x\}$ важи да $x \notin \overline{F}$.

Теорема 2.5.5. *1. Постоји слаба П-тачка у простору ω^* која није П-тачка,*

2. Постоји тачка $x \in \omega^*$ таква да је

(а) за неки пребројив скуп $F \subseteq \omega^* \setminus \{x\}$ важи да $x \in \overline{F}$,

(б) за сваки пребројив дискретан скуп $D \subseteq \omega^* \setminus \{x\}$ важи да $x \notin \overline{D}$.

Доказ: Нека је $\mathcal{M}$ Булова алгебра Лебег-мерљивих подскупова скупа $[0,1]$ и нека је $\mathcal{N}$ идеал нула-скупова. Означимо са $\mathcal{B} = \mathcal{M}/_{\mathcal{N}}$. Овако задата Булова алгебра има следећа својства: $|\mathcal{B}| = \mathfrak{c}$ и $\mathcal{B}$ је комплетна алгебра. Стога, $X = \mathrm{st}(\mathcal{B})$ (Теорема 1.1.35) је један крајње неповезан компактан метрички простор тежине $\mathfrak{c}$. За скуп $M \in \mathcal{M}$, $\mathcal{N}$-класу еквиваленције означаваћемо са $[M]$.Тада су $\{x \in X : [M] \in x\}$ базни скупови топологије на X. Под ознаком λ подразумеваћемо Лебегову меру.

Став 1 Ако је скуп $D \subseteq X$ пребројив, онда је D нигде густ скуп.
Изаберимо произвољни скуп $M \in \mathcal{M}$ такав да $\lambda(M) > 0$, и уведимо низ $D = \{d_n : n < \omega\}$. Тачке d_n оваквог Стоуновог простора су заправо ултрафилтери Булове алгебре $\mathcal{B}$, па постоји елемент $M_n \in \mathcal{B}$ такав да

1. $[M_n] \in d_n$,
2. $\lambda(M_n) < 2^{-2-n} \cdot \lambda(M)$.
(Ако елемент ултрафилтера поделимо на коначно много делова, тачно један од делова биће у ултрафилтеру. Узмимо $M' = [0,1]$. Тада, можемо да га поделимо на коначно много делова тако да је сваки део мере мање од $\frac{1}{2^{n+2}} \cdot \lambda(M)$. То се може урадити тако што сваки следећи делимо на на два једнака дела, па сваки на још два, ..., док не испадну довољно мали. Пошто је M' у ултрафилтеру d_n, онда један такав део мора бити у d_n.)

Сада видимо да је колекција $\{x \in X : [M \setminus \bigcup_{n<\omega} M_n] \in x\}$ непразан отворен подскуп скупа $\{x \in X : [M] \in x\}$, која не садржи $\{d_n : n < \omega\}$.

Став 2 Скуп X је ccc.
Нека је $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ произвољна непребројива колекција скупова за које важи $\lambda(A) > 0$ за све $A \in \mathcal{A}$, док је фамилија

$$\{\{x \in X : [A] \in x\} : A \in \mathcal{A}\}$$

дисјунктна по паровима. Нека је $\mathcal{U}$ пребројива отворена база простора $[0,1]$, која је затворена за коначне уније и нека за све $U \in \mathcal{U}$ важи следеће:

$$\mathcal{A}(U) = \{A \in \mathcal{A} : \lambda(A \cap U) > \frac{1}{2}\lambda(U)\}.$$

За скуп $A \in \mathcal{A}$, постоји компактан скуп $K \subseteq A$ такав да је $\lambda(K) > 0$. За тако изабрано K постоји елемент фамилије $U \in \mathcal{U}$ при чему је $K \subseteq U$ и $\lambda(K) > \frac{1}{2}\lambda(U)$. Дакле,

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}.$$

Фамилију $\mathcal{A}$ смо бирали тако да буде непребројива, док за $\mathcal{U}$ знамо да је пребројива база простора $[0,1]$. Пошто је унија свих $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ по свим U једнака фамилији $\mathcal{A}$, онда ако би свако $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ било пребројиво, тада би $\mathcal{A}$ била пребројива унија пребројивих скупова, што је немогуће. Стога, мора да постоји елемент $U \in \mathcal{U}$ такав да је $\mathcal{A}(U)$ непребројив скуп. Међутим, то је у контрадикцији са датом дефиницијом фамилије $\mathcal{A}(U)$.

Став 3 Постоји фамилија $\mathcal{D}$ коју чине $\mathfrak{c}$ нигде густи подскупови простора X, таква да сваки нигде густ подскуп скупа X садржи елемент фамилије $\mathcal{D}$.
Пошто знамо да је простор X тежине $\mathfrak{c}$, ослањајући се на Став 2, довољно је изабрати за фамилију $\mathcal{D}$ колекцију свих нигде густих затворених G_δ-скупова.

Став 4 Постоји тачка $x \in Y^*$, при чему је $Y = \omega \times X$, тако да

1. **x је П-тачка простора Y^*,**
2. **ако је $D \subseteq \omega \times X$ произвољан нигде густ скуп, онда је $x \notin \overline{D}$.**

По претходној ставци, узимајући у обзир Хипотезу континуума, постоји фамилија $\mathcal{E}$ коју чине ω_1 нигде густи подскупови простора

Y, такви да сваки нигде густ подскуп скупа Y садржи елемент фамилије $\mathcal{E}$. Позивајући се на Теорему 2.2.12 долазимо до тога да је $Y^* \approx \omega^*$, а Лема 2.5.2 нам гарантује постојање тачке

$$x \in Y^* \setminus \Big(\bigcup\{E^* : E \in \mathcal{E}\} \cup \bigcup\Big\{\overline{U} \setminus U : U \subseteq Y^* \text{је отворен } F_\sigma\text{-скуп}\}\Big).$$

Овде смо се ослонили на то да је за свако $E \in \mathcal{E}$ скуп $E^* \subseteq Y^*$ нигде густ. Овако конструисано x је баш оно које смо и тражили. Даље, како је простор βY крајње неповезан компактан метрички простор тежине $\mathfrak{c}$, онда тај простор може да се „утопи” у ω^* као затворен П-скуп, по Теореми 2.4.9 (3). Ако кренемо од тога да је $x \in \beta Y$, као у Ставу 4, и ако идентификујемо скуп βY са П-скупом у простору ω^*, онда Став 1 и 2 заједно имплицирају да је x слаба П-тачка која није П-тачка, како у простору ω^*, тако и у простору βY.

Овим смо завршили доказ Тврђења под 1.

Доказ дела Тврђења под 2. има сличан ток, с тим што бисмо скуп X заменили пројективним покривачем Канторовог скупа. $\square$

Напомена 2.5.6. Теорема 2.5.5 биће тачна и у ZFC-моделу, под неким компликованијим аргументима.

Поглавље 3

Простори $\beta\omega$ и $\beta\omega \setminus \omega$ уз претпоставку да важи $\neg$CH

У овом поглављу видећемо како се простори $\beta\omega$ и ω^* понашају у различитим моделима у којима важи негација Хипотезе континуума ($\neg$CH). Сви CH резултати изведени у претходном поглављу овде су конзистентно нетачни, осим Теореме 2.5.5, која је истинита и у сваком ZFC-моделу.

Најпре уводимо неке од основних кардиналних карактеристика тополошких простора. Првенствено дефинишемо карактер тачке и **карактер простора**.

Дефиниција 3.0.1. **Карактер тачке** $p \in X$, у ознаци $\chi(p, X)$, је кардинални број дат са:

$$\chi(p, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ је база околина тачке } p\}.$$

Дефиниција 3.0.2. **Карактер простора** X, у ознаци $\chi(X)$, је кардинални број дат са:

$$\chi(X) = \sup\{\chi(p, X) : p \in X\} + \omega.$$

Затим долазимо до кардиналних функција које представљају природно уопштење тежине тополошког простора. Таква је, на пример, **π-тежина** тополошког простора.

Дефиниција 3.0.3. Нека је $\mathcal{V}$ колекција непразних отворених скупова простора X. Ако за сваки непразан отворен подскуп R простора X важи да постоји $V \in \mathcal{V}$ такав да је $V \subseteq R$, онда колекцију $\mathcal{V}$ називамо **π-база** простора X.

Дефиниција 3.0.4. **π-тежина простора** X, у ознаци $\pi\omega(X)$, је кардинални број дат са:

$$\pi\omega(X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ је } \pi\text{-база простора } X\}.$$

Сада уводимо и неке кардиналне функције које се базирају на локалним тополошким својствима.

Дефиниција 3.0.5. Нека је $\mathcal{V}$ колекција непразних отворених скупова простора X, и нека је тачка $p \in X$. Ако за сваку отворену околину R тачке p важи да постоји $V \in \mathcal{V}$ такав да је $V \subseteq R$, онда колекцију $\mathcal{V}$ називамо **π-база околина** тачке p.

Дефиниција 3.0.6. **π-карактер тачке** $p \in X$, у ознаци $\pi(p, X)$, је кардинални број дат са:

$$\pi(p, X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ је } \pi\text{-база околина тачке } p\}.$$

Дефиниција 3.0.7. **π-карактер простора** X, у ознаци $\pi(X)$, је кардинални број дат са:

$$\pi(X) = \sup\{\pi(p, X) : p \in X\} + \omega.$$

При изградњи математичке теорије, присутна је и идеја о директном производу структура. Формирањем директних производа одговарајућа теорија од постојећих добија нове моделе, што даје дубљи увид у саму теорију и проширује њену примену. Тако се и формирањем директних производа познатих тополошких структура добијају нове.

Дефиниција 3.0.8. Нека је $\{X_i : i \in I\}$ фамилија непразних скупова. Са $\prod\limits_{i \in I} X_i$ означавамо скуп свих функција $f : I \to \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, таквих да је $f(i) \in X_i$, за све $i \in I$. Овај скуп зовемо **директан производ** фамилије скупова $\{X_i : i \in I\}$.

Ради поједностављења нотације, функцију x, која је елемент производа $\prod\limits_{i \in I} X_i$, означавамо и са $x = \langle x_i : i \in I \rangle$. Притом, уместо $x(i)$ обично пишемо x_i. Под $x = \langle x_i : i \in I \rangle$ не подразумевамо да је то нека „I-торка", већ функција, односно, скуп уређених парова $\{\langle i, x_i \rangle : i \in I\}$. У складу са претходним договором о нотацији је

$$\prod_{i \in I} X_i = \{\langle x_i : i \in I \rangle : \forall i \in I \ (x_i \in X_i)\}.$$

Приметимо да Аксиома избора гарантује да је производ непразних скупова непразан.

Дефиниција 3.0.9. Нека је $\prod\limits_{i \in I} X_i$ производ фамилије непразних скупова. За $j \in I$ кажемо да је пресликавање π_j **пројекција** на X_j ако је $\pi_j : \prod\limits_{i \in I} X_i \to X_j$ такво да је $\pi_j(f) = f(j)$ за све $f \in \prod\limits_{i \in I} X_i$.

У низовној нотацији, за $x = \langle x_i : i \in I \rangle \in \prod\limits_{i \in I} X_i$ је $\pi_j(\langle x_i : i \in I \rangle) = x_j$.

Дефиниција 3.0.10. Нека су $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, тополошки простори. Топологију на $\prod_{i\in I} X_i$ генерисану подбазом

$$\mathcal{P} = \{\pi_i^{-1}[U] : i \in I, U \text{ је отворен у } X_i\}$$

називамо топологија производа или **топологија Тихонова**.

3.1 Карактеризација БА $\mathcal{P}(\omega)/fin$, II

Главни резултат Одељка 2.1, преточен у Теорему 2.1.6, није истинит под претпоставком да не важи Хипотеза континуума. Заправо, сама Теорема 2.1.6 представља баш еквивалент CH.

Теорема 3.1.1. CH *је еквивалентна тврђењу да су све Булове алгебре кардиналности* $\mathfrak{c}$ *које задовољавају услов* H_ω *међусобно изоморфне.*

Доказ: Доказ дајемо на језику топологије. Конструисаћемо два простора Паровиченка који не могу бити хомеоморфни под $\neg$CH.

Пример 1 Простор Паровиченка S који садржи тачку p за коју је $\chi(p, X) = \omega_1$.
Од раније знамо да је ω^* простор Паровиченка. Читајући Лему 2.2.5, уочавамо да постоји ω_1-низ $\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ отворено-затворених подскупова простора ω^* таквих да је $C_\alpha \subset C_\beta$ за $\beta < \alpha < \omega_1$. Нека је $P = \bigcap_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$, и нека је $S = X/P$ фактор-простор изведен из простора X, у односу на релацију еквиваленције где је свака тачка класа за себе, осим тачака скупа P - њих посматрамо као једну класу. По Леми 2.4.3, S мора бити F-простор. Скуп ω^* слика се на S количничким пресликавањем, а оно је непрекидно, отворено и затворено, пресликава базу на базу, и чува нула-димензионалност. Пошто је такво пресликавање и непрекидна сирјекција, оно чува и компактност. Дакле, и S је, такође, простор Паровиченка.
Ако замислимо да су у количничком простору све тачке из P колапсиране у једну тачку тј. $p = P$, онда је, очигледно, $\chi(p, S) = \omega_1$.

Пример 2 Простор Паровиченка T такав да је $\pi(x, T) = \mathfrak{c}$ за све $x \in T$.
Изаберимо $T = (\omega\times 2^{\mathfrak{c}})^*$. Пошто је простор $\omega\times 2^{\mathfrak{c}}$ нула-димензионалан, Линделефов простор тежине $\mathfrak{c}$, и простор T је такође нула-димензионалан и тежине $\mathfrak{c}$. Следи да је, према Теореми 2.2.11, простор T баш простор Паровиченка.
Означимо са π_α α-пројекцију $2^{\mathfrak{c}} \to 2$, за $\alpha < \mathfrak{c}$. Сада, за $\alpha < \mathfrak{c}$ и $i < 2$ дефинишемо

$$K(\alpha, i) = T \cap \overline{(\omega \times \pi_\alpha^{-1}[\{i\}])}.$$

Приметимо да је $K(\alpha, i)$ непразан отворено-затворен подскуп простора T, и да је $K(\alpha, i) = K(\alpha', i')$ ако и само ако је $\alpha = \alpha'$ и $i = i'$. Уводимо следећу нотацију

$$\mathcal{K} = \{K(\alpha, i) : \alpha < \mathfrak{c}, i < 2\}.$$

Став **Сваки пресек ω_1-различитих скупова фамилије $\mathcal{K}$ има празну унутрашњост.**

Довољно је, због симетрије, показати само да скуп $I = \bigcap_{\alpha<\omega_1} K(\alpha, 0)$ има непразну унутрашњост. Претпоставимо супротно, да претходно наведено није тачно. Тада постоји отворено-заторени скуп $U \subseteq \beta(\omega \times 2^{\mathfrak{c}})$ такав да је $\emptyset \neq U \cap T \subseteq I$. За свако $\alpha < \omega_1$ скуп $U \setminus (\omega \times \pi_\alpha^{-1}[\{0\}])$ је компактан подскуп простора $\omega \times 2^{\mathfrak{c}}$. Пошто пресек $U \cap (\omega \times 2^{\mathfrak{c}})$ има отворен покривач, онда исти није компактан, стога, постоји цео број n_α за који важи $\emptyset \neq U \cap (\{n_\alpha\} \times 2^{\mathfrak{c}}) \subseteq \{n_\alpha\} \times \pi_\alpha^{-1}[\{0\}]$. На основу свега претходно написаног, постоји цео број n такав да је скуп $A = \{\alpha < \omega_1 : n_\alpha = n\}$ бесконачан. Међутим, тада је $\{n\} \times \bigcap_{\alpha\in A} \pi_\alpha^{-1}[\{0\}]$ скуп простора $\{n\} \times 2^{\mathfrak{c}}$, који има непразну унутрашњост, што је у контрадикцији са полазном претпоставком.

Враћамо се конструкцији примера. Бирамо произвољно $x \in T$. Нека је $\mathcal{U}$ π-база околина тачке x. Фамилија $\mathcal{F} = \{K \in \mathcal{K} : x \in K\}$ је кардиналности $\mathfrak{c}$. За сваки скуп $K \in \mathcal{F}$ постоји $U(K) \in \mathcal{U}$ такво да је $U(K) \subseteq K$. Онда је $|\mathcal{U}| \geq |\mathcal{F}| = \mathfrak{c}$, јер нам Став изнад говори да је $\{|K \in \mathcal{K} : U(K) = U|\} \leq \omega$, за сваки скуп $U \in \mathcal{U}$. Следи да је $\pi(x, T) = \mathfrak{c}$, јер је већ познато да је тежина простора T највише $\mathfrak{c}$.

□

Горњи резултат намеће једно интересантно питање: Да ли је CH еквивалент тврђењу $(*)$ да Булове алгебре кардиналности $\mathfrak{c}$ које задовољавају услов H_ω имају изомофрна комплетирања? Ово питање су најпре разматрали Броверман и Вајс, [22], који су показали да $(*)$ ипак није ZFC-теорема. Последично, Ј. Мил и Вилијамс су утврдили, [23], да из $(*)$ следи да је $\mathfrak{c} < 2^{\omega_1}$. Међутим, остало је неразјашњено да ли $(*)$ важи акко CH.

3.2 Тополошка карактеризација Булове алгебре $\mathcal{P}(\omega)/fin$, II

Одељак 3.1 говори да је Последица 2.2.6, заправо, еквивалент са CH. Иако је непознато да ли је Теорема 2.2.12 еквивалентна са CH, лако се показује да иста није ZFC-теорема. У доказу Теореме 3.1.1 показали смо да, између осталог, простор $(\omega \times 2^{\mathfrak{c}})^*$ садржи непразан пресек ω_1 отворено-затворених скупова празне унутрашњости.

Један од основних комбинаторних принципа теорије скупова који је независан од ZFC је Мартинова аксиома. Односи се на бесконачне кардинале мање од $\mathfrak{c}$ и тврди да се они понашају као $\aleph_0$.

Аксиома 3.2.1 (MA). MA(κ): Нека је P парцијално уређен скуп који је ccc, и нека је $\mathcal{D}$ фамилија отворених густих подскупова скупа P тако да је $|\mathcal{D}| \leq \kappa$. Тада постоји филтер F на скупу P, такав да је $F \cap D \neq \emptyset$, за сваки скуп $D \in \mathcal{D}$.

MA нам тврди да за сваки кардинални број $\kappa < \mathfrak{c}$, MA(κ) важи.

У наредном одељку видећемо да и из MA$+\neg$CH следи да сваки непразан пресек ω_1 отворено-затворених подскупова простора ω^* има непразну унутрашњост. Као последицу тога имамо закључак да из MA$+\neg$CH следи да простори $(\omega \times 2^{\mathfrak{c}})^*$ и ω^* нису хомеоморфни. Овај аргумент није довољан да се докаже да простори попут $(\omega \times 2^{\omega})^*$ нису хомеоморфни са ω^*. Међутим, MA $+ \neg$CH гарантују да ако је X локално-компактан, σ-компактан, некомпактан простор пребројиве π-тежине, онда сваки непразан пресек мање од $\mathfrak{c}$ отворених подскупова простора X^* има непразну унутравшњост. Дакле, чак иако је простор X изузетно близак простору ω у тополошком смислу, опет не можемо тврдити да су притом и X^* и ω^* хомеоморфни.

Теорема 3.2.2. *Конзистентно је да простори ω^* и $(\omega \times W(\omega+1))^*$ нису хомеоморфни.*

Доказ: У [3] се може видети да је конзистентно да су сви хомеоморфизми простора ω^* индуковани бијекцијама ω, односно, за сваки аутохомеоморфизам $h : \omega^* \to \omega^*$ постоји пермутација $\pi : \omega \to \omega$ тако да $h = \beta\pi \restriction_{\omega^*}$. Показаћемо да је за сваку пермутацију π скупа ω, скуп фиксних тачака пресликавања $\beta\pi$ је отворено-затворени подскуп простора $\beta\omega$. Последица тога би била да је скуп фиксних тачака $\beta\pi \restriction_{\omega^*}$ истовремено и отворено-затворени подскуп простора ω^*.

Нека је $\pi : \omega \to \omega$ пермутација, и нека је $p \in \omega^*$ фиксна тачка пресликавања $\beta\pi$. Уводимо скуп E на следећи начин: $E = \{n < \omega : \pi(n) = n\}$. Ако $E \in p$, онда тачка p има отворено-затворену околину $\overline{E}$ која се састоји од фиксних тачака скупа $\beta\pi$. ($\pi(x) = x$, за све $x \in \overline{E}$)

Зато претпоставимо да $E \notin p$. Дефинишимо скуп $F = \omega \setminus E$. Како за све $n \in F$ важи $\pi(n) \neq n$, лако можемо поделити скуп F на два дела, F_0 и F_1 тако да $\pi[F_0] \cap F_0 = \emptyset$ и $\pi[F_1] \cap F_1 = \emptyset$. Без умањења општости, нека је $F_0 \in p$. Тада је $\pi[F_0] \in \beta\pi(p)$, одакле је $p \neq \beta\pi(p)$, што је контрадикција. Закључујемо да је скуп фиксних тачака простора $\beta\pi$ отворен, односно, отворено-затворен.

Да бисмо у оваквом Шелаховом моделу показали да ω^* и $(\omega\times W(\omega+1))^*$ нису хомеоморфни, довољно је да покажемо да постоји аутохомеоморфизам h простора $(\omega \times W(\omega + 1))^*$ такав да скуп $\mathrm{Fix}(h)$ фиксних тачака пресликавања h није отворено-затворен. У ту сврху, нека су $E, F \subseteq \omega$ два комплементарна бесконачна скупа и нека је $\pi : \omega \to \omega$ пермутација таква да је $\pi[E] = F$ (што значи и $\pi[F] = E$).
Дефинишемо пресликавање $f : \omega \times W(\omega + 1) \to \omega \times W(\omega + 1)$ на следећи начин:

$$\begin{cases} f(\langle n, m\rangle) = \langle n, \pi(m)\rangle, \ (m \in \omega), \\ f(\langle n, \omega\rangle) = \langle n, \omega\rangle. \end{cases}$$

Означимо са h рестрикцију $h = \beta f \restriction_{(\omega\times W(\omega+1))^*}$. Лако се може уочити да важи и следеће

$$\mathrm{Fix}(h) = (\omega \times \{\omega\})^*,$$

што значи да $\mathrm{Fix}(h)$ није отворено-затворен скуп. □

3.3 Непрекидне слике простора ω^*, II

Последица 2.3.4 није ZFC-резултат. Кунен је показао (види [5], одељци 12.3 и 12.7) да у моделу формираном додавањем ω_2 Коенових реалних бројева, не постоји ω_2-низ подскупова простора ω који је $\subseteq^*$- строго опадајући, где је $X \subseteq^* Y \Leftrightarrow |X \setminus Y| < \aleph_0$.

Важно је навести и следећа два тврђења, која су последица Мартинове аксиоме.

Тврђење 3.3.1 ($P(\mathfrak{c})$). *Ако је $\mathcal{A}$ фамилија која садржи мање од $\mathfrak{c}$ подскупова простора ω, таквих да за све $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ важи $|\bigcap\mathcal{B}| = \omega$, тада постоји бесконачан скуп $B \subseteq \omega$ такав да за све $A \in \mathcal{A}$ важи $|B\setminus A| < \omega$.*

Тврђење 3.3.2 ($S(\mathfrak{c})$). *Претпоставимо да су фамилије $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ фамилије које садрже мање од $\mathfrak{c}$ подскупова простора ω, таквих да за све $A \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{F} \in [\mathcal{B}]^{<\omega}$ важи $|A \cap \bigcap\mathcal{F}| = \omega$. Тада постоји бесконачан скуп $C \subseteq \omega$, такав да за све $A \in \mathcal{A}$ важи $|C\cap A| = \omega$, и за све $B \in \mathcal{B}$ важи $|C\setminus B| < \omega$.*

Сада можемо да пређемо на генерализацију Теореме 2.3.3.

Теорема 3.3.3. *Сваки компактан простор тежине мање од $\mathfrak{c}$ је непрекидна слика простора ω^*.*

Доказ: Нека је Y компактни простор тежине κ, при чему је $\kappa < \mathfrak{c}$. Можемо да претпоставимо да је Y, без умањења општости, нигде густ подскуп простора $[0, 1]^\kappa$. Пошто је $\kappa \leq \mathfrak{c}$, онда је $[0, 1]^\kappa$ сепарабилан простор, па стога, можемо да пронађемо пребројив густ скуп $D \subseteq [0, 1]^\kappa$ који је дисјунктан са Y.

Нека је $\mathcal{E}$ отворена база простора $[0,1]^\kappa$, која је затворена за коначне уније, и за коју важи $|\mathcal{E}| = \kappa$. Уведимо још и следеће две фамилије скупова

$$\mathcal{A} = \{E \cap D : E \in \mathcal{E} \wedge E \cap Y \neq \emptyset\},$$

и

$$\mathcal{B} = \{E \cap D : E \in \mathcal{E} \wedge Y \subseteq E\}.$$

Лако уочавамо да фамилије $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ задовољавају почетне претпоставке тврђења $S(\mathfrak{c})$. Последично, можемо пронаћи подскуп $J \subseteq D$ такав да

1. $|A \cap J| = \omega$, за све $A \in \mathcal{A}$,

2. $|J \setminus B| < \omega$, за све $B \in \mathcal{B}$.

Нека је $Z = Y \cup J$. Тврдимо да је скуп Z компактан и да је J густ скуп изолованих тачака скупа Z. Ако би та претпоставка била тачна, онда је Z компактификација простора ω, што даље имплицира да је Y непрекидна слика простора ω^*.

Ако је $E \in \mathcal{E}$ и $E \cap Y \neq \emptyset$, онда је $E \cap D \in \mathcal{A}$, па следи да је $E \cap J$ бесконачан пресек. Одатле, скуп J је густ у Z.

Нека је x гранична тачка скупа J, која не припада том скупу. Како је $\mathcal{E}$ база која је затворена за коначне уније, и како је Y компактан скуп, постоје дисјунктни скупови $E_0, E_1 \in \mathcal{E}$, за које важи $Y \subseteq E_0$ и $x \in E_1$. На основу свега написаног, биће $E_0 \cap D \in \mathcal{B}$, што уз горњу ставку 2. доводи до закључка да је $J \setminus E_0$ коначан скуп. Међутим, скуп E_1 садржи бесконачно много тачака скупа J, што је контрадикција.

Закључујемо да је Z компактан скуп и да је J дискретан у простору Z. □

Горња теорема отвара питање да ли из Мартинове аксиоме директно следи да је сваки компактан простор тежине $\mathfrak{c}$ непрекидна слика простора ω^*. Испоставиће се да то није случај.

Нека је X простор који је конструсан на начин идентичан као у Теореми 2.5.5, дакле, Стоунов простор са Буловом алгебром Лебег-мерљивих подскупова скупа $[0,1]$. Није доречено да ли је простор X непрекидна слика скупа ω^*. Из глобалних својстава простора X није могуће доћи до тог закључка, јер је Бел [2] у ZFC-моделу конструисао пример простора који су веома слични простору X и који су, уз то, непрекидне слике скупа ω^*.

Показано је и да је сваки нормалан компактан простор непрекидна слика скупа ω^*. Велико питање у овој области које је још увек остало отворено је да ли је сваки пребројив компактан метрички простор непрекидна слика скупа ω^*.

3.4 Затворени потпростори простора $\beta\omega$, II

У одељку 2.4 показано је да се сваки компактан нула-димензионални F-простор тежине $\mathfrak{c}$ утапа у простор $\beta\omega$, под претпоставком да важи CH. Дубљом анализом долази се до разматрања следећег тврђења.

Тврђење 3.4.1. **FE** : *Сваки компактан нула-димензионални F-простор може да се утопи у неки крајње неповезан простор.*

Приметимо да претходно тврђење на језику Булових алгебри заправо подразумева да је свака WCC Булова алгебра хомоморфна слика комплетне Булове алгебре.

Згодно је рашчланити тврђење FE на следећа два: **FE** $=$ **FB** $+$ **BE**.

Тврђење 3.4.2. **FB** : *Сваки компактан нула-димензионални F-простор може да се утопи у неки базично неповезан простор.*

Тврђење 3.4.3. **BE** : *Сваки базично неповезан компактан простор може да се утопи у неки крајње неповезан простор.*

У одељку 2.4 смо показали, специјално, да се рестрикција тврђења **FE** на просторе тежине $\mathfrak{c}$ слаже са CH. Ван Дауен и ван Мил су конструисали [24], под претпоставком да је MA $+ \mathfrak{c} = \omega_2$, пример компактног нула-димензионалног F-простора V тежине $\mathfrak{c}$, који не може да се утопи ни у један базично неповезан простор. Као последица тога долази закључак да ни FE, ни FB нису ZFC-теореме. Врло мало се истраживало о тврђењу BE, међутим, познато је да се Чех-Стоунова компактификација било ког П-простора утапа у крајње неповезан простор. Крајњи закључак је да Теореме 2.4.9, 2.4.11 и Последица 2.4.12 не важе под претпоставком да је MA $+ \mathfrak{c} = \omega_2$.

3.5 П-тачке и нехомогеност простора ω^*, II

Годинама уназад, отвореним проблемом се сматрало питање да ли П-тачке у простору ω^* могу да буду конструисане без коришћења додатних скуп-теоретских хипотеза. На крају, Шелах је показао да је конзистентно да П-тачке не постоје у простору ω^*, [3]. Стога, ни Последица 2.5.3 не може важити у ZFC. У наредним поглављима биће речи о томе да ω^* није хомоген простор.

Теорема 2.5.5 важи у ZFC.

Поглавље 4

Парцијална уређења простора $\beta\omega$

У Глави 4 концентрисаћемо се на различита парцијална уређења на компактификацији $\beta\omega$, која се могу користити при доказима да извесни простори нису хомогени. Пошто се Чех-Стоунова компактификација на ω може посматрати као простор ултрафилтера на ω, уређења која ћемо посматрати у овом делу рада су, заправо, уређења на ултрафилтерима. Показаћемо да постоје два ултрафилтера на ω који су Рудин-Кислер неупоредиви.

4.1 Рудин-Кислер уређење на простору $\beta\omega$

За сваку дату функцију $f : \omega \to \omega$ и њену Стоунову екстензију $\beta f : \beta\omega \to \beta\omega$ лако се уочава да је

$$\beta f(p) = q \quad \text{акко} \quad (\forall P \in p)\ f[P] \in q \quad \text{акко} \quad (\forall Q \in q)\ f^{-1}[Q] \in p.$$

Дефинишемо релацију еквиваленције $\sim$ на простору $\beta\omega$ на следећи начин:

$$p \sim q \text{ акко постоји пермутација } \pi : \omega \to \omega \text{ са } \beta\pi(p) = q.$$

Јасно је да је овако уведена релација $\sim$ заиста релација екиваленције.

Нека су $p, q \in \beta\omega$. Уводимо следећу нотацију:

$$p \preceq q \text{ акко постоји } f \in \omega^\omega \text{ тако да је } \beta f(q) = p.$$

Теорема у наставку, чији доказ нећемо обрађивати, сумира релевантне информације које дају везу између релација $\sim$ и $\preceq$.

Теорема 4.1.1. *Нека је $p, q, r \in \beta\omega$. Тада важи:*

1. $p \preceq p$;

2. ако је $p \preceq q$ и $q \preceq r$, тада је $p \preceq r$;

3. ако је $p \preceq q$ и $q \preceq p$, тада је $p \sim q$.

Приметимо да теорема изнад показује да је количничка релација дефинисана са $\preceq$ на фактор-скупу $\beta\omega/_\sim$ парцијално уређење.

Релација $\preceq$ на компактификацији $\beta\omega$ се назива **Рудин-Кислер** уређење на $\beta\omega$. Ако је $p \in \beta\omega$, онда је скуп $\{q \in \beta\omega : q \preceq p\}$ еквивалентан скупу

$$\{\beta f(p) : f \in \omega^\omega\},$$

и стога, има кардиналност највише $\mathfrak{c}$, пошто је $|\omega^\omega| = \mathfrak{c}$. Да ли за сваку тачку $p \in \beta\omega$ постоји тачка $q \in \beta\omega$, таква да важи $q \not\preceq p$? У овом тренутку нам недостаје алат да бисмо одговорили на ово питање, пошто још увек нисмо дошли до закључних ZFC-резултата у вези са $\beta\omega$ компактификацијом. Заправо, нисмо утврдили чак ни кардиналност простора $\beta\omega$. Одредићемо најпре $|\beta\omega|$, да бисмо дали одговор на питање које се наметнуло изнад.

Лема 4.1.2. *(a) Постоји фамилија $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ бесконачних подскупова скупа ω, таква да за $\alpha < \beta$ важи да је пресек $A_\alpha \cap A_\beta$ коначан.*

(b) Постоји фамилија $\{\langle A^0_\alpha, A^1_\alpha\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\}$ парова дисјунктних подскупова скупа ω, таква да за све коначне скупове $F \subseteq \mathfrak{c}$ и за све функције $f : F \to 2$ важи да је пресек $\bigcap_{\alpha \in F} A^{f(\alpha)}_\alpha$ бесконачан.

(c) $|\beta\omega| = 2^{\mathfrak{c}}$, и додатно, ако је $A \subseteq \beta\omega$ пребројиво бесконачан, онда је $|\overline{A}| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Доказ: (a) За сваки ирационалан број $r \in \mathbb{R}$ изаберимо низ рационалних бројева $S(r)$ који конвергира ка r. Фамилија $\{S(r) : r$ је ирационалан$\}$ очигледно задовољава услове леме под (a), осим што се не састоји од подскупова скупа ω, већ од пребројиво много рационалних скупова. Међутим, између поменута два скупа постоји бијекција, па тај случај не представља проблем. Рецимо, посматрајмо пресликавање $h : \mathbb{Q} \to \omega$ које је бијекција. Тада ће и пресликавање $\tilde{h} : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \to \mathcal{P}(\omega)$ задато са $\tilde{h}(A) = h[A] \in \omega$ бити бијекција. На тај начин добијамо фамилију подскупова ω.

(b) Нека је $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ фамилија подскупова скупа ω која задовољава услове леме под (a). За свако $\alpha < \mathfrak{c}$, дефинишимо

$$B^0_\alpha = \{F \in [\omega]^{<\omega} : F \cap A_\alpha \neq \emptyset\}, \text{ и } B^1_\alpha = [\omega]^{<\omega} \setminus B^0_\alpha.$$

Сваки пресек $B^0_{\alpha_1} \cap ... \cap B^0_{\alpha_k} \cap B^1_{\beta_1} \cap ... \cap B^1_{\beta_l}$ је бесконачан. Зашто? Важи

$$B^0_{\alpha_1} \cap ... \cap B^0_{\alpha_k} = \{F \in [\omega]^\omega : F \cap A_{\alpha_1} \neq \emptyset \wedge ... \wedge F \cap A_{\alpha_k} \neq \emptyset\}$$

и

$$B^1_{\beta_1} \cap ... \cap B^1_{\beta_l} = \{F \in [\omega]^\omega : F \cap A_{\beta_1} = \emptyset \wedge ... \wedge F \cap A_{\beta_l} = \emptyset\}.$$

Сваки $A_{\alpha_i} \setminus (A_{\beta_1} \cup ... \cup A_{\beta_l})$ је бесконачан на основу дела ове Леме под a), па можемо изабрати бесконачно много скупова F (на бесконачно много начина).

Овако задата фамилија $\{\langle B^0_\alpha, B^1_\alpha\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\}$ испуњава услове тражене фамилије у Леми под (b), осим што није дефинисана на скупу ω, већ на пребројивом скупу $[\omega]^{<\omega}$. Међутим, ни у овом случају, та чињеница неће представљати проблем, јер постоји бијекција између ω и $[\omega]^{<\omega}$.

(c) Нека је $\{\langle A^0_\alpha, A^1_\alpha\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\}$ фамилија парова дисјунктних подскупова скупа ω за коју важи хипотеза из Леме под (b).

Нека је дата функција $f \in 2^\mathfrak{c}$. Изаберимо тачку $p_f \in \beta\omega$, такву да је $\{A^{f(\alpha)}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq p_f$. Оно што је очигледно је да $|\beta\omega| \geq |\{p_f : f \in 2^\mathfrak{c}\}| = 2^\mathfrak{c}$. Пошто је $|\mathcal{P}(\omega)| = 2^\omega = \mathfrak{c}$, и пошто је сваки ултрафилтер простора $\beta\omega$ заправо неки подскуп скупа $\mathcal{P}(\omega)$, онда ултрафилтера простора $\beta\omega$ може бити највише онолико колико има подскупова скупа $\mathcal{P}(\omega)$, то јест $2^\mathfrak{c} = 2^{2^\omega}$. Стога је $|\beta\omega| \leq 2^\mathfrak{c}$. Закључујемо да мора бити $|\beta\omega| = 2^\mathfrak{c}$.

Тврђење из ове Леме под (c) сада следи из Теореме 1.5.2 [1] и тврђења да сваки пребројив бесконачан простор садржи пребројив бесконачан дискретан потпростор.

□

Доказ који смо управо видели даје нам две битне информације. Наиме, комбинаторни аргументи су важни ако се изучава простор $\beta\omega$ без додатних хипотеза, и за изучавање извесних фамилија подскупова скупа ω једноставније је не дефинисати их директно на скупу ω, већ на одговарајућем пребројивом скупу, којим је у датој ситуацији лакше баратати.

Сада се враћамо на питање: Ако је дата тачка $p \in \beta\omega$, да ли постоји тачка $q \in \beta\omega$ таква да је $q \not\preceq p$? Како је $|\{q \in \beta\omega : q \preceq p\}| \leq \mathfrak{c}$ и $|\beta\omega| = 2^\mathfrak{c}$, по Леми 4.1.2 ($c$), одговор на питање је прилично једноставан - таква тачка q постоји. Хајде да још мало конкретизујемо питање: ако је дата тачка $p \in \omega^*$, да ли тада постоји тачка $q \in \beta\omega$ таква да важи $p \not\preceq q$ и $q \not\preceq p$? Одговор на ово питање још увек није познат. Под CH-претпоставком, лако је уочљиво да је одговор потврдан, али у ZFC, одговор је непознат. Међутим, оно што јесте познато је да постоје барем тачке $p, q \in \beta\omega$ такве да је $p \not\preceq q$ и $q \not\preceq p$, и такве тачке ћемо конструисати у наставку овог одељка.

Дефиниција 4.1.3. Нека је $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ филтер чији ниједан елемент није коначан. Индексирана фамилија $\{\langle A^0_i, A^1_i\rangle : i \in I\}$ парова дисјунктних подскупова скупа ω назива се **независна фамилија с обзиром на $\mathcal{F}$** ако је за свако $\sigma \in [I]^{<\omega}$, $f \in 2^{\sigma}$ и $F \in \mathcal{F}$ скуп $F \cap \bigcap_{i\in\sigma} A_i^{f(i)}$ бесконачан.

Нека $\mathcal{CF}$ означава филтер коконачних подскупова скупа ω.

Лема 4.1.4. *Постоји независна фамилија* $\{\langle A^0_\alpha, A^1_\alpha\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ *с обзиром на* $\mathcal{CF}$.

Доказ: Доказ следи на основу Леме 4.1.2 (b). □

Нека је $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ фамилија са својством коначног пресека. Са $\langle\mathcal{A}\rangle$ ћемо означавати филтер на ω који је генерисан скупом $\mathcal{A}$.

Лема 4.1.5. *Нека су дати филтери* $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, *и претпоставимо да је* $\{\langle A^0_i, A^1_i\rangle : i \in I\}$ *независна фамилија с обзиром на* $\mathcal{F}$, *као и с обзиром на* $\mathcal{G}$. *За свако* $f \in \omega^\omega$ *постоји коначан скуп* $J \subseteq I$ *и подскуп* $A \subseteq \omega$ *такав да је* $\{\langle A^0_i, A^1_i\rangle : i \in I \setminus J\}$ *независна фамилија с обзиром на* $\langle\mathcal{F} \cup \{A\}\rangle$, *као и с обзиром на* $\langle\mathcal{G} \cup \{\omega \setminus f^{-1}[A]\}\rangle$.

Доказ: Фиксирајмо произвољни индекс $a \in I$.

- **Случај 1**: $\{\langle A^0_i, A^1_i\rangle : i \in I \setminus \{a\}\}$ је независна фамилија с обзиром на $\langle\mathcal{G} \cup \{\omega \setminus f^{-1}[A^0_a]\}\rangle$.
  У овом случају можемо одабрати да је $A = A^0_a$ и да је $J = \{a\}$. Јасно се види да су то баш они A и J које смо тражили.

- **Случај 2**: Све оно што није Случај 1.
  Постоји коначан индексни скуп $K \subseteq I \setminus \{a\}$ и функција $\tilde{f} \in 2^K$ и елемент $G \in \mathcal{G}$ тако да је

  $$(*) \qquad \Big|\bigcap_{i\in K} A_i^{\tilde{f}(i)} \cap G \cap (\omega \setminus f^{-1}[A^0_a])\Big| < \omega.$$

  Сада изберимо скупове A и J на следећи начин: $A = \omega \setminus A^0_a$, $J = K \cup \{a\}$. Јасно се види да је $\{\langle A^0_i, A^1_i\rangle : i \in I \setminus J\}$ независна фамилија с обзиром на филтер $\langle\mathcal{F} \cup \{A\}\rangle$, па преостаје да се покаже да је $\{\langle A^0_i, A^1_i\rangle : i \in I \setminus J\}$ независна фамилија и с обзиром на филтер $\langle\mathcal{G} \cup \{\omega \setminus f^{-1}[A]\}\rangle$. У ту сврху, нека је $L \subseteq I \setminus J$ коначан скуп и нека је $g \in 2^L$. Изаберимо произвољан елемент фамилије $G_0 \in \mathcal{G}$. Тада је

  $$\bigcap_{i\in L} A_i^{g(i)} \cap G_0 \cap (\omega \setminus f^{-1}[A]) = \bigcap_{i\in L} A_i^{g(i)} \cap G_0 \cap f^{-1}[A^0_\alpha]$$
  $$\supseteq \bigcap_{i\in L} A_i^{g(i)} \cap \bigcap_{i\in K} A_i^{\tilde{f}(i)} \cap (G_0 \cap G) \cap f^{-1}[A^0_a],$$

  а по $(*)$ и претпоставци с почетка да је $\{\langle A^0_i, A^1_i\rangle : i \in I\}$ независна фамилија с обзиром на филтер $\mathcal{G}$, овај пресек је бесконачан.

$\square$

Коначно, долазимо до најважнијег резултата овог одељка.

Теорема 4.1.6. *Постоје тачке $p, q \in \beta\omega$ такве да важи $p \not\preceq q$ и $q \not\preceq p$.*

Доказ: Према Леми 4.1.4 постоји независна фамилија $\{\langle A^0_\alpha, A^1_\alpha\rangle : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ с обзиром на $\mathcal{CF}$. Нека је низ $\{f_\alpha : 1 \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$ енумерација скупа ω^ω дужине $\mathfrak{c}$. Трансфинитном индукцијом по α ћемо конструисати $\mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{G}_\alpha$ и $\mathcal{K}_\alpha \subseteq 2^\omega$, тако да је

1. $\mathcal{F}_\alpha$ и $\mathcal{G}_\alpha$ су филтери на скупу ω и $\{\langle A^0_\xi, A^1_\xi\rangle : \xi \in \mathcal{K}_\alpha\}$ је независна фамилија с обзиром на $\mathcal{F}_\alpha$, као и на $\mathcal{G}_\alpha$;
2. $\mathcal{K}_0 = 2^\omega$ и $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}_0 = \mathcal{CF}$;
3. Ако је $\kappa < \alpha$, онда је $\mathcal{F}_\kappa \subseteq \mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{G}_\kappa \subseteq \mathcal{G}_\alpha$ и $\mathcal{K}_\alpha \subseteq \mathcal{K}_\kappa$;
4. За свако α биће $|2^\alpha \setminus \mathcal{K}_\alpha| \leq |\alpha| \cdot \omega$;
5. За свако $\alpha \geq 1$ постоје скупови $A, B \subseteq \omega$ такви да $\{A, \omega \setminus f_\alpha^{-1}[B]\} \subseteq \mathcal{F}_\alpha$ и $\{B, \omega \setminus f_\alpha^{-1}[A]\} \subseteq \mathcal{G}_\alpha$.

Претпоставимо да имамо комплетирану конструкцију за све $\kappa < \alpha$, $\alpha < \mathfrak{c}$. Одаберимо пресеке на следећи начин: $\mathcal{K} = \bigcap\limits_{\kappa<\alpha} \mathcal{K}_\kappa$, $\mathcal{G} = \bigcup\limits_{\kappa<\alpha} \mathcal{G}_\kappa$ и $\mathcal{F} = \bigcup\limits_{\kappa<\alpha} \mathcal{F}_\kappa$. Приметимо да је према 4., $|\mathcal{K}| = \mathfrak{c}$, и према 1., $\{\langle A^0_\xi, A^1_\xi\rangle : \xi \in \mathcal{K}\}$ је независна фамилија с обзиром на филтер $\mathcal{F}$, као и с обзиром на филтер $\mathcal{G}$. Применићемо још и Лему 4.1.5 два пута. Једном на $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$ и f_α да добијемо $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{K}' \setminus J$, а други пут на $\mathcal{G}'$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{K}' \setminus J$ и f_α. Лако се долази до конструкције филтера $\mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{G}_\alpha$ и $\mathcal{K}_\alpha$, који притом задовољавају све наведене ставке од 1. до 5.

Нека је тачка $p \in \beta\omega$ проширење $\bigcup\limits_{\alpha<\mathfrak{c}} \mathcal{F}_\alpha$ и нека је тачка $q \in \beta\omega$ проширење $\bigcup\limits_{\alpha<\mathfrak{c}} \mathcal{G}_\alpha$. Према 5., закључујемо да следи да важи $p \not\preceq q$ и $q \not\preceq p$. $\square$

Напомена 4.1.7. Тачке p и q наведене у претходној Теореми 4.1.6 називају се **$\preceq$-неупоредиве**. Приметимо и то да ако важи да су тачке $p, q \in \beta\omega$ $\preceq$-неупоредиве, онда обе и p и q припадају скупу ω^*.
Да бисмо ово видели довољно је показати да је $n \preceq p$ за све ултрафилтере $p \in \beta\omega$. (Када би, без умањења општости, било $p \in \beta\omega \setminus \omega^*$, онда би било $p \preceq q$.)
Нека је пресликавање $f : \omega \to \omega$ дато са $f(m) = n$ за све $m < \omega$. Тада је за све $A \subseteq \omega$:

$$\text{или } f^{-1}(A) = \omega \in p \text{ (ако } n \in A),$$
$$\text{или } f^{-1}(A) = \emptyset \notin p \text{ (ако } n \notin A).$$

Дакле, f сведочи да је $n \preceq p$.

4.2 Рудин-Фролик уређење на скупу ω^*

Рудин-Фролик уређење $\sqsubseteq$ на скупу ω^* дефинише се на следећи начин:

$$p \sqsubseteq q \text{ акко постоји утапање } h : \beta\omega \to \omega^* \text{ тако да је } h(p) = q.$$

Веза између овог уређења и Рудин-Кислер уређења о ком је било речи у Одељку 4.1 дата је у следећој леми.

Лема 4.2.1. *Ако је $p, q \in \omega^*$ и ако важи $p \sqsubseteq q$, онда је и $p \preceq q$.*

Доказ: Нека је $h : \beta\omega \to \omega^*$ утапање дато са $h(p) = q$. Како је $h[\omega]$ дискретан простор, онда постоји низ C_n подскупова скупа ω такав да за све $n < \omega$ важи:

1. $h(n) \in \overline{C_n}$;
2. ако је $n < m$, онда је $C_n \cap C_m = \emptyset$.

Додајући скуп $\omega \setminus \bigcup_{n<\omega} C_n$ скупу C_0 можемо претпоставити да је низ $\{C_n : n < \omega\}$ партиција скупа ω. Дефинишимо пресликавање $g : \omega \to \omega$ са

$$g(k) = n, \quad \text{за} \quad k \in C_n.$$

Нека је $\beta g : \beta\omega \to \beta\omega$ Стоунова екстензија пресликавања g. Тврдимо да је $\beta g(q) = p$. Узмимо скуп $Q \ni q$ произвољно. Скуп $\{n : h(n) \in \overline{Q}\}$ мора да припада тачки p, пошто је h непрекидно пресликавање, из чега следи да $p \in h^{-1}[\overline{Q}] = h^{-1}[Q]$ и важи $h(p) = q$. Дакле, $\omega \cap h^{-1}[Q] \in p$. Међутим,

$$\{n : h(n) \in \overline{Q}\} \subseteq g[Q].$$

Стога, закључујемо да $g[Q] \in p$. Последично, $\beta g(q) = p$, што је и требало показати. $\square$

Последица 4.2.2. *Ако је $p, q \in \omega^*$ и ако важи $p \sqsubseteq q$ и $q \sqsubseteq p$, онда је и $p \sim q$.*

Доказ: Доказ следи из Леме 4.2.1 и Теореме 4.1.1 (c). $\square$

Лема 4.2.3. *Ако је $p, q, r \in \omega^*$ и ако важи $p \sqsubseteq q$ и $q \sqsubseteq r$, онда је и $p \sqsubseteq r$.*

Доказ: Нека је $f : \beta\omega \to \omega^*$ утапање дато са $f(p) = q$, и слично, нека је $g : \beta\omega \to \omega^*$ утапање дато са $g(q) = r$. Означимо са h композицију $h = (g \restriction_{f(\beta\omega)}) \circ f$. Тада је пресликавање h, такође, утапање које је дато са $h(p) = r$. $\square$

Приметимо да Последица 4.2.2, Лема 4.2.3 и Теорема 4.1.1 (c) указују на то да је количничка релација дефинисана са $\sqsubseteq$ на $\beta\omega/_{\sim}$ парцијално уређење.

Сада ћемо показати на примеру да су уређења $\preceq$ и $\sqsubseteq$ моћни алати за изучавање простора $\beta\omega$.

Лема 4.2.4. *Нека је пресликавање дато са $f : \omega^* \to \omega^*$ хомеоморфизам и нека је $q \in \omega^*$. Тада је*

$$\{p \in \omega^* : p \sqsubseteq q\} = \{p \in \omega^* : p \sqsubseteq f(q)\}.$$

Доказ: Доказ леме је тривијалан. $\square$

Сада смо у могућности да дамо први доказ да простор ω^* није хомоген.

Теорема 4.2.5. *Скуп ω^* није хомоген.*

Доказ: Нека је $D = \{d_n : n < \omega\}$ дискретан подскуп простора ω^*. Одаберимо произвољну тачку $x \in \overline{D} \setminus D$. Скуп D је C^*-утопљен скуп простора ω^* ([1], Теорема 1.5.2), па је онда $\overline{D} = \beta D$. Пошто је ω^* затворен, важи $\overline{D} \subseteq \omega^*$. Нека је $A = \{y \in \overline{D} \setminus D : \exists$ хомеоморфизам $f : \omega^* \to \omega^*$ тако да $f(x) = y\}$. Изаберимо пресликавање $h : \omega \to D$ дефинисано са $h(n) = d_n$ и нека је $\beta h : \beta\omega \to \overline{D}$ Стоунова екстензија тог пресликавања.

Ако је $y \in A$, онда је јасно да мора бити $(\beta h)^{-1}(y) \sqsubseteq y$. Применом Леме 4.2.3 долазимо до тога да је $(\beta h)^{-1}(y) \sqsubseteq x$. Пошто је βh инјективно пресликавање, а на основу Леме 4.2.1 знамо да је $|\{q \in \beta\omega : q \sqsubseteq x\}| \leq \mathfrak{c}$, закључујемо да је $|A| \leq \mathfrak{c}$. У Леми 4.1.2 (c) доказали смо да је $|\beta\omega| = 2^{\mathfrak{c}}$. Како $\beta D \approx \beta\omega$, можемо пронаћи $2^{\mathfrak{c}}$ тачака скупа $\overline{D} \setminus A$. $\square$

Поглавље 5

Специјалне тачке простора $\beta\omega$

У овом поглављу посматраћемо неке специјалне тачке у Чех-Стоуновој компактификацији скупа природних бројева. Оне су важне јер, између осталог, сведоче да ова компактификација није хомоген простор. На пример, показаћемо да ова компактификација у ZFC садржи слабу П-тачку, што ће бити показано кроз тврђења.

Најпре смо, под претпоставком да важи CH, видели да постоје П-тачке и слабе П-тачке у простору ω^*, и да тај простор није хомоген под тим условима. Након тога, у Одељку 3.5 смо казали да доказ нехомогености скупа ω^* није постојан у ZFC. У наставку рада дат је доказ у ZFC да простор ω^* није хомоген (Одељак 5.2). Међутим, тај доказ је само показао да ω^* није хомоген, али није одгонетнуо и зашто то није. Циљ овог завршног дела рада јесте да представи неколико „специјалних" тачака простора ω^*, дајући тиме и истински доказ зашто ω^* није хомоген простор.

5.1 Техничка поставка

Циљ овог одељка јесте да се постави и докаже техничка позадина која ће нам касније омогућити да конструишемо неке од специјалних тачака скупа ω^*.

Дефиниција 5.1.1. Нека је X компактан крајње неповезан простор, и нека је $\mathcal{C} = \{C_n : n < \omega\}$ низ непразних, по паровима дисјунктних, отворено-затворених подскупова простора X. Уведимо ознаку $Z = X \setminus \bigcup \mathcal{C}$. Додатно, нека је пресликавање $f : Z \to Y$ непрекидна сирјекција и нека је скуп $B \subseteq Z$ затворен.

За $1 \leq n < \omega$, индексирана фамилија $\{A_i : i \in I\}$ отворено-затворених подскупова простора X је **тачно n-повезана** с обзиром на $\langle B, f\rangle$ ако је за све $\sigma \in [I]^n$

$$f[\bigcap_{i\in\sigma} A_i \cap B] = Y,$$

и ако је за све $\sigma \in [I]^{n+1}$

$$\bigcap_{i\in\sigma} A_i \cap Z = \emptyset.$$

Индексирана фамилија $\{A_{in} : i \in I, 1 \leq n < \omega\}$ отворено-затворених подскупова простора X је **повезани систем** с обзиром на $\langle B, f\rangle$ ако је:

1. фамилија $\{A_{in} : i \in I\}$ тачно n-повезана с обзиром на $\langle B, f\rangle$, за све $n < \omega$;

2. $A_{in} \subseteq A_{i,n+1}$, за све $n < \omega$ и све $i \in I$.

Индексирана фамилија $\{A^j_{in} : i \in I, 1 \leq n < \omega, j \in J\}$ је $I \times J$ **независна повезана фамилија** с обзиром на $\langle B, f\rangle$ ако је:

1. $\{A^j_{in} : i \in I, 1 \leq n < \omega\}$ повезани систем с обзиром на $\langle B, f\rangle$, за све $j \in J$;

2. $f[\bigcap_{j\in\tau}(\bigcap_{i\in\sigma_j} A^j_{in_j}) \cap B] = Y$, за $\tau \in [J]^{<\omega}$, $j \in \tau$, $1 \leq n_j < \omega$ и $\sigma_j \in [I]^{n_j}$.

Ако је дато пресликавање $f : \omega \to \omega$, означимо $\overline{f} = \beta f \restriction_{\omega^*}$. Уведимо у претходну дефиницију 5.1.1 да је $X = \beta\omega$, и да је $C_n = \{n\}$, за све $n < \omega$. У том случају долазимо до следеће леме, која је од великог значаја за ову тематику.

Лема 5.1.2. *Постоји „коначно према један” функција $\pi : \omega \to \omega$ и $\mathfrak{c} \times \mathfrak{c}$ независна повезана фамилија отворено-затворених подскупова простора $\beta\omega$ с обзиром на $\langle \omega^*, \overline{\pi}\rangle$.*

Доказ: Нека је дат скуп $S = \{\langle k, g\rangle : k \in \omega \ \wedge \ g \in \mathcal{PP}(k)^{\mathcal{P}(k)}\}$. Идентификујмо скуп S са простором ω и дефинишимо пресликавање $\pi : S \to \omega$, при чему је $\pi(\langle k, g\rangle) = k$. Јасно је да је π коначна на један функција. Сада, за све $X, Y \in \mathcal{P}(\omega)$ и $n < \omega$ дефинишимо и

$$A^Y_{X,n} = \{\langle k, g\rangle \in S : |g(Y \cap k)| \leq n \ \wedge \ X \cap k \in g(Y \cap k)\}.$$

Лако се може уочити да је фамилија

$$\{E^Y_{X,n} : X \in \mathcal{P}(\omega), 1 \leq n < \omega, Y \in \mathcal{P}(\omega)\},$$

за коју важи да је $E^Y_{X,n}$ затворење фамилије $A^Y_{X,n}$ у простору βS, управо она коју је и требало да пронађемо. $\square$

Дефиниција 5.1.3. Нека је дат простор X. Затворен потпростор $A \subseteq X$ назива се **κ-ОК** потпростор ако важи да за сваки низ $\{U_n : n < \omega\}$ околина скупа A постоји низ $\{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ околина скупа A тако да је за свако $n \geq 1$ за које је је $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \kappa$,

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{\alpha_i} \subseteq U_n.$$

Тачка $x \in X$ назива се **κ-ОК** тачка ако је $\{x\}$ κ-ОК скуп простора X.

Дефиниција 5.1.4. Нека је дат простор X. Нека је $\mathcal{U} = \{U_n : n < \omega\}$ фамилија отворених подскупова простора X. Затворени подскуп $Z \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{U}} \setminus \bigcup \mathcal{U}$ назива се **леп скуп** с обзиром на $\mathcal{U}$, ако важи да је за сваку околину V из скупа Z скуп $\{n < \omega : V \cap U_n = \emptyset\}$ коначан.

Сада смо дошли до кључног дела овог поглавља.

Теорема 5.1.5. *Нека је X компактан, крајње неповезан простор тежине $\mathfrak{c}$ и нека је $\mathcal{C} = \{C_n : n < \omega\}$ низ непразних, по паровима дисјунктних, отворено-затворених подскупова простора X. Нека је $Z = \overline{\bigcup \mathcal{C}} \setminus \bigcup \mathcal{C}$. Ако је $A \subseteq Z$ леп скуп с обзиром на $\mathcal{C}$ и ако је Y непрекидна слика простора ω^*, онда постоји затворени скуп $B \subseteq A$ који је $\mathfrak{c}$-ОК скуп простора Z и над којим постоји несводљива сирјекција која га слика на скуп Y.*

Доказ: Како је $\overline{\bigcup \mathcal{C}}$ отворено-затворен скуп простора X, без губитка општости, претпоставимо да је $\overline{\bigcup \mathcal{C}} = X$. Дефинишимо пресликавање $f : \bigcup \mathcal{C} \to \omega$ са $f(x) = n$ акко $x \in C_n$. Нека је $\beta f : X \to \beta\omega$ Стоунова екстензија пресликавања f.

Како је простор X F-простор, онда је $\overline{\bigcup \mathcal{C}} = \beta(\bigcup \mathcal{C})$. Нека је пресликавање $\pi : \omega \to \omega$ „коначно према један” функција као у Леми 5.1.2 и нека је $\{E^\beta_{\alpha n} : \alpha < \mathfrak{c}, 1 \leq n < \omega, \beta < \mathfrak{c}\}$ $\mathfrak{c} \times \mathfrak{c}$ независна повезана фамилија отворено-затворених подскупова простора $\beta\omega$ с обзиром на $\langle \omega^*, \overline{\pi} \rangle$, такође, као у Леми 5.1.2. Додатно, нека је дато пресликавање $g : \omega^* \to Y$ које је непрекидна сирјекција.

Дефинишимо пресликавање $h : Z \to Y$ са $h = g \circ \overline{\pi} \circ (\beta f \restriction_Z)$ и приметимо да је фамилија

$$\{A^\beta_{\alpha n} : \alpha < \mathfrak{c}, 1 \leq n < \omega, \beta < \mathfrak{c}\},$$

при чему важи да је $A^\beta_{\alpha n} = \beta f^{-1}[E^\beta_{\alpha n}]$, независна повезана фамилија с обзиром на $\langle A, h \rangle$. То можемо да тврдимо на основу тога што је $\beta f(A) = \omega^*$. Даље, нека је низ $\{Z_\gamma : \gamma < \mathfrak{c} \ \wedge \ \gamma \text{ паран ординал}\}$ енумерација фамилије свих отворено-затворених подскупова простора X и нека је низ $\{\langle S_{\gamma n} : n < \omega \rangle : \gamma < \mathfrak{c} \ \wedge \ \gamma \text{ непаран ординал}\}$ енумерација свих низова непразних отворено-затворених подскупова простора X

који задовољавају следећу инклузију:

$$S_{\gamma,n+1} \subseteq S_{\gamma n} \setminus \bigcup_{i \leq n} C_i.$$

Претпоставимо да се сваки низ појављује кофинално много пута. Индукцијом по γ конструишемо F_γ и K_γ тако да је:

1. $F_\gamma \subseteq A$ је затворен скуп, $K_\gamma \subseteq \mathfrak{c}$, и $\{A^\beta_{\alpha n} : \alpha < \mathfrak{c}, 1 \leq n < \omega, \beta \in K_\gamma\}$ је независна повезана фамилија с обзиром на $\langle F_\gamma, h\rangle$;

2. $K_0 = 2^\omega$ и $F_0 = A$;

3. ако је $\nu < \gamma$, онда важи $F_\nu \supseteq F_\gamma$ и $K_\gamma \subseteq K_\nu$;

4. ако је γ гранични ординал, онда важи $F_\gamma = \bigcap_{\nu<\gamma} F_\nu$ и $K_\gamma = \bigcap_{\nu<\gamma} K_\nu$;

5. за свако γ, $K_\gamma \setminus K_{\gamma+1}$ је коначан скуп;

6. за сваки паран γ, или је $F_{\gamma+1} \subseteq Z_\gamma$ или је $h(F_{\gamma+1} \cap Z_\gamma) \neq Y$;

7. за сваки непаран γ за који је $F_\gamma \subseteq \bigcap_{n<\omega} S_{\gamma n}$, постоје отворено-затворене околине $D_{\gamma\alpha}$ скупа $F_{\gamma+1}$, где је $\alpha < \mathfrak{c}$, тако да за свако $n \geq 1$ и $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \mathfrak{c}$ важи да постоји $m < \omega$ такав да
$$(D_{\gamma\alpha_1} \cap \cdots \cap D_{\gamma\alpha_n}) \setminus S_{\gamma n} \subseteq \bigcup_{i \leq m} C_i.$$

Фиксирајмо $\gamma < \mathfrak{c}$ и претпоставимо да су F_ν, K_ν конструисани за све $\nu \leq \gamma$. Конструисаћемо $F_{\gamma+1}$ и $K_{\gamma+1}$.

Најпре претпоставимо да је γ паран ординал, и дефинишимо $T = F_\gamma \cap Z_\gamma$. Ако је
$$\{A^\beta_{\alpha n} : \alpha < \mathfrak{c}, 1 \leq n < \omega, \beta \in K_\gamma\}$$
независна повезана фамилија с обзиром на $\langle T, h\rangle$, можемо изабрати $F_{\gamma+1} = T$ и $K_{\gamma+1} = K_\gamma$. Ако то није случај, онда је
$$h[F_\gamma \cap Z_\gamma \cap \bigcap_{\beta\in\tau} (\bigcap_{\alpha\in\sigma_\beta} A^\beta_{\alpha n_\beta})] \neq Y$$
за неко $\tau \in [K_\gamma]^{<\omega}$, $n_\beta < \omega$ и $\sigma_\beta \in [\mathfrak{c}]^{n_\beta}$. Тада бисмо бирали $K_{\gamma+1} = K_\gamma \setminus \tau$, и
$$F_{\gamma+1} = F_\gamma \cap \bigcap_{\beta\in\tau} (\bigcap_{\alpha\in\sigma_\beta} A^\beta_{\alpha n_\beta}).$$
Несумњиво, $F_{\gamma+1}$ и $K_{\gamma+1}$ су управо они које смо и тражили.

Ако је γ непарно, и ако постоји $n < \omega$ тако да је $F_\gamma \setminus S_{\gamma n} \neq \emptyset$, тада бирамо $F_{\gamma+1} = F\gamma$ и $K_{\gamma+1} = K_\gamma$. У случају да је $F_\gamma \subseteq \bigcap_{n<\omega} S_{\gamma n}$, фиксираћемо $\beta \in K_\gamma$ и бирати $K_{\gamma+1} = K_\gamma \setminus \{\beta\}$. Онда, за свако $\alpha < \mathfrak{c}$, дефинишемо
$$D_{\gamma\alpha} = (\bigcup_{1 \leq n < \omega} A^\beta_{\alpha n} \cap S_{\gamma n}),$$

и бирамо $F_{\gamma+1} = \bigcap\limits_{\alpha<\mathfrak{c}} D_{\gamma\alpha} \cap F_\gamma$. Тврдимо да су тако бирани $F_{\gamma+1}$ и низ $\langle D_{\gamma\alpha} : \alpha < \mathfrak{c}\rangle$ баш они који нам и требају.

Најпре приметимо да је сваки скуп $D_{\gamma\alpha}$ отворено-затворен пошто је затворење отвореног скупа простора X.

Да бисмо верификовали услов 7. с почетка дела овог доказа који се односи на индукцију, кренимо од поретка $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \mathfrak{c}$ и означимо

$$T = (D_{\gamma\alpha_1} \cap \cdots \cap D_{\gamma\alpha_n}) \setminus S_{\gamma n}.$$

Јасно је да ће за $n = 1$ бити $T = \emptyset$, јер је $D_{\gamma\alpha_1} \subseteq S_{\gamma 1}$. Стога, претпоставимо да је $n > 1$. Сада ћемо доказати помоћни став.

Став: $T \subseteq A^\beta_{\alpha_1 n-1} \cap \cdots \cap A^\beta_{\alpha_n n-1}$.

Изаберимо $x \in D_{\gamma\alpha_1} \cap \cdots \cap D_{\gamma\alpha_n}$ и претпоставимо да важи

$$x \in \bigcap_{1\leq i\leq n} A^\beta_{\alpha_i k_i} \cap S_{\gamma k_i},$$

при чему је $k_{i_0} \geq n$ за неко $1 \leq i_0 \leq n$. Како је $S_{\gamma k_{i_0}} \subseteq S_{\gamma n}$ следи да $x \notin T$.

Сада претпоставимо да је

$$x \in \bigcap_{1\leq i\leq n} A^\beta_{\alpha_i k_i} \cap S_{\gamma k_i},$$

при чему је $k_i < n$ за све $1 \leq i \leq n$. Како је $A^\beta_{\alpha_i k_i} \subseteq A^\beta_{\alpha_i n-1}$ за све $1 \leq i \leq n$ следи да $x \in \bigcap\limits_{1\leq i\leq n} A^\beta_{\alpha_i n-1}$.

Дакле, можемо закључити да је

$$\begin{aligned} T &= (D_{\gamma\alpha_1} \cap \cdots \cap D_{\gamma\alpha_n}) \cap (X \setminus S_{\gamma n}) \\ &= \overline{\Big(\bigcap_{1\leq i\leq n} \Big(\bigcup_{1\leq k<\omega} A^\beta_{\alpha_i k} \cap S_{\gamma k}\Big) \cap (X \setminus S_{\gamma n})\Big)} \\ &\subseteq \bigcap_{1\leq i\leq n} A^\beta_{\alpha_i n-1}. \end{aligned}$$

Све до сада имплицира да за неко $m < \omega$ важи инклузија $T \subseteq \bigcup\limits_{i\leq m} C_i$, пошто је фамилија $\{A^\beta_{\alpha_i n-1} : 1 \leq i \leq n\}$ тачно $(n-1)$-повезана.

Коначно, да бисмо утврдили и услов 1. из дела доказа који се односи на индукцију, приметимо да је $D_{\gamma\alpha} \supseteq S_{\gamma n} \cap A^\beta_{\alpha n}$ за свако $n < \omega$.

Сада обележимо са $B = \bigcap\limits_{\gamma<\mathfrak{c}} F_\gamma$. Тврдимо да је скуп B онај који смо и тражили. На основу 1. важи $h[F_\gamma] = Y$ за све $\gamma < \mathfrak{c}$, и стога, користећи 3. и компактност простора X, биће $h[B] = Y$. Из ставке 7. имамо да је скуп B $\mathfrak{c}$-ОК скуп простора Z, па је самим тим довољно показати да је пресликавање $h\restriction_B$ несводљиво.

Нека је $B' \subseteq B$ одговарајући затворен скуп. Тада ће, за неко парно $\gamma < \mathfrak{c}$, бити задовољена инклузија $B' \subseteq Z_\gamma$ и једнакост $B \setminus Z_\gamma \neq \emptyset$. Из услова 6. види се да је $h[F_{\gamma+1} \cap Z_\gamma] \neq Y$. Како је $B' \subseteq F_{\gamma+1} \cap Z_\gamma$, закључујемо да је $h[B'] \neq Y$, односно, рестрикција пресликавања $h\restriction_B$ је несводљива функција. $\square$

5.2 Компактификација простора ω

У овом одељку биће показано да постоји компактификација $\gamma\omega$ простора ω, таква да $\gamma\omega \setminus \omega$ није сепарабилан, али јесте ccc. Ова компактификација ће бити неопходна за конструкцију неколико специјалних тачака простора ω^*.

Нека је $P = \{f \in \omega^\omega : 0 \leq f(n) \leq n+1 \text{ за све } n < \omega\}$ и нека је $N = \{f\restriction_n : f \in P \ \wedge \ n < \omega\}$. Дефинишимо и скуп $T = \{\pi \in N^\omega : \mathrm{dom}(\pi(n)) = n+1 \text{ за све } n < \omega\}$. Нека је $C_s = \{t \in N : s \subseteq t\}$, за све $s \in N$ и нека

$$C_\pi = \bigcup_{n<\omega} C_{\pi(n)}, \quad \text{за све} \quad \pi \in T.$$

Уочимо да је $N \setminus C_\pi$ бесконачан за све π. Нека је $\mathcal{B}$ најмања Булова подалгебра од $\mathcal{P}(N)$ која садржи $\mathcal{A} = \{C_\pi : \pi \in T\} \cup \{N \setminus C_\pi : \pi \in T\}$. Приметимо да је $\{\{s\} : s \in N\} \cup \{C_s : s \in N\} \subseteq \mathcal{B}$. Нека $\gamma\omega$ означава Стоунов простор Булове алгебре $\mathcal{B}$. Следи да је $\gamma\omega$ компактификација пребројивог дискретног простора $\{\{B \in \mathcal{B} : s \in B\} : s \in N\}$ који можемо поистоветити са ω. Означимо са $X = \gamma\omega \setminus \omega$.

Лема 5.2.1. *Простор X није сепарабилан простор.*

Доказ: Нека је $\{p_n : n < \omega\}$ скуп пребројиво много слободних ултрафилтера Булове алгебре $\mathcal{B}$. За свако $n < \omega$ постоји $\pi(n)$ тако да је $\mathrm{dom}(\pi(n)) = n+1$, при чему $C_{\pi(n)} \in p_n$. Посматрајмо скуп N на следећи начин: $N = \{s \in N : \mathrm{dom(s)} \leq n\} \cup \bigcup\{C_s : \mathrm{dom(s)} = n+1\}$. Ово важи за све $n < \omega$. Сада је $\{p \in X : N \setminus C_\pi \in p\}$ непразан отворен скуп простора X и дисјунктан је са $\{p_n : n < \omega\}$, а такав скуп смо и хтели да пронађемо. $\square$

Фамилија скупова назива се **повезана фамилија** ако важи да свака потфамилија кардиналности највише 2 има непразан пресек.

Фамилија скупова назива се **σ-повезана фамилија** ако важи да се она може представити као унија пребројиво много повезаних потфамилија.

Може се уочити да простор који има σ-повезану базу задовољава и ccc.

Лема 5.2.2. *Простор X има σ-повезану базу.*

Доказ: Довољно је показати да је $\{B \in \mathcal{B} : |B| = \omega\} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{B}_n$, при чему за свако n свака два скупа алгебре $\mathcal{B}_n$ имају бесконачан пресек. У том циљу, за свако $j \in \omega$ и свако $s \in N$ за које је $2j - 1 \leq \mathrm{dom(s)}$ дефинишемо

$$\mathcal{B}(j,s) = \{B \in \mathcal{B} : \exists K \in [T]^{<\omega} \ \wedge \ L \in [T]^j, \text{ при чему } s \in \bigcap_{\pi\in K} C_\pi \cap$$

$$\bigcap_{\pi\in L} N \setminus C_\pi \in [B]^\omega\}.$$

Како за сваки скуп $B \in \mathcal{B}$ за који је $|B| = \omega$ постоји скуп $D \in [B]^\omega$ који је коначан пресек елемената из $\mathcal{A}$, и како било који бесконачан подскуп скупа N садржи елементе произвољно великих домена, онда следи да је

$$\{B \in \mathcal{B} : |B| = \omega\} = \bigcup\{\mathcal{B}(j,s) : j \in \omega, \quad s \in N, \quad 2j - 1 \leq \mathrm{dom(s)}\}.$$

Фиксирајмо индекс j и $s \in N$ са $2j - 1 \leq \mathrm{dom(s)}$.

Ако је $\{B_0, B_1\} \subseteq \mathcal{B}(j,s)$, онда постоје скупови $K_i \in [T]^{<\omega}$ и $L_i \in [T]^j$ такви да је за све $i < 2$

$$s \in D_i = \bigcap_{\pi\in K_i} C_\pi \cap \bigcap_{\pi\in L_i} N \setminus C_\pi \in [B_i]^\omega.$$

Сада дефинишемо индукцијом по $\mathrm{n} \geq \mathrm{dom(s)}$ функцију $h \in P$ такву да је

$$\{h\restriction_n : \mathrm{dom(s)} \leq n\} \subseteq D_0 \cap D_1.$$

Прва фаза - dom(s): Нека је $h\restriction_{\mathrm{dom(s)}} = s$. Тада $h\restriction_{\mathrm{dom(s)}} \in D_0 \cap D_1$. Претпоставимо да је дефинисано пресликавање $h\restriction_n$ на $\mathrm{dom(s)} \leq n$, тако да је $h\restriction_n \in D_0 \cap D_1$.

Друга фаза - $n+1$: Дефинишимо $h\restriction_{n+1}$ као низ елемената скупа N на домену $n+1$ који представља екстензију $h\restriction_n$, и за који важи $h\restriction_{n+1} \notin \{\pi(n) : \pi \in L_0 \cup L_1\}$. Ова дефиниција је добра, јер постоје $n+2$ низа скупа N на домену $n+1$ која представљају проширење функције $h\restriction_n$ и јер важи $|L_0 \cup L_1| \leq 2j < \mathrm{dom(s)} + 2 \leq \mathrm{n} + 2$. Дакле, $h\restriction_{n+1} \in D_0 \cap D_1$. $\square$

5.3 Слабе П-тачке скупа ω^*

У овом одељку показаћемо да скуп ω^* садржи најмање два типа слабих П-тачака.

Нека је дат простор X. Подскуп $F \subseteq X$ називамо **слаб П-скуп** ако важи да је $F \cap \overline{D} = \emptyset$ за све пребројиве скупове $D \subseteq X \setminus F$.

Дефиниција 5.3.1. Колекцију непразних, по паровима дисјунктних, отворених скупова простора X називамо **целуларна фамилија скупова**.

Дефиниција 5.3.2. Целуларност простора X, у ознаци $\mathbf{cel}(X)$, је кардинални број дат са:

$$\mathrm{cel}(X) = \sup\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ је целуларна фамилија простора } X\} + \omega.$$

Лема 5.3.3. *Нека је дат простор X и нека је $S \subseteq X$. Тада:*

1. *Ако је скуп S ω_1-ОК скуп, онда је скуп S и слаб П-скуп простора X;*

2. *Ако је скуп S κ-ОК скуп, при чему је $cf(\kappa) \geq \omega_1$, и S није П-скуп, онда важи $\mathrm{cel}(X) \geq \kappa$.*

Доказ: 1. Изаберимо низ $F = \{t_n : n < \omega\} \subseteq X \setminus S$. Пошто је скуп S ω_1-ОК скуп, можемо да пронађемо колекцију $\{U_\xi : \xi < \omega_1\}$ околина скупа S таквих да за све $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < \omega_1$ важи

$$(*) \qquad \bigcap_{1\leq i\leq n} U_{\xi_i} \subseteq X \setminus \{t_n\}.$$

Ако је $U_\xi \cap F \neq \emptyset$ за све $\xi < \omega_1$, онда постоји непребројив скуп $A \subseteq \omega_1$ и $n < \omega$ за који је $t_n \in \bigcap_{\xi\in A} U_\xi$. Међутим, ово је очигледно контрадикција са $(*)$.

2. Нека је $F_n \subseteq \overline{F_n} \subseteq X \setminus S$ низ отворених скупова простора X, где је $n < \omega$, за који важи

$$S \cap (\overline{\bigcup_{n<\omega} \overline{F_n}} \setminus \bigcup_{n<\omega} \overline{F_n}) \neq \emptyset.$$

Изаберимо фамилију $\{U_\xi : \xi < \kappa\}$ околина скупа S тако да за све $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < \kappa$ важи

$$\bigcap_{1\leq i\leq n} U_{\xi_i} \subseteq X \setminus \overline{F_n}.$$

Пошто је $cf(\kappa) \geq \omega_1$, имамо могућност да изаберемо скуп $A \in [\kappa]^\kappa$ и индекс $n < \omega$ такав да је $U_\xi \cap F_n \neq \emptyset$, за све $\xi \in A$. Тада је

$$\mathcal{B} = \{U_\xi \cap F_n : \xi \in A\}$$

фамилија κ отворених подскупова простора X таквих да је сваки пресек n од њих, заправо, празан скуп. Трансфинитном индукцијом, за свако $\xi < \kappa$ дефинисаћемо максимално потфамилију $\mathcal{G}_\xi \subseteq \mathcal{B}$

тако да је $\cap\mathcal{G}_\xi \neq \emptyset$ и $\mathcal{G}_\xi \neq \mathcal{G}_\eta$, за све $\eta < \xi < \kappa$. Ако је $\mathcal{G}_\eta$ дефинисан за све $\eta < \xi < \kappa$, онда изаберимо

$$B \in \mathcal{B} \setminus \bigcup_{\eta<\xi} \mathcal{G}_\eta.$$

Такав скуп B постоји пошто је $|\mathcal{G}_\eta| \leq n-1$ за све $\eta < \xi$. Потфамилију $\mathcal{G}_\xi$ ћемо бирати тако да она буде максимална потфамилија фамилије $\mathcal{B}$ која садржи скуп B и има непразан пресек. Фамилија $\{\bigcap \mathcal{G}_\xi : \xi < \kappa\}$ се састоји од κ по паровима дисјкунктних непразних отворених подскупова простора X, одакле је $\mathrm{cel}(X) \geq \kappa$.

□

Последица 5.3.4. *Нека је $x \in X$ ω_1-OK тачка. Тада је x слаба П-тачка простора X.*

Сада долазимо до кључног дела овог одељка.

Теорема 5.3.5. *Нека су дати скупови $A = \{x \in \omega^* : x \text{ је } \mathfrak{c} - OK\}$ и $B = \{x \in \omega^* : x$ је слаба П-тачка и $x \in \overline{C} \setminus C$, при чему $C \subseteq \omega^*$ задовољава ccc$\}$. Тада $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ и $A \cap B = \emptyset$.*

Доказ: Да је $A \neq \emptyset$ следи директно из Теореме 5.1.5, а да важи $A \cap B = \emptyset$ следи из Леме 5.3.3 (b). Преостало је још да се покаже да $B \neq \emptyset$. У циљу тога, нека X буде ccc несепарабилан остатак простора ω, као што смо конструисали у Одељку 5.2. Приметимо да је компактификација једне тачке $a(\omega \times X)$ простора $\omega \times X$ непрекидна слика простора ω^*. Одатле, по Теореми 5.1.5, постоји затворен $\mathfrak{c}$-OK скуп $Z \subseteq \omega^*$ и несводљива сирјекција $f : Z \to a(\omega \times X)$. Нека је $Z_n = f^{-1}[\{n\} \times X]$, за све $n < \omega$. Како је пресликавање f несводљиво, онда важи $\overline{(\bigcup_{n<\omega} Z_n)} = Z$. Нека је $\pi : \omega \times X \to X$ пројекција и нека је $\mathcal{U}$ максимална дисјунктна фамилија сепарабилних отворено-затворених подскупова простора X. Пошто је X ccc скуп, међутим, није сепарабилан, онда је $\overline{\bigcup \mathcal{U}} \neq X$. Последично, можемо изабрати непразан отворено-затворен скуп $C \subseteq X$ који је дисјунктан са $\bigcup \mathcal{U}$. Може се уочити да је C нигде сепарабилан скуп. За сваки пребројив скуп $D \subseteq \bigcup_{n<\omega} Z_n$, нека је $\{C_n(D) : n < \omega\}$ максимална дисјунктна фамилија непразних отворено-затворених подскупова скупа C, тако да

$$\bigcup_{n<\omega} C_n(D) \cup (\overline{\pi[f(D)]} \cap C) = \emptyset.$$

Дефинишимо још и

$$F(D) = \bigcup_{n<\omega} f^{-1}[\bigcup_{i\leq n} \{n\} \times C_i(D)]$$

и $F = \bigcap\{\overline{F(D)} : D \in [f^{-1}[\omega \times X]]^{\leq\omega}\}$.

Можемо приметити да је F леп скуп, с обзиром на $\{f^{-1}[\{n\} \times X] : n < \omega\}$. Како је X F-простор, који је затворен у ω^*, а пресликавање f несводљиво, па је самим тим скуп Z ccc, онда се може закључити да је скуп Z крајње неповезан. (Лема 2.2.4) Ослањајући се на Теорему 5.1.5, тврдимо да постоји тачка $x \in S = Z \setminus \bigcup\limits_{n<\omega} Z_n$ која припада скупу F и која је $\mathfrak{c}$-OK тачка скупа S.

Став: Ако је $D \in [\bigcup\limits_{n<\omega} Z_n]^{\leq\omega}$, онда $x \notin \overline{D}$.

По конструкцији, $F(D)$ је отворено-затворен потпростор простора $\bigcup\limits_{n<\omega} Z_n$ који је дисјунктан са D. Z је крајње неповезан, па је

$$\overline{F(D)} \cap \overline{(\bigcup_{n<\omega} Z_n \setminus F(D))} = \emptyset.$$

Пошто је $x \in \overline{F(D)}$, закључујемо да $x \notin \overline{D}$.

На основу става, видимо да је x слаба П-тачка простора ω^*. $\square$

Последица 5.3.6. *Простор ω^* садржи слабе П-тачке.*

У Теореми 5.3.5 још једном смо показали да простор ω^* није хомоген. Овај доказ је сасвим другачији од претходног који је дат, јер смо се ослањали на тополошка својства која имају неке од тачака простора ω^*.

Литература

[1] Jan van Mill, *An introduction to $\beta\omega$*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 503–567.

[2] M. G. Bell, *Compact ccc non-separable spaces of small weight*, Topology Proc., 1980, pp. 11–25.

[3] Saharon Shelah, *Announcement*, privately circulated, 1978.

[4] Kenneth Kunen, *Ultrafilters and independent sets*, Trans. Amer. Math. Soc., 1972, pp. 299–306.

[5] Kenneth Kunen, *Inaccessibility properties of cardinals*, Doctoral dissertation, Stanford, 1968.

[6] Bohuslav Balcar and František Franek, *Independent families in complete Boolean algebras*, Trans. Amer. Math.Soc., 1982, pp. 607–618.

[7] W. W. Comfort and S. Negrepontis, *The Theory of Ultrafilters*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 211, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[8] Marica i Slaviša Pešić, *Uvod u matematičku logiku - teorija i zadaci*, Matematički vidici 2, Matematički institut, Beograd, 1979.

[9] Gradimir Vojvodić, *Predavanja iz matematičke logike i algebre*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1995.

[10] Branimir Šešelja i Andreja Tepavčević, *Bulove algebre i funkcije - teorija i zadaci*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2005.

[11] Miloš Kurilić, *Osnovi opšte topologije*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1998.

[12] Branislava Gajić, *Čech-Stone-ova kompaktifikacija*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2008.

[13] Slaviša B. Prešić, *Elementi matematičke logike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1974.

[14] Aleksandar Cvetković, *Aritmetika kardinala i ordinala*, Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet, Niš, 2013.

[15] A. Blass, *The Rudin-Keisler ordering of P-points*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 179, 1973, pp. 145–166.

[16] W. Rudin, *Homogenity problems in the theory of Čech compactifications*, Duke Math. J. 23, 1956, pp. 409–419.

[17] Gillman, Jerison, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London-New York 1960 ix+300 pp.

[18] K. Kunen, *Set theory. An Introduction to Independence Proofs*, Studies in Logic and the foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[19] R. Grant Woods, *Topological extension properties*, Transactions of the American Mathematical Society, 210, 1975.

[20] R. Grant Woods, *A survey of absolutes of topological spaces*, Topological Struxtures II, Mathematical Centre Tracts, 1979, pp. 323–362.

[21] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Volume 6, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[22] S. Broverman i W. Weiss *Spaces co-absolute with $\beta N - N$*, Topology appl., 1981, pp. 127–133.

[23] J. van Mill i S. W. Williams *A compact F-spaces not co-absolute with $\beta N - N$*, Topology appl., 1981, pp. 59–64.

[24] E. K. van Douwen and J. van Mill *Subspaces of basically disconnected spaces or quotients of countably complete Boolean Algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., 1980, pp. 121–127.

[25] R. Sikorski, *Boolean Algebras*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1969.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
Природно-математички факултет
кључна документацијска информација

Редни број:
РБР

Идентификациони број:
ИБР

Тип документације: монографска документација
ТД

Тип записа: текстуални штампани материјал
ТЗ
Врста рада: мастер рад
ВР

Аутор: Маја Самарџић
АУ

Ментор: др Бориша Кузељевић
МН

Наслов рада: Чех-Стоунова компактификација природних бројева
НР

Језик публикације: српски језик
ЈП

Језик извода: енглески/српски
ЈИ

Земља публиковања: Србија
ЗП

Уже географско подручје: Војводина
УГП

Година: 2023.
ГО

Издавач: ауторски репринт
ИЗ

Место и адреса: Нови Сад, Природно-математички факултет, Трг Доситеја Обрадовића 4.
МА

Физички опис рада: 5/90/25/1/0/0
(поглавља/страна/литерарних цитата/слика/графика/прилога)
ФО

Научна област: математика
НО

Научна дисциплина: топологија
НД

Предметна одредница/Кључне речи: Булова алгебра, ординал, кардинал, идеал, ултрафилтер, Стоунов простор, компактификација, Хипотеза континуума, Рудин-Кислер уређење
ПО

УДК

Чува се: у библиотеци Департмана за математику и информатику, Нови Сад
ЧУ

Важна напомена: нема
ВН

Извод: У овом раду представљамо неке резултате о Чех Стоуновој компактификацији скупа природних бројева. Под Континуум хипотезом, дата је једна карактеризација Булове алгебре $\mathcal{P}(\omega)/fin$, као и једна карактеризација тополошког простора ω^*, простора неглавних ултрафилтера на пребројивом скупу. Представљен је и доказ да ω^* није хомоген простор под Континуум хипотезом. Показано је да је Континуум хипотеза еквивалентна тврђењу да су све Булове алгебре кардиналности континуума које задовољавају услов H_ω међусобно изоморфне, као и да Мартинова аксиома имплицира да је сваки компактан простор тежине мање од континуума непрекидна слика ω^*.

Уведена су два предуређења на простору $\beta\omega$ – простору свих ултрафилтера на пребројивом скупу, који је, са одговарајућом топологијом, једна презентација Чех-Стоунове компактификације скупа природних

бројева. То су Рудин-Кислер и Рудин-Фролик уређење. Између осталог, представљен је Куненов резултат да постоје два Рудин-Кислер неупоредива ултрафилтера. Такође, представљен је и ZFC доказ да простор ω^* није хомоген. Показано је да простор ω^* садржи слабе П-тачке.
ИЗ

Датум прихватања теме од стране НН већа: 05.10.2022.
ДП

Датум одбране: 29.09.2023.
ДО

Чланови комисије:

Председник: др Милош Курилић, редовни професор, Природно-математички факултет у Новом Саду

Члан: др Борис Шобот, ванредни професор, Природно-математички факултет у Новом Саду

Члан: др Бориша Кузељевић, ванредни професор, Природно-математички факултет у Новом Саду
КО

UNIVERSITY OF NOVI SAD
Faculty of Science
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents code: Master's thesis
CC

Author: Maja Samardžić
AU

Mentor: dr Boriša Kuzeljević
MN

Title: Čech–Stone compactification of the natural numbers
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: English/Serbian
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2023.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 5/90/25/1/0/0
(chapters/pages/citations/pictures/graphs/appendices) PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Topology
SD

Subject/Key words: Boolean algebra, ordinal, cardinal, ideal, ultrafilter, compactification, Stone space, Continuum Hypothesis, Rudin-Keisler order
SKW

UC

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad
HD
Note: none
N

Abstract: In this document are represented some of results which refer to Čech–Stone compactification of the natural numbers. Under the Continuum Hypothesis, there are given one of the characterizations of the Boolean algebra $\mathcal{P}(\omega)/fin$, and also one of the characterizations of a topological space ω^*, the space of free ultrafilters on countable set. It is presented a proof that the space ω^* is not homogeneous under the Continuum Hypothesis. It is shown that the Continuum Hypothesis is equivalent to a predication that all Boolean algebras of cardinality at most $\mathfrak{c}$ satisfying condition H_ω are isomorphic to each other, and also that Martin's Axiom implies that each compact space of weight less than $\mathfrak{c}$ is a continuous image of ω^*.

We have introduced two partial pre-orderings on space $\beta\omega$ – space of all ultrafilters on countable set, that is, with proper topology, one of presentations of Čech–Stone compactification of the natural numbers. These are the Rudin-Keisler order on $\beta\omega$ and the Rudin-Frolik order on ω^*. Among other things, we have presented Kunen's result that there exist two Rudin-Keisler incomparable ultrafilters. Also, we have shown ZFC-proof that space ω^* is

not homogeneous. We have given a proof that the space ω^* contains weak P-points.
AB

Accepted by Scientific Board on: 05.10.2022.
ASB

Defended: 29.09.2023.
DE

Thesis defend board:

President: Miloš Kurilić PhD, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Boris Šobot PhD, assistant professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Boriša Kuzeljević PhD, assistant professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
DB