UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Mirjana Arlović

Kratkoročno prognoziranje inflacije primenom sezonskih ARIMA procesa

Master rad

Mentor:
Prof. dr Zagorka Lozanov-Crvenković

Novi Sad, 2023

Sadržaj

1 Uvod **5**

2 Inflacija **6**
2.1 Osnovni makroekonomski pokazatelji 7
2.2 Indeks cena 9
2.3 Indeks potrošačkih cena u Srbiji 10
2.4 Model za srednjoročne projekcije inflacije Narodne banke Srbije 13

3 Modeliranje vremenskih serija **17**
3.1 Modeli stacionarnih vremenskih serija 17
3.2 Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija 19
3.3 Linearni procesi 19
3.4 Autoregresioni procesi (AR) 21
3.4.1 Autoregresioni procesi prvog reda AR(1) 21
3.4.2 Autoregresioni procesi drugog reda AR(2) 23
3.4.3 Autoregresioni procesi reda p - AR(p) 25
3.4.4 Parcijalna autokorelaciona funkcija 26
3.5 Procesi pokretnih proseka (MA) 27
3.5.1 Procesi pokretnih proseka prvog reda - MA(1) 27
3.5.2 Procesi pokretnih proseka drugog reda - MA(2) 29
3.5.3 Procesi pokretnih proseka reda q - MA(q) 30
3.5.4 Veza između AR(p) i MA(q) procesa 31
3.6 Autoregresioni proces pokretnih proseka (ARMA) 32
3.7 Modeli nestacionarnih vremenskih serija 33
3.8 Autoregresioni integrisani proces pokretnih proseka (ARIMA) 35
3.9 Modeli sezonskih vremenskih serija 36
3.10 Sezonski autoregresioni integrisani proces pokretnih proseka (SARIMA) 36
3.10.1 ″Vazduhoplovni model″ 37
3.11 Klasičan *Box-Jenkinsov* pristup 38
3.12 Informacioni kriterijumi 40
3.13 Testovi običnih jediničnih korena 41
3.14 Testovi sezonskih jediničnih korena 42
3.15 Testovi serijske korelisanosti reziduala 44
3.16 Mere kvaliteta prognoza 44

4 Razvoj SARIMA modela indeksa potrošačkih cena **46**
4.1 Priprema podataka i identifikacija preliminarnih modela . . . 47
4.2 Određivanje finalnih modela indeksa i podindeksa potrošačkih cena 52
4.3 Evaluacija kvaliteta prognoza modela 68

Zaključak **71**

Dodatak A **74**

Dodatak B **75**

Literatura **85**

Biografija **86**

Izuzetnu zahvalnost dugujem mentoru prof. dr Zagorki Lozanov-Crvenković, za pomoć, savete i razumevanje koje mi je ukazala u toku pisanja master rada, kao i na znanju koje je nesebično delila sa svima nama u toku studiranja.

Takođe se zahvaljujem uvaženim članovima komisije, prof. dr Danijeli Rajter-Ćirić i prof. dr Ivani Štajner-Papuga na savetima i sugestijama.

Zahvaljujem se roditeljima i bratu na pruženoj podršci i savetima u toku celokupnog školovanja i života. Posebnu zahvalnost dugujem i kolegama Tatjani, Andriji i Mini na pruženoj podršci u toku pisanja master rada.

Mirjana Arlović,
Novi Sad, 2023

1 Uvod

Prognoziranje inflacije, mereno indeksom potrošačkih cena, u kratkom roku primenom sezonskih autoregresionih integrisanih procesa pokretnih proseka na podacima Republike Srbije je **predmet** ovog rada.

Inflacija predstavlja jedan od osnovnih makroekonomskih pokazatelja stabilnosti i uspešnosti ekonomije. Modeliranje inflacije primenom statističkih modela daje pouzdane i na teorijskim osnovama zasnovane prognoze koje doprinose nosiocima monetarne politike u ostvarivanju ciljane stope inflacije manipulisanjem različitim monetarnim instrumentima. Obzirom na doprinos prognoziranja inflacije, neophodno je redovno usavršavanje modela za kratkoročno prognoziranje inflacije. U ovom radu nastojaćemo da pokažemo da je modeliranje inflacije moguće univarijantnim sezonskim ARIMA procesima, kao i alternativani način prognoziranja inflacije agregiranjem prognoza podindeksa potrošačkih cena.

Cilj rada je da se proveri da li se primenom sezonskih autoregresionih procesa pokretnih proseka može uspešno prognozirati inflacija merena indeksom potrošačkih cena, kao i da li se pognoziranjem svakog pojedinačnog podindeksa potrošačkih cena, a zatim agregiranjem dobijenih prognoza može dobiti bolje predviđanje inflacije mereno indeksom potrošačkih cena u odnosu na prognoziranje ukupnog indeksa potrošačkih cena u kratkom roku?

U **prvom delu** rada opisana je metodologija obračuna indeksa potrošačkih cena u Republici Srbiji, dati su osnovni pojmovi o inflaciji i drugim makroekonomskim pokazateljima i opisan je model za srednjoročne projekcije inflacije Narodne banke Srbije. U ovom delu korišćena je sledeća literatura [1], Republičkog zavoda za statistiku (RZS), kao i literatura o modelu za srednjoročne projekcije inflacije dostupna na sajtu Narodne banke Srbije[1].

U **drugom delu** rada dati su osnovni pojmovi stohastičkih procesa, dat je teorijski prikaz autoregresionih procesa, procesa pokretnih proseka, autoregresionih procesa pokretnih proseka, autoregresionih integrisanih procesa pokretnih proseka i sezonskih autoregresionih integrisanih procesa pokretnih proseka, statističkih testova i mera kvaliteta prognoza. kao i opis klasičnog *"Box-Jenkinsovog"* pristupa. U ovom poglavlju korišćena je sledeća literatura [2], [3] i [4].

U **trećem delu** rada opisan je celokupan postupak u modeliranju inflacije, merene indeksom potrošačkih cena, sezonskim autoregresionim integrisanim procesima pokretnih proseka i prikazani su rezultati. Motivaciju za temu ovog rada pronalazimo u radovima [5] i [6].

[1] `https://nbs.rs/sr/ciljevi-i-funkcije/monetarna-politika/inflacija/projekcija/`

2 Inflacija

Inflacija predstavlja rast opšteg nivoa cena u određenom vremenskom periodu, a najčešće u periodu od godinu dana.

Kao mera inflacije koriste se različiti indeksi, a najčešće indeks potrošačkih cena koji predstavlja promenu nivoa cena na određeni datum u poređenju sa nivoom cena na neki prethodni datum u prošlosti, najčešće godinu dana ranije.

Infacija se može podeliti na tri tipa prema njenom uzroku:

a) *Demand-pull inflation* (tražnja prevazilazi proizvodne mogućnosti)

b) *Cost-push inflation* (izazvana pritiskom sa strane cene inputa)

b) *Built-in inflation* (inflatorna očekivanja u skaldu sa prethodnim iskustvom -> pritisak zaposlenih za većim platama -> veći troškovi proizvodnje)

Regulator (u Srbiji regulator je Narodna banka Srbije) koristi više instrumenata monetarne politike u postupku sprovođenja ciljanja inflacije, pri čemu je osnovni istrument **referentna kamatna stopa** tj. kamatna stopa na dvonedeljne repo zapise. Ovim instrumentom centralna banka pozajmljuje dinare od banaka na dve nedelje, nudeći im određenu (referentnu) kamatnu stopu. Obrnut mehanizam postoji kada centralna banka pozajmljuje bankama dinare uz uzimanje prvoklasnih hartija od vrednosti kao kolaterala. Druge mere kojima se koristi regulator odnosno centralna banka su intervencije na deviznom tržištu, stopa obavezne rezerve i prudencijalne mere.

Manipulisanjem referentnom kamatnom stopom centralna banka stimuliše odnosno destimuliše poslovne banke da deo svojih dinarskih sredstava plasiraju u repo zapise. Povećanjem referentne kamatne stope, ulaganje u repo zapise postaje atraktivnije, stoga poslovne banke deo svojih plasmana ulažu u repo zapise tako što konvertuju deo svojih deviznih sredstava u dinare i/ili smanjenjem ostalih dinarskih plasmana, kao što su krediti stanovništvu i privredi.

U literaturi [7] su poznati različiti kanali transmisije od referentne kamatne stope ka inflaciji, pri čemu su najvažniji: kanal deviznog kursa (nominalni i realni), kamatni kanal, kreditni kanal, kanal inflacionih očekivanja i kanal cena akcija.

Povećanje referentne kamatne stope utiče na atraktivnost dinara u odnosu na ostale valute tj. na devizni kurs, na način da se poslovnim bankama povećava prinos na dinare što dalje stimuliše poslovne banke da ulože deo deviznih sredstava u dinare što dovodi do apresijacije dinara. S druge stane transmisija uticaja referentne kamatne stope kroz kamatni kanal: povećanje referentne kamatne stope utiče na povećanje kamatnih stopa po kojima poslovne banke plasiraju kredite stanovništvu i privredi, obzirom da prinos na repo zapise raste. Dalje, povećanje kamatnih stopa na kreditne plasmane utiče na smanjenu potražnju privrede i stanovništva za kreditima, kao i na pad potrošnje. Smanjenje rerferentne kamatne stope dovodi od obrnute situacije. Dakle, značaj kamatnog kanala zavisi od transmisije od referentne kamatne stope ka kamatnim stopama poslovnih banaka, kao i od elastičnosti tražnje za kreditima na promene u kamatnoj stopi.

Pored mera monetarne politike regulisane od strane centralnih banaka, podjednaku važnost u uspešnosti postizanja ciljane inflacije ima i fiskalna politika, zato je sinhronizovanost i međuzavisnost monetarne i fisklane politike od izuzetne važnosti u postizanju stabilne privredne aktivnosti.

2.1 Osnovni makroekonomski pokazatelji

U ekonomiji neke privrede najznačajnije makroekonmske veličine su BDP (bruto domaći proizvod), kamatne stope i inflacija. U nastavku su neke od osnovnih karakteristika navedenih makroekonomskih pokazatelja.

Definicija 1. *Nominalni* ***bruto domaći proizvod*** *predstavlja ukupnu vrednost roba i usluga proizvedenih u privredi tokom određenog perioda.*

Protokom vremena nivoi cena rastu i posledično nominalni BDP postaje sve veći. Obzirom da želimo da izmerimo privrednu aktivnost neke zemlje ili grupe zemalja, interesuje nas koliko roba i usluga je proizvedeno u privredi tokom nekog razdoblja. Prava mera privredne aktivnosti zemlje tokom nekog razdoblja je realni BDP.

$$realni\ BDP = \frac{nominalni\ BPD}{nivo\ cena} \tag{2.1}$$

Drugim rečima, *realni BDP* je *nominalni BDP* korigovan za efekte inflacije. Osim BDP i druge značajne ekonomske veličine usklađuju se sa inflacijom, prosečna neto/bruto plata, cena nadnica, kamatne stope, itd.

S druge strane, kamatne stope predstavljaju osnovni instrument monetarne politike centralnih banaka, čijom se manipulacijom posredno utiče na stopu inflacije. S jedne strane, centralne banke pomeranjem referentne kamatne stope utiču na opseg gotovog novca u opticaju ili likvidnost, dok s druge strane utiču na cenu zaduživanja, odnosno štednju. Pomeranje referentne kamatne stope utiče i na takozvani koridor kamatnih stopa u čiji izračun ulazi referentna kamatna stopa:

a) kamatna stopa za finanasiranje kreditnog zaduživanja -> referentna kamatna stopa + margina

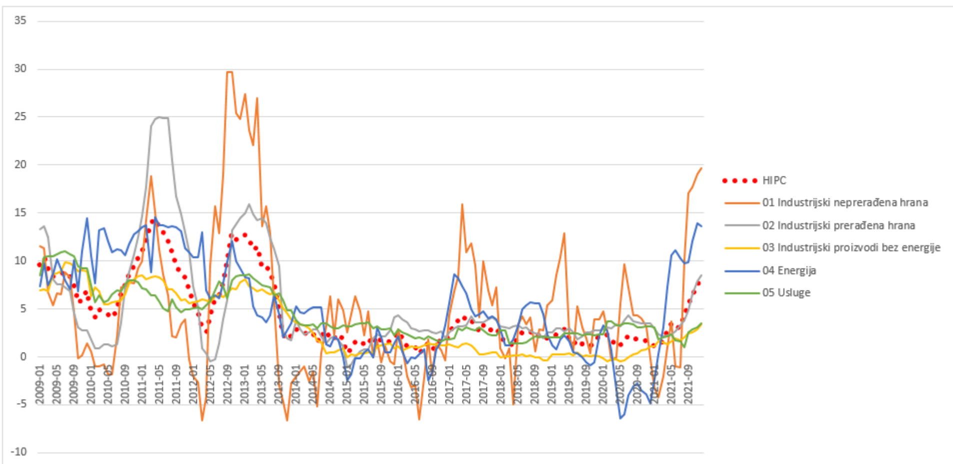
b) kamatna stopa na deviznu štednju -> referentna kamatna stopa - margina

Konkretno, povećanjem referentne kamatne stope smanjuje se količina novca u opticaju tj. likvidnost, dolazi do povećanja cena novca odnosno kredita, dok se kamatna stopa na deviznu štednju smanjuje. Ovakav scenario dovodi do pada potražnje za robama, zbog rasta cena kredita smanjuju se investicije i dolazi do usporavanja ekonomije što posledično utiče na stabilizaciju/usporavanje inflacije.

Opšti nivo cena u ekonomiji naziva se *inflacija*. *Stopa inflacije* predstavlja procentualnu promenu nivoa cena u odnosu na prethodni period.

$$\pi_t = \frac{P_t \ - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{2.2}$$

Nivoi cena su izuzetno značajni u oceni osnovnih pokazatelja privredne aktivnosti neke zemlje u određenom razdobljiu i zato su merenja i predviđanja ovog pokazatelja od izuztene važnosti za ekonomiju zemlje.



Grafik 1: Godišnji indeks, isti mesec prethodne godine=100(m/m-12), bazna godina 2015=100
Izvor: Originalni grafik autora na bazi *Eurostat* podataka

2.2 Indeks cena

Postoji nekoliko načina merenja inflacije. Način merenja inflacije zavisi od sastava korpe čija se promena vrednosti meri. Najznačajniji indeksi cena su indeks potrošačkih cena (*engl. Consumer Price Index*) i deflator BDP. Indeks cena predstavlja odnos između određene potrošačke korpe roba i usluga u periodu $\boldsymbol{t}$ i cene iste potrošačke korpe u nekom izabranom baznom periodu $\boldsymbol{0}$.

Iz definicije indeksa cena proističu dva pitanja:

a) Koji period odabrati kao bazni period?

b) Kakvu korpu roba i usluga odabrati?

Laspeyer, *Paasche* i *Fisher* su pokušali da daju odgovor na prethodna pitanja preko indeks cena koji su nazvani po njima, međutim sva tri indeksa cena imaju nedostatke.

Laspeyer-ov indeks cena poredi koliko korpa usluga i dobara proizvedena u baznom periodu iznosi u periodu $\boldsymbol{t}$:

$$L_t = \frac{p_{mt}m_0 + p_{nt}n_0}{p_{m0}m_0 + p_{n0}n_0} \tag{2.3}$$

Paasche-ov indeks cena poredi koliko korpa usluga i dobara proizvedena u periodu $\boldsymbol{t}$ iznosi u baznom periodu:

$$P_{at} = \frac{p_{mt}m_t + p_{nt}n_t}{p_{m0}m_t + p_{n0}n_t} \tag{2.4}$$

Laspeyer-ov indeks:

a) pretpostavlja da domaćinstva kupuju jednaku korpu roba i usluga u baznom periodu i periodu $\boldsymbol{t}$

b) promena cena dovodi do promene u odabiru roba i usluga koji čine potrošačku korpu, tj. proizvodi koji su poskupeli u proteklom periodu supstituišu se proizvodima koji su u istom periodu pojeftinili

c) posmatrajući istu korpu u baznom periodu i periodu $\boldsymbol{t}$, *Laspeyer-ov* indeks zanemaruje uticaj supstitucije

Paasche-ov indeks:

a) pretpostavlja da proizvedena količina roba koji čine potrošačku korpu je nepromenjena u oba perioda

b) količina roba čiji prinos zavisi od klimatskih uslova, usled promenljivih klimatksih uslova mogu dostići veću cenu u periodu $\boldsymbol{t}$ u odnosu na bazni period i bez novih prinosa

c) *Paasche-ov* indeks posmatra samo korpu roba i usluga u periodu $\boldsymbol{t}$, a obzirom da u navedenu korpu u trenutku $\boldsymbol{t}$ ne ulazi roba čiji je prinos nula u periodu $\boldsymbol{t}$, uticaj rasta cena ovih roba ne utiče na *Paasche-ov* indeks

Oba navedena indeksa cena imaju odreeđene nedostatke, *Laspeyer-ov* indeks cena precenjuje stopu inflacije, dok *Paasche-ov* indeks cena podcenjuje inflaciju.

Fisher-ov indeks predstavlja geometrijsku sredinu *Laspeyer-ovog* i *Paasche-ovog* indeksa cena i kao takav je najbolji indeks cena.

Indeks cena, BDP deflator, predstavlja odnos nominalnog i realnog BDP i računa se na osnovu formule *Paasche-ovog* indeksa cena.

Indeks potrošačkih cena je indeks cena koji se računa na osnovu formule *Laspeyer-ovog* indeksa cena i zasniva se na korpi roba i usluga prosečnog domaćinstva.

2.3 Indeks potrošačkih cena u Srbiji

Indeks cena u Srbiji se od 2009. godine računa kao indeks potrošačkih cena po formuli *Laspeyer-ovog* indeksa cena. Indeksi potrošačkih cena su osnovna mera inflacije u Republici Srbiji. Takođe se koriste u oblastima:

a) plata, socijalna davanja i indeksacije ugovora

b) za ekonomska predviđanja i analize

c) za merenje specifičnih trendova cena

d) za deflacioniranje drugih serija

e) *za ciljanje inflacije od strane Narodne banke Srbije*[2].

"Indeks potrošačkih cena (IPC po COICOP metodologiji) definiše se kao mera prosečne promene cena fiksne korpe robe i usluga koje domaćinstva kupuju u cilju zadovoljenja svojih potreba. Usluge čine popravke, čišćenje i šivenje odeće i obuće, najam stana (renta), održavanje i popravke stana, komunalne

[2]Republički zavod za statistiki (RZS).

usluge (osim snabdevanja domaćinstva vodom), usluge u vezi sa zdravljem, održavanjem automobila, transportom, komunikacijama, rekreacijom i kulturom,obrazovanjem, osiguranjem, ličnom negom i ostale usluge. Roba su svi proizvodi osim usluga"[3]. Za izračunavanje mesečnih indeksa na višim nivoima agregiranja koristi se *Laspeyer-ov* tip formule:

$$I_m = \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k \; {i_k}^m}{\sum_{k=1}^{n} w_k} \tag{2.5}$$

gde je w_k ponder, ${i_k}^m$ individualni mesečni indeks proizvoda k.

Od 2016. godine Republički zavod za statistiku obračunava Harmonizovani indeks potrošačkih cena (HIPC). Osnovna namena ovog indeksa je poređenje inflacije u zemljama Evropske unije, izračunate po jedinstvnoj metodologiji namenjenoj za izračunavanje Harmonizovanog indeksa potrošačkih cena. IPC pokriva finalnu potrošnju stanovništva kako u zemlji, tako i u inostranstvu. HIPC pokriva finalnu potrošnju stanovništva, kako rezidenata tako i nerezidenata u zemlji. Oba indeksa koriste COICOP (*Classification of Individual Consumption by Purpose*) metodologiju [4].

Potrošačka korpa proizvoda na osnovu koje se izračunava indeks potrošačkih cena podeljen je na dvanaest osnovnih grupa proizvoda, u skaldu sa međunarodnom klasifikacijom lične potrošnje prema nameni, COICOP (*Classification of Individual Consumption by Purpose*). U skladu sa prethodnim agregirani indeks potrošačkih cena je podeljen u dvanaest osnovnih podindeksa.

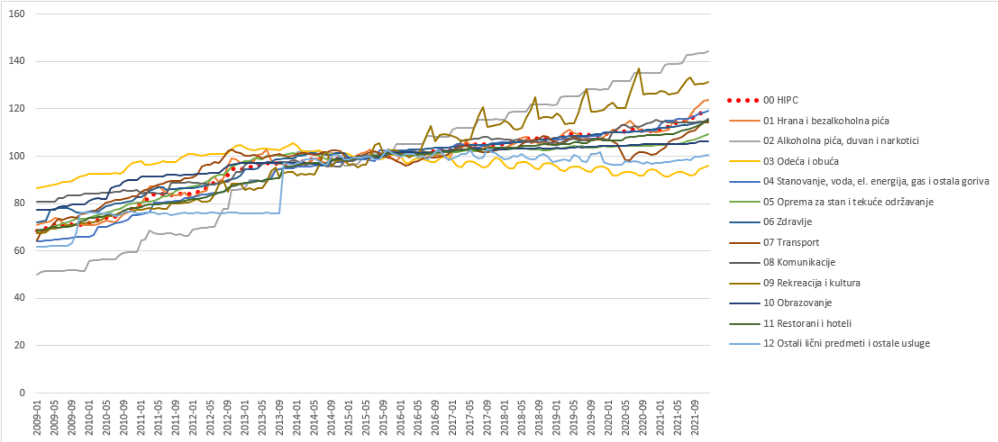
Grupe podindeksa su sledeće: *01 Hrana i bezalkoholna pića*, *02 Alkoholna pića, duvan i narkotici*, 03 *Odeća i obuća*, *04 Stanovanje, voda, električna energija, gas i ostala goriva*, *05 Oprema za stan i tekuće održavanje*, *06 Zdravlje*, *07 Transport*, *08 Komunikacije*, *09 Rekreacija i kultura*, *10 Obrazovanje*, *11 Restorani i hoteli*, *12 Ostali lični predmeti i ostale usluge.*

Pojedini podindeksi ukupnog indeksa potrošačkih cena često sadrže različite vrste proizvode i usluga u istoj grupi, kao na primer podindeks *07 Transport*: goriva čija cena zavisi od kretanja cene nafte na svetskom tržištu, automobili čija cena prati specifične uslove na tržištu automobila (npr. pojava novih električnih automobila). Takođe, postoje grupe proizvoda čije se cene administrativno regulišu tj. koje se nalaze pod kontrolom države i kao takve nisu pogodne za modeliranje.

Evropski zavod za statistiku objavljuje podelu indeksa potrošačkih cena na

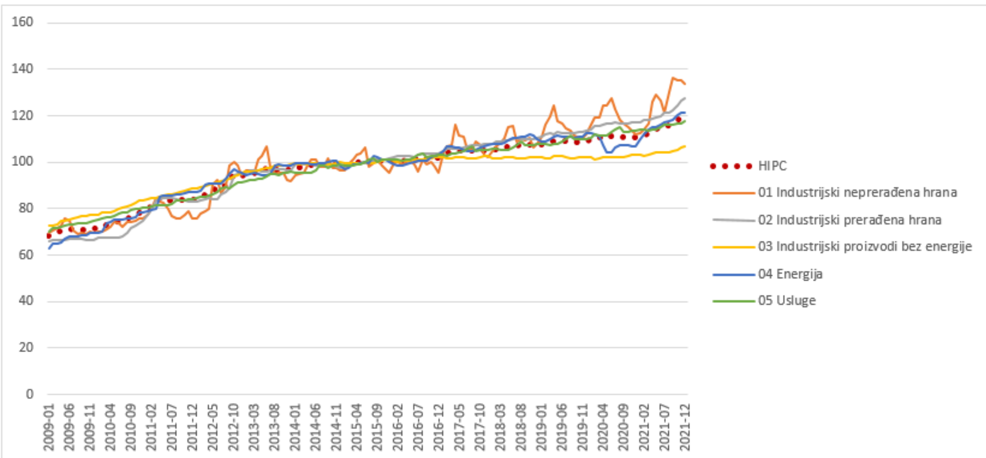
[3]Zvanična definicija IPC Republičkog zavod za statistiku (RZS)

[4]Republički zavod za statistiki (RZS)



Grafik 2: Bazni indeks (2015=100) potrošačkih cena - podela na 12 grupa proizvoda
Izvor: Originalni grafik autora na bazi *Eurostat* podataka

5 podindeksa koje su struktuirane tako da sadže homogene grupe proizvoda. Indeksi potrošačkih cena obračunati na opisan način pogodniji su za modeliranje i koriste se u Evropskoj centralnoj banci u svrhu modeliranja. Podela ukupnog indeksa potrošačkih cena na podindekse potrošačkih cena koji se koriste u Evropskoj uniji je sledeća: *01 Industrijski neprerađena hrana*, *02 Industrijski prerađena hrana*, *03 Industrijski proizvodi bez energije*, *04 Energija* i *05 Usluge*.



Grafik 3: Bazni indeks (2015=100) potrošačkih cena - podela na 5 grupa proizvoda
Izvor: Originalni grafik autora na bazi *Eurostat* podataka

Statistički podaci Republike Srbije se objavljuju na *Eurostat*-u[5], u skladu sa podelom na 5 podindeksa homogenih grupa proizvoda ukupnog indeksa potrošačkih cena.

U ovom radu su korišćeni podaci *Eurostat-a*[5] tj. bazni indeksi potrošačih cena i pripadajući ponderi u skladu sa podelom na 5 podindeksa homogenih grupa proizvoda indeksa potrošačkih cena.

2.4 Model za srednjoročne projekcije inflacije Narodne banke Srbije

Narodna banka Srbije je 2008. godine kao svoj osnovni cilj definisala ostvarenje bazne inflacije računate na osnovu indeksa potrošačkih cena, u ciljanom rasponu. Kao osnovni instrument monetarne politike koristi se referentna kamatna stopa. Obzirom da ovaj instrument monetarne politike deluje na inflaciju sa vremenskim kašnjenjem, da bi se postigao nivo ciljane inflacije potrebno je razviti model kojim bi se projektovala inflacija, odnosno putanja referentne kamatna stopa koju bi trebalo slediti da bi se inflacija kretala u granicama ciljanog raspona. Iz prethodno navedenog, NBS je razvila tromesečni model srednjoročne projekcije, u cilju potpore kreatorima monetarne politike pri donošenju odluke o visini referentne kamatne stope koja je usklađena sa ostvarenjem ciljane inflacije.

Model za srednjoročne projekcije inflacije Narodne banke Srbije je tromesečni model koji pripada grupi novokejnzijanskih modela. Dodatno, model za srednjoročne projekcije inflacije je polustrukturni (engl. *semistructural*) model, što znači da model ima jasnu ekonomsku i teorijsku interpretaciju, dok s druge strane pri izradi modela vodilo se računa da model što bolje odrazi kretanja u srpskoj ekonomiji. Koeficijenti modela nisu ocenjeni, već kalibrisani, dok su ekonometrijske ocene korišćene samo kao pomoćno sredstvo gde je to bilo moguće.

Pored osnovne projekcije putanje referentne kamatne stope koja je usklađena sa ostvarenjem ciljanog nivoa inflacije, model ima i druge namene. Modelom se mogu analizirati rizici ostvarenja inflacije, kao i reakcija monetarne politike u slučaju realizacije nekih od rizika. Dodatno, model ima važnu ulogu u eksternoj komunikaciji - projekcija inflacije objavljuje se tromesečno u Izveštaju o inflaciji.

Model sadrži četiri osnovne jednačine za:

- inflaciju (Filipsova kriva)

[5] `https://ec.europa.eu/eurostat`

- agregatnu tražnju (proizvodni jaz)
- devizni kurs (nepokriveni kamatni paritet)
- referentnu stopu (pravilo monetarne politike)

Pored navedenih model sadrži i veliki broj pomoćnih jednačina i identiteta. Model ukupno sadrži 90 jednačina, i pored toga se smatra da pripada grupi jednostavnijih modela.

Inflacija je u modelu razložena na tri osnovne komponente indeksa potrošačkih cena, a kao osnovni kriterijum pri ovoj podeli bili su način formiranja cena i mogućnost uticaja monetarne politike na njih:

- bazna inflacija (učešće 66,5%),
- nebazna inflacija bez derivata nafte (29,0%), koja obuhvata regulisane cene bez derivata nafte i cene poljoprivrednih proizvoda
- rast cena naftnih derivata (4,5%)

Bazna inflacija je inflacija po isključenju regulisanih cena i cena poljoprivrednih proizvoda, što čini oko dve trećine indeksa potrošačkih cena. Ova grupa proizvoda formira se slobodno, na tržištu, pa stoga monetarna politika na njihovo kretanje može uticati svojim instrumentima.

Drugu grupu indeksa potrošačkih cena u modelu čini nebazna inflacija bez naftnih derivata. U ovoj grupi obuhvaćeni su proizvodi i usluge na koje monetarna politika ima mali uticaj. Ovde spadaju regulisane cene (bez naftnih derivata) i cene poljoprivrednih proizvoda.

Treću grupu indeksa potrošačkih cena čine naftni derivati na koje monetrana politika ima direktniji uticaj. Cene naftnih derivata su u najvećoj meri definisane na bazi svetskih cena nafte i akciza. Svetska cena nafte izražena u dinarima zavisi od svetske cene nafte izražene u dolarima i deviznog kursa dinara prema evru. Akcize se koriguju jednom godišnje prema rastu cena na malo u prthodnih godinu dana. Uticaj monetarne politike na cene naftnih derivata ostvaruje se u najvećoj meri preko deviznog kursa, a u manjoj meri preko akciza. Najveći deo oscilacija cene naftnih derivata posledica je kretanja svetskih cena nafte, koje su podložne značajnim promenama.

Model za srednjoročne projekcije je osnovno sredstvo u procesu izrade srednjoročnih projekcija, a glavni rezultat ovog procesa je projekcija putanje referentne kamatne stope koju bi trebalo slediti da bi se inflacija u srednjem roku kretala oko ciljane stope. Model u procesu srednjoročne projekcije ima ulogu da očekivanja i pretpostavke o narednom periodu, kreirano od strane ekonomista, sistematizuje u jedinstven i konzistentan okvir. Vanmodelska ekonomsko analiza obuhvata: kratkoročne projekcije inflacije, definisanje pretpostavki projekcije u pogledu egzogenih promenljivih, projekcija trendova realnih promenljivih, uključivanje efekata vanmodelskih faktora i usvajanje protpostavki u pogledu kretanja šokova u periodu projekcije. Pretpostavke u pogledu kretanja pojedinih egzogenih promenljivih preuzimaju se iz eksternih izvora ili se interno projektuju. Kretanja egzogenih promenljivih, kao što su svetske cene nafte, inostrane inflacije, osnovne kamatne stope ECB, odnosa USD/EUR, bazirana su na očekivanjima iz stranih izvora. Od egzognih promenljivih naročito je bitna pretpostavka o kretanju nebazne inflacije bez naftnih derivata koja čini četvrtinu indeksa potrošačkih cena i direktno ulazi u projekciju inflacije. Projekcije ove egzogene varijable se baziraju na planu republičke Vlade o kretanju regulisanih cena i pretpostavljenom kretanju cena poljoprivrednih proizvoda.

Na osnovu pretpostavki i kratkoročnih projekcija generišu se scenarija srednjoročne projekcije. Osnovni scenario zasniva se na pretpostavkama koje su najverovatnije. Pored osnovnog scenarija generiše se više alternativnih scenarija, koji imaju ulogu da kreatorima monetarne politike ukažu na pravac delovanja ukoliko se ne realizuje očekivani osnovni scenario. Alternativni scenariji se mogu zasnivati na različitim pretpostavkama u pogledu kretanja regulisanih cena ili svetskih cena nafte. Na sastancima članova IO i direktnih kreatora projekcija definišu se pretpostavke projekcija, analiziraju se rizici i biraju alternativni scenariji.

Polazna osnova za odluku o visini referentne kamatne stope je projektovana putanja refrentne stope iz osnovnog scenarija srednjoročne projekcije, ali i procena rizika u odnosu na osnovni scenario, obuhvaćen alternativnim scenarijima. Na bazi osnovnog i alternativnih scenrija izrađuje se grafikon projekcije inflacije koji se objavljuje u Izveštaju o inflaciji, a koji se sastoji iz centralne projekcije i raspona koji treba da odrazi rizike projekcije.

Konačnu odluku o visini referentne kamatne stope na osnovu prethodnih razmatranja donose članovi Izvršnog odbora Narodne banke Srbije.

Osnovne jednačine modela za srednjoročne projekcije

Ukupna inflacija (indeks potrošačkih cena) (π_t) u modelu je razložena na tri komponente: baznu inflaciju (π_t^{core}), nebaznu inflaciju bez derivata ($\pi_t^{non\_core}$) i cene naftnih derivata (π_t^{petr}). Jednačina ukupne inflacje predstavlja ponderisani prosek (na bazi učešća u ukupnom indeksu) ove tri komponente:

$$\pi_t = a_{11} \cdot \pi_t^{core} + a_{12} \cdot \pi_t^{non_core} + (1 - a_{11} - a_{12})\pi_t^{petr} \tag{2.6}$$

Bazna inflacija (π_t^{core}) obuhvata rast cena koje se formiraju slobodno na tržištu i na koje utiče monetarna politika preko svojih instrumenata. U modelu bazne inflacije figurišu sledeće promenljive: bazna inflacija iz prethodnog tromesečja (π_{t-1}^{core}), inflatorna očekivanja ($E_t\pi4_{t+4}$), kretanje uvoznih cena (π_t^M), jaz realnog kursa dinara prema evru u prethodnom tromesečju ($zgap_{t-1}$), proizvodni jaz u prethodnom tromesečju ($ygap_{t-1}$), kao i troškovni pritisci na cene hrane u baznoj inflaciji ($RMCPgap_t$):

$$\begin{aligned}\pi_t^{core} = a_{21} \cdot \pi_{t-1}^{core} + a_{22} \cdot (E_t\pi4_{t+4} - kor^{eq}) + (1 - a_{21} - a_{22})\cdot \\ \cdot(\pi_t^M - \Delta lz_t^{eq} - kor^{eq}) + a_{23} \cdot zgap_{t-1} + a_{24} \cdot ygap_{t-1} + \\ + a_{25} \cdot RMCPgap_t + \varepsilon_t^{\pi core}\end{aligned} \tag{2.7}$$

Nebazna inflacija bez naftnih derivata nema jednačinu u modelu koja je opisuje, obzirom da se pretpostavlja se da je potpuno egzogeno određena i da nije pod uticajem slobodnog tržišta i monetarne politike.

Rast cena naftnih derivata (π_t^{petr}), pored bazne inflacije i nebazne inflacije bez naftnih derivata, predstavlja treću komponentu ukupne inflacije (2.6).

Cene naftnih derivata formiraju se na osnovu kretanja svetskih cena nafte izraženih u USD (USD/bbl) i kretanja deviznog kursa dinara prema dolaru (Δls_t^{usd}). Pored cena nafte na svetskom tržištu, cene naftnih derivata zavise i od visine akciza (exc_t), koje se početkom svake godine koriguju za rast indeksa cena na malo u prethodnoj godini:

$$\pi_t^{petr} = a_{51} \cdot (\Delta ls_t^{usd} + \pi_t^{oil}) + (1 - a_{51}) + exc_t \tag{2.8}$$

Promena kursa dinara prema dolaru zavisi od promene kursa dinara prema evru i promene odnosa dolar/evro.

3 Modeliranje vremenskih serija

3.1 Modeli stacionarnih vremenskih serija

Definicija 2. *Stohastički proces.* Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ prostor verovatnoća, $\mathcal{I}$ parametarski skup (skup realnih brojeva). Neka je definisana funkcija $X(\cdot,\cdot)$ koja $\Omega \times \mathcal{I}$ preslikava u skup $\mathcal{R}$ realnih brojeva: $\Omega \times \mathcal{I} : \to \mathcal{R}$. Uređeni niz slučajnih promenljivih $\{X(\cdot,\cdot),\ t \in \mathcal{I}\}$ nazivamo *stohastički proces.*

Ako posmatramo stohastički proces $\{X(\cdot,\cdot),\ t \in \mathcal{I}\}$, za fiksiramo $t \in \mathcal{I}$ dobijamo *slučajnu promenljivu* $X(\cdot, t)$ definisanu na prostoru uzorka Ω. S druge strane, za svako $\omega \in \Omega$ dobijamo $X(\omega, \cdot)$ *realizaciju* stohastičkog procesa. Kolekcija svih mogućih realizacija stohastičkog procesa naziva se *ansambl* (eng. *ensemble*) *funkcija* ili *ansambl realizacija. Vremenska serija* predstavlja jednu realizaciju stohastičkog procesa.

Definicija 3. *Srednja vrednost* (očekivanje) stohastičkog procesa $\{X_t,\ t \in [t_0, T]\}$ je funkcija $m_X(t) : [t_0, T]\ \to \mathcal{R}$ takva da

$$m_X(t) = m(t) = E(X_t) \tag{3.1}$$

Definicija 4. *Disperzija* stohastičkog procesa $\{X_t,\ t \in [t_0, T]\}$ je

$$\sigma^2_{X_t} = E(X_t - m_t)^2 \tag{3.2}$$

Definicija 5. *Kovarijaciona funkcija.* Za stohastički proces $\{X_t,\ t \in [t_0, T]\}$ kovarijaciona funkcija $\gamma(t_1, t_2)$ definiše se kao

$$\gamma(t_1, t_2) = cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = E[(X_{t_1} - m_{t_1})(X_{t_2} - m_{t_2})],\ za\ t_1, t_2 \in [t_0, T] \tag{3.3}$$

Definicija 6. *Korelaciona funkcija.* Za stohastički proces $\{X_t,\ t \in [t_0, T]\}$ korelaciona funkcija $\rho(t_1, t_2)$ definiše se kao

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma^2_{t_1}}\sqrt{\sigma^2_{t_2}}},\ za\ t_1, t_2 \in [t_0, T] \tag{3.4}$$

Definicija 7. *Stroga stacionarnost.* Stohastički proces $\{X_t,\ t \in [t_0, T]\}$ je strogo stacionaran ili stacionaran u užem smislu ako je invarijantan u odnosu na translaciju vremena, tj. ako za svako $n \in N$ i $t_1, t_2, ..., t_n \in [t_0, T]$ važi

$$F_{t_1+h, t_2+h, ..., t_n+h}(x_1, ..., x_n) = F_{t_1, t_2, ..., t_n}(x_1, ..., x_n),\ h \in \mathcal{R} \tag{3.5}$$

Funkcija raspodele strogo stacionarnog stohastičkog procesa je ista za svako t, sredina procesa je konstantna $m_X(t) = m_X$, kao i varijansa procesa $\sigma^2_{X_t} = \sigma^2_X$. Kovarijaciona i korelaciona funkcija su funkcije vremenskog intervala. Neka je $t_1 = t\ it_2 = t - k$, tada važi sledeće:

$$\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t, t + k) = \gamma(t - k, t) = \gamma_k \tag{3.6}$$

$$\rho(t_1, t_2) = \rho(t, t + k) = \rho(t - k, t) = \rho_k \tag{3.7}$$

Definicija 8. *Slaba stacionarnost.* Stohastički proces $\{X_t,\ t \in [t_0, T]\}$ je slabo stacionaran ili stacionaran u širem smislu ako važi

1) $m_X(t) = m_X,\ za\ svako\ t \in \mathcal{R}$
2) $\sigma^2_{X_t} = \sigma^2_X,\ za\ svako\ t \in \mathcal{R}$
3) $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1 - t_2),\ za\ svako\ t_1, t_2 \in \mathcal{R}$

Iz *slabe stacionarnosti* stohastičkog procesa sledi da proces ima konstantnu sredinu i varijansu, a da kovarijaciona i korelaciona funkcija zavise samo od vremenskog intervala.

Definicija 9. *Ergodičnost.* Slabo stacionaran proces $\{X_t,\ t \in [t_0, T]\}$ je ergodičan ako

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \right) \tag{3.8}$$

Uslov ergodičnosti znači da sa povećanjem opservacija vremenske serije momenti iz uzorka konvergiraju u srednje kvadratnom smislu ka odogovarajućim momentima populacije. Uz uslov ergodičnosti vemenski prosek će biti kozinstentna i nepristrasna ocena populacionog proseka, dok će ocena kovarijacione funkcije biti konzistentna ocena populacione kovarijacione funkcije.

Slaba stacionarnost stohastičkog procesa koristi se u praksi u analizi vremenskih serija i modeliranju, stoga će se u daljem radu pod pojmom stacionarnosti podrazumevati slaba stacionarnost.

3.2 Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija

Pod uslovima slabe stacionarnosti stohastičkog procesa, kovarijansa između X_t i X_{t-k} definiše se kao:

$$\gamma_k = cov(X_t, X_{t-k}) = E[(X_t - m)(X_{t-k} - m)] \tag{3.9}$$

gde je γ_k je funkcija od k i naziva se *autokovarijaciona funkcija*. Koeficijent korelacije između X_t i X_{t-k} definiše se na sledeći način:

$$\rho_k = \frac{cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{var(X_t)}\sqrt{var(X_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \tag{3.10}$$

gde je funkcija ρ_k *autokorelaciona funkcija*.

Osobine autokovarijansne i autokorelacione funkcije:

1) $\gamma_0 = var(X_t),\ \rho_0 = 1$

2) $\gamma_k = \gamma_{-k},\ \rho_k = \rho_{-k}$ (osobina simetričnosti)

3) $|\gamma_k| \leq |\gamma_0|,\ |\rho_k| \leq 1$

Pored gore navedenih uslova, da bi neka funkcija bila autokovarijansna ili autokorelaciona funkcija stacionarnog stohastičkog procesa, potrebno je da bude i pozitivno semidefinitna.

3.3 Linearni procesi

Neka je $\{X_t,\ t \in [t_0, T]\}$ slabo stacionaran stohastički proces i $\{\varepsilon_t,\ t \in [t_0, T]\}$ niz nekoreliranih slučajnih promenljivih sa normalnom raspodelom, tada se izraz dat u sledećoj formi naziva linearan proces:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \zeta_1\varepsilon_{t-1} + \zeta_2\varepsilon_{t-2} + ... = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_j\varepsilon_{t-j},\ \zeta_0 = 1 \tag{3.11}$$

Prethodni izraz se može iskazati primenom operatora docnje:

$$X_t - \mu = (1 + \zeta_1 B + \zeta_2 B^2 + ...)\varepsilon_t = \zeta(B)\varepsilon_t \tag{3.12}$$

gde je $\zeta(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_j B^j$.

Stacionarni stohastički proces $\{\varepsilon_t\}$ naziva se *proces belog šuma* (eng. *white noise process*) ili *potpuno slučajan proces. Proces belog šuma* definiše niz međusobno nekoreliranih slučajnih promenljivih sa normalnom raspodelom, $E(\varepsilon_t) = 0$ i konstantnom varijansom $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$. i Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija procesa belog šuma su:

$$\gamma_k = \left\{ \begin{array}{ll} \sigma^2 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{array} \right\} \tag{3.13}$$

$$\rho_k = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{array} \right\} \tag{3.14}$$

Na osnovu linearnog procesa pogodnim izborom ζ - pondera, definišu se tri posebne klase procesa. Izraz dat u (3.11) je ponderisana linearna kombinacija sadašnjih i prethodnih vrednosti slučajnih šokova (eng. *white noise process*) i predstavlja *MA reprezentaciju* linearnog procesa. Druga klasa lineranog procesa predstavlja *autoregresivnu (AR) reprezentaciju* linearnog procesa i definiše se kao:

$$X_t = \eta_1 X_{t-1} + \eta_2 X_{t-2} + ... + \varepsilon_t \tag{3.15}$$

Korišćenjem operatora docnje prethodni izraz se može zapisati kao:

$$\eta(B) X_t = \varepsilon_t \tag{3.16}$$

Ako se linearni proces dat izrazom u (3.11) može napisati u formi AR reprezentacije (3.16), tada za proces kažemo da je *invertibilan.*

Prethodne dve reprezentacije linearnih modela sadrže beskonačan broj koeficijenata, što sa stanovišta modeliranja nije upotrebljivo. Stoga definišemo MA i AR modele linearnih procesa sa konačnim brojem koeficijenata na sledeći način:

1) *MA reprezentacija linearnog procesa* gde je prvih q ζ - pondera različito od nule, a preostali ponderi jednaki nuli, naziva se *proces pokretnih proseka q-tog reda* ili *MA proces q-tog reda*

$$X_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - ... - \theta_p \varepsilon_{t-q}$$

gde je $\zeta_j = -\theta_j$ za $j \leq q \ \wedge \ \zeta_j = 0$ za $j > q$

2) *AR reprezentacija linearnog procesa* gde je prvih p η - pondera različito od nule, a preostali ponderi jednaki nuli, naziva se *autoregresioni proces p-tog reda* ili *AR proces p-tog reda*

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} \varepsilon_t$$

gde je $\eta_j = \phi_j$ za $j \leq p \ \wedge \ \eta_j = 0$ za $j > p$

Treća klasa linearnih procesa su tzv. *autoregresioni procesi pokretnih proseka.* Forma ARMA procesa reda p autoregresivnog dela i reda q procesa pokretnih proseka data je sledećim izrazom:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - ... - \theta_p \varepsilon_{t-q} \quad (3.17)$$

3.4 Autoregresioni procesi (AR)

Proces $\{X_t\}$ je *autoregresioni proces reda p*, u zapisu AR(p), ako je opisan jednačinom:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (3.18)$$

ili primenom operatora docnje $\phi(B)X_t = \phi_0 + \varepsilon_t$.

Iz jednačine procesa vidimo da tekuća vrednost proces predstavlja linearnu kombinaciju prethodnih p vrednosti istog procesa i poremećaj. Iz uslova $\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j = \sum_{j=1}^{p} |\phi_j| < \infty$, sledi da je autoregresioni proces p-tog reda *invertibilan.*

3.4.1 Autoregresioni procesi prvog reda AR(1)

Autoregresioni proces prvog reda dat je izrazom:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.19)$$

ili primenom operatora docnje

$$(1 - \phi_1 B)X_t = \phi_0 + \varepsilon_t \quad (3.20)$$

Pod pretpostavkom da je proces $\{X_t\}$ slabo stacionaran možemo odrediti očekivanje i varijansu procesa:

$$E(X_t) = \phi_0 + \phi_1 E(X_{t-1}) \quad (3.21)$$

Iz uslova stacionarnosti sledi $E(X_t) = E(X_{t-1}) = \mu$, što dalje implicira:

$$E(X_t) = \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1} \quad (3.22)$$

Iz prethodne jednačine (3.22) sledi da $E(X_t)$ postoji ako je $\phi_1 \neq 1$, kao i to da u slučaju kada je $\phi_0 = 0$ to dalje implicira $E(X_t) = 0$.

Koristeći vezu $\phi_0 = \mu(1 - \phi_1)$ i izraz autoregresionog procesa dat u (3.19) dobijamo:

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \quad (3.23)$$

daljom zamenom dobijamo značajnu vezu na osnovu koje dolazimo do varijanse procesa:

$$\begin{aligned} X_t - \mu &= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + ... \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j}. \end{aligned}$$

Do istog izraza dolazimo na osnovu (3.20). Pod pretpostavkom da je $\phi_0 = 0$ sledi

$$\begin{aligned} X_t = (1 - \phi_1 B)^{-1} \varepsilon_t &= (1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + ...)\varepsilon_t \\ &= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + ... \end{aligned}$$

Na osnovu izraza sledi $E(X_t) = 0$ i $Var(X_t) = \sigma^2(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + ...)$. Za konvergenciju autoregresionog linearnog procesa potrebno je da varijansa bude konačna, odakle sledi da je uslov za konvergenciju AR(1) procesa dat sa $|\phi_1| < 1$. Dodatno, iz prethodnog uslova sledi i stacionarnost AR(1) procesa. Invertibilnost AR(1) procesa sledi iz invertibilnosti konačnih AR linearnih procesa.

Autokovarijaciona funkciju AR(1) procesa je:

$$\gamma_k = \left\{ \begin{array}{ll} \phi_1 \gamma_1 + \sigma^2 & , \ k = 0 \\ \phi_1 \gamma_{k-1} & , \ k > 0 \end{array} \right\} \tag{3.24}$$

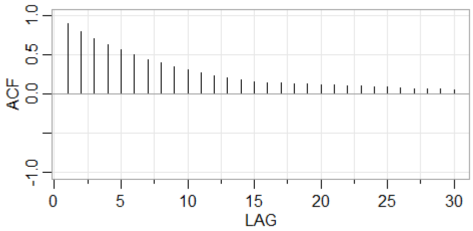
gde koristimo uslov $\gamma_k = \gamma_{-k}$. Iz prethodnog na osnovu slabe stacionarnosti procesa AR(1) iz (3.19) sledi:

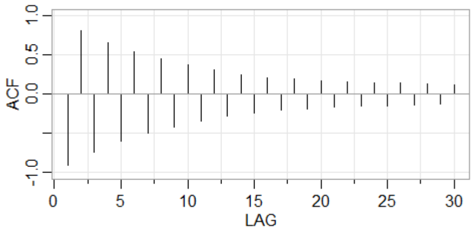
$$Var(X_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2} \tag{3.25}$$

Autokorelaciona funkciju AR(1) procesa definisana je kao:

$$\rho_k = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & k = 0 \\ \phi_1 \rho_{k-1}, & k > 0 \end{array} \right\} \tag{3.26}$$

odakle sledi $\rho_k = \phi_1^k$ za $k > 0$. Korelogram slabo stacionarnog AR(1) procesa prikazuje eksponencijalno opadanje vrednosti autokorelacionih koeficijenata sa početnom vrednošću $\rho_0 = 1$. Za vrednosti $\phi_1 > 0$ korelogram AR(1) procesa prikazuje opadanje po eksponencijalnoj krivi ka nuli, dok za $\phi_1 < 0$ vrednosti autokorelacione funckije alterniraju, opadajući ka nuli.





Grafik 4: ACF AR(1) procesa: *a*) $\phi_1 = 0.9$, *b*) $\phi_1 = -0.9$
Izvor: Originalni grafik autora

3.4.2 Autoregresioni procesi drugog reda AR(2)

Autoregresioni proces drugog reda dat je izrazom:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \tag{3.27}$$

ili primenom operatora docnje

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) X_t = \phi_0 + \varepsilon_t \tag{3.28}$$

Određivanjem očekivanja izraza (3.27) pod pretpostavkom slabe stacionarnosti procesa $\{X_t\}$ dobijamo:

$$E(X_t) = \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2} \tag{3.29}$$

odakle sledi da očekivanje postoji ako je $\phi_1 + \phi_2 \neq 1$. Koristeći vezu $\phi_0 = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2)$ dobijamo:

$$X_t - \mu = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + \phi_2 (X_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t \tag{3.30}$$

Dalje, množenjem sa $(X_{t-k} - \mu)$ i određivanjem očekivanja dobijamo *autokovarijacionu funkciju* AR(2) procesa:

$$\gamma_k = \left\{ \begin{array}{ll} \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma^2, & k = 0 \\ \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}, & k > 0 \end{array} \right\} \tag{3.31}$$

gde koristimo uslov $\gamma_k = \gamma_{-k}$. Iz prethodnog na osnovu slabe stacionarnosti procesa AR(2) iz (3.27) sledi:

$$Var(X_t) = \gamma_0 = \frac{1 - \phi_2}{1 + \phi_2} \frac{\sigma^2}{(\phi_1 + \phi_2 - 1)(\phi_2 - \phi_1 - 1)} \tag{3.32}$$

Deljenjem izraza (3.31) sa γ_0 za $k > 0$ dolazimo do *autokorelacione funkcije* AR(2) procesa:

$$\rho_k = \begin{Bmatrix} 1, & k = 0 \\ \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2}, & k > 0 \end{Bmatrix} \tag{3.33}$$

Primenom operatora docnje sledi da autokorelaciona funkcija stacionarnog proces predstavlja diferencijalnu jednačinu drugog reda:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)\rho_k = 0 \tag{3.34}$$

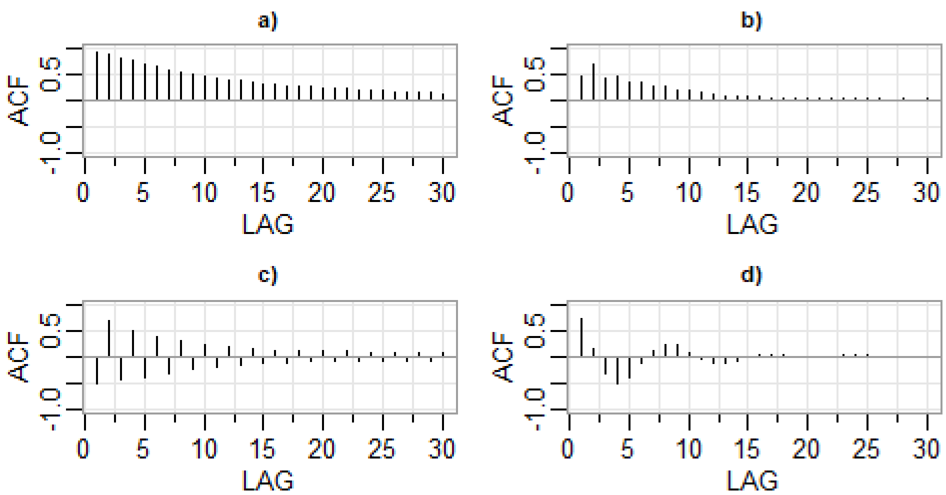
U drugačijem zapisu izraza (3.34) dobijamo polinomijalnu jednačinu:

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0 \tag{3.35}$$

Rešenja jednačine, data sa $z_{1/2} = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}$, određuju osobine autokorelacione funkcije stacionarnog AR(2) procesa. Ako su rešenja jednačine realni koreni, tada korelogrami AR(2) procesa prate krivu eksponencijalnog opadanja ka nuli, kao i kod AR(1) procesa. Kada su rešenja jednačina kompleksni koreni, tada korelogrami AR(2) procesa prate kretanje sinusoida.

Uslovi stacionarnosti AR(2) procesa su:

$$\phi_1 + \phi_2 < 1, \ -\phi_1 + \phi_2 < 1, \ |\phi_2| < 1 \tag{3.36}$$



Grafik 5: ACF AR(2) procesa: *a*) $\phi_1 = 1.2$ i $\phi_2 = -0.25$, *b*) $\phi_1 = 0.2$ i $\phi_2 = 0.6$, *c*) $\phi_1 = -0.2$ i $\phi_2 = 0.6$, *d*) $\phi_1 = 1.2$ i $\phi_2 = -0.7$
Izvor: Originalni grafik autora

3.4.3 Autoregresioni procesi reda p - AR(p)

Autoregresioni proces reda p - AR(p) dat je izrazom:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \tag{3.37}$$

Uopštavanjem rezultata dobijenih kod AR(1) i AR(2) procesa dolazimo do sledećih rezultata AR(p) procesa. Očekivanje stacionarnog procesa AR(p) dato je sa:

$$E(X_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - ... - \phi_p} \tag{3.38}$$

odakle sledi da očekivanje postoji ako važi $\phi_1 + ... + \phi_p \neq 1$.

Autokovarijaciona funkcija AR(p) procesa data je sa:

$$\gamma_k = \left\{ \begin{array}{ll} \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + ... + \phi_p\gamma_p + \sigma^2, & k = 0 \\ \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + ... + \phi_p\gamma_{k-p}, & k > 0 \end{array} \right\} \tag{3.39}$$

Varijansa procesa $\{X_t\}$ data je izrazom:

$$Var(X_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho_1 - ... - \phi_p\rho_p} \tag{3.40}$$

Autokorelaciona funkcija AR(p) procesa data je sa:

$$\rho_k = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & k = 0 \\ \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + ... + \phi_p\rho_{k-p}, & k > 0 \end{array} \right\} \tag{3.41}$$

Uslov stacionarnosti AR(p) procesa sledi iz diferencijalne jednačinu:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p)\rho_k = 0 \tag{3.42}$$

kojoj odgovara karkteristična jednačina:

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - ... - \phi_p x^p = 0 \tag{3.43}$$

ako su rešenja karakteristične jednačine manja od 1, po modulu, tada je AR(p) proces stacionaran. U zavisnosti od rešenja diferencijalne jednačine (realna ili kompleksna rešenja), korelogram AR(p) procesa prati prigušeno eksponencijalno opadanje ka nuli ili oscilatorno kretanje sinusoida.

3.4.4 Parcijalna autokorelaciona funkcija

U primeni za određivanje reda autoregresionog procesa koristi se *parcijalna autokorelaciona funkcija (PACF).* Osobine uzoračke parcijalne autokorelacione funkcije stacionarnog *Gaus-ovskog* AR(p) procesa su sledeće:

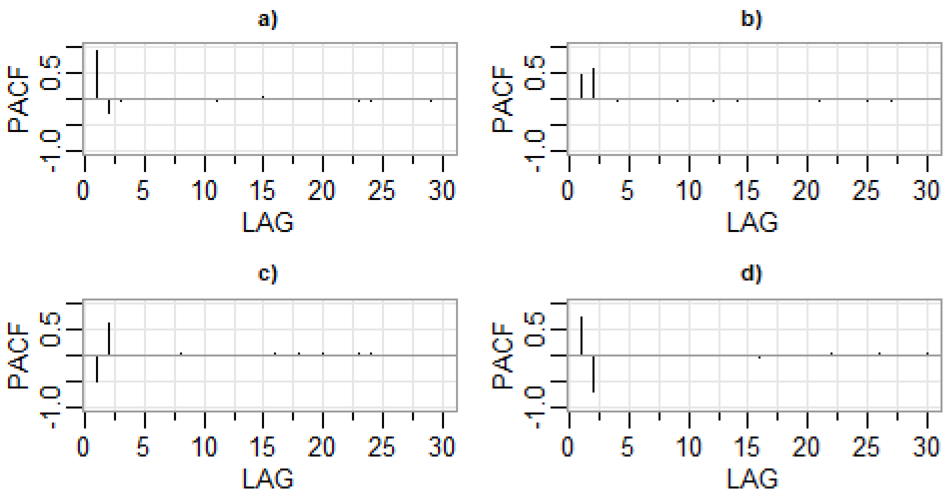
1) $\hat{\phi_{pp}} \to \phi_p,\ p \in [t_0, T]\ kada\ T \to \infty$

2) $\hat{\phi_{kk}} \to 0,\ za\ k > p$

3) asimptotska varijansa $\hat{\phi_{kk}}$ je $\frac{1}{T},\ za\ k > p$

Osobina parcijalne autokorelacione funkcije AR(p) modela po kojoj ocenjeni uzorački parcijalni koeficijenti $\hat{\phi_{kk}} \neq 0,\ za\ k \leq p$ i $\hat{\phi_{kk}}$ su blizu nuli za $k > p$, značajna je u određivanju reda AR(p) procesa. U tom slučaju parcijalni korelogram AR(p) procesa je odsečen na docnji p, odnosno svi ocenjeni parcijalni korelacioni koeficijenti su statistički jednaki nuli za docnje veće od p. Jedan od načina za dobijanje populacione i uzoračke parcijalne korelacione funkcije dat je preko Durbinove rekurzivne formule:

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\rho_j},\ \phi_{kj} = \phi_{k-1,j} - \phi_{kk}\phi_{k-1,k-j},\ 0 < j \leq k-1 \tag{3.44}$$



Grafik 6: PACF AR(2) procesa: *a)* $\phi_1 = 1.2$ i $\phi_2 = -0.25$, *b)* $\phi_1 = 0.2$ i $\phi_2 = 0.6$, *c)* $\phi_1 = -0.2$ i $\phi_2 = 0.6$, *d)* $\phi_1 = 1.2$ i $\phi_2 = -0.7$
Izvor: Originalni grafik autora

3.5 Procesi pokretnih proseka (MA)

Proces $\{X_t\}$ je *proces pokretnih proseka reda* q, u zapisu MA(q), ako je opisan jednačinom:

$$X_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - ... - \theta_q\varepsilon_{t-q} \tag{3.45}$$

ili primenom operatora docnje $X_t = \theta_0 + \theta(B)\varepsilon_t$ gde je $\theta(B)\varepsilon_t = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q$.

Proces pokretnih proseka može se definisati preko linearnog procesa datog u formi (3.11), gde su sa $\zeta_j = -\theta_j,\ 0 \leq j \leq q,\ \zeta_j = 0\ za\ j > q$ dati parametri procesa. Uslov stacionarnosti sledi iz varijanse procesa za koji važi $Var(X_t) = \gamma_0 = E(X_t)^2 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + ... + \theta_q^2) < \infty$. Dodatno, iz prethodnog sledi da su svi procesi pokretnih proseka sa konačnim brojem parametara stacionarni. Drugi način na koji se može definisati proces pokretnih proseka dat je preko autoregresionog procesa sa beskonačno mnogo parametara uz primenu određenih ograničenja:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \varepsilon_t \tag{3.46}$$

sa ograničenjem na parametre datim sa $\phi_j = -\theta_1^j\ za\ j \geq 1$.

$$X_t = \phi_0 - \theta_1 X_{t-1} - \theta_1^2 X_{t-2} - \theta_1^3 X_{t-3} - ... + \varepsilon_t \tag{3.47}$$

Potreban uslov da bi proces dat u (3.47) bio stacionaran je $|\theta_1| < 1$, jer u tom slučaju važi $\theta_j^i \to 0$, kada $i \to \infty$. Odakle sledi da doprinos koji X_{t-1} ima na X_t eksponencijalno opada sa povećanjem j. Ovakav rezultat je očekivan obzirom da zavisnost stacionarne serije X_t od prethodnih vrednosti X_{t-1} opada sa protokom vremena.

3.5.1 Procesi pokretnih proseka prvog reda - MA(1)

Proces pokretnih proseka prvog reda dat je izrazom:

$$X_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \tag{3.48}$$

ili primenom operatora docnje

$$X_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t \tag{3.49}$$

Očekivanje procesa pokretnih proseka prvog reda je

$$E(X_t) = \theta_0 \tag{3.50}$$

odakle sledi da je očekivanje jednako nuli samo ako je $\theta_0 = 0$.
Autokovarijaciona funkcija MA(1) procesa data je sa:

$$\gamma_k = \left\{ \begin{array}{rl} -\sigma^2\theta_1, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{array} \right\} \tag{3.51}$$

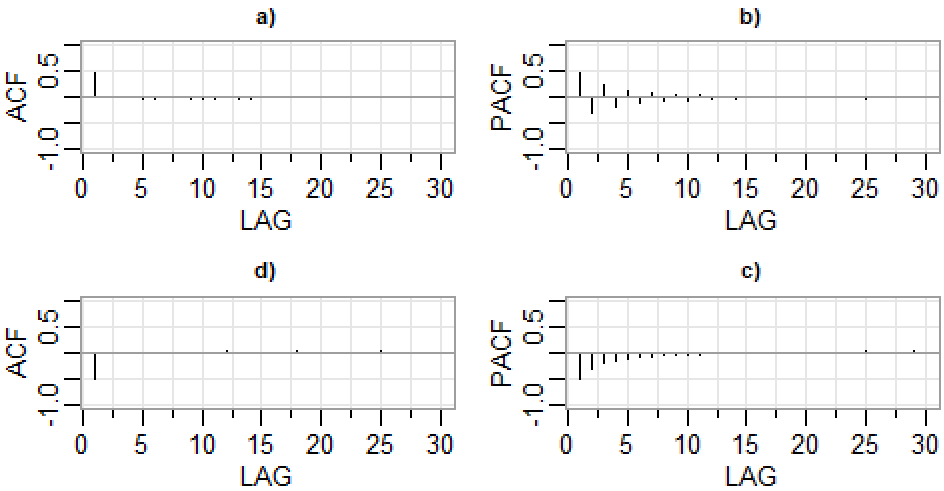
Varijansa procesa pokretnih proseka prvog reda data je izrazom:

$$Var(X_t) = \gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2) \tag{3.52}$$

Autokorelaciona funkcija MA(1) procesa definisana je kao:

$$\rho_k = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & k = 0 \\ \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{array} \right\} \tag{3.53}$$

Na osnovu prethodnog, autokorelaciona funkcija MA(1) procesa postoji za prvi korak, dok je autokorelaciona funkcija višeg reda jednaka 0. Stoga, sledi da je memorija procesa ograničena, odnosno iznosi samo jedan interval ili *"lag"*. Uopštavanjem izraza procesa pokretnih proseka prvog reda, dobijamo autoregresionu reprezentaciju ovog procesa, istu kao u izrazu (3.47). Uz ispunjen uslov $|\theta_1| < 1$, sledi da se MA(1) proces može prikazati kao AR(∞) proces, odnosno tada važi da je proces pokretnih proseka prvog reda *invertibilan*.



Grafik 7: ACF i PACF MA(1) procesa: *a) ACF za* $\theta_1 = -0.8$, *b) PACF za* $\theta_1 = -0.8$, *c) ACF za* $\theta_1 = 0.8$, *d) PACF za* $\theta_1 = 0.8$
Izvor: Originalni grafik autora

3.5.2 Procesi pokretnih proseka drugog reda - MA(2)

Proces pokretnih proseka drugog reda dat je izrazom:

$$X_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} \tag{3.54}$$

ili primenom operatora docnje:

$$X_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\varepsilon_t \tag{3.55}$$

Očekivanje procesa pokretnih proseka drugog reda je:

$$E(X_t) = \theta_0 \tag{3.56}$$

Autokovarijaciona funkcija MA(2) procesa data je sa:

$$\gamma_k = \left\{ \begin{array}{rl} \sigma^2(-\theta_1 + \theta_1\theta_2), & k = 1 \\ -\sigma^2\theta_2, & k = 2 \\ 0, & k > 2 \end{array} \right\} \tag{3.57}$$

Varijansa procesa pokretnih proseka drugog reda data je izrazom:

$$Var(X_t) = \gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \tag{3.58}$$

Autokorelaciona funkcija MA(2) procesa definisana je kao:

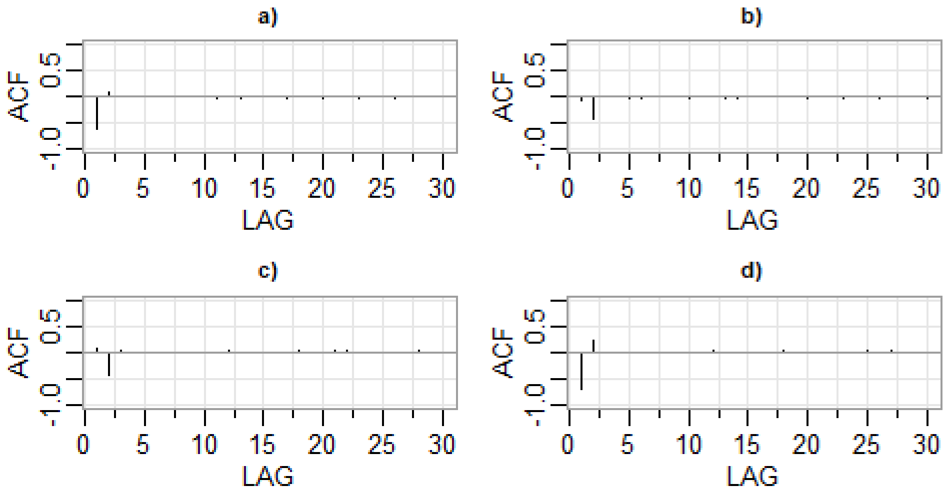
$$\rho_k = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & k = 0 \\ \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k = 1 \\ \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, & k = 2 \\ 0, & k > 2 \end{array} \right\} \tag{3.59}$$

Stacionarnost MA(*2*) procesa sledi iz stacionarnosti svih procesa pokretnih proseka konačnog reda. Uslov *invertibilnosti* dobijamo iz rešenja jednačine $(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) = 0$, koja moraju biti manja od 1 po modulu. Ovaj uslov je ispunjen kada je:

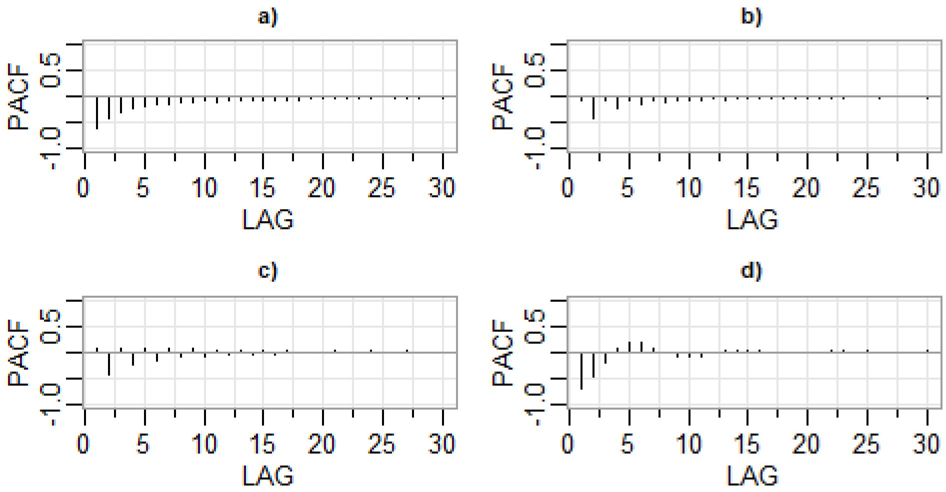
$$\theta_1 + \theta_2 < 1,\ -\theta_1 + \theta_2 < 1,\ |\theta_2| < 1 \tag{3.60}$$

Dodatno, ovi uslovi su identični uslovima stacionarnosti AR(*2*) procesa. Na slici 8 prikazani su karakteristični autokorelogrami MA(2) procesa.

U zavisnosti od veličine i znaka koeficijanata θ_1 i θ_2, parcijalni korelogram pratiće eksponencijalno opadanje ili kretanje sinusoida. Na slici 9 prikazani su karakteristični parcijalni korelogrami MA(2) procesa.



Grafik 8: ACF MA(2) procesa: *a)* $\theta_1 = 1.2$ i $\theta_2 = -0.25$, *b)* $\theta_1 = 0.2$ i $\theta_2 = 0.6$, *c)* $\theta_1 = -0.2$ i $\theta_2 = 0.6$, *d)* $\theta_1 = 1.2$ i $\theta_2 = -0.7$
Izvor: Originalni grafik autora



Grafik 9: PACF MA(2) procesa: *a)* $\theta_1 = 1.2$ i $\theta_2 = -0.25$, *b)* $\theta_1 = 0.2$ i $\theta_2 = 0.6$, *c)* $\theta_1 = -0.2$ i $\theta_2 = 0.6$, *d)* $\theta_1 = 1.2$ i $\theta_2 = -0.7$
Izvor: Originalni grafik autora

3.5.3 Procesi pokretnih proseka reda q - MA(q)

Proces pokretnih proseka reda q, u zapisu $MA(q)$, dat je izrazom:

$$X_t = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - ... - \theta_q\varepsilon_{t-q} \tag{3.61}$$

ili primenom operatora docnje

$$X_t = \theta_0 + \theta(B)\varepsilon_t \tag{3.62}$$

Očekivanje procesa pokretnih proseka reda q je:

$$E(X_t) = \theta_0 \tag{3.63}$$

Autokovarijaciona funkcija MA(q) procesa data je sa:

$$\gamma_k = \left\{ \begin{array}{rl} \sigma^2(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + ... + \theta_{q-k}\theta_q), & k = 1, 2, ..., q \\ 0, & k > q \end{array} \right\} \tag{3.64}$$

Varijansa procesa pokretnih proseka reda q data je izrazom:

$$Var(X_t) = \gamma_0 = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + ... + \theta_q^q) \tag{3.65}$$

Autokorelaciona funkcija MA(q) procesa definisana je kao:

$$\rho_k = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & k = 0 \\ \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + ... + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^q}, & k = 1, 2, ..., q \\ 0, & k > q \end{array} \right\} \tag{3.66}$$

Autokorelaciona funkcija uzima vrednost nula za $k > q$, što znači da je MA(q) proces linearno koreliran sa prethodnih q docnji ili "*lag*-ova", odnosno proces MA(q) ima konačnu memoriju. Ova osobina se koristi za određivanje reda procesa pokretnih proseka. Uslov invertibilnosti sledi iz rešenja jednačine $\theta(B) = 0$ koja moraju da zadovoljavaju uslov da su manja od 1 po modulu, $|z_j| < 1$ gde je $0 < j \leq q$.

3.5.4 Veza između AR(p) i MA(q) procesa

Polazeći od invertibilnog procesa pokretnih proseka i koristeći AR reprezentaciju linearnog procesa, može se pokazati da se na osnovu rekurzivne relacije dobija autoregresioni proces beskonačnog reda. Takođe, ako krenemo od stacionaranog autoregresionog procesa, dolazimo do procesa pokretnih proseka beskonačnog reda. Iz prethodnog zaključujemo da je svaki stacionarni AR(p) proces konačnog reda ekvivalentan MA(∞) procesu beskonačnog reda i obrnuto, svaki invertibilan MA(q) proces je ekvivalentan AR(∞) procesu beskonačnog reda. Ova relacija se preslikava i na autokorelacione i parcijalne autokorelacione funkcije datih procesa, odnosno autokorelogram AR(p) procesa prikazuje autokorelacione koeficijente koji sa protokom vremena polako ″odumiru″, dok su parcijalni autokorelacioni koeficijenti jednaki nuli posle p docnji. Autokorelogram i parcijalni korelogram MA(q) procesa pokazuju obrnute scenarije u odnosu na AR(p) procese, odnosno autokorelacioni koeficijenti su odsečeni posle q docnji, dok parcijalni autokorelacioni koeficijenti pokazuju prigušeno eksponencijalno ili sinusoidno kretanje koje polako ″odumire″ sa protokom vremena.

	ACF	$PACF$
$AR(p)$	geometrijsko opadanje	grafik odsečen posle p docnji
$MA(q)$	grafik odsečen posle q docnji	geometrijsko opadanje

Tabela 1: Izgled ACF i PACF - AR(p) i MA(q) procesa

3.6 Autoregresioni proces pokretnih proseka (ARMA)

Motiv za uvođenje ARMA procesa pronalazimo u činjenici da je za potrebe opisivanja složene dinamičke strukture vremenskih serija, ponekad potrebno uvesti MA(q) ili AR(p) procese sa velikim brojem parametara koji utiču na efikasnost ocenjivanja takvih procesa. U cilju doprinosa efikasnosti ocenjivanja modela, uvodi se nova klasa modela koji predstavlja kombinaciju AR i MA parametara.

Autoregresioni proces pokretnih proseka reda p i q, u zapisu ARMA(p,q), definiše se na sledeći način:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + ... + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - ... - \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{3.67}$$

odnosno primenom operatora docnje

$$\phi(B)X_t = \phi_0 + \theta(B)\varepsilon_t \tag{3.68}$$

gde su $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - ... - \phi_p B^p$, $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - ... - \theta_q B^q$ i $\{\varepsilon_t\}$ proces belog šuma.

Invertibilnost procesa sledi iz rešenja jednačine $1 - \theta_1 B - ... - \theta_q B^q = 0$, koja moraju biti veća od 1, po modulu. Stacionarnost procesa sledi iz rešenja jednačine $1 - \phi_1 B - ... - \phi_p B^p = 0$ za koja važi da moraju biti veća od 1, po modulu. Dodatno, pretpostavlja se da navedeni polinomi nemaju zajednička rešenja.

Očekivanje ARMA(p,q) procesa je:

$$E(X_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - ... - \phi_p} \tag{3.69}$$

Određivanjem očekivanja izraza koji dobijamo kada izraz dat u (3.67) pomnožimo sa X_{t-k}:

$$X_t = \phi_1\gamma_{k-1} + ... + \phi_p\gamma_{k-p} - \theta_1 E(X_{t-k}\varepsilon_{t-1}) - ... - \theta_q E(X_{t-k}\varepsilon_{t-q})$$

dolazimo do formule autokovarijacione funkcije uz uslov $E(X_{t-k}\varepsilon_{t-j}) = 0$ za $k > j$.
Autokovarijaciona funkcija ARMA(p,q) procesa data je sa:

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + ... + \phi_p\gamma_{k-p}, \ za \ k > q \tag{3.70}$$

Autokorelaciona funkcija ARMA(p,q) procesa definisana je kao:

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + ... + \phi_p\rho_{k-p}, \ za \ k > q \tag{3.71}$$

Iz formule autokorelacione funkcije uočavamo sličnost sa autokorelacionom funkcijom AR(p) procesa tj. autokorelaciona funkcija ARMA(p,q) procesa opada ka nuli nakon prvih q docnji i zavisi od autoregresionih koeficijenata. S druge strane, autokorelacioni koeficijenti na prvih q docnji zavise i od koeficijenata MA(q) procesa. Takođe, parcijalna korelaciona funkcija je pod uticajem MA(q) dela procesa. Obzirom na prethodno, autokorelogram i parcijalni korelogram, u zavisnosti od veličine i znaka ϕ i θ koeficijenata, imaju izgled prigušenog eksponencijalnog (alternirajućeg) opadanja ili sinusoida, stoga je određivanje reda procesa na osnovu datih korelograma otežano. Za određivanje reda ARMA(p,q) procesa koristi se *inverzna autokorelaciona funkcija (IACF)* i *proširena autokorelaciona funkcija (EACF).*

3.7 Modeli nestacionarnih vremenskih serija

Stacionarni stohastički procesi, koji se modeliraju nekim od prethodno opisanih modela, zadovoljavaju navedene karakteristike: konstantnost u sredini, odnosno nivou vremenske serije, konstantnost u varijansi i zavisnost autokovarijansi serije od vremenskog intervala. U slučaju kada vremenska serija ne zadovoljava bar jednu od navedenih karakteristika, tada za takvu seriju kažemo da je nestacionarana. U zavisnosti od toga koju karakteristiku ne zadovoljava, definišemo vrstu nestacionarnosti. Nestacionarni stohastički procesi mogu imati nestacionarnost u sredini (nivou) i/ili varijansi. Za nestacionarne vremenske serije u nivou koristi se pojam prisustva *jediničnog korena.*

Nestacionarnost u varijansi vremenske serije predstavlja odstupanje opservacija vremenske serije od sredine koje se povećava sa protokom vremena. Pristup koji se koristi za otklanjanje nestacionarnosti u varijansi se odnosi na primenu transformacije vremenske serije. Koji tip transformacije serije će se primeniti zavisi od tipa nestacionarnosti u varijansi posmatrane vremenske serije, tj. proporcije varijanse i sredine vremenske serija. Najpoznatiji pristup određivanja tipa transformacije jeste preko formule *Box-Cox* transformacije koja je data sa:

$$X_t^{(\lambda)} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(X_t^{\lambda}-1)}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ logX_t, & \lambda = 0 \end{array} \right\} \tag{3.72}$$

Odabir adekvatne vrednosti koeficijenta λ, određuje se ocenom koeficijenta metodom maksimalne verodostojnosti ili metodom najmanjih kvadrata. Za različite vrednosti parametra λ dobijamo različite transformacije vremenske serije:

$$X_t^{(\lambda)} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{X_t}, & \lambda = -1 \\ \frac{1}{\sqrt{X_t}}, & \lambda = -0.5 \\ logX_t, & \lambda = 0 \\ \sqrt{X_t}, & \lambda = 0.5 \\ X_t, & \lambda = 1 \end{array} \right\} \tag{3.73}$$

Kod ekonomskih vremenskih serija najčešća *Box-Cox*-ova transformacija je logaritamska transformacija ($\lambda = 0$) kojom se postiže stabilizacija varijanse, odnosno otklanja se nestacionarnost vremenske serije u varijansi.

Nestacionarnost u sredini (nivou) vremenske serije odnosi se na prisustvo trenda, odnosno vremenski zavisne sredine pri čemu se nivo serije tokom vremena povećava. Trend može biti deterministički ili stohastički. Ako se trend vremenske serije može izraziti u funkciji vremena onda je u pitanju determninistički trend. Deterministička funkcija vremena - trend koji se prilagođava podacima može biti linearnog, polinomijalnog, eksponecijalnog ili drugog tipa. Serija odstupanja, tzv *"gap"*, koja preostaje kada se od originalne serije opservacija oduzme ocenjena linija determinističkog trenda, predstavlja stacionarnu seriju. Ovu klasu stacionarnih procesa nazivamo *trend stacionarni procesi.* Za trend stacionarne procese karakteristično je da se autokorelaciona struktura ovih procesa može koristiti efikasno za kratkoročno prognoziranje, dok je kod dugoročnog prognoziranja karakteristično da je informacija o budućim vrednostima inkorporirana u sredini, tako da prošli i tekući događaji nemaju uticaj na dugoročnu prognozu ovih procesa. Ako diferenciranjem vremenske serije dobijamo stacionarnu seriju onda govorimo o stohastičkom trendu. Ovu klasu stacionarnih procesa nazivamo *diferencno stacionarni procesi.* Za klasu diferencno stacionarnih procesa karakteristično je da je dugoročna prognoza pod uticajem prethodnih događaja kroz akumuliranje šokova.

Proces $\{X_t\}$ prati *proces slučajnog hoda*(*random walk process*) ako zadovolja sledeću jednačinu:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.74}$$

ili u zapisu korišććenjem operatora docnje

$$(1 - B)X_t = \varepsilon_t \tag{3.75}$$

gde X_0 predstavlja početnu vrednost procesa i $\{\varepsilon_t\}$ predstavlja proces belog šuma. Ako ovaj proces predstavimo kao specijalan slučaj AR(1) procesa, tada na osnovu vrednosti koeficijenta $\phi_1 = 1$, sledi da proces slučajnog hoda ne zadovoljava uslove slabe stacionarnosti AR(1) procesa. Na osnovu prethodnog, proces slučajnog hoda nije slabo stacionaran, odnosno nestacionarnost procesa sledi iz prisustva jediničnog korena. Običnu autokorelacionu funkciju procesa slučajnog hoda karakterišu visoke neopadajuće vrednosti autokorelacionih koeficijenata po svim docnjama, dok parcijalna autokorelaciona funkcija uzima vrednost jedan na prvoj docnji, a na ostalim docnjama jednaka je nuli. Prva diferenca procesa slučajnog hoda predstavlja proces belog šuma, stoga autokorelaciona funkcija ima vrednost nula na svim docnjama. Ovaj proces se u ekonomiji koristi za opisivanje haotičnog kretanja cena akcija, odnosno kretanja cene robe na špekulativnom tržištu.

Proces $\{X_t\}$ prati *proces slučajnog hoda sa konstantom* (*random walk process with drift*) ako zadovolja sledeću jednačinu:

$$X_t = X_{t-1} + \theta_0 + \varepsilon_t \tag{3.76}$$

ili u zapisu korišćenjem operatora docnje

$$(1 - B)X_t = \theta_0 + \varepsilon_t \tag{3.77}$$

Na osnovu obične i parcijalne autokorelacione funkcije nije moguće odrediti da li je proces slučajnog hoda sa konstantom ili bez, međutim ova dva procesa moguće je razlikovati na osnovu običnog grafika vremenskih serija.

3.8 Autoregresioni integrisani proces pokretnih proseka (ARIMA)

Proces $\{X_t\}$ prati integrisani autoregresioni proces pokretnih proseka reda p i q, ARIMA(p,d,q), ako d puta diferencirana serija $(1-B)^d X_t$ prati stacionarni autoregresioni proces pokretnih proseka reda p i q, ARMA(p,q), i definiše se sledećim izrazom:

$$\phi_p(B)(1-B)^d X_t = \theta_0 + \theta_q(B)\varepsilon_t \tag{3.78}$$

gde su $\phi_p(B) = 1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-...-\phi_p B^p$ i $\theta_q(B) = 1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-...-\theta_q B^q$ AR i MA polinomi reda p i q, respektivno. Uslovi stacionarnosti i invertibilnosti navedenog procesa su ispunjeni ako se rešenja polinoma $\phi_p(B) = 0$ i $\theta_q(B) = 0$ nalaze van jediničnog krug i dodatno, navedeni polinomi nemaju zajedničkih rešenja. Izraz (3.78) sadrži i konstantu θ_0. Interpretacija konstante zavisi od reda diferenciranja. U slučaju kada je $d = 0$ proces je stacionaran i konstanta je u relaciji sa sredinom vremenske serije, dok za $d > 0$ prisustvo konstante ukazuje na prisustvo determinističkog trenda.

3.9 Modeli sezonskih vremenskih serija

Modeli sezonskih vremenskih serija predstavljaju uopštenje klase nesezonskih vremenskih serija. Sezonske vremenske serije karakterišu periodične fluktuacije čija je dužina trajanja manja od godinu dana sa ponavljanjem u jednakim vremenskim intervalima. Slično kao i kod vrste trenda, sezona može biti *deterministička* ili *stohastička*. Modeli sezonskih vremenskih serija obuhvataju međuzavisnost između opservacija za isti period (mesec, kvartal,..itd) uzastopnih godina. Modeliranje sezonskih vremenskih serija bez obuhvatanja njihovog sezonskog karaktera dovodi do odabira neoptimalnog modela sa značajno većim brojem parametara, u cilju obuhvatanja korelacije na većim docnjama karakterističnim za ovaj tip vremenskih serija. Zbog toga je značaj modela sezonskih vremenskih serija, u odabiru i primeni optimalnog ARIMA modela sa relativno malim brojem parametara koji će efikasno obuhvatiti sezonski karakter modeliranog procesa.

3.10 Sezonski autoregresioni integrisani proces pokretnih proseka (SARIMA)

Vremenske serije koje karaktrišu periodične fluktuacije do godinu dana sa ponavljanjem u jednakim vremenskim intervalima nazivaju se *sezonske vremenske serije*. Navedene periodične fluktuacije predstavljaju *period sezone* i označavaju se sa s. Period sezone se određuje u zavisnosti od frekvencije vremenske serije, stoga mesečne vremenske serije imaju period sezone $s = 12$, kvartalne serije $s = 4$, polugodišnje serije $s = 6$ i godišnje serije $s = 1$. Prisustvo sezone kod vremenskih serija lako se uočava na autokorelogramu vremenske serije čiji autokorelacioni koeficijenti na sezonskim docnjama imaju statistički značajno različite koeficijente od nule, pri čemu je primetno prigušeno opadanje navedenih autokorelacionih koeficijenata na sezonskim docnjama.

Opšti oblik klase sezonskih ARIMA procesa definiše se na sledeći način:

$$\phi(B)(1-B)^d(1-B^s)^D X_t = \theta(B)\varepsilon_t \tag{3.79}$$

gde su sa $\phi(B)$ i $\theta(B)$ označeni autoregresioni polinom i polinom pokretnih proseka, d i D predstavljaju operatore nesezonskog i sezonskog diferenciranja i s period sezone. Navedeni oblik klase sezonskih ARIMA procesa zhteva da bar jedan od navedenih polinoma bude reda s, da bi obuhvatio autokorelaciju na sezonskim docnjama, što u slučaju mesečnih vremenskih serija dovodi do neoptimalnog modela sa velikim brojem koeficijenata. Iz prethodno navedenog razloga $Box - Jenkins$ definisali su klasu multiplikativnih sezonskih ARIMA procesa.

Klasa multiplikativnih sezonskih ARIMA(p,d,q)$\times$(P,D,Q) procesa, definiše se na sledeći način:

$$(1-B)^d(1-B^s)^D\phi_p(B)\Phi_P(B^s)X_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)\varepsilon_t \tag{3.80}$$

gde su sa $\phi_p(B)$ i $\theta_q(B)$ definisani regularni autoregresioni polinom i polinom pokretnih proseka, sa $\Phi_P(B^s)$ i $\Theta_Q(B^s)$ sezonski autoregresioni polinom i polinom pokretnih proseka, d i D su operatori regularnog i sezonskog diferenciranja i s period sezone.

3.10.1 ″Vazduhoplovni model″

Najpoznatiji model iz klase multiplikativnih sezonskih autoregresionih integrisanih procesa pokretnih proseka je tzv. ″vazduhoplovni model″ (engl. *airline model*) SARIMA$(0,1,1)\times(0,1,1)_{12}$, objavljen u radu *Box-Jenkinsa* gde je analizirana vremenska serija broja prevezenih putnika u vazdušnom saobraćaju. Ovde navodimo osnovne osobine navedenog modela koji se često primenjuje u praksi.

″Vazduhoplovni″ model SARIMA$(0,1,1)\times(0,1,1)_{12}$ predstavljen u obliku multiplikativnog sezonskog modela dat je sledećim izrazom:

$$(1-B)(1-B^s)X_t = (1-\theta_1 B)(1-\Theta_1 B^s)\varepsilon_t \tag{3.81}$$

Autokovarijansa izraza $Z_t = (1-B-B^s+B^{s+1}) = (1-\theta_1 B-\Theta_1 B^s+\theta_1\Theta_1 B^{s+1})$ dobijenog množenjem binoma uz X_t i ε_t u izrazu (3.81) data je sa:

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E(Z_t Z_{t-k}) \\ &= E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \Theta_1\varepsilon_{t-s} + \theta_1\Theta_1\varepsilon_{t-s-1})\times \\ &(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-k-1} - \Theta_1\varepsilon_{t-s-k} + \theta_1\Theta_1\varepsilon_{t-s-1-k})]\end{aligned} \tag{3.82}$$

odakle sledi:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= (1+\theta_1^2)(1+\Theta_1^2)\sigma^2 \\ \gamma_1 &= -\theta_1(1+\Theta_1^2)\sigma^2 \\ \gamma_{s-1} &= \theta_1\Theta_1\sigma^2 \\ \gamma_s &= -\Theta_1(1+\theta_1^2)\sigma^2 \\ \gamma_{s+1} &= \theta_1\Theta_1\sigma^2\end{aligned} \tag{3.83}$$

gde su sve ostale autokovarijanse jednake nuli. Na osnovu autokovarijacione funkcije dobijamo autokorelacione koeficijente:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 1 \\ \rho_1 &= \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} \\ \rho_{s-1} &= \frac{\theta_1\Theta_1}{(1+\theta_1^2)(1+\Theta_1^2)} = \rho_{s+1} \\ \rho_s &= \frac{-\Theta_1}{1+\Theta_1^2}\end{aligned} \tag{3.84}$$

gde su svi ostali autokorelacioni koeficijenti jednaki nuli. Uslovi invertibilnosti slede iz uslova $|\theta_1| < 1$ i $|\Theta_1| < 1$. Varijansa ocenjenih uzoračkih autokorelacionih koeficijenata data je sa:

$$Var(\hat{\rho}_k) = \frac{1 + 2(\hat{\rho}_1^2 + \hat{\rho}_{s-1}^2 + \hat{\rho}_s^2 + \hat{\rho}_{s+1}^2)}{n}, \quad k > s+1 \tag{3.85}$$

3.11 Klasičan *Box-Jenkinsov* pristup

Klasičan *Box-Jenknisov* pristup modeliranju ARIMA procesa predstavlja iterativan proces koji se sastoji iz tri faze:

1) *Identifikacija* - ova faza obuhvata detaljnu analizu vremenske serije koja se modelira, što podrazumeva crtanje grafika, običnih i parcijalnih uzoračkih autokorleograma na osnovu kojih se zaključuje o stacionarnosti serije, odnosno nestacionarnosti, tipu nestacionarnosti. Faza identifikacije podrazumeva: određivanje potrebne transformacije u cilju stabilizacije varijanse, određivanje reda običnog i/ili sezonskog diferenciranja,

otklanjanje trenda, uključivanje konstante u model kada je red diferenciranja veći od 1 i izbor odgovarajućeg reda ARIMA procesa, odnosno određivanje veličina p i q. Na ovaj način dolazi se do izbora preliminarnih modela. Prema prvobitnom pristupu zaključivanje o redu i vrsti procesa zasniva se na poređenju običnih i parcijalnih uzoračkih autokorelograma sa izgledom i oblikom običnih i parcijalnih korelograma kod teorijskih ARIMA procesa.

2) *Ocenjivanje* - u ovoj fazi vrši se ocenjivanje modela, odnosno koeficijenata modela. Konačne ocene modela dobijaju se primenom metode momenata, iterativnog postupka kod metoda nelinearnih najmanjih kvadrata ili maksimalne verodostojnosti.

3) *Provera adekvatnosti* - ova faza predstavlja proveru adekvatnosti modela, koja se odnosi na proveru statističke značajnosti ocenjenih koeficijenata i pretpostvke da reziduali ocenjenog modela prate proces belog šuma. Ako model ne ispunjava navedene karakteristike i zaključi se da model nije adekvatan, tada se proces ponavlja i vrši se ponovna specifikacija modela, u suprotnom dati model se koristi u daljem prognoziranju.

U fazi identifikacije klasičnog *Box-Jenkinsovog* pristupa osim vizuelnog zaključivanja o (ne)stacionarnosti u nivou serije (trend ili diferencna stacionarnost) na osnovu grafika vremenske serije i običnih i parcijalnih uzoračkih autokorelograma, koriste se i statistički testovi stacionarnosti ili test prisustva jediničnih korena. Testovi jediničnih korena koji se najčešće koriste su DF test statistika (engl. *Dickey-Fuller test*) i prošireni ADF test (engl. *Augmented Dickey-Fuller test*). Kod ispitivanja (ne)stacionarnosti u varijansi koriste se BP test (engl. *Breusch-Pagan*) ili *White-ov* test (engl. *White*). Određivanje reda ARIMA procesa predstavlja krajnji korak u odabiru preliminarnih modela u okviru faze identifikacije. Prema prvobitnom pristupu ovaj korak se ogledao u poređenju uzoračkih običnih i parcijalnih autokorelograma sa teorijskim izgledom odgovarajućih autokorelograma. Obzirom da se ovakav pristup smatra subjektivnim, tj. dva različita analitičara mogu doći do različitog zaključka o redu istog modela, a u cilju eliminacije arbitrarnosti prvobitnog pristupa, pri izboru reda modela može se koristiti drugačiji pristup zasnovan na kriterijumima za određivanje reda modela.

U fazi ocenjivanja koeficijenata modela koristi se neka od metoda ocenjivanja kao što su: metod momenata, metod nelinearnih najmanjih kvadrata ili metod maksimalne verodostojnosti. Ocene metodom momenata obično se koriste za dobijanje početnih ocena u iterativnom postupku kod ocenjivanja koeficijenata modela primenom metode nelinearnih najmanjih kvadrata ili metode maksimalne verodostojnosti. Primenom metode običnih najmanjih kvadrata dobijaju se konzistentne i nepristrasne ocene kod autoregresionih modela (AR), dok kod ostalih modela stacionarnih vemenskih serija kao što su modeli pokretnih proseka (MA) ili autoregresionih procesi pokretnih procesa (ARMA) ocene primenom običnih najmanjih kvadrata su nekonzistentne i pristrasne. Zbog prethodno navedenih nedostataka u ocenjivanju nepoznatih koeficijenata metodom običnih najmanjih kvadrata, primenjuje se metod nelinernih najmanjih kvadrata. Ocena nepoznatih koeficijenata metodom nelinearnih najmanjih kvadrata zasniva se na minimizaciji uslovne sume kvadrata serije reziduala koja predstavlja funkciju nepoznatog koeficijenata primenom neke od metoda numeričke optimizacije. Metod maksimalne verodostojnosti je najčešće korišćen metod ocenjivanja koeficijenata ARMA modela, čija prednost se ogleda u sledećim karakteristikama: koristi sve raspoložive informacije sadržane u vremenskim serijama, mogu se koristiti asimptotski rezultati koji važe pod relativno opštim uslovima i primeniti na relativno kratkim vremenskim serijama.

Poslednja faza se odnosi na proveru adekvatnosti modela. Provera adekvatnosti modela se zasniva na proveri reziduala ocenjenog modela $\{\varepsilon_t\}$ za koje se pretpostavlja da predstavljaju proces belog šuma, što znači da su greške modela ε_t nekorelisane, normalno raspodeljene sa sredinom nula i konstantnom varijansom. Vizuelno zaključivanje se zasniva na crtanju uzoračkog, običnog i parcijalnog autokorelograma, crtanju histograma i $''QQ''$ grafika. Pored vizuelnog zaključivanja koriste se i statistički testovi koji na osnovu ocenjenih uzoračkih, običnih i parcijalnih autokorelacionih koeficijenata, testiraju hipotezu o vrednosti pojedinačnih ili svih autokorelacionih koeficijenata. Test hipoteza pretpostavlja da reziduali predstavljaju proces belog šuma čiji su autokorelacioni koeficijenti statistički jednaki nuli na svim docnjama. Najpoznatiji statistički testovi koji testiraju statističku značajnost svih autokorelacionih koeficijenata su *Box-Pierceova* test statistika i *modifikovana Box-Pierceova* test statistika (ili *Ljung-Boxova* test statistika).

3.12 Informacioni kriterijumi

Pri određivanje reda autoregresionog procesa pokretnih proseka ARMA(p,q) koristi se pristup koji se zasniva na minimizaciji informacionog kriterijuma. Različiti informacioni kriterijumi dobijaju se različitim izborom kaznene funkcije $f(n)$ u izrazu definisanim preko sledeće funkcije:

$$\xi(p,q) = ln\ \hat{\sigma}^2_{p,q} + \frac{p+q}{n} f(n) \tag{3.86}$$

gde je $\hat{\sigma}^2_{p,q}$ ocena varijanse ARMA(p,q) modela metodom maksimalne verodostojnosti, a $f(n)$ predstavlja kaznenu funkciju (engl. *penalty function*).

Datom funkcijom definisana su dva kontradiktorna zahteva. Prvi sabirak u izrazu (3.86) predstavlja ocenu varijanse modela i vrednost ovog sabirka će opadati povećanjem broja parametara u modelu, dok će se istovremeno vrednost drugog sabirka u istom izrazu povećavati. Obzirom da je cilj minimizacija funkcije $\xi(p,q)$, značajnu ulogu u izrazu ima izbor kaznene funkcije $f(n)$. Izborom funkcije $f(n) = 2$ dobijamo *Akaikeov* infomacioni kriterijum (*Akaike information criterion (AIC(p,q))*). Ako kaznenu funkciju definišemo kao $f(n) = ln(n)$ dobijamo *Bayesov* infomacioni kriterijum (*Bayesian information criterion (BIC(p,q))* ili *Schwarz information criterion (SIC(p,q), SBC(p,q), SBIC(p,q))*). Izborom kaznene funkcije $f(n) = kln(ln(n))$ gde je k konstanta, $k \geq 2$, definiše se *Hannan i Quinn* informacioni kriterijum (*Hannan and Quinn information criterion HQ(p,q)*).

Osnovna razlika između *AIC(p,q)* i *BIC(p,q)* kriterijuma je da izborom *AIC* kriterijuma dobijamo precizniji model u predviđanju, dok izborom *BIC* kriterijuma dobijamo optimalniji model koji će imati lošije prediktivne osobine, ali specifikacija modela će biti tačnija. *HQ(p,q)* informacioni kriterijum se nalazi između prethodna dva, po osobinama.

3.13 Testovi običnih jediničnih korena

Testove jediničnih korena kod ARIMA(p,d,q) procesa definisali su *Dickey* i *Fuller* rešavajući tzv. problem testiranja jediničnog korena (engl. *unit-root testing problem*). DF test statistika se definiše preko autoregresionog procesa prvog reda. DF test ima nekoliko modifikacija definisanih u zavisnosti od vrste procesa koji posmatrana vremenska serija prati. AR(1) model definisan preko opertora docnje može se predstaviti na sledeći način:

$$\Delta X_t = (\rho - 1)X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.87}$$

gde je $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$. DF test statistika ima nestandardan *t-odnos* i definiše se kao odnos ocene koeficijenta $(\rho - 1)$ i njegove standardne greške metodom najmanjih kvadrata. Nulta hipoteza $H_0 : \rho = 1$ pretpostavlja da je dati proces slučajnog hoda, nasuprot alternativnoj hipotezi proces je stacionaran $H_1 : \rho < 1$.

Ako posmatramo proces slučajnog hoda sa konstantom (engl. *drift*), model koji posmatramo definiše se na sledeći način:

$$\Delta X_t = \alpha_0 + (\rho - 1)X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.88}$$

Nulta hipoteza pretpostavlja proces slučajnog hoda sa konstantom, dok je alternativna hipoteza pretpostavlja da je proces stacionaran.

Ako posmatramo proces slučajnog hoda sa trendom, model koji posmatramo definiše se na sledeći način:

$$\Delta X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + (\rho - 1)X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.89}$$

Nulta hipoteza pretpostavlja diferencnu stacionarnost, nasuprot alternativnoj hipotezi koja pretpostavlja da je proces trend-stacionaran. DF test pretpostavlja da serija reziduala predstavlja proces belog šuma, što kod većine vremenskih serija nije ispunjeno. Zbog prethodnog nedostatka konstruisan je prošireni DF test, tzv. *ADF(p)* test koji uključuje dodatne docnje početnog modela za koji se pretpostavlja da ispunjava uslov da su reziduali ocenjenog modela proces belog šuma. *ADF(p)* test pretpostavlja sledeći model:

$$\Delta X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + (\rho - 1)X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \tag{3.90}$$

gde je p broj zavisnih promenljivih sa docnjom, pri čemu se broj p određuje tako da serija reziduala ocenjenog modela predstavlja proces belog šuma. *ADF(p)* test statistika predstavlja nestandardni *t-odnos* ocene koeficijenta $(\rho - 1)$ uz X_{t-i} i njegove standardne greške. Ako na osnovu *ADF(p)* testa za posmatranu vremensku seriju ne odbacimo nultu hipotezu, tada pretpostavljamo prisustvo drugog jediničnog korena i primenjujemo *ADF(p)* test kao u izrazu (3.90) na diferenciranu seriju.

3.14 Testovi sezonskih jediničnih korena

U modeliranju vremenskih serija kod kojih je uočeno prisustvo sezonalnosti, neophodno je primeniti test sezonskih jediničnih korena u cilju utvrđivanja stacionarnosti navedene serije.

Vremenska serija može sadržavati *determinističku* ili *stohastičku* sezonu. Vremenska serija koja sadrži *determinističku* sezonu modelira se primenom sledećeg modela:

$$X_t = \beta_1 D_{1t} + \beta_2 D_{2t} + ... + \beta_s D_{st} + \varepsilon_t \tag{3.91}$$

gde su $D_{jt}, j = 1, 2, ..., s$ sezonske veštačke promenljive (engl. *dummy variables*) koje uzimaju vrednost 1 u j-tom periodu,a inače nulu. Koeficijenti β_j mere efekte j-tog perioda na vremensku seriju.

Vremenska serija koja sadrži *stohastičku* sezonu data je sledećim izrazom:

$$X_t = X_{t-s} + \varepsilon_t \tag{3.92}$$

Iz prethodnog sledi da je serija sezonskih diferenci stacionarna serija. Vremenska serija sa prisustvom deteminističke sezone pokazuje stabilan uticaj sezone u posmatranom periodu, dok kod stohastičke sezone uticaj sezone na posmatranu vremensku seriju variara tokom vremena.

Pretpostavka testova sezonskih jediničnih korena je da posmatrana vremenska serija sadrži i determinističku i stohastičku sezonu. U cilju otklanjanja determinističke sezone neophodno je prvo modelirati vremensku seriju modelom datim u izrazu (3.91), a zatim posmatrati reziduale ocenjenog modela. U nastavku se pretpostavlja da je deterministička sezona uklonjena iz posmatrane vremenske serije.

Kod testiranja prisustva sezonskih jediničnih korena primenjuje se *Dickey-Fullerov test sezonske integrisanosti* (*DFSI*) koji se zasniva na ¨t-odnosu¨ ocene koeficijenta α u sledećem modelu:

$$\Delta_s X_t = \alpha X_{t-s} + \varepsilon_t \tag{3.93}$$

Nulta hipoteza pretpostavlja $H_0 : X_t \ I(0,1)$ odnosno serija je sezonski nestacionarna i potrebno je sezonsko diferenciranje, protiv alternativne hipoteze $H_1 : X_t \ I(0,0)$ koja pretpostavlja da je serija nije potrebno diferencirati. Validnost testa se dokazuje proverom reziduala ocenjenog modela 3.93 za koje se pretpostavlja da predstavljaju proces belog šuma. U slučaju da prethodna pretpostavka nije ispunjena, koristi se *prošireni Dickey-Fullerov test sezonske integrisanosti* (*ADFSI*) koji se zasniva na ¨t-odnosu¨ ocene koeficijenta α u sledećem modelu:

$$\Delta_s X_t = \alpha X_{t-s} + \sum_{i=1}^{p} \xi_i \Delta_s X_{t-i} + \varepsilon_t \tag{3.94}$$

Testovi sezonskih jediničnih korena *DFSI* i *ADFSI* predstavljaju uopštavanje odnosno modifikaciju testova običnih jediničnih korena *DF* i *ADF* i kao takvi se koriste kao gruba aproksimacija testova sezonske integrisanosti.

Drugi test koji predstavlja potpuno uopštavanje *Dickey-Fullerovog* testa je *Dickey-Hasza-Fullerov* (*DHF*) test koji su definisali istoimeni autori, zasnovan je na ¨t-odnosu¨ ocene koeficijenta α u regresionom modelu:

$$\Delta_s X_t = \alpha Y_{t-s} + \sum_{i=1}^{p} \xi_i \Delta_s X_{t-i} + \varepsilon_t \tag{3.95}$$

gde se regresor Y_{t-s} definiše na sledeći način:

$$Y_t = X_t - \sum_{i=1}^{p} \hat{\zeta}_i X_{t-i} \tag{3.96}$$

gde su koeficijenti $\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, ..., \hat{\zeta}_p$ ocenjeni metodom najmanjih kvadrata u regresiji $\Delta_s X_t$ na sopstvene prethodne vrednosti:

$$\Delta_s X_t = \sum_{i=1}^{p} \zeta_i \Delta_s X_{t-i} + \eta_t \tag{3.97}$$

3.15 Testovi serijske korelisanosti reziduala

Testovi serijske korelacije ili autokorelacije reziduala koriste se za proveru adekvatnosti izabranog modela vremenske serije. Testiranje ocenjenih uzoračkih, običnih ili parcijalnih autokorelacionih koeficijenata i proverom da li su svi autokorelacioni koeficijenti statistički jednaki nuli dolazimo do statističke potvrde o odsustvu autokorelacije reziduala, odnosno serijske korelisanosti reziduala. Najpoznatiji statistički testovi serijske korelisanosti reziduala su *Box-Pierceova* test statistika i *modifikovana Box-Pierceova* test statistika (ili *Ljung-Boxova* test statistika).

Box-Pierceova test statistika data je sledećom formulom:

$$Q = n \sum_{i=1}^{K} \hat{\rho}_i^2 \tag{3.98}$$

Osnovna nulta hipoteza $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_K = 0$ pretpostavlja da su svi autokorelacioni koeficijenti jednaku nuli, protiv altrnativne hipoteze koja pretpostavlja da je bar jedan autokorelacioni koeficijent različit od nule. *Box* i *Pierce*, autori test statistike, pokazali su da za izabrani ARMA(p,q) model i dovoljno velik uzorak tj. n, test statistika Q ima aproksimativno χ^2-raspored sa $K - p - q$ stepeni slobode, ukoliko model sadrži i konstantu tada je broj stepeni slobode $K - p - q - 1$. *Ljung* i *Box*, autori modifikovane *Box-Pierceove* test statistike pokazali su da i za vrednosti $n = 100$, aproksimacija χ^2-rasporeda nije zadovoljavajuća. Stoga, *Ljung* i *Box* su predložili test statistiku koja ima bolju aproksimaciju χ^2-rasporeda. Modifikovana *Box-Pierceova* ili *Ljung-Box* statistika data je sledećom formulom:

$$Q = n(n+2) \sum_{i=1}^{K} \frac{\hat{\rho}_i^2}{n-k} \tag{3.99}$$

3.16 Mere kvaliteta prognoza

Mere kvaliteta prognoza, odnosno greške merenja predstavljaju sumarne statistke na osnovu kojih zaključujemo o tačnosti prognoza izabranog modela. U nastavku su date najčešće korišćene standardne mere kvaliteta prognoza.

Srednje apsolutna greška reziduala e_t (engl. *Mean Absolute Error*) data je sledećim izrazom:

$$MAE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|e_t| \tag{3.100}$$

Srednje kvadratna greška reziduala e_t (engl. *Mean Square Error*) data je sledećim izrazom:

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}e_t^2 \tag{3.101}$$

Koren srednje kvadratne greška reziduala e_t (engl. *Root Mean Square Error*) data je sledećim izrazom:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}e_t^2} \tag{3.102}$$

4 Razvoj SARIMA modela indeksa potrošačkih cena

U ovom delu prikazani su rezultati rada. Prognozirani su podindeksi potrošačkih cena, kao i ukupan indeks potrošačkih cena sezonskim ARIMA procesima. Cilj ovog rada je da se proveri da li se indeks potrošačkih cena može uspešno modelirati sezonskim ARIMA procesima, kao i da li se pognoziranjem svakog pojedinačnog podindeksa potrošačkih cena, a zatim agregiranjem dobijenih prognoza može dobiti bolje predviđanje inflacije mereno indeksom potrošačkih cena u odnosu na prognoziranje ukupnog indeksa potrošačkih cena u kratkom roku. U prognoziranju inflacije često se koriste strukturni modeli zasnovani na ekonomskoj logici koji se obično opisuju kompleksnim sistemima sastavljenim od velikog broja jednačina. S druge strane, statistički modeli kao što su univarijantni ARIMA modeli koji se zasnivaju na prethodnim vrednostima vremenskih serija, iako imaju veoma malo ekonomske intuicije, mogu relativno dobro da predvide buduće kretanje vremenske serije. Ukupan indeks potrošačkih cena može se predstaviti kao linearna kombinacija podindeksa na sledeći način:

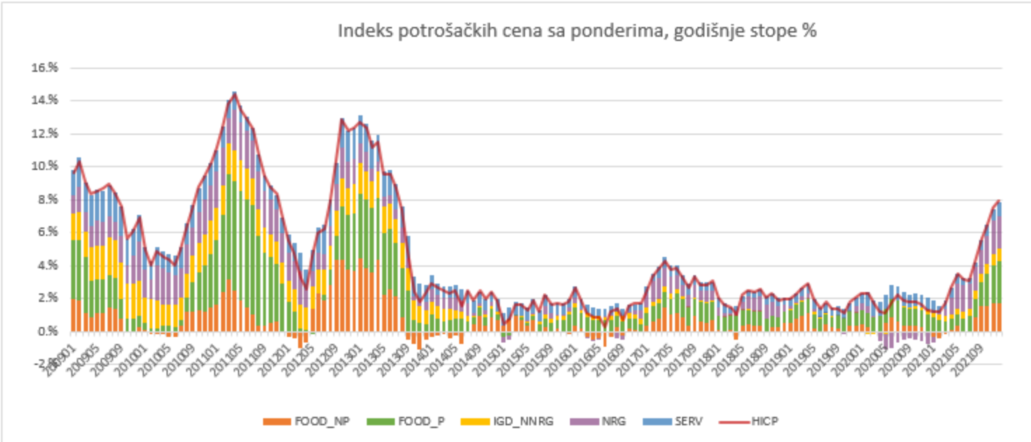
$$IPC_t = \sum_{i=1}^{5} \omega_i IPC_{it}, \qquad \omega_i > 0,\ \sum_{i=1}^{5} \omega_i = 1 \tag{4.1}$$

gde je IPC_{it} nivo i-te komponente ukupnog indeksa potrošačkih cena u trenutku t i ω_i, $i = 1, ..., 5$ odgovarajući ponderi. Obzirom na prethodnu reprezentaciju indeksa potrošačkih cena, podindekse potrošačkih cena moguće je pojedinačno modelirati sezonskim ARIMA procesima.

Vremenske serije indeksa potrošačkih cena koji predstavljaju inpute u izradi ovog rada su preuzeti iz Evropske centralne statističke baze *Eurostat*. *Eurostat* objavljuje reprezentaciju indeksa potrošačkih cena na 5 podindeksa koji predstavljaju homogenije grupe proizvoda i kao takve su pogodnije za modeliranje. Koristimo bazni indeks potrošačkih cena gde je bazna godina 2015 (2015=100).

U modeliranju indeksa potrošačkih cena koristili smo modifikovan *"Box-Jenkinsov"* trostepeni pristup i to u delu identifikacije modela u cilju otklanjanja arbitrarnosti i subjektivnosti klasičnog *"Box-Jenkinsovog"* pristupa. Prethodno podrazumeva da je primenjen delimično automatizovan pristup (kao u [5][6]) pri identifikaciji preliminarnih modela.

[6] vidi str. br. 4



Grafik 10: Indeks potrošačkih cena sa ponderima, godišnje stope %
Izvor: Originalni grafik autora na bazi *Eurostat* podataka

U radu je korišćen programski jezik *R* [8] i statistički paket *astsa* [7] .

U narednim delovima rada detaljno su opisani koraci preduzeti u modeliranju indeksa potrošačkih cena.

4.1 Priprema podataka i identifikacija preliminarnih modela

Posmatrani period obuhvata 2008-2021 i podeljen je na razvojni i testni deo (engl.″train and test″), pri čemu razvojni deo obuhvata period 2009-2019, dok testni deo obuhvata poslednje dve godine 2020-2021. Horizont prognoziranja je 12 meseci. Obzirom da se metodologija obračuna indeksa potrošačkih cena primenjuje od 2009. godine, iako u radu koristimo seriju od 2008. godine, posmatrani period je od 2009. godine nakon primene običnog i sezonskog diferenciranja serija.

Na sve serije indeksa i podindeksa potrošačkih cena primenjena je logaritamska transformacija. U cilju dobijanja stacionarnih vremenskih serija indeksa i podindeksa potrošačkih cena, primenjen je isti pristup tj. serije indeksa i podindeksa potrošačkih cena su obično i sezonski diferencirane (d=1 i D=1). Obzirom da primena običnog i sezonskog diferenciranja na sve serije indeksa i podindeksa može dovesti do prediferenciranja serija, navodimo empirijske rezultate prikazane u radu [9] gde je pokazano da prediferenciranje ne dovodi

[7] *astsa*: Applied Statistical Time Series Analysis; autori: David Stoffer and Nicky Poison, 2022

do značajnije deterioracije rezultata. Serije indeksa i podindeksa potrošačkih cena su prošle testove običnih i sezonskih jediničnih korena, na osnovu čega potvrđujemo da obično i sezonski diferencirane serije zadovoljavaju uslov stacionarnosti. Na serijama indeksa i podindeksa potrošačkih cena sproveden je test stacionarnosti, odnosno test prisustva običnih i sezonskih jediničnih korena, pri čemu su korišćene funkcije $forecast :: ndiffs$ i $forecast :: nsdiffs$ koje procenjuju koliko puta je potrebno diferencirati seriju u cilju postizanja stacionarnosti. Primenom $forecast :: ndiffs$ (korišćen je ADF test[8]) na sve serije indeksa i podindeksa koje smo prethodno obično diferencirali, dobijamo da serije nije potrebno drugi put diferencirati na nivou značajnosti od 5%. Primenom $forecast :: nsdiffs$ (korišćen je $Hegy$ test[9]) na sve serije indeksa i podindeksa koje smo prethodno sezonski diferencirali, dobijamo da serije nije potrebno drugi put sezonski diferencirati na nivou značajnosti od 5%.

$Indikator$	$Min.$	$1stQu.$	$Median$	$Mean$	$3rdQu.$	$Max.$	$St.dev.$
IPC	68.4	86.2	100.2	97	107.2	119.5	13.4
IPC_X_ND	65.8	81.2	94.7	91.8	100.8	112.6	12.2
$HRANA\_NP$	69	84.1	99.5	98.7	110.7	136.3	17.1
$HRANA\_P$	66.2	84.4	100.1	97.8	110	127.4	16.5
IND_NNRG	72.9	90.1	99.9	95.7	102.1	106.9	9.1
NRG	63	90.6	99.7	97.4	107.6	121.5	14.1
ELC_GAS	66	84.5	98.4	96.3	108.8	120.7	15.6
USL	70	85.7	100.2	97.1	107.5	117.6	13
RB	68	86.3	100.3	96.9	107.2	120	13.5

Tabela 2: Deskriptivne statistike[10]
Izvor: *Eurostat*

U sledećem koraku, nakon dobijanja stacionarnih serija ukupnog indeksa i podindeksa potrošačkih cena, primenjujemo modifikovani *"Box-Jenkinsov"* pristup u cilju odabira preliminarnih modela. Ovaj pristup podrazumeva identifikaciju modela i ocenjivanje modela primenom automatizovanog pristupa koji je sličan pristupu opisanom u radu [5]. Nedostatak klasičnog *"Box-Jenkinsovog"* pristupa ogleda se u arbitrarnosti i subjektivnosti u zaključivanju o konačnom modelu, obzirom da se u identifikaciji preliminarnih modela i određivanju broja parametara u modelu zaključuje na osnovu teorijskih običnih i parcijalnih autokorelograma, odnosno poređenju izgleda uzoračkih autokorelograma sa teorijskim. Modifikovani pristup podrazumeva automa-

[8] *Augmented Dickey-Fuller test*
[9] *Hylleberg, Engle, Granger and Yoo (1990) test*
[10] Dužina serija obuhvata period od januara 2009. godine do decembra 2021. godine

tizaciju ovog procesa i primenu informacionih kriterijuma u odabiru preliminarnih modela i na ovaj način otklanja pomenute nedostatke klasičnog pristupa. Automatizacija procesa podrazumeva ocenjivanje svih modela serija ukupnog indeksa i podindeksa potrošačkih cena $(p, 1, q) \times (P, 1, Q)$ za vrednosti običnih nesezonskih parametara $p, q \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i sezonskih parametara $P, Q \in \{0, 1\}$. Za svaku seriju dobijeni modeli su rangirani na osnovu statistike *BIC* (*Bayesian information criterion*) informacionog kriterijuma. Konkretnije, za svaku seriju definisan je $SARIMA(p, 1, q) \times (P, 1, Q)$ model za $p, q \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i $P, Q \in \{0, 1\}$, a zatim je izračunata vrednosti *BIC* statistike i izvršeno je rangiranje modela na osnovu *BIC* statistike, počevši od modela sa najnižom vrednosti statistike. Nekoliko modela sa najnižim vrednostima statistike informacionog kriterijuma *BIC* je prošlo dalja ispitivanja u cilju odabira konačnog modela. Dalja ispitivanja modela podrazumevaju proveru autokorelacijske strukture reziduala, stabilnost i značajnost parametara preliminarnih modela, kao i *out-of-sample* karakteristika. Pri proveri autokorelacijske strukture reziduala primenjen je*Ljung-Box* test. Obzirom da su u pitanju finansijske serije primenjen je *treshold* koji dozvoljava da model može da ima do tri autokorelaciona koeficijenta statistički različita od nule. *"Pri ocenjivanju velikog broja koeficjenata može se pokazati statistički značajnim barem jedan od njih i u slučaju kada je on u populaciji zaista jednak nuli. U tom slučaju taj populacioni koeficijent možemo tretirati kao da je jednak nuli, pogotovo ako se javlja na visokim docnjama"* [11].

Postupak procene stabilnosti parametara modela izveden je na sledeći način. Za svaku seriju indeksa potrošačkih cena ocenjeni su parametri modela na podacima od januara 2009. godine do decembra 2019. godine, dok je period od januara 2020. godine do decembra 2020. godine korišćen za procenu stabilnosti modela indeksa potrošačkih cena. U prvom koraku ocenjeni su modeli na istoriji od januara 2009. do decembra 2019. U sledećem koraku u model smo dodali podatak iz januara 2020. godine i zatim ponovo ocenili model. Ovaj postupak smo primenili za narednih 12 opservacija i zatim doneli zaključak o stabilnosti i značajnosti parametara modela. Postupak uključivanja dodatnih opservacija u model i ponovno ocenjivanje istog modela na produženoj istoriji karakterističan je za modele ovog tipa, u cilju provere stabilnosti modela. U nastavku, za svaku seriju ukupnog indeksa i podindeksa potrošačkih cena, dati su preliminarni modeli sa najnižim vrednostima *BIC* statistika. Modeli koji zadovoljavaju sve dijagnostičke testove (autokorelacijska struktura reziduala, stabilnost i značajnost parametara) označeni su podebljanim fontom.

U cilju kreiranja dodatnih modela koji će biti opisani u nastavku, pored zva-

[11] vidi str. br. 109 u [2]

ničnih 5 podindeksa potrošačkih cena ocenjeni su i modeli serija ukupnog indeksa potrošačkih cena bez naftnih derivata (*IPC_X_ND*) i serija električna energija i gas (*ELC_GAS*). Prikazani modeli obuhvataju sledeće serije indeksa potrošačkih cena: ukupan indeks potrošačkih cena (*IPC*), ukupan indeks potrošačkih cena bez naftnih derivata (*IPC_X_ND*), industrijska neprerađena hrana (*HRANA_NP*), industrijska prerađena hrana (*HRANA_P*), industrijski proizvodi bez energije (*IND_NNRG*), električna energija i gas (*ELC_GAS*), energija (*NRG*), usluge (*USL*) i roba (*RB*).

No	*IPC*		*IPC_X_ND*	
	Model	*BIC*	*Model*	*BIC*
1	**(1,1,0)×(0,1,1)**	**- 7.19**	**(0,1,1)×(1,1,1)**	**- 6.84**
2	**(0,1,1)×(0,1,1)**	**- 7.17**	$(1,1,0)\times(1,1,1)$	-6.84
3	$(1,1,1)\times(0,1,1)$	-7.16	$(1,1,1)\times(1,1,1)$	-6.82
4	$(0,1,0)\times(1,1,1)$	-7.10	**(0,1,1)×(0,1,1)**	**- 6.81**
5	$(2,1,3)\times(0,1,1)$	-7.07	**(1,1,0)×(0,1,1)**	**- 6.81**

Tabela 3: Preliminarni modeli serija *IPC* i *IPC_X_ND*
Izvor: Sopstveni proračuni autora

Kod serije ukupnog indeksa potrošačkih cena (*IPC*) od top pet modela dijagnostičke testove prolaze modeli (1,1,0)×(0,1,1) i (0,1,1)×(0,1,1), dok preostali modeli ne prolaze navedene dijagnostičke testove. Model (1,1,1)×(0,1,1) nema statistički značajne parametre, dok preostali modeli ne zadovoljavaju uslov autokorelacijske strukture reziduala. Kod serije ukupnog indeksa potrošačkih cena bez naftnih derivata modeli koji zadovoljavaju sve dijagnostičke testove su (0,1,1)×(1,1,1), (0,1,1)×(0,1,1) i (1,1,0)×(0,1,1). Preostali modeli (0,1,1)×(0,1,1) i (1,1,0)×(0,1,1) ne prolaze dijagnostičke testove jer ne ispunjavaju uslov autokorelacijske strukture reziduala.

No	*HRANA_NP*		*HRANA_P*	
	Model	*BIC*	*Model*	*BIC*
1	**(0,1,0)×(0,1,1)**	**- 4.25**	**(1,1,0)×(0,1,1)**	**- 6.58**
2	**(1,1,1)×(0,1,1)**	**- 4.18**	**(1,1,1)×(0,1,1)**	**- 6.56**
3	$(0,1,0)\times(1,1,0)$	-4.10	**(2,1,3)×(0,1,1)**	**- 6.56**
4	$(1,1,1)\times(1,1,0)$	-4.07	**(2,1,2)×(0,1,1)**	**- 6.54**
5	$(3,1,3)\times(1,1,0)$	-3.98	$(0,1,2)\times(0,1,1)$	-6.53

Tabela 4: Preliminarni modeli serija *HRANA_NP* i *HRANA_P*[12]
Izvor: Sopstveni proračuni autora

Modeli serije podindeksa potrošačkih cena - neprerađena hrana (*HRANA_NP*) koji ispunjavaju sve dijagnostičke testove su (0,1,0)×(0,1,1) i (1,1,1)×(0,1,1). Preostali modeli ne zadovoljavaju uslov autokorelacijske strukture reziduala. Modeli serije podindeksa potrošačkih cena - prerađena hrana (*HRANA_P*) zadovoljavaju sve dijagnostičke testove, osim poslednjeg od top pet modela (0,1,2)×(0,1,1) koji ne zadovoljava uslov autokorelacijske strukture reziduala.

No	*IND_NNRG*		*ELC_GAS*	
	Model	*BIC*	*Model*	*BIC*
1	$(1,1,1) \times (0,1,1)$	-8.13	**(0,1,0)×(0,1,1)**	**- 5.65**
2	**(0,1,0)×(0,1,1)**	**- 8.09**	$(2,1,2) \times (0,1,1)$	-5.57
3	**(0,1,0)×(1,1,0)**	**- 8.08**	**(0,1,0)×(1,1,0)**	**- 5.53**
4	$(1,1,1) \times (1,1,0)$	-8.07	$(3,1,3) \times (0,1,1)$	-5.52
5	**(1,1,2)×(1,1,0)**	**- 8.07**	**(1,1,1)×(1,1,0)**	**- 5.48**

Tabela 5: Preliminarni modeli serija *IND_NNRG* i *ELC_GAS*
Izvor: Sopstveni proračuni autora

Modeli serije podindeksa potrošačkih cena - industrijski proizvodi bez energije (*IND_NNRG*) zadovoljavaju dijagnostičke testove, osim modela (1,1,1)× (0,1,1) i (1,1,1)×(1,1,0) koji ne zadovoljavaju uslov autokorelacijske strukture reziduala. Modeli serije podindeksa potrošačkih cena - električna energija i gas (*ELC_GAS*) koji zadovoljavaju sve dijagnostičke testove su (0,1,0)×(0,1,1), (0,1,0)×(1,1,0) i (1,1,1)×(1,1,0). Modeli (2,1,2)×(0,1,1) i (3,1,3)×(0,1,1) pokazuje nestabilnost parametara modela pri ponovnom ocenjivanju na produženoj istoriji.

No	*NRG*		*USL*	
	Model	*BIC*	*Model*	*BIC*
1	**(0,1,0)×(0,1,1)**	**- 5.75**	**(0,1,0)×(0,1,1)**	**- 7.77**
2	$(2,1,2) \times (0,1,1)$	-5.70	**(0,1,0)×(1,1,0)**	**- 7.76**
3	$(3,1,3) \times (0,1,1)$	-5.65	$(0,1,0) \times (0,1,0)$	-7.71
4	**(0,1,0)×(1,1,0)**	**- 5.61**	$(1,1,1) \times (0,1,1)$	-7.71
5	$(2,1,2) \times (1,1,0)$	-5.57	$(2,1,2) \times (0,1,1)$	-7.69

Tabela 6: Preliminarni modeli serija *NRG* i *USL*
Izvor: Sopstveni proračuni autora

[12]Za kreiranje modela podindeksa prerađene hrane *HRANA_P* korišćene su veštačke varijable (engl. *dummy variables*; uzimaju vrednost 1 u konkretnom trenutku, inače 0) za istorijske vrednosti opservacija oktobar 2012. godine i oktobar 2013. godine

Modeli serije podindeksa potrošačkih cena - energija (*NRG*) označeni sa (0,1,0)×(0,1,1) i (0,1,0)×(1,1,0) zadovoljavaju dijagnostičke testove, dok preostali modeli ne zadovoljavaju uslov stabilnosti i značajnosti parametara modela. Modeli serije podindeksa potrošačkih cena - usluge (*USL*) koji zadovoljavaju sve dijagnostičke testove su (0,1,0)×(0,1,1) i (0,1,0)×(1,1,0). Preostali modeli ne zadovoljavaju uslov stabilnosti i značajnost parametara modela.

No	*RB*	
	Model	*BIC*
1	**(1,1,0)×(0,1,1)**	**- 6.83**
2	**(0,1,1)×(0,1,1)**	**- 6.82**
3	$(0,1,0) \times (0,1,1)$	-6.76
4	**(1,1,2)×(0,1,1)**	**- 6.76**
5	**(2,1,3)×(0,1,1)**	**- 6.75**

Tabela 7: Preliminarni modeli serije *RB*
Izvor: Sopstveni proračuni autora

Modeli serije podindeksa potrošačkih cena - roba (*RB*) prolaze sve dijagnostičke testove, osim modela (0,1,0)×(0,1,1) koji ne ispunjava uslov autokorelacijske strukture reziduala.

4.2 Određivanje finalnih modela indeksa i podindeksa potrošačkih cena

U prethodnom delu prikazani su preliminarni modeli koji zadovoljavaju dijagnostičke testove. Pri određivanju finalnih modela, pored dijagnostičkih testova modeli moraju da imaju zadovoljavajuće *out-of-sample* karakteristike predviđanja. Dakle, posmatramo modele u periodu prognoziranja i na osnovu mera kvaliteta prognoza zaključujemo o finalnom modelu posmatrane serije ukupnog indeksa ili podindeksa potrošačkih cena. U nastavku je opisan postupak poređenja prognoziranih i ostvarenih vrednosti posmatrane serije indeksa potrošačkih cena.

Za svaku seriju indeksa potrošačkih cena ocenjeni su parametri modela na podacima od januara 2009. godine do decembra 2019. godine, dok je period od januara 2020. godine do decembra 2021. godine korišćen za prognoziranje i poređenje dobijenih prognoza sa ostvarenim vrednostima ukupnog indeksa potrošačkih cena. Postupak prognoziranja svakog pojedinačnog indeksa i poređenja sa ostvarenim vrednostima istih, u cilju određivanja finalnih modela, izvedeno je na sledeći način. Serija indeksa potrošačkih cena je prognozirana za period januar 2019. godine do decembra 2019. godine (12 mesečnih prognoza) zatim je prva opservacija od 12 mesečnih prognoza stavljena u seriju jedan korak unapred, druga opservacija u seriju dva koraka unapred, i tako sve do dvanaeste opservacije. U sledećem koraku u model smo dodali podatak za januar 2019. godine, zatim ponovo ocenili isti model i prognozirali seriju u periodu od februara 2019. godine do januar 2020. godine. Dobijene prognoze su uključene na drugo mesto u serije jedan korak unapred, dva koraka unapred,...,dvanaest koraka unapred na prethodno opisan način. Na ovaj način smo formirali 12 pripadajućih serija dobijenih kao prognoze za 1 mesec unapred, i sve do 12 meseci unapred, koje možemo uporediti sa ostvarenim vrednostima. Prilikom odabira finalnog modela koristili smo meru kvaliteta prognoza koren srednje kvadratne greške (RMSE).

Poštujući princip ekonomičnosti i *out-of-sample* karakteristika modela, u tabeli u nastavku su prikazani finalni modeli serije ukupnog indeksa i podindeksa potrošačkih cena.

No	*Serija*	*Model*
1	*IPC*	**(0,1,1)×(0,1,1)**
2	*IPC_X_ND*	**(0,1,1)×(0,1,1)**
3	*HRANA_NP*	**(0,1,0)×(0,1,1)**
4	*HRANA_P*	**(1,1,0)×(0,1,1)**
5	*IND_NNRG*	**(0,1,0)×(0,1,1)**
6	*ELC_GAS*	**(1,1,1)×(1,1,0)**
7	*NRG*	**(0,1,0)×(0,1,1)**
8	*USL*	**(0,1,0)×(0,1,1)**
9	*RB*	**(0,1,1)×(0,1,1)**

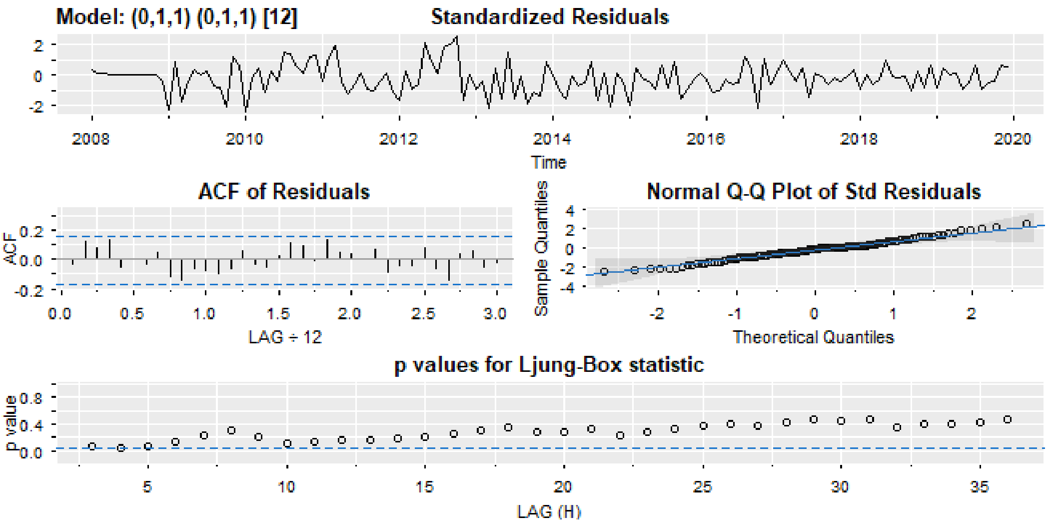
Tabela 8: Specifikacija SARIMA modela
Izvor: Sopstveni proračuni autora

IPC model - SARIMA(0,1,1)x(0,1,1)

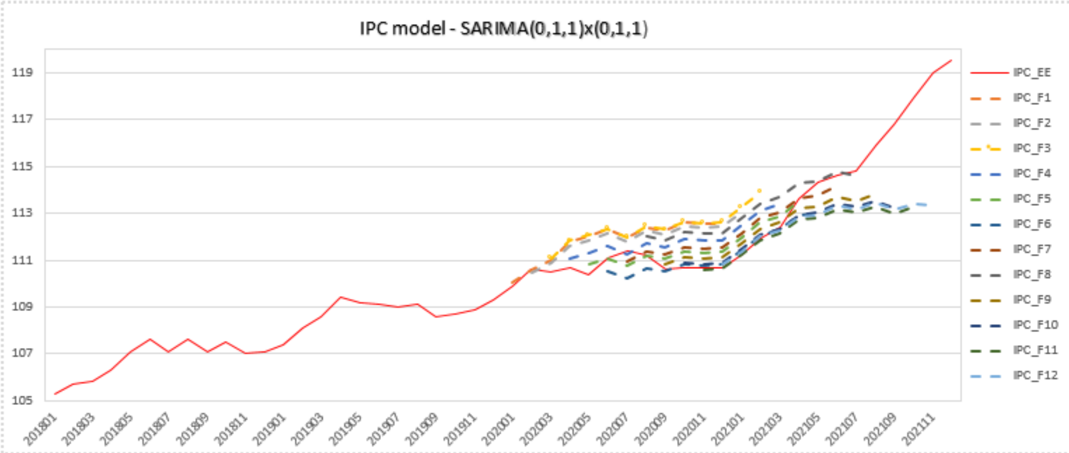
```
Coefficients:
         ma1      sma1
      0.2974   -0.7346
s.e.  0.0757    0.0717

sigma^2 estimated as 0.00003745:  log likelihood = 477.03,
aic = -948.06

$degrees_of_freedom
[1] 129

$ttable
     Estimate     SE  t.value p.value
ma1    0.2974 0.0757   3.9307  0.0001
sma1  -0.7346 0.0717 -10.2442  0

$AIC:-7.23708 $AICc:-7.236365 $BIC:-7.171236

Shapiro-Wilk normality test:
W = 0.98915, p-value = 0.3272
```

Slika 1: Statistike IPC modela

Izvor: Sopstveni proračuni autora



Grafik 11: Analiza reziduala IPC modela
Izvor: Grafički prikaz R paketa *astsa* na bazi sopstvenih proračuna autora



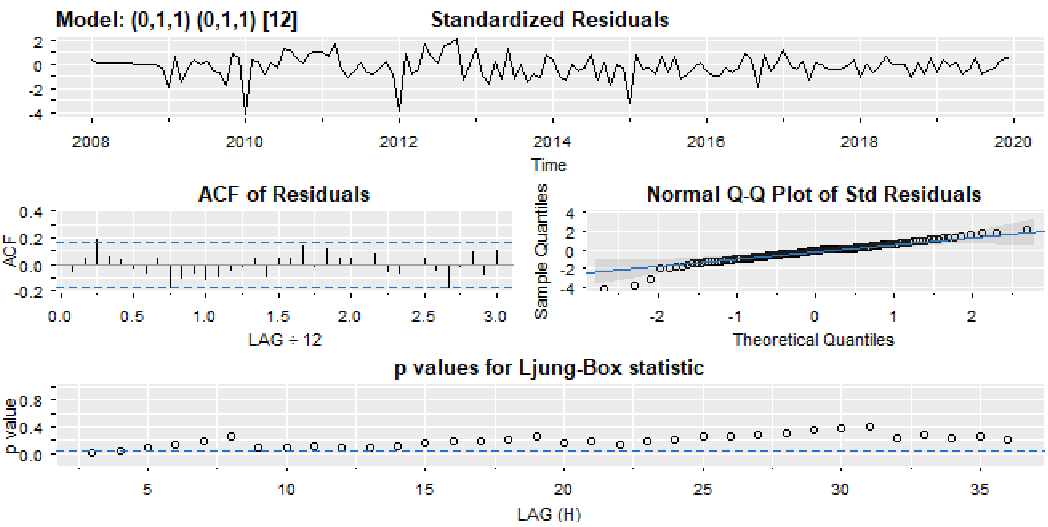
Grafik 12: Projekcije IPC modela
Izvor: Originalni grafik autora

IPC_X_ND model - SARIMA(0,1,1)x(0,1,1)

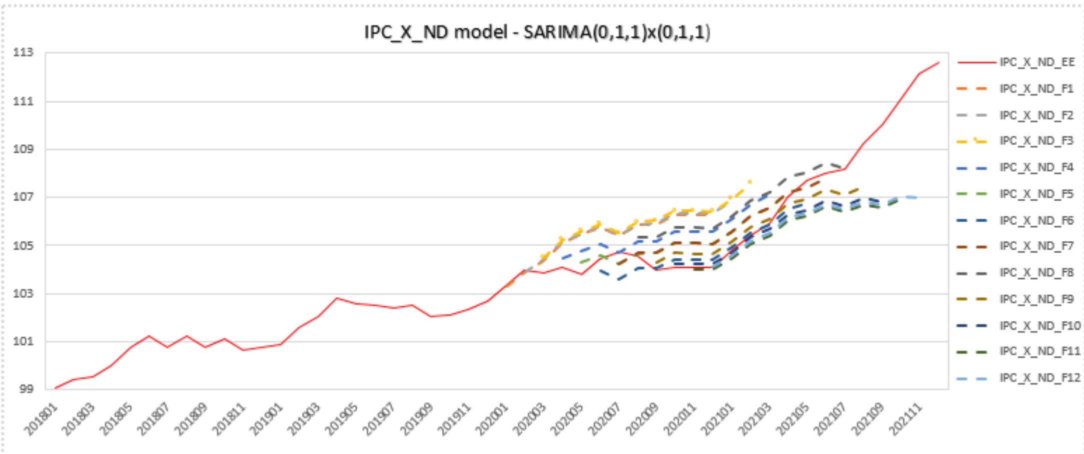
```
Coefficients:
         ma1      sma1
      0.2962   -0.8140
s.e.  0.0877    0.0792

sigma^2 estimated as 0.00005216:  log likelihood = 453.51,
aic = -901.01

$degrees_of_freedom
[1] 129

$ttable
     Estimate     SE  t.value p.value
ma1    0.2962 0.0877   3.3773   0.001
sma1  -0.8140 0.0792 -10.2735   0.000

$AIC:-6.877946  $AICc:-6.877231  $BIC:-6.812102

Shapiro-Wilk normality test:
W = 0.94638, p-value = 2.427e-05
```

Slika 2: Statistike IPC_X_ND modela

Izvor: Sopstveni proračuni autora



Grafik 13: Analiza reziduala IPC_X_ND modela
Izvor: Grafički prikaz R paketa *astsa* na bazi sopstvenih proračuna autora



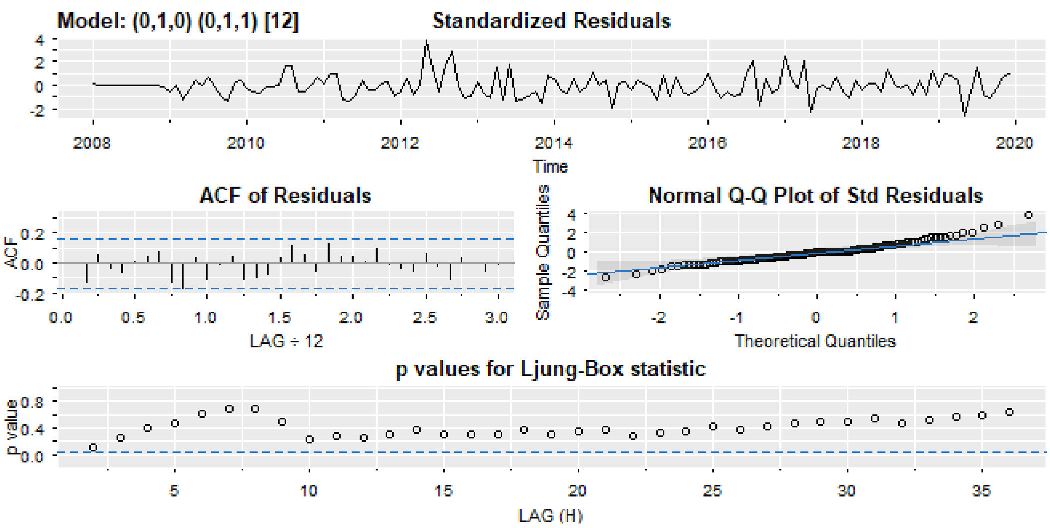
Grafik 14: Projekcije IPC_X_ND modela
Izvor: Originalni grafik autora

HRANA_NP model - SARIMA(0,1,0)x(0,1,1)

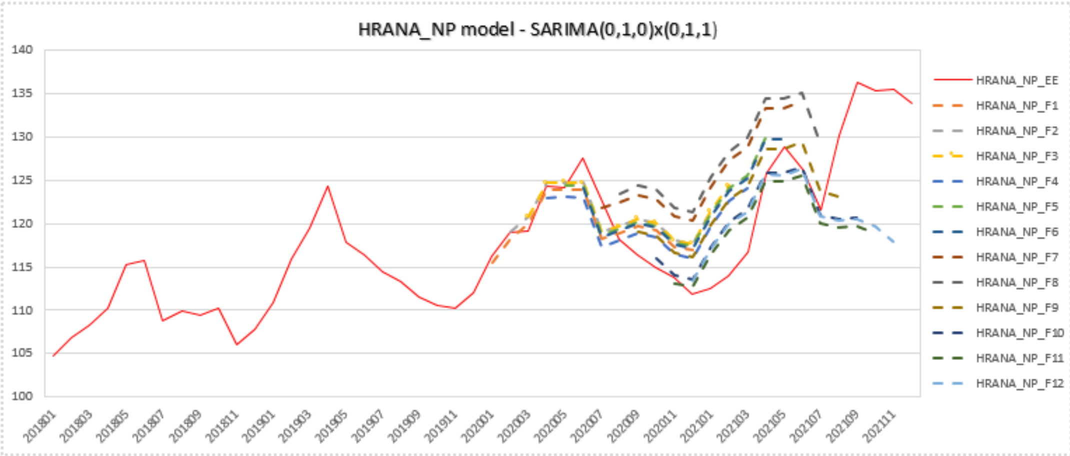
```
Coefficients:
         sma1
      -0.7773
s.e.   0.0807

sigma^2 estimated as 0.0007116:  log likelihood = 283.32,
aic = -562.63

$degrees_of_freedom
[1] 130

$ttable
     Estimate     SE t.value p.value
sma1  -0.7773 0.0807 -9.6306       0

$AIC:-4.294915   $AICc:-4.294678   $BIC:-4.251019

Shapiro-Wilk normality test:
W = 0.96463, p-value = 0.0009007
```

Slika 3: Statistike HRANA_NP modela

Izvor: Sopstveni proračuni autora



Grafik 15: Analiza reziduala HRANA_NP modela
Izvor: Grafički prikaz R paketa *astsa* na bazi sopstvenih proračuna autora



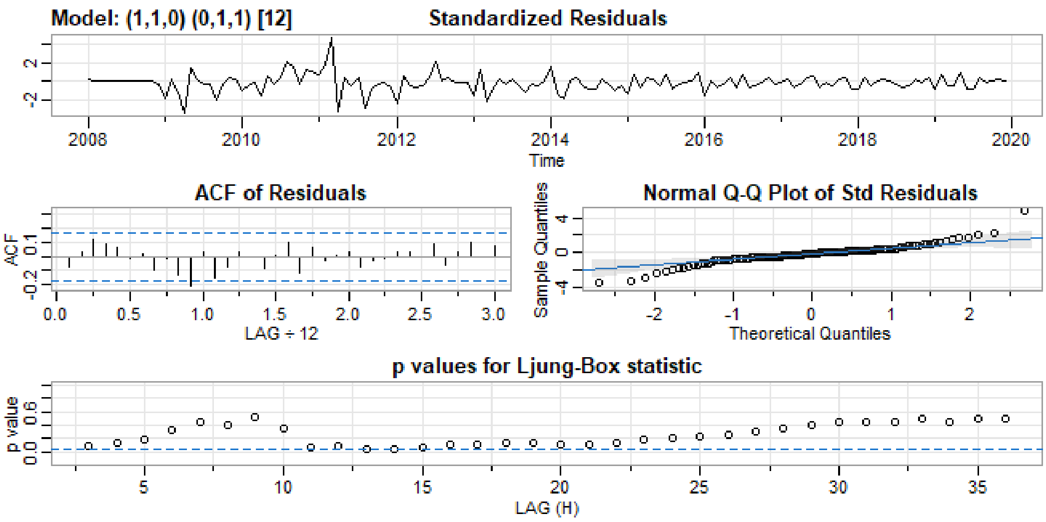
Grafik 16: Projekcije HRANA_NP modela
Izvor: Originalni grafik autora

HRANA_P model - SARIMA(1,1,0)x(0,1,1)

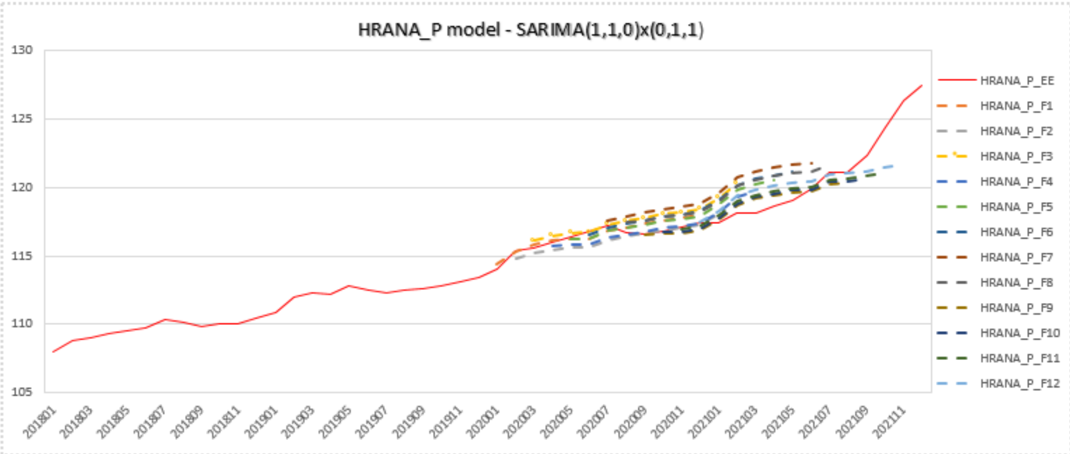
```
Coefficients:
          ar1      sma1   xreg_45   xreg_57
       0.4700   -0.8015    0.0568   -0.0551
s.e.   0.0775    0.0938    0.0074    0.0072

sigma^2 estimated as 0.00006136:  log likelihood = 443.13,
aic = -876.26

$degrees_of_freedom
[1] 127

$ttable
        Estimate     SE t.value p.value
ar1       0.4700 0.0775  6.0612       0
sma1     -0.8015 0.0938 -8.5483       0
xreg_45   0.0568 0.0074  7.7273       0
xreg_57  -0.0551 0.0072 -7.6591       0

$AIC:-6.688988   $AICc:-6.686565   $BIC:-6.579248

Shapiro-Wilk normality test:
W = 0.90133, p-value = 2.63e-08
```

Slika 4: Statistike HRANA_P modela

Izvor: Sopstveni proračuni autora



Grafik 17: Analiza reziduala HRANA_P modela
Izvor: Grafički prikaz R paketa *astsa* na bazi sopstvenih proračuna autora



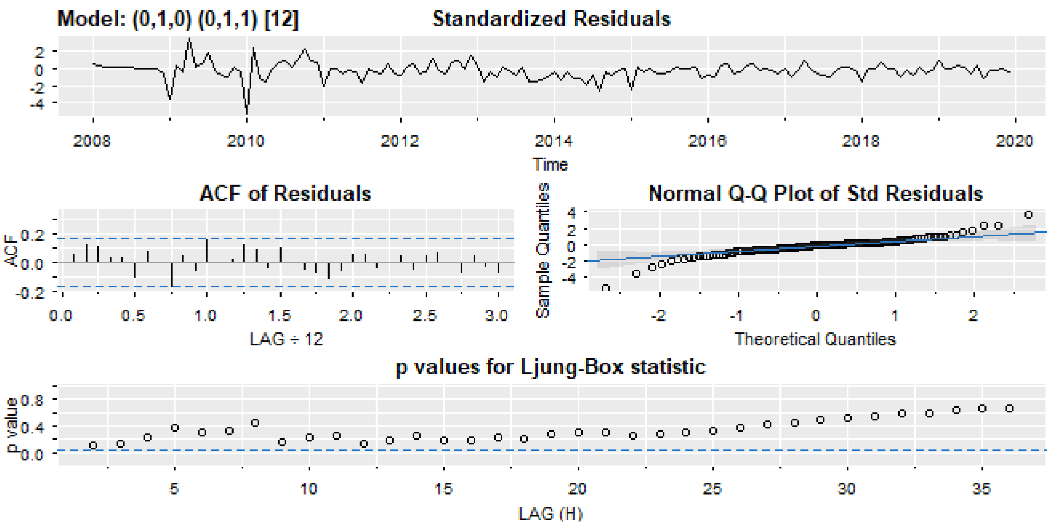
Grafik 18: Projekcije HRANA_P modela
Izvor: Originalni grafik autora

IND_NNRG model - SARIMA(0,1,0)x(0,1,1)

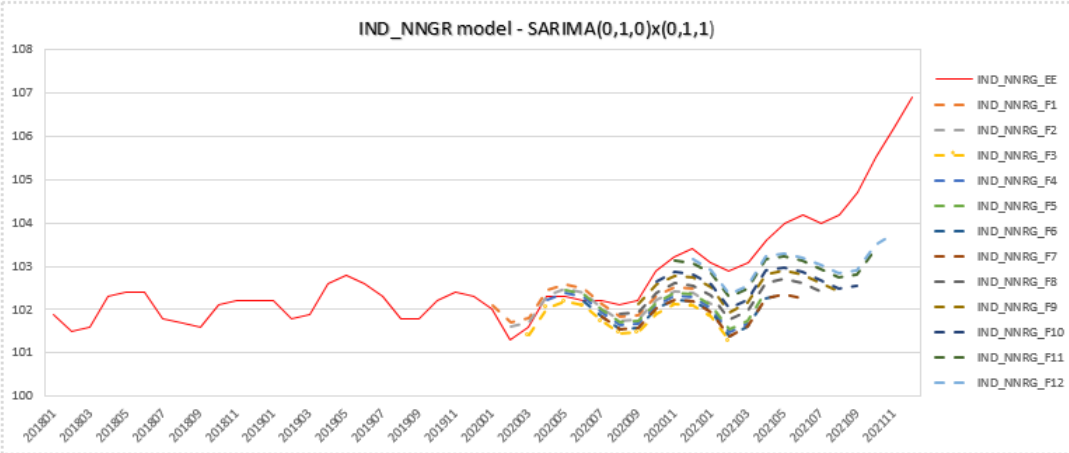
```
Coefficients:
          sma1
       -0.4859
s.e.    0.0826

sigma^2 estimated as 0.00001624:  log likelihood = 534.83,
aic = -1065.66

$degrees_of_freedom
[1] 130

$ttable
     Estimate     SE t.value p.value
sma1  -0.4859 0.0826 -5.8841       0

$AIC:-8.134834   $AICc:-8.134597   $BIC:-8.090938

Shapiro-Wilk normality test:
W = 0.89368, p-value = 1.005e-08
```

Slika 5: Statistike IND_NNRG modela

Izvor: Sopstveni proračuni autora



Grafik 19: Analiza reziduala IND_NNRG modela
Izvor: Grafički prikaz R paketa *astsa* na bazi sopstvenih proračuna autora



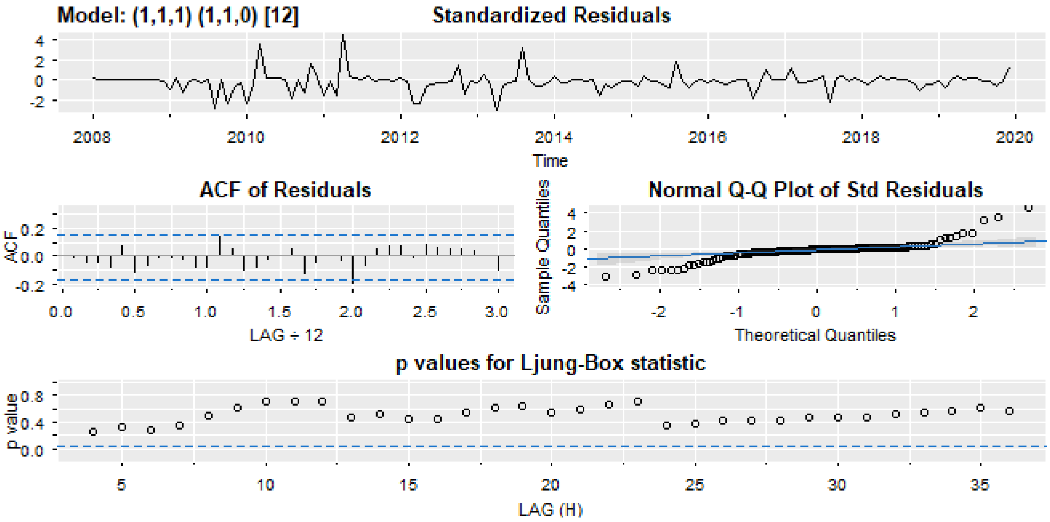
Grafik 20: Projekcije IND_NNRG modela
Izvor: Originalni grafik autora

ELC_GAS model - SARIMA(1,1,1)x(1,1,0)

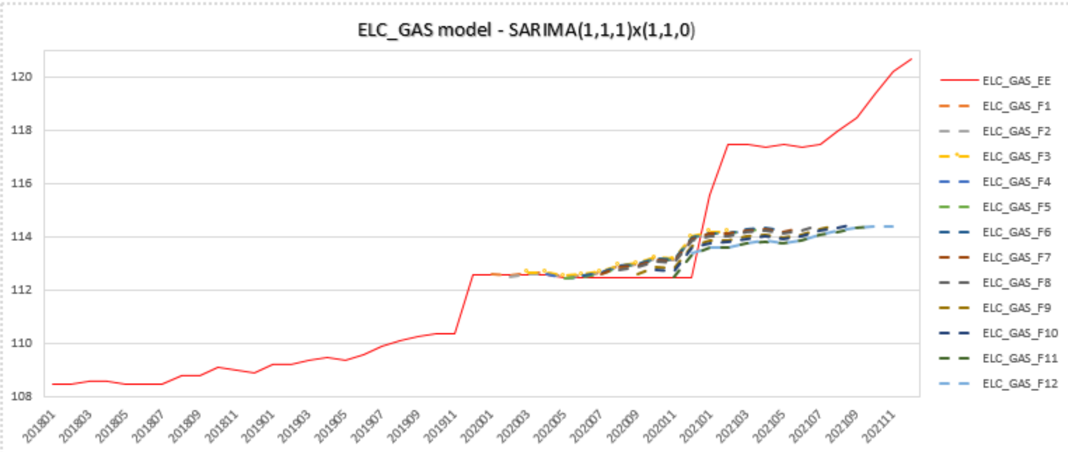
```
Coefficients:
         ar1      ma1     sar1
      0.7784  -0.8885  -0.5927
s.e.  0.1034   0.0700   0.0693

sigma^2 estimated as 0.0002014:  log likelihood = 368.78,
aic = -729.55

$degrees_of_freedom
[1] 128

$ttable
     Estimate     SE  t.value p.value
ar1    0.7784 0.1034   7.5248       0
ma1   -0.8885 0.0700 -12.6833       0
sar1  -0.5927 0.0693  -8.5491       0

$AIC:-5.569112   $AICc:-5.56767   $BIC:-5.48132

Shapiro-Wilk normality test:
W = 0.79228, p-value = 5.157e-13
```

Slika 6: Statistike ELC_GAS modela

Izvor: Sopstveni proračuni autora



Grafik 21: Analiza reziduala ELC_GAS modela
Izvor: Grafički prikaz R paketa *astsa* na bazi sopstvenih proračuna autora



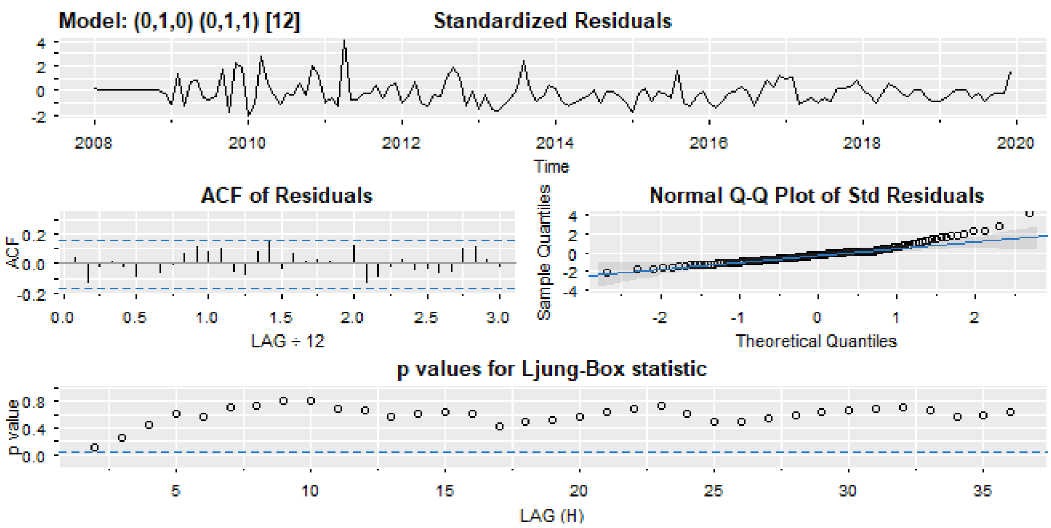
Grafik 22: Projekcije ELC_GAS modela
Izvor: Originalni grafik autora

NRG model - SARIMA(0,1,0)x(0,1,1)

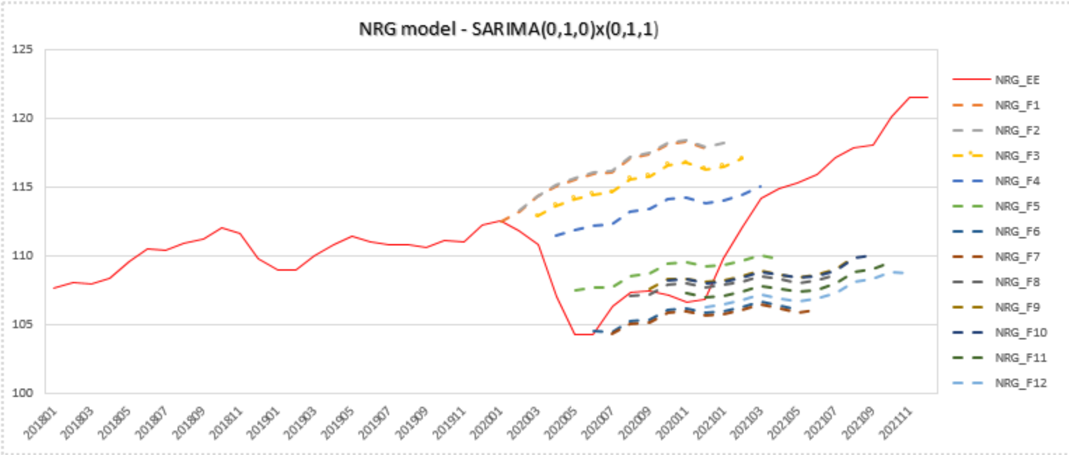
```
Coefficients:
          sma1
       -0.8923
s.e.    0.1491

sigma^2 estimated as 0.0001504:  log likelihood = 381.53,
aic = -759.06

$degrees_of_freedom
[1] 130

$ttable
     Estimate     SE t.value p.value
sma1  -0.8923 0.1491 -5.9837       0

$AIC:-5.794356   $AICc:-5.79412   $BIC:-5.75046

Shapiro-Wilk normality test:
W = 0.92836, p-value = 1.191e-06
```

Slika 7: Statistike NRG modela

Izvor: Sopstveni proračuni autora



Grafik 23: Analiza reziduala NRG modela
Izvor: Grafički prikaz R paketa *astsa* na bazi sopstvenih proračuna autora



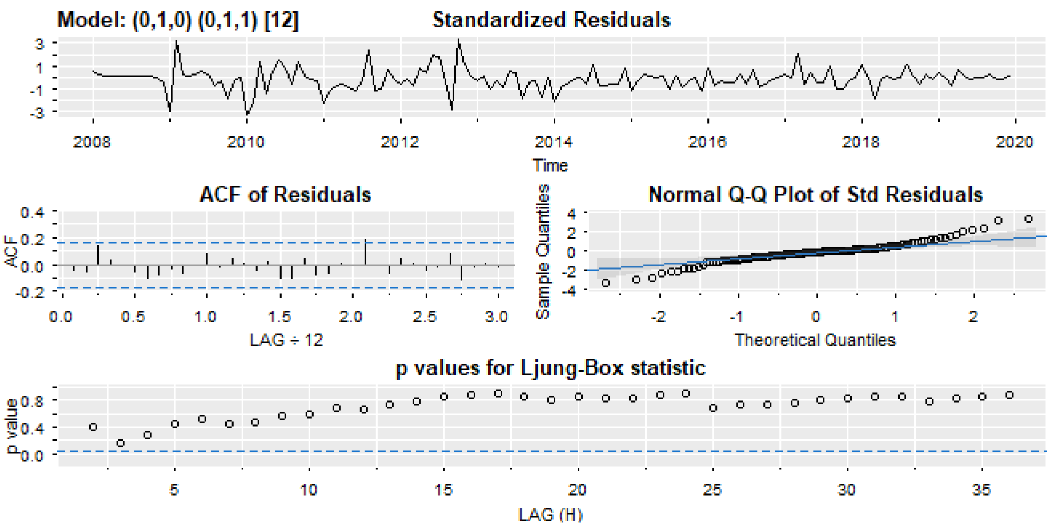
Grafik 24: Projekcije NRG modela
Izvor: Originalni grafik autora

USL model - SARIMA(0,1,0)x(0,1,1)

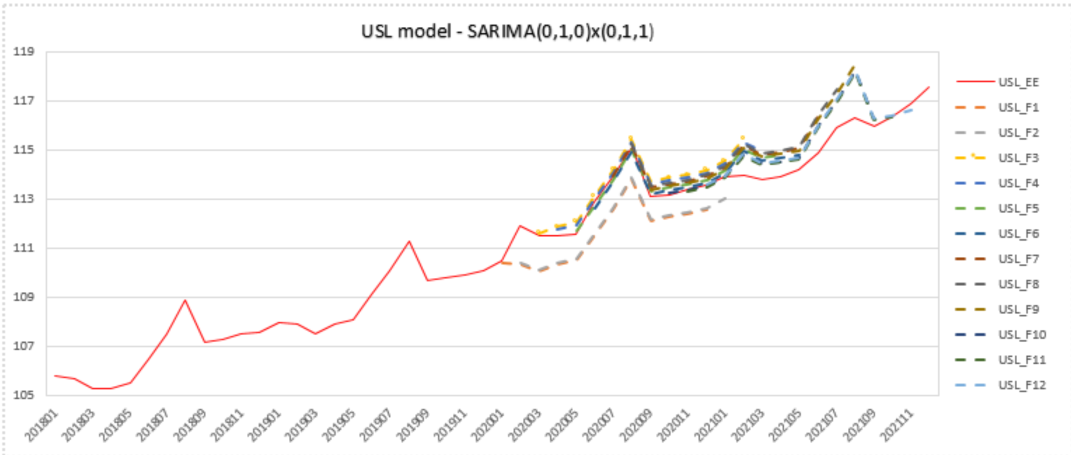
```
Coefficients:
         sma1
      -0.3632
s.e.   0.0888

sigma^2 estimated as 0.00002257:  log likelihood = 514.05,
aic = -1024.11

$degrees_of_freedom
[1] 130

$ttable
     Estimate     SE t.value p.value
sma1  -0.3632 0.0888 -4.0882  0.0001

$AIC:-7.817599   $AICc:-7.817362   $BIC:-7.773702

Shapiro-Wilk normality test:
W = 0.93947, p-value = 7.225e-06
```

Slika 8: Statistike USL modela

Izvor: Sopstveni proračuni autora



Grafik 25: Analiza reziduala USL modela
Izvor: Grafički prikaz R paketa *astsa* na bazi sopstvenih proračuna autora



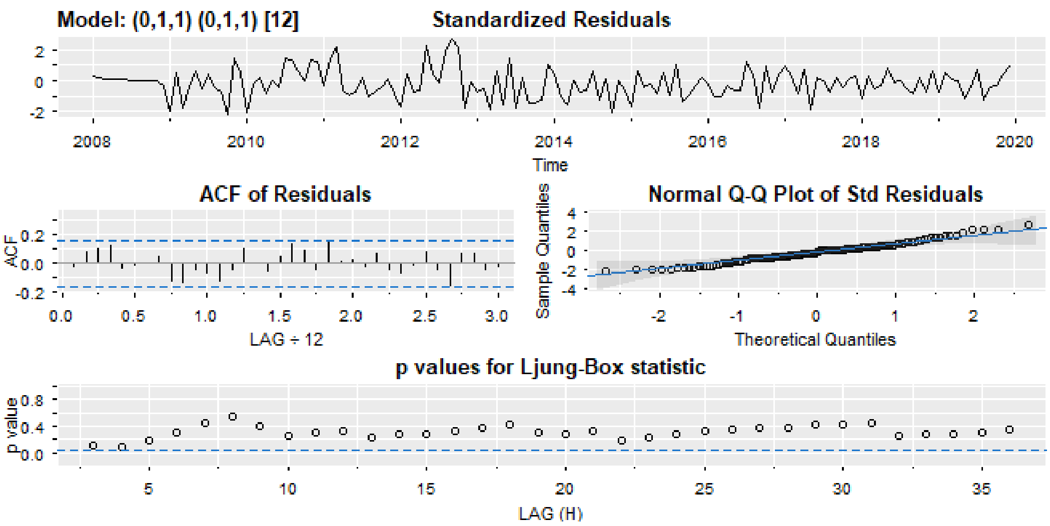
Grafik 26: Projekcije USL modela
Izvor: Originalni grafik autora

RB model - SARIMA(0,1,1)x(0,1,1)

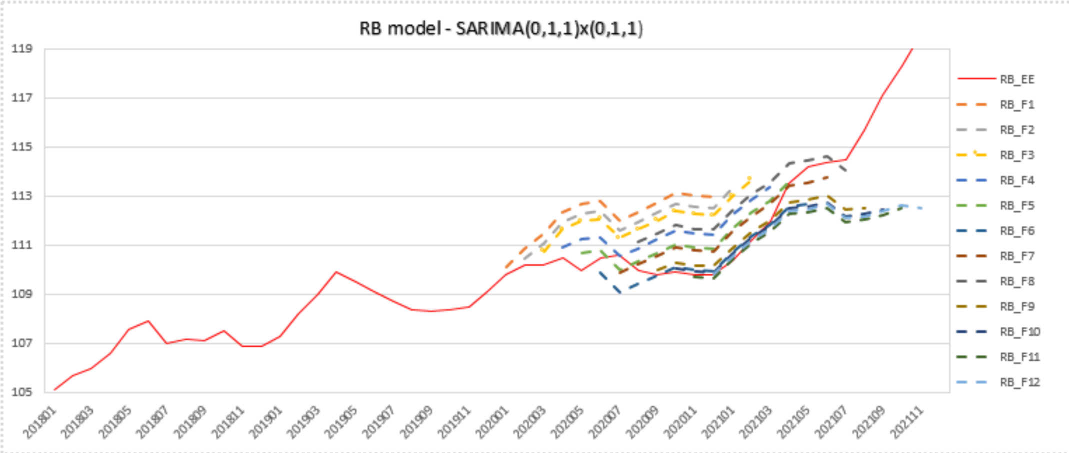
```
Coefficients:
          ma1     sma1
       0.3033  -0.7894
s.e.   0.0789   0.0798

sigma^2 estimated as 0.00005224:  log likelihood = 454.04,
aic = -902.09

$degrees_of_freedom
[1] 129

$ttable
     Estimate     SE t.value p.value
ma1    0.3033 0.0789  3.8462  0.0002
sma1  -0.7894 0.0798 -9.8892  0

$AIC:-6.886148   $AICc:-6.885432   $BIC:-6.820304

Shapiro-Wilk normality test:
W = 0.98642, p-value = 0.1696
```

Slika 9: Statistike RB modela

Izvor: Sopstveni proračuni autora



Grafik 27: Analiza reziduala RB modela
Izvor: Grafički prikaz R paketa *astsa* na bazi sopstvenih proračuna autora



Grafik 28: Projekcije RB modela
Izvor: Originalni grafik autora

U prethodnom delu rada prikazan je postupak određivanja finalnih modela za svaku seriju indeksa i podindeksa potrošačkih cena, odnosno pokazano je da se pojedinačno serija ukupnog indeksa i serije podindeksa potrošačkih cena mogu uspešno modelirati sezonskim ARIMA procesima. U nastavku je pokušano da se odgovori i na drugo postavljeno pitanje. Da li se pognoziranjem svakog pojedinačnog podindeksa potrošačkih cena, a zatim agregiranjem dobijenih prognoza može dobiti bolje predviđanje inflacije mereno indeksom potrošačkih cena u odnosu na prognoziranje ukupnog indeksa potrošačkih cena u kratkom roku?

Period prognoziranja obuhvata period *Covid19* krize čiji uticaj je doveo do značajnih oscilaciji u seriji podindeksa - energija, a koji potiče od cena naftnih derivata. Serija podindeksa - energija može se dalje razložiti na dve podserije u zavisnosti od grupa proizvoda koje sadrži, a to su serija podindeksa potrošačkih cena - električna energija i gas (ELC_GAS) i serija podindeksa potrošačkih cena - naftni derivati (ND). U period *Covid19* krize (2020. i 2021. godina), usled zatvaranja zemalja tj. uvođenja tzv. *″lockdown″-a* kao i potpung ili delimičnog zatvaranja industrijske proizvodnje, došlo je do značajnog pada cena naftnih derivata. Obzirom da ovaj događaj predstavlja izvanredan događaj nije ga moguće predvideti običnim univarijantnim modelima. U nastavku je dat istorijski pregled cena naftnih derivata u poslednjih 25 godina, gde se može uočiti da je cena naftnih derivata u 2020. godini dostigla svoj minimum u posmatranom periodu.

MODEL 1. Predstavlja klasičan model *IPCtotal* kod koga su ocenjeni svi podindeksi ukupnog indeksa potrošačkih cena, reprezentacija ukupnog indek-

Grafik 29: Cene naftnih derivata (USD/bbl)
Izvor: tradingeconomics.com

sa potrošačkih cena na pet podindeksa homogenih grupa proizvoda. Prognoze navedenih modela podindeksa potrošačkih cena su agregirane i upoređene sa ostvarenjima ukupnog indeksa potrošačkih cena. Dodatno, obzirom da se ukupan indeks potrošačkih cena može predstaviti serijom podindeksa roba i usluga, kreirali smo novi model *RU* koji je uspešno modeliran SARIMA procesima, a dobijene prognoze agregirane i upoređene sa ostvarenjima ukupnog indeksa potrošačkih cena.

MODEL 2. Obzirom da rezultati prethodnog modela nisu zadovoljavajući, kreiran je novi modifikovani model. U periodu prognoziranja postoje značajne oscilacije (period *Covid19* krize) u seriji podindeksa potrošačkih cena - energija (NRG), a obzirom da se ova serija može razložiti na dve podserije - električna energija i gas (ELC_GAS) i naftni derivati (ND), ukupan indeks potrošačkih cena je modifikovan na način da je serija - naftni derivati (ND) isključena i posmatrana je serija ukupnog indeksa potrošačkih cena bez naftnih derivata (IPC_X_ND). Modelirane serije podindeksa potrošačkih cena razlikuju se samo u seriji energije (NRG), gde smo umesto podindeksa potrošačkih cena - energija (NRG) posmatrali seriju električna energija i gas (ELC_GAS).

4.3 Evaluacija kvaliteta prognoza modela

Analizirani podaci obuhvataju period od januara 2008. do decembra 2021. godine, odnosno ukupan broj podataka na kojima je sprovedena analiza iznosi

168 opservacija. Ako uzmemo u obzir da su poslednje dve godine korišćene za proveru *out-of-sample* karakteristika modela, broj opservacija upotrebljen za procenu parametara iznosi 144 opservacije. Navedeni broj podataka upotrebljen za analizu, razvoj modela i procenu parametara je dovoljan za pouzdanu statističku analizu, iako boljim rezultatima doprinosi što veći broj istorijskih podataka.

Modeli su ocenjeni na periodu od januara 2008. godine do decembra 2019. godine, dok je period od januara 2020. godine do decembra 2021. godine korišćen za prognoziranje i poređenje sa ostvarenim vrednostima ukupnog indeksa potrošačkih cena (*IPCtotal*) i modifikovanog indeksa potrošačkih cena (*IPC_X_ND*). Postupak ocenjivanja i prognoziranja ukupno 10 serija (*IPCtotal, IPC_X_ND*, 5 podindeksa potrošačkih cena, *ELC_GAS, USL* i *RB*) je identičan kao postupak primenjen pri izboru finalnih modela. Navedeni postupak podrazumeva procenu modela u periodu do 2019. godine, a nakon toga se sprovodi ponovna procena parametara istog SARIMA modela dodavanjem novih opservacija u uzorak. Prethodni postupak odgovara standardnoj preporuci da bi modeli ovog tipa trebali da se reidentifikuju u intervalima od godinu dana. Evaluacija kvaliteta prognoza je sprovedena primenom standardnih mera kvaliteta prognoza: *koren srednje kvadratne greške* (engl. RMSE), *srednje kvadratna greška* (engl. MSE) i *srednje apsolutna greška* (engl. MAE).

MODEL 1. Rezultati RMSE statistike pokazuju da su prognoze sa horizontom dužim do 10 meseci bolje kod serije ukupnog indeksa potrošačkih cena - *IPCtotal* u odnosu na agregirane prognoze - *IPCagregat*. Na dužim horizontima prognoziranja, agregirane prognoze - *IPCagregat* daju nešto bolje rezultate od prognoza ukupnog indeksa potrošačkih cena - *IPCtotal*. Obzirom na značajne oscilacije serije energije, odnosno podserije naftnih derivata u periodu prognoziranja koji obuhvata *Covid19* krizu, dati rezultati nisu adekvatni obzirom da je serija naftnih derivata regulisana i nije moguće predvideti običnim univarijantnim modelima. Dezagregacija ukupnog indeksa potrošačkih cena na serije roba i usluga (*RU*) nije značajno doprinela rezultatima.

MODEL 2. Rezultati RMSE, MAE i MSE statistika su konzistentne kod MODEL-a 2 i pokazuju da prognoze na horizontima većim od 8 meseca daju bolje predviđanje agregiranih prognoza (*IPCagregat2*) u odnosu na predviđanje ukupnog indeksa potrošačkih cena bez naftnih derivata (*IPC_X_ND*). Iz prethodnog sledi da za predviđanje inflacije na dužim horizontima postoji opravdanost u primeni *IPCagregat2* modela, odnosno isplati se dezagregiranje ukupnog indeksa potrošačkih cena i modeliranje svakog pojedinačnog podindeksa potrošačkih cena.

U tabeli u nastavku su date statistike evaluacije prognoza oba modela.

RMSE	MODEL 1			MODEL 2	
Horizont	$IPCtotal$	$IPCagregat1$	RU	IPC_X_ND	$IPCagregat2$
1	0.40	0.72	0.44	0.41	1.21
2	0.67	0.95	0.69	0.72	1.35
3	0.79	1.09	0.80	0.88	1.45
4	0.81	1.15	0.84	0.93	1.50
5	0.82	1.19	0.90	0.96	1.51
6	0.93	1.26	1.02	1.04	1.51
7	1.06	1.37	1.15	1.18	1.53
8	1.23	1.49	1.32	1.38	1.54
9	1.41	1.57	1.47	1.56	**1.50**
10	1.73	1.74	1.74	1.79	**1.52**
11	**2.14**	**2.03**	**2.13**	2.08	**1.66**
12	**2.65**	**2.44**	**2.62**	2.47	**1.95**

Tabela 9: RMSE statistika MODEL 1 i MODEL 2
Izvor: Sopstveni proračuni autora

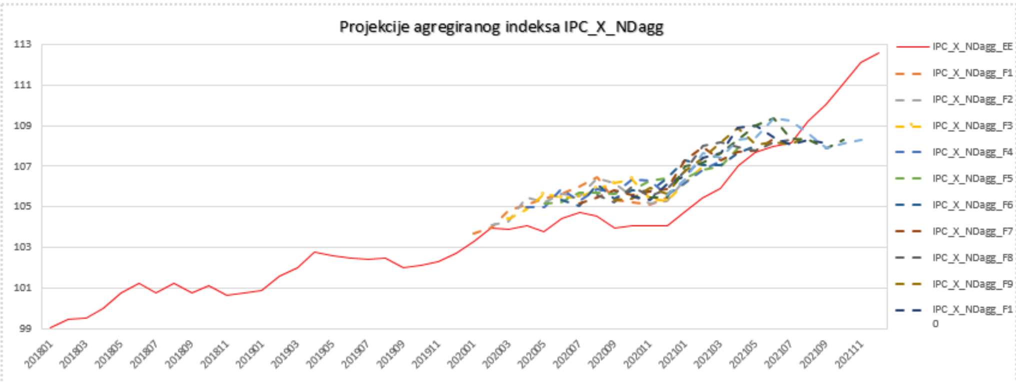
MAE	MODEL 1			MODEL 2	
Horizont	$IPCtotal$	$IPCagregat1$	RU	IPC_X_ND	$IPCagregat2$
1	0.34	0.62	0.36	0.33	1.11
2	0.48	0.83	0.51	0.55	1.22
3	0.63	0.94	0.63	0.72	1.35
4	0.60	1.05	0.61	0.70	1.43
5	0.69	1.08	0.76	0.83	1.43
6	0.80	1.15	0.89	0.95	1.35
7	0.94	1.23	1.03	1.07	1.32
8	1.13	1.34	1.22	1.24	1.30
9	1.26	1.44	1.36	1.37	**1.30**
10	1.37	1.52	1.45	1.46	**1.39**
11	**1.72**	**1.69**	1.77	1.72	**1.53**
12	**2.06**	**1.98**	2.06	1.94	**1.74**

Tabela 10: MAE statistika MODEL 1 i MODEL 2
Izvor: Sopstveni proračuni autora

MSE	MODEL 1			MODEL 2	
Horizont	*IPCtotal*	*IPCagregat1*	*RU*	*IPC_X_ND*	*IPCagregat2*
1	0.16	0.52	0.19	0.17	1.48
2	0.45	0.89	0.48	0.52	1.81
3	0.63	1.20	0.64	0.78	2.11
4	0.65	1.33	0.71	0.87	2.25
5	0.68	1.41	0.81	0.92	2.28
6	0.87	1.59	1.05	1.08	2.29
7	1.13	1.87	1.33	1.40	2.35
8	1.51	2.22	1.74	1.91	2.37
9	1.99	2.45	2.17	2.42	**2.24**
10	2.98	3.04	3.04	3.19	**2.30**
11	**4.60**	**4.14**	**4.54**	4.34	**2.76**
12	**7.05**	**5.97**	**6.84**	6.12	**3.80**

Tabela 11: MSE statistika MODEL 1 i MODEL 2
Izvor: Sopstveni proračuni autora

Na grafiku u nastavku prikazane su projekcije agregiranog indeksa *IPC_X_ND* na horizontima dužine 12 meseci, pri čemu prvi period prognoziranja obuhvata period od januara 2020. godine do decembra 2020. godine, sledeći obuhvata period od februara 2020. do januara 2021. godine, i tako dalje sve do poslednjeg perioda prognoziranja koji obuhvata period decembar 2020. do novembra 2021. godine.



Grafik 30: Projekcije agregiranog indeksa bez naftnih derivata *IPC_X_NDagg*
Izvor: Originalni grafik autora

Zaključak

U ovom radu prikazan je postupak prognoziranja inflacije, merene indeksom potrošačkih cena, primenom sezonskih autoregresionih integrisanih procesa pokretnih proseka. Za svaku seriju indeksa i podindeksa potrošačkih cena kreiran je model koji ispunjava dijagnostičke testove: autokorelacijsku strukturu reziduala, stabilnost i značajnost parametara, kao i zadovoljavajuće *"out-of-sample¨* karakteristike. Pri kreiranju modela korišćen je modifikovan *"Box-Jenkinsov"* pristup, u delu identifikacije modela gde je primenjen automatizovan pristup odabira modela na osnovu informacionih kriterijuma. Konačni modeli odabrani su na osnovu mere kvaliteta prognoza RMSE, pri čemu je korišćen i princip ekonomičnosti u delu broja parametara modela. Pokazano je da se inflacija može uspešno modelirati univarijantnim modelima tipa SARIMA. Drugi deo postavljenog pitanja u ovom radu je: da li se bolje predviđanje inflacije, mereno indeksom potrošačkih cena, dobija prognoziranjem podindeksa potrošačkih cena, a zatim agregiranjem prognoza ili prognoziranjem ukupnog indeksa potrošačkih cena? Kreirana su dva modela. **MODEL 1** poredi prognoze ukupnog indeksa potrošačkih cena sa agregiranim prognozama podindeksa potrošačkih cena, kao i sa prognozama indeksa roba i usluga. **MODEL 2** poredi modifikovan indeks potrošačkih cena bez naftnih derivata sa agregiranim prognozama podindeksa potrošačkih cena bez naftnih derivata. Rezultati **MODELa 1** pokazuju da se bolje prognoze agregiranog indeksa dobijaju na horizontima prognoziranja dužim od 10 meseci, dok rezultati **MODELa 2** pokazuju bolje prognoze agregiranog indeksa na horizontima prognoziranja dužim od 8 meseci.

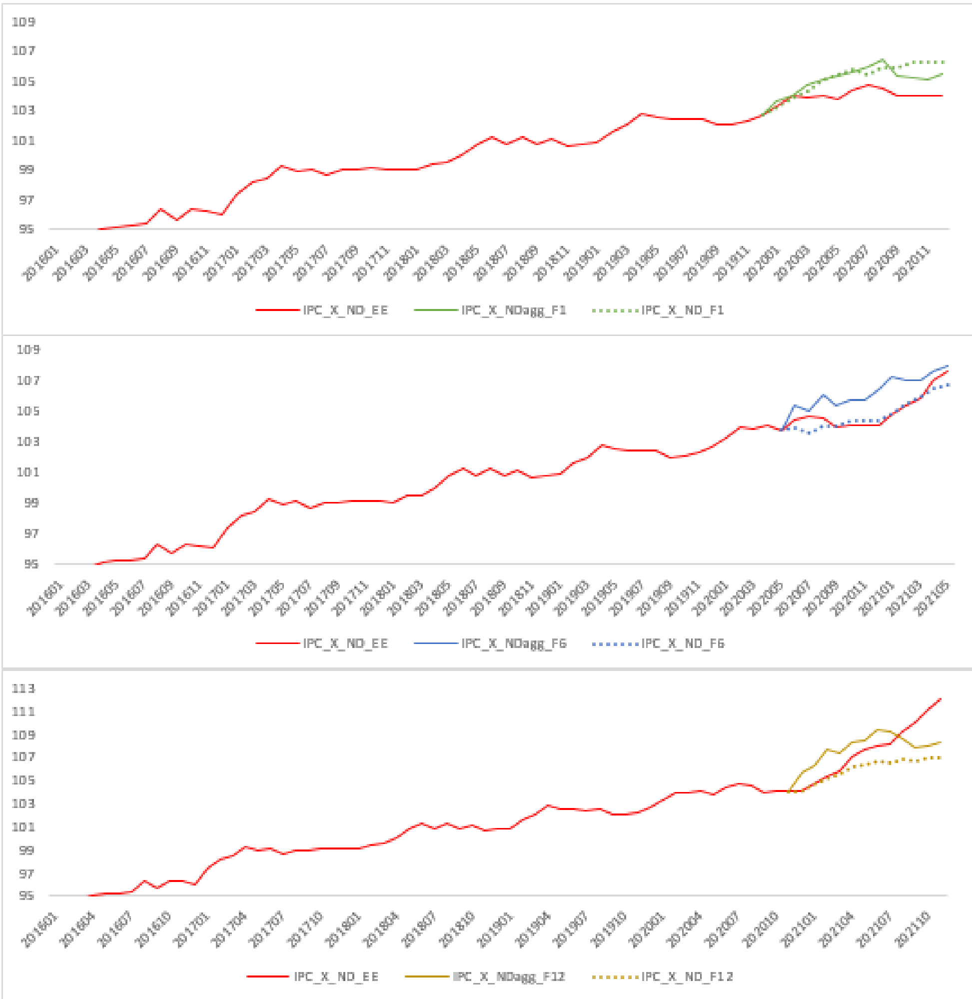
Sumirajući rezultate i uzimajući u obzir da period prognoziranja modela obuhvata period *Covid19* krize, konačne rezultate smo posmatrali na osnovu modifikovanog indeksa potrošačkih cena bez naftnih derivata, obzirom da je pad cena naftnih derivata u 2021. godini značajno uticao na krajnji rezultat. Cene naftnih derivata formiraju se na osnovu svetske cene nafte koje su veoma podložne promenama i velikim delom zavise od odluka najvećih proizvođača nafte. Na osnovu prethodnog, unapređenje modela se može postići ukoliko se za predviđanje podindeksa potrošačkih cena - naftni derivati koriste ekspertske procene koje sadrže dodatne informacije koje nisu sadržane u statističkom modelu. Konačni rezultati pokazuju, na osnovu mera kvaliteta prognoza (RMSE, MAE, MSE), da oba modela na podacima Republike Srbije daju bolje predviđanje agregiranog indeksa u odnosu na predviđanje ukupnog indeksa potrošačkih cena na dužim horizontima pognoziranja.

"Svi modeli su pogrešni, a neki su i korisni[13]*"*. Navodeći poznati citat Džordža Boksa, zaključujemo da postoji korisnost u prognoziranju inflacije u kratkom roku, merene indeksom potrošačkih cena, univarijantnim sezonskim autoregresionim integrisanim procesima pokretnih proseka na dužim horizontima prognoziranja.

[13]George Edward Pelham Box (18 October 1919 – 28 March 2013)

Dodatak A

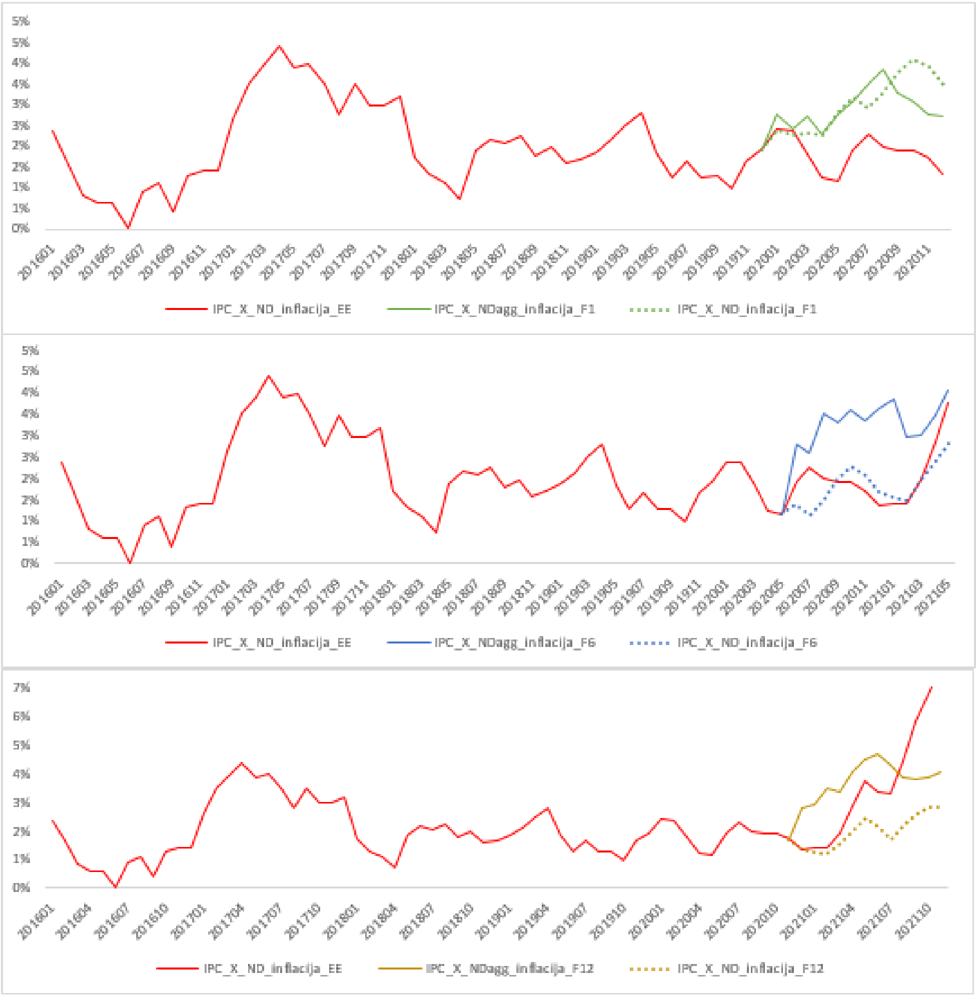
Grafički prikaz prognoza i ostvarenja *IPC_X_ND* i inflacije bez naftinh derivata



Grafik 31: Prognoze ukupnog indeksa bez naftnih derivata *IPC_X_ND* i agregiranog indeksa *IPC_X_NDagg* za tri horizonta*

Izvor: Originalni grafik autora

*januar 2020. - decembar 2020.; maj 2020. - maj 2021.; novembar 2020. - novembar 2021.



Grafik 32: Prognoze inflacije bez naftnih derivata *IPC_X_ND_inflacija* i inflacije agregiranog indeksa *IPC_X_NDagg_inflacija* za tri horizonta*
Izvor: Originalni grafik autora
*januar 2020. - decembar 2020.; maj 2020. - maj 2021.; novembar 2020. - novembar 2021.

Dodatak B

Vremenske serije korišćene u radu

Serija S1 - Ukupan indeks potrošačkih cena *IPC* (2015=100), 2009-2021.

Serija S2 - Indeks potrošačkih cena - neprerađena hrana *HRANA_NP* (2015=100), 2009-2021.

Serija S3 - Indeks potrošačkih cena - prerađena hrana *HRANA_P* (2015=100), 2009-2021.

Serija S4 - Indeks potrošačkih cena - industrijski proizvodi bez energije *IND_NNRG* (2015=100), 2009-2021.

Serija S5 - Indeks potrošačkih cena - energija *NRG* (2015=100), 2009-2021.

Serija S6 - Indeks potrošačkih cena - usluge *USL* (2015=100), 2009-2021.

Serija S7 - Indeks potrošačkih cena - električna energija i gas *ELC_GAS* (2015=100), 2009-2021.

Serija S8 - Indeks potrošačkih cena - roba *RB* (2015=100), 2009-2021.

Serija S9 - Indeks potrošačkih cena bez naftnih derivata *IPC_X_ND* (2015=100), 2009-2021.

God	*Jan*	*Feb*	*Mar*	*Apr*	*Maj*	*Jun*	*Jul*	*Avg*	*Sep*	*Okt*	*Nov*	*Dec*
2009	68.4	69.3	69.6	70.3	71.1	71.4	70.9	70.8	71	70.9	71.3	71.3
2010	71.8	72.1	73	73.5	74.2	74.3	74.4	75.4	76.4	77.1	78	78.6
2011	79.8	81	83.1	84.1	84.2	83.9	83.5	83.5	83.6	83.9	84.5	84
2012	84.2	84.9	85.8	86.3	88	88.9	88.7	90.1	92.2	94.7	94.8	94.4
2013	94.9	95.4	95.4	96.2	96.4	97.4	96.4	96.8	96.8	97	96.5	96.6
2014	97.7	97.9	97.8	98.4	98.8	98.9	98.8	98.6	99.2	98.9	98.8	98.4
2015	98.1	98.7	99.4	100	100.1	100.8	100	100.8	100.8	100.6	100.4	100.2
2016	100.7	100.6	100.5	100.9	101	101.1	101.2	102.2	101.5	102.2	102.1	101.9
2017	103.2	104	104.3	105.2	104.8	105	104.6	104.9	104.9	105.1	105	105
2018	105.3	105.7	105.8	106.3	107.1	107.6	107.1	107.6	107.1	107.5	107	107.1
2019	107.4	108.1	108.6	109.4	109.2	109.1	109	109.1	108.6	108.7	108.9	109.3
2020	109.9	110.6	110.5	110.7	110.4	111.1	111.4	111.2	110.6	110.7	110.7	110.7
2021	111.2	111.9	112.4	113.6	114.3	114.6	114.8	115.9	116.8	117.9	119	119.5

Tabela 12: S1: Indeks potrošačkih cena IPC, bazni indeks (2015=100)
Izvor: *Eurostat*

God	*Jan*	*Feb*	*Mar*	*Apr*	*Maj*	*Jun*	*Jul*	*Avg*	*Sep*	*Okt*	*Nov*	*Dec*
2009	69.8	70.8	71.7	72.9	75.7	74.9	70.6	69	69.4	69.3	70.3	69.6
2010	70.2	70.1	71	72.3	74.3	73.5	72.1	74	74.4	74.7	75.7	76
2011	77.2	80.1	84.4	83.2	82.6	79.8	76.7	75.6	75.9	77.2	78.7	75.8
2012	75.6	78	78.8	79.7	90.4	92.3	86.6	89.9	98.4	100.1	98.7	94.6
2013	96.3	96.4	96.2	101.2	102.7	106.8	97.8	94.9	95.5	95.5	92.2	92
2014	94.3	94.9	95.2	98.6	101.2	101.3	98.2	97.9	101.5	97.6	97.7	96.5
2015	96.7	99.1	101.2	103.3	103.5	106.1	98.1	99.5	100.9	98.7	97.2	95.7
2016	99.5	100.2	99.1	100	100.4	99.2	96	101.3	99	100.1	97.9	95.4
2017	103.8	107	107.4	115.9	111.4	111	105.2	105.5	108.9	107.1	103.2	102.3
2018	104.7	106.8	108.3	110.2	115.2	115.7	108.8	109.9	109.5	110.2	106.1	107.8
2019	110.9	115.9	119.5	124.4	117.8	116.4	114.5	113.3	111.6	110.6	110.3	112
2020	116.2	119	119.1	124.4	124.2	127.6	122.8	118.2	116.4	115	113.8	111.8
2021	112.5	114	116.7	125.7	128.8	126.3	121.5	130.1	136.3	135.3	135.5	133.8

Tabela 13: S2: Industrijski neprerađena hrana *HRANA_NP*, bazni indeks (2015=100)
Izvor: *Eurostat*

God	*Jan*	*Feb*	*Mar*	*Apr*	*Maj*	*Jun*	*Jul*	*Avg*	*Sep*	*Okt*	*Nov*	*Dec*
2009	66.2	66.7	66.7	66.6	66.6	66.9	66.9	67.2	66.8	66.6	66.5	66.5
2010	67.4	67.3	67.3	67.5	67.5	67.6	67.8	69.6	71.6	72.5	73.6	74.8
2011	77.3	79.2	83.5	84.2	84.4	84.4	84.7	83.9	83.6	83.3	83.2	83
2012	83	83.3	84.2	84.5	84	84.2	85.9	87.2	88.5	94.3	94.7	95
2013	95.4	96.6	96.7	96.5	96.1	95.9	96.5	97	96.9	96.8	96.5	96.6
2014	99	99.4	99	99	98.9	98.7	98.6	98.4	98.8	98.9	98.2	97.7
2015	97.9	98.6	99	99.6	99.7	99.5	100.5	100.7	100.9	101	100.9	101.7
2016	102.1	102.5	102.6	102.6	102.6	102.2	103.3	103.5	103.5	103.5	103.6	103.7
2017	104.7	105.6	105.9	105.9	106	106.5	107	107.2	107.2	107.5	107.9	107.7
2018	108	108.8	109	109.3	109.5	109.7	110.3	110.1	109.8	110	110	110.4
2019	110.8	112	112.3	112.2	112.8	112.5	112.3	112.5	112.6	112.8	113.1	113.4
2020	114	115.4	115.6	116	116.4	116.8	117.2	116.7	116.6	116.8	117.1	117.4
2021	117.4	118.1	118.1	118.6	119.1	119.9	121.1	121.1	122.3	124.4	126.3	127.4

Tabela 14: S3: Industrijski prerađena hrana *HRANA_P*, bazni indeks (2015=100)
Izvor: *Eurostat*

God	*Jan*	*Feb*	*Mar*	*Apr*	*Maj*	*Jun*	*Jul*	*Avg*	*Sep*	*Okt*	*Nov*	*Dec*
2009	72.9	72.9	73.2	74.5	75	75.4	76	76.5	76.7	76.8	77.1	77.3
2010	77.5	78.2	78.2	78.6	79.1	79.7	80.4	81	81.7	82.7	83.3	83.8
2011	84.1	84.5	84.7	85.2	85.7	86.1	86.1	86.7	87.1	87.6	88.3	88.5
2012	88.9	89.4	89.8	90.2	90.6	91.5	91.7	92.1	92.9	93.9	94.5	95.4
2013	96.1	96	96.2	96.4	97	97.7	97.7	98.3	98.4	98.7	98.8	99.1
2014	99.6	99.3	99.4	99.3	99.4	99.4	99.2	98.7	98.9	99.2	99.5	100
2015	99.6	99.6	99.6	99.7	99.8	99.9	99.7	99.8	100.1	100.5	100.9	100.9
2016	100.7	100.3	100.5	100.8	100.8	100.9	100.9	101.2	101.4	101.8	102.1	102.1
2017	102	101.4	101.5	102.1	102.2	102.1	101.7	101.5	101.7	102.2	102.6	102.6
2018	101.9	101.5	101.6	102.3	102.4	102.4	101.8	101.7	101.6	102.1	102.2	102.2
2019	102.2	101.8	101.9	102.6	102.8	102.6	102.3	101.8	101.8	102.2	102.4	102.3
2020	102	101.3	101.6	102.3	102.3	102.2	102.2	102.1	102.2	102.9	103.2	103.4
2021	103.1	102.9	103.1	103.6	104	104.2	104	104.2	104.7	105.5	106.2	106.9

Tabela 15: S4: Industrijski proizvodi bez energije *IND_NNRG*, bazni indeks (2015=100)
Izvor: *Eurostat*

God	*Jan*	*Feb*	*Mar*	*Apr*	*Maj*	*Jun*	*Jul*	*Avg*	*Sep*	*Okt*	*Nov*	*Dec*
2009	63	65	64.9	65.4	67	67.8	67.9	68.1	68.7	68.4	69.5	69.5
2010	69.7	70	73.5	74.2	75.1	75.2	75.5	75.7	76	76.4	78.4	78.6
2011	79.1	79.6	80	85	85.4	85.5	85.7	86	86.3	86.4	87.3	87.2
2012	87.3	87.9	90.4	90.9	90.6	91	90.9	92.6	94.8	96.8	96	95.3
2013	94.5	95.1	95.2	94.8	94.3	94.3	94.8	98.5	99	98.8	98.7	98.6
2014	99.5	99.5	99.5	99.5	99.2	99.2	99.7	99.8	100.1	100.8	100.5	98.6
2015	97.1	97.7	99.3	99.3	99.7	100	99.7	102.9	102.1	101.3	101	100
2016	99.2	98.3	98.6	99.2	99.5	100.3	100.5	100.4	100.5	102.1	102.6	103.3
2017	104.7	106.8	106.7	106.5	106.1	105.3	104.8	104.9	105.3	106.2	106.9	107.3
2018	107.7	108.1	108	108.4	109.6	110.5	110.4	110.9	111.2	112.1	111.6	109.8
2019	109	109	110	110.8	111.4	111	110.8	110.8	110.6	111.1	111	112.3
2020	112.6	111.9	110.8	107.1	104.3	104.3	106.3	107.4	107.5	107.2	106.6	106.9
2021	109.8	112.2	114.2	114.9	115.3	115.9	117.2	117.9	118.1	120.1	121.5	121.5

Tabela 16: S5: Energija *NRG*, bazni indeks (2015=100)
Izvor: *Eurostat*

God	*Jan*	*Feb*	*Mar*	*Apr*	*Maj*	*Jun*	*Jul*	*Avg*	*Sep*	*Okt*	*Nov*	*Dec*
2009	70	71.5	71.8	72.4	72.7	73	73.3	73.6	73.8	73.9	74.2	74.5
2010	75.2	75.6	76.4	76.5	77	77.8	78.4	78.6	79.4	79.8	80.1	80.3
2011	80.6	80.9	81.3	81.4	81.5	81.7	82.1	83.3	83.5	83.5	84.1	84.3
2012	84.7	85.1	85.3	85.8	86.2	87.4	88.6	89.4	88.6	90.2	91.2	91.5
2013	91.9	92.4	92.3	92.6	92.6	93.8	95	95.1	94.5	95.5	95.6	95.9
2014	95.4	95.5	95.3	95.6	95.7	96.6	98.3	98.4	97.5	98.3	98.4	99.1
2015	98.4	98.5	98.5	98.9	99	100.1	101.2	101.5	100.3	101.1	101.3	101.3
2016	101.2	101	100.8	101	100.9	102.1	103.1	103.7	102.2	102.8	102.9	103.1
2017	103	102.9	103.8	103.8	104	105	105.9	106.9	105	105.2	105.2	105.4
2018	105.8	105.7	105.3	105.3	105.5	106.5	107.5	108.9	107.2	107.3	107.5	107.6
2019	108	107.9	107.5	107.9	108.1	109.1	110.1	111.3	109.7	109.8	109.9	110.1
2020	110.5	111.9	111.5	111.5	111.6	112.9	114	115.1	113.1	113.2	113.4	113.6
2021	113.9	114	113.8	113.9	114.2	114.9	115.9	116.3	116	116.4	116.9	117.6

Tabela 17: S6: Usluge *USL*, bazni indeks (2015=100)
Izvor: *Eurostat*

God	*Jan*	*Feb*	*Mar*	*Apr*	*Maj*	*Jun*	*Jul*	*Avg*	*Sep*	*Okt*	*Nov*	*Dec*
2009	66	66.3	66.1	66.1	66.2	66.1	66.3	66.3	66.8	66.8	66.9	67
2010	67	67.1	71.7	71.8	71.9	72	72.1	72.3	72.8	73.3	75.7	76
2011	76.1	76.3	76.6	82.1	82.3	82.2	82.2	82.4	82.7	82.9	83.9	83.8
2012	84	84	84.5	84.5	84.5	84.5	84.6	84.8	85.5	88	88.4	88.6
2013	88.6	89.5	89.5	89.4	89.3	89.4	89.6	94.4	94.8	95	95.1	94.9
2014	95.5	95.5	95.5	95.5	95.5	95.4	95.6	95.7	96	97	97.3	97.4
2015	97.8	97.7	98.4	98.3	98.3	97.8	97.1	103.1	103.3	102.6	102.7	102.8
2016	102.9	102.9	102.8	102.2	102.1	102	101.9	101.9	102	104.2	104.7	105
2017	105.3	107	106.7	105.8	105.5	105.2	105.3	105.8	106.5	107.8	108	108.5
2018	108.5	108.5	108.6	108.6	108.5	108.5	108.5	108.8	108.8	109.1	109	108.9
2019	109.2	109.2	109.4	109.5	109.4	109.6	109.9	110.1	110.3	110.4	110.4	112.6
2020	112.6	112.6	112.6	112.6	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5
2021	115.6	117.5	117.5	117.4	117.5	117.4	117.5	118	118.5	119.4	120.2	120.7

Tabela 18: S7: Električna energija i gas *ELC_GAS*, bazni indeks (2015=100)
Izvor: *Eurostat*

God	*Jan*	*Feb*	*Mar*	*Apr*	*Maj*	*Jun*	*Jul*	*Avg*	*Sep*	*Okt*	*Nov*	*Dec*
2009	68	68.8	69.1	69.8	70.8	71	70.3	70.2	70.4	70.2	70.7	70.6
2010	71.1	71.3	72.2	72.8	73.5	73.6	73.6	74.7	75.8	76.5	77.6	78.2
2011	79.5	80.9	83.5	84.5	84.7	84.3	83.7	83.5	83.6	83.9	84.5	83.9
2012	84	84.8	85.9	86.4	88.5	89.3	88.7	90.2	93.1	95.9	95.8	95.1
2013	95.7	96.1	96.2	97.2	97.4	98.4	96.8	97.2	97.5	97.4	96.7	96.8
2014	98.3	98.5	98.4	99.1	99.6	99.5	98.9	98.7	99.6	99.1	98.9	98.2
2015	98	98.8	99.6	100.3	100.5	101	99.6	100.6	100.9	100.5	100.2	99.9
2016	100.6	100.5	100.4	100.8	101	100.8	100.6	101.7	101.4	102.1	101.8	101.6
2017	103.2	104.2	104.4	105.6	105	105	104.2	104.3	104.9	105.1	105	104.9
2018	105.1	105.7	106	106.6	107.6	107.9	107	107.2	107.1	107.5	106.9	106.9
2019	107.3	108.2	109	109.9	109.5	109.1	108.7	108.4	108.3	108.4	108.5	109.1
2020	109.8	110.2	110.2	110.5	110	110.5	110.6	110	109.8	109.9	109.8	109.8
2021	110.4	111.2	112	113.5	114.2	114.4	114.5	115.7	117.1	118.3	119.6	120

Tabela 19: S8: Roba *RB*, bazni indeks (2015=100)
Izvor: *Eurostat*

God	*Jan*	*Feb*	*Mar*	*Apr*	*Maj*	*Jun*	*Jul*	*Avg*	*Sep*	*Okt*	*Nov*	*Dec*
2009	65.8	66.6	66.9	67.6	68.4	68.7	68.2	68.1	68.3	68.2	68.6	68.6
2010	68.2	68.5	69.3	69.8	70.5	70.5	70.6	71.6	72.5	73.2	74.1	74.6
2011	76.4	77.6	79.6	80.6	80.7	80.4	80	80	80.1	80.4	80.9	80.5
2012	79.3	79.9	80.8	81.2	82.8	83.7	83.5	84.8	86.8	89.2	89.2	88.9
2013	90.4	90.9	90.9	91.6	91.8	92.8	91.8	92.2	92.2	92.4	91.9	92
2014	93.3	93.5	93.4	94	94.4	94.5	94.4	94.2	94.8	94.5	94.4	94
2015	92.7	93.3	94	94.5	94.6	95.3	94.5	95.3	95.3	95.1	94.9	94.7
2016	94.9	94.8	94.7	95.1	95.2	95.3	95.4	96.3	95.7	96.3	96.2	96.1
2017	97.4	98.2	98.4	99.3	98.9	99.1	98.7	99	99	99.2	99.1	99.1
2018	99.1	99.4	99.5	100	100.8	101.2	100.8	101.2	100.8	101.1	100.7	100.8
2019	100.9	101.6	102	102.8	102.6	102.5	102.4	102.5	102	102.1	102.3	102.7
2020	103.3	104	103.9	104.1	103.8	104.5	104.7	104.5	104	104.1	104.1	104.1
2021	104.8	105.4	105.9	107	107.7	108	108.2	109.2	110	111.1	112.1	112.6

Tabela 20: S9: Indeks potrošačkih cena bez naftnih derivata *IPC_X_ND*, bazni indeks (2015=100)
Izvor: *Eurostat*

God	*S1*	*S2*	*S3*	*S4*	*S5*	*S6*	*S7*	*S8*	*S9*
2009	1000	169.8	268.5	233.1	156.1	172.6	117.7	827.4	961.6
2010	1000	163.1	258.4	237.8	162.6	178.1	112.1	821.9	949.5
2011	1000	166.8	266.6	223.8	167	175.8	124.9	824.2	957.9
2012	1000	148	241.9	231.9	161	217.2	102.4	782.8	941.4
2013	1000	163.1	262.2	227.8	141.9	205	94.5	795	952.7
2014	1000	151.3	268.8	224.9	144.8	210.1	100.1	789.9	955.3
2015	1000	151.7	248.3	221	149.2	229.9	94.5	770.1	945.3
2016	1000	138.9	246	222.4	157.9	234.9	100.5	765.1	942.6
2017	1000	93	293.5	228.1	155.7	229.7	99.5	770.3	943.8
2018	1000	96.4	289.9	225.1	156.5	232.1	97.3	767.9	940.8
2019	1000	90.4	292	225.4	154.3	237.8	93.9	762.2	939.6
2020	1000	90.8	288	229.3	149.4	242.6	89.5	757.4	940.2
2021	1000	88.7	295.2	230.1	145.3	240.8	87.5	759.3	942.2

Tabela 21: Pripadajući ponderi indeksa potrošačkih cena
Izvor: *Eurostat*

Spisak grafika

1 Godišnji indeks, isti mesec prethodne godine=100(m/m-12), bazna godina 2015=100 8
2 Bazni indeks (2015=100) potrošačkih cena - podela na 12 grupa proizvoda 12
3 Bazni indeks (2015=100) potrošačkih cena - podela na 5 grupa proizvoda 12
4 ACF AR(1) procesa: *a*) $\phi_1 = 0.9$, *b*) $\phi_1 = -0.9$ 23
5 ACF AR(2) procesa: *a*) $\phi_1 = 1.2$ i $\phi_2 = -0.25$, *b*) $\phi_1 = 0.2$ i $\phi_2 = 0.6$, *c*) $\phi_1 = -0.2$ i $\phi_2 = 0.6$, *d*) $\phi_1 = 1.2$ i $\phi_2 = -0.7$ 24
6 PACF AR(2) procesa: *a*) $\phi_1 = 1.2$ i $\phi_2 = -0.25$, *b*) $\phi_1 = 0.2$ i $\phi_2 = 0.6$, *c*) $\phi_1 = -0.2$ i $\phi_2 = 0.6$, *d*) $\phi_1 = 1.2$ i $\phi_2 = -0.7$ 26
7 ACF i PACF MA(1) procesa: *a*) $ACF\ za\ \theta_1 = -0.8$, *b*) $PACF\ za\ \theta_1 = -0.8$, *c*) $ACF\ za\ \theta_1 = 0.8$, *d*) $PACF\ za\ \theta_1 = 0.8$ 28
8 ACF MA(2) procesa: *a*) $\theta_1 = 1.2$ i $\theta_2 = -0.25$, *b*) $\theta_1 = 0.2$ i $\theta_2 = 0.6$, *c*) $\theta_1 = -0.2$ i $\theta_2 = 0.6$, *d*) $\theta_1 = 1.2$ i $\theta_2 = -0.7$ 30
9 PACF MA(2) procesa: *a*) $\theta_1 = 1.2$ i $\theta_2 = -0.25$, *b*) $\theta_1 = 0.2$ i $\theta_2 = 0.6$, *c*) $\theta_1 = -0.2$ i $\theta_2 = 0.6$, *d*) $\theta_1 = 1.2$ i $\theta_2 = -0.7$ 30
10 Indeks potrošačkih cena sa ponderima, godišnje stope % 47
11 Analiza reziduala IPC modela 54
12 Projekcije IPC modela 55
13 Analiza reziduala IPC_X_ND modela 56
14 Projekcije IPC_X_ND modela 56
15 Analiza reziduala HRANA_NP modela 57
16 Projekcije HRANA_NP modela 58
17 Analiza reziduala HRANA_P modela 59
18 Projekcije HRANA_P modela 59
19 Analiza reziduala IND_NNRG modela 60
20 Projekcije IND_NNRG modela 61
21 Analiza reziduala ELC_GAS modela 62
22 Projekcije ELC_GAS modela 62
23 Analiza reziduala NRG modela 63
24 Projekcije NRG modela 64
25 Analiza reziduala USL modela 65
26 Projekcije USL modela 65
27 Analiza reziduala RB modela 66
28 Projekcije RB modela 67
29 Cene naftnih derivata (USD/bbl) 68
30 Projekcije agregiranog indeksa bez naftnih derivata *IPC_X_NDagg* 71

31 Prognoze ukupnog indeksa bez naftnih derivata *IPC_X_ND* i agregiranog indeksa *IPC_X_NDagg* za tri horizonta* 74
32 Prognoze inflacije bez naftnih derivata *IPC_X_ND_inflacija* i inflacije agregiranog indeksa *IPC_X_NDagg_inflacija* za tri horizonta* 75

Spisak tabela

1 Izgled ACF i PACF - AR(p) i MA(q) procesa 32
2 Deskriptivne statistike[14] 48
3 Preliminarni modeli serija *IPC* i *IPC_X_ND* 50
4 Preliminarni modeli serija *HRANA_NP* i *HRANA_P*[15] 50
5 Preliminarni modeli serija *IND_NNRG* i *ELC_GAS* 51
6 Preliminarni modeli serija *NRG* i *USL* 51
7 Preliminarni modeli serije *RB* 52
8 Specifikacija SARIMA modela 53
9 RMSE statistika MODEL 1 i MODEL 2 70
10 MAE statistika MODEL 1 i MODEL 2 70
11 MSE statistika MODEL 1 i MODEL 2 71
12 S1: Indeks potrošačkih cena IPC, bazni indeks (2015=100) . . 77
13 S2: Industrijski neprerađena hrana *HRANA_NP*, bazni indeks (2015=100) 77
14 S3: Industrijski prerađena hrana *HRANA_P*, bazni indeks (2015=100) 78
15 S4: Industrijski proizvodi bez energije *IND_NNRG*, bazni indeks (2015=100) 78
16 S5: Energija *NRG*, bazni indeks (2015=100) 79
17 S6: Usluge *USL*, bazni indeks (2015=100) 79
18 S7: Električna energija i gas *ELC_GAS*, bazni indeks (2015=100) 80
19 S8: Roba *RB*, bazni indeks (2015=100) 80
20 S9: Indeks potrošačkih cena bez naftnih derivata *IPC_X_ND*, bazni indeks (2015=100) 81
21 Pripadajući ponderi indeksa potrošačkih cena 81

Spisak slika

1 Statistike IPC modela 54
2 Statistike IPC_X_ND modela 55
3 Statistike HRANA_NP modela 57

4 Statistike HRANA_P modela 58
5 Statistike IND_NNRG modela 60
6 Statistike ELC_GAS modela 61
7 Statistike NRG modela 63
8 Statistike USL modela 64
9 Statistike RB modela 66

Literatura

[1] Krueger, D. and Bićanić, I., "Intermediate macroeconomics," *University of Pennsylvania, Philadelphia*, 2009.

[2] Kovačić, Z. J., *Analiza vremenskih serija*, Ekonomski fakultet, 1998.

[3] Tsay, R. S., *Analysis of financial time series*, John wiley & sons, 2005.

[4] Box, G. E., "GM Jenkins Time Series Analysis: Forecasting and Control," *San Francisco, Holdan-Day*, 1970.

[5] Fritzer, F., Moser, G., and Scharler, J., "Forecasting Austrian HICP and its components using VAR and ARIMA models," Tech. rep., Working paper, 2002.

[6] Pufnik, A. and Kunovac, D., "Kratkoročno prognoziranje inflacije u Hrvatskoj korištenjem sezonskih ARIMA procesa," *Istraživanja, I-18, Croatian National Bank.(https://www. hnb. hr accessed on 10.02. 2013)*, 2006.

[7] Mishkin, F. S., "The channels of monetary transmission: Lessons for monetary policy," 1996.

[8] R Core Team, *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2022.

[9] Gustavsson, P. and Nordström, J., "The impact of seasonal unit roots and vector ARMA modelling on forecasting monthly tourism flows," *Tourism Economics*, Vol. 7, No. 2, 2001, pp. 117–133.

Biografija

Mirjana Arlović rođena je 3. decembra 1992. godine u Benkovcu, Republika Hrvatska. Osnovnu školu *"21. oktobar"* i srednju medicinsku školu *"Dr Ružica Rip"*, smer farmaceutski tehničar, završila je u Somboru. Osnovne studije Primenjene Matematike, smer matematika finansija, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu upisala je 2013. godine i završila u roku. Master studije Primenjene matematike, modul matematika finansija, uspešno je završila sa datumom usvajanja master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacija: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Mirjana Arlović
AU

Mentor: Prof. dr Zagorka Lozanov-Crvenković
ME

Naslov rada: Kratkoročno prognoziranje inflacije primenom sezonskih ARIMA procesa
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2023
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad
MA

Fizički opis rada: (4/86/2/21/9/32/2)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Primenjena matematika
ND

Ključne reči: inflacija, indeksi potrošačkih cena, sezonski autoregresioni procesi pokretnih proseka SARIMA, vremenske serije
PO

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički faklultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom radu je prikazan postupak prognoziranja inflacije, merene indeksom potrošačkih cena, primenom sezonskih autoregresionih integrisanih procesa pokretnih proseka u kratkom roku, na podacima Republike Srbije.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 8.5.2023.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Ivana Štajner-Papuga, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
AN

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents code: Master's thesis
CC

Author: Mirjana Arlović
AU

Mentor: Phd Zagorka Lozanov-Crvenković
MN

Title: Short-term inflation forecasting using seasonal ARIMA processes
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2023
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Trg Dositeja Obradovića 4, 21000 Novi Sad
PP

Physical description: (4/86/2/21/9/32/2)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific fiels: Mathematics
SF

Scientific discipline: Applied mathematics
SD

Subject/Key words: inflation, consumer price index, seasonal autoregressive integrated moving average process SARIMA, time series
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This master thesis presents the procedure for forecasting inflation, measured by the consumer price index, using seasonal autoregressive integrated moving average processes in the short term, based on data of Republic of Serbia.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 8.5.2023.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Phd Danijela Rajter-Ćirić, full professor at Faculty of Science in Novi Sad
Member: Phd Ivana Štajner-Papuga, full professor at Faculty of Science in Novi Sad
Mentor: Phd Zagorka Lozanov-Crvenković, full professor at Faculty of Science in Novi Sad