UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Lydia Spevak

Evolucija Hilbertovog aksiomatskog sistema

Master rad

Mentor:
dr Bojan Bašić

Novi Sad, 2023

Sadržaj

Predgovor

Delo Osnove geometrije je godine 1899. objavio matematičar po imenu David Hilbert. Bilo je to delo u kojem je ovaj matematičar otklonio nedostatke Euklidove geometrije, koja je za vreme Euklida predstavljala pravu naučnu revoluciju. Zašto? Bio je to pokušaj aksiomatske konstrukcije geometrije kao nauke. U ovom master radu se za početak upravo govori o tome šta to znači aksiomatski konstruisati naučnu disciplinu. Hilbert je nastavio u tom pravcu - u pravcu Euklidovog pokušaja aksiomatski konstruisati geometriju kao nauku. Hilbert ju je zasnovao na pet grupa aksioma - to su aksiome incidencije, poretka, paralelnosti, podudarnosti i neprekidnosti, iz kojih se dalje gradi geometrija dokazivanjem raznih tvrđenja.

Međutim, Hilbert je uočavao da mogu da budu odrađene neke izmene u njegovom delu. I tako su se vremenom pojavljivala nova izdanja ovog dela, pri čemu je u novijim izdanjima Hilbert uvek težio ka oslabljivanju svog sistema aksioma.

Ono što se u ovom master radu pokazuje je ekvivalencija prvobitnog i savremenog sistema Hilbertovih aksioma. To je glavni cilj ovog rada. Dakle, pokazuje se da se iz savremenih aksioma mogu pokazati one prvobitne Hilbertove aksiome. Te aksiome se stoga u radu javljaju kao teoreme koje je potrebno dokazati.

Svakako, postoje i neke druge stvari koje se pokazuju u ovom radu pored ovog glavnog zadatka.

Jedna od sporednih stvari koja se u radu daje je nekoliko primera koji služe kao dokaz da neka od tvrđenja ne mogu da se izvedu iz određene grupe aksioma. Kako već od druge grupe aksioma ne možemo da govorimo o konačnom broju tačaka, kao bitan primer se daje da korišćenjem samo prve grupe aksioma ne možemo da dokažemo egzistenciju beskonačno mnogo tačaka. Jedan od tih primera je model tetraedar, koji se sastoji od konačnog broja tačaka. No, postoje i takvi primeri, gde se čak ne uzimaju ni sve aksiome prve grupe i onda se pokazuje da neka tvrđenja iz ovako redukovanih sistema, koja su naočigled vrlo jasna, u stvari ne mogu dokazati.

Takođe, kod druge grupe aksioma se javlja ekvivalencija Hilbertovog sistema sa Van der Vardenovim sistemom aksioma.

I kao šlag na tortu, rad sadrži i jedan zanimljiv i kompleksan dokaz korespondencije između realnih brojeva i tačaka na pravoj, koji je moguće izvesti zahvaljujući aksiomama neprekidnosti.

Lydia Spevak

Glava 1

Istorijski uvod

1.1 Aksiomatska konstrukcija geometrije

Aksiomatski konstruisati geometriju kao naučnu disciplinu je takav postupak izgradnje geometrije u kojem važe sledeće četiri stavke:

- za početak, u prvom koraku, se odrede osnovni pojmovi, to su pojmovi koji se ne definišu;
- u drugom koraku se odrede aksiome, to su tvrđenja koja se ne dokazuju;
- na osnovu osnovnih pojmova i aksioma se definišu izvedeni pojmovi;
- i zatim se pomoću osnovnih pojmova, aksioma i izvedenih pojmova formiraju tvrđenja, koja se dokazuju.

1.2 Istorija geometrije

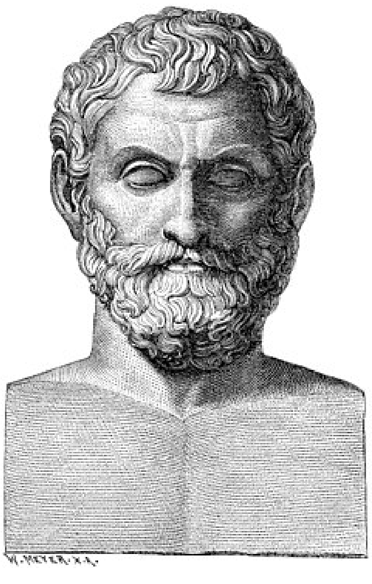
Jedna od grana matematike je i geometrija. Geometrija se razvijala od samog početka čovekove egzistencije i to zahvaljujući njegovim svakodnevnim aktivnostima, zahvaljujući potrebama čoveka kao što su potreba za skloništem, kućom, potreba za pravljenjem raznolikog alata da li za ubijanje životinja, da li za obrađivanje zemljišta, pravljenja odeće...

Naprednija geometrijska znanja se vezuju za indijsku i kinesku matematiku, a kasnije i mesopotamsku i egipatsku. Dokaze o ovoj matematici dobijamo iz raznih crteža koji imaju upravo geometrijski sadržaj. Naravno, geometrija ovog doba se ne bavi preteranim dokazivanjem, nego uglavnom daje samo postupke kako nešto rešiti i kako nešto konstruisati. Na slici su prikazane egipatske piramide za čiju izgradnju je bilo potrebno malo naprednijeg matematičkog znanja.

Slika 1.1. Piramide u Egiptu

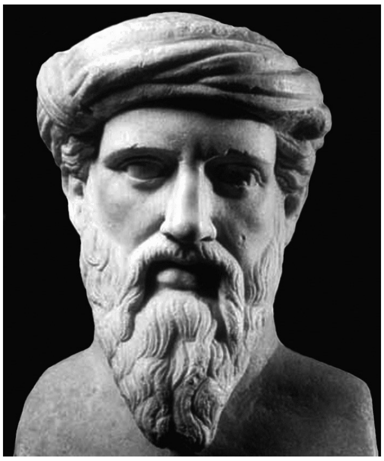
Period grčke matematike je vrlo značajan period u razvoju geometrije. Tada je na scenu istupila nekolicina matematičara, od kojih su Tales iz Mileta i Pitagora sa Samosa jedni od najbitnijih u razvoju geometrije kao nauke. Ipak, po mišljenju mnogih, najznačajniji matematičar tog doba je Euklid.

1.3 Tales, Pitagora, Euklid



Slika 1.2. Tales iz Mileta

Već pomenut Tales iz Mileta je bio grčki filozof, koji je živeo oko 7. i 6. veka pre nove ere. Njegova filozofija se zasnivala na tome da je praelement svih stvari voda. Kad je u pitanju oblik Zemlje, svrstava se u one naučnike koji su verovali da je Zemlja oblika lopte. U geometriji je ovaj naučnik pre svega poznat po Talesovoj teoremi.



Slika 1.3. Pitagora sa Samosa

Ko još nije čuo da je kvadrat nad hipotenuzom pravouglog trougla jednak zbiru kvadrata nad katetama tog trougla? To je Pitagorina teorema. Pitagora sa Samosa, koji je živeo oko 6. veka pre nove ere, je bio antički filozof, čija filozofija je u velikoj meri uticala na matematiku. U matematici je pre svega poznat po Pitagorinoj teoremi, ali i po Pitagorejskoj školi koja je u svoje vreme bila veoma uticajna u društvu. U svojoj filozofiji, Pitagora je smatrao da je osnova svega broj.

Euklid je bio grčki filozof koji je živeo oko 4. i 3. veka pre nove ere. Pre svega je poznat zbog svog slavnog dela Elementi. U ovom delu je sumirao geometrijska znanja i pokušao je, kao prvi u istoriji čovečanstva, da aksiomatski konstruiše gometriju kao naučnu disciplinu. Bio je to veliki napredak za geometriju.

Delo Elementi se sastoji od 13 knjiga. Za osnovne pojmove Euklid je uzeo tačku, pravu i ravan. Aksiome je nazvao postulatima, ima ih pet i glase ovako:

I Od svake tačke se ka svakoj tački može povući prava.

II Svaka ograničena prava može da bude u svom pravcu produžena neprekidno.

III Iz svakog središta svakim rastojanjem se može opisati krug.

IV Svi pravi uglovi su međusobno jednaki.

Slika 1.4. Statua Euklida u muzeju prirodne istorije Oksfordskog univerziteta

Slika 1.5. Fragment Elemenata

V Ako neka prava u preseku sa druge dve prave obrazuje sa iste strane dva unutrašnja ugla takva da je njihov zbir manji od zbira dva prava ugla, onda će te dve prave, produžene u beskonačno, da se seku sa one strane sa koje su upravo ta dva pomenuta ugla čiji zbir je manji od zbira dva prava ugla.

1.4 David Hilbert i geometrija

Euklidovo delo Elementi se dugi niz godina koristilo i smatralo se jednim nepokolebljivim delom geometrije i, naravno, delom uspešnog postupka konstrukcije geometrije aksiomatski. No ipak, ovo delo je imalo neke nedostatke, koje je godine 1899. otklonio nemački matematičar David Hilbert, kad je objavio svoje delo Osnove geometrije. Suština ovog dela bila je da se kompletira aksiomatsko zasnivanje geometrije koje je započeo Euklid. Hilbert je zadržao pojmove tačke, prave i ravni kao osnovne, a odnose među njima raščlanio je na pitanja incidencije, rasporeda, podudarnosti, paralelnosti i neprekidnosti.

Razlog zbog kojeg je Hilbert krenuo na put kompletiranja Euklidove geometrije je taj da su Euklidove aksiome bile nedovoljne da bi se mogla izvesti određena tvrđenja koja je inače Euklid naveo u svom delu. Na primer, jedan od propusta koji se pojavio u Euklidovim Elementima je bio kod crtanja jednakostraničnog trougla. Da bi se nacrtao jednakostranični trougao uzimaju se dve tačke koje će biti dva vrha tog trougla. Treći vrh trougla se dobija u preseku dve kružnice čiji centri su upravo prva dva pomenuta vrha a njihovi poluprečnici su upravo rastojanje ta dva vrha. Međutim, Euklid ništa ne govori o preseku tih kružnica. Jedan od bitnih propusta je i korišćenje današnje takozvane Pašove aksiome koja se kod Euklida podrazumeva, no iz njegovog sistema aksioma se u stvari ne može izvesti. Naravno, postoji još propusta u Euklidovoj geometriji. Hilbert se stoga pokrenuo na ozbiljan i vrlo kompleksan posao konstrukcije geometrije kao naučne discipline, u čemu je i bio uspešan.

1.5 Evolucija Hilbertovog aksiomatskog sistema

Kako je vreme odmicalo, Hilbert je uočavao da treba da napravi neke izmene u svom delu. Aksiomatski sistem je stoga nailazio na promene i poboljšavao se. Izmene su nastajale u cilju da se sistem aksioma što više uprosti, što je u stvari i poenta svakog aksiomatskog sistema. Ono što se prezentuje u

Slika 1.6. David Hilbert

narednim poglavljima je upravo poređenje Hilbertovog prvobitnog i savremenog sistema aksioma, to jest pokazuje se kako se iz savremenih „slabijih“ aksioma mogu dokazati tvrđenja koja su se prvobitno uvodila kao aksiome.

Glava 2

Aksiome incidencije - prva grupa aksioma

Najpre navodimo kako izgleda aktuelna lista Hilbertovih aksioma incidencije (aksioma pripadanja).

$\mathbf{I_1}$ Za svake dve tačke postoji bar jedna prava koja je incidentna sa svakom od njih.

$\mathbf{I_2}$ Za svake dve tačke postoji najviše jedna prava koja je incidentna sa svakom od njih.

$\mathbf{I_3}$ Za svaku pravu postoje bar dve tačke koje su s njom incidentne. Postoje tri tačke koje nisu incidentne ni sa jednom pravom.

$\mathbf{I_4}$ Za svake tri tačke koje nisu incidentne s istom pravom postoji bar jedna ravan koja je incidentna sa svakom od njih. Svaka ravan je incidentna s bar jednom tačkom.

$\mathbf{I_5}$ Za svake tri tačke koje nisu incidentne s istom pravom postoji najviše jedna ravan koja je incidentna sa svakom od njih.

$\mathbf{I_6}$ Ako su dve tačke neke prave incidentne s nekom ravni, tada su sve tačke te prave incidentne s tom ravni.

$\mathbf{I_7}$ Ako su dve ravni incidentne s nekom tačkom, tada postoji bar još jedna tačka s kojom su obe ravni incidentne.

$\mathbf{I_8}$ Postoje četiri tačke koje nisu incidentne s jednom ravni.

Hilbertove prvobitne aksiome incidencije navodimo odmah iza savremenih. Napomenimo da ćemo kod prvobitnih aksioma u njihovoj notaciji stavljati oznaku prim - ’, dok kod aktuelnih to neće biti slučaj.

$\mathbf{I_1}$' Za svake dve tačke postoji bar jedna prava koja je incidentna sa svakom od njih.

$\mathbf{I_2}$' Za svake dve tačke postoji najviše jedna prava koja je incidentna sa svakom od njih.

$\mathbf{I_3}$' Za svake tri tačke koje nisu incidentne s istom pravom postoji bar jedna ravan koja je incidentna sa svakom od njih.

$\mathbf{I_4}$' Za svake tri tačke koje nisu incidentne s istom pravom postoji najviše jedna ravan koja je incidentna sa svakom od njih.

$\mathbf{I_5}$' Ako su dve tačke neke prave incidentne s nekom ravni, tada su sve tačke te prave incidentne s tom ravni.

$\mathbf{I_6}$' Ako su dve ravni incidentne s nekom tačkom, tada postoji bar još jedna tačka s kojom su obe ravni incidentne.

$\mathbf{I_7}$' Za svaku pravu postoje bar dve tačke koje su s njom incidentne. U svakoj ravni postoje bar tri tačke koje nisu incidentne s istom pravom. Postoje četiri tačke koje nisu incidentne s jednom ravni.

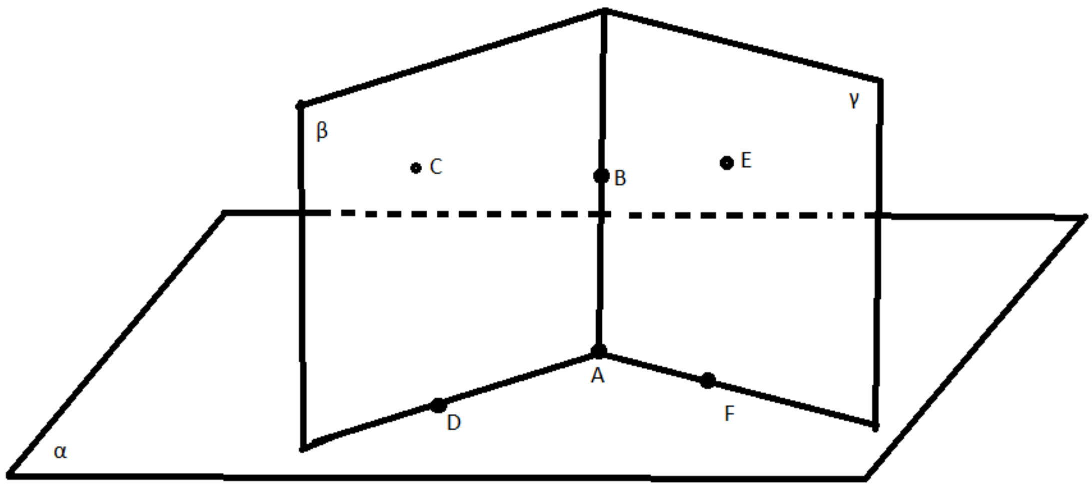
2.1 Razlike u sistemima aksioma prve grupe

Dakle, drugi deo aksiome $\mathbf{I_7}$' je oslabljen. Umesto njega je uveden drugi deo aksiome $\mathbf{I_3}$. Takođe, savremeni sistem je obogaćen drugim delom aksiome $\mathbf{I_4}$. Svi ostali delovi aksioma se podudaraju sa savremenim, jedino je razlika u notaciji.

Dokažimo da se drugi deo aksiome $\mathbf{I_7}$' može dokazati iz oslabljenih, savremenih aksioma incidencije.

Lema 2.1. *Za svaku tačku A i za svaku pravu a, takvu da $A \notin a$, postoji jedna i samo jedna ravan α, takva da $A \in \alpha$ i $a \subset \alpha$.*

Dokaz. U prvom delu dokaza dokazujemo egzistenciju ove ravni: Prvi deo aksiome $\mathbf{I_3}$ nam daje egzistenciju tačaka B i C takvih da $B \in a$ i $C \in a$. Pokažimo da su tačke A, B i C nekolinearne. Pretpostavimo suprotno, da postoji prava b takva da $A, B, C \in b$. Kako su tačke B i C incidentne i sa pravom a i sa pravom b, na osnovu aksiome $\mathbf{I_2}$ dobijamo da se a poklapa sa b, odakle sledi da i $A \in a$, što je u kontradikciji sa uslovom da $A \notin a$. Dakle, tačke A, B i C su nekolinearne tačke. Aksioma $\mathbf{I_4}$ nam daje postojanje ravni α koja je incidentna sa A, B i C. Kako $B, C \in \alpha$, iz aksiome $\mathbf{I_6}$ imamo da $a \subset \alpha$. Dakle, dokazali smo egzistenciju ravni α koja je incidentna sa A i a.



Slika 2.1. Ravan α sadrži tri nekolinearne tačke; slika uz dokaz teoreme 2.2

U drugom delu dokaza dokazujemo jedinstvenost ove ravni. Pretpostavimo suprotno, da postoji ravan β različita od ravni α koja je incidentna sa A i a. Sada imamo da sve tri tačke A, B i C pripadaju i ravni α i ravni β, te na osnovu aksiome $\mathbf{I_5}$ dolazimo do zaključka da je α u stvari isto što i β, što nas dovodi do kontradikcije. Dakle, dokazali smo i jedinstvenost ove ravni. $\square$

Teorema 2.2. *Svaka ravan sadrži tri nekolinearne tačke.*

Dokaz. Neka je α proizvoljna ravan. Drugi deo aksiome $\mathbf{I_4}$ govori da postoji neka tačka $A \in \alpha$. Dalje koristimo aksiomu $\mathbf{I_8}$. Ova aksioma daje egzistenciju neke tačke B koja ne pripada α, $B \notin \alpha$. Iz aksiome $\mathbf{I_1}$ dobijamo da postoji prava a takva da je $A \in a$ i $B \in a$. Sada se koristi drugi deo aksiome $\mathbf{I_3}$, koji nam daje postojanje nove tačke C koja ne pripada pravoj a, $C \notin a$. Na osnovu prethodne leme dobijamo da postoji jedinstvena ravan β koja je incidentna sa pravom a i sa tačkom C. Kako A pripada ravni α i ravni β, na osnovu $\mathbf{I_7}$ imamo da postoji neka tačka D različita od A koja je incidentna sa svakom od ravni α i β. No na osnovu $\mathbf{I_8}$ dobijamo egzistenciju tačke $E \notin \beta$. Iskoristimo ponovo prethodno dokazanu lemu za tačku E i pravu a, za koje važi $E \notin a$. Tako dobijamo egzistenciju jedinstvene ravni γ takve da $E \in \gamma$ i $a \subset \gamma$. Ponovo, kako je tačka A incidentna i sa ravni α i sa ravni γ, na osnovu $\mathbf{I_7}$ postoji tačka F različita od tačke A takva da je F incidentna i sa α i sa γ.

Našli smo tri tačke A, D i F koje su incidentne s ravni α. Želimo da pokažemo da su ove tačke nekolinearne. Pretpostavimo suprotno, da postoji neka prava b koja je incidentna s ove tri tačke. Kako $A, D \in b$ i $A, D \in \beta$ i kako $A, F \in b$ i $A, F \in \gamma$, na osnovu $\mathbf{I_6}$ sledi da je prava b incidentna i sa β i sa γ. No znamo da je takođe i tačka B, koja ne pripada pravoj b, incidentna i sa β i sa γ, pa na osnovu jedinstvenosti ravni prethodne leme dobijamo da je u stvari ravan β jednaka ravni γ. Odatle sledi da tačka $E \in \beta$, gde konačno dolazimo do kontradikcije. Dakle, tačke A, D i F su nekolinearne i time je teorema dokazana. □

2.2 Primeri tvrđenja koja ne mogu da se dokažu iz redukovanog sistema aksioma prve grupe

Pokažimo najpre nekoliko tvrđenja koja mogu da se dokažu pomoću aksioma prve grupe. Zatim ćemo pokazati kako upravo ta tvrđenja ne mogu da se dokažu koristeći samo određene aksiome, to jest koristeći sistem aksioma prve grupe iz kojeg su neke aksiome izbačene.

Teorema 2.3. *Ako za dve ravni, α i β, važi:*

$$(\forall X)\,(X \in \alpha \implies X \in \beta)\,,$$

tada se ravni α i β poklapaju.

Dokaz. Uzmimo proizvoljne ravni α i β i pretpostavimo da je ispunjeno $(\forall X)\,(X \in \alpha \implies X \in \beta)$, odnosno da je $\alpha \subset \beta$. Znamo da svaka ravan sadrži tri nekolinearne tačke, te to važi i za ravan α. Označimo te tri tačke sa A, B i C. Kako su ove tačke incidentne s α, zbog pretpostavke imamo da su incidentne i s β. Na osnovu aksiome $\mathbf{I_5}$ zaključujemo da se ravni α i β poklapaju. □

Primer 2.4. Bez korišćenja aksiome $\mathbf{I_8}$ se ne može dokazati prethodno tvrđenje. Da bismo ovo pokazali, konstruisaćemo model. Neka su „tačke“ elementi skupa $\{A, B, C\}$, neka su „prave“ njegovi dvočlani podskupovi, a „ravni“ neka su skupovi $\{A, B\}$ i $\{A, B, C\}$. Kažemo da je tačka „incidentna“ s pravom/ravni ukoliko je posmatrana tačka element skupa koji predstavlja posmatranu pravu/ravan. Ovaj model zadovoljava prvih sedam aksioma prve grupe i ne zadovoljava aksiomu $\mathbf{I_8}$. Pomenuto tvđenje u ovom modelu ne važi. Uzmimo na primer da je ravan α skup $\{A, B\}$ a ravan β skup $\{A, B, C\}$. Tada je za ove dve ravni zadovoljeno $(\forall X)\,(X \in \alpha \implies X \in \beta)$, ali se ove dve ravni ne poklapaju.

Teorema 2.5. *Presek dve različite ravni je prazan skup ili prava.*

Dokaz. Uzmimo dve proizvoljne i različite ravni α i β. Imamo dve mogućnosti: da je presek ove dve ravni prazan skup ili da u preseku nešto postoji. Ako je $\alpha \cap \beta = \emptyset$, onda je teorema dokazana, a ako u preseku ove dve ravni postoji neka tačka, na primer tačka P, onda na osnovu aksiome $\mathbf{I_7}$ dobijamo postojanje još jedne tačke Q različite od P takve da $Q \in \alpha \cap \beta$. Na osnovu $\mathbf{I_1}$ dobijamo egzistenciju neke prave p takve da $P, Q \in p$. Koristeći aksiomu $\mathbf{I_6}$ na činjenice da $P, Q \in p$ i $P, Q \in \alpha, \beta$, dobijamo da je prava p podskup i ravni α i ravni β, što znači da je $p \subset \alpha \cap \beta$. Još moramo da pokažemo da se u ovom slučaju u preseku ove dve ravni ne nalazi ništa više osim prave p. Te pretpostavimo suprotno, to jest da postoji još neka tačka X koja nije incidentna s pravom p i koja se nalazi u preseku ravni α i β. Na osnovu leme 2.1 zaključujemo da postoji jedinstvena ravan γ takva da $X \in \gamma$ i $p \subset \gamma$, no kako $X \in \alpha$ i $p \subset \alpha$, to onda znači je $\gamma \equiv \alpha$. Iz sličnog razloga je i $\gamma \equiv \beta$, te mora $\alpha \equiv \beta$. Došli smo do kontradikcije, jer smo pretpostavili da su ravni α i β dve različite ravni. Dakle, u ovom drugom slučaju zaključujemo da je

$$\alpha \cap \beta = p.$$

□

Primer 2.6. Pokažimo da se iz sistema aksioma prve grupe, iz koje je izbačena aksioma $\mathbf{I_1}$, ne može dokazati prethodno tvrđenje. U tu svrhu konstruišimo model: „Tačke“ su elementi skupa $\{A, B, C, D\}$. „Pravih“ u ovom modelu nema, to jest skup pravih je prazan skup. „Ravni“ su tročlani podskupovi skupa $\{A, B, C, D\}$. Relacija incidencije se definiše na uobičajeni način - pripadnost elementa skupu. U datom modelu ne važi prva aksioma, sve ostale aksiome prve grupe su zadovoljene. Dato tvrđenje takođe ne važi. Dakle, zaključujemo da se ono ne može izvesti iz ovako redukovanog sistema aksioma.

Teorema 2.7. *Među četiri nekomplanarne tačke nikoje tri nisu kolinearne.*

Dokaz. Neka su A, B, C, D proizvoljne četiri nekomplanarne tačke. Pretpostavimo suprotno, to jest da postoje neke tri među njima koje su kolinearne. Bez uticaja na opštost, neka to budu tačke A, B i C. Dakle, postoji neka prava p takva da $A, B, C \in p$. Posmatrajmo sada tačku D. Ako tačka $D \notin p$, onda na osnovu leme 2.1 dobijamo egzistenciju jedinstvene ravni α takve da $D \in \alpha$ i $p \subset \alpha$. No kako $A, B, C \in p$, to znači da i za tačke A, B, C važi da pripadaju ravni α, u stvari dobijamo da tačke A, B, C i D jesu komplanarne. Kontradikcija. A u slučaju da $D \in p$, onda na osnovu $\mathbf{I_3}$ dobijamo egzistenciju neke tačke $E \notin p$ i onda ponovo na osnovu iste leme dobijamo egzistenciju jedinstvene ravni α takve da $E \in \alpha$ i $p \subset \alpha$. No kako $A, B, C, D \in p$, to je onda $A, B, C, D \in \alpha$. Kontradikcija. Dakle, među tačkama A, B, C, D ne postoje tri tačke koje su kolinearne. $\square$

Primer 2.8. Na osnovu sistema aksioma prve grupe iz kojeg je izbačen stav: „Postoje tri nekolinearne tačke," to jest drugi deo aksiome $\mathbf{I_3}$, se ne može dokazati prethodno tvrđenje. Kako bismo ovo pokazali, opet konstruišemo model u kojem će da važe sve aksiome prve grupe, osim drugog dela aksiome $\mathbf{I_3}$, i dodatno, u kojem neće da važi pomenuto tvrđenje. Model: „Tačke" su elementi skupa $\{A, B, C, D\}$. Jedina „prava" je skup koji sadrži upravo ove četiri tačke. „Ravni" u ovom modelu nema. Relacija incidencije se definiše na uobičajeni način - pripadnost elementa skupu. U ovom modelu su tačke A, B, C i D nekomplanarne, međutim, koje god tri od njih da uzmemo, vidimo da su one kolinearne.

Glava 3

Aksiome poretka - druga grupa aksioma

Kao i u prethodnoj glavi, za početak navodimo aktuelne a onda i prvobitne Hilbertove aksiome poretka (aksiome rasporeda). I za notaciju važi isto kao u prethodnoj glavi - bez oznake ' ako su to savremene aksiome a sa oznakom ' kad su u pitanju prvobitne aksiome.

$\mathbf{II_1}$ Ako je $A-B-C$, tada su A, B i C tri različite kolinearne tačke i pritom je $C-B-A$.

$\mathbf{II_2}$ Za svake dve tačke A i B postoji tačka C takva da je $A-B-C$.

$\mathbf{II_3}$ Za svake tri kolinearne tačke A, B i C važi najviše jedna od relacija

$$A-B-C,\ B-C-A,\ C-A-B.$$

$\mathbf{II_4}$ (Pašova aksioma) Neka su A, B i C tri nekolinearne tačke i neka je s prava ravni ABC takva da $A, B, C \notin s$. Ako je prava s incidentna s tačkom X takvom da $B-X-C$, tada je ona incidentna s tačkom Y takvom da je $A-Y-C$ ili s tačkom Z takvom da je $A-Z-B$.

Prvobitne aksiome rasporeda su:

$\mathbf{II_1}$' Ako je $A-B-C$, tada su A, B i C tri različite kolinearne tačke i pritom je $C-B-A$.

$\mathbf{II_2}$' Za svake dve tačke A i C postoji tačka B takva da je $A-B-C$ i tačka D takva da je $A-C-D$.

II$_{3'}$ Za svake tri kolinearne tačke A, B i C važi tačno jedna od relacija

$$A - B - C,\ B - C - A,\ C - A - B.$$

II$_{4'}$ Neka su date četiri kolinearne tačke. Uvek je moguće označiti ih sa A, B, C, D tako da tačka označena sa B bude između tačaka A i C i takođe između tačaka A i D, i štaviše, da tačka označena sa C bude između tačaka A i D i takođe između tačaka B i D.

II$_{5'}$ Neka su A, B i C tri nekolinearne tačke i neka je s prava ravni ABC takva da $A, B, C \notin s$. Ako je prava s incidentna s tačkom X takvom da $B - X - C$, tada je prava s incidentna ili s tačkom Y takvom da $A - Y - C$ ili s tačkom Z takvom da $A - Z - B$.

3.1 Razlike u sistemima aksioma druge grupe

Aksioma **II$_{2'}$** je oslabljena. Deo ove aksiome koji garantuje postojanje tačke B takve da važi raspored $A - B - C$ je izbačen. Aksioma **II$_{3'}$** je takođe oslabljena. Umesto važenja tačno jedne, aksioma novog sistema govori da za svake tri kolinearne tačke A, B i C važi najviše jedna od pomenutih relacija. Aksioma **II$_{4'}$** se može dokazati iz ostalih aksioma druge grupe. Poslednja **II$_{5'}$** aksioma je takođe oslabljena. Umesto isključive disjunkcije, savremena Pašova aksioma nam daje samo običnu disjunkciju.

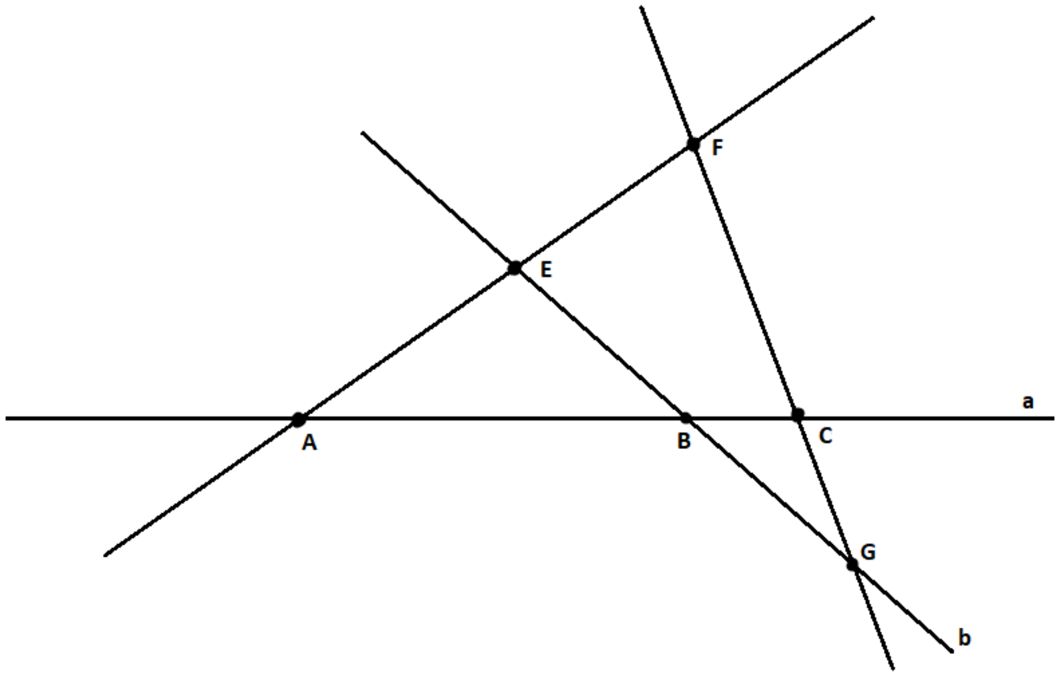
Dokažimo dakle jača tvrđenja koja je Hilbert prvobitno uveo kao aksiome.

Teorema 3.1. *Za svake dve tačke A i C postoji tačka B takva da važi raspored $A - B - C$.*

Dokaz. Na osnovu aksiome **I$_1$** znamo da za tačke A i C postoji neka prava a koja je incidentna sa svakom od njih. Iz drugog dela aksiome **I$_3$** zaključujemo da postoji tačka E takva da $E \notin a$. Sada koristimo **II$_2$** za tačke A i E. Ova aksioma nam daje egzistenciju tačke F takve da važi $A - E - F$. Ponovimo isto za tačke F i C. Dakle, dobijamo egzistenciju tačke G takve da važi $F - C - G$. Koristimo **I$_1$** za tačke E i G, koja nam daje postojanje neke prave b koja je incidentna sa ove dve tačke. U sledećem koraku proveravamo da li su za tačke A, C i F i za pravu b ispunjeni uslovi Pašove aksiome:

1. Tačke A, C i F su nekolinearne tačke:

   Pretpostavimo suprotno, da postoji prava c takva da $A, C, F \in c$. No kako imamo da takođe A, C pripadaju pravoj a, zbog **I$_2$** zaključujemo da se a poklapa sa c, pa imamo da i $F \in a$. Kako imamo da važi



Slika 3.1. Egzistencija tačke B takve da je $A - B - C$.

$A-E-F$, odavde zaključujemo da i E pripada pravoj a, gde dolazimo do kontradikcije. Dakle, A, C i F jesu nekolinearne tačke.

2. Tačke A, C i F ne pripadaju pravoj b :

   - Pretpostavimo suprotno, da $C \in b$. Kako $F-C-G$ i kako važi da $C, G \in b$, dobijamo zbog $\mathbf{I_2}$ da i $F \in b$. Kako sad E i F pripadaju b i kako važi $A - E - F$, ponovo, koristeći istu aksiomu dobijamo da i $A \in b$. Time je pokazano da su A, C i F kolinearne tačke, što smo već videli da nije moguće.

   - $A \notin b$: Dokaz je sličan.

   - $F \notin b$: Dokaz je sličan.

3. Za tačku E koja je incidentna s pravom b važi da je $A - E - F$.

Dakle, uslovi Pašove aksiome su zadovoljeni, što znači da postoji neka tačka $X \in b$ takva da je $A - X - C$ ili postoji neka tačka $Y \in b$ takva da je $C-Y-F$. Pokažimo da prethodno opisana tačka Y ne postoji. Pretpostavimo suprotno. Kako važi $C - Y - F$ i takođe $F - C - G$, na osnovu $\mathbf{II_3}$ možemo da zaključimo da $Y \neq G$. A kako su tačke Y i G incidentne s pravom b i kako važe rasporedi iz prethodne rečenice, zbog $\mathbf{I_2}$ zaključujemo da i tačke C i F takođe pripadaju pravoj b, što nam daje kontradikciju. Dakle, ovakva tačka Y ne postoji. Iz čega sledi da mora da postoji tačka X takva da je $A - X - C$. Tačka X je u stvari tražena tačka B. $\square$

Teorema 3.2. *Za svake tri kolinearne tačke A, B i C važi tačno jedna od relacija*

$$A - B - C, \; B - C - A, \; C - A - B.$$

Dokaz. Označimo sa s pravu koja je određena tačkama A, B i C, to jest $p(A, B, C) = s$. Bez umanjenja opštosti i koristeći aksiomu $\mathbf{II_3}$, pretpostavimo da ne važe rasporedi $B - C - A$ i $C - A - B$. Da bismo dokazali teoremu, to znači da moramo da pokažemo da važi raspored $A - B - C$. Iz drugog dela aksiome $\mathbf{I_3}$ dobijamo egzistenciju tačke D takve da $D \notin s$. Koristimo aksiomu $\mathbf{II_2}$ za tačke B i D, koja nam daje egzistenciju neke tačke E takve da važi $B - D - E$. Označimo sa t pravu određenu tačkama A i D. U sledećem koraku proveravamo da li su za tačke B, C i E i za pravu t ispunjeni uslovi Pašove aksiome:

1. Tačke B, C i E su nekolinearne:

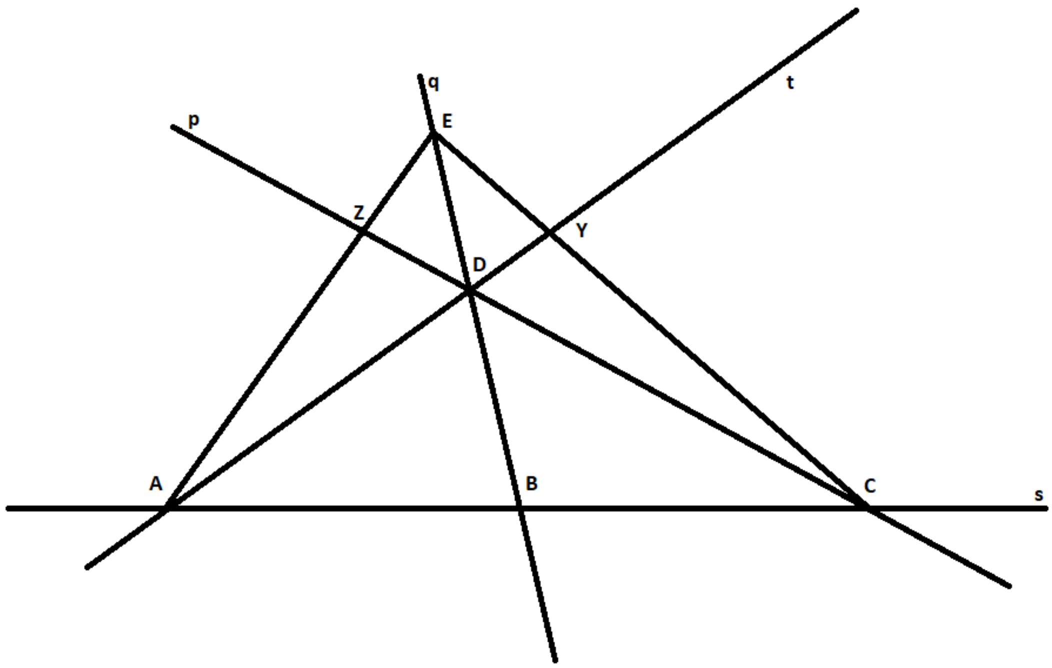
   Pretpostavimo suprotno, da postoji neka prava f takva da $B, C, E \in f$. Kako $B - D - E$ i kako $B, E \in f$, zbog $\mathbf{I_2}$ možemo da zaključimo da i $D \in f$. Imamo $B, C, E, D \in f$ i $B, C \in s$, što iz $\mathbf{I_2}$ daje da je prava f u stvari isto što i prava s. Odatle sledi da $D \in s$, što nas dovodi do kontradikcije. Dakle, tačke B, C i E jesu nekolinearne.

2. Tačke B, C i E ne pripadaju pravoj t :

   - Pretpostavimo suprotno, da $B \in t$. Kako $A, B \in t$ i $A, B \in s$, to sledi iz $\mathbf{I_2}$ da se prave t i s poklapaju, pa dobijamo da D pripada pravoj s, što nas dovodi do kontradikcije. Dakle, tačka B ne pripada pravoj t.
   - $C \notin t$: Analogno.
   - Pretpostavimo da $E \in t$. Pa kako važi $B - D - E$ i kako $D, E \in t$, iz $\mathbf{I_2}$ sledi da i $B \in t$. A već smo pokazali da $B \notin t$. Dakle, ni tačka E ne pripada pravoj t.

3. Za tačku D koja je incidentna s pravom t važi da je $B - D - E$.

Uslovi Pašove aksiome su zadovoljeni, što znači da postoji tačka $X \in t$ takva da je $B - X - C$ ili postoji tačka $Y \in t$ takva da je $C - Y - E$. Kako



Slika 3.2. Dokaz da važi raspored $A - B - C$.

$A \in t$ i kako znamo da ne važi raspored $C - A - B$, to znači da prvi slučaj ne važi, nego da mora da važi drugi slučaj, da postoji tačka $Y \in t$ takva da $C - Y - E$.

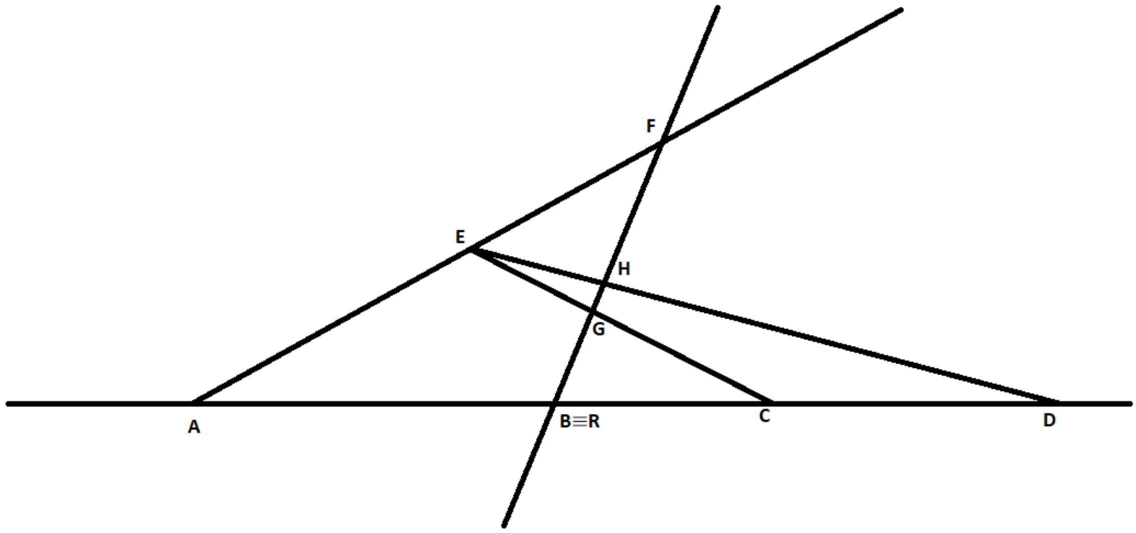
Dalje se, na sličan način, Pašova aksioma primenjuje na tačke A, B i E i pravu p određenu tačkama C i D. Kako znamo da ne važi raspored $B - C - A$, dobijamo da postoji tačka $Z \in p$ takva da je $A - Z - E$. Istu aksiomu koristimo još dva puta. Najpre je primenjujemo na tačke A, Y i E i na pravu p, gde dobijamo da prava p ne može da prolazi između tačaka E i Y, pa mora da prolazi između tačaka A i Y, gde dobijamo da je to tačka $D \in p$ takva da je $A - D - Y$. Onda aksiomu iskoristimo za tačke A, C i Y i za pravu q određenu tačkama E, D i B. Kako prava q ne može da prolazi između tačaka C i Y, zaključujemo da prolazi između A i C, gde dobijamo da je tražena tačka upravo tačka $B \in q$ takva da $A - B - C$. Teorema je dokazana. $\square$

Pre dokaza važenja aksiome $\mathbf{II_4}$, uvodimo jednu oznaku i dve leme:

Oznaka $A - s - B$ znači da postoji neka tačka $X \in s$ takva da je $A - X - B$.

Lema 3.3. *Neka važe rasporedi $A - B - C$ i $B - C - D$. Tada je $A - B - D$ i $A - C - D$.*

Dokaz. Kako imamo $p(A, B, C)$ i $p(B, C, D)$, to na osnovu $\mathbf{I_2}$ važi da je



Slika 3.3. Slika za dokaz leme 3.3

$p\,(A,B,C,D)$. Koristeći aksiomu $\mathbf{I_3}$ dobijamo tačku $E \notin p\,(A,B,C,D)$. Kad primenimo aksiomu $\mathbf{II_2}$, dobijamo tačku F takvu da $A{-}E{-}F$. Ideja je da primenimo Pašovu aksiomu na tačke A,C i E i pravu $p\,(B,F)$. Tačke A,C i E jesu nekolinearne. Jer ako pretpostavimo da postoji $p\,(A,C,E)$, zbog tačaka A i C koristeći aksiomu $\mathbf{I_2}$ mora biti $p\,(A,C,E) = p\,(A,B,C,D)$, što nas dovodi do kontradikcije, jer znamo da $E \notin p\,(A,B,C,D)$. Da bismo mogli da iskoristimo Pašovu aksiomu, moramo da pokažemo i da tačke A,C,E ne pripadaju $p\,(B,F)$. Pokažimo da to važi za tačku A, za tačke C i E se slično pokazuje. Ako pretpostavimo suprotno, da postoji $p\,(A,B,F)$, kako imamo $p\,(A,E,F)$, onda zbog tačaka A i F na osnovu $\mathbf{I_2}$ dobijamo pravu $p\,(A,B,E,F)$. Ali nas ovo dovodi do kontradikcije zbog načina na koji smo dobili tačku E, to jest znamo da su tačke A,B i E nekolinearne. Važi $A - p\,(B,F) - C$, jer imamo $A - B - C$. Sada možemo da iskoristimo Pašovu aksiomu. Dobijamo da $A - p\,(B,F) - E$ ili da $E - p\,(B,F) - C$. Pretpostavimo suprotno, da je $A - p\,(B,F) - E$. To bi značilo da postoji tačka $P \in p\,(B,F)$ takva da $A - P - E$. Posmatrajmo prave $p\,(A,P,E)$ i $p\,(A,E,F)$. Zbog tačaka A i E, na osnovu $\mathbf{I_2}$ dobijamo da je to prava $p\,(A,E,P,F)$. I kako imamo pravu $p\,(B,F,P)$, to je na osnovu iste aksiome prava $p\,(A,B,E,F,P)$. Napomenimo da tačke F i P jesu različite zbog $\mathbf{II_3}$, jer imamo rasporede $A{-}P{-}E$ i $A{-}E{-}F$. Dolazimo do kontradikcije na isti način kao malopre, konstatujući da su tačke A,B i E nekolinearne. Dakle, mora da važi $E - p\,(B,F) - C$, znači postoji neka tačka $G \in p\,(B,F)$ takva da $E - G - C$.

Naredni korak je primena Pašove aksiome na tačke C, D i E i na pravu $p(B, F)$. Da su uslovi ove aksiome ispunjeni se slično pokazuje kao malopre. Primenom Pašove aksiome dobijamo da važi da je ispunjeno $E - p(B, F) - D$ ili $C - p(B, F) - D$. Takođe, slično kao ranije možemo da pokažemo da ne važi $C - p(B, F) - D$, što nam govori da mora da važi $E - p(B, F) - D$. Te dobijamo egzistenciju neke tačke $H \in p(B, F)$ takve da je $E - H - D$.

Još jednom primenjujemo Pašovu aksiomu, sad na tačke A, E i D i na pravu $p(B, F)$. Dobijamo da mora $A - p(B, F) - D$, što nam daje egzistenciju tačke $R \in p(B, F)$ takve da $A - R - D$. Cilj nam je da pokažemo da se tačka R u stvari poklapa sa tačkom B. Pretpostavimo suprotno, da novodobijena tačka R u stvari nije tačka B. Na ovaj način bismo, slično kao ranije u ovom dokazu, pokazali da dolazimo do kontradikcije zbog nekolinearnosti tačaka. Dakle, tačke R i B se u stvari poklapaju, što znači da smo dobili raspored $A - B - D$.

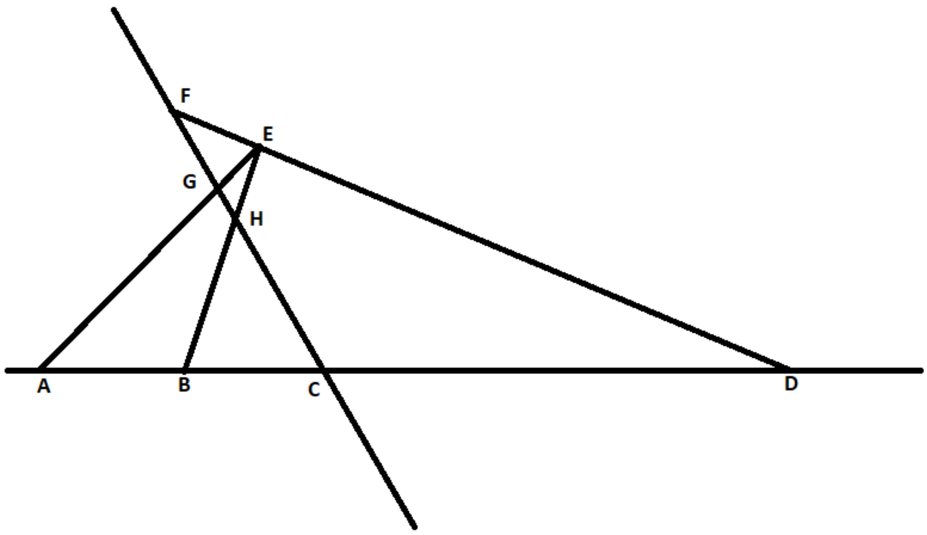
Dokažimo da takođe važi i raspored $A - C - D$. U pretpostavki teoreme imamo da važe rasporedi $A - B - C$ i $B - C - D$. Na osnovu $\mathbf{II_1}$ to znači da je $C - B - A$ i $D - C - B$. Na ova dva rasporeda primenjujemo zaključak koji smo prethodno dokazali. Dobijamo da važi raspored $D - C - A$. Ponovimo aksiomu $\mathbf{II_1}$, dobijamo $A - C - D$. Lema je dokazana. □

Lema 3.4. *Neka važe rasporedi $A - B - C$ i $A - C - D$. Tada je $A - B - D$ i $B - C - D$.*

Dokaz. Ako pokažemo da važi raspored $B - C - D$, na osnovu prethodne leme direktno dobijamo da važi raspored $A - B - D$. Pokažimo dakle da važi pomenuti raspored koristeći pretpostavku da je $A - B - C$ i $A - C - D$.

Kako imamo prave $p(A, B, C)$ i $p(A, C, D)$, na osnovu $\mathbf{I_2}$ dobijamo da je to u stvari jedna prava $p(A, B, C, D)$. Na osnovu $\mathbf{I_3}$ dobijamo egzistenciju tačke $E \notin p(A, B, C, D)$. Koristeći $\mathbf{II_2}$ dolazimo do egzistencije tačke F takve da $D - E - F$. Dokaz se nastavlja tako što tri puta primenjujemo Pašovu aksiomu. Dokazi ispunjenosti uslova aksiome se pokazuju slično kao u dokazu prethodne leme. Dokazi koji rasporedi primenom Pašove aksiome zaista važe se takođe na sličan način kao malopre pokazuju.

Dakle, pomenutu aksiomu najpre primenjujemo na tačke A, D i E i pravu $p(C, F)$. Na ovaj način dobijamo egzistenciju tačke $G \in p(C, F)$ takve da je $A - G - E$. Posmatramo tačke A, B, E i ponovo istu pravu $p(C, F)$. Na ovaj način je obezbeđena egzistencija tačke $H \in p(C, F)$ takve da važi raspored $B - H - E$. Zadnja primena aksiome je na tačke B, D i E i već pomenutu pravu. Ovom primenom se dobija egzistencija tačke $Q \in p(C, F)$ takve da važi $B - Q - D$. Slično kao u prethodnom dokazu i ovde se dokaz završava pokazivanjem da se u stvari dobijena tačka Q poklapa sa tačkom C. Dakle, važi raspored $B - C - D$. □



Slika 3.4. Slika za dokaz leme 3.4

Teorema 3.5. *Neka su date četiri kolinearne tačke. Uvek je moguće označiti ih sa A, B, C, D tako da tačka označena sa B bude između tačaka A i C i takođe između tačaka A i D, i štaviše, da tačka označena sa C bude između tačaka A i D i takođe između tačaka B i D.*

Dokaz. Neka su date proizvoljne četiri tačke na pravoj. Posmatrajmo tri od njih i označimo ih na sledeći način: Sa Q označimo onu tačku koja je prema teoremi 3.2 između druge dve koje smo uzeli i koje ćemo označiti sa P i R. Sa S označimo preostalu, četvrtu tačku. Ponovo koristimo teoremu 3.2. Dobijamo da za poziciju tačke S mogu da važe pet različitih mogućnosti. U pitanju su sledeći rasporedi:

1. $P - R - S$;

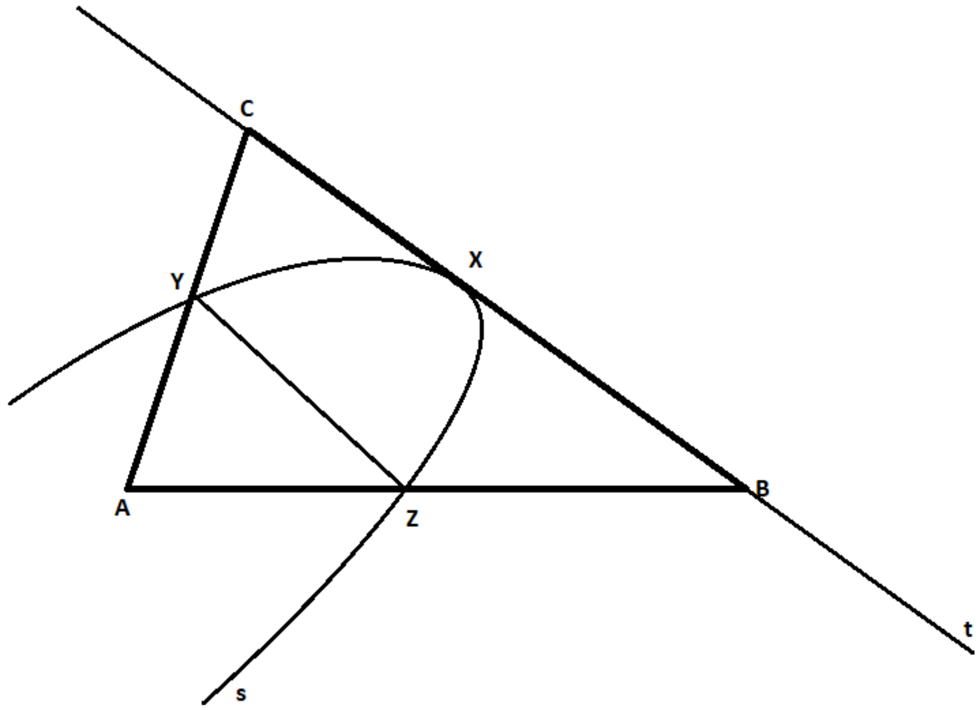
2. $R - P - S$;

3. $P - S - R$ istovremeno kada važi $P - Q - S$;

4. $P - S - Q$;

5. $Q - P - S$.

Prve četiri mogućnosti zadovoljavaju pretpostavke leme 3.4, dok poslednja, peta mogućnost, zadovoljava pretpostavke leme 3.3. Teorema je ovim dokazana. □



Slika 3.5. Slika za dokaz teoreme 3.6

Teorema 3.6. *Neka su A, B i C tri nekolinearne tačke i neka je s prava ravni ABC takva da $A, B, C \notin s$. Ako je prava s incidentna s tačkom X takvom da $B - X - C$, tada je prava s incidentna ili s tačkom Y takvom da $A - Y - C$ ili s tačkom Z takvom da $A - Z - B$.*

Dokaz. Kako su uslovi Pašove aksiome zadovoljeni, dobijamo da postoji tačka $Y \in s$ takva da $A - Y - C$ ili da postoji tačka $Z \in s$ takva da $A - Z - B$. Pretpostavimo suprotno, da važi i jedno i drugo. Kako sve tačke X, Y i Z pripadaju pravoj s, na osnovu teoreme 3.2 zaključujemo da važi tačno jedan od sledeća tri rasporeda:

$$X - Y - Z,\ Y - Z - X,\ Z - X - Y.$$

Bez uticaja na opštost, pretpostavimo da važi $Z - X - Y$. Posmatrajmo sada tačke A, Z i Y i pravu određenu tačkama B, X, C, koju ćemo označiti sa t. Koristeći Pašovu aksiomu, dobijamo da prava t prolazi između tačaka A i Z, to jest $A - t - Z$ ili prolazi između tačaka A i Y, to jest $A - t - Y$. Kako tačke B i C pripadaju pravoj t, dobijamo da mora $A - B - Z$ i $A - C - Y$. Na ovaj način, dodatno koristeći teoremu 3.2, dolazimo do kontradikcije, jer smo pretpostavili da važi $A - Z - B$ i $A - Y - C$. Dakle, teorema je dokazana. $\square$

3.2 Primeri tvrđenja koja ne mogu da se dokažu iz redukovanog sistema aksioma prve dve grupe

Slično kao i za redukovan sistem aksioma prve grupe, sad pokazujemo da neka tvrđenja, koja inače mogu da se dokažu iz sistema aksioma prve dve grupe, iz redukovanog sistema ove dve grupe ne mogu da se dokažu. U tu svrhu ćemo opet konstruisati određene modele.

U teoremi 3.1 smo pokazali da za proizvoljne dve tačke uvek postoji tačka između njih. Time zaključujemo da postoji beskonačno mnogo tačaka.

Primer 3.7. Posmatrajmo sistem prve dve grupe aksioma i izbacimo iz ovog sistema drugi deo aksiome $\mathbf{I_3}$. Iz ovako redukovanog sistema ne može da se dokaže tvrđenje koje govori da za proizvoljne dve tačke A i B postoji neka tačka C takva da se C nalazi između tačaka A i B. Konstruišemo model koji će to i da nam potvrdi: „skup tačaka" je skup celih brojeva. Ovaj model ima samo jednu „pravu" a to je upravo skup celih brojeva. „Ravni" u ovom modelu nema, to jest skup ravni je prazan skup. Relacija incidencije je definisana na uobičajeni način a relacija rasporeda se definiše na sledeći način: za proizvoljne tri tačke X, Y i Z važi da je $X - Y - Z$ ako i samo ako je $X < Y < Z$ ili $Z < Y < X$. Ako sada uzmemo na primer tačke 1 i 2, vidimo da ne postoji tačka, to jest broj iz skupa celih brojeva, koji je veći od 1 a manji od 2.

Primer 3.8. Ako iz prve dve grupe aksioma izbacimo aksiomu $\mathbf{II_2}$, onda ne možemo da dokažemo postojanje beskonačno mnogo tačaka. Razlog je egzistencija konačnog modela koji zadovoljava pomenuti redukovani sistem aksioma. To je sledeći model: za „skup tačaka" se uzima skup $\{A, B, C, D\}$, za „skup pravih" se uzima skup svih dvočlanih a za „skup ravni" se uzima skup svih tročlanih podskupova ovoga skupa $\{A, B, C, D\}$. Na uobičajeni način se definiše relacija incidencije, dok se za relaciju rasporeda uzima prazna relacija.

Primer 3.9. Uvodimo klasu modela koji se još nazivaju tetraedri. Za svaki prirodan broj $n \geq 4$ konstruišemo klasu modela na sledeći način: „Skup tačaka" jednog modela je skup $\{1, 2, 3..., n\}$. Da bismo uveli skup pravih i skup ravni, najpre moramo da uvedemo jednu oznaku. Kad smo izabrali broj n, onda uzimamo prirodan broj i koji je veći od 1 a može da ide sve do najvećeg celog broja koji nije veći od $\frac{n}{2}$. Fiksirajmo takav broj i. „Skup pravih" je tada skup

$$\{\{1, 2, 3..., i\}, \{i+1, i+2, i+3..., n\}\} \cup \{\{x, y\} : 1 \leq x \leq i, i+1 \leq y \leq n\}.$$

„Skup ravni" je

$$\{\{1,2,3,...,i,x\} : i+1 \leq x \leq n\} \cup \{\{i+1,i+2,i+3,...n,y\} : 1 \leq y \leq i\}.$$

Naravno, relacija incidencije se definiše na uobičajeni način - pripadnost elementa skupu.

Uzmimo za relaciju poretka praznu relaciju. Tada možemo da vidimo da tetraedar zadovoljava sve aksiome prve grupe i aksiome $\mathbf{II_1}$, $\mathbf{II_3}$ i $\mathbf{II_4}$, ali ne zadovoljava aksiomu $\mathbf{II_2}$. Dakle, našli smo još jednu klasu modela koji zadovoljavaju sve aksiome redukovanog sistema aksioma prve dve grupe i koji su konačni.

Primer 3.10. Posmatrajmo sistem aksioma prve dve grupe iz kojeg izbacujemo Pašovu aksiomu. Ponovo konstatujemo da ne možemo na ovaj način dokazati da između svake dve tačke postoji neka tačka. Konstruišemo model: Neka je „skup tačaka" skup

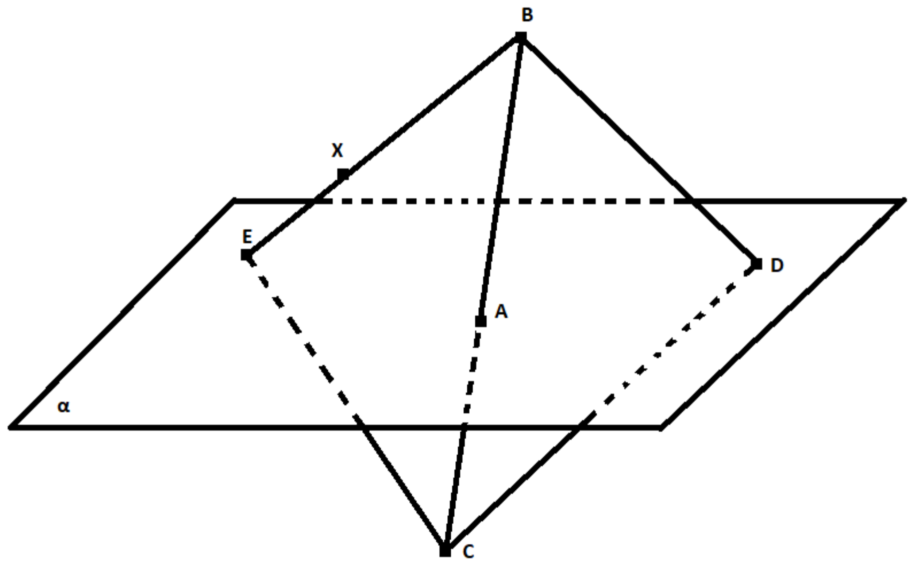
$$\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,0) : x \in (0,1)\}.$$

Neka su „prave" sve standardne prave u $\mathbb{R}^3$, no sa tim izuzetkom da ako neka standardna prava sadrži neke od tačaka iz skupa $\{(x,0,0) : x \in (0,1)\}$, onda te tačke neće biti elementi odgovarajuće prave, to jest, te prave će biti skupovi svih standardnih tačaka iz kojih su pomenute tačke izbačene. Slično važi i za ravni. I „ravni" neka su sve standardne ravni u $\mathbb{R}^3$, ali takođe sa tim izuzetkom da ako neka standardna ravan sadrži pomenute tačke, onda te tačke nećemo uzimati da budu elementi odgovarajuće ravni. Relacija incidencije se definiše na uobičajeni način, a relacija poretka na sledeći: Za tri tačke $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ i $C(x_3,y_3,z_3)$ važi raspored $A-B-C$ ako i samo ako postoji prava s kojom su sve tri tačke incidentne i B je između A i C u uobičajenom smislu. Ovaj model zadovoljava sve aksiome prve dve grupe, osim Pašove aksiome. A takođe primećujemo i da su tačke $M_1(0,0,0)$ i $M_2(1,0,0)$ upravo takve da ne postoji tačka X takva da $M_1 - X - M_2$.

3.3 Van der Vardenova aksioma

Holandski matematičar Bartel Leendert van der Varden je zapazio da Pašova aksioma može da se zameni sledećom aksiomom:

$\mathbf{II_4}^*$ Ako su A, B i C tri nekolinearne tačke i ako je α ravan koja nije incidentna ni sa A, ni sa B, ni sa C, i ako postoji tačka $X \in \alpha$ takva da $A - X - B$, onda postoji tačka $Y \in \alpha$ takva da $A - Y - C$ ili postoji tačka $Z \in \alpha$ takva da $B - Z - C$.



Slika 3.6. Dokaz aksiome $\mathrm{I_5}^*$ - slučaj 1b

Međutim, iz ove aksiome može da se dokaže ne samo Pašova aksioma, već i aksioma $\mathbf{I_7}$. Dakle, izbacivanjem aksiome $\mathbf{I_7}$ i aksiome $\mathbf{II_4}$ iz aktuelnog sistema aksioma, i ubacivanjem aksiome $\mathbf{II_4}^*$ umesto njih dobija se ekvivalentan sistem.

Pre nego što krenemo sa dokazima, treba napomenuti da Van der Varden koristi aksiomu:

$\mathbf{I_5}^*$ Svaka ravan sadrži tri nekolinearne tačke.

No ova aksioma se u stvari može dokazati iz preostalih aksioma Van der Vardenovog sistema. Za početak pokažimo upravo to.

Dokaz. Neka je data proizvoljna ravan α. Znamo da je ona incidentna s bar jednom tačkom (aksioma $\mathbf{I_4}$ drugi deo). Označimo tu tačku sa A. Na osnovu aksiome $\mathbf{I_8}$ dobijamo neku tačku B koja nije incidentna sa α. Aksioma $\mathbf{II_2}$ nam daje egzistenciju neke tačke C takve da važi raspored $B - A - C$. Označimo sa s pravu $p(A, B, C)$. Na osnovu aksiome $\mathbf{I_3}$ dobijamo egzistenciju neke tačke $D \notin s$. Za tačku D postoje tri mogućnosti:

1. Tačka D pripada ravni α. Tada postoji jedinstvena ravan β koja sadrži tačku D i u kojoj leži prava s. To je na osnovu teoreme 2.1. Posmatrajmo sada ovu ravan β. Ponovo koristeći aksiomu $\mathbf{I_8}$ dobijamo egzistenciju neke tačke $E \notin \beta$. Za tačku E postoje tri mogućnosti:

(a) Tačka $E \in \alpha$. Pokažimo da su tada tačke A, D i E nekolinearne. Pretpostavimo suprotno, da postoji prava $p(A, D, E)$. Kako A i D pripadaju ravni β, to onda zbog $\mathbf{I_6}$ prava $p(A, D, E) \subset \beta$. To jest, dobili smo da i tačka E pripada β. Kontradikcija. Dakle, tačke A, D i E su nekolinearne tačke koje pripadaju ravni α.

(b) Tačka E se nalazi sa iste strane ravni α sa koje se nalazi tačka B. Posmatrajmo sada tačke B, C i E i ravan α. Ove tri tačke su nekolinearne i nisu incidentne s ravni α, a takođe postoji i tačka $A \in \alpha$ takva da je $B - A - C$. To znači da možemo da primenimo Van der Vardenovu aksiomu. Ova nam daje postojanje neke tačke $X \in \alpha$ takve da je $B - X - E$ ili $C - X - E$. No slučaj $B - X - E$ nije moguć, jer bi to onda značilo da tačka E nije sa iste strane ravni α kao i tačka B, te zaključujemo da mora da važi raspored $C - X - E$. Dakle, imamo da tačke A, D i X pripadaju ravni α. Još treba da pokažemo da su one nekolinearne. Ako pretpostavimo suprotno, to jest da postoji prava $p(A, D, X)$, onda slično kao ranije ćemo da dobijemo da $X \in \beta$. Kako sada $C, X \in \beta$, zbog $C - X - E$ dobijamo da i $E \in \beta$, što nam daje kontradikciju. Dakle, ravan α sadrži tri nekolinearne tačke A, D i X.

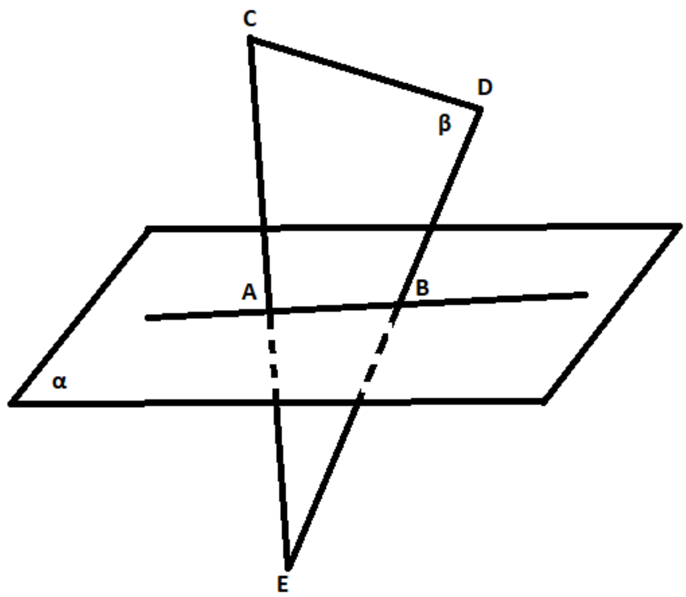
(c) Tačka E se nalazi sa iste strane ravni α sa koje se nalazi i tačka C. Ovo se dokazuje slično kao slučaj 1b.

2. Tačka D se nalazi sa iste strane ravni α sa koje se nalazi i tačka B. Posmatrajmo tačke B, C, D. Ove tri tačke su nekolinearne i određuju jedinstvenu ravan β (teorema 2.1). Ravan α nije incidentna s ove tri tačke. Postoji tačka $A \in \alpha$ takva da je $B - A - C$. Zadovoljeni su uslovi Van der Vardenove aksiome. To znači da postoji neka tačka $Y \in \alpha$ takva da je $B - Y - D$ ili $C - Y - D$. No, slično kao ranije zaključujemo da raspored $B - Y - D$ nije moguć zbog toga što se tačka D nalazi sa iste strane ravni α sa koje se nalazi i tačka B. Dakle, našli smo neku tačku Y koja takođe pripada α. Dokaz da postoji još jedna tačka E, resp. X koja pripada ravni α ide slično kao u slučaju 1 i slično se pokazuje da su tada tačke A, Y, E, resp. tačke A, Y, X nekolinerne.

3. Tačka D se nalazi sa iste strane ravni α sa koje se nalazi i tačka C. No ovo se dokazuje slično kao u slučaju 2.

□

Najpre pokazujemo da se iz Van der Vardenovog sistema aksioma može dokazati Hilbertov sistem aksioma:

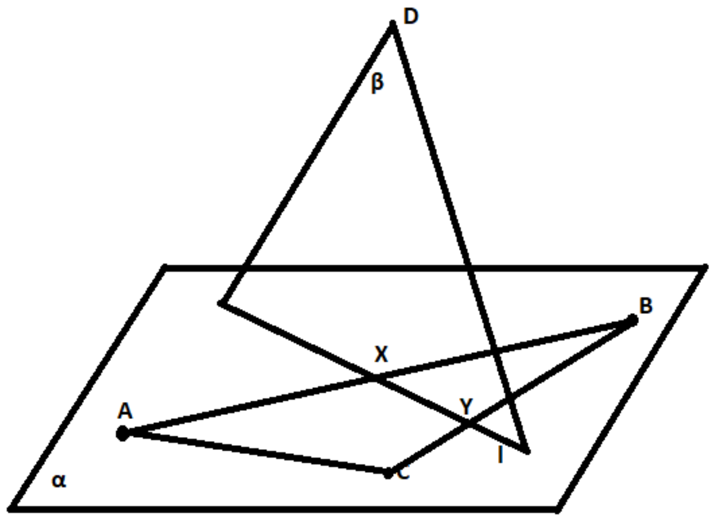


Slika 3.7. Dokaz aksiome I_7 - slučaj $E - B - D$

Dokaz aksiome I_7: Neka su date ravni α i β i neka je tačka A incidentna i sa ravni α i sa ravni β. Na osnovu Van der Vardenove aksiome $\mathbf{I_5}^*$ možemo da zaključimo da postoji neka tačka C različita od tačke A takva da $C \in \beta$. Ako tačka C pripada i ravni α, aksioma $\mathbf{I_7}$ je dokazana. U suprotnom, to jest ako tačka C ne pripada ravni α, onda biramo tačku $D \in \beta$, takvu da $D \notin p(A, C)$, ponovo koristeći istu aksiomu. Koristeći aksiomu $\mathbf{II_2}$ biramo tačku E takvu da je $C - A - E$. Pošto postoji tačka ravni α između tačaka C i E, $C - A - E$, prema aksiomi $\mathbf{II_4}^*$ zaključujemo da mora da postoji neka tačka $B \in \alpha$ takva da je $E - B - D$ ili da je $C - B - D$. Na osnovu $\mathbf{II_1}$ i $\mathbf{I_6}$ zaključujemo da tačka B pripada i ravni β.

Ako pretpostavimo da se tačke A i B poklapaju, onda u slučaju da važi raspored $E - B - D$, prave $p(C, E)$ i $p(D, E)$ imaju dve zajedničke tačke A i E, što nam daje u stvari jednu te istu pravu zbog aksiome $\mathbf{I_2}$. A u slučaju da važi raspored $C - B - D$ dobijamo da se prave $p(C, E)$ i $p(C, D)$ poklapaju, zbog zajedničkih tačaka A i C. U oba slučaja zaključujemo da tačka D pripada pravoj $p(A, C)$, što nam daje kontradikciju. Dakle, pretpostavka da se tačke A i B poklapaju je netačna, što nam daje postojanje još jedne tačke koja se nalazi u obe ravni α i β. $\square$

Dokaz Pašove aksiome: Neka su A, B i C tri nekolinearne tačke koje se nalaze u ravni α. Neka je l prava ravni α takva da $A, B, C \notin l$ i neka postoji



Slika 3.8. Dokaz Pašove aksiome - slučaj $B - Y - C$.

neka tačka $X \in l$ takva da je $A - X - B$. Uzmimo tačku $D \notin \alpha$ na osnovu $\mathbf{I_8}$. Neka je β ravan određena pravom l i tačkom D, to imamo zbog teoreme 2.1. Napomenimo da su ravni α i β različite, jer ako pretpostavimo suprotno, to bi značilo da tačka $D \in \alpha$, a znamo da $D \notin \alpha$. Vidimo da je presek ravni α i β prava l. Ako bi u njihovom preseku bila još neka tačka, na osnovu teoreme 2.1 bi se ove dve ravni poklapale.

Imamo $A - X - B$ i $X \in \beta$ (zbog $X \in l$ i $l \subset \beta$), te sada možemo da primenimo aksiomu $\mathbf{II_4}^*$. Ova aksioma nam daje postojanje neke tačke $Y \in \beta$ takve da je $A - Y - C$ ili $B - Y - C$. Kako znamo da $A, B, C \in \alpha$, te i prave $p(A, C)$ i $p(B, C)$ leže u ravni α (aksioma $\mathbf{I_6}$), što na osnovu $\mathbf{II_1}$ nam daje da i tačka $Y \in \alpha$. Dakle, za tačku Y važi da je incidentna i sa α i sa β, to znači da mora da pripada pravoj l. Pašova aksioma je dokazana. □

No a sada dokaz u obrnutom smeru. Pretpostavimo da važi savremeni Hilbertov sistem aksioma i dokažimo da onda važi i Van der Vardenov sistem aksioma:

Dokaz Van der Vardenove aksiome: Neka su A, B i C tri nekolinearne tačke i neka je β ravan takva da $A, B, C \notin \beta$. Neka postoji tačka $X \in \beta$ takva da je $A - X - B$. Označimo sa α ravan određenu tačkama A, B, C, i odmah primetimo da su ravni α i β dve različite ravni.

Kako $A, B \in \alpha$, to mora na osnovu $\mathbf{I_6}$ da je $p(A, B) \subset \alpha$, pa kako važi $A - X - B$, to na osnovu $\mathbf{II_1}$ znači da i tačka X pripada α. Dakle, postoji tačka X koja se nalazi u preseku ravni α i β, te zbog $\mathbf{I_7}$ postoji još jedna tačka, označimo je sa S, takva da se S nalazi u njihovom preseku. To nas dovodi do toga da je prava $p(X, S)$ presek ove dve ravni i ovu pravu ćemo označiti sa l.

Za početak treba pokazati da $A, B, C \notin l$. Ako pretpostavimo suprotno, da na primer tačka $A \in l$, to bi značilo da se A nalazi i u ravni β, no mi smo ravan β uzeli baš tako da $A \notin \beta$. Dakle, ove tri tačke nisu incidentne s pravom l.

Možemo da primenimo Pašovu aksiomu, koja nam daje postojanje neke tačke $Y \in l$ takve da $A - Y - C$ ili $B - Y - C$. No kako $l \subset \beta$, ta tačka Y pripada ravni β, tako da je Van der Vardenova aksioma dokazana. $\square$

Glava 4

Aksiome podudarnosti - treća grupa aksioma

I u ovoj glavi najpre navodimo savremene Hilbertove aksiome podudarnosti.

III$_1$ Za svaku duž $[AB]$ i za svaku polupravu s sa početkom A' postoji tačka B' koja pripada s takva da $[AB] \cong [A'B']$.

III$_2$ Ako je $[A'B'] \cong [AB]$ i $[A''B''] \cong [AB]$, onda je $[A'B'] \cong [A''B'']$.

III$_3$ Neka su A, B, C i A', B', C' dve trojke kolinearnih tačaka takvih da važe rasporedi $A - B - C$ i $A' - B' - C'$. Tada, ako važi $[AB] \cong [A'B']$ i $[BC] \cong [B'C']$, onda važi da je $[AC] \cong [A'C']$.

III$_4$ Neka su dati proizvoljan ugao $\measuredangle aOb$, proizvoljna prava s, proizvoljna tačka O' prave s, jedna od polupravih a' prave s sa početkom O' i jedna od poluravni α sa ivicom s. Tada u ovoj poluravni α postoji tačno jedna poluprava b' sa početkom O' takva da je $\measuredangle aOb \cong \measuredangle a'O'b'$.
Podudarnost uglova je refleksivna relacija, to jest za svaki ugao $\measuredangle aOb$ važi $\measuredangle aOb \cong \measuredangle aOb$.

III$_5$ Ako za trouglove ΔABC i $\Delta A'B'C'$ važi $[AB] \cong [A'B']$, $[AC] \cong [A'C']$ i $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$, onda važi podudarnost $\measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'$.

A u nastavku navodimo i prvobitne Hilbertove aksiome podudarnosti.

III$_{1'}$ Za svaku duž $[AB]$ i za svaku polupravu s sa početkom A' postoji tačno jedna tačka B' koja pripada s takva da $[AB] \cong [A'B']$. Podudarnost duži je refleksivna relacija, to jest za svaku duž $[AB]$ važi $[AB] \cong [AB]$.

III$_{2'}$ Ako je $[AB] \cong [A'B']$ i $[AB] \cong [A''B'']$, onda je $[A'B'] \cong [A''B'']$.

III₃' Neka su A, B, C i A', B', C' dve trojke kolinearnih tačaka takvih da važe rasporedi $A - B - C$ i $A' - B' - C'$. Tada, ako važi $[AB] \cong [A'B']$ i $[BC] \cong [B'C']$, onda važi da je $[AC] \cong [A'C']$.

III₄' Neka su dati proizvoljan ugao $\measuredangle aOb$, proizvoljna prava s, proizvoljna tačka O' prave s, jedna od polupravih a' prave s sa početkom O' i jedna od poluravni α sa ivicom s. Tada u ovoj poluravni α postoji tačno jedna poluprava b' sa početkom O' takva da je $\measuredangle aOb \cong \measuredangle a'O'b'$.
Podudarnost uglova je refleksivna relacija, to jest za svaki ugao $\measuredangle aOb$ važi $\measuredangle aOb \cong \measuredangle aOb$.

III₅' Ako važe podudarnosti $\measuredangle aOb \cong \measuredangle a'O'b'$ i $\measuredangle aOb \cong \measuredangle a''O''b''$, onda važi i $\measuredangle a'O'b' \cong \measuredangle a''O''b''$.

III₆' Ako za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ važi $[AB] \cong [A'B']$, $[AC] \cong [A'C']$ i $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$, onda važe i sledeće dve podudarnosti uglova $\measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'$ i $\measuredangle ACB \cong \measuredangle A'C'B'$.

4.1 Razlike u sistemima aksioma treće grupe

Savremen sistem aksioma treće grupe uvodi samo egzistenciju, ne i jedinstvenost pomenute tačke B'. Prvobitan sistem je osiromašen za refleksivnost podudarnosti duži. Pokazaćemo da je relacija podudarnosti duži u stvari relacija ekvivalencije. Stoga, kad se u aksiomi **III₂'** iskoristi simetričnost dobijamo ekvivalenciju odgovarajućih aksioma ova dva sistema. Aksioma **III₅'** se u stvari može dokazati iz preostalih aksioma a poslednja aksioma prvobitnog Hilbertovog sistema je oslabljena za podudarnost uglova

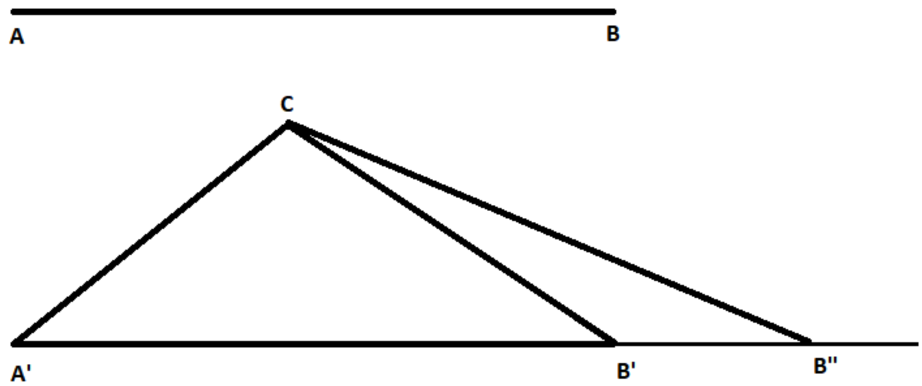
$$\measuredangle ACB \cong \measuredangle A'C'B',$$

što je u stvari direktna posledica **III₅**.

Teorema 4.1. *Podudarnost duži je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Treba da pokažemo da je ova relacija refleksivna, simetrična i još tranzitivna. To će značiti da je relacija ekvivalencije.

- Refleksivnost: Posmatrajmo proizvoljnu duž $[AB]$ i proizvoljnu polupravu s početkom u tački A'. Na osnovu **III₁** dobijamo egzistenciju tačke B' takve da važi $[AB] \cong [A'B']$. Sada, kako $[AB] \cong [A'B']$ i $[AB] \cong [A'B']$, na osnovu **III₂** zaključujemo da je $[AB] \cong [AB]$. Ovim je dokazana refleksivnost duži.



Slika 4.1. Jedinstvenost tačke B' iz aksiome $\mathbf{III_1}$.

- Simetričnost: Neka je $[AB] \cong [A'B']$. Da bismo pokazali simetričnost, treba pokazati $[A'B'] \cong [AB]$. Refleksivnost daje $[A'B'] \cong [A'B']$ i pretpostavili smo da važi $[AB] \cong [A'B']$. Koristeći aksiomu $\mathbf{III_2}$ dobijamo traženo, to jest da važi $[A'B'] \cong [AB]$.

- Tranzitivnost: Pretpostavimo da važe podudarnosti duži $[AB] \cong [A'B']$ i $[A'B'] \cong [A''B'']$. Kad iskoristimo simetričnost, imamo $[AB] \cong [A'B']$ i $[A''B''] \cong [A'B']$. Korišćenje već nekoliko puta pomenute aksiome $\mathbf{III_2}$ nam daje $[AB] \cong [A''B'']$, što nam govori da je podudarnost duži i tranzitivna relacija.

□

Teorema 4.2. *Tačka B' iz aksiome $\boldsymbol{III_1}$ je jedinstvena takva.*

Dokaz. Neka je data duž $[AB]$, poluprava s sa početkom A' i neka je tačka $B' \in s$ takva da je $[AB] \cong [A'B']$. Pretpostavimo suprotno, da postoji neka tačka $B'' \in s$ različita od B' takva da je $[AB] \cong [A'B'']$. Na osnovu drugog dela aksiome $\mathbf{I_3}$ znamo da postoji neka tačka

$$C \notin p\,(A', B', B'')\,.$$

Posmatrajmo sada trouglove $\triangle A'B'C$ i $\triangle A'B''C$. Znamo da važe već pomenute podudarnosti duži $[AB] \cong [A'B']$ i $[AB] \cong [A'B'']$, pa kako je podudarnost duži relacija ekvivalencije, sledi $[A'B'] \cong [A'B'']$. Refleksivnost duži nam daje podudarnost $[A'C] \cong [A'C]$. Kako iz drugog dela aksiome $\mathbf{III_4}$ znamo da je podudarnost uglova refleksivna relacija, dobijamo da je

$$\measuredangle B'A'C \cong \measuredangle B''A'C.$$

Sada možemo da iskoristimo aksiomu $\mathbf{III_5}$, gde dobijamo podudarnost

$$\measuredangle A'CB' \cong \measuredangle A'CB'',$$

što nas u stvari dovodi do kontradikcije sa prvim delom aksiome $\mathbf{III_4}$. Teorema je dokazana. $\square$

Sledeći korak je da pokažemo da se aksioma $\mathbf{III_5}$' može izvesti iz preostalih aksioma. Taj dokaz sledi direktno iz teoreme koja se dokazuje u nastavku. No pre toga uvodimo definiciju i nekoliko lema.

Definicija 4.1. *Za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ kažemo da su podudarni i pišemo*

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

ako i samo ako važe sledeće podudarnosti

$$[AB] \cong [A'B'],\ [BC] \cong [B'C'],\ [CA] \cong [C'A'],$$

$$\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C',\ \measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C',\ \measuredangle ACB \cong \measuredangle A'C'B'.$$

Lema 4.3 (Stav SUS)**.** *Ako za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ važe podudarnosti duži $[AB] \cong [A'B']$, $[AC] \cong [A'C']$ i ako važi podudarnost uglova $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$, onda je*

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Dokaz. Na osnovu aksiome $\mathbf{III_5}$ možemo da zaključimo podudarnosti uglova

$$\measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C',\ \measuredangle ACB \cong \measuredangle A'C'B'.$$

Uzmimo na polupravoj sa početkom B' koja prolazi kroz C' tačku C'', to jest

$$C'' \in pp[B', C')$$

takvu da važi podudarnost $[BC] \cong [B'C'']$. Imamo dva slučaja. Prvi slučaj je onaj kad se tačke C' i C'' poklapaju. To znači da za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ važi da su im odgovarajuće stranice i odgovarajući uglovi podudarni, te su ova dva trougla podudarna, što je i trebalo da pokažemo. Što se tiče drugog slučaja, ovde se tačke C' i C'' ne poklapaju, to jest to su različite tačke. Tada za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C''$, kad iskoristimo aksiomu $\mathbf{III_5}$, dobijamo da su podudarni uglovi $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C''$. Dakle, imamo $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$ i $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C''$, što nam na osnovu aksiome $\mathbf{III_4}$ implicira kontradikciju, jer su tačke C' i C'' različite. $\square$

Lema 4.4. *Ako za trougao $\triangle ABC$ važi podudarnost stranica $[BC] \cong [AC]$, onda važi podudarnost uglova*

$$\measuredangle BAC \cong \measuredangle ABC.$$

Dokaz. Posmatrajmo trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle BAC$. Želimo da iskoristimo aksiomu $\mathbf{III_5}$. Iz uslova leme znamo da je $[BC] \cong [AC]$. Simetričnost relacije podudarnosti duži nam daje podudarnost $[AC] \cong [BC]$. Kako je podudarnost uglova refleksivna relacija (aksioma $\mathbf{III_4}$), imamo $\measuredangle ACB \cong \measuredangle BCA$. Te koristeći aksiomu $\mathbf{III_5}$ dolazimo do zaključka da je $\measuredangle BAC \cong \measuredangle ABC$. □

Lema 4.5. *Neka su tačke C' i C'' tačke sa raznih strana prave $p\,(A, B)$. Ako su zadovoljene podudarnosti $[AC'] \cong [AC'']$ i $[BC'] \cong [BC'']$, onda su podudarni uglovi*

$$\measuredangle AC'B \cong \measuredangle AC''B.$$

Dokaz. Koristeći prethodnu lemu, kako znamo da važi $[AC'] \cong [AC'']$, možemo da zaključimo da su podudarni uglovi

$$\measuredangle AC''C' \cong \measuredangle AC'C''.$$

Na analogan način, kako važi podudarnost $[BC'] \cong [BC'']$, dobijamo podudarnost uglova

$$\measuredangle BC''C' \cong \measuredangle BC'C''.$$

Tada je

$$\measuredangle AC'B \cong \measuredangle AC''B.$$

□

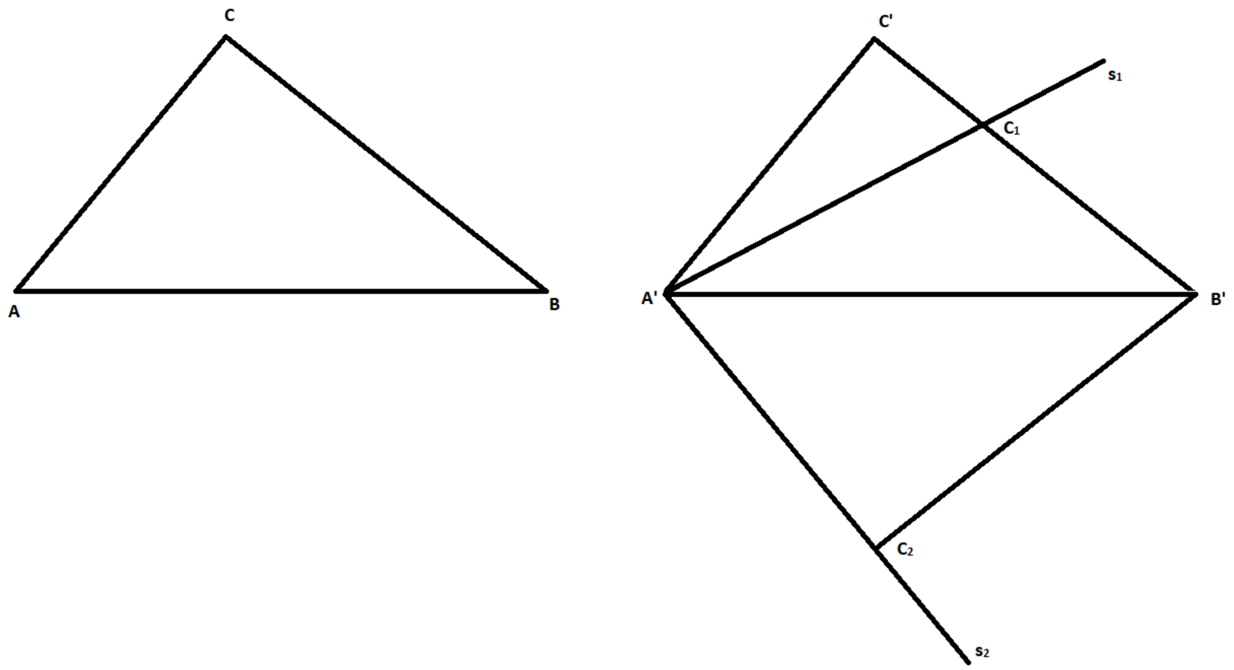
Lema 4.6 (Stav SSS)**.** *Ako za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ važe podudarnosti duži $[AB] \cong [A'B']$, $[BC] \cong [B'C']$ i $[AC] \cong [A'C']$, onda je ispunjena podudarnost trouglova*

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Dokaz. Posmatrajmo poluravan čija ivica je prava $p\,(A', B')$ i koja sadrži tačku C', i uzmimo u ovoj poluravni polupravu s_1 sa početkom u tački A', to jest uzimamo

$$s_1\,(A') \subset pr[p\,(A', B')\,; C')$$

takvu da je $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A's_1$. Ako se poluprava s_1 poklapa sa polupravom $pp[A', C')$, tada na osnovu stava SUS važi tražena podudarnost trouglova. Međutim, ako se ove poluprave ne poklapaju, onda dolazimo do kontradikcije



Slika 4.2. Stav SSS.

i to na sledeći način: Uzmimo tačku $C_1 \in s_1$ takvu da je $[AC] \cong [A'C_1]$. Tada na osnovu stava SUS možemo da zaključimo da je

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C_1,$$

iz čega dobijamo podudarnost duži $[BC] \cong [B'C_1]$. U narednom koraku posmatramo poluravan koja je s druge strane prave $p\left(A', B'\right)$. U ovoj poluravni uzimamo polupravu s_2 sa početkom u tački A'. To jest uzimamo

$$s_2\left(A'\right) \subset pr[p(A', B'); C')^*$$

takvu da je $\measuredangle B'A'C_1 \cong \measuredangle B'A's_2$. Uzimamo tačku $C_2 \in s_2$ takvu da važi podudarnost $[A'C_1] \cong [A'C_2]$. Na osnovu stava SUS možemo tada da zaključimo da je

$$\triangle A'B'C_1 \cong \triangle A'B'C_2,$$

iz čega dobijamo podudarnost $[B'C_1] \cong [B'C_2]$. Posmatrajmo sada pravu $p\left(A', B'\right)$ i tačke C_2 i C'. Na osnovu leme 4.5 zaključujemo da je

$$\measuredangle A'C_2B' \cong \measuredangle A'C'B'.$$

Takođe, na osnovu iste leme posmatrajući već pomenutu pravu $p\,(A', B')$ i tačke C_2 i C_1 zaključujemo da je

$$\measuredangle A'C_2B' \cong \measuredangle A'C_1B'.$$

Na osnovu dokazanih podudarnosti uglova koristeći stav SUS dobijamo podudarnosti trouglova $\triangle A'B'C_2 \cong \triangle A'B'C'$ i $\triangle A'B'C_2 \cong \triangle A'B'C_1$. Iz ovih podudarnosti zaključujemo podudarnosti uglova $\measuredangle B'A'C_2 \cong \measuredangle B'A'C'$ i $\measuredangle B'A'C_2 \cong \measuredangle B'A'C_1$, što nam daje kontradikciju sa aksiomom $\mathbf{III_4}$. $\square$

Teorema 4.7. *Podudarnost uglova je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Treba pokazati da je podudarnost uglova refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija.

- Refleksivnost: To je dato u aksiomi $\mathbf{III_4}$.
- Simetričnost: Neka je $\measuredangle aOb \cong \measuredangle a'O'b'$. Želimo da pokažemo da je tada $\measuredangle a'O'b' \cong \measuredangle aOb$. Uzmimo na polupravoj Oa tačku A različitu od O proizvoljno. Slično, na polupravoj Ob ćemo proizvoljno uzeti tačku B različitu od tačke O. Zahvaljujući aksiomi $\mathbf{III_1}$ znamo da postoje tačke $A' \in O'a'$ i $B' \in O'b'$ (koje su, na osnovu teoreme 4.2 jedinstvene) takve da je $[OA] \cong [O'A']$ i $[OB] \cong [O'B']$. Sada na osnovu stava SUS možemo da zaključimo da je

  $$\triangle OAB \cong \triangle O'A'B',$$

  što znači da imamo podudarnost $[AB] \cong [A'B']$. S obzirom na to da je podudarnost duži simetrična relacija, dobijamo da važe sledeće podudarnosti: $[O'A'] \cong [OA]$, $[O'B'] \cong [OB]$ i $[A'B'] \cong [AB]$, čime su zadovoljeni uslovi stava SSS, te imamo podudarnost trouglova

  $$\triangle O'A'B' \cong \triangle OAB,$$

  odakle sledi podudarnost uglova $\angle a'O'b' \cong \angle aOb$.
- Tranzitivnost: Pretpostavimo da važe podudarnosti $\measuredangle aOb \cong \measuredangle a'O'b'$ i $\measuredangle a'O'b' \cong \measuredangle a''O''b''$. Hoćemo da pokažemo da tada je

  $$\measuredangle aOb \cong \measuredangle a''O''b''.$$

  Slično kao u dokazu simetričnosti uglova uzimamo na polupravoj Oa tačku A različitu od O proizvoljno i na polupravoj Ob tačku B različitu od O proizvoljno. Koristeći $\mathbf{III_1}$ tada znamo da postoje jedinstvene tačke $A' \in O'a'$ i $A'' \in O''a''$ takve da $[OA] \cong [O'A']$ i $[O'A'] \cong [O''A'']$. I takođe da postoje jedinstvene tačke $B' \in O'b'$ i $B'' \in O''b''$ takve da $[OB] \cong [O'B']$ i $[O'B'] \cong [O''B'']$. Kako je podudarnost duži tranzitivna relacija, zaključujemo da važe podudarnosti duži $[OA] \cong [O''A'']$ i $[OB] \cong [O''B'']$. Na osnovu stava SUS zaključujemo da imamo podudarnost trouglova

$$\triangle OAB \cong \triangle O'A'B'$$

i podudarnost trouglova

$$\triangle O'A'B' \cong \triangle O''A''B'',$$

iz kojih dobijamo podudarnosti duži $[AB] \cong [A'B']$ i $[A'B'] \cong [A''B'']$. Na osnovu tranzitivnosti podudarnosti duži možemo da zaključimo da važi podudarnost $[AB] \cong [A''B'']$. Dakle, imamo podudarnosti duži $[OA] \cong [O''A'']$, $[OB] \cong [O''B'']$ i $[AB] \cong [A''B'']$, što na osnovu stava SSS sada možemo da zaključimo da važi podudarnost trouglova

$$\triangle OAB \cong \triangle O''A''B'',$$

što implicira podudarnost uglova

$$\measuredangle aOb \cong \measuredangle a''O''b''.$$

□

4.2 Još neke posledice aksioma podudarnosti

Navodimo još neke posledice koje se mogu izvesti iz aksioma podudarnosti a koje će biti potrebne u daljem radu.

Definicija 4.2. *Neka su date proizvoljne duži a i b. Zbir ove dve duži $a + b$ je duž c, koja se dobija na sledeći način: Neka su A, B i C kolinearne tačke takve da važi raspored $A - B - C$ i takve da je $a = [AB]$ i $b = [BC]$. Tada je $c = [AC]$.*

Definicija 4.3. *Za dve duži $[AB]$ i $[CD]$ važi da je $[AB] < [CD]$ ako postoji tačka D_1 takva da važi raspored $C - D_1 - D$ i da je $[AB] \cong [CD_1]$.*

Definicija 4.4. *Za dve duži $[AB]$ i $[CD]$ važi da je $[AB] > [CD]$ ako i samo ako je $[CD] < [AB]$.*

Definicija 4.5. *Za dva ugla $\measuredangle aOb$ i $\measuredangle cO'd$ važi da je $\measuredangle aOb < \measuredangle cO'd$ ako postoji poluprava d_1 sa početkom u tački O' koja se nalazi u unutrašnjosti ugla $\measuredangle cO'd$ takva da je $\measuredangle aOb \cong \measuredangle cO'd_1$.*

Definicija 4.6. *Za dva ugla* $\measuredangle aOb$ *i* $\measuredangle cO'd$ *važi da je* $\measuredangle aOb > \measuredangle cO'd$ *ako i samo ako je* $\measuredangle cO'd < \measuredangle aOb$.

Lema 4.8. *Ako za trouglove* $\triangle ABC$ *i* $\triangle A'B'C'$ *važi da je* $[AB] \cong [A'B']$, $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$ *i* $\measuredangle ACB \cong \measuredangle A'C'B'$, *onda važi i podudarnost duži* $[AC] \cong [A'C']$.

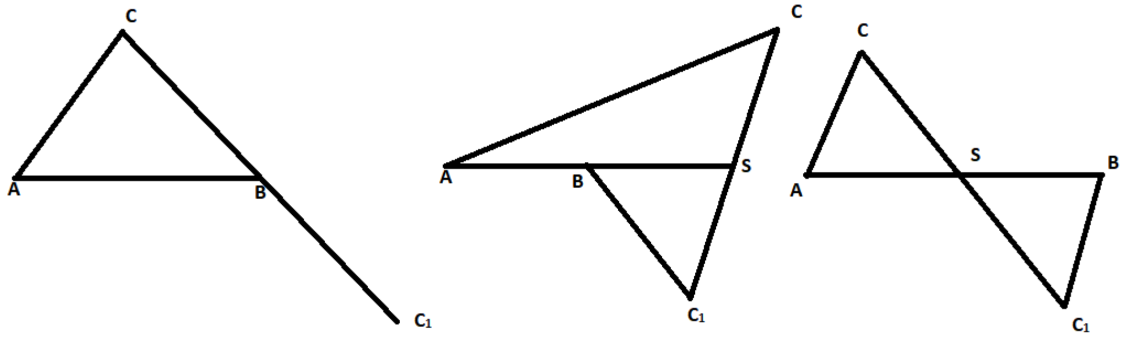
Dokaz. Zakon trihotomije za duži nam govori da su moguća tri slučaja za duži $[AC]$ i $[A'C']$: da je $[AC] \cong [A'C']$ ili da je $[AC] > [A'C']$ ili da je $[AC] < [A'C']$. Pošto želimo da pokažemo da važi prvi slučaj, pokažimo da ne važe drugi i treći. Te pretpostavimo suprotno, da važi da je $[AC] > [A'C']$. To znači da postoji neka tačka C'' takva da važi raspored $A - C'' - C$ i da je $[AC''] \cong [A'C']$. Posmatrajmo sada trouglove $\triangle ABC''$ i $\triangle A'B'C'$. Na ove trouglove možemo da primenimo aksiomu $\mathbf{III_5}$ koja nam daje podudarnost uglova
$$\measuredangle AC''B \cong \measuredangle A'C'B'.$$
Kako je podudarnost uglova relacija ekvivalencije, zaključujemo da važi podudarnost $\measuredangle ACB \cong \measuredangle AC''B$. Podsetimo se da se spoljašnji ugao trougla definiše kao ugao koji je naporedan uglu trougla. Može se pokazati da je spoljašnji ugao proizvoljnog trougla veći od ugla tog trougla sa kojim nije naporedan. No u ovom slučaju mi smo dobili da za $\triangle BCC''$ važi da je spoljašnji ugao $\measuredangle AC''B$ podudaran uglu ovog trougla $\measuredangle BCC''$ sa kojim nije naporedan. Tako smo došli do kontradikcije. I u trećem slučaju se na sličan način dolazi do kontradikcije. Dakle, mora da je $[AC] \cong [A'C']$.

$\square$

Lema 4.9. *Za svaku duž* $[AB]$ *postoji jedinstvena tačka* S *takva da važi raspored* $A - S - B$ *i da važi podudarnost duži* $[AS] \cong [BS]$.

Ova tačka S *se naziva središte duži* $[AB]$.

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljnu duž $[AB]$. Označimo sa α neku ravan koja je incidentna s duži $[AB]$. Neka su C i C_1 tačke ravni α koje se nalaze sa raznih strana prave $p(A, B)$ takve da važe podudarnosti duži $[CA] \cong [C_1B]$ i uglova
$$\measuredangle CAB \cong \measuredangle C_1BA.$$
Kako se tačke C i C_1 nalaze sa raznih strana prave $p(A, B)$, to nam daje egzistenciju tačke $S \in p(A, B)$ takve da je $C - S - C_1$. Prvi korak je da pokažemo da važi i raspored $A - S - B$. Za početak, pokažimo da se tačka S ne poklapa ni sa tačkom A ni sa tačkom B. Ako pretpostavimo suprotno, to jest da se tačka S poklapa sa tačkom B, onda važi raspored $C - B - C_1$, te posmatrajući trougao $\triangle ABC$ dobijamo da je spoljašnji ugao $\measuredangle ABC_1$ ovog



Slika 4.3. Dokaz egzistencije i jedinstvenosti središta duži $[AB]$.

trougla u stvari podudaran sa uglom $\measuredangle CAB$ i da sa njim nije naporedan. Kontradikcija. Dakle, tačka S se ne poklapa sa tačkom B i na sličan način se pokazuje da se tačka S ne poklapa ni sa tačkom A. To nas dovodi do zaključka da su tačke A, S i B tri različite kolinearne tačke. Na osnovu teoreme 3.2 zaključujemo da važi tačno jedan od sledeća tri rasporeda: ili je $A - S - B$ ili je $A - B - S$ ili je $B - A - S$. Pokažimo da važi raspored $A - S - B$. Pretpostavimo suprotno, da je $A - B - S$. To na osnovu spomenute teoreme za spoljašnje uglove nam daje sledeće:

$$\measuredangle C_1BA > \measuredangle C_1SA > \measuredangle CAS.$$

Pošto je relacija $>$ tranzitivna relacija u skupu uglova, to implicira da je $\measuredangle C_1BA > \measuredangle CAB$. Međutim, podsetimo se da smo tačke C i C_1 birali na taj način da važi podudarnost uglova

$$\measuredangle C_1BA \cong \measuredangle CAB.$$

Kako i za uglove važi zakon trihotomije, to jest da za proizvoljna dva ugla $\measuredangle ab$ i $\measuredangle cd$ važi tačno jedna od relacija

$$\measuredangle ab \cong \measuredangle cd, \ \measuredangle ab > \measuredangle cd, \ \measuredangle ab < \measuredangle cd,$$

to znači da smo došli do kontradikcije, te imamo da ne važi raspored $A - B - S$. Na sličan način se dolazi do zaključka da ne važi ni raspored $B - A - S$, stoga mora da važi raspored $A - S - B$. Na osnovu prethodne leme dobijamo da je $[AS] \cong [SB]$. Dakle, egzistencija takve tačke S je dokazana. Još treba da pokažemo da je S jedina takva. Te pretpostavimo suprotno, da postoji neka tačka S_1 različita od S takva da je ispunjeno $A - S_1 - B$ i $[AS_1] \cong [S_1B]$. Posmatrajmo rasporede $A - S - B$ i $A - S_1 - B$. Vidimo da se tačke S i B nalaze sa iste strane tačke A, a isto važi i za tačke S_1 i B, što nas dovodi do zaključka da se tačke S i S_1 moraju nalaziti sa iste strane tačke A. Dakle, mora da važi ili raspored $A - S_1 - S$ ili raspored $A - S - S_1$. Pretpostavimo da je $A - S_1 - S$. Odatle sledi da mora da važi raspored $S_1 - S - B$. Nalazimo da je $[AS] > [AS_1]$ i da je $[S_1B] > [SB]$. Te kako je $[AS_1] \cong [BS_1]$, sledi da je $[AS] > [SB]$. Ovaj zaključak je u kontradikciji sa $[AS] \cong [SB]$. Zaključili smo, dakle, da ne važi raspored $A - S_1 - S$. To znači da mora da važi raspored $A - S - S_1$. Ali, na sličan način kao malopre se pokazuje da i u ovom slučaju dolazimo do kontradikcije, što znači da takva tačka S_1 ne postoji. $\square$

Glava 5

Aksioma paralelnosti

Ova aksioma se još zove Euklidova aksioma paralelnosti i glasi ovako:

IV Za svaku pravu s i svaku tačku $A \notin s$ u ravni $r(s, A)$ postoji najviše jedna prava t koja je incidentna s tačkom A i koja ne seče pravu s. Ova prava se naziva paralelna prava prave s kroz tačku A.

To je savremena Euklidova aksioma paralelnosti. A prvobitna glasi ovako:

IV' Za svaku pravu s i svaku tačku $A \notin s$ u ravni $r(s, A)$ postoji tačno jedna prava t koja je incidentna s tačkom A i koja ne seče pravu s. Ova prava se naziva paralelna prava prave s kroz tačku A.

Što se tiče ove grupe aksioma, razlika se javlja u tome što prvobitna aksioma paralelnosti daje egzistenciju tačno jedne takve prave t, dok savremena aksioma govori da postoji najviše jedna takva. Da bismo pokazali ekvivalenciju ove dve aksiome, to znači da u stvari moramo da pokažemo da iz savremene sledi prvobitna aksioma. Dakle, pretpostavimo da važi savremena aksioma paralelnosti. Pokazaćemo da bar jedna takva prava t postoji, što će onda slediti zbog **IV** da postoji tačno jedna takva, čime se dokaz završava. Dakle, posmatrajmo pravu s i tačku $A \notin s$. Iz tačke A na pravu s možemo povući normalu. Označimo tu pravu sa b. Sada slično, iz tačke A možemo povući normalu na pravu b. Ovu pravu označimo sa c. Nije teško pokazati da se dve prave koje imaju zajedničku normalu ne seku. Time dobijamo da se prave s i c ne seku, to jest tražena prava t je u stvari dobijena prava c.

Aksioma paralelnosti je ekvivalentna sa Euklidovim petim postulatom (po čemu je i dobila ime), no kako Euklidov peti postulat ima vidno složeniju formulaciju od preostala četiri, matematičari su vekovima smatrali da se on može izvesti iz njih i pokušavali su da to sprovedu u delo. Tek u 19. veku, zahvaljujući pre svega radu Janoša Boljaija i Nikolaja Lobačevskog, ispostavilo se da pomenuta aksioma jeste nezavisna od preostalih aksioma, i da, ukoliko umesto nje u spisak aksioma uvrstimo njenu negaciju, tzv. hiperboličku aksiomu paralelnosti, dobijamo geometriju koja je i dalje neprotivrečna. Hiperbolička aksioma paralelnosti glasi:

Za svaku pravu s i svaku tačku $A \notin s$ u ravni $r(s, A)$ postoje bar dve prave koje su incidentne s tačkom A i koje ne seku pravu s.

Ako se Euklidova aksioma zameni hiperboličkom aksiomom paralelnosti, dobijamo potpuno novu geometriju u kojoj na primer važe sledeća tvrđenja:

1. Za svaku pravu s i tačku $A \notin s$ u ravni $r(s, A)$ postoji beskonačno mnogo pravih koje su incidentne s tačkom A i koje ne seku pravu s.

2. Zbir uglova svakog trougla manji je od $180°$.

3. Postoji trougao koji nema opisanu kružnicu.

4. Ne postoje prava i tri kolinearne tačke s iste strane ove prave koje su na jednakom rastojanju od nje.

Glava 6

Aksiome neprekidnosti

Za početak navodimo prvobitne Hilbertove aksiome neprekidnosti.

Arhimedova aksioma $\mathbf{V_1}$. Neka je A_1 tačka prave a koja se nalazi između proizvoljnih tačaka A i B koje su takođe incidentne s pravom a. Uzmimo tačke $A_2, A_3, A_4, ..$ na pravoj a takve da važe rasporedi

$$A - A_1 - A_2, A_1 - A_2 - A_3, A_2 - A_3 - A_4, ...$$

Neka važe i podudarnosti duži

$$[AA_1] \cong [A_1A_2] \cong [A_2A_3] \cong [A_3A_4], ...$$

Tada među ovim A_i-ovima postoji neka tačka A_n takva da važi raspored

$$A - B - A_n.$$

Aksioma kompletnosti $\mathbf{V_2}$. Sistem tačaka, pravih i ravni koji zadovoljava navedenih pet grupa aksioma nije moguće proširiti dodatnim elementima na takav način da novi sistem i dalje ispunjava svih pet grupa aksioma.

I dodatno savreme Hilbertove aksiome neprekidnosti:

Arhimedova aksioma $\mathbf{V_1}$ Ako su $[AB]$ i $[CD]$ dve proizvoljne duži i ako su $A_1, A_2, A_3, ...$ tačke poluprave $pp[A, B)$ takve da je

$$A - A_1 - A_2, A_1 - A_2 - A_3, A_2 - A_3 - A_4, ...$$

i da je

$$[AA_1] \cong [A_1A_2] \cong [A_2A_3] \cong ... \cong [CD],$$

onda postoji pozitivan ceo broj n takav da je ili $A_n \equiv B$ ili da važi raspored $A_n - B - A_{n+1}$.

Aksioma kompletnosti za pravu $\mathbf{V_2}$ Sistemu tačaka neke prave, zajedno s relacijama rasporeda i podudarnosti među njima, nije moguće dodati nove tačke na takav način da sve relacije među originalnim tačkama ostanu očuvane, i da pritom i dalje važe sva fundamentalna svojstva koja proističu iz prve tri grupe aksioma i aksiome $\mathbf{V_1}$.

Za pomenuta fundamentalna svojstva dovoljno je podrazumevati, što se rasporeda tiče, prve tri aksiome druge grupe kao i teoremu 3.5, a što se podudarnosti tiče, prve tri aksiome treće grupe kao i teoremu 4.2.

Dokažimo prvobitnu Hilbertovu aksiomu kompletnosti pretpostavljajući $\mathbf{V_2}$:

Dokaz. Elemente koji postoje pre proširenja sistema nazovima „starim" elementima. A one koje dobijamo u proširenju nazovimo „novim" elementima. Pretpostavimo suprotno: da ne važi $\mathbf{V_{2'}}$. Tada postoji neka nova tačka N. Znamo da među starim tačkama, na osnovu aksiome $\mathbf{I_8}$ postoje četiri nekomplanarne tačke, označimo ih sa A, B, C, D. Bez uticaja na opštost, neka su tačke A, B i nova tačka N nekolinearne tačke. Posmatrajmo dve ravni - ravan određenu tačkama A, B, N i ravan određenu tačkama A, C, D. Ove dve ravni imaju u preseku tačku A, te na osnovu aksiome $\mathbf{I_7}$ dobijamo egzistenciju neke tačke E koja se takođe nalazi u preseku ove dve ravni. Primetimo da tačka E nije incidentna s pravom $p(A, B)$, jer bismo onda dobili da je i tačka B incidentna s ravni određenom tačkama A, C, D, što zaključujemo na osnovu aksiome $\mathbf{I_6}$. I sada, ako je E nova tačka, onda je nova tačka E incidentna sa starom ravni ACD. A ako je E stara tačka, onda je nova tačka N incidentna sa starom ravni ABE. U svakom slučaju, ono što smo dobili jeste da je nova tačka incidentna sa starom ravni.

U staroj ravni postoji stari trougao FGH. Takođe, postoji stara tačka I takva da $F - I - G$. Ako za novu tačku L posmatramo pravu $p(I, L)$, onda na osnovu Pašove aksiome dobijamo egzistenciju neke tačke $K \in p(I, L)$ takve da je $F - K - H$ ili $G - K - H$. I ako je K nova tačka, onda je K nova tačka koja je incidentna sa starom pravom $p(F, H)$ ili sa starom pravom $p(G, H)$. A u slučaju da je K stara tačka, onda je nova tačka L incidentna sa starom pravom $p(I, K)$.

Vidimo da su sve ove pretpostavke u kontradikciji sa aksiomom kompletnosti za pravu $\mathbf{V_2}$. Dakle, pretpostavka o egzistenciji nove tačke je pogrešna, što nam govori da ne postoje novi elementi. $\square$

6.1 Merenje duži. Korespondencija između tačaka na pravoj i realnih brojeva

Definicija 6.1. *Dat je sledeći sistem merenja duži:*
Neka je D skup svih duži i neka je $\mathbb{R}^+$ skup pozitivnih realnih brojeva. Funkcija $m : D \to \mathbb{R}^+$ je funkcija merenja duži ako:

1) *ako za proizvoljne $a, b \in D$ važi $a \cong b$, onda $m(a) = m(b)$,*

2) *ako za proizvoljne $a, b, c \in D$ važi $a = b + c$ onda $m(a) = m(b) + m(c)$,*

3) *postoji duž $[PQ] \in D$, koju inače nazivamo jedinična duž, takva da je $m([PQ]) = 1$.*

$m(a)$ je mera (dužina) duži a.

U sledećem koraku želimo da pokažemo korespondenciju između tačaka na pravoj i realnih brojeva i u tu svrhu uvodimo još jednu aksiomu - Kantorovu aksiomu:

Kantorova aksioma Neka je dat beskonačan sistem duži

$$[A_1B_1], [A_2B_2], [A_3B_3], ...$$

takvih da su tačke

$$A_1, A_2, A_3, ..., B_1, B_2, B_3, ...$$

kolinearne tačke. Ako su za date duži ispunjeni uslovi:

a) za sve prirodne brojeve i važi

$$[A_{i+1}B_{i+1}] \subset int[A_iB_i],$$

b) za svaku duž [PQ] postoji prirodan broj n takav da je ispunjeno

$$[A_nB_n] < [PQ],$$

tada postoji tačka X takva da važi raspored $A_i - X - B_i$ za svaki prirodan broj i.

Teorema 6.1. *Ako važe aksiome incidencije, poretka, podudarnosti i Arhimedova aksioma, onda su Kantorova aksioma i aksioma kompletnosti za pravu ekvivalentne.*

Dokaz. Najpre pokazujemo da iz Kantorove sledi aksioma kompletnosti. Te neka važi Kantorova aksioma. Pretpostavimo suprotno, da aksioma kompletnosti ne važi. To znači da se prava može dopuniti nekom novom tačkom X. Uzmimo proizvoljne stare tačke A_1 i B_1 na ovoj pravoj takve da važi raspored $A_1 - X - B_1$. Formirajmo niz zatvorenih intervala $[A_nB_n]$ na sledeći način: za sve prirodne brojeve $n > 1$ neka je A_n središte duži $[A_{n-1}X]$ a B_n središte duži $[B_{n-1}X]$. U novom modelu ovi intervali u preseku imaju samo tačku X, što znači da u starom modelu ovaj niz nema preseka, to jest predstavlja kontraprimer za Kantorovu aksiomu. Dakle, tražena implikacija je dokazana.

Dokažimo sada obrnuto, da iz aksiome kompletnosti za pravu sledi Kantorova aksioma. Dokaz ide ponovo kontrapozicijom. Te pretpostavimo suprotno, da ne važi Kantorova aksioma. To znači da postoji takav niz zatvorenih intervala koji nemaju zajedničku presečnu tačku. Pokažimo da se u tom slučaju može dodati nova tačka i da će ostati očuvane sve propisane relacije. Neka je X neka nova tačka takva da se nalazi između svih parova tačaka koje su krajevi gore posmatranih intervala. Posmatrana prava s ovom dodatnom tačkom ispunjava sve relevantne aksiome, što znači da je prekršena aksioma kompletnosti. Dakle, našli smo kontraprimer za ovu aksiomu, čime je dokazana ekvivalencija. $\square$

Teorema 6.2. *Ako za proizvoljne duži $[AB]$ i $[CD]$ važi da je $[AB] > [CD]$, onda je*

$$m([AB]) > m([CD]).$$

Dokaz. Posmatrajmo polupravu a sa početkom u tački O. Uzmimo na ovoj polupravoj tačke P i Q takve da važe podudarnosti duži $[OP] \cong [AB]$ i $[OQ] \cong [CD]$. Znamo da važi raspored tačaka $O - Q - P$, jer imamo da je $[AB] > [CD]$. Na osnovu drugog uslova u prethodnoj definiciji zaključujemo da je

$$m([OP]) = m([OQ]) + m([QP]),$$

iz čega imamo da je

$$m([OP]) > m([OQ]).$$

Prvi uslov definicije 6.1 nam govori da je $m([OP]) = m([AB])$ i da je $m([OQ]) = m([CD])$. Sve zajedno implicira traženo, to jest da je

$$m([AB]) > m([CD]).$$

$\square$

Teorema 6.3. *Neka je zadata jedinična duž. Za svaku duž koja je manja od jedinične duži važi da je njen merni broj jednoznačno određen.*

Dokaz. Neka za svaku duž važi da joj je pridružen pozitivan realan broj tako da su svi uslovi definicije 6.1 ispunjeni. Neka je $[PQ]$ jedinična duž, $m([PQ]) = 1$. Uzmimo proizvoljnu duž $[AB]$ koja je manja od jedinične duži $[PQ]$. Koristeći lemu 4.9 znamo da postoji središte S duži $[PQ]$. To znači da mora da je $m([PS])+m([SQ]) = 1$ i da je $m([PS]) = m([SQ])$. Ovi zaključci impliciraju da je merni broj ovih dveju duži

$$m([PS]) = m([SQ]) = \frac{1}{2}.$$

Relacija $[PQ] > [AB]$ po definiciji znači da postoji neka tačka C takva da je ispunjen raspored $P - C - Q$ i podudarnost $[PC] \cong [AB]$. Za ovu tačku C su moguća tri slučaja. Prvi je kada se tačka C poklapa sa tačkom S. To nam daje da je merni broj

$$m([PC]) = \frac{1}{2},$$

to jest

$$m([AB]) = \frac{1}{2},$$

te je merni broj $m([AB])$ određen. Drugi slučaj je da važi raspored $P-C-S$ a treći da važi raspored $S - C - Q$. Kad su u pitanju ova dva rasporeda, koristeći teoremu 6.2 imamo da je

$$0 < m([AB]) < \frac{1}{2},$$

ako je u pitanju prvi slučaj, a u drugom slučaju

$$\frac{1}{2} < m([AB]) < 1.$$

Ova dva izraza možemo objediniti u izraz

$$\frac{n_1}{2} < m([AB]) < \frac{n_1 + 1}{2},$$

gde je n_1 jednako 0 ako se radi o prvom slučaju a jednako je 1 u drugom slučaju. Međutim, u ova dva zadnja slučaja vidimo da $m([AB])$ nije određeno, već za sad vidimo samo to da se broj $m([AB])$ nalazi u nekom intervalu. To znači da postupak moramo da nastavimo dalje.

Dakle, drugi korak. Stavimo da je $P \equiv P_1$ i $S \equiv Q_1$ u prvom slučaju, a $S \equiv P_1$ i $Q \equiv Q_1$ u drugom slučaju. Posmatrajmo pravu $[P_1Q_1]$ bez obzira na to da li se radi o jednom ili drugom slučaju. Sa S_1 ćemo označiti središte ove duži. U ovom drugom koraku postupka dobijamo da su za tačku C, opet na sličan način kao u prvom koraku, moguća tri sledeća slučaja: tačka C se poklapa sa tačkom S_1, prvi slučaj. Tada naravno važi, pošto je S_1 središte duži $[P_1Q_1]$, da je

$$m([P_1C]) + m([CQ_1]) = \frac{1}{2}$$

i da je

$$m([P_1C]) = m([CQ_1]),$$

odakle sledi da je

$$m([P_1C]) = m([CQ_1]) = \frac{n_1}{2} + \frac{1}{2^2},$$

gde n_1 biramo u zavisnosti od toga koji od dva rasporeda $P - C - S$ ili $S - C - Q$ važi. Tako sad, u slučaju rasporeda $P - C - S$ dobijamo da je

$$\frac{n_1}{2} < m([PC]) < \frac{n_1}{2} + \frac{1}{2^2},$$

a u slučaju $S - C - Q$ je

$$\frac{n_1}{2} + \frac{1}{2^2} < m([PC]) < 1.$$

Zadnja dva izraza opet objedinjujemo u jedan

$$\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} < m([PC]) < \frac{n_1}{2} + \frac{n_2 + 1}{2^2},$$

gde n_2, slično kao malopre, biramo da je jednako 0 ako se radi o slučaju $P_1 - C - S_1$ a da je jednako 1 u slučaju rasporeda $S_1 - C - Q_1$. Na ovaj način dobijamo da je merni broj $m([AB])$ određen sa tačnošću do

$$\frac{1}{2^2}.$$

Naravno, postupak se dalje nastavlja. Na taj način će se broj $m([AB])$ naći u sve manjem intervalu. Dobićemo da se ovaj broj nalazi između

$$\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + ... + \frac{n_v}{2^v} < m([AB]) < \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + ... + \frac{n_v + 1}{2^v},$$

pri čemu je, naravno, u zavisnosti od slučaja, n_v jednako 0 ili 1.

Dakle, dolazimo do zaključka da će ili postojati pozitivan ceo broj v takav da će se tačka C poklopiti sa tačkom S_v, u kom slučaju dobijamo da je

$$m([AB]) = \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + ... + \frac{n_v}{2^v},$$

dakle $m([AB])$ je određen, ili takav broj neće postojati. To će onda merni broj $m([AB])$ biti limes dva monotona niza brojeva. S leve strane će $m([AB])$ biti ograničen neopadajućim nizem, a s desne nerastućim. Kako je razlika opštih članova ova dva niza jednaka

$$\frac{1}{2^v}$$

i kako je

$$\lim_{v \to \infty} \frac{1}{2^v} = 0,$$

sledi da je broj $m([AB])$, jednoznačno određen. $\square$

Teorema 6.4. *Neka je zadata jedinična duž. Za svaku duž važi da je njen merni broj jednoznačno određen.*

Dokaz. Neka je $[PQ]$ jedinična duž. Posmatrajmo proizvoljnu duž $[AB]$. Neka su $A_1, A_2, A_3, ...$ tačke poluprave $pp[A, B)$ takve da važe rasporedi

$$A - A_1 - A_2,\ A_1 - A_2 - A_3,\ A_2 - A_3 - A_4, ...$$

i podudarnosti

$$[AA_1] \cong [A_1A_2] \cong [A_2A_3] \cong ... \cong [PQ].$$

Kako su ispunjeni uslovi Arhimedove aksiome, znamo da postoji pozitivan ceo broj n takav da je ili $A_n \equiv B$ ili da važi raspored $A_n - B - A_{n+1}$. Primetimo da važi da je

$$m([AA_n]) = n,\ m([AA_{n+1}]) = n + 1$$

na osnovu drugog dela definicije 6.1. Dakle, u slučaju da je $A_n \equiv B$, merni broj $m([AB])$ je određen, jednak je n. Kad je u pitanju drugi slučaj, to jest da važi raspored $A_n - B - A_{n+1}$, dobijamo da se broj $m([AB])$ nalazi između brojeva n i $n + 1$. Primetimo da važi jednakost

$$m([AB]) = n + m([A_nB]).$$

Koristeći teoremu 6.3 i činjenicu da je $[A_nB] < [PQ]$, dobijamo da je merni broj duži $[A_nB]$ jednoznačno određen, a time i merni broj duži $[AB]$. $\square$

Ovaj postupak, opisan u teoremi 6.4, se naziva merenje duži.

Teorema 6.5. *Neka je data proizvoljna duž $[AB]$. Postoji pozitivan ceo broj n takav da se nakon n uzastopnih polovljenja jedinične duži dobije duž koja je manja od zadate duži $[AB]$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da ova teorema nije tačna. To onda znači da za svaki ceo pozitivan broj n važi da je

$$2^n[AB] < [PQ],$$

gde je $[PQ]$ jedinična duž. Ali to je u kontradikciji sa Arhimedovom aksiomom. Dakle, takvo n postoji. $\square$

Posledica 6.6. *Ako pretpostavimo da je broj $m([AB])$ dat u obliku beskonačnog zbira*

$$m([AB]) = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + ... + \frac{n_v}{2^v} + ...,$$

onda ne mogu svi n_v, počevši od nekog, biti jednaki broju 1.

Dokaz. Ako bismo pretpostavili suprotno, dobili bismo da je

$$[BA_{n+1}] < [P_vQ_v],$$

što je u kontradikciji sa teoremom 6.5. $\square$

Lema 6.7. *Posmatrajmo funkciju m koja svakoj duži pridružuje pozitivan realan broj na način opisan u dokazu teoreme 6.4. Ako za dve proizvoljne duži $[AB]$ i $[CD]$ važi da je $[AB] < [CD]$, onda je*

$$m([AB]) < m([CD]).$$

Dokaz. Uzmimo proizvoljne dve duži $[AB]$ i $[CD]$ takve da je $[AB] < [CD]$. Po definiciji to znači da postoji neka tačka D' takva da je $C - D' - D$ i da je ispunjeno $[AB] \cong [CD']$. Označimo sa $a = m([AB])$ i $c = m([CD])$. Na osnovu ovih oznaka zaključujemo da i

$$m([CD']) = a.$$

Uzmimo tačke $C_1, C_2, C_3, ...$ na polupravoj $pp[C, D)$ takve da važe rasporedi

$$C - C_1 - C_2,\ C_1 - C_2 - C_3, ...$$

i podudarnosti

$$[CC_1] \cong [C_1C_2] \cong [C_2C_3] \cong ... \cong [PQ],$$

gde je $[PQ]$ jedinična duž.

Postoje dve mogućnosti. Prva govori da će tačka D' upasti u interval $[C_nC_{n+1}]$, a tačka D u interval $[C_mC_{m+1}]$, pri čemu je $n < m$. (Slučaj da je $m < n$ ne može da se desi, došli bismo do kontradikcije zbog toga što važi raspored tačaka $C - D' - D$.) Dakle, dobijamo da je broj a jednak zbiru broja n i nekog nenegativnog broja koji je manji od ili jednak 1 i da je broj c jednak zbiru broja m i takođe nekog nenegativnog broja koji je manji od ili jednak 1. To nas dovodi do zaključka da je $a < c$.

Druga mogućnost govori da će i tačka D' i tačka D upasti u isti interval $[C_nC_{n+1}]$. Neka je S središte ovog intervala $[C_nC_{n+1}]$. Ako tačka D' upadne u interval $[C_nS]$, a tačka D u interval $[SC_{n+1}]$, dobijamo da je broj a jednak zbiru broja n i nekog nenegativnog broja manjeg od $\frac{1}{2}$, što ćemo da zapišemo kao

$$a = n + 0 \cdot \frac{1}{2} + ...$$

i da je broj c jednak zbiru broja n, broja $\frac{1}{2}$ i nekog nenegativnog broja manjeg od $\frac{1}{2}$, što ćemo, slično kao i za broj a, da zapišemo na sledeći način:

$$c = n + \frac{1}{2} + ...$$

Tada je $a < c$.

No ako se ovo ne desi, da $D' \in [C_nS]$ i $D \in [SC_{n+1}]$, onda važi da je ispunjeno ili

$$D', D \in [C_nS]$$

ili

$$D', D \in [SC_{n+1}].$$

Uvodimo oznake: u prvom slučaju stavljamo da je

$$P_1 \equiv C_n, Q_1 \equiv S,$$

dok u drugom slučaju stavljamo da je

$$P_1 \equiv S, Q_1 \equiv C_{n+1}.$$

Još dodatno, sa S_1 ćemo da označimo središte duži $[P_1Q_1]$. Ovaj postupak se nastavlja. Dobićemo da tačka

$$D' \in [P_vS_v]$$

a tačka

$$D \in [S_vQ_v].$$

To jest, dobijamo da za a važi

$$a = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + ... + 0 \cdot \frac{1}{2^v} + ...$$

a za c važi da je

$$c = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + ... + 1 \cdot \frac{1}{2^v} + ...$$

Zaključujemo da mora da bude da je $a < c$. Zaista je tako, jer inače bismo dobili da je za svaki pozitivan ceo broj v

$$m([DD']) < m([P_v Q_v]),$$

no to je u kontradikciji sa teoremom 6.5. □

Teorema 6.8. *Neka je data proizvoljna duž $[AB]$. Postoji pozitivan realan broj koji možemo da pridružimo duži $[AB]$ takav da taj broj zadovoljava sva tri uslova definicije 6.1.*

Dokaz. Za početak ćemo da pridružimo posmatranoj duži $[AB]$ pozitivan realan broj koji se dobija na način koji je prikazan u dokazu teoreme 6.4.

Proveravamo da li je zadovoljen prvi uslov definicije. Uzmimo duž $[A'B']$ takvu da je $[AB] \cong [A'B']$. Neka su

$$A_1,\ A_2, ...,\ A_{n+1},\ S,\ S_1,\ S_2, ...$$

tačke na polupravoj $pp[A, B)$ koje se javljaju u postupku merenja duži $[AB]$, to jest tačke korišćene u prethodnim dokazima. Naravno, koristeći aksiome podudarnosti, na polupravoj $pp[A', B')$ možemo da dobijemo odgovarajuće tačke

$$A'_1,\ A'_2, ...,\ A'_{n+1},\ S',\ S'_1,\ S'_2, ...$$

rasporedi kojih su isti kao rasporedi odgovarajućih tačaka prave $p(A, B)$ i još da će duži koje se na ovaj način dobijaju na pravoj $p(A', B')$ biti podudarne odgovarajućim dužima na pravoj $p(A, B)$. I dakle dobićemo da je

$$m([AB]) = m([A'B']),$$

te je prvi uslov zadovoljen.

Dolazimo do dokaza da je drugi uslov definicije 6.1 zaista zadovoljen. Duž koja je dobijena nakon n uzastopnih polovljenja jedinične duži $[PQ]$ ćemo da označimo sa $[P_n Q_n]$ i posmatraćemo tri proizvoljne kolinearne tačke A, B i C takve da važi raspored $A - B - C$. Na polupravoj $pp[B, A)$ ćemo označiti tačke $A_1, A_2, A_3, ...$ takve da važe podudarnosti

$$[P_n Q_n] \cong [BA_1] \cong [A_1 A_2] \cong [A_2 A_3] \cong ...$$

i analogno, na polupravoj $pp[B, C)$ ćemo označiti tačke $C_1, C_2, C_3, ...$ takve da važe podudarnosti

$$[P_n Q_n] \cong [BC_1] \cong [C_1 C_2] \cong [C_2 C_3] \cong ...$$

Kako su zadovoljeni uslovi Arhimedove aksiome, možemo da zaključimo da postoje pozitivni celi brojevi p i q takvi da je ili $A \equiv A_p$ ili važi raspored $A_p - A - A_{p+1}$ i da je ili $C \equiv C_q$ ili da važi raspored $C_q - C - C_{q+1}$. Posmatrajući tačku A u odnosu na tačku B i koristeći lemu 6.7 možemo da zaključimo da važe sledeće relacije:

$$[BA_p] \leq [BA] < [BA_{p+1}]$$

i slično, posmatrajući tačku C u odnosu na tačku B zaključujemo da važe relacije

$$[BC_q] \leq [BC] < [BC_{q+1}].$$

Takođe, posmatrajući tačke A i C imamo da je

$$[A_pC_q] \leq [AC] \leq [A_{p+1}C_{q+1}].$$

To nas dovodi do sledećih relacija:

$$\frac{p}{2^n} \leq m([AB]) < \frac{p+1}{2^n},$$

$$\frac{q}{2^n} \leq m([BC]) < \frac{q+1}{2^n},$$

$$\frac{p+q}{2^n} \leq m([AC]) < \frac{p+q+2}{2^n}.$$

Dakle, dobili smo da je

$$\frac{p+q}{2^n} \leq m([AB]) + m([BC]) < \frac{p+q+2}{2^n},$$

$$\frac{p+q}{2^n} \leq m([AC]) < \frac{p+q+2}{2^n}.$$

Podsetimo se, želimo da pokažemo da je $m([AB]) + m([BC]) = m([AC])$. Stoga posmatrajmo razliku $m([AB]) + m([BC]) - m([AC])$. Važi:

$$|m([AB]) + m([BC]) - m([AC])| < \frac{p+q+2}{2^n} - \frac{p+q}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Kako ovo važi za svaki prirodan broj n, zaključujemo da je posmatrana razlika jednaka 0, to jest

$$m([AB]) + m([BC]) - m([AC]) = 0,$$

što konačno implicira traženo, to jest da je

$$m([AB]) + m([BC]) = m([AC]).$$

I na kraju možemo da konstatujemo da je i treći uslov definicije zadovoljen, jer u procesu merenja jedinične duži dobijamo da je njen merni broj jednak 1. $\square$

Teorema 6.9. *Neka je zadata jedinična duž. Tada za svaki realan pozitivan broj r postoji neka duž $[AB]$ takva da je*

$$m([AB]) = r.$$

Dokaz. Neka je r proizvoljan realan pozitivan broj. Imamo dva slučaja, da je broj r racionalan broj a drugi slučaj je onaj da je broj r iracionalan. U prvom slučaju r možemo zapisati kao konačan zbir

$$r = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + ... + \frac{n_v}{2^v},$$

a u drugom slučaju r možemo zapisati kao beskonačan zbir

$$r = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \frac{n_3}{2^3} + ...,$$

gde je broj n nenegativan ceo broj a n_i-ovi su 0 ili 1.

Neka je $[PQ]$ jedinična duž i neka je a poluprava sa početkom u tački A. Dalje, neka su $A_1, A_2, ..., A_n$ i A_{n+1} tačke na polupravoj a takve da važe podudarnosti

$$[AA_1] \cong [A_1A_2] \cong ... \cong [A_nA_{n+1}] \cong [PQ].$$

Označimo sa S_1 središte duži $[A_nA_{n+1}]$. Ako je $n_1 = 0$, onda stavljamo da je $A_n \equiv P_1$ i $S_1 \equiv Q_1$ a ako je $n_1 = 1$, onda stavljamo da je $S_1 \equiv P_1$ i $A_{n+1} \equiv Q_1$. Na sličan način sad označavamo sa S_2 središte duži $[P_1Q_1]$ i, kao i u prethodnom koraku, ako je $n_2 = 0$, onda stavljamo da je $P_1 \equiv P_2$ i da je $S_2 \equiv Q_2$ a ako je $n_2 = 1$, onda stavljamo da je $S_2 \equiv P_2$ i da je $Q_1 \equiv Q_2$. I tako ponavljamo postupak. Primetimo da je

$$m([AA_n]) = n,$$

$$m([AS_1]) = n + \frac{1}{2},$$

$$m([AS_2]) = n + \frac{n_1}{2} + \frac{1}{2^2},$$

$$m([AS_3]) = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \frac{1}{2^3}, ...$$

I sad, ako se radi o prvom slučaju, to jest da je broj r racionalan broj, onda je $m([AS_v]) = r$. U drugom slučaju, to jest kad je broj r iracionalan, imamo beskonačan niz duži

$$[A_nA_{n+1}], [P_1Q_1], [P_2Q_2], ...$$

takav da je svaka duž nastala polovljenjem prethodne duži, to jest, dobijamo da je svaka duž ovog niza sadržana u prethodnoj duži niza. Kad posmatramo krajnje tačke ovih duži, primetićemo da jedna od krajnjih tačaka svake duži je istovremeno i krajnja tačka prethodne duži u nizu. Napomenimo da, kako se radi o slučaju u kojem je r iracionalan broj, ne može da se dogodi takva situacija da će počevši od nekog indeksa v sve duži oblika $[P_vQ_v]$ da imaju jednu krajnju zajedničku tačku, jer u izrazu

$$r = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \frac{n_3}{2^3} + ...,$$

ne mogu svi n_v počevši od nekog biti ni 0 ni 1. Jer ako bi bili svi počev od tog nekog jednaki 0, to onda dobijamo slučaj da je r racionalan broj. A da ne mogu svi počevši od tog nekog biti jednaki 1 nam govori posledica 6.6. To nas dovodi do zaključka da među dužima

$$[A_nA_{n+1}],\ [P_1Q_1],\ [P_2Q_2]$$

postoji duž $[P_kQ_k]$ takva da su sve njene tačke u unutrašnjosti duži $[P_1Q_1]$, te takođe postoji duž $[P_lQ_l]$ takva da su sve njene tačke u unutrašnjosti duži $[P_kQ_k]$ i taj niz se nastavlja. Pored toga, znamo na osnovu teoreme 6.5 da za svaku duž $[P_kQ_k]$ postoji dovoljno velik pozitivan ceo broj n takav da nakon što n-puta polovimo jediničnu duž dobijamo duž koja je manja od date duži $[P_kQ_k]$, to jest dobijamo duž koja će biti sadržana u duži $[P_kQ_k]$. Šta nam to u stvari govori? Među dužima datog beskonačnog niza

$$[A_nA_{n+1}], [P_1Q_1], [P_2Q_2], ...$$

ne postoji takva koja bi bila sadržana u svim tim dužima. Na osnovu Kantorove aksiome zaključujemo da postoji tačka X koja je sadržana u svakoj od duži pomenutog niza, te važi da je

$$m([AX]) = r.$$

Dakle, i u slučaju kad je r racionalan broj i u slučaju kad je r iracionalan broj dobijamo da je duž $[AB]$ određena. U slučaju racionalnog broja, to je $[AS_v]$ a u slučaju da je r iracionalan broj to je $[AX]$. □

Napomenimo da duž $[AB]$ nije jedina duž za koju važi da je

$$m([AB]) = r.$$

U stvari, za svaku duž koja je podudarna sa duži $[AB]$ važi da je i njena mera jednaka broju r. Podsetimo se da smo sa D označili skup svih duži. Kako znamo da je podudarnost duži relacija ekvivalencije, to znači da možemo da posmatramo količnički skup $\mathscr{D} = D/\cong$. Sada, ako je $d \in \mathscr{D}$ skup svih međusobno podudarnih duži, to znači da se svaki element iz d može smatrati predstavnikom klase, pa ćemo staviti da je

$$m(d) = r$$

i onda svu priču do sad u ovom poglavlju, preciznije teoreme 6.4, 6.8 i 6.9 možemo da iskažemo na sledeći način:

Neka je zadata jedinična duž. Označimo sa R^+ skup svih pozitivnih realnih brojeva. Preslikavanje

$$f : \mathscr{D} \to R^+$$

koje svakom elementu skupa $\mathscr{D}$ pridružuje njegov merni broj, to jest za svako $d \in \mathscr{D}$

$$f(d) = m(d),$$

je bijekcija.

Takođe, kao posledicu pomenutih teorema dobijamo sledeće:

Neka je zadata jedinična duž i poluprava a sa početkom u tački O. Označimo sa R^+ skup svih pozitivnih realnih brojeva. Preslikavanje

$$f : \mathscr{D} \to R^+$$

koje svakoj tački $A \in a$ pridružuje merni broj duži $[OA]$, to jest za svako $A \in a$

$$f(A) = m([OA]),$$

je bijekcija.

Sve ovo smo pokazivali da bismo dali objašnjenje kako aksiome neprekidnosti omogućavaju korespondenciju između tačaka na pravoj i realnih brojeva, odnosno koordinata. Te neka je zadata jedinična duž, prava p i tačka O na ovoj pravoj, koju ćemo nazvati koordinatnim početkom. Reći ćemo da je koordinata ove tačke 0. Posmatrajući ovu tačku dobijamo dve poluprave prave p sa početkom u O. Ove poluprave ćemo nazvati pozitivnom i negativnom polupravom. Neka je data tačka A različita od koordinatnog početka. Merni broj duži $[OA]$ je jednoznačno određen. Ako se tačka A nalazi na pozitivnoj polupravoj prave p, onda je broj $m([OA])$ koordinata tačke A, a ako se A nalazi na negativnoj polupravoj ove prave, onda je broj $-m([OA])$ koordinata tačke A. Time smo pokazali da svakoj tački na pravoj p odgovara tačno jedna koordinata, to jest tačno jedan realan broj. Takođe, svakom realnom broju odgovara tačno jedna tačka posmatrane prave p. To je upravo ona tačka čija koordinata je posmatrani realni broj.

Literatura

[1] Kristina Ago, Bojan Bašić, Milica Maksimović, Milica Šobot, *On finite models of Hilbert's incidence geometry*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, rad poslat u časopis

[2] Kristina Ago, Vlado Uljarević, Zbirka zadataka iz apsolutne geometrije, neobjavljen materijal, materijal u pripremi

[3] David Hilbert, *Foundations of Geometry*, Open Court Classics, 1971.

[4] David Hilbert, *Foundations of Geometry*, The Open Court Publishing Company, 1902.

[5] Vasa Pavković, *Mala školska enciklopedija*, Narodna knjiga Politika, 2006.

[6] Mileva Prvanović, *Osnovi geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1980.

[7] Ratko Tošić, Vojislav Petrović, *Problemi iz geometrije - metodička zbirka zadataka*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1995.

[8] Adrian I. Vajiac, Bogdan D. Suceava, Georges Boskoff, *An Exploration of Hilbert's Neutral Geometry*, 2008.

[9] https://math.stackexchange.com/questions/328028/what-are-the-differences-between-hilberts-axioms-and-euclids-axioms

Biografija

Lydia Spevak je rođena 29. januara 1996. godine u Novom Sadu. Godine 2011. završava osnovnu školu „Jan Čajak“ u Bačkom Petrovcu kao nosilac Vukove diplome i đak generacije. Iste godine upisuje gimnaziju „Jan Kolar“ sa domom učenika u Bačkom Petrovcu. Završava je 2015. godine opet kao nosilac Vukove diplome. Odlučuje se da konkuriše na Prirodno matematički fakultet u Novom Sadu i iste godine ga i upisuje - smer Teorijska matematika. U četvrtoj godini studija se prebacuje na integrisane studije na istom fakultetu - smer Master profesor matematike. Polaže sve ispite predviđene planom i programom i na taj način stiče uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Lydia Spevak
AU

Mentor: dr Bojan Bašić
ME

Naslov rada: Evolucija Hilbertovog aksiomatskog sistema
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2023.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (6/71/0/0/19/0/0) (broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Geometrija
ND

Ključne reči: geometrija, Euklid, Hilbert, tačka, prava, ravan, aksiome incidencije, rasporeda, podudarnosti, paralelnosti i neprekidnosti, modeli, Van der Vardenova aksioma, realna prava
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom master radu se u uvodu daje kratak istorijski pregled geometrije. Pominje se Euklidovo zasnivanje geometrije kao naučne discipline. Kako je ono imalo neke nedostatke, dalje se govori o radu Davida Hilberta u kojem su otklonjeni Euklidovi propusti. Sledećih pet poglavlja govore o

Hilbertovom prvobitnom i savremenom sistemu aksioma, kako se taj sistem menjao, kako se uprošćavao i ono najbitnije, pokazuje se ekvivalencija između ta dva sistema aksioma. Rad sadrži i primere nekih tvrđenja koja ne mogu da se dokažu koristeći samo određenu grupu aksioma. U tu svrhu se konstruišu određeni modeli koji služe kao kontraprimeri. Rad takođe sadrži ekvivalenciju između Hilbertovog i Van der Vardenovog sistema aksioma. U poslednjem poglavlju rad govori o korespondenciji između tačaka na pravoj i realnih brojeva i detaljno pokazuje kako se stiže do te korespondencije.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 26. 06. 2023.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsetnik: dr Ivana Vojnović, vanredni profesor, Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
Mentor: dr Bojan Bašić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
Član: dr Kristina Ago, docent Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Lydia Spevak
AU

Mentor: Bojan Bašić, PhD
MN

Title: Evolution of Hilbert's axiomatic system
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2023
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (6/71/0/0/19/0/0) (chapters/pages/quotations/tables/pictures/graphics/enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Geometry
SD

Subject/Key words: geometry, Euclid, Hilbert, point, line, plane, axioms of incidence, order, congruence, parallels and continuity, models, Van der Waerden's axioms, real line
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: A short historical overview of geometry is presented in the introduction of this MSc thesis. It starts from Euclid's foundations of geometry as scientific discipline. Since it had some shortcomings, the work of David

Hilbert, in which the issues with Euclid's approach were patched, is discussed further. The following five chapters are devoted to Hilbert's original and modern axiomatic system, how the system was modified over time, how it was simplified, and most importantly, the equivalence between the two systems of axioms is shown. The work also contains examples of some statements that cannot be proven using only a certain subset of axioms. For this purpose, certain models are constructed that serve as counterexamples. The work also contains the equivalence between Hilbert's and Van der Waerden's axiom systems. In the last chapter, the thesis presents the correspondence between points on a line and real numbers and shows in detail how to obtain that correspondence.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 26.06.2023
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Ivana Vojnović, associate professor at Faculty of Sciences and Mathematics, University of Novi Sad
Mentor: dr Bojan Bašić, full professor at Faculty of Sciences and Mathematics, University of Novi Sad
Member: dr Kristina Ago, assistant professor at Faculty of Sciences and Mathematics, University of Novi Sad