UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Elvira Njergeš

Induktivno zaključivanje u nastavi matematike u osnovnoj školi

-master rad-

Mentor: Prof. dr Zorana Lužanin

Novi Sad, 2023.

SADRŽAJ

UVOD

Zaključivanje je logička operacija, gde iz jedne ili više prihvaćenih tvrdnji nastaje nova izjava – zaključak. Zaključke možemo izvesti jedino iz onoga što već znamo. Osnovne metode (načini) zaključivanja su:

- Dedukcija (od opšteg ka pojedinačnom)
- Indukcija (od pojedinačnog ka opštem)

Treba razlikovati metodu induktivnog zaključivanja od metode matematičke indukcije, koja je deduktivna metoda. Metoda induktivnog zaključivanja je bitna i potrebna u nastavi matematike pogotovo u osnovnoj školi kada se razvija učenikovo mišljenje i zaključivanje. U ovom radu posmatraćemo samo induktivno zaključivanje i njenu primenu u nastavi matematike.

Indukcija (od latinske reči inductio – navođenje, uvođenje) je proces logičkog zaključivanja, definiše se kao proces zaključivanja opšteg pravila posmatranjem i analizom specifičnih slučajeva. [1] Induktivno zaključivanje igra značajnu ulogu u poboljšavanju procesa intelektualnog razvoja kao što su inteligencija i strategije mišljanja. [2] Omogućava nam otkrivanje pravilnosti i generalizacije[1]. Ovo je jedan od načina na koji kreiramo naš svet. Razvoj fluidne inteligencije[2] i kristalizirane inteligencije[3] zavisi od induktivnog zaključivanja. Često podsvesno donosimo odluke na osnovu naših prošlih zapažanja i iskustva. [3]

[1] Generalizacija je logička operacija, gde posmatranjem članova neke klase, donosimo uopštene tvrdnje koje važe za sve članove te klase.

[2] Fluidna inteligencija (Gf) je faktor opšte inteligencije koje je prvo prepoznao Rejmond Katel. To je sposobnost da se razumeju i rešavaju novi problemi, bez obzira da li imamo neko znanje iz prošlosti.

[3] Kristalizirana inteligencija je takođe faktor opšte inteligencije, koja se razvija tokom života, usvajanjem znanja i veština.

U prvom delu rada prikazan je razvoj i shvatanje induktivnog zaključivanja kroz istoriju. Predstavljen je CTC program (Cognitive Training for Children), kao i istraživanja koja su sprovedena da bi se testirala uspešnost programa. Ovi radovi daju uvid u CTC program i kako obuka utiče na učenikovo postignuće u školi, na testovima inteligencije i testovima induktivnog zaključivanja. U drugom delu prikazano je gde se sve može koristiti induktivno zaključivanje za usvajanje nastavnih sadržaja. Treći deo daje uvid u empirijsko istraživanje. Cilj ovog istraživanja je utvrđivanje nivoa induktivnog zaključivanja kod dece u jednoj osnovnoj školi u Republici Srbiji. Kroz istraživanja je takođe provereno da li nivo induktivnog zaključivanja zavisi od drugih faktora, kao npr. pola učenika ili broja učenika u odeljenju. U četvrtom delu dat je predlog primene induktivnog zaključivanja, iz oblasti geometrije.

1. TEORIJSKI OKVIR

1.1 Istorija induktivnog zaključivanja

'' Glavna sredstva pomoću kojih se otkrivaju istine u matematici su indukcija i analogija''

(Laplace[4])

Već se u Starom Egiptu koristila induktivna metoda zaključivanja, međutim za to nema pisanih dokaza. Zasluga za otkriće indukcije, kao metode ispitivanja pojmova, pripisuje se Sokratu[5], dok je njen saznajno – logički status formulisao Aristotel[6]. Aristotel je smatrao da je metoda induktivnog zaključivanja put do saznanja, odnosno da se posmatranjem pojedinačnog i posebnog zaključka ide ka opštem zaključku. Svako živo biće ima sposobnost zapažanja, dok čovek zapaženo može da zadrži u sećanju. Putem čestog zapažanja i putem stvaranja iskustva, čovek stiče praktično umeće i znanje. Aristotel naslućuje dva osnovna elementa induktivnog zaključivanja: intuitivni plan (proces stvaranja pojmova) i logički plan (zaključivanje od pojedinačnih stavova na opšte).

Razlikovao je dva oblika zaključka:

- Potpunu ili savršenu indukciju[7]
- Nepotpunu indukciju[8]

Jedino preciznom je smatrao potpunu indukciju, gde se zaključak donosi nabrajanjem svih pojedinačnih slučajeva. Nepotpunu indukciju i njena pravila nije definisao. [7] [8]

---

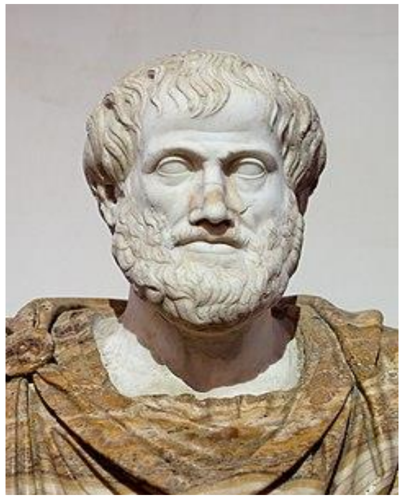
[4] Pierre – Simon, Marquis de Laplace, rođen je u Normandiji 1749 – 1827, bio je francuski matematičar i astronom.

[5] Sokrat je bio grčki filozof, 470 – 399 p.n.e.

[6] Aristotel je bio grčki filozof. Rođen je u Stagiri, 384 – 322 p.n.e. U delu "Organon" su sakupljeni Aristotelovi spisi.

[7] Svodi se na nabrajanje svih slučajeva jedne generalizacije. Potpuna indukcija je primenljiva samo ako možemo da proverimo sve pojedinačne slučajeve.

[8] Izvodimo zaključak polazeći od ograničenog broja primera, ili analizom samo jednog slučaja.



Slika 1: Aristotel (Izvor: https://sh.wikipedia.org/wiki/Aristotel)

Renesansa (od 14. do 16. veka) je period u kome je došlo do ponovnog interesovanja za klasičnu antiku. Tokom renesanse, nasleđe se procenjuje i kritikuje. U naučnim krugovima dolazi do negiranja deduktivne metode zaključivanja, dok se induktivna metoda zaključivanja smatrala jedinim načinom za dobijanje pouzdanih informacija.

Jedan od renesansnih filozofa koji se smatra osnivačem moderne nauke i filozofije je Fransis Bekon[9]. Sa naučnog stanovišta, Bekon se smatra tvorcem moderne induktivne metode zaključivanja. Kritikovao je nauku svog vremena jer nije usmerena ka novim otkrićima. Smatrao je da nam u pronalasku novih saznanja ne pomaže dedukcija već indukcija. Potrebno je iscrpno nabrajati probleme koji se podučavaju kako bi se došlo do istine, uključujući i analizu načina na koji problem varira od slučaja do slučaja. Napisao je, 1620. godine, knjigu „Novi Organon“. U njoj je odbacio aristotelovsku logiku, zasnovanu na deduktivnom zaključivanju, i izložio osnove induktivnog zaključivanja. Sledeći primer pokazuje da prilikom zaključivanja ne možemo isključiti deduktivnu metodu.

Primer: Svi labudovi koje smo mi i drugi videli su beli.
Dakle, svi labudovi su beli.
(Izvor: http://www.rcc.org.rs/Rasprostranjenost_indukcije.pdf)

[9] Fransis Bekon, (engl. Francis Bacon) rođen je u Londonu 1561 – 1626, bio je engleski filozof.

Sa aspekta deduktivnog zaključivanja ovaj zaključak je tačan, međutim kako bi induktivno zaključivanje bilo tačno neophodno bi bilo da se svi labudovi na svetu provere. [9]

Slika 2: Fransis Bacon

(Izvor: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Somer_Francis_Bacon.jpg)

Dejvid Hjum[10] kaže: „Ne mogu postojati demonstrativni argumenti koji bi dokazali da slučajevi sa kojima nismo upoznati liče na one sa kojima jesmo." [9] Hjum je 1739. godine u knjizi „Rasprava o ljudskoj prirodi" izneo kritike induktivnog zaključivanja. Tvrdio je da induktivno zaključivanje ne može predstavljati racionalnu osnovu za donošenje zaključka. „Ono što važi za proverene slučajeve određene vrste, ne mora važiti za sve slučajeve te vrste, dakle, indukcija je nepouzdan metod saznanja." [11]

Primer koji potvrđuje Hjumov zaključak;

> *Primer: Kokoška vidi da jutro za jutrom dobija hranu od farmera i zaključuje da će tako biti svakog jutra. Njeno induktivno zaključivanje svakim danom se potvrđuje sve do onog jutra kada bude zaklana.*
>
> *(Izvor: http://www.rcc.org.rs/Rasprostranjenost_indukcije.pdf)*

[10] Dejvid Hjum (engl. David Hume) rođen u Edinburgu 1711 – 1776, bio je škotski filozof, ekonomista i istoričar.

Ne možemo sa sigurnošću znati da će naše buduće iskustvo biti nalik prethodnom. Hjum zaključuje da ono što nam se čini kao neophodna veza između objekata, jeste samo veza između ideja o tim objektima. Uzroke i posledice ne otkrivamo pomoću razuma, već ih pronalazimo u iskustvu. Ljudi često donose sud o uzrocima i posledicama bez prethodnog razmišljanja. Hjum insistira na tome kako mi ne vidimo da događaji zaista uzrokuju jedni druge. Naši zaključci o odnosu uzroka i posledice zasnivaju se na pretpostavci da će se budućnost podudarati sa prošlošću, međutim nemoguće je da se na osnovu iskustva dokaže sličnost između budućnosti i prošlosti. [11]

Slika 3: David Hume

(Izvor: https://filozofskitekstovi.wordpress.com/2010/08/02/dejvid-hjum-sumnja-navika/)

Sistem logike (Organon) koji je Aristotel napisao bio je relevantan do trenutka dok Džon Stjuart Mil[11] 1843. godine nije objavio knjigu „System of Logic". On je predložio klasifikaciju metoda pomoću kojih se otkriva uzročno – posledična zavisnost:

→ Metoda slaganja

→ Metoda razlike

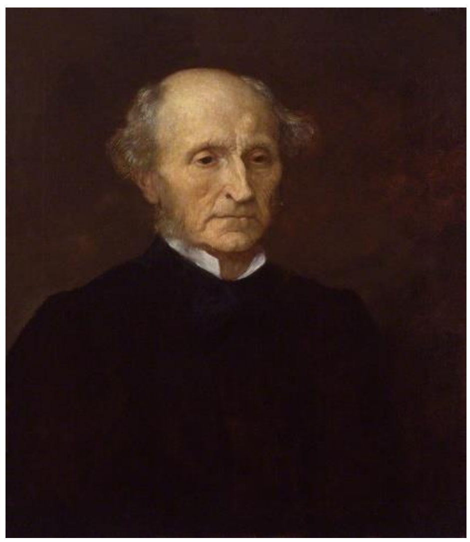
→ Kombinovana metoda

[11] Džon Stjuart Mil (engl. John Stuart Mill) rođen je u Londonu 1806 – 1873, bio je britanski filozof empirista. Smatra se najuticajnijim filozofom 19. veka u Engleskoj.

→ Metod ostatka

→ Metod istovremenih varijacija

Metode koje je izneo su dočekane kritikom. Mil je pokušao da sistematizacijom povrati značaj induktivnog zaključivanja (nakon Hjuma i drugih koji su je kritikovali). Uspostavio je razliku između deduktivne logike, u kojoj zaključujemo na osnovu opštih principa, i induktivne logike, u kojoj izvodimo zaključke iz konkretnih slučajeva. Mil je smatrao induktivno zaključivanje osnovom logike i dao doprinos shvatanju i razvoju iste. Jedinim izvorem znanja je smatrao iskustvo, jer se može proveriti, testirati i dokazati analizom i posmatranjem. [10][12]



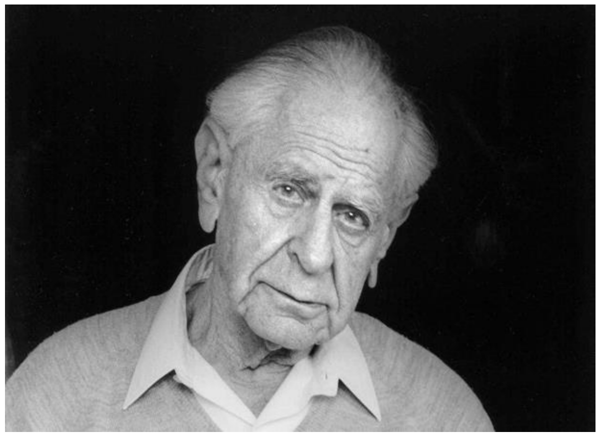
Slika 4: John Stuart Mill

(Izvor: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/78/Stuart_Mill_G_F_Watts.jpg)

Pojedini logičari su pribegavali potpunom odbacivanju indukcije ili pokušaju njene deduktivne rekonstrukcije među kojima je i Karl Poper[12]. Poper je bio jedan od savremenih filozofa i logičara koji je podržavao Hjumov stav o nepouzdanosti induktivnog zaključivanja i isticao značaj deduktivne metode. Poper smatra sistem empirijskom naukom samo ako se ona može proveriti iskustvom. Izvedeni zaključci o slučajevima koje nismo iskustveno proverili ne moraju odgovarati zaključcima o slučajevima koje smo proverili. Napominje da bez obzira na to koliko smo primeraka belih labudova opazili, nemamo pravo da zaključimo da su svi

[12] Ser Karl Rejmund Poper (nem. Karl Raimund Popper) rođen je u Beču 1902 – 1994, bio je britanski filozof.

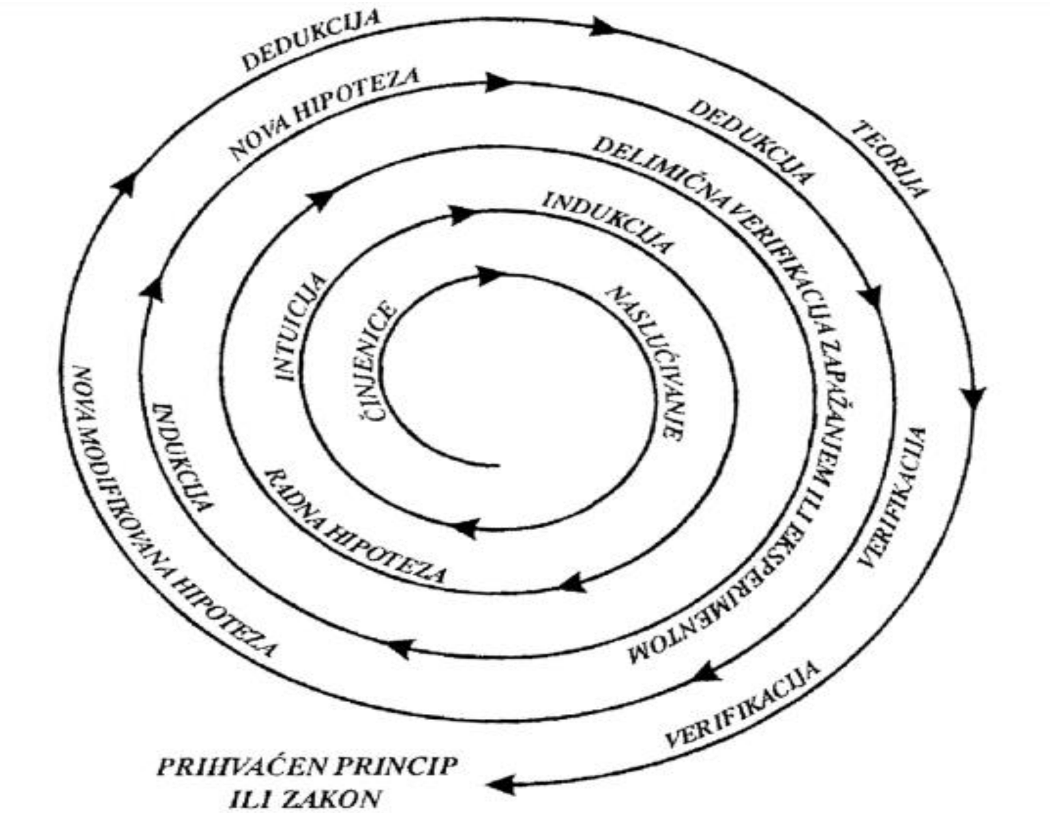
labudovi beli. Takođe, to što posle noći dolazi dan, ne garantuje da sa sigurnošću možemo tvrditi da će sutra svanuti novi dan i zaključuje da pomoću indukcije ne možemo izvesti istinitost ni jednog stava. [11]



Slika 5: Karl Raimund Popper

(Izvor: https://images.newscientist.com/wp-content/uploads/2019/06/16160624/tan-3848164.jpg)

Viševekovne rasprave o indukciji su ukazale na brojne slučajeve u kojima je ona legitimna i neophodna. Svaki pokušaj da se opravda induktivno zaključivanje, nakon Hjuma, ujedno je i pokušaj da se prevaziđu njegovi uvidi. Tragalo se za nečim jačim od pozivanja na naviku. [11] Kritika induktivnog zaključivanja je na mestu, ali ono što ne može da se zanemari je njena široka rasprostranjenost u našim životima. [9] Koliko god da je upotreba induktivnog zaključivanja problematična i nesigurna, kada se suočavamo sa nečim novim mi se oslanjamo na nju. Postavlja se i pitanje: „Da li se indukcija i dedukcija međusobno isključuju?“ Možemo reći da se dedukcija i indukcija međusobno isključuju, ali su takođe i komplementarne. Ako bi ih upoređivali, možemo reći da dedukcija vodi ka nužnim zaključcima, dok indukcija ka verovatnim zaključcima. Mnogi naučnici smatraju da oni koriste i indukciju i dedukciju u svojim istraživanjima, jer posle dedukcije svako naredno istraživanje započinje opet induktivnim zaključivanjem. Prema tome, kombinacijom indukcije i dedukcije realizuje se poseban, induktivno-deduktivni metod koji se najčešće i primenjuje u naučnim istraživanjima. Razvojni put induktivno – deduktivnog naučnog metoda prikazan je na Slici 6. Tokom primene induktivno – deduktivne metode prolazimo kroz četiri faze. Prvo se sakupljaju činjenice pomoću izvršenih eksperimenata i zapažanja. Zatim se korišćenjem intuicije i induktivnog zaključivanja stvaraju radne hipoteze ili teorije koje prestavljaju objašnjenje tih činjenica. U trećoj fazi se testiraju radne hipoteze, delimično verifikuju zapažanjem ili eksperimentom. Kod četvrte faze se kroz nove eksperimente i deduktivnim zaključivanjem prihvata nova teorija. [12]



Slika 6: ,,Arhimedova spirala''
(Razvojni put primene naučnog metoda Salmon i Hanson 1964)
(Izvor: http://www.thtrebinje.com/pdf/Metodologija_Literatura3.pdf)

1.2. Kognitivni trening za decu

Danas se induktivno zaključivanje smatra osnovnim procesom fluidne inteligencije, koji predviđa različite obrazovne ishode. Cattell – Horn – Carroll predstavlja psihološku teoriju o strukturi ljudskih kognitivnih sposobnosti[13] i ona se smatra važnom teorijom u proučavanju ljudske inteligencije. Jedna od kognitivnih sposobnosti koje CHC teorija proverava je i induktivno zaključivanje. Istorijski gledano smatralo se da je fluidna inteligencija nešto na čemu ne može da se radi, poboljša ili da se na nju utiče. John L. Horn[14] je tvrdio da se fluidna inteligencija stiče slučajno i autonomno tokom školovanja. Kreatori Ravenovih matrica testova[15] koji takođe proučavaju i fluidnu inteligenciju, tvrde da njihov test meri fiksne kapacitete koji nisu podložni promenama u funkciji školovanja. [4] Empirijsko istraživanje induktivnog zaključivanja počinje početkom 20-og veka Spearmanovim[16] otkrićem g faktora, koji predstavlja opšti faktor inteligencije. Devedesetih godina obrazovni psiholozi, Klauer i Phye[17], su proučavali načine pomoću kojih se podstiče induktivno zaključivanje i načine njegovog prenosa na testove i učenje. Ono što su želeli da istraže i dokažu jeste da obuka induktivnog zaključivanja poboljšava performanse fluidne inteligencije kao i bolje razumevanje i zaključivanje na času. Klauer i Phye definišu šest osnovnih procesa razmišljanja. Svaki od ovih procesa nam pomaže u rešavanju šest osnovnih vrsta zadataka induktivnog zaključivanja. (Tabela 1). [5]

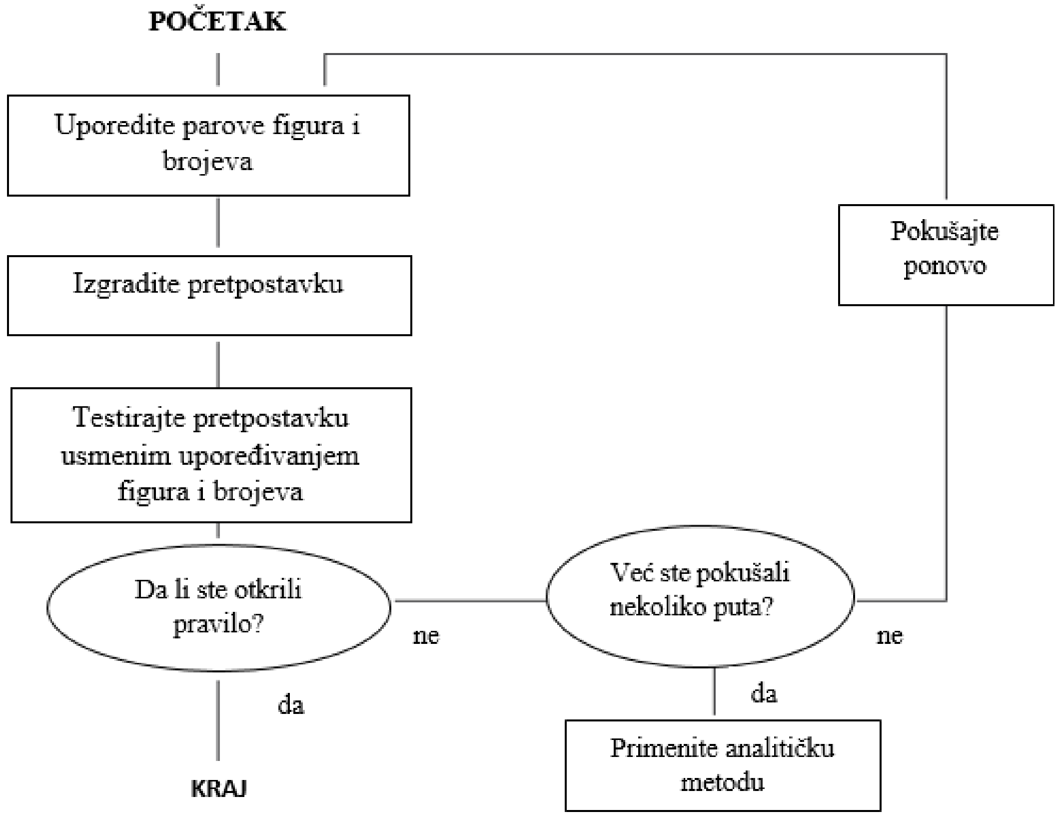
[13] U grupu kognitivnih sposobnosti spada razmišljanje, učenje, zaključivanje, čitanje, pamćenje...
[14] John Leonard Horn, psiholog, jedan od kreatora CHC teorije.
[15] Ravenov progresivni matrični test kreirao je 1938 John C. Raven, imao je za cilj izučavanje opšte inteligencije.
[16] Charles Edward Spearman (1863-1945), bio je engleski psiholog.
[17] Karl Josef Klauer je nemački učitelj i psiholog. Dao je veliki doprinos razvoju obrazovne psihologije. Gary Phye američki psiholog. Njegovo istraživanje se fokusira na procenu akademskog učenja i induktivno zaključivanje.

Proces razmišljanja	Definicija
Prepoznavanje zajedničkih osobina	Pronalazi zajedničku osobinu između figura ili brojeva.
Prepoznavanje razlike u osobinama	Pronalazi razliku između brojeva ili figura u odnosu na njihove osobine .
Prepoznavanje zajedničkih odnosa	Prepoznaje relacije koje postoje između parova figura ili brojeva i primenjuje ih na sledećem paru.
Prepoznavanje razlike u odnosima	Isključuje broj ili figuru koja ima pogrešan odnos sa ostalim brojevima ili figurama
Prepoznavanje dve ili više osobina	Razmatra dve ili više osobina istovremeno između brojeva ili figura.
Prepoznavanje dva ili više odnosa	Razmatra dva ili više odnosa u kojima treba proveriti sličnost ili različitost između brojeva ili figura.

Tabela 1: Šest osnovnih i međusobno povezanih procesa razmišljanja

Klauer je smatrao da proces zaključivanja može da se uvežba, da se nauči jedan opšti postupak i da se on primenjuje svaki put kada se rešava zadatak (Tabela 1). Postoje dve metode koje bi se mogle primenjivati pri rešavanju induktivnih zadataka, to su heuristička[18] i analitička[19] metoda. Tokom obuke učesnicima se savetuje da prvo koriste heurističku metodu i tek kada to ne dovede do rešenja problema primene analitičku. Jasno je da neće svi postupati prema ovim strategijama, odnosno može se pretpostaviti da se ljudi služe raznim strategijama zaključivanja pri rešavanju različitih induktivnih zadataka. Slika 7 prikazuje univerzalni način postupanja kako bi se na delotvoran i učinkovit način rešili induktivni problemi. [5]

[18] Heuristička metoda nam omogućava da pronađemo rešenje problema. Ona se bazira na iskustvu i korišćenju intuicije, zdravog razuma, uopštenih pravila.
[19] Analitička metoda nam pomaže da saznamo više o predmetu proučavanja i njegovim karakteristikama.



Slika7: Heurističkom metodom vođena strategija induktivnog zaključivanja
(Izvor slike: Karl Josef Klauer, Gary D. Phye, Inductive Reasoning: A Training Approach)

Klauer je razvio induktivni trening zaključivanja, odnosno program CTC na osnovu procesa razmišljanja i strategije zaključivanja prilikom rešavanja zadataka. Program kognitivnog treninga za decu, tj. pomenuti CTC program (Cognitive Training for Children) je obrazovna intervencija osmišljena da za cilj ima razvoj veština induktivnog zaključivanja dece. Cilj programa jeste da učenici nauče kako da prepoznaju karakteristike nekog problema kao i način kako da ih uporede sa prethodnim situacijama da bi pronašli rešenja. Učenici koji prođu obuku trebalo bi da su u stanju da prepoznaju induktivni problem kad god ga sretnu.
Klauer je razvio tri programa obuke:

- Program I, za decu od 5 do 8 godina
- Program II. za decu od 11 do 13 godina
- Program III, za decu od 14 do 16 godina

Program I i II može se koristiti sa decom u redovnoj nastavi, nadarenom decom i sa decom koja imaju poteškoće u učenju. Dok je Program III namenjen samo za decu sa blagim poteškoćama u učenju. Trening može da se obavlja jedan na jedan, u malim grupama ili za čitave učionice učenika odjednom. CTC sistem se sastoji od 120 veoma pažljivo razvijenih problema. Za svaki od šest osnovnih procesa zaključivanja (Tabela 1) po 20 zadataka. Težina i složenost problema unutar svakog tipa se povećava. [4] [5]

1.2.1. Pregled literature

Istraživači su vršili razna istraživanja koja su obuhvatala Klauerov program obuke. Do kraja 2004. godine bila su dostupna ukupno 74 istraživanja na skoro 3600 dece koji su koristili jedan od tri programa obuke.

Istraživanja koja su sprovedena imala su za cilj da pokažu da obuka može da poveća performanse fluidne inteligencije i bolje rešavanje problema i induktivnog zaključivanja u nastavnom procesu. Programi obuke su uključivali probleme sa kojima se deca mogu susresti u svakodnevnom životu, i testove inteligencije koji sadrže dosta apstraktnih zadataka. Rezultati koji su dobijeni istraživanjem su potvrdili da deca imaju korist od obuke. U nastavku biće prikazan sažetak tih istraživanja koji je predstavljen u radu [5].

Istraživanja koja su vršena (takođe kao i ona koja se vrše i danas) imala su za cilj da testiraju sledeće hipoteze:

- Hipoteza 1: očekuje se da će obuka induktivnog zaključivanja rezultirati pozitivnim prenosom na testove koje mere fluidnu inteligenciju. (učinkovitost treninga)
- Hipoteza 2: učinci induktivnog treninga na izvedbu testa inteligencije jednak je učinku samo zbog učestvovanja u obuci. Samo iskustvo u bilo kom treningu može samo po sebi pozitivno da utiče na bolje rezultate na testu. (placebo hipoteza)
- Hipoteza 3: učinak obuke induktivnog zaključivanja na izvedbu testa inteligencije ne nestaje nakon nekoliko nedelja. Ova hipoteza je bitna jer je inače obuka uzaludna i bezvredna.

- Hipoteza 4: uvežbavanje induktivnog zaključivanja rezultiraće pozitivnim prenosom na usvajanje nastavnog sadržaja iz nekog predmeta. (hipoteza prenosa)
- Hipoteza 5: učinak obuke nije posledica učenja rešenja zadataka sa testova. (hipoteza treniranja). Postoji mogućnost da su pozitivni učinci treninga rezultat naučenih testova.

Kod većine istraživanja obuka je trajala nekoliko nedelja. Obično su tokom obuke učenicima davane dve lekcije nedeljno, to je period oko pet nedelja. Kako bi se utvrdila tačnost datih hipoteza bilo je potrebni da se učenici obuke testiraju nedelju dana pre obuke i nedelju dana nakon obuke. Za utvrđivanje tačnosti prve tri hipteze bilo je nepohodno da se deca podele u tri grupe i na taj način uporede njihova dostignuća na testovima. Prva grupa je prošla redovnu induktivnu obuku. Druga grupa je rešavala neinduktivne probleme, igrali društvene igre i slično. Treća grupa predstavljala je kontrolnu grupu, u kojoj su učenici prisustvovali samo redovnoj nastavi. Ovakav dizajn je najefikasniji jer daje rezultate gde možemo jasno videti da li su obe vrste obuke jednako delotvorne ili ne. Na osnovu podele učenika u tri grupe i njihovih rezultata na testovima moguće je utvrditi da li je Hipoteza 2 koja tvrdi da stečeno iskustvo na bilo kojoj obuci proizvodi pozitivne rezultate na testu inteligencije tačna. Nakon završetka obuke kako bi se potvrdila trajnost obuke učenici su testirani nakon nekoliko nedelja ili meseci. Testovi koji su korišćeni kod nekih sadržali su samo probleme induktivnog zaključivanja (Ravenov test progresivnih matrica) dok su drugi koristili testove koji su imali podtestove sa zadacima induktivnog zaključivanja (Cattel Culture Fair test).

Istraživanje Hipoteze 4 sastojala se iz dve faze. U prvoj fazi deca u razredu su bila nasumično raspoređena u dve grupe, prva grupa je bila kontrolna grupa bez treninga koja je nastavila sa redovnom nastavom, a druga grupa je predstavljala eksperimantalnu grupu koja je dva puta nedeljno (ukupno pet nedelja) imala obuku induktivnog zaključivanja. U drugoj fazi deca su zajedno prisustvovala novoj lekciji iz nekog predmeta. Istraživači su sastavili test koji su učenici popunili pre i posle odslušane lekcije. Na ovaj način hteli su da provere koliko deca znaju pre odslušane lekcije i koliko su znanja stekli slušanjem lekcije, i samim tim da li je trening poboljšao usvajanje nastavnog sadržaja kod eksperimentalne grupe ili ne. Za istraživanje odabrane su različite nastavne teme iz matematike, biologije, fizike, stranog i maternjeg jezika.

Za testiranje Hipoteze 5 učenici programa su dobili rešenja koja se odnose na šest vrsta zadataka koji se nalaze u mnogim testovima inteligencije, pored toga učili su da rešavaju i neke specifične zadatke. Cilj ove obuke je bio da učenici nauče rešenja zadataka i da ista primene prilikom sledećeg testiranja.

Rezultati testiranja svih hipoteza su sledeća:

- Hipoteza 1 je potvrđena, odnosno postoji pozitivan uticaj induktivnog treninga na sprovođenje testa inteligencije.
- Hipoteza 2 je odbačena, jer kada se uporede rezultati testova kontrolne grupe i grupe sa alternativnom obukom došli su do zaključka da neinduktivan trening ne utiče na poboljšanje učinaka na testu inteligencije.
- Hipoteza 3 je potvrđena. Posttestovi koji su rađeni su doveli do zaključka da se učinak na testovima inteligencije povećava tokom vremena.
- Hipoteza 4 je takođe potvrđena. Obuka induktivnog zaključivanja dovodi do poboljšanja usvajanja nastavnog zadržaja više nego što poboljšava rezultate na testovima inteligencije. Rezultati su pokazali i to da je obuka u malim grupama od troje do petoro učinkovitija, od individualne ili obuke celog razreda.
- Hipoteza 5 je odbijena, pozitivni rezultati treninga nisu isključivo rezultat učenja rešenja zadataka sa testova.

U nastavku će biti prikazana dva rada u kojima su objavljena istraživanja koja su sprovedena posle 2004 godine.

Prvo, ćemo se osvrnuti na istraživanje [4] koje je sprovedeno u Australiji na grupi dece osnovnoškolskog uzrasta, koji pokazuje koje efekte CTC program ima na induktivno i deduktivno zaključivanje i na postignuće iz matematike. U istraživanju su učestvovali učenici trećeg razreda, uzorak se sastojao od 47 učenika (20 dečaka i 27 devojčica), prosečne starosti od 8 godina i 2 meseca. Pre treninga merene su:

- kognitivne sposobnosti – testovima Woodcock – Johnson III[20], test se sastojao od 40 zadataka;
- induktivno zaključivanje – induktivnim testom zaključivanja (Woodcock Johnson III – Subtest formiranja koncepta), koji meri fluidnu inteligenciju, merenjem induktivne logike.
- deduktivno zaključivanje – testom deduktivnog zaključivanja (Woodcock Johnson III – Subtest analize – sinteze), meri fluidnu inteligenciju fokusirajući se na sposobnost deduktivnog zaključivanja. Test zahteva od učenika da analiziraju zagonetke korišćenjem kognitvnih procesa algotitamskog zaključivanja i dedukcije.
- dostignuće iz matematike, učenici su radili test od 30 matematičkih pitanja. Test je osmišljen u saradnji sa nastavnicima u školi da obuhvati raspon sposobnosti učenika.

Na osnovu rezultata testova učenici su nasumično raspoređeni za obuku u male grupe od po troje – četvoro, individualne i u kontrolnu grupu bez treninga koji se sastoji od normalnih aktivnosti u učionici. CTC program koji su koristili sastojao se od 10 lekcija koje traju 20 minuta. Svaka lekcija uključuje rad sa učenicima kako bi im se pomoglo da razumeju i nauče rešenje 12 induktivnih problema. Za 60% problema istraživač daje usmena upustva koja su neophodna da bi se došlo do ispravnog rešenja, a preostalih 40% problema zahteva od učenika da sami pokušaju da dodju do rešenja pre nego što dobiju upustva kako da reše problem. Program obuke se odvijao dva puta nedeljno u trajanju od pet nedelja. Isti testovi su korišćeni i za testiranje, tri meseca nakon treninga.

Rezultati istraživanja potvrđuju određene pretpostavke prethodog istraživanja o CTC programu, međutim postoje određena neslaganja. Rezultati istraživanja koja su sprovedena u Australiji potvrđuju da deca mogu imati korist od nastave u malim grupama, dok deca sa dodatnim potrebama za učenjem imaju koristi od individualnog rada. Analiza takođe potvrđuje da je došlo do poboljšanja induktivnog zaključivanja nakon tri meseca od završetka treninga, u poređenju sa kontrolnom grupom bez treninga. Grupna i individualna obuka su podjednako

[20] Woodcock – Johnson testovi kognitivnih sposobnosti su skup testova inteligencije koji su prvi razvili Ričard Voodcock i Meri E. Boner Johnson 1977 godine. Sadrže kognitivne zadatke za merenje intelektualnih sposobnosti.

efikasne za usvajanje potrebnih znanja za rešavanje problema, što je korisna informacija jer je obuka u malim grupama isplativija i praktičnija u školama od individualne. Rezultati nisu potvrdili poboljšanje performanse na testu rešavanja matematičkih problema. Deca u ovom istraživanju su testirana isključivo posle četiri meseca, a ne i u dužem vremenskom periodu kao u prethodnim istraživanjima [5]. Bez obzira na rezultate ovog istraživanja koji potvrđuje da CTC program ne pomaže prilikom rešavanja matematičkih zadataka, obuka se preporučuje. Razlog nepovoljnog rezultata može biti u malom uzorku na kojem je istraživanje obavljeno (47 učenika), kao i da je potreban duži vremenski period kako bi se efekti obuke manifestovali u domenu rešavanja matematičkih problema.

U radu [6] objavljeno je istraživanje koje je sprovedeno sa 137 učenika šestog razreda na Kipru. U obuci je učestvovalo 74 devojčica i 63 dečaka, koji su u toku obuke pohađali sedmi razred osnovne škole. Na početku istraživanja sprovedeno je testiranje gde su učenici rešavali induktivne zadatke iz matematike. Za merenje sposobnosti induktivnog zaključivanja korišćen je test koji je sadržao 21 zadatak induktinog zaključivanja. U

Tabela 2 prikazani su neki zadaci koji su korišćeni na testu. Test je rađen 60 minuta u terminu redovne nastave. Svi učenici su imali određeno iskustvo u rešavanju jednostavnih analognih zadataka, kao i u prepoznavanju osobina i odnosa između brojeva ili figura. Na osnovu rezultata testova učenici su raspoređeni u dve grupe, eksperimentalnu grupu sa 60 učenika i kontrolnu. Obukom su želeli da razviju: svojstva brojeva i operacije sa brojevima, kao što je množenje parnih i neparnih brojeva, karakteristike 2D i 3D geometrijskih figura, numeričke proporcije, različite vrste nizova kao što su aritmetički i geometrijski niz i sl. Učenici koji su bili u eksperimentalnoj grupi imali su obuku induktivnog zaključivanja 40 minuta, devet nedelja, na redovnom času nastave.

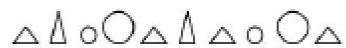
<table>
<tr>
<td>Brojevi ispod imaju nešto zajedničko. Napiši zajedničku osobinu brojeva:
4, 16, 8, 32, 20, 100, 40</td>
<td>Upotpuni pravim brojem
1 5 13 29 ....
(a) 33, (b) 37, (c) 45, (d) 61</td>
</tr>
<tr>
<td>Nađi brojeve koji se ne uklapaju sa ostalima.
9 21 11 15 12 6 23</td>
<td>Jedna od figura remeti redosled. Pronađi je i definišite pravi niz
</td>
</tr>
<tr>
<td>U odgovarajuće polje upiši broj 24. Objasni!
<table>
<tr><td>6 18
12</td><td>16 8
2</td></tr>
<tr><td>3 15
9</td><td>7 25
5</td></tr>
</table></td>
<td>Popuni praznu ćeliju odgovarajućim brojem.
<table>
<tr><td>8</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{8}$</td><td>$\frac{1}{16}$</td><td>?</td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

Tabela 2: Primeri induktivnih zadataka

Za analizu podataka korišćena je univarijantna analiza varijanse.[21] Ispitivali su da li obuka poboljšava sposobnost učenika da reše probleme induktivnog zaključivanja na testu, kao i trajnost obuke. Za istraživanje efekta obuke na rešavanje šest osnovnih vrsta zadataka induktivnog zaključivanja korišćena je multivarijantna analiza varijanse[22].

Rezultati su pokazali da su učenici koji su prošli obuku nadmašili kontrolnu grupu na testiranju posle četiri meseca. Obuka je imala pozitivan uticaj na rešavanje problema induktivnog zaključivanja. Eksperimentalna grupa imala je značajno bolje rezultate od kontrolne grupe kod rešavanja četiri vrste zadataka induktivnog zaključivanja. Značajne razlike su otkrivene kod problema otkrivanja različitosti i sličnosti između osobina brojeva i figura kao

[21] Statistička metoda, koja otkriva postojanje razlike između proseka populacije koja je podvrgnuta nekom eksperimentu, treningu.
[22] Koristi se za simultanu analizu međusobnog odnosa između više od dve promenljive.

i kod otkrivanja različitosti između odnosa brojeva i figura. Ovim istraživanjem imali su za cilj da osmisle nastavni model za razvoj induktivnog zaključivanja u okviru nastavnog sadržaja iz matematike. Otkrili su da je program koji su koristili za obuku efikasan, jer poboljšava sposobnosti učenika za rešavanje raznih problema induktivnog zaključivanja. Ovo istraživanje je od velikog značaja jer je pre svega vršeno u toku nastave, stoga bi ovaj pristup mogao da se koristi kao sredstvo u nastavi za razvijanje matematičkih problema induktivnog zaključivanja. Takođe može se koristiti i kao model za dizajniranje nastavnih programa iz različitih predmeta sa ciljem unapređenja veština mišljenja.

2. INDUKTIVNO ZAKLJUČIVANJE U NASTAVNIM SADRŽAJIMA

Deca počinju implicitno proizvoditi induktivne zaključke u vrlo ranoj dobi, koje je ključno za funkcionisanje dečije inteligencije i čini pokretačku snagu kognitivnog razvoja. [3] Sposobnost induktivnog zaključivanja je važna veština razmišljanja 21. veka. Smatra se za centralnu komponentu kritičkog mišljenja i jedna je od osnovnih veština učenja koja doprinosi rešavanju problema, takođe predstavlja i neophodnu metodu u naučnim istraživanjima. Induktivno zaključivanje je ključno i za razvoj mnogih matematičkih koncepata, posebno algebarskih. Bez obzira na to u osnovnom obrazovanju nedovoljno se daje značaja induktivnom zaključivanju kao predmetu proučavanja. Aktivnosti u učionici se obično fokusiraju na matematičke proizvode, a ne na matematičke procese i strategije. [6]

Učenici u nastavnom procesu treba da budu misaono aktivni, da tragaju za rešenjima matematičkih problema. Uloga svakog nastavnika je da maksimalno uključi učenike u nastavni proces. Nastavni sadržaj mora biti detaljno obrađen, jer nažalost nepotpuna obrada nekog sadržaja dovodi do nepotpunog znanja učenika. U induktivnoj nastavi potreban je obiman broj pojedinačnih i posebnih slučajeva inače će izvedeni zaključci biti neuverljivi, a ponekad i netačni. Matematičke pojmove ne možemo usvojiti bez korišćenja logičkog mišljenja. Induktivno zaključivanje kao misaoni proces sastavni je deo učenikove svakodnevnice, međutim učenici verovatno nisu ni svesni toga da ga koriste. U nastavku će biti navedeno gde se može primenjivati induktivno zaključivanje za usvajanje nastavnih sadržaja.

2.1. Brojevi i operacije sa njima

Induktivno zaključivanje se koristi u svim skupovima brojeva za uvođenje osobina, pravila, računskih operacija. Do kraja četvrtog razreda učenici znaju da čitaju i pišu brojeve veće od milion, upoznati su sa skupom prirodnih brojeva (N) i prirodnih brojeva sa nulom (N_0). Učenici izvode zaključke za neke osnovne osobine računskih operacija iz skupa prirodnih brojeva kao što su zamena mesta sabiraka, združivanje sabiraka, zamena mesta činilaca, 0 kao sabirak, 1 kao činilac, množenje zbira i razlike brojem. U petom razredu iz oblasti prirodni brojevi i deljivost učenici otkrivaju pravila deljivosti dekadnim jedinicama 10, 100, 1000... kao i brojevima 2, 3, 4, 5, 9, 25. Prvo, učenici treba da izvedu pravilo deljivosti za 2 i 5 gde se posmatra poslednja cifra jer su ti zaključci intuitivniji i jednostavniji, nakon toga za 3 i 9 gde posmatramo zbir cifara broja, i kao poslednje za brojeve 4 i 25 gde se posmatra dvocifreni završetak broja. Razlomak se definiše kao količnik dva prirodna broja. Na slikovit način možemo pokazati učenicima da je razlomak opisan deo neke celine, koristeći za to primere iz svakodnevnog života recimo čokoladu, jabuku i sl. Takođe učenici uče zapis razlomaka kao decimalnih brojeva. U šestom razredu uvodi se skup celih brojeva, proširivanjem skupa prirodih brojeva, dodavanjem negativnih brojeva. Do sada učenici nisu bili upoznati sa negativnim celim brojevima pa se uvode neke nove zakonitosti; zbir celog broja i njemu suprotnog broja je 0, suprotan broj zbira celih brojeva jednak je zbiru suprotnih brojeva sabiraka, proizvod dva cela broja različitih znakova je negativan broj, a istih je pozitivan, apsolutna vrednost proizvoda celih brojeva jednaka je proizvodu njegovih apsolutnih vrednosti. Izvode i neke poznate osobine koje se odnose na skup celih brojeva; neutralni element za sabiranje 0, neutralni element za množenje 1, komutativnost sabiranja i množenja, asocijativnost sabiranja i množenja, distributivnost množenja prema sabiranju. Skup realnih brojeva definiše se kao unija dva disjunktna skupa – skupa racionalnih i skupa iracionalnih brojeva. Kod skupa realnih brojeva pored do sada već pomenutih osobina u drugim skupovima, uvode se i operacije sa kvadratnim korenom kao što su zbir, razlika, proizvod i količnik korena i njihovi odnosi sa korenom zbira, razlike, proizvoda i količnika. Kod nastavne teme celi algebarski izraza definiše se stepen promenljive prirodnim brojem kao i osnovna svojstva sa njima; množenje i deljenje stepena jednakih osnova, stepenovanje stepena, stepen proizvoda i količnika. Ovo je osnova koja će trebati za operacije sa polinomima, za izvođenje dve značajne formule, kvadrat binoma i razlika kvadrata.

2.2. Algebra i funkcije

Jedna od oblasti gde možemo koristiti induktivno zaključivanje jesu zavisne veličine i njihovo grafičko predstavljanje u sedmom razredu. Zavisne veličine x i y su direktno proporcionalne ako je zavisnost tih promenljivih izražena uslovom $y = k \cdot x$. Funkcija $y = k \cdot x$ je specijalan slučaj linearne funkcije. Zadajući različite vrednosti za koeficijent k, i crtajući više tačaka grafika funkcije, zaključujemo da je grafik zavisne veličine x i y prava koja sadrži kordinatni početak. U zavisnosti od vrednosti k, tačnije da li je pozitivna ili negativna, prava je u prvom i trećem ili drugom i četvrtom kvadrantu. U osmom razredu radimo linearne funkcije $y = k \cdot x + n$. Koristeći prethodno naučeno, kroz primere gde upoređujemo funkcije $y = k \cdot x$ i $y = k \cdot x + n$, uzimajući istu vrednost za koeficijent k, a više vrednosti za koeficijent n zaključujemo da je i grafik linearnih funkcija $y = k \cdot x + n$ prava i da su sve one paralelne. Takođe vidimo da postoji veza između slobodnog koeficijenta n i preseka sa y – osom. Presek zavisi od vrednosti n, to je tačka (0,n) koju grafik uvek sadrži.

2.3. Obrada podataka

U sedmom razredu učenici očitavaju podatke sa histograma, grafikona, dijagrama kao što je najniža i najviša tačka, temperatura i sl. U osmom razredu grafički predstavljaju statističke podatke, određuju minimum i maksimum zavisnih veličina. Pored toga učenici induktivnim zaključivanjem dolaze do postupaka kojima se određuje aritmetička sredina, srednja vrednosti i medijana.

2.4. Geometrija

Znanje iz geometrije rešava veliki broj praktičnih problema sa kojima se susrećemo u svakodnevnom životu. Deca se sa geometrijskim objektima upoznaju već u prvim godinama života. Oni kroz igru, posmatraju i opažaju predmete u okruženju. Detaljnija obrada trougla i četvorougla i njihovih karakteristika i svojstva radi se u šestom razredu. Tvrđenje do kojih učenici dolaze induktivnim zaključivanjem odnosi se na zbir uglova u trouglu, da on iznosi 180°. Takođe tu su i neka svojstva trougla; svaka stranica trougla manja je od zbira druge dve stranice, a veća od njihove razlike, zatim stavovi podudarnosti trouglova (SUS, USU, SSS, SSU), kao i neka tvrđenja koja se odnose na simetrale duži: ako tačka S pripada simetrali duži AB, onda je S jednako udaljena od krajeva duži AB, simetrale sve tri stranice trougla seku se u jednoj tački, simetrale sva tri ugla trougla seku se u jednoj tački i sl. Uvode se i četiri značajne tačke u trouglu i njihova konstrukcija, centar opisane i upisane kružnice, ortocentar i težište. Kod četvorouglova možemo izvesti svojstva nekih vrsta četvorouglova; dijagonale pravougaonika su jednake, dijagonale kvadrata i romba uz uzajamno normalne, dijagonale kvadrata su jednake, dijagonale paralelograma se polove i sl. Koristeći činjenicu da se četvorougao deli na dva trougla, zaključujemo da zbir uglova iznosi 360°. U sedmom razredu obrađuje se jedna od najznačajnijih osobina pravouglog trougla, Pitagorina teorema. Posmatrajući različite pravougle trouglove i odnos kvadrata njihovih stranice, može se na jednostavan način primetiti pravilnost koja uvek važi između kvadrata dve katete i kvadrata hipotenuze. Kod mnogouglova takođe možemo iskoristiti činjenicu da ih možemo podeliti na trouglove i na taj način odrediti zbir unutrašnjih uglova mnogougla. Takođe induktivnim zaključivanjem dolazimo i do formule za broj dijagonala mnogouglova iz istog temena, kao i za ukupan broj dijagonala mnogouglova.

2.5. Merenje

Oblast merenje i mera povezuje geometrijski i aritmetički sadržaj. U trećem razredu računa se obim trougla, pravougaonika i kvadrata. U tom uzrastu je još rano za definisanje konkretnih formula, već je fokus da učenici primete i merenjem potvrde da je obim upravo dužina linije koja je dobijena nadovezivanjem duži čije su dužine jednake sa dužinom stranica oblika koji posmatramo i da će to važiti koje god dužine uzeli za stranice trougla, kvadrata i pravougaonika. Osnovna merna jedinica za površinu je kvadrat čija je stranica dužine 1m i naziva se kvadratni metar. Za izvođenje formule za površinu pravougaonika možemo uporediti proizvod dužine stranica pravougaonika dobijenih merenjem i površinu dobijenu pomoću površina kvadrata od $1m^2$. Za određivanje površina složenijih geometrijskih oblika koristimo činjenicu da možemo da ih razložimo i dopunimo geometrijskim oblicima čije formule za površinu znamo, kao što su pravougaonik, trougao i kvadrat. Pravougaonik predstavlja osnovu za određivanje formule za površine paralelograma, trougla, trapeza. U šestom razredu kod računanja površine mnogougla zaključujemo da mnogougle možemo razložiti na trouglove, pa je površina mnogougla jednaka zbiru površina trouglova. Kod kruga učenici mogu otkriti da je centralni ugao dva puta veći od periferijskog ugla nad istim kružnim lukom, merenjem centralnih i periferijskih uglova nad istim lukom i njihovo upoređivanje. Formula za površinu kruga se određuje po principu kao i kod ostalih geometrijskih objekata, razlaganjem kruga na delove. Akcenat je na tome da učenicima razložimo krug postepeno, na 6, 12, 24... delova, jer što više razlažemo krug, to će sve više figura koju dobijemo ličiti na pravougaonik gde su dve naspramne stranice dužine r, a druge dve dužine jednake polovini obima kruga $r \cdot \pi$. U osmom razredu se obrađuju geometrijska tela. Učenicima će od velikog značaja biti crtanje mreža tih tela, jer će na taj način tela posmatrati u ravni i lakše će moći da ih zamisle i shvate. Prvo se rade poliedri, koji predstavljaju geometrijska tela čije su stranice mnogouglovi. Površina poliedra je jednaka zbiru površina njenih stranica. Za određivanje formule za površinu poliedra možemo uzeti poliedre napravljene od papira, recimo kocku, rastaviti je i videti da je sastavljena od šest kvadrata, čiju površinu znamo. Takođe crtanjem mreža geometrijskih tela dolazimo do istog zaključka. Na taj način određujemo i površine prizme, piramide, valjka, kupe.

3. EMPIRIJSKO ISTRAŽIVANJE

3.1. Metodologija

Tradicionalna nastava u kojoj dominira frontalni oblik nastave je i dalje najzastupljeniji oblik nastave u Republici Srbiji. Savremena nastavna sredstva koja imaju ulogu u razvijanju induktivnog zaključivanja kod dece još uvek su u fazi podstepenog uvođenja u škole po Srbiji. Zbog toga je pretpostavka da induktivno zaključivanje kod dece u osnovnim školama nije na zadovoljavajućem nivou. Ovu pretpostavku smo proverili istraživanjem u kojem su učestvovali deca od petog do osmog razreda.

Cilj ovog istraživanja je utvrđivanje nivoa induktivnog zaključivanja kod dece osnovnoškolskog uzrasta u Republici Srbiji. Istraživanje je vršeno pomoću testa koji je dat u prilogu ovog rada. Test se sastoji od četiri zadatka koji će pokazati različite procese razmišljanja induktivnog zaključivanja. Prvi i treći zadatak zahteva od učenika da prepoznaju zajedničku osobinu, drugi zadatak da prepoznaju zajednički odnos i četvrti zadatak da prepoznaju razlike u osobinama. U svakom od zadataka se pored odgovora traži i obrazloženje tih odgovora kako bi videli proces razmišljanja kod dece, a sa druge strane, izbacili uticaj prepisivanja. Kako zadaci ne moraju da imaju samo jedno jedinstveno rešenje, obrazloženja su neophodna. Isključivo je zadatak sa dobrim obrazloženjem prihvaćen kao tačan jer nam daje uvid da su dobro i pravilno zaključili. Kako ni obrazloženja nisu jedinstvena kod svakog zadatka imamo prikazana raznovrsna obrazloženja učenika. Ideja zadataka je uzeta iz rada (Constantinous Christou, Eleni Papageorgiou, 2017).

Istraživanje je sprovedeno sa đacima iz osnovne škole “Miloš Crnjanski“ u Srpskom Itebeju kod učenika od petog do osmog razreda, kao i sa učenicima šestog razreda osnovne škole iz Beograda. Ukupno je anketirano 132 učenika od čega je 80 devojčica i 52 dečaka. Od učenika je u anketnim upitnicima traženo da zaokruže ocenu iz matematike, kao i da daju svoju procenu težine testa.

Testiranje je obavljeno anonimno pri čemu je rečeno da se testiranje vrši u svrhu izrade master rada i da je cilj testiranja utvrđivanje nivoa induktivnog zaključivanja. Učenicima je naglašeno da iskreno daju odgovore i da obavezno daju obrazloženja.

Tabela 3 klasifikovani su obrađeni podaci po polu i uspehu učenika. Iz posmatrane tabele možemo da vidimo da je broj učenika u šestom razredu najveći (71) jer su to podaci iz dve škole dok je broj učenika ostalih razreda podjednak. Takođe vidimo da 43.18% našeg uzorka čine đaci koji su imali odličan uspeh iz metematike na kraju polugodišta.

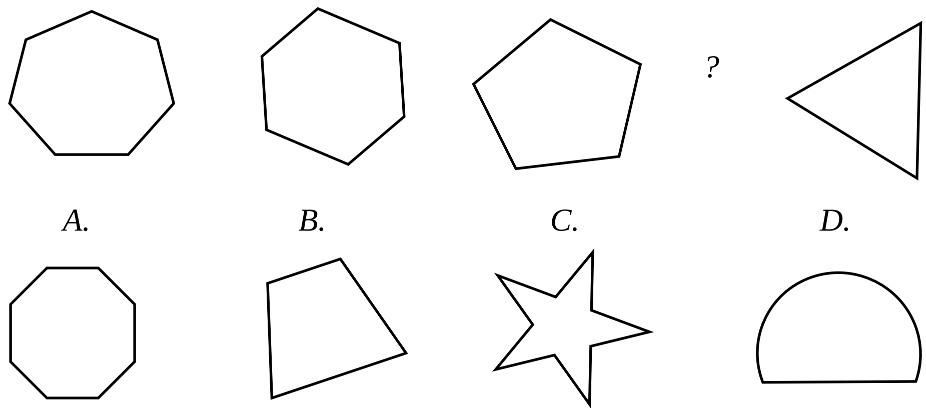
Razred	Pol	Ocena iz matematike					Ukupno
		1	2	3	4	5	
V	Ž	0	2	2	3	2	9
	M	0	0	1	3	4	8
	ukupno	**0**	**2**	**3**	**6**	**6**	**17**
VI	Ž	0	3	7	12	21	43
	M	0	4	4	6	14	28
	ukupno	**0**	**7**	**11**	**18**	**35**	**71**
VII	Ž	1	3	6	3	4	17
	M	0	2	1	1	2	6
	ukupno	**1**	**5**	**7**	**4**	**6**	**23**
VIII	Ž	0	1	2	2	6	11
	M	0	3	2	1	4	10
	ukupno	**0**	**4**	**4**	**3**	**10**	**21**
Ž		1	9	17	20	33	80
M		0	9	8	11	24	52
UKUPNO		**1**	**18**	**25**	**31**	**57**	**132**
UKUPNO (%)		**0.76%**	**13.64%**	**18.94%**	**23.48%**	**43.18%**	

Tabela 3: Podaci o broju učenika klasifikovanih po polu i njihovom uspehu iz matematike

3.2. Analiza rezultata

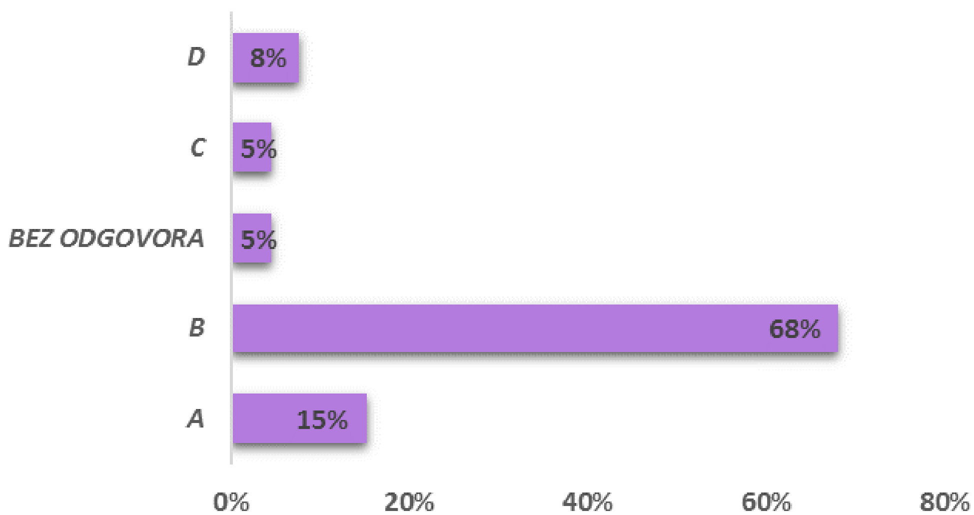
3.2.1. Analiza rezultata po zadacima

Zadatak 1. *Dat vam je niz sa geometrijskim oblicima, gde jedan oblik nedostaje. Vaš zadatak je da od ponuđenih odaberete onaj koji odgovara, i zaokružite slovo iznad njega.*



Obrazložite, zbog čega ste odabrali baš taj geometrijski oblik?

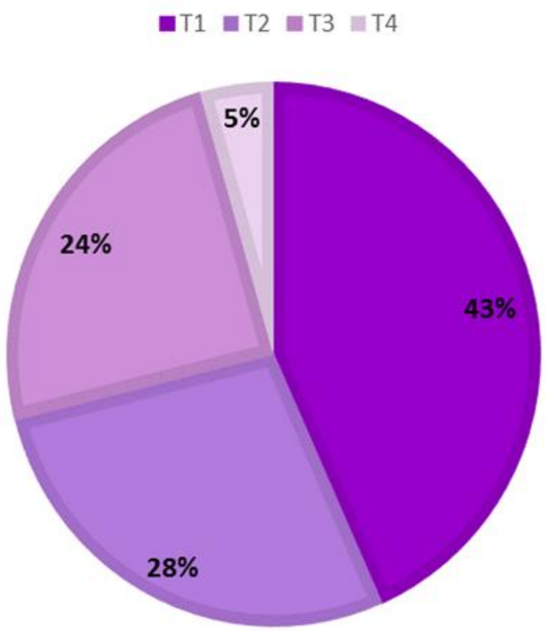
Na Grafik 1 predstavljen je procentualni prikaz odgovora učenika u prvom zadatku. Najveći broj učenika je tačno odgovorilo, tačnije zaokružilo odgovor pod B (68%), dok je drugi najčešći odgovor bio odgovor pod A (15%).



Grafik 1: Procentualan prikaz zaokruženih odgovora za Zadatak1

Posmatrajmo sada učenike koji su zaokružili odgovor pod B. Na Grafiku 2 prikazana je struktura datih obrazloženja posmatranih učenika. Sa grafika vidimo da je 43%, što je 39 učenika, imalo tačna obrazloženja. Najčešći odgovori učenika prikazani su u Tabela 4 gde su kodirani odgovori. Na osnovu datih odgovora vidimo da su neki učenici posmatrali broj stranica geometrijskih oblika da bi došli do rešenja, dok su drugi posmatrali broj uglova.

Sa druge strane 52% učenika koji su zaokružili B nisu dali tačna obrazloženja,od toga je 28% učenika dalo nepotpuna obrazloženja. Oni su primetili da je četvorougao oblik koji fali ali nisu znali jasno da objasne zbog čega.



Grafik 2: Grafički prikaz obrazloženja učenika koji su tačno odgovorili u Zadatku 1

KOD	OPIS	PRIMER
T1	Obrazloženje je matematički dobro definisano, odgovori su precizno napisani	***-Zato što prvi ima 7 stranica, drugi 6, treći 5 a četvrti 3, svi osim trećeg imaju više od 4 stranice.*** ***-Jer svaki oblik ima ovaj redosled (gore) stranica: 7,6,5, i nedostajao je četvorougao pa posle njega trougao.*** ***-Svaki naredni ima jednu stranicu manje od prethodne. Prvi je imao 7, drugi 6, treći 5 i poslednji 3, što znači da nam nedostaje onaj sa 4.*** ***-Zato što ide niz od 7, 6, 5, 4, 3 uglova.*** ***-Uvek je broj stranica za jedan manji kod geometrijskih oblika.***
T2	Obrazloženje koje nije tačno,ali je korišćena logika pri zaključivanju	***-Zato što ima 4 stranice.*** ***-Zato što fali geometrijski oblik od 4 stranice.*** ***-Jer je to jedini četvorougao.*** ***-Jer uglovi idu od najvećeg ka namanjem broju.***
T3	Netačna i nelogična obrazloženja	***-Zato što imaju sličan oblik.*** ***-Ne znam*** ***-Mislim jer se najviše uklapa.*** ***-Ne znam da objasnim.***
T4	Nije dato nikakvo obrazloženje	***-Bez obrazloženja***

Tabela 4: Kodirana obrazloženja tačnih odgovora učenika

U Tabeli 5 možemo videti obrazloženja koje su učenici dali na netačne odgovore. Samo je jedan učenik dao smisleno obrazloženje u odnosu na odgovor koje je zaokružio.

KOD	OPIS	PRIMER
N1	Dato je obrazloženje u odnosu na zaokružen odgovor	***-Ovo je jedini polu krug***
N2	Netačna i nelogična obrazloženja	***-Zato što*** ***-Birala sam na eci-peci-pec. šalim se. izabrala sam taj oblik zato što jako liči na prva tri oblika*** ***-Zato što se oblik a slaže sa ovim drugim oblicima*** ***-Zato što navijam za zvezdu*** ***-Zato što liči na druge***

Tabela 5: Kodirana obrazloženja netačnih odgovora učenika

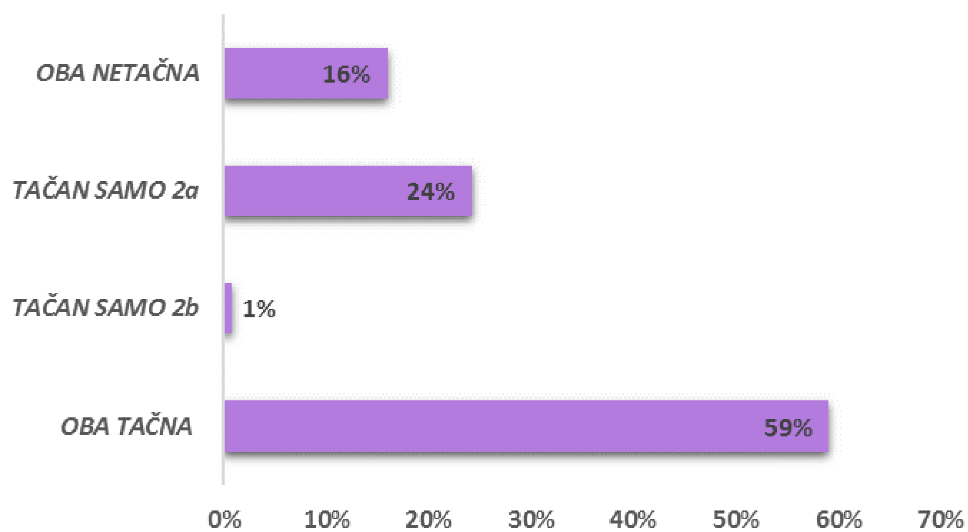
Zadatak 2. *U sledeća dva primera prikazan je po jedan niz koji se sastoji od sedam brojeva. Odredi sledeći broj u nizu, i napiši ga na liniju!*

a) 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 ____

b) 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23 ______

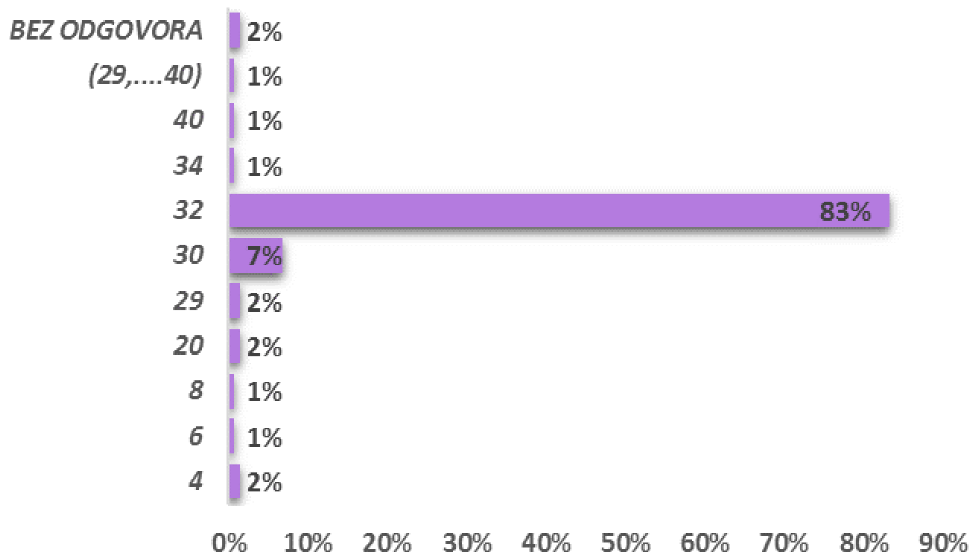
Zašto si naveo taj broj pod a)? A zašto pod b)?

Na **Error! Reference source not found.** predstavljen je procentualan broj učenika koji su tačno i netačno odgovorili na oba pitanja, kao i onih koji su dali tačan odgovor samo pod a) ili b). Tačan odgovor u delu pod a) je 32, dok je u delu pod b) 30. Najveći broj učenika je dao tačan odgovor na oba zadatka (59%). Razlika između tačnih odgovora pod a) (24%) i b) (1%) sugeriše da je učenicima bilo lakše da prepoznaju relaciju između brojeva u delu pod a).

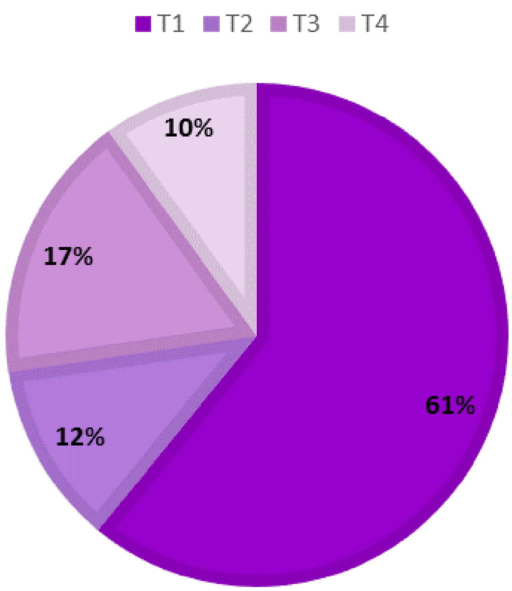


Grafik 3: Procentualan prikaz tačnih i netačnih odgovora u Zadatku 2

Na Grafiku 4 predstavljen je procentualni prikaz odgovora učenika u zadatku 2 pod a). Najveći broj učenika je tačno odgovorio (83%) , dok je drugi najčešći odgovor bio odgovor 30 (7%).



Grafik 4: Procentualni prikaz odgovora u Zadatku 2 pod a)



Grafik 5: Grafički prikaz obrazloženja učenika koji su tačno odgovorili u Zadatku 2 pod a)

Na Grafiku 5 prikazana je struktura datih obrazloženja za tačne odgovore. Sa grafika vidimo da je više od pola, tačnije 61% učenika koji su tačno odgovorili dali i tačno obrazloženje. Kodirana obrazloženja tačnih i netačnih odgovora možemo videti u Tabeli 6 i Tabeli 7. Izdvojila bih da su dva učenik o brojevima u nizu zaključili da je u pitanju "tablica množenja sa 4", što su drugačiji odgovori u odnosu na ostale. Po obrazloženjima se može videti da je 12% učenika razumela zadatak i na koji način dobijamo brojeve u nizu ali nisu uspeli da daju potpuna i jasna obrazloženja.

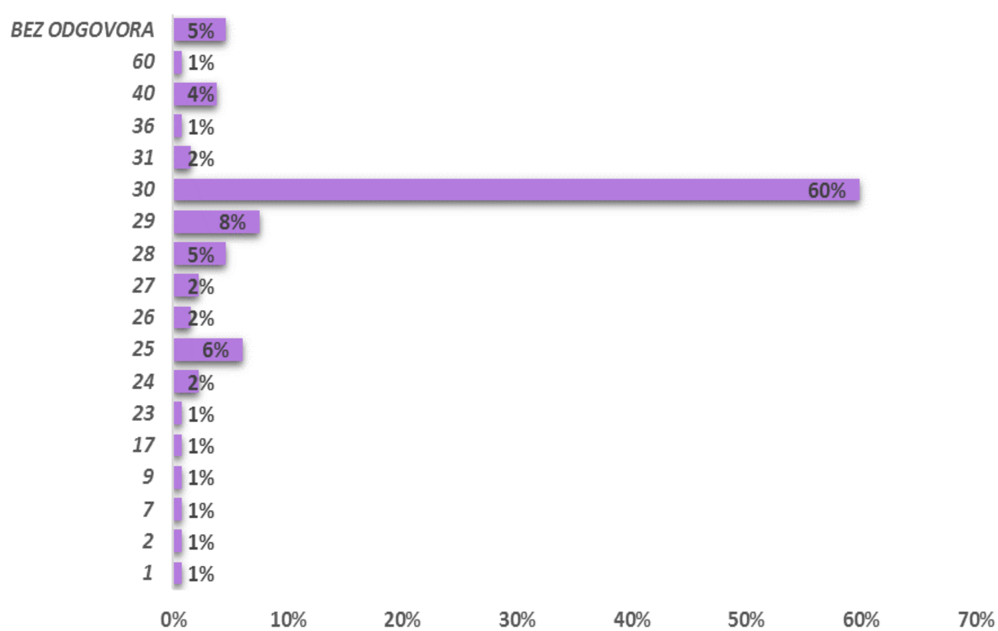
KOD	OPIS	PRIMER
T1	Obrazloženje je matematički dobro definisano, odgovori su precizno napisani	***-Jer niz ide na svaki 4 br.*** ***-Zato što je 8 - 4 = 4, 12 - 8 = 4, 16 - 12 = 4, 28 + 4 = 32. Pa ima logike da je 32.*** ***-Tablica množenja sa 4*** ***-Uvek ide plus 4 pa je 32*** ***-Ide za po četiri znači 4,8, pa 4 + 4 = 8 + 4 = 12...*** ***-Pod a su sve brojevi redom koji su deljivi sa četiri***
T2	Obrazloženje nije potpuno i jasno definisano	***-Idu brojevi od 4 pa na dalje*** ***-Sabrala sam sa četiri*** ***-28 + 4 = 32*** ***-Zato što je 4 više*** ***-Zbog redosleda***
T3	Netačna i nelogična obrazloženja	***-Zato što mi se može*** ***-Iskreno ne znam*** ***-Zato što je pomnoženo sa brojem 8*** ***-Zato što se uvek broj povećava za jedan***
T4	Nije dato nikakvo obrazloženje	***-Bez obrazloženja***

Tabela 6: Kodirana obrazloženja tačnih odgovora učenika

KOD	OPIS	PRIMER
N1	Dato je obrazloženje u odnosu na zapisan odgovor	***-Zato što su brojevi pod a parni*** ***-Pa svaki broj od iza smanjuje se za 4***
N2	Netačna i nelogična obrazloženja	***-Jel mi se ne sviđa broj*** ***-Jer je izostavljeno dva broja i ja sam izostavila dva broja*** ***-Stvarno ne znam***

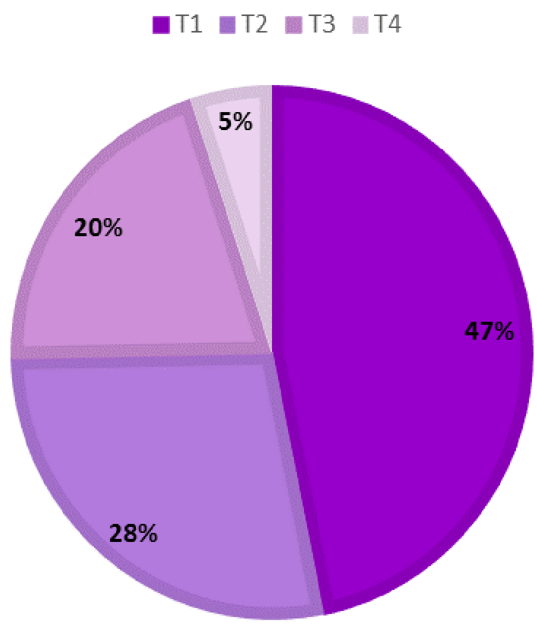
Tabela 7: Kodirana obrazloženja netačnih odgovora učenika

Na Grafiku 6 predstavljen je procentualni prikaz odgovora učenika u zadatku 2 pod b). Tačno je odgovorilo 60% , dok je drugi najčešći odgovor bio odgovor 29 (8%).



Grafik 6: Prikaz svih odgovora u Zadatku 2 pod b)

Možemo videti da su najraznovrsniji odgovori dati u Zadatku 2 pod b). Na Grafiku 7 vidimo da je 37 učenika (47%) dalo tačno obrazloženje. Ako posmatramo procenat tačnih obrazloženja po zadacima zaključujemo da je učenicima u ovom zadatku bilo najteže da daju kompletno obrazloženje. U Tabeli 8 možemo videti obrazloženja učenika.



Grafik 7: Grafički prikaz obrazloženja učenika koji su tačno odgovorili u Zadatku 2 pod b)

KOD	OPIS	PRIMER
T1	Obrazloženje je matematički dobro definisano, odgovori su precizno napisani	***-U nizu se brojevi povećavaju za jedan broj više nego za koliko su se povećali prethodni brojevi (prvi povećati za 1, drugi za 2, treći za 3...)*** ***-Zato što je 2 + 1 = 3,3 + 2 = 5, 5 + 3 = 8, 8 + 4 = 12, 12 + 5 = 17, 17 + 6 = 23 i onda sam rešio da je 23 + 7 = 30*** ***-Jer se svakom sledećem broju dodaje za 1 više npr 2 + 1 = 3, 3 + 2 = 5, 5 + 3 = 8, 8 + 4 = 12, 12 + 5 = 17…*** ***-Uvek jedan broj više dodajemo brojevima u nizu, 2 + 1 = 3, 3 + 2 = 5... 23 + 7 = 30***
T2	Obrazloženje nije potpuno i jasno definisano	***-Na svaki broj se doda sledeći*** ***-Jer idu po 7*** ***-Zato što je sabirano sa brojem 7*** ***-Na svaki broj se doda po jedan veći broj*** ***-Jer kako brojevi idu redom uvek jedan više treba da se doda***
T3	Netačna i nelogična obrazloženja	***-Zato što svaki put povećavamo onoliko koliko dodajemo*** ***-Pametan sam*** ***-Odabrala sam taj broj jer se brojevi postepeno dodaju*** ***-Jer idu po 7***
T4	Nije dato nikakvo obrazloženje	***-Bez obrazloženja***

Tabela 8: Kodirana obrazloženja tačnih odgovora učenika

U Tabeli 9 možemo videti obrazloženja četvoro učenika koja su potpuno tačna a dati su netačani odgovori, umesto 30 dali su odgovor 29.

KOD	OPIS	PRIMER
N1	Dato je obrazloženje u odnosu na zaokružen odgovor	***-Jer je 2 + 1 = 3, 3 + 2 = 5 i tako redom dok nisam stigla do poslednjeg broja kojem sam dodala 6*** ***-Svakom broju se dodaje svaki sledeći broj od 1 na primer 2 + 1 = 3, 3 + 2 = 5, 5 + 3 = 8, 8 + 4 = 12, 12 + 5 = 17...*** ***-Svaki put se povećava za jedan više***
N2	Netačna i nelogična obrazloženja	***-Zato što mi se može*** ***-Zato što su brojevi pod b neparni*** ***-Jer niz ide na svaki 2 br.*** ***-Jer je kod prethodnih brojeva jedan izostavljen pa sam i ja izostavila jedan*** ***-Zato što su brojevi pod b neparni*** ***-Ne znam***

Tabela 9: Kodirana obrazloženja netačnih odgovora učenika

Zadatak 3. *Unutar kruga imate četiri broja koji imaju zajedničku osobinu. Koji od ponuđenih brojeva pripada grupi brojeva unutar kruga? Zaokružite slovo ispred tačnog broja.*

A. 12

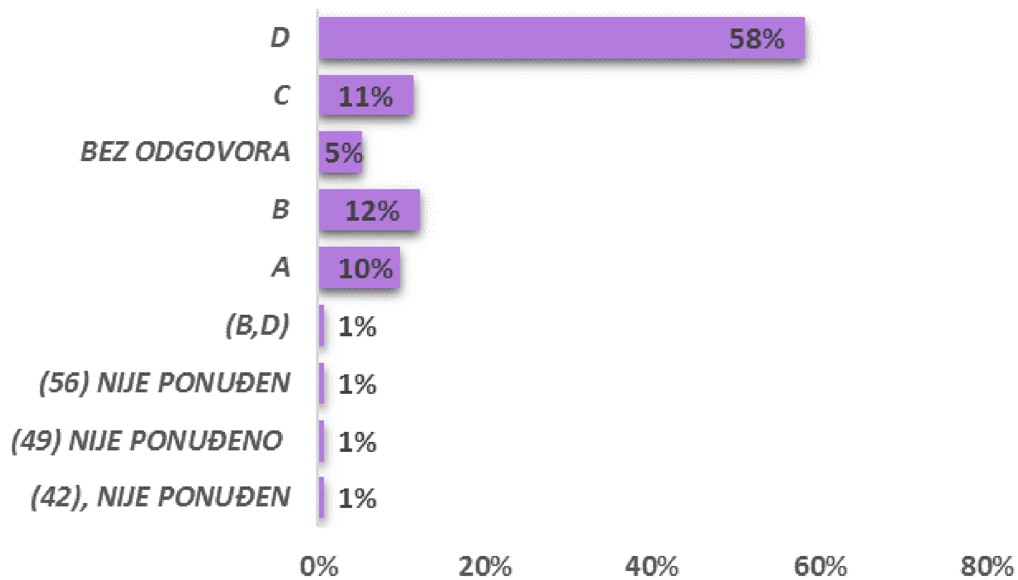
B. 8 *21* *49*

C. 45 *42* *14*

D. 35

Koja je to zajednička osobina brojeva unutar kruga? Zapišite odgovor.

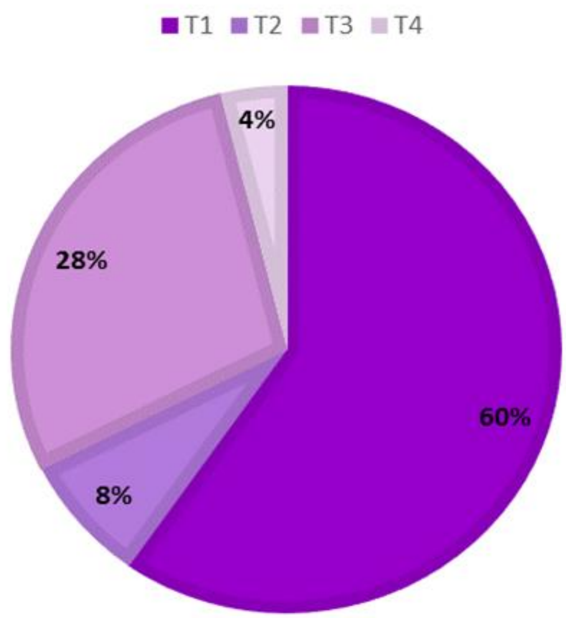
Sa Grafika 8 možemo videti da je tačan odgovor, pod D, zaokružilo 58% učenika, dok je tri učenika kao odgovor zapisalo broj koji nije bio ponuđen.



Grafik 5: Procentualni prikaz zaokruženih odgovora u Zadatku 3

Od 58% učenika koji su zaokružili tačan odgovor na Grafiku 8 vidimo da je 60% učenika, odnosno njih 46, dalo tačna obrazloženja. Izdvojena obrazloženja mogu se videti u Tabeli 10.

Deo učenika je posmatrao brojeve unutar kruga kao sabirke broja 7, dok su drugi kao brojeve deljive sa 7.



Grafik 6: Grafički prikaz obrazloženja učenika koji su tačno odgovorili u Zadatku 3

Sa druge strane 40% učenika nije dalo tačno obrazloženje. Na osnovu obrazloženja možemo videti da i oni koji su dali netačna obrazloženja kao i oni koji su dali netačne odgovore su rešenje tražili posmatrajući parnost brojeva ili odnos među njima.

KOD	OPIS	PRIMER
T1	Obrazloženje je matematički dobro definisano, odgovori su precizno napisani	***-21, 14, 42, 49 su deljivi sa 7, samo 35 je deljiv od ponuđenih*** ***-Zajednička osobina im je da su deljivi sa 7*** ***-Tablica množenja sa sedam*** ***-Svaki broj može se podeliti sa 7*** ***-Zajednička osobina brojeva je da se mogu dobiti sabiranjem broja 7*** ***-Svaki broj je deljiv sa sedam, pa je i 35 deljiv sa sedam, dok drugi ponuđeni nisu***
T2	Obrazloženje koje nije potpuno i jasno definisano	***-Zato što broj 35 je deljiv sa 7*** ***-Zato što je deljiv sa 7***
T3	Netačna i nelogična obrazloženja	***-Da budu u krugu a ne van kruga*** ***-Ne znam*** ***-Ispred 42 je 35*** ***-Ako svaki podelim sa dva dobijam neparne brojeve*** ***-Zajednička osobina im je da je desetica između 14 i 21 za 1 veća, a kad bi stavili 35 on bi bio za jednu deseticu manji od 42 ili 49.***
T4	Nije dato nikakvo obrazloženje	***-Bez obrazloženja***

Tabela 10: Kodirana obrazloženja tačnih odgovora učenika

KOD	OPIS	PRIMER
N1	Dato je obrazloženje u odnosu na zaokružen odgovor	***-Svi su dvocifreni samo on jednocifren parni i neparni brojevi*** ***-Ni jedan broj nije deljiv sa osam***
N2	Netačna i nelogična obrazloženja	***-Ne znam*** ***-Zato što je paran*** ***-Jer ima broja posle 40*** ***-Što imaju svog para***

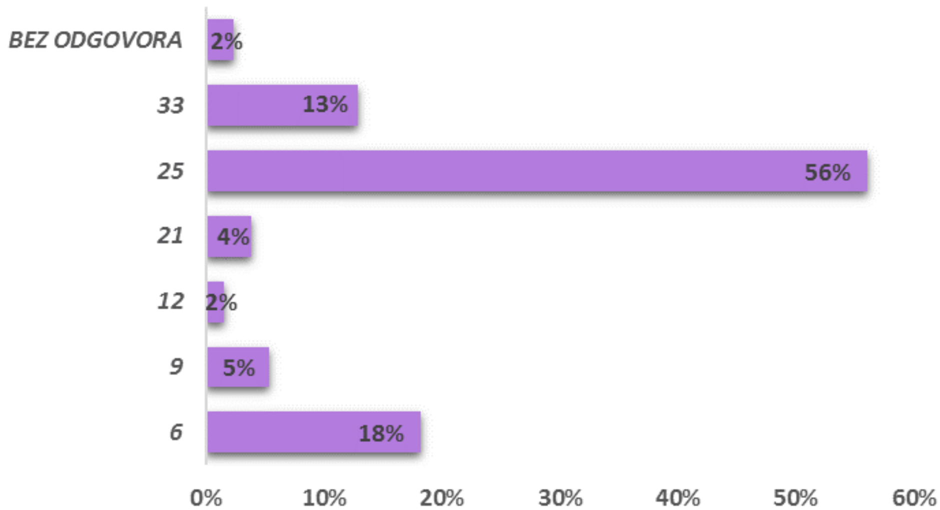
Tabela 11: Kodirana obrazloženja netačnih odgovora učenika

Zadatak 4. *Od ponuđenih brojeva, imate jedan koji se tu ne uklapa. Prepoznajte broj i zaokružite ga.*

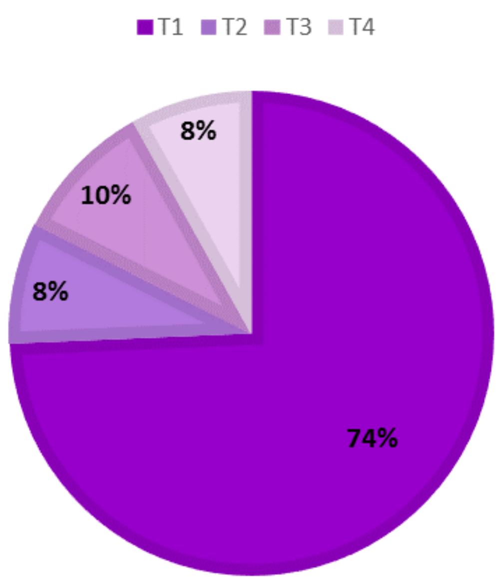
9 12 21 33 25 6

Zbog čega se baš taj broj ne uklapa? Zapišite odgovor!

Na Grafik 7 predstavljen je prikaz odgovora učenika u četvrtom zadatku. Tačno je odgovorilo 56% učenika (broj 25) dok su drugi najčešći odgovori bili 6 (18%) i 33 (13%).



Grafik 7: Procentualni prikaz zaokruženih odgovora u Zadataku 4



Grafik 8: Grafički prikaz obrazloženja učenika koji su tačno odgovorili u Zadatku 4

Posmatrajmo sada učenike koji su dali tačan odgovor, tačnije zaokružili broj 25. Na Grafik 8 vidimo da je većina učenika dala tačna obrazloženja (74%). Posmatrajući obrazloženja učenika koji su dali netačan odgovor, koje možemo videti u Tabeli 13, većina učenika je posmatrala brojeve kao da su u nizu, tražila relaciju između njih i na taj način probala da nađe onaj koji se ne uklapa.

KOD	OPIS	PRIMER
T1	Obrazloženje je matematički dobro definisano, odgovori su precizno napisani	***-Zato što u ove brojeve može podeljeno sa 3 a 25 ne može zato što se dobije višak*** ***-25 se ne uklapa, jer nije deljiv sa 3 (2 + 5 = 7 što nije deljivo sa 3)*** ***-Jedini nije sabirak sa 3 3, ,6, 9, 12...24, 27*** ***-Zato što su svi osim njega deljivi sa 3***
T2	Obrazloženje koje nije potpuno i jasno definisano	***-Svi se dele sa 3*** ***-Zato jer je 5 * 5 = 25***
T3	Netačna i nelogična obrazloženja	***-Mora da ide redom*** ***-Zato što se ne uklapa*** ***-Zato što 6 kada se sabere sa 3 to je 9 i 9 + 3 = 12 i ako 12 + 3 nije 21, ali zato 12 + (3 * 3) = 21, ali 21 + 3 nije 25, niti 21 + (3 * 2, 3, 4...) nije 25, 4 ne može se dobiti nikako množenjem broja 3, ali 21 + 3 nije 33, ali opet 21 + (3 * 4) = 33.***
T4	Nije dato nikakvo obrazloženje	***-Bez obrazloženja***

Tabela 12: Kodirana obrazloženja tačnih odgovora učenika

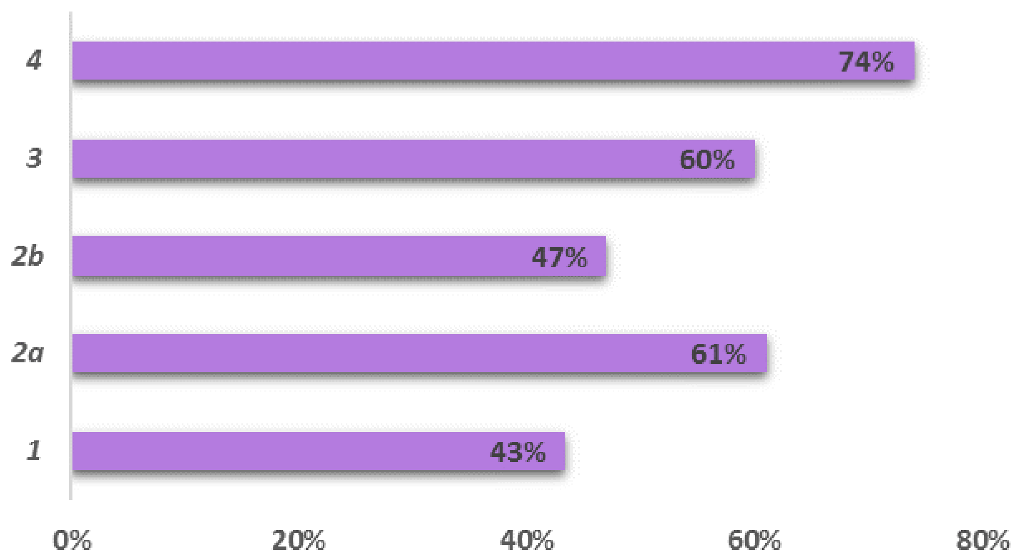
KOD	OPIS	PRIMER
N1	Dato je obrazloženje u odnosu na zaokružen odgovor	***-Zato što je najmanji*** ***-Jer su ostali brojevi veći od ovog što sam zaokružila*** ***-Jer je najmanji paran broj***
N2	Netačna i nelogična obrazloženja	***-Zato što je jedini paran, a ostali sa te dve cifre daju ne paran*** ***-Jer je deljiv sa 11*** ***-Za sve brojeve dodaš 3 i zbir se uklapa sa nekim brojevima u nizu*** ***-Nemam pojma***

Tabela 13: Kodirana obrazloženja netačnih odgovora učenika

3.2.2. Analiza rezultata prema polu, uzrastu, oceni i težini zadatka

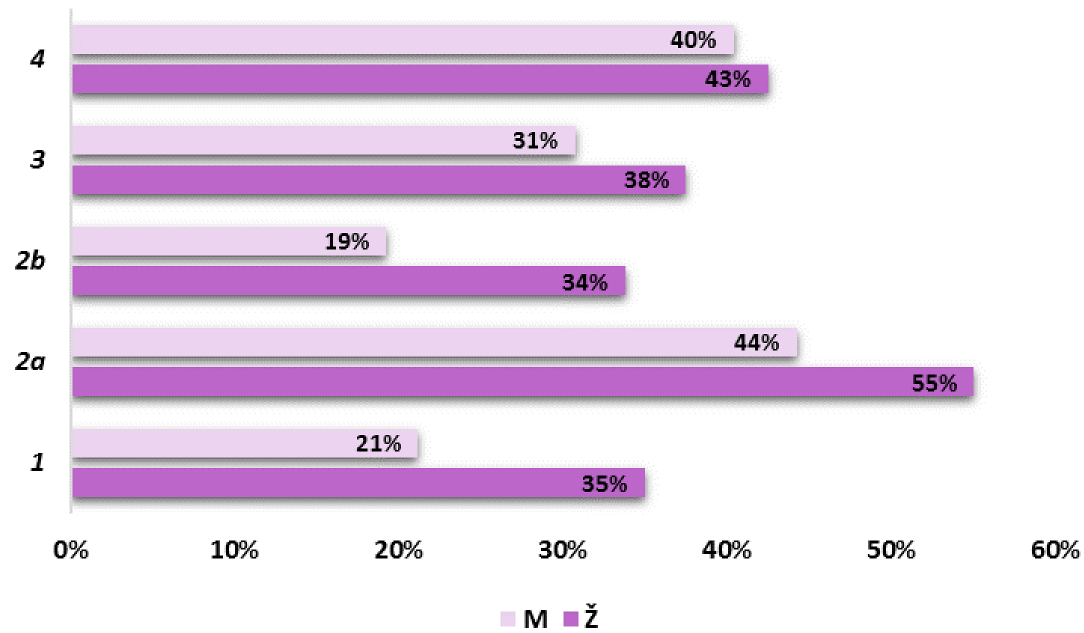
Ako posmatramo određeni zadatak, definisaćemo da je odgovor tačan ako je učenik tačno odgovorio i tačno obrazložio.

Na Grafiku 11 vidimo da su učenici najbolje uradili četvrti zadatak, 74% a najslabije prvi, 43%.



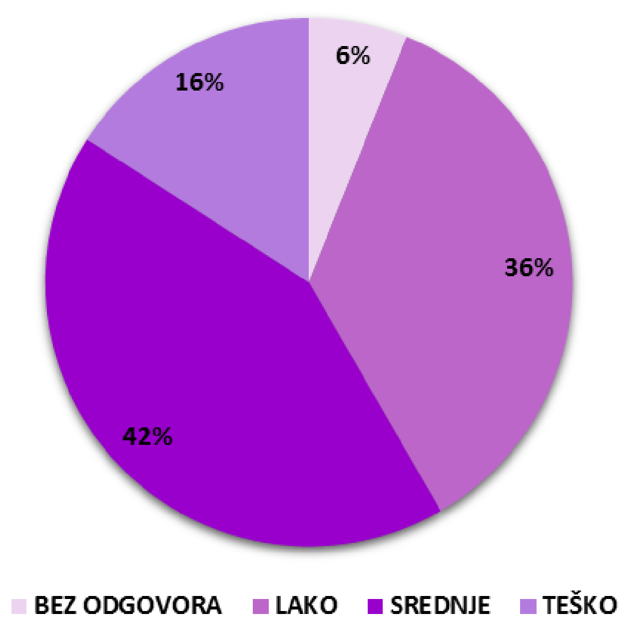
Grafik 11: Procentualan broj tačnih odgovora po zadatku

Na Grafiku 12 predstavljen je procentualan broj tačnih odgovora prema polu učenika. Sa grafika vidimo da je kod prvog i drugog zadatka pod b) procenat tačnih odgovora znatno veći kod devojčica. Razlog su tačna i potpunija obrazloženja na odgovore kod devojčica. Takođe vidimo da su na svako pitanje devojčice dale više tačnih odgovora.



Grafik 92: Procentualan broj tačnih odgovora prema polu učenika

Na Grafiku 13 možemo videti da je 42% učenika zaokružilo da su im zadaci srednje težine, dok je 16% da su teški.

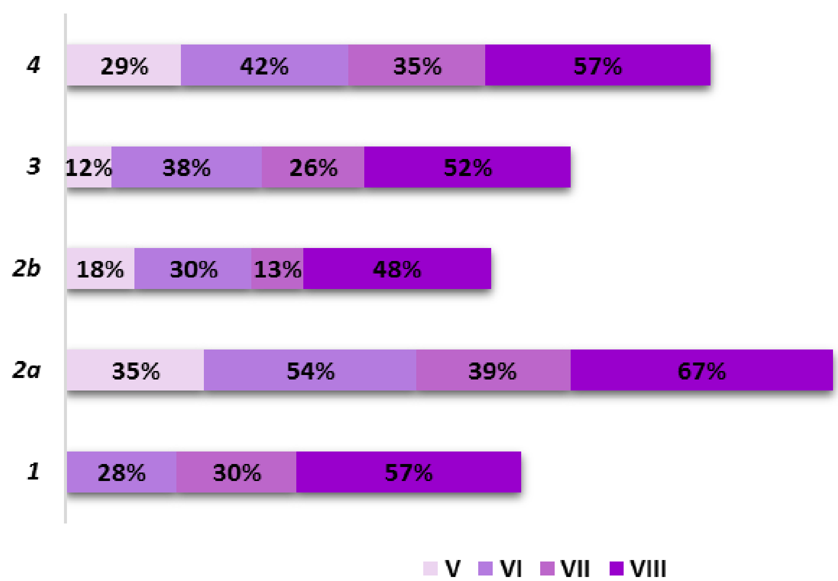


Grafik 13: Procentualan prikaz ocenjene težine zadatka

Od ukupnog uzorka, 15 učenika (11%) je dalo tačan odgovor na sva četiri pitanja. Tabela 14 nam daje podatke o polu i uzrastu tih učenika i oceni težine zadataka. Svi učenici su imali peticu na kraju prvog polugodišta.

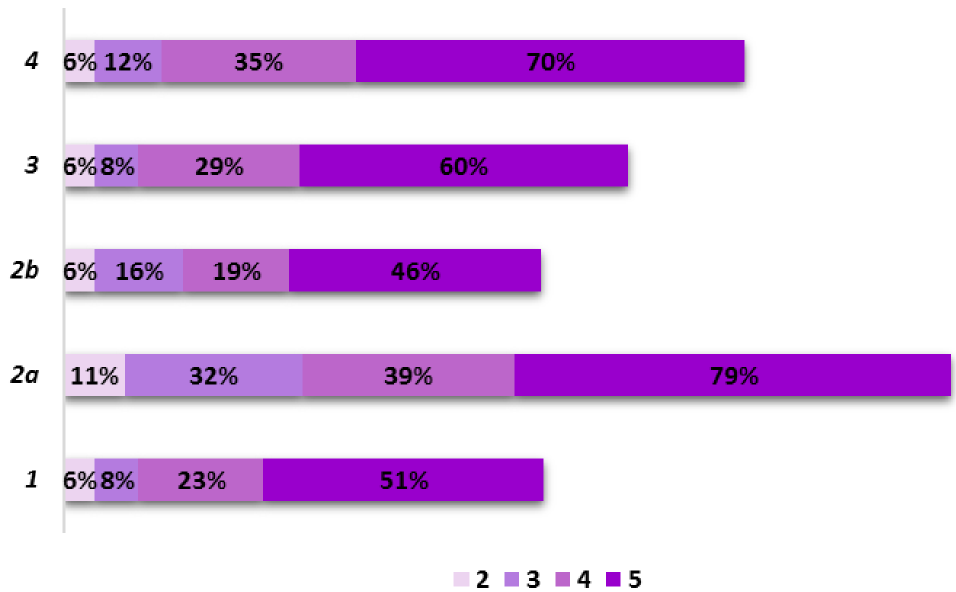
		Težina zadatka	
Razred	**Pol**	**Lako**	**Teško**
VI	M	1	
	Ž	7	
VII	M		
	Ž	2	
VIII	M	1	1
	Ž	3	

Tabela 14: Podaci o učenicima koji su odgovorili tačno na sva četiri pitanja



Grafik 14: Procentualan broj tačnih odgovora prema uzrastu

Na Grafiku 14 možemo videti da na prvi zadatak nijedan učenik iz petog razreda nije tačno odgovorio. U petom razredu učenici još nemaju dovoljno predznanja o geometrijskim objektima. Oni jesu upoznati sa njima ali detaljnije počinju da rade geometriju tek od šestog razreda. Petoro učenika jeste dalo tačan odgovor ali nažalost ne i obrazloženje, a jedan od razloga može biti navedeno. Više od polovine osmog razreda je tačno odgovorilo na svaki zadatak dok su najslabije uradili zadatke učenici petog razreda.



Grafik 15: *Procentualan broj tačnih odgovora prema oceni iz matematike na plugodištu*

Na Grafiku 15 možemo videti da je procenat tačnih odgovora u skladu sa ocenama učenika. Najslabije su uradili učenici sa ocenom dva, dok najbolje učenici sa ocenom pet.

4. PREDLOG NASTAVNIH AKTIVNOSTI

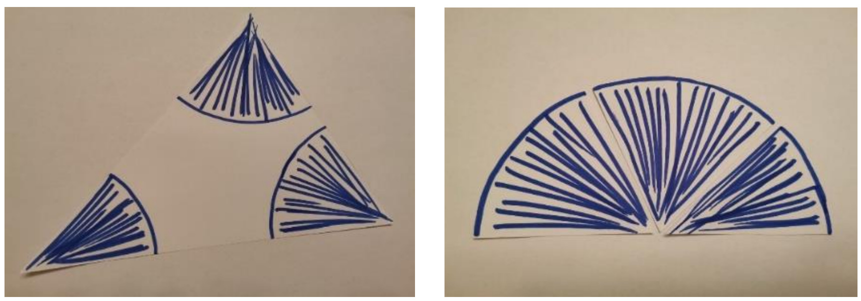
Tradicionalna nastava u kojoj dominira frontalni oblik rada gde je komunikacija između nastavnika i učenika minimalna, pored toga što tempo takvog časa ne odgovara svakom učeniku, često ume da bude i nezanimljiva. Savremena nastava treba da bude kreativna i podsticajna. Primena savremenih nastavnih sredstava omogućava znatno aktivnije uključivanje učenika u nastavni proces. Uloga nastavnika i učitelja u korišćenju i razvijanju induktivnog zaključivanja kod učenika je od velikog značaja. Induktivno zaključivanje treba razvijati od prvog razreda, potrebno je povezivati nastavne sadržaje, pozivati se na već usvojeno kod novih lekcija, kao i koristiti mogućnosti koju nam nudi savremana tehnologija. Nastavnik ima ulogu da podeli problem sa učenicima i podstakne ih da prihvate izazov i potraže rešenje. Pisane pripreme koje nude razni izdavači su samo primeri kako čas može da izgleda, i da se realizuje. Na nastavnicima je da ga prilagode učenicima i njihovim sposobnostima. Savremena nastava ima za cilj stvaranje upotrebljivog znanja, odnosno znanja koje će učenici znati da primene kada je potrebno. U ovom delu rada biće predstavljena ideja za sprovođenje induktivnog zaključivanja.

4.1. Nastavna jedinica zbir uglova trougla

U okviru aktivnosti „zbir uglova trougla“ cilj je da putem aktivnog učestvovanja učenika u samoj nastavi izvedemo zaključak o zbiru uglova trougla. Akcenat je na vizuelizaciji problema, jer će to pomoći učenicima da lakše i bolje usvoje znanje koje će im dugotrajno ostati i lako će ga primeniti na druge nastavne jedinice.

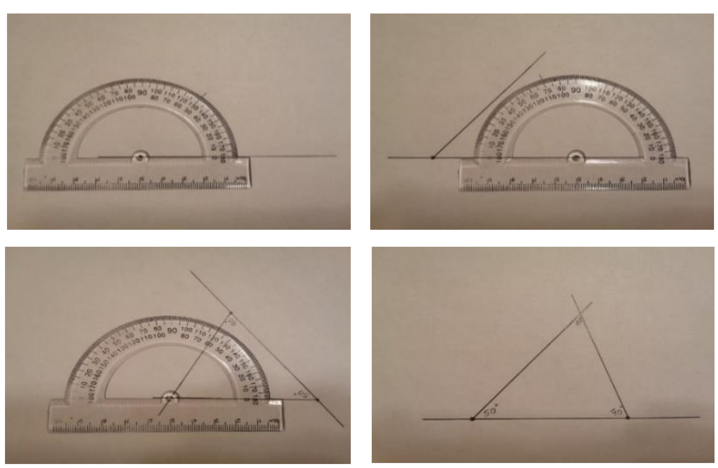
Za rad na času učenicima je potreban papir, makaze, šestar, uglomer, lenjir, bojice. Učenici se na početku časa dele u grupe na osnovu postignuća iz matematike. Jednu grupu čine učenici sa jedinicama i dvojkama, dok drugu grupu učenici sa trojkama, četvorkama i peticama. Učenici će unutar grupa biti podeljeni u parove, i radiće zadatke u paru.

U prvoj grupi grupišemo parove bez obzira na postignuće. Zatim im podelimo papir sa dva različita trougla, pravouglim i oštrouglim. Primer oštrouglog trougla je prikazan na Slici8- levo. Zamolimo jednog člana para da oboji unutrašnje uglove trouglova i iseče trouglove. Drugi član para ima zadatak da iseče obeležene uglove trougla i papiriće sa isečenim uglovima poređa jedan pored drugog, tako da imaju zajednički vrh. Učenicima treba skrenuti pažnju da prvo iseku i poređaju uglove jednog trougla, pa tek nakon toga drugog da ne bi pomešali uglove. (Slika 8 – desno). Učenici su se do sada upoznali sa vrstama uglova, i koliko iznosi opružen ugao, pa samim tim zaključuju da na opisan način dobijaju opružen ugao, koji iznosi 180°, i da je on dobijen zbirom tri ugla iz trougla.



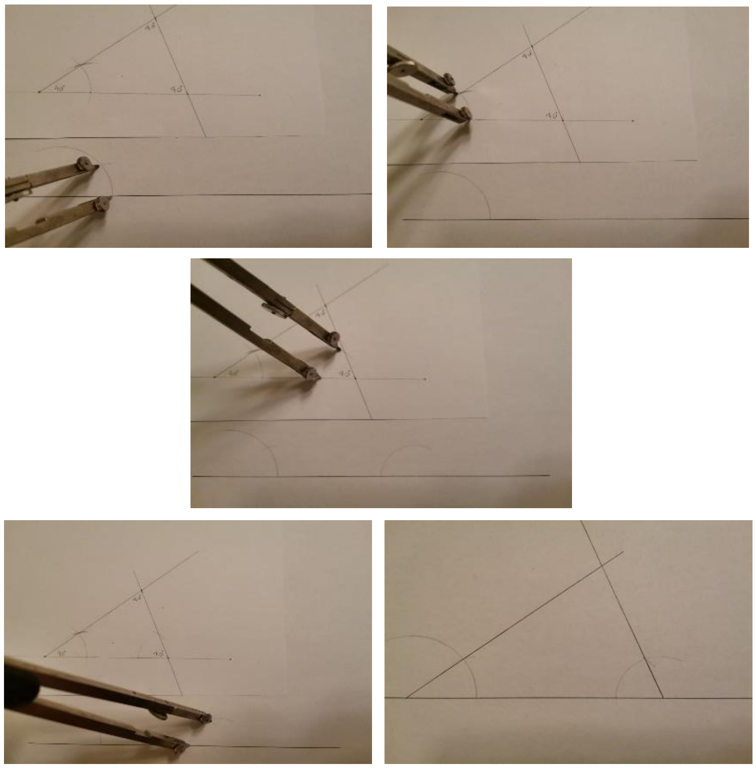
Slika 8

Drugu grupu učenika podelićemo u parove, gde je jedan od učenika sa ocenom tri a drugi sa četiri ili pet. Učenicima sa ocenom tri zadaćemo da uglomerom nacrtaju trougao koji ima uglove od 50°, 70°, 60°, obeležene redom sa α, β, γ, (oštrougli trougao kao i kod prve grupe). Na Slici 9 je prikazan postupak merenja uglova. Učenici će nakon crtanja obeležiti uglove na nacrtanom trouglu i sabraće ih, da bi uvideli da je zbir 180°.



Slika 9

Učenici sa četvorkom i peticom imaju zadatak da uglove iz nacrtanog trougla od strane svog para prenesu šestarom, i na taj način konstruišu trougao. Postupak je prikazan na Slici 10. Nakon što su konstruisali trougao zamolićemo ih da saberu uglove, da bi uvideli da je zbir 180°.

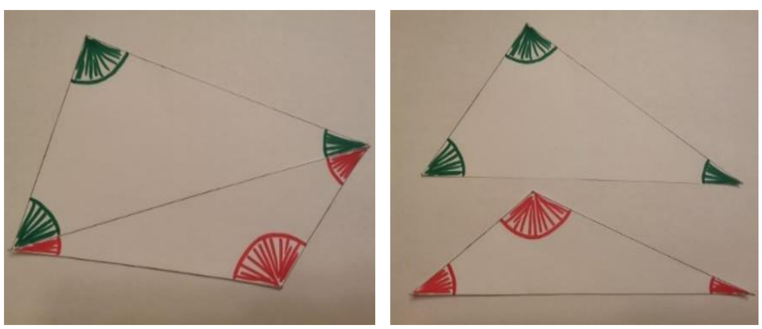


Slika 10

Nakon odrađenih primera učenici će zajedno sa nastavnikom izneti hipotezu do koje su došli induktivnim zaključivanjem, da je zbir uglova u trouglu jednak 180° (ravan ugao). Učenici će ponoviti aktivnost, ali će sada odabrati trougao po želji, kako bi zaključili da hipoteza važi za sve trouglove a ne samo za one koji su im bili zadati. U prvoj grupi parovi će nacrtati lenjirom proizvoljan trougao, obeležiti uglove, iseći ih i nadovezati jedno na drugo. U drugoj grupi učenici sa trojkom uzeće proizvoljne uglove pazeći da im je zbir 180° i uglomerom nacrtati trougao, dok će učenici sa četvorkom i peticom nakon toga konstruisati isti. Nastavnik treba da učenicima skrene pažnju da crtaju i uzimaju što raznovrsnije trouglove. Na kraju časa svi učenici će potvrditi hipotezu i zapisati teoremu: „Zbir uglova u trouglu jednak je 180°.“

4.2. Nastavna jedinica zbir uglova četvorougla

U šestom razredu u okviru aktivnosti „Zbir uglova četvorougla“ cilj je da učenici aktivnim učestvovanjem u nastavi izvedu zaključak o zbiru uglova četvorougla koristeći usvojeno znaje kod lekcije o trouglovima. Za rad je učenicima potreban papir, lenjir, makaze i bojice. Učenike ćemo sada podeliti u parove tako da jedan učenik bude sa jedinicom, dvojkom ili trojkom a drugi sa četvorkom i peticom. Bitno je da u svakom paru ima neko sa slabijom i neko sa boljom ocenom, da bi se slabiji učenici na taj način više uključili i oslobodili, kao i zbog pojmova i znanja potrebnih od ranije. Učenici tada uče i razliku između konveksnog i nekonveksnog četvorougla, gde su svi unutrašnji uglovi konveksnog manji od 180°, a najviše jedan ugao nekonveksnog veći od 180°. Svaki par će dobiti papir sa jednim konveksnim i jednim nekonveksnim četvorouglom. Primer konveksnog četvorougla dat je na Slici 11 - levo. Uz pomoć nastavnika, koji ih usmerava, učenici će podeliti četvorougao dijagonalom na dva trougla. U trouglovima će uglove obojiti različitim bojama, i iseći trouglove (Slika 11 – desno). Na ovaj način primećuju da su uglovi početnog četvorougla ujedno i uglovi trougla. Obeležiće uglove jednog trougla sa $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ i drugog sa $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Kako učenici znaju da je zbir uglova jedanak 180° u jednom trouglu, tačnije $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 180°$ i $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 180°$, izvode zaključak da je zbir uglova četvorougla jednak zbiru uglova dva trougla, što je 360°.

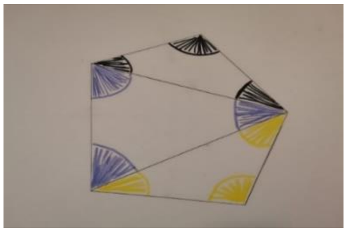
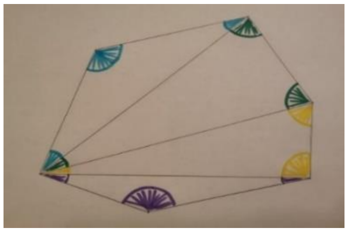


Slika 11

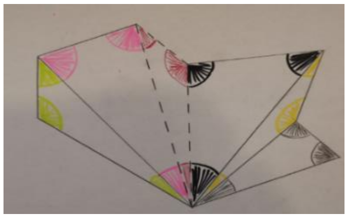
Učenici će uz pomoć nastavnika izvesti hipotezu da je zbir uglova četvorougla jedanak 360°. Nakon toga će svaki par nacrtati četvorougao po svom izboru, jedan konveksan i jedan nekonveksan, da bi zaključili da hipoteza važi za svaki četvorougao, i ponoviti aktivnost. Na kraju časa svi učenici će potrvditi hipotezu i izvesti tvrđenje „Zbir uglova u četvorouglu je 360°“.

4.3. Nastavna jedinica zbir uglova mnogougla

U sedmom razredu u okviru aktivnosti „Zbir uglova mnogougla“ cilj je da učenici aktivnim učestvovanjem u nastavi izvedu zaključak o zbiru uglova mnogougla koristeći usvojeno znaje o trouglovima i četvorouglovima. Učenike ćemo podeliti u parove kao kod prethodne nastavne jedinice. Za rad je učenicima potreban papir, lenjir, makaze i bojice. Svaki par dobija po papir sa petouglom i šestouglom. Ideju koju smo sproveli na četvorouglu, sprovešćemo i na petouglu i šestouglu. Učenicima ćemo skrenuti pažnju da dijagonale mnogougla crtaju iz istog temena. Nakon toga će oni povući dijagonale iz istog temena kod oba mnogougla i na taj način podeliće ih na trouglove. U svakom trouglu će uglove obojiti različitim bojama (Slika 12). Na taj način će dobiti tri i četiri trougla, čiji zbir uglova znaju, i izračunaće da je zbir uglova $3 \cdot 180° = 540°$ kod petougla i $4 \cdot 180° = 720°$ kod šestougla. Učenicima podelimo papir sa identičnim petouglom, samo ih zamolimo da sada odaberu drugo teme iz kog će crtati dijagonale. Na ovim jednostavnijim primerima učenici mogu da vide da iz kojeg god temena da povuku dijagonale petougao/šestougao će uvek biti podeljen na tri/četiri trougla. Nakon toga podelimo papir sa proizvoljnim n – touglom, konveksnim i nekonveksnim (Slika 13). Zadatak učenika je da povuku dijagonale iz jednog temena i iskoriste zaključke sa prethodna dva primera. Nastavnik će učenike usmeriti da posmatraju broj trouglova na koji se mnogougao razlaže povlačenjem dijagonala. Na ovaj način na kraju časa dolazi se do zaključka da dijagonala deli n – tougao na n – 2 trougla (n – broj temena), i izvodi tvrđenje „Zbir uglova u n –touglu je $(n-2) \cdot 180°$“.

Slika 12




Slika 13

Posmatrajući Tabela 1 (strana 14) u gore navedenim aktivnostima učenici koriste proces razmišljanja gde pronalaze zajedničku osobinu geometrijskih objekata. Posmatrajući različite trouglove vidimo da je zajednička osobina za unutrašnje uglove, da je njihov zbir 180°. Učenici prepoznaju karakteristike trougla, u ovom slučaju zbir uglova, koju proveravaju kod drugih zadatih trouglova, da bi na kraju izveli zaključak koji će važiti za svaki trougao. Kod četvorouglova koristimo znanje od pre da dijagonalom četvorougao delimo na dva trougla , kao i da je zbir uglova u trouglu 180°. Na taj način određujemo zbir uglova i kod mnogouglova. Usvajanjem gradiva kao u primeru Pimeru 1 učenicima znanje ostaje dugotrajno i pomaže razvijanju induktivnog zaključivanja. Klauer je smatrao da proces zaključivanja može da se uvežba i da kognitivnim treningom učenicima pomažemo da prepoznaju i reše slične situacije. Osobe koje prođu neku obuku imaju veće šanse da reše slične situacije. Kod nastavne jedinice zbir uglova u mnogouglu vidimo da učenici primenjuju sve ono što su stekli pre. Isti postupak primenjuju na petougao, šestougao, sedmougao itd. Naime ako zbir uglova trouglova i podelu četvorougla na dva trougla posmatramo kao obuku, tada primenu te obuke imamo kod mnogouglova.

ZAKLJUČAK

Induktivno zaključivanje jedno je od osnovnih kognitivnih sposobnosti. Koristi se i razvija ceo život, podjednako u obrazovanju i svakodnevnom životu. Induktivno zaključivanje ima ogroman značaj i primenu u nauci, recimo za istraživanje zakonitosti u nekoj novoj oblasti. Kako su psiholozi tek u prošlom veku došli do saznanja da je induktivno zaključivanje podložno razvoju i promenama još uvek je nedovoljno istraženo.

Istorijski gledano od Aristotela pa do velikog broja naučnika današnjice stav o induktivnom zaključivanju se dosta menjao, od toga da je jedna od glavnih metoda za spoznaju sveta oko nas, do potpunog odbacivanje indukcije kao nesigurne i nepotrebne. Poslednjih tridesetak godina sve je više istraživanja o uspešnosti obuka gde se razvija induktivno zaključivanje. Takođe, radi se na tome da se prave planovi i programi koji će u većoj meri uključivati induktivno zaključivanje za usvajanje nastavnih sadržaja. Rezultati publikovanih istraživanja pokazuju da obuka daje bolje rezultate na testovima inteligencije kao i da pomaže kod učenja i shvatanja novih nastavnih sadržaja.

Rezultati istraživanja koje je sprovedeno na uzorku od 132 učenika pokazuju da je nivo induktivnog zaključivanja na zadovoljavajućem nivou. Najbolji rezultati ostvareni su u prepoznavanju razlike u osobinama a najlošiji u prepoznavanju zajedničkih osobina geometrijskih oblika (četvrti i prvi zadatak). Rezultati ovog istraživanja takođe pokazuju da je nivo induktivnog zaključivanja srazmeran uzrastu učenika i oceni iz matematike na kraju polugodišta.

Sa druge strane nivo induktivnog zaključivanja kod učenika može se poboljšati uključivanjem učenika u tok časa, gde će kroz raznovrsne primere sami donositi zaključke o nastavnoj temi i koristiti znanja usvojena u prethodnim lekcijama. Takođe da bi se razvijalo induktivno zaključivanje čas treba prilagoditi sposobnostima deteta. U poslednjem delu rada data je ideja realizacije takve nastavne aktivnosti.

LITERATURA

[1] Lisa A. Haverty, Kenneth R Koedinger, David Klahr, Martha W. Alibali, *Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not – so – Trivial Pursuit*, Carnegie Mellon University, 2000, Vol 24 (2), pp. 249 – 298, ISSN 0364 – 0213

[2] Landy Elena Sosa Moguel, Eddie Aparicio Landa, Guadalupe Cabañas – Sánchez,*Characterization of Inductive Reasoning in Middle School Mathematics Teachers in a Generalization Task*, *International electronic journal of mathematics education*, 2019, Vol. 14, No. 3, 563-581, e-ISSN: 1306-3030. (https://doi.org/10.29333/iejme/5769)

[3] Patrick Perret, *Children's Inductive Reasoning:Developmental and Educational Perspectives*, Journal of Cognitive Education and Psychology, 2015, Volume 14, Number 3 (http://dx.doi.org/10.1891/1945-8959.14.3.389)

[4] Sophie Barkl, Amy Porter, Paul Ginns, *Cognitive training for children: Effects on inductive reasoning, deductive reasoning, and mathematics achievement in an australian school setting*, Psychology in the Schools, 2012, Vol. 49(9), DOI: 10.1002/pits.21638 (https://onlinelibrary.wiley.com/journal/15206807)

[5] Karl Josef Klauer, Gary D. Phye, *Inductive Reasoning: A Training Approach*, Review of Educational Research, March 2008, Vol. 78, No. 1, pp. 85–123, DOI: 10.3102/0034654307313402

[6] Eleni Papageorgiou, *Towards a teaching approach for improving mathematics inductive reasoning problem solving*, Cyprus Pedagogical Institute, PME 33 – 2009

[7] Indukcija. *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje.* Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021. (Pristupljeno 5. 10. 2022.) (http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=27347)

[8] I. M. Bocheński, *Ancient Formal Logic*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1951

[9] http://www.rcc.org.rs/Rasprostranjenost_indukcije.pdf, (Pristupljeno 20. 8. 2022)

[10] https://www.sparknotes.com/philosophy/mill/themes/, (Pristupljeno 20. 8. 2022)

[11] Aleksandra Zorić (priređivač), *Teorije indukcije u dvadesetom veku (hrestomatija tekstova)*, Institut za filozofiju Filozofskog fakulteta u Beogradu, Beograd, 2005, 3-21

[12] http://www.thtrebinje.com/pdf/Metodologija_Literatura3.pdf, 28, 36-40 (Pristupljeno 21. 8. 2022)

[13] William Dunham, *Journey through genius: The Great Theorems of Mathematics*, ISBN 0 – 471 – 50030 – 5, 1990, 236 – 237

[14] Constantinous Christou, Eleni Papageorgiou,, *A framework of mathematics inductive reasoning*, Learning and Instruction 17, 2017, 55-66 (https://www.journals.elsevier.com/learning-and-instruction)

[15] Cigdem Arslan, Sirin Ilkörücü Göcmencelebi, Menekse Seden Tapan, *Learning and reasoning styles of pre service teachers': inductive or deductive reasoning on science and mathematics related to their learning style*, Istanbul University Education Faculty Elemantary Education Department, Istanbul, Turkey, 2009, DOI:10.1016, (https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2009.01.432)

PRILOG

Pred vama je test od četiri zadatka. Test je anoniman i ne utiče na vašu ocenu iz matematike. Kod svakog zadatka imate i dodatno pitanje čiji je cilj provera vašeg načina razmišljanja pa ću vas zamoliti da test rešavate samostalno i odgovorite na svako pitanje.

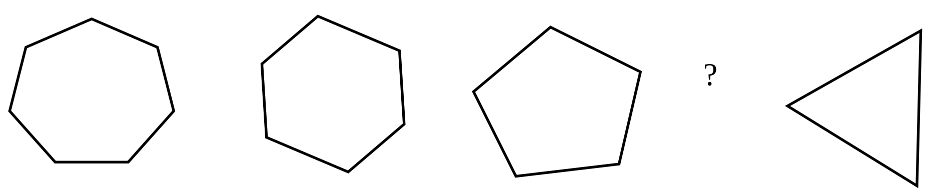
Za rešavanje imate 20 minuta. Srećno! ☺

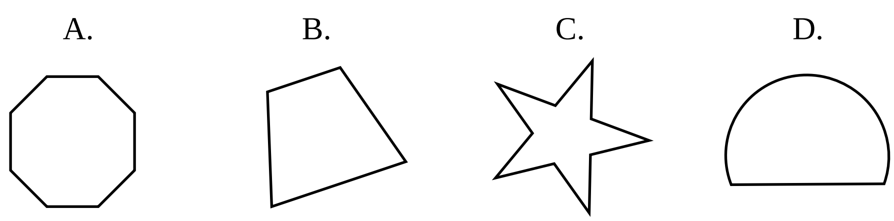
Pol: Ž / M (zaokruži)

Ocena: 1 2 3 4 5 (zaokruži)

TEST

1. Dat vam je niz sa geometrijskim oblicima, gde jedan oblik nedostaje. Vaš zadatak je da od ponuđenih odaberete onaj koji odgovara, i zaokružite slovo iznad njega.





Obrazložite, zbog čega ste odabrali baš taj geometrijski oblik?

2. U sledeća dva primera prikazan je po jedan niz koji se sastoji od sedam brojeva. Odredi sledeći broj u nizu, i napiši ga na liniju!

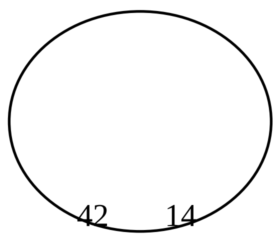
   c) 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 ____
   d) 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23 ______

   Zašto si naveo taj broj pod a)? A zašto pod b)?

3. Unutar kruga imate četiri broja koji imaju zajedničku osobinu. Koji od ponuđenih brojeva pripada grupi brojeva unutar kruga? Zaokružite slovo ispred tačnog broja.

   A. 12

   B. 8



21 49

42 14

   C. 45

   D. 35

   Koja je to zajednička osobina brojeva unutar kruga? Zapišite odgovor.

4. Od ponuđenih brojeva, imate jedan koji se tu ne uklapa. Prepoznajte broj i zaokružite ga.

   9 12 21 33 25 6

   Zbog čega se baš taj broj ne uklapa? Zapišite odgovor!

Ocenite težinu zadataka:

A. Lako B. Srednje C. Teško

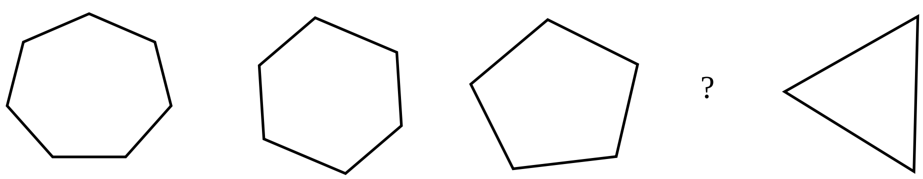
Négy feladatból álló teszt vár rád. A teszt anonim, és nem befolyásolja a matematikai osztályzatodat. Minden feladatnál van egy további kérdésed, melynek célja a gondolkodásmódod ellenőrzése, ezért arra kérlek, hogy oldd meg önállóan a tesztet és válaszolj minden kérdésre. 20 perced van a megoldásra. Sok szerencsét! ☺

Nem: N / F (karikázd be)

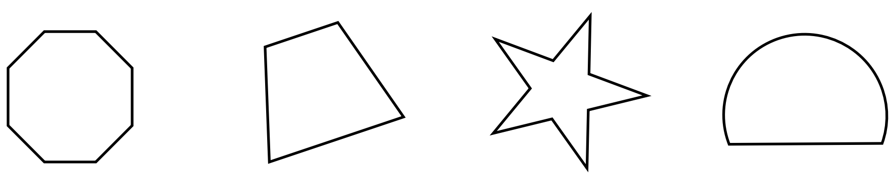
Osztályzat : 1 2 3 4 5 (karikázd be)

TESZT

1. Adott egy geometriai alakzatú sorozat, ahol egy alakzat hiányzik. A feladatod hogy a felajánlottak közül válaszd ki a megfelelőt, és karikazd be a felette lévő betűt.



A. B. C. D.



Magyarázd el, miért az adott geometriai formát választottad?

2. A következő két példában egy karakterlánc látható, amely hét számból áll. Határozd meg a sorozat következő számát, és írd a megadott vonalra!

a) 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 ____

b) 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23 ______

Miért választottad ezt a számot az a) alatt? És miért a b) alatt?

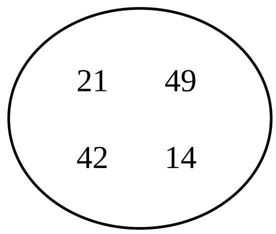
3. A körön belül négy szám van, amelyeknek közös jellemzője van. A felkinált számok közül melyik tartozik a körön belüli számok csoportjába? Karikázd be a megfelelő szám előtti betűt!

A. 12

B. 8

C. 45

D. 35



Mi a körön belüli számok közös tulajdonsága? Írd le a választ!

4. A felajánlott számok közül egy nem illik a többi közé. Határozd meg ezt a számot, és karikázd be.

9 12 21 33 25 6

Miért nem illik ez a szám a többi közé? Írd le a választ!

Értékeld a feladatok nehézségét:

A. Könnyü B. Közepes C. Nehéz

BIOGRAFIJA

Elvira Njergeš je rođena 1. novembra 1993. godine u Zrenjaninu. Osnovnu školu „Miloš Crnjanski" u Srpskom Itebeju je završila kao odličan đak i nosilac Vukove diplome 2008. godine. Iste godine je upisala Ekonomsko – trgovinsku školu „Jovan Trajković" u Zrenjaninu, smer turistički tehničar, koju je završila 2012. godine, takođe kao nosilac Vukove diplome. Nakon završene srednje škole, upisala je osnovne akademske studije Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike, koje je završila 2017. godine. Iste godine je upisala master akademske studije, smer Profesor matematike. Sve ispite predviđene planom i programom položila je u junu 2023. godine i time stekla uslov za odbranu master rada.

Novi Sad, 2023. Elvira Njergeš

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Elvira Njergeš
AU
Mentor: Prof. dr Zorana Lužanin
MN
Naslov rada: Induktivno zaključivanje u nastavi matematike u osnovnoj školi
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2023.
GO
Izdavac: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovica 4, Novi Sad
MA
Fizički opis rada: 4/69/15/14/13/15/1
(broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Metodika matematike
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: induktivno zaključivanje, kognitivni trening za decu, nastava matematike, osnovna škola
PO
UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Tema ovog master rada je induktivno zaključivanje u nastavi matematike u osnovnoj školi. U prvom delu rada hronološki je prikazan razvoj i shvatanje induktivnog zaključivanja kroz istoriju. Prikazana su i novija publikovana istraživanja o kognitivnom treningu kao što je CTC program (Cognitive Training for Children) i kako trening utiče na učenikovo usvajanje nastavnih sadržaja, rezultate na testovima inteligencije i testovima induktivnog zaključivanja. U drugom delu posmatraću gde se induktivno zaključivanje koristi u nastavnim sadržajima. U trećem delu dat je prikaz istraživanja sprovedena među učenicima od petog do osmog razreda. U četvrtom delu dat je predlog nastavne akrivnost, „Zbir uglova u trouglu" i kako usvojeno znanje može da se primeni i na četvorougao i mnogougao.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veca: 28.02.2023.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Andreja Tepavčević, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor: dr Zorana Lužanin, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Goran Radojev, vanredni profesor,,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: Master’s thesis
CC
Author: Elvira Njergeš
AU
Mentor: Zorana Lužanin, Ph.D.
MN
Title: Inductive reasoning in mathematics teaching in elementary school
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2023
PY
Publisher: Author’s reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 4/69/15/14/13/15/1
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Teaching of mathematics
SD
Subject/Key words: inductive reasoning, cognitive training for children, teaching mathematics, elementary school
SKW
UC:
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: The topic of this master's thesis is inductive reasoning in the teaching of mathematics in elementary school. The first part presents the understanding of inductive reasoning throughout history. Recent published research on cognitive training such as the CTC program (Cognitive Training for Children) and how the training affects students' acquisition of teaching content, results on intelligence tests and inductive reasoning tests are also presented. In the second part, I will observe where inductive reasoning is used in teaching content. In the third part, there is an overview of the research conducted among students from the fifth to the eighth grade of the elementary school. In the fourth part, there is a proposal for a teaching activity, "Sum of angles in a triangle" and how the acquired knowledge can be applied to both quadrilaterals and polygons.
AB
Accepted by the Scientific Board on: 28.02.2023.
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB

President: Andreja Tepavčević, Ph.D., Full Professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor: Zorana Lužanin, Ph.D., Full Professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Goran Radojev, Ph.D., Associate Professor,
Faculty of Sciences, University of Novi Sad