

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ МАСТЕР РАДА

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ
<p>1. Датум и орган који је именовao Комисију 26. 6. 2023. Веће Департмана за математику и информатику Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду</p> <p>2. Састав Комисије са знаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:</p> <ul style="list-style-type: none">• Др Ивана Војновић, ванредни професор на Природно-математичком факултету у Новом Саду, ужа научна област: анализа и вероватноћа, изабрана у звање 1. 4. 2023. – председник комисије• Др Кристина Аго, доцент на Природно-математичком факултету у Новом Саду, ужа научна област: дискретна математика, изабрана у звање 10. 12. 2021. – члан комисије• Др Бојан Башић, редовни професор на Природно-математичком факултету у Новом Саду, ужа научна област: дискретна математика, изабран у звање 1. 4. 2023. – ментор
II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ
<p>1. Име, име једног родитеља, презиме: Lydia, Samuel, Spevak</p> <p>2. Датум рођења, општина, република: 29. 1. 1996, Нови Сад, Србија</p> <p>3. Година уписа на дипломске академске студије, смер/усмерење: 2018, Мастер професор математике</p>
III НАСЛОВ МАСТЕР РАДА
Еволуција Хилбертовог аксиоматског система
IV ПРЕГЛЕД МАСТЕР РАДА
<p>Мастер рад заузима 65 страна и садржи 8 библиографских јединица. Подељен је на шест глава, уз предговор, списак коришћене литературе и биографију.</p> <p>Прва глава презентује историјски увод у тему рада. Ова глава је подељена на пет секција. У првој секцији укратко се презентује шта подразумева концепција аксиоматског конструисања геометрије. У другој секцији се приказују историјски почети геометрије као науке, што се потом наставља и у трећој секцији, у којој се поближе коментарише живот и рад античких математичара који су међу најзаслужнијима за развој ове дисциплине: Талеса, Питагоре и Еуклида. У четвртој</p>

секцији прелази се на савременије доба, где се разјашњава какав допринос је Давид Хилберт имао у употпуњавању и постављању на формалније темеље онога што је започео још Еуклид. Најзад, у последњој секцији се укратко коментарише како ни Хилберт своју улогу није спровео у једном наврату, већ је процес текао из више итерација, што управо даје шлагворт за главну идеју предметног мастер рада.

У другој глави разматрају се аксиоме инциденције/припадности (прва група Хилбертових аксиома), с примарним акцентом на то у чему је разлика између Хилбертовог скупа аксиома у првобитној и у финалној верзији, уз, наравно, детаљно изложен доказ еквиваленције ове две верзије. Исти образац прати се и у наредним главама: у трећој глави разматрају се аксиоме поретка (друга група Хилбертових аксиома), у четвртој глави аксиоме подударности (трећа група Хилбертових аксиома), у петој глави аксиоме паралелности (четврта група Хилбертових аксиома). Понегде се не доказује само еквиваленција полазног и финалног система, већ и неких других верзија (на пример, у глави посвећеној аксиомама распореда додатно се показује да се тзв. Ван дер Варденова аксиома може користити као еквивалентна истовремена замена за аксиому I_7 и Пашову аксиому).

Коначно, и шеста глава је сличне концепције као претходне четири: анализира се разлика и доказује се еквиваленција између полазне и финалне верзије скупа аксиома непрекидности (пета група Хилбертових аксиома), али поред тога, у ову главу је додатно уврштен и (врло комплексан) доказ постојања дуалности између структуре коју чине све тачке једне праве (и одговарајуће геометријске релације међу њима) и структуре коју чини оса реалних бројева (и одговарајуће релације међу њима). Овај доказ практично демонстрира везу између аксиоматског заснивања геометрије и аксиоматског заснивања појма реалних бројева (што се налази у фундаментима даљег увођења аналитичке геометрије као посебне гране).

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА МАСТЕР РАДА

Рад *Еволуција Хилбертовог аксиоматског система* садржи све битне елементе мастер рада: предговор, текст који је подељен у шест глава и списак коришћене литературе. Рад је написан читко, прегледно и математички прецизно. Структура рада је добро конципирана: уводна глава пружа читаоцу неопходне информације за праћење остатка текста, а потом свака од наредних глава обрађује по једну групу аксиома, редоследом како их је увео Хилберт.

Треба поменути и то да се рад не ограничава искључиво на упоређивања првобитног и финалног система аксиома, већ (као што је поменуто) укључује и везе неких додатних аксиома са Хилбертовима и (такође поменут) доказ дуалности између тачака на правој и реалне осе, али уза све то, рад је прожет још и низом демонстрација како се одређена геометријска тврђења не могу доказати уколико се систем аксиома редукује изостављањем појединих аксиома. Тиме се, с једне стране, аутоматски добија независност изостављених аксиома од остатка система (будући да се таква одабрана тврђења могу доказати на основу пуног система аксиома, што је у раду увек и презентовано пре испитивања шта се дешава након редукције). А с друге стране, одабрана тврђења су углавном таква да одговарајућа изостављена аксиома интуитивно делује као да нема утицаја на посматрано тврђење, те се на овај начин добија упечатљив парадоксалан ефекат.

Све речено сугерише да рад представља вредно методичко штиво, и да може бити од користи и будућим генерацијама студената на уводним курсевима из геометрије, будући да текст сличног типа (бар колико је Комисији познато) до сада није постојао на српском језику, а ни на страним језицима се оваквој дискусији није придавало превише пажње.

VI ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

Формално заснивање геометрије какву данас познајемо почива на пет група аксиома, које је поставио Давид Хилберт у својим *Основима геометрије* (немачки: *Grundlagen der Geometrie*) из 1899. год. Важност Хилбертовог дела се огледа у постављању прецизног скупа аксиома за еуклидску геометрију и у њиховој детаљној анализи, као и у везама аксиома са неким од фундаменталних тврђења у геометрији. Трајни утицај овог дела се не односи само на геометрију, већ и на улогу аксиома у математичким теоријама генерално.

Међутим, будући да је ово капитално дело доживело велик број издања, Хилберт је кроз време учовао нека побољшања свог аксиоматског система, те је он доживљавао извесне модификације. Последње издање које се појавило за време Хилбертовог живота је седмо, и с њим је систем аксиома постао коначан (још неколико издања се појавило и постхумно, али без промена међу аксиомама).

У предметном мастер раду је направљено поређење иницијалног и коначног система аксиома. По својој суштини, модификације су такве да упрошћавају постављени систем аксиома, тј. следећа верзија постулира наизглед „слабија“ тврђења од претходне (што је и природно, будући да је генерална идеја било ког аксиоматског система да се у старту захтева што је мање могуће). Међутим, ово је заиста само *наизглед*, будући да се испоставља да је тако ослабљен систем ипак еквивалентан полазном, што је и суштина предметног мастер рада.

Поред овог главног циља, текст је додатно обогаћен анализом још неких еквивалентних модификација аксиоматског система, те укључивањем још неких поучних геометријских тврђења, међу којима се издваја кореспонденција између скупа тачака на правој и скупа реалних бројева, као и низ одабраних тврђења за која се демонстрира да се њихов доказ ни на који начин не може извести без ослањања на поједине аксиоме у неком кораку доказа.

VII КОНАЧНА ОЦЕНА МАСТЕР РАДА

Садржај и структура мастер рада су у потпуности урађени у складу са одобреном темом.

Прегледно и детаљно су наведени најављени резултати, коришћена литература је релевантна а докази су математички коректно и прецизно изведени. Анализа приказаних тврђења је употпуњена низом пажљиво одабраних примера који јасно показују дубоко разумевање материје.

Уопште, материја је изложена на начин који показује да је кандидаткиња у великој мери овладава овом облашћу.

VIII ПРЕДЛОГ

Имајући у виду све претходно речено, Комисија предлаже да се мастер рад *Еволуција Хилбертовог аксиоматског система* прихвати а кандидаткињи Лидији Спевак (Lydia Sprevak) одобри одбрана.

Нови Сад,

ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

Др Ивана Војновић,
ванредни професор ПМФ-а, председник

Др Кристина Аго,
доцент ПМФ-а, члан

Др Бојан Башић,
редовни професор ПМФ-а, ментор