UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Snežana Kuvalja

O posledicama konveksnosti

Master rad

Mentor:
dr Milica Žigić

Novi Sad, 2023.

Sadržaj

Predgovor

Sadržaj master rada "O posledacama konveksnosti"obuhvata jedan mali deo širokog spektra primene svojstva konveksnosti u optimizaciji. Ovaj rad će biti podeljen na četiri glave, gde će svaka od njih sadržati više poglavlja.

Prva glava, koja će se sastojati iz tri poglavlja, odnosi se na specijalne vrste prostora nad kojima ćemo u ovom radu definisati funkcije. U prvom poglavlju ćemo uvesti pojmove metričkog prostora, konvergentnog niza, Košijevog niza, pa zatim pomoću uvedenih pojmova definisati kompletne prostore. Nakon toga, ćemo preći na pojmove vektorskog prostora, kao i normiranog vektorskog prostora, čime ćemo doći do pojma Banahovog prostora. Za sam kraj ovog poglavlja ćemo uvesti definiciju skalarnog proizvoda, kao i Koši-Švarcovu nejednakost. U drugom poglavlju ćemo posmatrati metrički prostor i na njemu uvesti pojam otvorene lopte, što će dati motivaciju za uvođenje pojma otvorenog skupa, a nakon toga ćemo definisati pojam topoloških prostora. Koristeći pojam otvorenog skupa, definisaćemo okolinu tačke, pa zatim i pojmove unutrašnje, adherentne, rubne i izolovane tačke, kao i tačku nagomilavanja. Na kraju, definisaćemo kompaktnost skupa u topološkom prostoru. U trećem poglavlju prvo ćemo uvesti pojmove neprekidnosti u topološkim i metričkim prostorima, zatim pojam diferencijabilnog preslikavanja, a nakon toga definisaćemo i neprekidno diferencijabilno preslikavanje.

U drugoj glavi ćemo se baviti samom konveksnošću skupova i funkcija i ova glava će se sastojati iz četiri poglavlja. Prvo poglavlje ćemo početi sa definicijama konveksnog skupa, njihovim osobinama i pojmom konveksne kombinacije elemenata vektorskog prostora, a onda ćemo uvesti pojam konveksnog omotača i pokazati da se može predstaviti kao konveksna kombinacija konačno mnogo elemenata vektorskog prostora. U drugom poglavlju ćemo se baviti konusima, konveksnim konusima i njihovim značajnim svojstvima. U trećem poglavlju ćemo kratko definisati pojam hiperravni i onda preći na četvrto poglavlje, gde ćemo proučavati konveksne funkcije. Definisaćemo pojmove konveksnih, konkavnih, strogo konveksnih i jako konveksnih funkcija, a onda ćemo dati potrebne i dovoljne uslove za konveksnost funkcije na konveksnom skupu.

Treća glava biće vezana sa subdiferencijale funkcija rastojanja tačke od skupa i ona će se sastojati iz tri poglavlja. U prvom poglavlju ćemo uvesti pojmove subgradijenta i subdiferencijala. Zatim, u drugom poglavlju ćemo nastaviti sa osnovnim karakteristikama i primenama subdiferencijala. Nakon toga, u trećem poglavlju će biti reč o funkciji rastojanja tačke od skupa. Pokazaćemo pod kojim uslovima je ova funkcija konveksna i Lipšic neprekidna. U četvrtom poglavlju, nakon uvođenja pojma normalnog konusa, definisaćemo pojam subdiferencijala funkcije rastojanja tačke od skupa.

Četvrta glava će biti posvećena posledicama konveksnosti i ona će se sastojati iz pet poglavlja. U prvom poglavlju će biti reč o prvim posledicama konveksnosti u ovom radu - Radonovoj, Helijevoj i Karateodorijevoj teoremi. Nastavljajući na drugo poglavlje, preći ćemo na drugu posledicu konveksnosti - pojam horizontalnog konusa i predstaviti ograničenost skupa u terminima njegovog horizontalnog konusa. Predmet proučavanja trećeg poglavlja biće treća posledica konveksnosti - funkcija minimalnog vremena i njena veza sa funkcionalom Minkovskog, a zatim i subgradijent funkcije minimalnog vremena. U četvrtom poglavlju ćemo izvesti potrebne i dovoljne uslove za postojanje optimalnih rešenja problema konveksne optimizacije, što će biti četvrta posledica konveksnosti. Na samom kraju, tema petog poglavlja će biti peta posledica konveksnosti, to jest Ferma-Toričelijev problem i njegovo rešavanje. Nakon formulacije Ferma-Toričelijevog problema za tri tačke, geometrijske interpretacije ovog problema i prikazivanja Vajsfeldovog algoritma za numeričko rešavanje, preći ćemo i završiti ovu glavu sa uopštenjem Ferma-Toričelijevog problema, gde ćemo napraviti vezu ovog problema sa funkcijom minimalnog vremena i funkcionalom Minkovskog.

Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru dr Milici Žigić, na izdvojenom vremenu, strpljenju, pomoći i stručnim sugestijama tokom izrade mog master rada. Zahvaljujem se i članovima komisije dr Sanji Rapajić i dr Nenadu Teofanovu na izdvojenom vremenu za realizaciju odbrane ovog rada. Najveću zahvalnost dugujem mojoj porodici, momku i prijateljima, koji su imali razumevanja, strpljenja i pružali mi podršku tokom čitavih studija.

Novi Sad, 2023.

Snežana Kuvalja

Glava 1

Uvod

Na samom početku rada uvodimo osnovne pojmove iz oblasti konveksne analize koje ćemo koristiti u nastavku rada. Definisaćemo metričke, vektorske i topološke prostore i osnovne pojmove u vezi sa njima. To su prostori nad kojima ćemo u ovom radu definisati funkcije. U nastavku biće reči i o neprekidnosti funkcija definisanih nad određenim metričkim prostorima, kao i o njihovoj diferencijabilnosti. Kao teorijsku osnovu u ovoj glavi koristili smo literatutu [6], [7] i [13].

1.1 Metrički i vektorski prostori

U prvom poglavlju biće dati osnovni pojmovi metričkih i vektorskih prostora, koji će imati značajnu ulogu u daljem radu.

Definicija 1.1. *Metrički prostor je uređen par (X, d), gde je X neprazan skup, a $d : X \times X \to \mathbb{R}$ je funkcionela za koju važi:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *(nenegativnost),*
2. $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako* $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$ *(simetrija),*
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(nejednakost trouglova).*

Primer 1.1. Jedan od najznačajnihih metričkih prostora je $\mathbb{R}^n$ sa euklidskom metrikom

$$d\,(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

gde su $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

U nastavku ćemo dati pojam konvergentnog niza, kao i pojam Košijevog niza. Nakon toga, videćemo šta je potrebno da bude zadovoljeno kako bi metrički prostor (X,d) bio kompletan.

Definicija 1.2. *Niz* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *u metričkom prostoru (X,d) konvergira ka* $x \in X$*, što označavamo sa* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*, ako je*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Definicija 1.3. *Niz* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *u metričkom prostoru (X,d) je Košijev ako važi*

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Definicija 1.4. *Metrički prostor (X,d) je kompletan ako je u njemu svaki Košijev niz konvergentan.*

U narednim redovima uvodimo definiciju vektorskog prostora, a zatim i definiciju koja sadrži uslove koji su potrebni da budu zadovoljeni kako bi neki vektorski prostor bio normiran.

Definicija 1.5. *Komutativna grupa* $(X, +)$ *je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$*, ako je za svako* $x, y \in X$ *definisan zbir* $x + y \in X$ *kao preslikavanje iz* $X \times X$ *u* X *i ako je za svako* $x \in X$ *i svako* $\alpha \in \mathbb{R}$ *definisan proizvod* $\alpha x \in X$ *kao preslikavanje iz* $\mathbb{R} \times X$ *u* X*, pri čemu je za sve* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *i* $x, y \in X$ *ispunjeno:*

1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$,
3. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
4. $1x = x$.

Elementi skupa X nazivaju se *vektori*, dok se elementi polja $\mathbb{R}$ nazivaju *skalari*. Funkcija koja paru $(\alpha, x) \in \mathbb{R}\times X$ vektora i skalara pridružuje vektor αx naziva se *množenje vektora skalarom.*

Definicija 1.6. *Vektorski prostor* $(X, \|\cdot\|)$ *je normiran ako je za preslikavanje* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *ispunjeno:*

1. $\|x\| \geq 0$*, za sve* $x \in X$,
2. $\|x\| = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*, za sve* $x, y \in X$,

4. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, *za svako* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i za sve* $x \in X$.

Napomena 1.2. Svaki normirani prostor je metrički, jer se normom može definisati metrika $d(x,y) := \|x-y\|$, za sve $x, y \in X$. Obrnuto ne mora da važi.

Normiran prostor koji je kompletan nazivamo *Banahov*[1] *prostor*. Kako je prostor $\mathbb{R}^n$ kompletan, on je i Banahov prostor.

Definicija 1.7. *Skalarni proizvod u vektorskom prostoru* X *nad poljem realnih brojeva je preslikavanje* $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ *za koje je ispunjeno:*

1. $\langle x,x\rangle \geq 0$, *za sve* $x \in X$,
2. $\langle x,x\rangle = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$,
3. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$, *za sve* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *i za sve* $x, y, z \in X$,
4. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$, *za sve* $x, y \in X$.

Skalarni proizvod indukuje normu $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ i vektorski prostor $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazivamo *unitaran* ili *pred-Hilbertov vektorski prostor.*

Teorema 1.3. *Neka su* $x = (x_1, ..., x_n)$ *i* $y = (y_1, ..., y_n)$ *vektori u* $\mathbb{R}^n$. *Tada važi Koši-Švarcova nejednakost:*

$$| \langle x,y\rangle | = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \|x\| \cdot \|y\|, \tag{1.1}$$

gde je $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$ *i* $\|y\| = \sqrt{|y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2}$

Za sam kraj ovog poglavlja smo naveli Koši[2]-Švarcovu[3] nejednakost, koja je značajna jer se često nejednakost trougla za standardnu normu navodi baš kao njena posledica.

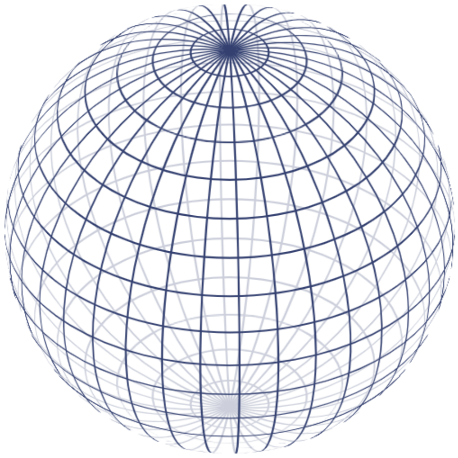
1.2 Osnovni topološki pojmovi

Posmatramo metrički prostor (X,d). Na tom prostoru ćemo prvo uvesti pojam otvorene lopte, što će dati motivaciju za uvođenje pojma otvorenog skupa, a nakon toga ćemo definisati i pojam topoloških prostora.

[1] S. Banach (1892-1945)
[2] A. L. Cauchy (1789-1857)
[3] K. H. A. Schwarz (1842-1921)

Definicija 1.8. *Otvorena lopta sa centrom u tački* $x_0 \in X$, *poluprečnika* $\delta > 0$, *data je sa* $L(x_0, \delta) = \{x \in X \, : \, d(x, x_0) < \delta\}$.

Zatvorena lopta sa centrom u $x_0 \in X$, poluprečnika $\delta > 0$, data je sa $Z(x_0, \delta) = \{x \in X \, : \, d(x, x_0) \leq \delta\}$.



Slika 1.1. U Euklidskom prostoru lopta jeste prostor unutar sfere. Može biti zatvorena lopta (uključujući granične tačke sfere) ili otvorena lopta (ako se granične tačke ne uzmu u obzir).

Definicija 1.9. *Neka je (X,d) metrički prostor. Skup* $\mathcal{O} \subset X$ *je otvoren skup ako za svaki element* $x \in \mathcal{O}$ *postoji* $\delta > 0$, *tako da je* $L(x, \delta) \subset \mathcal{O}$. *Zatvoren skup je komplement otvorenog skupa.*

Sada možemo da uvedemo pojam topoloških prostora.

Definicija 1.10. *Neka je* τ *kolekcija otvorenih skupova* $\mathcal{O}$ *metričkog prostora (X,d). Tada je:*

1. $X, \emptyset \in \tau$,
2. $\mathcal{O}_k \in \tau, \; k = 1, \ldots, m \Rightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{m} \mathcal{O}_k \in \tau$,
3. $\mathcal{O}_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda \in \tau$.

Ovako definisana struktura (X, τ) *naziva se topološki prostor.*

Definicija 1.11. *Kolekcija zatvorenih skupova* $\mathcal{F}$ *topološkog prostora* (X, τ) *data je sa* $\mathcal{F} = \{F \subset X \mid F = X \setminus O, \; O \in \tau\}$, *i za nju važi:*

1. $X, \emptyset \in \mathcal{F}$,

2. $F_\lambda \in \mathcal{F}, \lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$,

3. $F_k \in \mathcal{F},\ k = 1, \ldots, m \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{m} F_k \in \mathcal{F}$.

Dalje, koristeći pojam otvorenog skupa, uvodimo pojam okoline tačke koji je koristan jer neke topološke strukture najlakše definišemo tako što se svakoj tački prostora pridruži kolekcija okolina.

Definicija 1.12. *Skup U je okolina tačke x ukoliko sadrži neki otvoreni skup $\mathcal{O}$ u kojem se nalazi tačka x, to jest ako važi $x \in \mathcal{O} \subset U$. Otvoren skup je okolina svake svoje tačke.*

Činjenica da je skup otvoren može da se izrazi korišćenjem pojma okoline tačke, što nam i govori naredna teorema.

Teorema 1.4. *Neka je (X, τ) topološki prostor. Tada važi: skup $\mathcal{O} \subset X$ je otvoren ako i samo ako je okolina svake svoje tačke.*

U narednim redovima, proizvoljnom podskupu A topološkog prostora X pridružujemo skupove koji će nam omogućiti jednostavniju formulaciju raznih iskaza o topološkom prostoru.

Definicija 1.13. *Tačka $x \in X$ je unutrašnja tačka skupa A ako postoji otvoren skup $\mathcal{O}$, takav da je $x \in \mathcal{O} \subset A$.*

Skup svih unutrašnjih tačaka skupa A naziva se unutrašnjost skupa A i označava se sa A°.

Definicija 1.14. *Tačka x je adherentna tačka skupa A ako svaka njena okolina seče skup A.*

Skup adherentnih tačaka naziva se adherencija ili zatvaranje skupa A i označava se sa $\overline{A}$.

Definicija 1.15. *Tačka x je tačka nagomilavanja skupa A ako svaka okolina tačke x seče skup $A \setminus \{x\}$. Svaka tačka nagomilavanja je ujedno i adherentna tačka tog skupa.*

Skup tačaka nagomilavanja skupa A označava se sa A'.

Definicija 1.16. *Tačka x je rubna tačka skupa A ako za svaki otvoren skup $\mathcal{O}$ takav da $x \in O$ važi $\mathcal{O} \cap A \neq \emptyset$ i $\mathcal{O} \cap A^C \neq \emptyset$.*

Skup svih rubnih tačaka skupa A naziva se rub skupa A i označava se sa ∂A.

Definicija 1.17. *Tačka a je izolovana tačka skupa A ako postoji okolina U te tačke, tako da je $U \cap A = \{x\}$.*

Teorema 1.5. *Neka je (X, τ) topološki prostor i neka $A \subset X$. Tada je:*

1. *$\overline{A}$ je najmanji zatvoren skup koji sadrži skup A.*
2. *A je zatvoren ako i samo ako je $A = \overline{A}$.*
3. *$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.*
4. *$\overline{A} = A^\circ \cup \partial A = A \cup A'$.*
5. *A je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.*

Na kraju preostaje da se definiše kompaktnost skupa. To je topološka osobina koja omogućava mnoge konstrukcije u matematičkoj analizi i u drugim oblastima matematike.

Definicija 1.18. *U topološkom prostoru (X, τ) klasa otvorenih skupova, koju označavamo sa $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, zove se otvoreni pokrivač skupa $A \subset X$, ako je $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda$.*

Definicija 1.19. *Skup A je kompaktan u topološkom prostoru (X, τ) ako svaki njegov pokrivač sadrži konačan potpokrivač.*

1.3 Neprekidnost i diferencijabilnost

U ovom delu ćemo uvesti dve veoma značajne osobine za svaku funkciju. Za početak, uvodimo pojmove neprekidnosti u topološkim i metričkim prostorima.

Definicija 1.20. *(Neprekidnost u topološkom prostoru) Neka su (X, τ_X) i (Y, τ_Y) topološki prostori i x_0 proizvoljna tačka u X. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna u tački x_0, ako za svaku okolinu V tačke $f(x_0) \in Y$ postoji okolina U tačke x_0 tako da $f(x) \in V$ za sve $x \in U$.*

Definicija 1.21. *(Neprekidnost u metričkom prostoru) U metričkim prostorima (X, d_X) i (Y, d_Y) funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna u tački x_0, ako je:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

U nastavku ćemo uvesti definicije diferencijabilnog preslikavanja, kao i dva puta diferencijabilnog preslikavanja.

Definicija 1.22. *(Diferencijabilno preslikavanje) Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ neprazan skup. Preslikavanje $J : U \to \mathbb{R}$ je diferencijabilno u tački $x \in U^\circ$, ako postoji vektor $y \in \mathbb{R}^n$ takav da važi*

$$\triangle J(x) := J(x+h) - J(x) = \langle y, h \rangle + o_x(h),$$

gde je $\lim_{h\to 0} \dfrac{o_x(h)}{\|h\|} = 0.$

U prethodnoj definiciji vektor h pripada nekoj okolini nule, tako da je $x+h \in U$. Za fiksirano h broj $\langle y, h\rangle$ zove se *diferencijal funkcije* J u tački x koji odgovara priraštaju h. Vektor y predstavlja *gradijent funkcije* J u tački x, i za njega se može pokazati da važi

$$J'(x) = \left(\frac{\partial J(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial J(x)}{\partial x_n} \right),$$

gde je

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x_k} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{J(x + \alpha e^k) - J(x)}{\alpha}$$

za vektor e^k čije su sve koordinate jednake nuli, osim k-te koordinate koja je jednaka 1, za sve $k = 1, \ldots, m$.

Definicija 1.23. *(Dva puta diferencijabilno preslikavanje) Neka je funkcija J definisana u nekoj okolini tačke $x \in \mathbb{R}^n$. Ona je dva puta diferencijabilna u tački x, ako osim gradijenta $\nabla J(x)$ postoji i simetrična matrica $\nabla^2 J(x)$, odnosno $J''(x)$, reda $n \times n$, takva da se priraštaj funkcije J u tački x može predstaviti u obliku*

$$J(x+h) - J(x) = \langle J'(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle J''(x)h, h\rangle + o_x(h),$$

gde je $\lim_{h\to 0} \dfrac{o_x(h)}{\|h\|^2}$.

U prethonoj definiciji za dato h veličina $\langle J''(x)h, h\rangle$ se naziva *drugi diferencijal funkcije* J u tački x koji odgovara priraštaju h (jasno, $x+h$ pripada okolini tačke x na kojoj je J definisana). Drugi izvod funkcije J, to jest $J''(x)$, označavamo i sa $\nabla^2 J(x)$ i nazivaćemo ga *matrica Hesijana*, može se pokazati da je

$$\nabla^2 J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J(x)}{\partial (x_1)^2} & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 J(x)}{\partial (x_n)^2} \end{pmatrix}.$$

U ovom delu je još preostalo da definišemo funkcije čiji je diferencijal istovremeno i neprekidna funkcija, to jest neprekidno diferencijabilne funkcije.

Definicija 1.24. *(Neprekidno diferencijabilno preslikavanje) Funkcija J je neprekidno diferencijabilna (glatka) na skupu $U \in \mathbb{R}^n$, ukoliko je diferencijabilna na skupu U i ukoliko je*

$$\lim_{h \to 0} \|J'(x+h) - J'(x)\| = 0, \text{ za sve } x, x+h \in U.$$

Klasu glatkih funkcija nad skupoom U označavamo sa $C^1(U)$.

Definicija 1.25. *(Dva puta neprekidno diferencijabilno preslikavanje) Funkcija J je dva puta neprekidno diferencijabilna na skupu $U \in \mathbb{R}^n$, ukoliko je dva puta diferencijabilna na skupu U i ukoliko je*

$$\lim_{h \to 0} \|J''(x+h) - J''(x)\| = 0, \text{ za sve } x, x+h \in U.$$

Klasu ovako definisanih funkcija nad skupoom U označavamo sa $C^2(U)$.

Glava 2

Konveksnost i konkavnost

Ovaj deo rada biće posvećen samoj konveksnosti skupova i funkcija. Počinjemo sa definicijama konveksnog skupa i njihovim osobinama. Nakon toga, bavićemo se konusima, konveksnim konusima i njihovim značajnim svojstvima. Kratko ćemo se osvrnuti i na pojam hiperravni i onda preći na proučavanje konveksnih funkcija. To su funkcije koje zbog svojih osobina zauzimaju značajno mesto u teoriji optimizacije. Više detalja o pomenutim temama čitalac može pronaći u literaturi: [1], [2], [3], [5], [12] i [13].

2.1 Konveksni skupovi

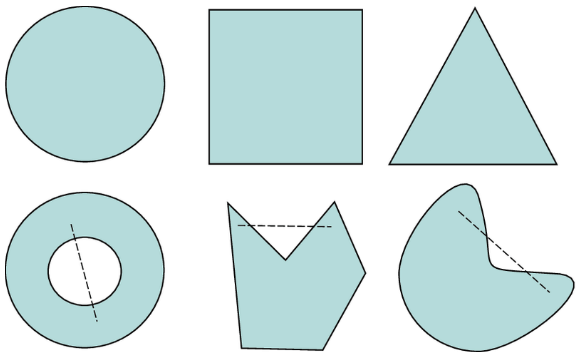
Naredno poglavlje posvetićemo definiciji pojma konveksnog skupa i pokazaćemo neke od njegovih osnovnih osobina. Uglavnom smo koristili oznake i pratili pristup dat u [3] i [13].

Definicija 2.1. *Neka je $A \subset X$, gde je X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Skup A je konveksan ako za sve $x, y \in A$ i za sve $\alpha \in (0,1)$ važi $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$. Ako za sve $x, y \in A$ i za sve $\alpha \in \mathbb{R}$ važi $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$, kaže se da je A afin skup.*

Za skup $A \subset \mathbb{R}^n$ kažemo da je *strogo konveksan skup* ako za neke $x, y \in A$, $x \neq y$ i za sve $\alpha \in (0,1)$ važi $\alpha x + (1-\alpha)y \in A^\circ$.

Definicija 2.2. *Neka je dato m tačaka $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vektorskog prostora X. Tačka $x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$ je konveksna kombinacija tačaka $x_1, x_2, \ldots, x_m$, ako je $\alpha_k \geq 0$ za sve $k = 1, \ldots, m$ i $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$.*

Dakle, A je konveksan skup ako sadrži konveksne kombinacije svake dve svoje tačke.



Slika 2.1. Primeri konveksnih i nekonveksnih skupova.

Teorema 2.1. *Skup X je konveksan ako i samo ako sadrži sve konveksne kombinacije bilo kojeg konačnog broja svojih tačaka.*

Dokaz. Ako skup X sadrži sve konveksne kombinacije bilo kojeg konačnog broja svojih elemenata, onda sadrži i konvenksne kombinacije bilo koja dva svoja elementa, te je X konveksan skup.

Obratno, pretpostavlja se da je X konveksan skup. Neka su dati proizvoljni $x_1, \ldots, x_n$ iz skupa X i neka je

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \ i = 1, \ldots, n$$

njihova proizvoljna konveksna kombinacija. Indukcijom po $n \in \mathbb{N}$ dokazuje se da $x \in X$. Ako je $n = 2$, onda iz konveksnosti skupa X direktno sledi da $x \in X$. Pretpostavlja se da za proizvoljnih $n-1$ elemenata skupa X svaka njihova konveksna kombinacija pripada skupu X. Sada treba pokazati da tvrđenje važi i za n datih tačaka. Data konveksna kombinacija može da se zapiše u obliku

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1)(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{1-\alpha_1} x_n).$$

Izraz u zagradi je konveksna kombinacija $n-1$ elemenata skupa X, te po indukcijskoj pretpostavci pripada skupu X. Zaista:

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1} = \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1} = 1, \quad \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i} \in [0,1], i = 2, \ldots, n.$$

Konačno, sada je jasno da je x predstavljen kao konveksna kombinacija dva elementa iz X, koji je konveksan, pa je $x \in X$. $\square$

Naredne teoreme dovode u vezu svojstva konveksnih skupova sa njihovom topološkom strukturom. Radi jednostavnosti, posmatraju se konveksni skupovi u normiranom prostoru $(X, \|\cdot\|)$.

Teorema 2.2. *Zatvaranje konveksnog skupa je konveksan skup.*

Dokaz. Ako pretpostavimo da A $= \emptyset$, onda je i $\overline{A} = \emptyset$, pa je $\overline{A}$ konveksan skup. Takođe, ako je $A = \{x\}$, onda je i $\overline{A} = \{x\}$, što je konveksan skup. Dalje ćemo pretpostaviti da skup A ima bar dva elementa. Neka $a,b \in \overline{A}$, gde je A konveksan skup. Tačke a i b ne mogu biti izolovane, pa su one tačke nagomilavanja skupa A. To znači da postoje nizovi elemenata skupa A, $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, koji konvergiraju ka tačkama a i b, respektivno. Za dato $\alpha \in (0,1)$ i svako $k \in \mathbb{N}$ važi $\alpha a_k + (1-\alpha)b_k \in A$. Za niz elemenata $c_k := \alpha a_k + (1-\alpha)b_k$, $k \in \mathbb{N}$ važi:

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha a_k + (1-\alpha)b_k) = \alpha \lim_{k\to\infty} a_k + (1-\alpha)\lim_{k\to\infty} b_k = \alpha a + (1-\alpha)b.$$

Dakle, $\alpha a+(1-\alpha)b$ je tačka nagomilavanja skupa A, odnosno $\alpha a+(1-\alpha)b \in \overline{A}$, što je i trebalo dokazati. □

Sledeća teorema pokazuje da se proizvoljnom elementu zatvaranja konveksnog skupa neprazne unutrašnjosti može "približiti"pomoću unutrašnjih tačaka posmatranog skupa.

Teorema 2.3. *Neka je A konveksan skup neprazne unutrašnjosti. Tada za proizvoljne $x_0 \in A^\circ$ i $y \in \overline{A}$ važi $[x_0, y) \subseteq A^\circ$.*

Teorema 2.4. *Unutrašnjost konveksnog skupa je konveksan skup.*

Dokaz. Primenom prethodne teoreme, dokaz ovog tvrđenja sledi direktno, jer je $A^\circ \subset \overline{A}$. □

U primenama se često javljaju skupovi koji nisu konveksni. Da bismo bili u mogućnosti da iskoristimo znanja o konveksnim skupovima, posmatraćemo konveksni skup koji je u izvesnom smislu najbliži datom skupu i ispitati njihov međusobni odnos.

Definicija 2.3. *Neka je $A \subset X$, gde je X vektorski prostor. Presek svih konveksnih skupova koji sadrže skup A naziva se konveksni omotač skupa A i označava se sa coA.*

Naravno, konveksni omotač nekog skupa je konveksan skup, a ako je posmatrani skup konveksan, on je jednak svom konveksnom omotaču.

Slika 2.2. Konveksni omotači dve, odnosno tri tačke u ravni.

Primer 2.5. Konveksni omotač skupa $\{x_1, x_2\}$, gde su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, je duž koja ih spaja, a konveksni omotač tri nekolinearne tačke u $\mathbb{R}^n$ je trougao čija su temena date tačke, uključujući njegovu unutrašnjost. Konveksni omotač konačnog broja tačaka u ravni je odgovarajući konveksni mnogougao.

Za proizvoljne skupove $A, B \subset \mathbb{R}^n$ direktno se pokazuje da važi:

1. $A \subset coA$,

2. $A \subset B \Rightarrow coA \subset coB$,

3. $co(coA) = coA$.

U narednoj teoremi ćemo videti na koji način možemo dobiti konveksni omotač coX skupa X.

Teorema 2.6. *Konveksni omotač coX skupa X dobija se kao konveksna kombinacija konačno mnogo elemenata skupa X, to jest,*

$$coX = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \mid x_i \in X, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, m = 1, 2, \ldots\}.$$

Dokaz. Neka je Y skup koji sadrži sve konveksne kombinacije proizvoljnog konačnog broja tačaka skupa X i neka je $Z = coX$. Cilj je, koristeći definiciju konveksnog omotača, pokazati da važi $Y = Z$. Naravno, $X \subset Z$ i Z je konveksan, te se na osnovu Teoreme 2.1 dobija da Z sadrži sve konačne konveksne kombinacije svojih elemenata, pa i elemenata svog podskupa X. Dakle, $Y \subset Z$. Dalje, vidi se da je $X \subset Y$, te ako pokažemo da je Y konveksan, onda je $Y = Z$.

Neka su $a, b \in Y$ proizvoljni. Tada:

$$a = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i,\ \sum_{i=1}^{l} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, l,$$
$$b = \sum_{j=1}^{k} \beta_j b_j,\ \sum_{j=1}^{k} \beta_j = 1,\ \beta_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, k,$$

gde $a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_k \in X$. Neka je $\theta \in (0, 1)$ proizvoljno, posmatramo konveksnu kombinaciju

$$c = \theta a + (1-\theta)b = \sum_{i=1}^{l} \theta\alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{k} (1-\theta)\beta_j b_j.$$

Može se primetiti da je

$$\sum_{i=1}^{l} \theta\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} (1-\theta)\beta_j = \theta + (1-\theta) = 1,$$

gde važi $\theta a_i \geq 0$, $i = 1, \dots, l$, $(1-\theta)b_j \geq 0$, $j = 1, \dots, k$. Konačno, c kao konvenksna kombinacija konačnog broja elemenata iz X pripada skupu Y, pa zaključujemo da je Y konveksan. □

Teorema 2.7. *Konveksni omotač otvorenog skupa je otvoren skup. Konveksni omotač zatvorenog skupa ne mora biti zatvoren skup.*

Dokaz. Neka je A neprazan otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Naravno, $A \subset coA$, pa je $A = A^\circ \subset (coA)^\circ$. Dakle, otvoren skup je sadržan u unutrašnjosti svog konveksnog omotača. Sa druge strane, na osnovu Teoreme 2.4 sledi da je $(coA)^\circ$ konveksan skup. Pošto je coA presek svih konveksnih skupova koji sadrže skup A, sledi $coA \subset (coA)^\circ$. Obrnuta inkluzija je uvek tačna, pa je $coA = (coA)^\circ$, što je i trebalo dokazati.

Primerom se pokazuje da konveksni omotač zatvorenog skupa ne mora biti zatvoren skup. Skup

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x},\ x \geq 0\}$$

je zatvoren u $\mathbb{R}^2$ jer je njegov komplement otvoren skup. Njegov konveksni omotač

$$coU = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq \sqrt{x},\ x > 0\} \cup \{(0, 0)\},$$

nije zatvoren skup, jer ne sadrži tačke nagomilavanja oblika $(x, 0)$, $x > 0$. □

Ako je posmatrani zatvoren skup ograničen (to jest, kompaktan) u $\mathbb{R}^n$, onda se može dokazati da je njegov konveksni omotač takođe zatvoren i ograničen skup u $\mathbb{R}^n$.

Zatvoren konveksni omotač skupa A je najmanji zatvoren i konveksan skup koji sadrži skup A, u oznaci $\overline{co}A$.

Posledica 2.8. *Zatvaranje* coA *je* $\overline{co}A$.

Dokaz. Jasno, $\overline{co}A \subset \overline{coA}$. Sa druge strane, po definiciji je $coA \subset \overline{co}A$, pa važi $\overline{coA} \subset \overline{co}A$, što znači da je $\overline{coA} = \overline{co}A$. □

2.2 Konusi

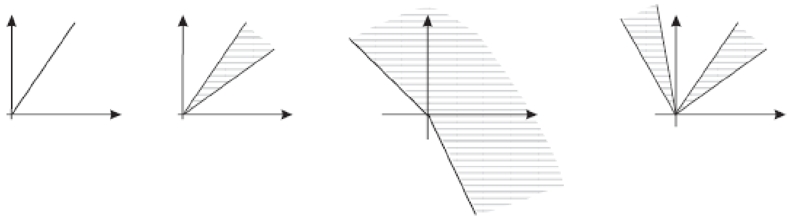
Kao i konveksni skupovi i konusi su takođe značajni u teoriji optimizacije (videti [3]). Ovo poglavlje ćemo posvetiti definisanju pojma konusa, kao i pojmu konveksnog konusa, a nakon toga ćemo preći na dokazivanje njihovih značajnih svojstava.

Definicija 2.4. *Skup $K \subset \mathbb{R}^n$ je konus sa vrhom u nuli ako za sve $x \in K$ i sve $t > 0$ važi $tx \in K$.*

Treba primetiti da, po ovoj definiciji, nula može ali ne mora da pripada konusu.

Ako je K konus sa vrhom u nuli, onda je skup $K_{x_0} = x_0 + K$, konus sa vrhom u x_0. Njegovi elementi su oblika $x_0 + \lambda(y - x_0)$, $y \in K_{x_0}$, $\lambda > 0$.

Konus K ne mora biti konveksan. Ako jeste zove se konveksan konus. Takođe, on ne mora biti otvoren (zatvoren) skup, ali ako jeste zove se otvoren (zatvoren) konus. Podrazumeva se da je prazan skup konveksan konus.



Slika 2.3. Primeri konusa u $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.9. *Skup $K \subset \mathbb{R}^n$ je konveksan konus sa vrhom u nuli ako i samo ako za sve $x, y \in K$ i sve $\alpha, \beta > 0$ važi $\alpha x + \beta y \in K$.*

Dokaz. Neka je K konveksan konus sa vrhom u nuli. Tada za sve $x, y \in K$ i sve $\alpha, \beta > 0$ važi:

$$(\alpha + \beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}x + \frac{\beta}{\alpha + \beta}y\right) \in K,$$

odnosno $\alpha x + \beta y \in K$. Sa druge strane, iz $\alpha x + \beta y \in K$, za sve $x, y \in K$ i sve $\alpha, \beta > 0$, birajući, za unapred zadato $\lambda > 0$, $\alpha = \beta = \frac{\lambda}{2}$ i $y = x$ dobija se $\lambda x \in K$, odnosno K je konus. Konveksnost se dobija birajući $\alpha \in (0, 1)$ i $\beta = 1 - \alpha$. $\square$

Teorema 2.10. *Konusi imaju sledeća značajna svojstva:*

1. *Presek proizvoljne familije konusa sa istim vrhom, ako nije prazan, je konus sa tim vrhom;*

2. *Ako su K_1 i K_2 konusi sa vrhom u x_0, onda je $\alpha K_1 + \beta K_2$ konus sa vrhom u $(\alpha + \beta)x_0$, za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;*

3. *Suma konveksnih konusa sa zajedničkim vrhom je konveksan konus;*

4. *Unija konusa sa istim vrhom je opet konus sa tim vrhom (ali unija konveksnih konusa ne mora biti konveksan skup);*

5. *Unutrašnjost, zatvaranje i konveksni omotač konusa je konus.*

Dokaz. 1. Neka su $K_i, i \in I$ konusi sa vrhom u x_0, to jest $K_i = x_0 + K_i^0, i \in I$, gde su $K_i^0, i \in I$ odgovarajući konusi sa vrhom u nuli. Tada je $K = \bigcap_{i \in I} K_i = \bigcap_{i \in I}(x_0 + K_i^0) = x_0 + \bigcap_{i \in I} K_i^0$. Dakle, ostaje još da se pokaže da je $K^0 = \bigcap_{i \in I} K_i^0$ konus sa vrhom u nuli.

Neka je $K^0 = \bigcap_{i \in I} K_i^0$, $x \in K^0$ i $t > 0$. Ako x pripada preseku, onda x pripada svim konusima, $x \in K_i^0, i \in I$. Tada i $tx \in K_i^0, i \in I$, za sve $t > 0$, jer je svaki K_i^0 konus sa vrhom u nuli. Onda $tx \in \bigcap_{i \in I} K_i^0 = K^0$, pa je K^0 konus sa vrhom u nuli.

2. K_1 i K_2 su konusi sa vrhom u x_0, pa je:

$$K_1 = x_0 + K_1^0,$$
$$K_2 = x_0 + K_2^0,$$

gde su K_1^0, K_2^0 konusi sa vrhom u nuli. Pošto je

$$\alpha K_1 + \beta K_2 = (\alpha + \beta)x_0 + \alpha K_1^0 + \beta K_2^0,$$

još treba pokazati da je $\alpha K_1^0 + \beta K_2^0$ konus sa vrhom u nuli.

Neka je $z \in \alpha K_1^0 + \beta K_2^0$ proizvoljno i $t > 0$ dato. Onda je $z = \alpha z_1 + \beta z_2$, za neke $z_1 \in K_1^0$ i $z_2 \in K_2^0$. Pošto je

$$tz = t(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha(tz_1) + \beta(tz_2),$$

a $tz_1 \in K_1^0, tz_2 \in K_2^0$, jer su u pitanju konusi sa vrhom u nuli, dobija se:

$$tz \in \alpha K_1^0 + \beta K_2^0$$

Pokazano je da je $tz \in \alpha K_1^0 + \beta K_2^0$ konus sa vrhom u nuli.

3. Neka je $K = K_1 + \cdots + K_n$, gde su $K_i = x_0 + K_i^0, i = 1, \ldots, n$ konveksni konusi sa vrhom u x_0, a K_i^0 odgovarajući konusi sa vrhom u nuli. Lako se vidi da i $K_i^0, i = 1, \ldots, n$ moraju biti konveksni. Na osnovu 2. znamo da $K = nx_0 + \sum_{i=1}^n K_i^0$. Ostaje još da se pokaže i da je $K^0 = \sum_{i=1}^n K_i^0$ konveksan konus sa vrhom u nuli.

   Neka je $K^0 = K_1^0 + \cdots + K_n^0$, gde su $K_1^0, \ldots, K_n^0$ konveksni konusi sa vrhom u nuli, $x, y \in K^0$ i $\alpha, \beta > 0$. Zna se da je:

$$x = x_1 + \ldots + x_n,\ x_i \in K_i^0,$$
$$y = y_1 + \ldots + y_n,\ y_i \in K_i^0,\ i = 1, \ldots, n.$$

   Svi $K_i^0, i = 1, \ldots, n$, su konveksni konusi sa vrhom u nuli, pa za sve $i = 1, \ldots, n$ na osnovu Teoreme 2.9 važi $z_i = \alpha x_i + \beta y_i \in K_i^0$. Odavde se dobija:

$$\alpha x + \beta y = \alpha(x_1 + \ldots + x_n) + \beta(y_1 + \ldots + y_n) = z_1 + \ldots + z_n \in K^0.$$

4. Neka je $K = \bigcup_{i \in I} K_i$, gde su $K_i, i \in I$ konusi sa vrhom u nuli. Za neko $x \in K$ i $t > 0$, zna se da postoji $j \in I$ takvo da $x \in K_j$. K_j je konus sa vrhom u nuli, pa $tx \in K_j$. Pošto je $K_j \subset K$, $tx \in K$. Kao i do sada, ovo se lako uopštava na konus sa vrhom u x_0.

   Kontraprimerom će se pokazati da unija konveksnih konusa ne mora biti konveksan skup. Neka je:

$$K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x,\ x \geq 0\}$$
$$K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x,\ x \leq 0\}$$

   U pitanju su konveksni konusi sa vrhom u nuli. Međutim, $K = K_1 \cup K_2$ nije konveksan konus. Za $z_1 = (1, 1) \in K_1$, $z_2 = (-1, 1) \in K_2$, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha z_1 + \beta z_2 = (0, 1) \notin K$.

5. Neka je dat konus sa vrhom u nuli $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (dobijeni rezultati se lako uopštavaju na proizvoljan konus). Neka je $K \neq \emptyset$.

   Prvo treba pokazati da je K° konus. Neka je $x \in K^\circ$ i $t > 0$. Dokažaćemo da je $tx \in K^\circ$. Za tačku $x \in K^\circ$ postoji $\varepsilon > 0$, tako da je $L_\varepsilon(x) \subset K$. Tada je $L_{t\varepsilon}(tx) \subset K$. Zaista, za proizvoljno $y \in L_{t\varepsilon}(tx)$ važi $\| y - tx \| < t\varepsilon$. Jasno, važi $y = t(\frac{1}{t}y)$, te ako se pokaže da je

$\frac{1}{t}y \in L_\varepsilon(x) \subset K$ dokaz je završen, jer je K konus. Važi $\| \frac{1}{t}y - x \| = \frac{1}{t} \| y - tx \| < \varepsilon$.

Dalje, treba pokazati da je $\overline{K}$ konus. Neka su dati proizvoljni $t > 0$ i $k \in \overline{K}$. Tada postoji niz $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, takav da je $\lim_{n\to\infty} k_n = k$. Pošto je K konus i niz $\{tk_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, onda se njegova granica nalazi u $\overline{K}$. Jasno, $tk = \lim_{n\to\infty} tk_n \in \overline{K}$, pa je $\overline{K}$ konus.

Ostaje još da se pokaže da je konveksni omotač coK konus. Neka je $t > 0$ i $x \in coK$. Tada se, na osnovu Teoreme 2.1 zna da postoje $k_1, \dots, k_n \in K$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ tako da je $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i$. Konačno, važi $tx = t\sum_{i=1}^n \alpha_i k_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i(tk_i) \in coK$, jer je K konus, pa $tk_i \in K$, $i = 1, \dots, n$.

□

2.3 Hiperravni

U ovom poglavlju ćemo se kratko osvrnuti na pojam hiperravni, koji ćemo u nastavku primenjivati kod teorema koje nam govore o primenama subdiferencijala.

Definicija 2.5. *Neka je dat ne-nula vektor $c \in \mathbb{R}^n$ i broj $\gamma \in \mathbb{R}$, tada hiperravan $H_{c,\gamma}$ definišemo na sledeći način*

$$H_{c,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c\rangle = \gamma\}.$$

Skup $H_{c,\gamma}$ nije prazan, jer ako uzmemo vektor $c = (c_1, \dots, c_n) \neq 0$, primetimo da postoji indeks $j \in \{1, \dots, n\}$ takav da $c_j \neq 0$. Tada vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ definisan sa $x_j := \frac{\gamma}{c_j}$, a $x_k := 0, k \neq j$ pripada hiperravni $H_{c,\gamma}$. Ako tačka x_0 pripada hiperravni $H_{c,\gamma}$, onda važi

$$H_{c,\gamma} = H_{c,x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - x_0, c\rangle = 0\}.$$

Kako je ortogonalnost vektora $x - x_0$ i c predstavljena kao $\langle x - x_0, c\rangle = 0$, vektor c nazivamo *normalni vektor hipperavni $H_{c,\gamma}$.*

Napomena 2.11. Skupovi

$$H^+_{c,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c\rangle > \gamma\}$$

i

$$H^-_{c,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c\rangle < \gamma\}$$

zovu se *otvoreni poluprostori*, dok su njihova zatvaranja $\overline{H^+_{c,\gamma}}$ i $\overline{H^-_{c,\gamma}}$ ustvari *zatvoreni poluprostori.* Direktno iz same definicije hipperavni sledi da je $H_{c,\gamma}$ konveksan skup, pa samim tim sledi da su i $H^+_{c,\gamma}$, $H^-_{c,\gamma}$, $\overline{H^+_{c,\gamma}}$, $\overline{H^-_{c,\gamma}}$ sve konveksni skupovi.

2.4 Konveksne funkcije i njihove karakteristike

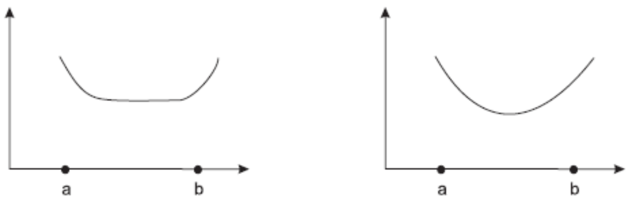
Na samom početku ove glave smo definisali konveksne skupove, a sada ćemo da definišemo funkcije nad tim skupovima koristeći literatutu [12].

Definicija 2.6. *Funkcija J definisana na konveksnom skupu $U \subset \mathbb{R}^n$ je konveksna na U ako važi*

$$J(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha J(x) + (1-\alpha)J(y), \tag{2.1}$$

za proizvoljne $x, y \in U$ i za svako $\alpha \in [0,1]$.

Definicija 2.7. *Ako je u (2.1) jednakost moguća samo za $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$, kažemo da je J strogo konveksna na U.*



Slika 2.4. Primeri grafika konveksne i strogo konveksne funkcije.

Definicija 2.8. *Funkcija J je konkavna na konveksnom skupu $U \subset \mathbb{R}^n$ ako je funkcija $-J$ konveksna na skupu U.*

Definicija 2.9. *Funkcija J je jako konveksna na konveksnom skupu U ako postoji konstanta $\gamma > 0$ takva da je*

$$J(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha J(x) + (1-\alpha)J(y) - \alpha(1-\alpha)\gamma\|x-y\|^2,$$

za proizvoljne $x, y \in U$ i za svako $\alpha \in [0,1]$. Broj γ se naziva konstanta jake konveksnosti.

U nastavku ćemo dati nekoliko teorema koje nam govore o potrebnim i dovoljnim uslovima za konveksnost funkcije na konveksnom skupu.

Teorema 2.12. *Neka je U konveksan skup i neka $J \in C^1(U)$. Potreban i dovoljan uslov za konveksnost funkcije J na U je*

$$J(x) \geq J(y) + \langle J'(y), x-y \rangle,$$

za svako $x, y \in U$.

Teorema 2.13. *Neka je U konveksan skup i neka $J \in C^1(U)$. Potreban i dovoljan uslov za konveksnost funkcije J na U je*

$$\langle J'(x) - J'(y),\ x - y \rangle \geq 0,$$

za svako $x, y \in U$.

Teorema 2.14. *Neka je U konveksan skup i neka $J \in C^2(U)$. Potreban i dovoljan uslov za konveksnost funkcije J na U je da nejednakost*

$$\langle J''(x)\xi,\ \xi \rangle \geq 0$$

važi za svako $\xi \in \mathbb{R}^n$ i svako $x \in U$.

Glava 3

Subdiferencijali i funkcija rastojanja tačke od skupa

Na samom početku ove glave definisaćemo *subgradijent*. Ako posmatramo konveksnu i diferencijabilnu funkciju J, tada će gradijent u nekoj tački ustvari biti subgradijent. Funkciju J nazivaćemo subdiferencijabilnom funkcijom u nekoj tački ako postoji bar jedan subgradijent u toj tački, dok ćemo skup svih subgradijenata u tački nazivati *subdiferencijalom* od J u toj tački. Nakon toga, navešćemo neka značajna svojstva vezana za ove pojmove i njih koristiti u daljem radu. Više detalja o subdiferencijalnom računu čitalac može pronaći u literaturi: [2], [4], [9] i [13].

3.1 Pojam subdiferencijala

Definicija 3.1. *Neka je $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Tada vektor $c \in \mathbb{R}^n$ nazivamo subgradijent funkcije J u tački $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ako za svako $x \in \mathbb{R}^n$ važi*

$$J(x) \geq J(x_0) + \langle c, x - x_0 \rangle. \tag{3.1}$$

Definicija 3.2. *Neka je $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konkavna funkcija. Tada vektor $c \in \mathbb{R}^n$ nazivamo subgradijent funkcije J u tački $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ako za svako $x \in \mathbb{R}^n$ važi*

$$J(x) \leq J(x_0) + \langle c, x - x_0 \rangle. \tag{3.2}$$

Subgradijent može postojati i ako J nije diferencijabilna u tački x_0 i ne mora biti jedinstveno određen za funkciju J u tački x_0. Preciznije, ako je funkcija diferencijabilna u nekoj tački x_0 onda postoji jedinstveno određen subgradijent u toj tački, a ako funkcija J nije diferencijabilna u tački x_0 onda ne postoji jedinstveno određen subgradijent u toj tački.

Ako je funkcija J konveksna i diferencijabilna, tada je njen gradijent u tački x_0 jednak njenom subgradijentu, to jest $\partial J(x_0) = \{\nabla J(x_0)\}$.

Definicija 3.3. *Skup svih subgradijenata konveksne (konkavne) funkcije J u tački $x_0 \in \mathbb{R}^n$ naziva se subdiferencijal funkcije J u tački x_0 i označava se sa $\partial J(x_0)$.*

Napomena 3.1. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ proizvoljan skup. Ako je (3.1), odnosno (3.2), ispunjeno za sve $x \in S$ onda $c \in \partial_S J(x_0)$, a to će biti subdiferencijal ograničen na skup S. Očigledno, za svaki konveksan skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ važi $\partial J(x_0) \subseteq \partial_S J(x_0)$.

3.2 Osnovne računske operacije sa subdiferencijalima

U ovom delu poglavlja akcenat će biti na teoremama koje se tiču osnovnih računskih operacija sa subdiferencijalima. Teoreme navodimo bez dokaza, dok se dokazi i više detalja može pronaći u [9].

Za početak uočimo kako se subdiferencijal množi skalarom. Zatim, uvodimo jedno od osnovnih pravila vezano za subdiferencijale, tzv. pravilo sabiranja subdiferencijala.

Teorema 3.2. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in D_f$. Tada je za svako $\alpha > 0$ ispunjeno*

$$\partial(\alpha f)(x_0) = \alpha \partial f(x_0).$$

Teorema 3.3. *Neka su funkcije f_1 i f_2 zatvorene i konveksne i neka su $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. Tada je funkcije $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ zatvorena i konveksna, a njen subdiferencijal je*

$$\partial f(x) = \alpha_1 \partial f_1(x) + \alpha_2 \partial f_2(x),$$

za sve $x \in D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$.

Posledica 3.4. *Neka su date $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, za $i = 1, \ldots, m$. Pretpostavimo da postoji neko $x_0 \in \bigcap_{i=1}^m D_{f_i}$, tako da za sve funkcije f_i (osim eventualno jedne) važi da su neprekidne u x_0. Tada je za svako $x \in \bigcap_{i=1}^m D_{f_i}$ ispunjeno*

$$\partial \left(\sum_{i=1}^m f_i \right)(x) = \sum_{i=1}^m \partial f_i(x).$$

3.3 Funkcija rastojanja tačke od skupa i projekcija tačke na skup

Ovo poglavlje je posvećeno proučavanju funkcije rastojanja tačke od konveksnog skupa, za koju ćemo se uveriti da je konveksna funkcija. Pored toga, bavićemo se i projekcijama tačke na skup i videti koji je to dovoljan uslov za postojanje jedinstvene projekcije tačke na skup (videti [9] i [13]).

Definicija 3.4. *Neka je skup $A \subset \mathbb{R}^n$ neprazan i tačka $x \in \mathbb{R}^n$. Rastojanje tačke x od skupa A definišemo kao*

$$d(x, A) := \inf_{z \in A} d(x, z).$$

U narednoj definiciji videćemo koja nejednakost treba da bude zadovoljena kako bi funkcija bila Lipšic[1] neprekidna. Nakon toga, pokazaćemo da je funkcija rastojanja tačke od nepraznog skupa funkcija koja je Lipšic neprekidna na $\mathbb{R}^n$.

Definicija 3.5. *Za funkciju $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kažemo da je Lipšic neprekidna, ako postoji konstanta $l \geq 0$ takva da*

$$|J(x) - J(y)| \leq l\|x - y\|, \text{ za sve } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Konstantu l nazivamo Lipšicova konstanta.

Teorema 3.5. *Neka je dat neprazan skup A u Banahovom prostoru $\mathbb{R}^n$. Funkcija rastojanja $d(\cdot, A)$ je Lipšic neprekidna na $\mathbb{R}^n$ sa Lipšicovom konstantom $l = 1$.*

Dokaz. Dokazujemo da za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$ važi

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|. \tag{3.3}$$

Za proizvoljno $z \in A$, korišćenjem nejednakosti trougla dobijamo

$$\begin{aligned} d(x, A) &\leq \|x - z\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &\leq \|x - y\| + \inf\{\|y - z\| \mid z \in A\} \\ &= \|x - y\| + d(y, A). \end{aligned}$$

Dakle, $d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$. Slično, imamo da važi $d(y, A) - d(x, A) \leq \|y - x\|$. Dakle, onda je ispunjeno (3.3), čime je dokaz teoreme završen. □

[1] R. O. S. Lipschitz (1832-1903)

Teorema 3.6. *Neka je A konveksan skup $\mathbb{R}^n$. Tada je funkcija rastojanja $d(\cdot, A)$ konveksna funkcija.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in (0,1)$. Hoćemo da pokažemo da funkcija rastojanja data sa $f(x) := d(x, A)$ za svako $x \in \mathbb{R}^n$ zadovoljava nejednakost (2.1), to jest da je ispunjeno

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Tada, iz svojstva infimuma, postoje $u, v \in A$ takvi da važi

$$d(x, A) \leq \|x - u\| < d(x, A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

i

$$d(y, A) \leq \|x - v\| < d(y, A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

S obzirom da je A konveksan skup, tada $\lambda u + (1-\lambda)v \in A$. Dalje, imamo

$$\begin{aligned}
d(\lambda x + (1-\lambda)y, A) &\leq \|\lambda x + (1-\lambda)y - (\lambda u + (1-\lambda)v)\| \\
&\leq \|\lambda(x-u)\| + \|(1-\lambda)(y-v)\| \\
&= \lambda\|x-u\| + (1-\lambda)\|y-v\| \\
&\leq \lambda\left[d(x,A) + \frac{\varepsilon}{2}\right] + (1-\lambda)\left[d(y,A) + \frac{\varepsilon}{2}\right] \\
&= \lambda d(x,A) + (1-\lambda)d(y,A) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Kads $\varepsilon \to 0$, dobijamo da je d konveksna funkcija. $\square$

Definicija 3.6. *Neka je skup $A \subset \mathbb{R}^n$ neprazan i neka $x \in \mathbb{R}^n$. Tada je tačka $x_0 \in A$ projekcija tačke x na skup A, u oznaci $x_0 = P_A(x)$, ako važi*

$$d(x, A) = \|x - x_0\|.$$

Naredna teorema nam daje dovoljan uslov za jedinstvenost projekcije proizvoljne tačke na skup.

Teorema 3.7. *Ako je A neprazan, zatvoren i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$, onda za svaku tačku $x \in \mathbb{R}^n$ postoji njena jedinstvena projecija na skup A.*

Teorema 3.8. *Neka je data tačka $x \in \mathbb{R}^n$ i neka je $A \subset \mathbb{R}^n$. Tada ako je A konveksan i zatvoren skup, onda za $z \in A$ važi $z = P_A(x)$ ako i samo ako je $\langle x - z, z - y\rangle \geq 0$, za svako $y \in A$.*

3.4 Subdiferencijal funkcije rastojanja tačke od skupa

Pre nego što predstavimo subdiferencijal funkcije rastojanja od konveksnog skupa, u narednim redovima uvodimo pojam normalnog konusa, koji ćemo koristiti u daljem radu.

Definicija 3.7. *Neka je X neprazan i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$ i neka $x_0 \in X$. Tada je normalni konus dat sa*

$$N(x_0, X) := \{c \in \mathbb{R}^n \mid \langle c, x - x_0 \rangle \leq 0,\ \forall x \in X\}.$$

Iz same definicije možemo primetiti da ako $c \in N(x_0, X)$ onda za svako $x \in X$ važi $\langle c, x - x_0 \rangle \leq 0$, to jest $x \in H^-_{c,x_0}$. Dakle, skup X mora biti podskup od H^-_{c,x_0}.

Naredna teorema će nam predstaviti subdiferencijal funkcije rastojanja tačke od konveksnog skupa. Naime, jedinični vektor $c \in \mathbb{R}^n$ će biti subgradijent funkcije rastojanja $d(\cdot, X)$ u tački x_0 ako i samo ako važi $X \subseteq H^-_{c,x_0}$.

Teorema 3.9. *Neka je X neprazan i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$ i neka je $x_0 \in X$. Tada važi*

$$\partial d(x_0, X) = N(x_0, X) \cap Z,$$

gde je $Z = Z(0,1)$ zatvorena jedinična lopta u $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Neka $x_0 \in X$ i uzmimo neko proizvoljno $c \in \partial d(x_0, X)$, tada važi

$$\langle c, x - x_0 \rangle \leq d(x, X) - d(x_0, X) = d(x, X),\ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

Kako na osnovu Teoreme 3.5 znamo da je funkcija rastojanja $d(\cdot, X)$ Lipšic neprekidna sa Lipšicovom konstantom $l = 1$, onda iz (3.4) dobijamo

$$\langle c, x - x_0 \rangle \leq d(x, X) - d(x_0, X) \leq \|x - x_0\|,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Na osnovu toga, sledi da je $\|c\| \leq 1$, to jest $c \in Z$. Zaista, ako izaberemo $x = c + x_0 \in \mathbb{R}^n$ dobijamo $\langle c, c \rangle = \|c\|$, to jest $\|c\|^2 \leq \|c\|$, što je ispunjeno za $\|c\| \leq 1$. Dalje, iz nejednakosti (3.4) sledi

$$\langle c, x - x_0 \rangle \leq 0, \text{ za sve } x \in X,$$

jer $\langle c, x - x_0 \rangle \leq d(x, X)$ za svako $x \in \mathbb{R}^n$, pa onda i za $x \in X$. Odatle dobijamo da važi $\langle c, x - x_0 \rangle \leq d(x, X) = 0$. Dakle, $c \in N(x_0, X)$, pa onda važi $c \in N(x_0, X) \cap Z$, odnosno $\partial d(x_0, X) = N(x_0, X) \cap Z$.

Sada pokažimo i obrnutu inkluziju. Uzmimo proizvoljno $c \in N(x_0, X) \cap Z$, tada važi

$$\|c\| \leq 1 \text{ i } \langle c, \omega \rangle \leq 0, \text{ za sve } \omega \in X. \tag{3.5}$$

Koristeći nejednakost (1.1) i (3.5), primetimo da za svako $x \in \mathbb{R}^n$ i za svako $\omega \in X$ jeste ispunjen sledeći niz nejednakosti

$$\begin{aligned}
\langle c, x - x_0 \rangle &= \langle c, x - \omega + \omega - x_0 \rangle \\
&= \langle c, x - \omega \rangle + \langle c, \omega - x_0 \rangle \\
&\leq \langle c, x - \omega \rangle \\
&\leq \|c\| \|x - \omega\| \\
&\leq \|x - \omega\|.
\end{aligned}$$

Dakle, sada imamo da važi

$$\langle c, x - x_0 \rangle \leq \inf_{\omega \in X} \|x - \omega\| = d(x, X) = d(x, X) - d(x_0, X),$$

odakle sledi $c \in \partial d(x_0, X)$, čime je dokaz teoreme završen. $\square$

Glava 4

O posledicama konveksnosti

Kako smo se u prethodnim glavama upoznali sa konveksnošću i njenim velikim značajem, ova glava će biti posvećena nekim od posledica same konveksnosti. Kao prvu posledicu konveksnosti predstavićemo teoreme Radona, Karateodorija i Helija. Sledeća posledica kojom ćemo se bavili biće pojam horizontalnog konusa, gde ćemo videti kako predstavljamo ograničenost skupa u terminima njegovog horizontalnog konusa. Nastavljajući na treću posledicu, preći ćemo na funkcije minimalnog vremena i njihovu vezu sa funkcionalom Minkovskog, a zatim se upoznati i sa subgradijentom funkcije minimalnog vremena. Nakon toga, izvešćemo potrebne i dovoljne uslove za postojanje optimalnih rešenja problema konveksne optimizacije, što će biti četvrta posledica konveksnosti. Na samom kraju, bavićemo se Ferma-Toričelijevim problemom i pronalaženjem njegovog optimalnog rešenja, kao petom posledicom konveksnosti. Za više detalja o ovim posledicama pogledati literaturu: [4], [8], [9], [12], [13] i [14].

4.1 Teoreme o konveksnim skupovima u $\mathbb{R}^n$

U ovom poglavlju formulisaćemo i dokazati teoreme Radona, Karateodorija i Helija, koje ističu različite karakteristike konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$. Naime, one daju geometrijsku, algebarsku i topološku karakterizaciju konveksnih skupova.

4.1.1 Radonova i Helijeva Teorema

U nastavku će biti izložene dve važne teoreme, od kojih će prva biti Radonova[1] teorema, sa jednostavnim i bazičnim geometrijskim razultatom o

[1] J. K. A. Radon (1887-1956)

konveksnim skupovima.

Teorema 4.1. *(Radonova teorema) Neka je* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\}$ *skup od* $n+2$ *tačke iz* $\mathbb{R}^n$ *i neka je sa X(S) označen konveksni omotač tačaka* $x_i, i \in S \subset \{1, 2, \ldots, n+2\}$*. Tada postoje disjunktni skpovi I i J, neprazni podskupovi skupa* $\{1, 2, \ldots, n+2\}$*, takvi da je* $X(I) \cap X(J) \neq \emptyset$*.*

Dokaz. Translacijom skupa X, ako je potrebno, bez umanjenja opštosti može se pretpostaviti da je $x_{n+2} = 0$. Skup $X' = X \backslash \{x_{n+2}\}$ je skup od $n+1$ tačke u $\mathbb{R}^n$, te je linearno zavisan, pa postoje konstante $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{n+1}$, koje nisu sve jednake nuli, tako da je $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0$. Dalje, uzimajući da je $\lambda_{n+2} = -\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$, imamo da je $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i x_i = 0$, gde nisu svi λ_i istovremeno jednaki nuli.

Neka je $I = \{i | \lambda_i > 0\}$ i $J = \{j | \lambda_j < 0\}$. Jasno $I \cap J = \emptyset$. Tada je $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = -\sum_{j \in J} \lambda_j x_j$ i $\sum_{i \in I} \lambda_i = -\sum_{j \in J} \lambda_j = \lambda > 0$. Dakle, dobija se da je vektor

$$\sum_{i \in I} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) x_i = \sum_{j \in J} \left(\frac{-\lambda_j}{\lambda}\right) x_j \in X(I) \cap X(J).$$

□

Naredna teorema, tzv. Helijeva[2] teorema, nam govori o preseku svih elemenata konačne familije konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.2. *(Helijeva teorema) Neka je* $\zeta = \{C_1, \ldots C_m\}$ *konačna familija konveksnih skupova u* $\mathbb{R}^n$ *takva da je za svako* $k \leq n+1$ *presek k elemenata familije neprazan. Tada je presek svih elemenata familije neprazan, to jest,* $\bigcap_{i=1}^m C_m \neq \emptyset$*.*

Dokaz. Naravno, pretpostavlja se da familija ζ sadrži $m \geq n+1$ elemenata tako da je presek proizvoljnih $n+1$ skupova neprazan. Matematičkom indukcijom po m pokazaće se da je presek svih članova familije ζ neprazan.

U prvom koraku indukcije, za $m = n+1$, nema šta da se dokazuje, pa se prelazi na indukcijsku hipotezu. Neka je dato $m \geq n+2$. Pretpostavlja se da tvrđenje teoreme važi za sve familije sa najviše $m-1$ članova. Neka je $\zeta = \{C_1, \ldots C_m\}$. Na osnovu indukcijske hipoteze zna se da je presek bilo kojih $m-1$ članova familije neprazan, i neka je $x_i \in \mathbb{R}^n$ takvo da je

$$x_i \in C_1 \cap \cdots C_{i-1} \cap C_{i+1} \cap \cdots C_m, \quad i = 1, \ldots m.$$

[2]E. Helly (1884-1943)

Dakle, važi $x_i \in C_j$ za $j \neq i$.

Pošto je $m \geq n+2$ na osnovu Teoreme 4.1, postoje disjunktni skupovi $I, J \in \{1, 2 \ldots, m\}$, tako da postoji tačka $x \in \mathbb{R}^n$

$$x \in co\{x_i \mid i \in I\} \cap co\{x_j \mid j \in J\}.$$

Može da se pretpostavi da I i J prave particiju indeksnog skupa, to jest, da je $I \cup J = \{1, \ldots, m\}$.

Pokažimo da je tačka x u svim skupovima C_i za $i \in \{1, \ldots, m\}$. Za sve $i \in I$ tačka x_i pripada svim konveksnim skupovima $C_j, j \in J$, te sledi da $x_i \in \bigcap_{j \in J} C_j, i \in I$. Pošto je $\bigcap_{j \in J} C_j$ konveksan skup, dobija se da je

$$co\{x_i \mid i \in I\} \subset \bigcap_{j \in J} C_j.$$

i slično

$$co\{x_j \mid j \in J\} \subset \bigcap_{i \in I} C_i.$$

Konačno,

$$x \in co\{x_i \mid i \in I\} \cap co\{x_j \mid j \in J\} \subset \left(\bigcap_{j \in J} C_j\right) \cap \left(\bigcap_{i \in I} C_i\right) = \bigcap_{i=1}^{m} C_i,$$

što je i trebalo dokazati. □

Napomena 4.3. Direktno uopštenje Helijeve teoreme za beskonačne familije konveksnih skupova ne važi. Na primer, neka se posmatraju skupovi $C_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq i\}, i \in \mathbb{N}$. Proizvoljnih konačno mnogo skupova C_i ima neprazan presek. Međutim, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i = \emptyset$. Uopštenje Helijeve teoreme važi za kompaktne konveksne skupove, tačnije:

Ako za beskonačnu familiju kompaktnih konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$ važi da je presek proizvoljnih $n+1$ skupova neprazan, onda je i presek svih skupova familije neprazan.

4.1.2 Karateodorijeva Teorema

U ovom delu ćemo pokazati jednu od najvažnijih teorema iz oblasti konveksne geometrije koja je dokazana 1911. godine od strane poznatog grčkog matematičara i fizičara Konstantina Karateodorija[3]. Ona tvrdi da ako

[3] C. Caratheodory(1873-1950) je imao veliki doprinos u oblasti matematike, pa su iz tog razloga grčke vlasti su 2009. godine odlučile da otvore muzej u njegovu čast. Muzej je smešten u velikom gradu Komotiniju, koji se nalazi u severoistočnom grčkom regionu. Čak i danas, u muzeju mogu da se nađu originalni rukopisi ovog matematičara na preko 10.000 stranica.

je $X \subset \mathbb{R}^n$ onda se konveksni omotač opisuje konveksnim kombinacijama najviše $n+1$ elemenata skupa X.

Teorema 4.4. *(Karateodorijeva teorema) Neka je $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$. Tada se svaka tačka $x \in coX$ može prikazati kao konveksna kombinacija najviše $(n+1)$ elemenata skupa X, to jest,*

$$coX = \{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i | x_i \in X, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}.$$

Dokaz. Neka je $x \in coX$ konveksna kombinacija $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, x_i \in X, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, tako da je m minimalno. Ako se pretpostavi suprotno, da je $m \geq n+2$, tada, na osnovu Teoreme 4.1, postoje disjunktni skupovi $I, J \subset \{1, 2, \dots m\}$ i strogo pozitivne konstante $\mu_h, h \in I \cup J$, tako da je

$$\sum_{h \in I} \mu_h x_h = \sum_{h \in J} \mu_h x_h.$$

Prenumeracijom tačaka, ako je potrebno, može da se pretpostavi da je $I = \{1, 2, \dots, k\}, J = \{k+1, \dots, l\}$ i da je $t = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1} = \min_{i \in I} \dfrac{\lambda_i}{\mu_i}$. Tada je

$$x = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - t\mu_i) x_i + \sum_{j=k+1}^{l} (\lambda_j + t\mu_j) x_j + \sum_{h=l+1}^{m} \lambda_h x_h = \sum_{i=2}^{m} \nu_i x_i,$$

gde su $\nu_i \geq 0$ i $\sum_{i=2}^{m} \nu_i = 1$. Ovom kontradikcijom je dokaz završen. $\square$

Karateodorijeva teorema važi i u opštijem obliku. Neka je X podskup afine n-dimenzionalne ravni u $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, tada je konveksni omotač skupa X dat sa

$$coX = \{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \mid x_i \in X, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}.$$

4.2 Horizontalni konus

U ovom delu prvo ćemo se baviti ponašanjem nepraznih, zatvorenih i konveksnih podskupova od $\mathbb{R}^n$. Nakon toga, videćemo kako možemo da predstavimo ograničenost nekog skupa sa tim osobinama uz pomoć njegovog horizontalong konusa.

Definicija 4.1. *Neka je F neprazan, zatvoren i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$ i $x \in F$. Tada je horizontalni konus od F u tački x dat sledećom formulom*

$$F_\infty(x) := \{d \in \mathbb{R}^n \mid x + td \in F, \text{ za sve } t > 0\}.$$

Napomena 4.5. Horizontalni konus od F u tački x se u literaturi često naziva i asimptotski konus od F u tački x. Tada je ekvivalentna formula za $F_\infty(x)$ data sa

$$F_\infty(x) = \bigcap_{t>0} \frac{F - x}{t}.$$

odakle sledi da je $F_\infty(x)$ zatvoren i konveksan konus u $\mathbb{R}^n$.

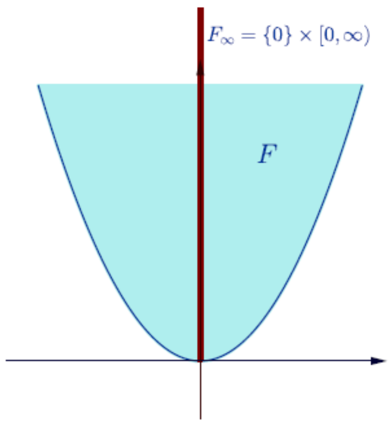
Sledeća teorema pokazuje da je $F_\infty(x)$ isto za sve $x \in F$, pa ćemo nadalje za horizontalni konus od F koristiti oznaku F_∞.

Teorema 4.6. *Neka je F neprazan, zatvoren i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$. Tada važi jednakost $F_\infty(x_1) = F_\infty(x_2)$ za sve $x_1, x_2 \in F$.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da $F_\infty(x_1) \subset F_\infty(x_2)$ za sve $x_1, x_2 \in F$. Uzimajući $d \in F_\infty(x_1)$ i proizvoljno $t > 0$ pokazaćemo da važi $x_2 + td \in F$. Posmatramo

$$x_k := \frac{1}{k}(x_1 + ktd) + (1 - \frac{1}{k})x_2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tada $x_k \in F$ za svako k jer $d \in F_\infty(x_1)$ i F je konveksan skup. Takodje, imamo $x_k \to x_2 + td$ onda i $x_2 + td$ pripada F jer je zatvoren skup. Dakle, $d \in F_\infty(x_2)$, čime je tvrđenje dokazano. □



Slika 4.1. Primer horizontalnog konusa.

Posledica 4.7. *Neka je F zatvoren, konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$. Tada*

$$F_\infty = \bigcap_{t>0} tF.$$

Dokaz. Iz same definicije i Teoreme 4.6 imamo da važi sledeće

$$F_\infty = F_\infty(0) = \bigcap_{t>0} \frac{F-0}{t} = \bigcap_{t>0} \frac{1}{t}F = \bigcap_{t>0} tF,$$

iz čega sledi traženo. □

Teorema 4.8. *Neka je F neprazan, zatvoren i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$. Za dato $d \in \mathbb{R}^n$ sledeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *$d \in F_\infty$,*
2. *Postoje nizovi $\{t_k\} \subset [0, \infty)$ i $\{f_k\} \subset F$ takvi da $t_k \to 0$ i $t_k f_k \to d$ kad $k \to \infty$.*

Dokaz. Da bismo pokazali prvu inkluziju uzećemo $d \in F_\infty$ i fiksirati neko $x_0 \in F$, tada iz same definicije horizontalnog konusa sledi da

$$x_0 + kd \in F, \ \textit{za sve}\ k \in \mathbb{N}.$$

Sada za svako $k \in \mathbb{N}$, možemo pronaći $f_k \in F$ tako da je ispunjeno

$$x_0 + kd = f_k$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{1}{k}x_0 + d = \frac{1}{k}f_k.$$

Birajući $t_k := \dfrac{1}{k}$, dobijamo da $t_k f_k \to d$ kad $k \to \infty$.

Obrnuto, pretpostavimo da su nizovi $\{t_k\} \subset [0, \infty)$ i $\{f_k\} \subset F$ takvi da $t_k \to 0$ i $t_k f_k \to d$. Fiksiraćemo neko $x \in F$. Da bi pokazali da važi $d \in F_\infty$, dovoljno je pokazati da

$$x + td \in F, \text{ za sve } t > 0.$$

Zaista, za proizvoljno fiksirano $t > 0$ imamo $0 \le t \cdot t_k < 1$, kada je k dovoljno veliko, pa onda važi

$$(1 - t \cdot t_k)x + t \cdot t_k f_k \to x + td, \text{ kad } k \to \infty.$$

Iz konveksnosti skupa F sledi da svaki element $(1 - t \cdot t_k)x + t \cdot t_k f_k$ pripada F. Dakle, onda i $x + td$ pripada F zbog zatvorenosti, pa dobijamo $d \in F_\infty$. □

Na samom kraju, predstavićemo ograničenost skupa u terminima njegovog horizontalnog konusa.

Teorema 4.9. *Neka je F neprazan, zatvoren i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$. Skup F je ograničen ako i samo ako je njegov horizontalni konus trivijalan, to jest $F_\infty = \{0\}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je F ograničen skup i neka je $d \in F_\infty$ proizvoljno. Na osnovu Teoreme 4.8, postoje nizovi $\{t_k\} \subset [0, \infty)$ i $\{f_k\} \subset F$ takvi da $t_k \to 0$ i $t_k f_k \to d$ kad $k \to \infty$. Iz ograničenosti skupa F sledi da $t_k f_k \to 0$, što daje $d = 0$.

Da bi pokazali da važi i obrnuto, pretpostavićemo suprotno, to jest da je F neograničen skup i da važi $F_\infty = \{0\}$. Tada imamo niz $\{x_k\} \subset F$ takav da $\|x_k\| \to \infty$, pa sada možemo da formiramo niz (jediničnih) pravaca

$$d_k := \frac{x_k}{\|x_k\|}, \text{ za } k \in \mathbb{N}.$$

Dalje, bez umanjenja opštosti, sledi da $d_k \to d$ kad $k \to \infty$ i važi $\|d\| = 1$. Fiksirajući neko $x \in F$, primetimo da za sve $t > 0$ i $k \in \mathbb{N}$ dovoljno velike imamo

$$u_k := \left(1 - \frac{t}{\|x_k\|}\right) x + \frac{t}{\|x_k\|} x_k \in F,$$

zbog konveksnosti skupa F. Dalje, $x + td \in F$ jer $u_k \to x + td$ i F je zatvoreno. Dakle, $d \in F_\infty$, što je kontradikcija, pa sledi da F mora biti ograničen skup. $\square$

4.3 Funkcije minimalnog vremena

Glavni predmet ovog poglavlja jeste specijalna klasa konveksnih funkcija poznatih kao funkcije minimalnog vremena. Ove funkcije su relativno nove u konveksnoj analizi i imaju veoma važne primene u optimizaciji. Mi ćemo se u ovom poglavlju baviti definisanjem pojma funkcije minimalnog vremena, zatim napraviti vezu između njih i funkcionala Minkovskog, a nakon toga predstaviti i subgradijent funkcije minimalnog vremena.

4.3.1 Karakteristike funkcija minimalnog vremena

Definicija 4.2. *Neka je F neprazan, zatvoren i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$ i neka je $X \subset \mathbb{R}^n$ neprazan skup (ne nužno konveksan). Funkcija minimalnog vremena povezana sa skupovima F i X je data sa*

$$\mathcal{T}_X^F(x) := \inf\{t \geq 0 \mid (x + tF) \cap X \neq \emptyset\}.$$

Naziv funkcija minimalnog vremena koristimo jer $\mathcal{T}_X^F(x)$ iz prethodne definicije označava minimalno vreme potrebno da tačka x dostigne cilj postavljen u ciljnom skupu X kretanjem duž F. Pri čemu, treba na umu imati sledeće slučajeve:

1. Ako je F zatvorena jedinična lopta u $\mathbb{R}^n$, onda se funkcija minimalnog vremena $\mathcal{T}_X^F(x)$ svodi na funkciju rastojanja tačke x od skupa X,

2. Ako je $F = \{0\}$, funkcija minimalnog vremena $\mathcal{T}_X^F(x)$ je indikator od X,

3. Ako je $X = \{0\}$, dobijamo $\mathcal{T}_X^F(x) = \rho_F(-x)$, gde je ρ_F funkcional Minkovskog, kog ćemo definisati u nastavku,

4. Ako je F nenula vektor, onda funkcija minimalnog vremena $\mathcal{T}_X^F(x)$ pokriva specijalnu klasu funkcija koje se nazivaju usmerene funkcije minimalnog vremena.

U nastavku ćemo se baviti proučavanjem opštih karakteristika funkcija minimalnog vremena $\mathcal{T}_X^F(x)$.

Napomena 4.10. Možemo primetiti da za funkciju minimalnog vremena $\mathcal{T}_X^F(x)$ važi jedan od naredna tri slučaja:

1. $\mathcal{T}_X^F(x) = 0$ ako $x \in X$,

2. $\mathcal{T}_X^F(x)$ je konačno za funkciju minimalnog vremena ako postoji $t \geq 0$ takvo da važi

$$(x + tF) \cap X \neq \emptyset,$$

   što važi posebno kada $0 \in F^\circ$,

3. $\mathcal{T}_X^F(x) = \infty$ ako ne postoji $t \geq 0$ takvo da važi

$$(x + tF) \cap X \neq \emptyset.$$

Skupovi F i X nisu nužno ograničeni. Naredna teorema će nam otkriti ponašanje $\mathcal{T}_X^F(x)$ u slučaju kada je X ograničeno, dok F ne mora biti.

Teorema 4.11. *Neka je F neprazan, zatvoren i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$ i neka je $X \subset \mathbb{R}^n$ neprazan i zatvoren. Tada ako je X ograničen, onda*

$$\mathcal{T}_X^F(x) = 0 \Rightarrow x \in X - F_\infty.$$

Obrnuto važi ako još dodatno pretpostavimo da $0 \in F$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{T}_X^F(x) = 0$. Hoćemo da pronađemo $t_k \to 0$, za $t_k \geq 0$, tako da je ispunjeno

$$(x + t_k F) \cap X \neq \emptyset, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Ovo nam daje $q_k \in X$ i $f_k \in F$ takve da $x + t_k f_k = q_k$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Zbog ograničenosti i zatvorenosti skupa X možemo pronaći podniz niza $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ koji konvergira ka $q \in X$ i onda važi $t_k f_k \to q - x$. Sada na osnovu Teoreme 4.8 sledi da $q - x \in F_\infty$, što nam daje $x \in X - F_\infty$.

Kako bi pokazali da važi i obrnuto, uzmimamo proizvoljno $x \in X - F_\infty$ i pronađimo $q \in X$ i $d \in F_\infty$ takve da važi $x = q - d$. Kako važi $0 \in F$ i $d \in F_\infty$, onda iz Posledice 4.7 imamo $k(q - x) = kd \in F$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Iz ovoga sledi

$$q - x \in \frac{1}{k} F, \text{ za sve } k \in \mathbb{N}$$

iz čega sledi

$$\left(x + \frac{1}{k} F \right) \cap X \neq \emptyset, \text{ za sve } k \in \mathbb{N}.$$

Ovo poslednje obezbeđuje da $0 \leq \mathcal{T}_X^F(x) \leq \dfrac{1}{k}$ za sve $k \in \mathbb{N}$, što važi samo kada je $\mathcal{T}_X^F(x) = 0$ i time je dokaz teoreme završen. □

Sledeći primer ilustruje rezultate dobijene u prethodnoj teoremi.

Primer 4.12. Neka je $F = \mathbb{R} \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ i neka je X disk sa centrom u tački (1,0) poluprečnika $r = 1$. Koristeći reprezentaciju F_∞ datu u Posledici 4.7 dobijamo $F_\infty = \mathbb{R} \times \{0\}$ i $X - F_\infty = \mathbb{R} \times [-1, 1]$. Dakle, $\mathcal{T}_X^F(x) = 0$ ako i samo ako $x \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$.

Sledeća teorema nam govori o konveksnosti funkcije minimalnog vremena $\mathcal{T}_X^F(x)$.

Teorema 4.13. *Neka je F neprazan, zatvoren i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$. Ako je $X \subset \mathbb{R}^n$ neprazan i konveksan, onda funkcija minimalnog vremena $\mathcal{T}_X^F(x)$ jeste konveksna funkcija.*

Obrnuto važi ako još dodatno pretpostavimo da je F ograničen i X zatvoren skup.

Dokaz. Uzmimo proizvoljne x_1, x_2 iz domena funkcije $\mathcal{T}_X^F$ i neka je $\lambda \in (0,1)$. Želimo da pokažemo da važi

$$\mathcal{T}_X^F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda \mathcal{T}_X^F(x_1) + (1-\lambda)\mathcal{T}_X^F(x_2) \tag{4.1}$$

pod uslovom da su oba skupa X i F konveksna. Označimo $\gamma_i := \mathcal{T}_X^F(x_i)$ za $i = 1{,}2$ i za proizvoljno $\varepsilon > 0$ izaberimo brojeve t_i takve da važi

$$\gamma_i \leq t_i < \gamma_i + \varepsilon \text{ za } i = 1{,}2$$

pri čemu je ispunjeno

$$(x_i + t_i F) \cap X \neq \emptyset \text{ za } i = 1{,}2.$$

Dalje, zbog konveksnosti skupova X i F sledi

$$[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)F] \cap X \neq \emptyset,$$

pa dalje primetimo da je ispunjen sledeći niz nejednakosti

$$\mathcal{T}_X^F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 \leq \lambda \mathcal{T}_X^F(x_1) + (1-\lambda)\mathcal{T}_X^F(x_2) + \varepsilon.$$

Kako smo birali ε proizvoljno, dobijamo (4.1) i time smo dokazali konveksnost funkcije $\mathcal{T}_X^F$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $\mathcal{T}_X^F$ konveksna funkcija pod uslovom da je F ograničen i X zatvoren skup. Tada je skup

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{T}_X^F(x) \leq 0\}$$

konveksan. Dalje, direktno sledi da je neprazan skup X konveksan, čime je teorema dokazana. □

Za sam kraj ovog poglavlja, definišimo *proširenje konveksnog skupa* X pomoću funkcije minimalnog vremena sa

$$X_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{T}_X^F(x) \leq r\}, \text{ za } r > 0.$$

U narednoj teoremi ćemo predstaviti vezu između funkcije minimalnog vremena na konveksnom skupu X i funkcije minimalnog vremena na proširenom konveksnom skupu X_r.

Teorema 4.14. *Neka je F neprazan, zatvoren i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$ i neka je X neprazan podskup od $\mathbb{R}^n$. Tada za svaki neprazan skup X i za svako $x \notin X_r$ takvo da $\mathcal{T}_X^F(x) < \infty$, imamo da važi*

$$\mathcal{T}_X^F(x) = \mathcal{T}_{X_r}^F(x) + r.$$

Dokaz. Primetimo da iz inkluzije $X \subset X_r$ sledi $\mathcal{T}_{X_r}^F(x) \leq \mathcal{T}_X^F(x) < \infty$. Uzmimo sada proizvoljno $t \geq 0$ za koje je ispunjeno

$$(x + tF) \cap X_r \neq \emptyset,$$

i pronađimo $f_1 \in F$ i $u \in X_r$ takve da je ispunjeno $x+tf_1 = u$. Kako $u \in X_r$, imamo da važi $\mathcal{T}_X^F(u) \leq r$. Dalje, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $s \geq 0$ takvo da $s < r + \varepsilon$ i važi

$$(u + sF) \cap X \neq \emptyset.$$

Dakle, sada primetimo da postoje $\omega \in X$ i $f_2 \in F$ takvi da važi $u + sf_2 = \omega$. Zatim, sledi

$$\omega = u + sf_2 = (x + tf_1) + sf_2 \in x + (t + s)F,$$

jer je F konveksan skup. To nam daje

$$\mathcal{T}_X^F(x) \leq t + s \leq t + r + \varepsilon,$$

iz čega sledi

$$\mathcal{T}_X^F(x) \leq t + r,$$

jer smo birali proizvoljno $\varepsilon > 0$. Dakle, možemo zaključiti da je ispunjeno

$$\mathcal{T}_X^F(x) \leq \mathcal{T}_{X_r}^F(x) + r.$$

Za dokaz obrnute nejednakosti, prvo primetimo da $r < \mathcal{T}_X^F(x)$ za sve $x \notin X_r$. Dalje, za svako $\varepsilon > 0$, pronađimo $t \in [0, \infty)$, $f \in F$ i $\omega \in X$ takve da važi $x + tf = \omega$ i ispunjen je sledeći niz nejednakosti

$$\mathcal{T}_X^F(x) \leq t < \mathcal{T}_X^F(x) + \varepsilon.$$

Dakle, sada važi

$$\omega = x + tf = x + (t - r)f + rf \in x + (t - r)f + rF,$$

iz čega sledi

$$\mathcal{T}_X^F(x + (t - r)f) \leq r,$$

što nam daje da $x+(t-r)f \in X_r$. Takođe, možemo primetiti da $x+(t-r)f \in x + (t - r)F$, pa onda imamo

$$\mathcal{T}_{X_r}^F(x) \leq t - r \leq \mathcal{T}_X^F(x) - r + \varepsilon,$$

iz čega sledi $r + \mathcal{T}_{X_r}^F(x) \leq \mathcal{T}_X^F(x)$, čime je dokazana obrnuta nejednakost i završen dokaz teoreme. $\square$

Poslednja teorema ovog poglavlja nam je važna jer će biti ključna u dokazu teoreme vezane za subgradijent funkcije minimalnog vremena, koju ćemo formulisati i dokazati kasnije u toku rada.

Teorema 4.15. *Neka je F neprazan, zatvoren i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$. Tada za svaki neprazan skup X, za svako x koje pripada domenu $\mathcal{T}_X^F$, za svako $t \geq 0$ i za svako $f \in F$ važi*

$$\mathcal{T}_X^F(x - tf) \leq \mathcal{T}_X^F(x) + t.$$

Dokaz. Fiksirajmo neko $\varepsilon > 0$ i uzmimo proizvoljno $s \geq 0$ takvo da $(x + sF) \cap X \neq \emptyset$ i važi

$$\mathcal{T}_X^F(x) \leq s < \mathcal{T}_X^F(x) + \varepsilon.$$

Sada možemo primetiti da $(x - tf + tF + sF) \cap X \neq \emptyset$, odakle sledi $(x - tf + (t+s)F) \cap X \neq \emptyset$, što nam daje

$$\mathcal{T}_X^F(x - tf) \leq t + s \leq t + \mathcal{T}_X^F(x) + \varepsilon,$$

gde puštajući $\varepsilon \to 0^+$ dobijamo traženu nejednakost. □

4.3.2 Funkcional Minkovskog

Naredne stranice će biti posvećene specijalnoj funkciji, tzv. funkcionalu Minkovskog. Naziv je dobijen po istaknutom nemačkom matematičaru i fizičaru Hermanu Minkovskom[4], koji je za svoj kratak životni vek doprineo rešavanju mnogih problema u teoriji konveksnih figura i topologiji i zbog toga ostao zapamćen kao jedan od najznačajnijih matematičara svog doba. Najviše zasluga mu se pripisuje za razvijanje geometrije brojeva. Bio je jedan od prvih matematičara koji je shvatio značaj Kantorove[5] teorije skupova u vreme kada većina matematičara ovu teoriju nije cenila. Kasniji rad Minkovskog bio je inspirisan Ajnštajnovom[6] specijalnom teorijom relativnosti koja je prvi put objavljena 1905. godine. U poznatom delu "Prostor i vreme" iz 1907. godine uveo je pojam četvorodimenzionalnog prostora dajući time geometrijsku interpretaciju specijalne teorije relativnosti, što nas dovodi do poznatog *prostora Minkovskog*. Više detalja o životu i radu ovog poznatog matematičara čitalac može pronaći u literaturi: [15] i [16].

Definicija 4.3. *Neka je F neprazan, zatvoren i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$. Tada je funkcional Minkovskog skupa F dat sa*

$$\rho_F(x) := \inf\{t \geq 0 \mid x \in tF\}, \text{ za } x \in \mathbb{R}^n.$$

U narednim teoremama ćemo se upoznati sa glavnim svojstvima funkcionala Minkovskog.

[4] H. Minkowski (1864-1909)
[5] G. Cantor (1845-1918)
[6] A. Einstein (1879-1955)

Teorema 4.16. *Neka je F zatvoren i konveksan skup. Tada funkcional Minkovskog ρ_F ispunjava naredne dve tvrdnje:*

1. $\rho_F(x_1 + x_2) \leq \rho_F(x_1) + \rho_F(x_2)$, *za sve* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$,

2. $\rho_F(\alpha x) = \alpha \rho_F(x)$, *za proizvoljno* $\alpha > 0$.

Dokaz. 1. Primetimo da je tvrdnja ispunjena ako je desna strana, to jest $\rho_F(x_1) + \rho_F(x_2)$, jednaka beskonačnosti. Tada imamo da x_1 ili x_2 ne pripadaju domenu funkcije ρ_F.

Pretpostavimo sada da x_1 i x_2 pripadaju domenu funkcije ρ_F i fiksirajmo proizvoljno $\varepsilon > 0$, onda postoje brojevi $t_1, t_2 \geq 0$ takvi da je ispunjeno

$$\rho_F(x_1) \leq t_1 < \rho_F(x_1) + \varepsilon \text{ i } x_1 \in t_1 F,$$

$$\rho_F(x_2) \leq t_2 < \rho_F(x_2) + \varepsilon \text{ i } x_2 \in t_2 F.$$

Dalje, zbog konveksnosti skupa F sledi

$$x_1 + x_2 \in t_1 F + t_2 F \subset (t_1 + t_2) F,$$

pa onda dobijamo

$$\rho_F(x_1 + x_2) \leq t_1 + t_2 < \rho_F(x_1) + \rho_F(x_2),$$

a kako je $\varepsilon > 0$ bilo proizvoljno, tvrdnja je ispunjena.

2. Uzmimo proizvoljno $\alpha > 0$, tada imamo da važi

$$\begin{aligned} \rho_F(x) &= \inf\{t \geq 0 \mid \alpha x \in tF\} \\ &= \inf\{t \geq 0 \mid x \in \frac{t}{\alpha} F\} \\ &= \alpha \inf\{\frac{t}{\alpha} \geq 0 \mid x \in \frac{t}{\alpha} F\} \\ &= \alpha \rho_F(x), \end{aligned}$$

čime je dokazana i ova tvrdnja.

$\square$

Teorema 4.17. *Neka je F zatvoren i konveksan skup. Tada važi da je $\rho_F(x) = 0$ ako i samo ako $x \in F_\infty$.*

Dokaz. Prvo primetimo da iz Napomene 4.10 sledi da $\rho_F(x) = \mathcal{T}_X^{-F}(x)$ jeste specijalan slučaj funkcije minimalnog vremena za $X = \{0\}$. Kako $0 \in F$, na osnovu Teoreme 4.11 imamo da $\rho_F(x) = 0$ ako i samo ako $x \in X - (-F)_\infty = F_\infty$, odakle direktno sledi tvrđenje. $\square$

Naredni rezultat nam daje Lipšicovu konstantu $l \geq 0$ za Lipšic neprekidne funkcionale Minkovskog ρ_F na prostoru $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.18. *Neka je F zatvoren i konveksan skup za koji važi da $0 \in F^\circ$. Tada je funkcional Minkovskog ρ_F Lipšic neprekidan na $\mathbb{R}^n$ sa Lipšicovom konstantom*

$$l := \inf\{\frac{1}{r} \mid Z(0;r) \subset F,\ r > 0\}. \tag{4.2}$$

Preciznije, važi $\rho_F(x) \leq l\|x\|$, za sve $x \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz. Pretpostavka da važi $0 \in F^\circ$ obezbeđuje da važi $l < \infty$ za Lipšicovu konstantu iz (4.2). Uzmimo sada proizvoljno $r > 0$ za koje važi $Z(0;r) \subset F$, onda iz Definicije 4.3 imamo da važi

$$\begin{aligned}\rho_F(x) &= \inf\{t \geq 0 \mid x \in tF\}\\ &\leq \inf\{t \geq 0 \mid x \in tZ(0;r)\}\\ &= \inf\{t \geq 0 \mid \|x\| \leq rt\}\\ &= \frac{\|x\|}{r},\end{aligned}$$

što implicira $\rho_F(x) \leq l\|x\|$. Dalje, na osnovu Teoreme 4.16 dobijamo da za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ važi

$$\rho_F(x) - \rho_F(y) \leq \rho_F(x - y) \leq l\|x - y\|$$

i tada je ρ_F Lipšic neprekidna na $\mathbb{R}^n$ sa konstantom (4.2). $\square$

Za sam kraj ovog poglavlja, navodimo rezultat koji nam daje vezu između funkcionala Minkovskog ρ_F i funkcije minimalnog vremena $\mathcal{T}_X^F$.

Teorema 4.19. *Neka je F neprazan, zatvoren konveksan skup. Tada je za svaki skup $X \neq \emptyset$ ispunjeno*

$$\mathcal{T}_X^F(x) = \inf\{\rho_F(\omega - x) \mid \omega \in X\},\ \text{za sve}\ x \in \mathbb{R}^n.$$

4.3.3 Subgradijent funkcija minimalnog vremena

U ovom poglavlju proučavamo svojstva diferencijacije funkcije minimalnog vremena u slučaju kada je ciljni skup X konveksan. Kako pretpostavljamo da je F uvek konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$, onda će i funkcija minimalnog vremena $\mathcal{T}_X^F(x)$ takođe biti konveksna funkcija na osnovu Teoreme 4.13. Rezultati, koje navodimo u nastavku, predstavljaju precizne formule za izračunavanje subdiferencijala $\partial\mathcal{T}_X^F(x_0)$ u zavisnosti od položaja x_0 u odnosu na skup $X - F_\infty$.

Teorema 4.20. *Neka su skupovi $0 \in F$ i X neprazni, zatvoreni i konveksni podskupovi od $\mathbb{R}^n$. Tada je opšta formula za subdiferencijal od $\mathcal{T}_X^F$ u tački x_0 data sa*

$$\partial\mathcal{T}_X^F(x_0) = N(x_0; X - F_\infty) \cap Z, \ \ \forall x_0 \in X - F_\infty, \tag{4.3}$$

gde je $Z := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_F(-v) \leq 1\}$ i $\sigma_F(-v) := \sup\{\langle -v, \omega\rangle \mid \omega \in X\}$. Specijalno, važi

$$\partial\mathcal{T}_X^F(x_0) = N(x_0; X) \cap Z, \ \ \forall x_0 \in X. \tag{4.4}$$

Dokaz. Uzmimo proizvoljno $v \in \partial\mathcal{T}_X^F(x_0)$ i primetimo da na osnovu (3.1) i činjenice da $\partial\mathcal{T}_X^F(x) = 0$ za svako $x \in X - F_\infty$ dobijamo da važi $v \in N(x_0; X - F_\infty)$. Dalje, $x_0 \in X - F_\infty$ možemo zapisati kao $x_0 = \omega_0 - c$, za neke $\omega_0 \in X$ i $c \in F_\infty$. Birajući proizvoljno $f \in F$, onda možemo definisati $x_t := (x_0 + c) - tf = \omega_0 - tf$, za $t > 0$. Tada $(x_t + tF) \cap X \neq \emptyset$ i ispunjeno je sledeće

$$\langle v, x_t - x_0\rangle \leq \mathcal{T}_X^F(x_t) \leq t, \text{ , za sve } t > 0,$$

što je ekvivalentno sa

$$\langle v, \frac{c}{t} - f\rangle \leq 1, \text{ za sve } t > 0.$$

Puštajući $t \to \infty$, dobijamo $\langle v, -f\rangle \leq 1$, odakle sledi da $v \in Z$. Dakle, $v \in N(x_0; X - F_\infty) \cap Z$, čime je dokazana inkluzija $\partial\mathcal{T}_X^F(x_0) \subset N(x_0; X - F_\infty) \cap Z$.

Da bi pokazali obrnutu inkluziju u (4.3), uzmimo proizvoljno $v \in N(x_0; X - F_\infty) \cap Z$ i u koje pripada domenu funkcije $\mathcal{T}_X^F$. Tada, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoje $t \in [0, \infty)$, $\omega \in X$ i $f \in F$ takvi da je ispunjeno $u + tf = \omega$ i da važi

$$\mathcal{T}_X^F(u) \leq t < \mathcal{T}_X^F(u) + \varepsilon.$$

Kako $X \subset X - F_\infty$, onda važi sledeće

$$\langle v, u - x_0\rangle = \langle v, \omega - x_0\rangle + t\langle v, -f\rangle \leq t < \mathcal{T}_X^F(u) + \varepsilon = \mathcal{T}_X^F(u) - \mathcal{T}_X^F(x_0) + \varepsilon,$$

što nam daje da $v \in \partial \mathcal{T}_X^F(x_0)$. Na ovaj način dobijamo da važi $N(x_0; X - F_\infty) \cap Z \subset \partial \mathcal{T}_X^F(x_0)$ i time je dokazana opšta formula (4.3) za sve $x_0 \in X - F_\infty$.

Ostalo je još da pokažemo specijalan slučaj, to jest formulu (4.4) za sve $x_0 \in X$. Kako $X \subset X - F_\infty$, onda očigledno važi inkluzija

$$N(x_0; X - F_\infty) \cap Z \subset N(x_0; X) \cap Z.$$

Da bi pokazali da važi i obrnuta inkluzija, biramo proizvoljno $v \in N(x_0; X) \cap Z$ i fiksirajmo neko $x \in X - F_\infty$. Uzimajući $\omega \in X$ i $c \in F_\infty$ takve da važi $x = \omega - c$, dobijamo da $tc \in F$ jer $0 \in F$, pa onda važi $\langle v, -tc \rangle \leq 1$, za sve $t > 0$. Dakle, $\langle v, -c \rangle \leq 0$, što implicira

$$\langle v, x - x_0 \rangle = \langle v, \omega - c - x_0 \rangle = \langle v, \omega - x_0 \rangle + \langle v, -c \rangle \leq 0.$$

Na ovaj način smo dobili $v \in N(x_0; X - F_\infty) \cap Z$, čime je dokaz teoreme završen. $\square$

Naredna teorema će nam pokazati kako dolazimo do subdiferencijala funkcije minimalnog vremena u slučajevima koji su komplementni slučajevima u prethodnoj teoremi, to jest u slučajevima kada $x_0 \notin X - F_\infty$ i $x_0 \notin X$.

Teorema 4.21. *Neka su skupovi $0 \in F$ i X neprazni, zatvoreni i konveksni podskupovi od $\mathbb{R}^n$ i neka x_0 pripada domenu $\mathcal{T}_X^F$. Ako je X ograničen skup, tada važi*

$$\partial \mathcal{T}_X^F(x_0) = N(x_0; X_r) \cap S, \text{ za } x_0 \notin X - F_\infty, \tag{4.5}$$

gde je $S := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_F(-v) = 1\}$, $\sigma_F(-v) := \sup\{\langle -v, \omega \rangle \mid \omega \in X\}$ i $r = \mathcal{T}_X^F(x_0) > 0$.

Dokaz. Izaberimo proizvoljno $v \in \partial \mathcal{T}_X^F(x_0)$ i primetimo da onda iz Definicije 3.1 imamo da važi

$$\langle v, x - x_0 \rangle \leq \mathcal{T}_X^F(x) - \mathcal{T}_X^F(x_0), \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.6}$$

Dalje, imamo da važi $\mathcal{T}_X^F(x) \leq r = \mathcal{T}_X^F(x_0)$, iz čega sledi $\langle v, x - x_0 \rangle \leq 0$ za svako $x \in X_r$, što nam daje $v \in N(x_0; X_r)$. Koristeći (4.6) na $x := x_0 - f$, $f \in F$ i Teoremu 4.15 dobijamo da $\sigma_F(-v) \leq 1$. Sada ćemo fiksirati $\varepsilon \in (0, r)$ i izabrati proizvoljne $t \in \mathbb{R}$, $f \in F$ i $\omega \in X$ takve da $\omega = x_0 + tf$ i važi

$$r \leq t < r + \varepsilon^2.$$

Možemo zapisati $\omega = x_0 + \varepsilon f + (t - \varepsilon) f$ i onda primetiti da važi $\mathcal{T}_X^F(x_0 + \varepsilon f) \leq t - \varepsilon$. Primenjujući (4.6) na $x := x_0 + \varepsilon f$ dobijamo sledeći niz nejednakosti

$$\langle v, \varepsilon f \rangle \leq \mathcal{T}_X^F(x_0 + \varepsilon f) - \mathcal{T}_X^F(x_0) \leq t - \varepsilon - r \leq \varepsilon^2 - \varepsilon,$$

što implicira
$$1 - \varepsilon \leq \langle -v, f \rangle \leq \sigma_F(-v).$$
Puštajući $\varepsilon \to 0$, dobijamo da $\sigma_F(-v) \geq 1$, pa smo time pokazali da važi $\sigma_F(-v) = 1$, to jest da $v \in S$, pa onda važi $v \in N(x_0; X_r) \cap S$ i time smo dobili da važi inkluzija $\partial \mathcal{T}_X^F(x_0) \subset N(x_0; X_r) \cap S$.

Da bi pokazali obrnutu inkluziju u (4.5), uzmimo proizvoljno $v \in N(x_0; X_r)$ takvo da važi $\sigma_F(-v) = 1$ i pokažimo da važi (4.6). Na osnovu Teoreme 4.20 imamo da $v \in \partial \mathcal{T}_{X_r}^F(x_0)$ i da je ispunjeno
$$\langle v, x - x_0 \rangle \leq \mathcal{T}_{X_r}^F(x), \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^n.$$
Sada fiksiramo $x \in \mathbb{R}^n$ i na osnovu Teoreme 4.14 možemo zaključiti da važi $\mathcal{T}_X^F(x) - r = \mathcal{T}_{X_r}^F(x)$ u slučaju kada je $t := \mathcal{T}_X^F(x) > r$, što nam daje (4.6). Pretpostavimo sada da važi $t \leq r$ i za proizvoljno $\varepsilon > 0$ izaberimo $f \in F$ takvo da važi $\langle v, -f \rangle > 1 - \varepsilon$. Tada nam Teorema 4.15 govori o tome da važi $\mathcal{T}_X^F(x - (r - t)f) \leq r$, pa onda važi $x - (r - t)f \in X_r$. Kako $v \in N(x_0; X_r)$, imamo da važi $\langle v, x - (r - t)f - x_0 \rangle \leq 0$, što nas dovodi do sledećeg niza nejednakosti
$$\langle v, x - x_0 \rangle \leq \langle v, f \rangle (r - t) \leq (1 - \varepsilon)(t - r) = (1 - \varepsilon)(\mathcal{T}_X^F(x) - \mathcal{T}_X^F(x_0)).$$
Kako smo birali proizvoljno $\varepsilon > 0$, dobijamo (4.6) i time smo pokazali da $v \in \partial \mathcal{T}_X^F(x_0)$. $\square$

4.4 Problem konveksne optimizacije i njegovo rešavanje

Primenom literarue [8], [12] i [14], u ovom kratkom poglavlju ćemo se upoznati sa još jednom posledicom konveksnosti. Reč je o problemu konveksne optimizacije i njegovom rešavanju. Kako bi mogli da predstavimo uslove optimalnosti za problem konveksne optimizacije, prvo ćemo se kratko osvrnuti na osnovne pojmove nelinearne optimizacije, kao i pojmove lokalnog i globalnog ekstrema.

4.4.1 Osnovni pojmovi nelinearne optimizacije

Matematički model je matematičko predstavljanje stvarne situacije i služi za izvođenje potrebnih analiza na osnovu kojih se može doći do traženih odgovora u vezi sa postavljenim problemom. Na osnovu proučavanja tog modela treba zaključiti koje je njegovo rešenje najbolje. Da bi se za neko rešenje moglo reći da je najbolje, to jest optimalno, treba da postoji mera kojom se određuje njegov kvalitet i ta mera kvaliteta u matematičkom modelu se dobija pomoću *funkcije cilja*, koja svakom rešenju problema pridružuje odgovarajuću vrednost. Kako bi optimizacija bila što uspešnija, potrebno je naći rešenje koje daje ekstremnu vrednost funkcije cilja. Promenljive koje treba odrediti su obično uslovljene odgovarajućim ograničenjima, koja čine *skup ograničenja*. Svako rešenje koje zadovoljava postojeća ograničenja naziva se *dopustivo rešenje*. Svako dopustivo rešenje u kom funkcija cilja dostiže svoju ekstremnu vrednost nazivamo *optimalno rešenje*, dok vrednost funkcije cilja koja odgovara optimalnom rešenju nazivamo *optimalna vrednost*.

Nelinearna optimizacija podrazumeva određivanje ekstremne (minimalne ili maksimalne) vrednosti funkcije cilja nad skupom ograničenja, pri čemu je funkcija cilja nelinearna i/ili skup ograničenja definisan nelinearnim algebarskim jednačinama ili nejednačinama.

Dat je opšti oblik problema nelinearne optimizacije

$$\begin{aligned} &\min(\max)\, f(x) \\ &g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{4.7}$$

gde je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija cilja, $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, a $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, su funkcije ograničenja.

Problem (4.7) se može zapisati u ekvivalentnom obliku

$$\min_{x \in X}(\max_{x \in X})\, f(x)$$

gde je $X = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ skup ograničenja. Ovakav oblik nelinearnog programiranja naziva se *problem optimizacije sa ograničenjima*. Ukoliko je skup ograničenja u problemu $X = \mathbb{R}^n$, to jest ako ne postoje ograničenja, onda je reč o *problemu optimizacije bez ograničenja*, tada važi

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n}(\max_{x \in \mathbb{R}^n})\, f(x).$$

Problem minimizacije se uvek može svesti na problem maksimizacije i obrnuto, to jest, važi

$$\max_{x \in X} f(x) = \min_{x \in X} (-f(x)).$$

U nastavku ćemo definisati pojmove dopustivog i optimalnog rešenja problema nelinearne optimizacije.

Definicija 4.4. *Neka je X skup ograničenja, tada je svako $x \in X$ dopustivo rešenje problema.*

Definicija 4.5. *Dopustivo rešenje u kome funkcija cilja dostiže svoju optimalnu vrednost naziva se optimalno rešenje problema optimizacije i označava se sa* x^*.

Definicija 4.6. *Vrednost funkcije cilja koja odgovara optimalom rešenju naziva se optimalna vrednost i označava se sa* $f^* = f(x^*)$.

4.4.2 Pojmovi lokalnih i globalnih ekstrema

Neka je dat problem

$$\begin{aligned} &\text{minimizirati } f(x) \\ &x \in X \end{aligned} \tag{4.8}$$

gde je X skup ograničenja.

Sada uvodimo definicije globalnih i lokalnih minimuma i maksimuma, pa ćemo u nastavku njih nazivati globalnim i lokalnim ekstremima.

Definicija 4.7. *Tačka* $x^* \in X$ *je globalni minimum funkcije* f *na skupu* X, *ili globalni minimum problema (4.8), ako je*

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ za sve } x \in X,$$

to jest, ako u njoj funkcija f *dostiže svoju minimalnu vrednost na* X.

Definicija 4.8. *Tačka* $x^* \in X$ *je strogi globalni minimum funkcije* f *na skupu* X, *ili strogi globalni minimum problema (4.8), ako je*

$$f(x^*) < f(x) \text{ za sve } x \in X,\ x \neq x^*.$$

U slučaju kada je funkcija f neprekidna, a skup X zatvoren i ograničen, f dostiže svoju minimalnu vrednost, to jest postoji bar jedan globalni minimum $x^* \in X$.

Definicija 4.9. *Tačka* $x^* \in X$ *je lokalni minimum funkcije* f *na skupu* X, *ili lokalni minimum problema (4.8), ako postoji* $\delta > 0$ *tako da važi uslov*

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ za sve } x \in X, \text{ gde važi } \|x - x^*\| < \delta.$$

Definicija 4.10. *Tačka* $x^* \in X$ *je strogi lokalni minimum funkcije* f *na skupu* X, *ili strogi lokalni minimum problema (4.8), ako postoji* $\delta > 0$ *tako da važi uslov*

$$f(x^*) < f(x) \text{ za sve } x \in X,\ x \neq x^* \text{ gde važi } \|x - x^*\| < \delta.$$

Analogno se uvode pojmovi globalnog i lokalnog maksimuma.

4.4.3 Optimalna rešenja problema konveksne optimizacije

Konačno, stigli smo do cilja ovog poglavlja, odnosno do dela u kom ćemo se baviti proučavanjem lokalnih i globalnih optimalnih rešenja problema konveksne optimizacije i videti na koji način su ova dva rešenja povezana. Primetićemo da ta veza između rešenja predstavlja značajnu posledicu konveksnosti, koju navodimo u nastavku.

Razmatraćemo dva različita slučaja, odnosno ispitaćemo postojanje optimalnog rešenja sledećeg problema konveksne optimizacije:

1. *sa ograničenjima*

$$\begin{aligned} &\text{minimizirati } f(x) \\ &x \in X, \end{aligned} \tag{4.9}$$

2. *bez ograničenja*

$$\begin{aligned} &\text{minimizirati } g(x) := f(x) + \delta(x; X) \\ &x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{4.10}$$

gde je X neprazan konveksan skup ograničenja, $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ konveksne funkcije cilja i funkcija δ indikator funkcija data sa

$$\delta(x; X) := \begin{cases} 0, & \text{za } x \in X \\ \infty, & \text{za } x \notin X. \end{cases} \tag{4.11}$$

Definicije koje navodimo u nastavku će nam obezbediti pojmove lokalnog i globalnog optimalnog rešenja problema konveksne optimizacije.

Definicija 4.11. *Kažemo da je $x^* \in X$ lokalno optimalno rešenje problema (4.9) ako $f(x^*) < \infty$ i postoji $\gamma > 0$ takvo da*

$$f(x) \geq f(x^*), \text{ za sve } x \in L(x^*, \gamma) \cap X.$$

Definicija 4.12. *Kažemo da je $x^* \in X$ globalno optimalno rešenje problema (4.9) ako važi*

$$f(x) \geq f(x^*), \text{ za sve } x \in X.$$

Sada, kao što smo i pomenuli na samom početku ovog dela, želimo da pokažemo veoma značajan rezultat koji govori da nema razlike između lokalnih i globalnih optimalnih rešenja za probleme konveksne optimizacije. Pre nego što pređemo na samu formulaciju i dokaz tog rezultata, dokazujemo pomoćnu lemu koja nam govori o tome da svaki lokalni minimum konveksne funkcije daje globalni minimum te funkcije.

Lema 4.22. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ konveksna funkcija i neka je tačka $x^* \in D_f$ lokalni minimum funkcije f. Tada f dostiže svoj globalni minimum u tački x^*.*

Dokaz. Neka je x^* lokalni minimum funkcije f, onda postoji neko $\delta > 0$ takvo da je ispunjeno

$$f(u) \geq f(x^*), \text{ za sve } u \in L(x^*, \delta).$$

Sada konstruišemo niz tako što fiksiramo $x \in \mathbb{R}^n$ i posmatramo $x_k := (1 - \frac{1}{k})x^* + \frac{1}{k}x$, za sve $k \in \mathbb{N}$. Sada primetimo da za dovoljno veliko k važi $x_k \in L(x^*, \delta)$. Dalje, iz konveksnosti funkcije f dobijamo

$$f(x^*) \leq f(x_k) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) f(x^*) + \frac{1}{k} f(x).$$

Odavde direktno sledi da $\dfrac{1}{k} f(x^*) \leq \dfrac{1}{k} f(x)$, to jest $f(x^*) \leq f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}^n$. □

Teorema 4.23. *Kod problema konveksne optimizacije sledeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *x^* je lokalno optimalno rešenje problema sa ograničenjima (4.9);*
2. *x^* je lokalno optimalno rešenje problema bez ograničenja (4.10);*
3. *x^* je globalno optimalno rešenje problema sa ograničenjima (4.9);*
4. *x^* je globalno optimalno rešenje problema bez ograničenja (4.10);*

Dokaz. Da bi pokazali da važi (1) $\Rightarrow$ (2), izaberimo proizvoljno $\gamma > 0$ takvo da je ispunjena nejednakost iz Definicije 4.11. Kako znamo da važi $g(x) = f(x)$ za sve $x \in L(x^*, \gamma) \cap X$ i kako važi $g(x) = \infty$ za sve $x \in L(x^*, \gamma)$ i $x \notin X$, onda imamo da je ispunjeno

$$g(x) \geq g(x^*), \text{ za sve } x \in L(x^*, \gamma),$$

čime dobijamo da je x^* lokalno optimalno rešenje problema bez ograničenja (4.10). Dalje, implikacija (2) $\Rightarrow$ (3) je direktna posledice Leme 4.22. Implikacija (3) $\Rightarrow$ (4) se slično pokazuje kao i implikacija (1) $\Rightarrow$ (2), dok je implikacija (4) $\Rightarrow$ (1) očigledna. □

Za probleme konveksne optimizacije koristimo zajednički naziv, tzv. *optimalna rešenja*, ne razmatrajući posebno lokalna i globalna optimalna rešenja.

4.5 Ferma-Toričelijev problem

Zamislimo da moramo da izgradimo put koji bi trebao da poveže tri grada koji se nalaze na uglovima nekog trougla. S obzirom da imamo ograničen budžet, od nas se traži da izgradimo najekonomičniji mogući put. Jasno je da bi troškovi izgradnje puta trebali biti proporcionalni njegovoj dužini, pa bi jedan očigledan način bio postavljanje puta duž stranica trougla, ali da li je ovo najekonomičnije rešenje? Da li postoji neki drugi način da se gradovi povežu putevima tako da njihova ukupna dužina bude minimalna? Ovo je pitanje kojim se bavimo u nastavku i na koje ćemo dati odgovor korišćenjem dodatne literature [11].

4.5.1 Formulacija problema i konstrukcija Toričelijeve tačke

U sedamnaestom veku, 1643. godine, Pjer de Ferma[7] predložio je Toričeliju[8] sledeći problem optimizacije: Date su tri tačke u ravni, pronađi četvrtu tačku tako da je zbir njenih rastojanja od unapred zadatih tačaka minimalan. Ovaj problem je Toričeli i rešio, pa je iz tog razloga nazvan *Ferma-Toričelijev problem*. Uopštenje ovog problema ima za zadatak da nadje tačku koja minimizira zbir rastojanja od konačnog broja unapred zadatih tačaka u prostoru $\mathbb{R}^n$. Ovo je jedan od problema koji su proučavali mnogi istraživači, a prvi numerički algoritam za rešavanje uopštenog Ferma-Toričelijevog problema dao je Endre Vajsfeld[9] 1937. godine, i njega nazivamo *Vajsfeldov algoritam*. Pretpostavke koje garantuju konvergenciju Vajsfeldovog algoritma dao je Harold Kun[10] 1972. godine. Takođe, Kun je ukazao na primer u kom Vajsfeldov algoritam ne konvergira.

Cilj ovog poglavlja je da se ponovo razmotri Ferma-Toričelijev problem sa teorijske i numeričke tačke gledišta korišćenjem tehnika konveksne analize i optimizacije. U ovom delu smo uglavnom koristili oznake i pratili pristup dat u [9].

Neka su date tačke $a_i \in \mathbb{R}^n$ za $i = 1, \ldots, m$ i neka one definišu konveksnu funkciju

$$\varphi(x) := \sum_{i=1}^{m} \|x - a_i\|. \tag{4.12}$$

[7]P. de Fermat(1607-1665)
[8]E. Torricelli(1608-1647)
[9]E. Weiszfeld(1916-2003)
[10]H. W. Kuhn(1925-2015)

Sada možemo Ferma-Toričelijev problem da posmatramo na sledeći način:

$$\begin{aligned} &\text{minimizirati } \varphi(x) \\ &x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Teorema 4.24. *Neka su tačke a_i za $i = 1, \dots, m$ nekolinearne. Tada funkcija φ iz (4.12) jeste strogo konveksna, pa Ferma-Toričelijev problem (4.13) ima jedinstveno rešenje.*

Dokaz. Kako znamo da je svaka funkcija $\varphi_i(x) := \|x - a_i\|$ za $i = 1, \dots, m$ konveksna, onda je i njihova suma $\varphi = \sum_{i=1}^m \varphi_i$ konveksna. Tada za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in (0,1)$ imamo da važi

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y). \tag{4.14}$$

Pokazujemo kontrapozicijom da važi tvrđenje, to jest pretpostavimo da funkcija φ nije strogo konveksna. Tada možemo da pronađemo $x^*, y^* \in \mathbb{R}^n$ takve da $x^* \neq y^*$ i $\lambda \in (0,1)$, pri čemu će važiti jednakost (4.14). Tada imamo da važi

$$\varphi_i(\lambda x^* + (1-\lambda)y^*) = \lambda\varphi_i(x^*) + (1-\lambda)\varphi_i(y^*), \text{ za sve } i = 1, \dots, m,$$

pa onda sledi

$$\|\lambda(x^* - a_i) + (1-\lambda)(y^* - a_i)\| = \|\lambda(x^* - a_i)\| + \|(1-\lambda)(y^* - a_i)\|,$$

za sve $i = 1, \dots, m$. Ako je $x^* \neq a_i$ i $y^* \neq a_i$, onda postoji $t_i > 0$ takvo da $t_i\lambda(x^* - a_i) = (1-\lambda)(y^* - a_i)$, pa onda

$$x^* - a_i = \gamma_i(y^* - a_i) \text{ za } \gamma_i := \frac{1-\lambda}{t_i\lambda}.$$

Kako $x^* \neq y^*$, imamo da $\gamma_i \neq 1$. Dakle

$$a_i = \frac{1}{1-\gamma_i}x^* - \frac{\gamma_i}{1-\gamma_i}y^* \in \mathcal{L}(x^*, y^*),$$

gde $\mathcal{L}(x^*, y^*)$ označava liniju koja spaja x^* i y^*. Oba slučaja $x^* = a_i$ i $y^* = a_i$ daju nam da $a_i \in \mathcal{L}(x^*, y^*)$. Dakle, $a_i \in \mathcal{L}(x^*, y^*)$ za sve $i = 1, \dots, m$, ali to ne može biti tačno jer su tačke a_i za sve $i = 1, \dots, m$ nekolinearne. Tvrđenje je time dokazano. □

Natavljamo dalje sa rešavanjem problema Ferma-Toričelija (4.13) za tri tačke u prostoru $\mathbb{R}^n$. Pre toga, pokazaćemo dve elementarne leme.

Lema 4.25. *Neka su a_1 i a_2 proizvoljni jedinični vektori u $\mathbb{R}^n$. Tada $-a_1 - a_2 \in Z(0;1)$ u prostoru $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako $\langle a_1, a_2\rangle \leq -\frac{1}{2}$.*

Dokaz. Ako $-a_1 - a_2 \in Z(0;1)$, onda i $a_1 + a_2 \in Z(0;1)$, pa onda imamo da važi

$$\|a_1 + a_2\| \leq 1.$$

Kvadriranjem obe strane dobijamo

$$\|a_1 + a_2\|^2 \leq 1,$$

iz čega sledi

$$\|a_1\|^2 + 2\langle a_1, a_2\rangle + \|a_2\|^2 = 2 + 2\langle a_1, a_2\rangle \leq 1.$$

Odakle sledi da $\langle a_1, a_2\rangle \leq -\frac{1}{2}$. Dokaz obrnutog smera sličan. □

Lema 4.26. *Neka su a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}^n$ takvi da $\|a_1\| = \|a_2\| = \|a_3\| = 1$. Tada $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ ako i samo ako važe sledeće jednakosti*

$$\langle a_1, a_2\rangle = \langle a_2, a_3\rangle = \langle a_3, a_1\rangle = -\frac{1}{2}. \tag{4.15}$$

Dokaz. Iz uslova $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ slede sledeće jednakosti

$$\|a_1\|^2 + \langle a_1, a_2\rangle + \langle a_1, a_3\rangle = 0, \tag{4.16}$$

$$\langle a_2, a_1\rangle + \|a_2\|^2 + \langle a_2, a_3\rangle = 0, \tag{4.17}$$

$$\langle a_3, a_1\rangle + \langle a_3, a_2\rangle + \|a_3\|^2 = 0. \tag{4.18}$$

Oduzimajući (4.18) od (4.16) dobijamo $\langle a_1, a_2\rangle = \langle a_2, a_3\rangle$. Slično $\langle a_2, a_3\rangle = \langle a_3, a_1\rangle$. Zamena ovih jednakosti u (4.16), (4.17) i (4.18) nam daje da važi (4.15).

Obrnuto, pretpostavimo da važi (4.15), onda imamo

$$\|a_1 + a_2 + a_3\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \|a_i\|^2 + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{3} \langle a_i, a_j\rangle = 0,$$

što nam daje jednakost $\|a_1 + a_2 + a_3\| = 0$. Time je dokaz završen. □

Dalje ćemo se baviti subdiferencijacijom konveksnih funkcija kako bi rešili Ferma-Toričelijev problem (4.13) za tri tačke u prostoru $\mathbb{R}^n$. Neka su data dva ne-nula vektora $u, v \in \mathbb{R}^n$, tada možemo da definišemo

$$\cos(u,v) := \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

i kada je $x^* \neq a_i$ posmatramo vektore date sa

$$v_i = \frac{x^* - a_i}{\|x^* - a_i\|}, \text{ za } i = 1,2,3.$$

Sada možemo primetiti da Ferma-Toričelijev problem (4.13) za tri tačke uvek ima jedinstveno rešenje, čak i ako su date tačke kolinearne.

Nastavljajući dalje, videćemo kako se u potpunosti opisuju optimalna rešenja Ferma-Toričelijevog problema za tri tačke u dva različita slučaja, što će predstavljati ključnu teoremu u ovom delu. Najpre, dokažimo teoremu koja nam daje potreban i dovoljan uslov za postojanje lokalnog, odnosno globalnog, minimuma konveksne funkcije pomoću subdiferencijala.

Teorema 4.27. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija i neka je $x^* \in D_f$. Tada funkcija f dostiže lokalni, odnosno globalni, minimum u tački x^* ako i samo ako $0 \in \partial f(x^*)$.*

Dokaz. Neka funkcija f dostiže globalni minimum u tački x^*, onda znamo da za sve $x \in \mathbb{R}^n$ važi

$$f(x^*) \leq f(x).$$

Ako datu nejednakost zapišemo na sledeći način

$$0 = \langle 0, x - x^*\rangle \leq f(x^*) - f(x),$$

za sve $x \in \mathbb{R}^n$, onda iz definicje subdiferencijala možemo da primetimo da je data nejednakost ekvivalentna sa $0 \in \partial f(x^*)$, čime je tvrđenje dokazano. □

Teorema 4.28. *Posmatramo Ferma-Toričelijev problem (4.13) za tri tačke $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^n$. Tada važe naredne tvrdnje:*

1. *Ako $x^* \notin \{a_1, a_2, a_3\}$, onda je x^* optimalno rešenje problema ako i samo ako važi*

$$\cos(v_1, v_2) = \cos(v_2, v_3) = \cos(v_3, v_1) = -\frac{1}{2}.$$

2. *Ako $x^* \in \{a_1, a_2, a_3\}$, recimo $x^* = a_1$, onda je x^* optimalno rešenje problema ako i samo ako važi*

$$\cos(v_2, v_3) \leq -\frac{1}{2}.$$

Dokaz. Primetimo da je u prvom slučaju funkcija (4.12) diferencijabilna u tački x^*, tada tačka x^* jeste optimalno rešenje problema (4.13) ako i samo ako važi

$$\nabla\varphi(x^*) = v_1 + v_2 + v_3 = 0.$$

Dalje, na osnovu Leme 4.26 ovo važi ako i samo ako

$$\langle v_i, v_j\rangle = \cos(v_i, v_j) = -\frac{1}{2}, \text{ za svako } i, j \in \{1, 2, 3\},\ i \neq j.$$

Da bi pokazali da tvrđenje važi i u drugom slučaju, koristimo Teoreme 3.3 i 4.27 koje nam govore da $x^* = a_1$ jeste rešenje Ferma-Toričelijevog problema (4.13) ako i samo ako važi

$$0 \in \partial\varphi(a_1) = v_2 + v_3 + Z(0; 1).$$

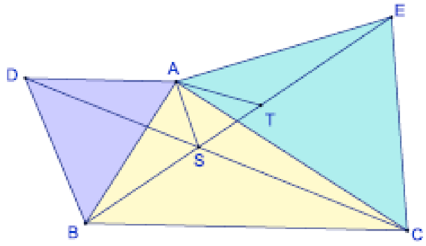
Kako su v_2 i v_3 jedinični vektori, iz Leme 4.25 imamo da važi

$$\langle v_2, v_3\rangle = \cos(v_2, v_3) \leq -\frac{1}{2},$$

čime je teorema dokazana. □

Naredni primer daje geometrijsku ilustraciju konstrukcije rešenja za Ferma-Toričelijev problem (4.13) u ravni.

Primer 4.29. Tražimo rešenje Ferma-Toričelijevog problema (4.13), to jest tražimo minimum funkcije $\varphi(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}^n$. Neka su date tri tačke A, B i C iz $\mathbb{R}^2$, koje su prikazane na Slici 4.2. Ako je jedan od uglova trougla ABC veći ili jednak od $120°$, onda je odgovarajući vrh ustvari minimum $\varphi(x)$ na osnovu drugog slučaja iz Teoreme 4.28. Dalje, pretpostavimo da nijedan od uglova trougla ABC nije veći ili jednak od $120°$. Konstruišimo dva jednakostranična trougla ABD i ACE i označimo sa S tačku koja predstavlja presek DC i BE, kao što je prikazano na slici. Četvorouglovi $ADBC$ i $ABCE$ su konveksni, pa onda tačka S leži unutar trougla ABC. Jasno je da su trouglovi DAC i BAE podudarni. Sada posmatrajmo rotaciju oko A za $60°$, ona preslikava trougao DAC u trougao BAE i duž CD na duž BE, pa onda dobijamo da je $\angle DSB = 60°$. Neka je tačka T slika tačke S pri rotaciji, tada $T \in BE$ i važi $\angle AST = \angle ASE = 60°$, iz toga sledi da je $\angle DSA = 60°$, pa zatim sledi da je $\angle BSA = 120°$. Sada možemo zaključiti da je $\angle ASC = 120°$ i $\angle BSC = 120°$, onda na osnovu prvog slučaja iz Teoreme 4.28 sledi da je tačka S rešenje posmatranog problema.



Slika 4.2. Konstrukcija Toričelijeve tačke.

4.5.2 Vajsfeldov algoritam

U ovom delu ćemo predstaviti *Vajsfeldov algoritam* za numeričko rešavanje Ferma-Toričelijevog problema (4.13) u opštem slučaju za m nekolinearnih tačaka koje pripadaju $\mathbb{R}^n$.

Prvo, primetimo da se gradijent funkcije iz (4.12) računa kao

$$\nabla\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{x - a_i}{\|x - a_i\|}, \text{ za } x \notin \{a_1, \dots, a_m\}.$$

Rešavajući jednačinu $\nabla\varphi(x) = 0$, dobijamo

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{\|x - a_i\|}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\|x - a_i\|}} =: f(x), \tag{4.19}$$

gde funkciju f definišemo na celom prostoru $\mathbb{R}^n$ sa $f(x) := x$, za sve $x \in \{a_1, \dots, a_m\}$.

Vajsfeldov algoritam se sastoji u tome da proizvoljno biramo početnu tačku $x_1 \in \mathbb{R}^n$, zatim pomoću funkcije f iz (4.19) definišemo ostale tačke rekurentno

$$x_{k+1} := f(x_k), \text{za sve } k \in \mathbb{N}. \tag{4.20}$$

U narednim redovima dajemo nekoliko teorema koje su nam važne jer ćemo ih koristiti u dokazu ključne teoreme na samom kraju ovog poglavlja, to jest teoreme koja nam govori o konvergenciji niza $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ka jedinstvenom rešenju Ferma-Toričelijevog problema (4.13).

Prva u nizu potrebnih teorema za nastavak nam obezbeđuje smanjenje vrednosti funkcije φ nakon svake iteracije.

Teorema 4.30. *Ako je $f(x) \neq x$, onda važi $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$.*

Dokaz. Pretpostavka $f(x) \neq x$ nam govori da $x \notin \{a_1, \ldots, a_m\}$. Primetimo još da tačka $f(x)$ jeste jedinstvini minimum strogo konveksne funkcije

$$g(z) := \sum_{i=1}^{m} \frac{\|z - a_i\|^2}{\|x - a_i\|}$$

pri čemu je ispunjeno $g(f(x)) < g(x) = \varphi(x)$, kada je $f(x) \neq x$. Štaviše, sada imamo

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\|f(x) - a_i\|^2}{\|x - a_i\|} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{(\|x - a_i\| + \|f(x) - a_i\| - \|x - a_i\|)^2}{\|x - a_i\|} \\ &= \varphi(x) + 2(\varphi(f(x)) - \varphi(x)) + \sum_{i=1}^{m} \frac{(\|f(x) - a_i\| - \|x - a_i\|)^2}{\|x - a_i\|}, \end{aligned}$$

odakle direktno sledi

$$2\varphi(f(x)) + \sum_{i=1}^{m} \frac{(\|f(x) - a_i\| - \|x - a_i\|)^2}{\|x - a_i\|} < 2\varphi(x),$$

čime je dokaz teoreme završen. □

Sledeće dve teoreme nam govore o ponašanju Vajsfeldovog algoritma u blizini rešenja Ferma-Toričelijevog problema. Dokaze ovih teorema čitalac može pronaći u [9]. Prvo predstavljamo potreban i dovoljan uslov za postojanje optimalnog rešenja Ferma-Toričelijevog problema (4.13).

Teorema 4.31. *Tačka a_j je optimalno rešenje Ferma-Toričelijevog problema (4.13) ako i samo ako važi $\|R_j\| \leq 1$, gde je*

$$R_j := \sum_{i=1, i\neq j}^{m} \frac{a_i - a_j}{\|a_i - a_j\|}, \text{ za } j = 1, \ldots, m.$$

Naredni rezultat, koji je dao Harold Kun, vezan je za pretpostavke koje će nam garantovati konvergenciju Vajsfeldovog algoritma ka rešenju Ferma-Toričelijevog problema (4.13). Pre nego što pređemo na sam rezultat, uvedimo oznake:

$$f^0(x) := x, \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$f^s(x) := f(f^{s-1}(x)), \text{ za sve } s \in \mathbb{N}.$$

Teorema 4.32. *Neka tačka a_j nije optimalno rešenje Ferma-Toričelijevog problema (4.13). Tada postoji $\delta > 0$ takvo da iz uslova $0 < \|x - a_j\| \leq \delta$ sledi da postoji $s \in \mathbb{N}$ takvo da važi*

$$\|f^s(x) - a_j\| > \delta \text{ i } \|f^{s-1}(x) - a_j\| \leq \delta. \tag{4.21}$$

Konačno, predstavljamo ključni rezultat ovog poglavlja koji nam govori o konvergenciji Vajsfeldovog algoritma.

Teorema 4.33. *Neka je $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz generisan Vajsfeldovim algoritmom (4.20) i neka $x_k \notin \{a_1, \ldots, a_m\}$ za $k \in \mathbb{N}$. Tada niz $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira ka jedinstvenom rešenju x^* Ferma-Toričelijevog problema (4.13).*

Dokaz. Ako je $x_k = x_{k+1}$ za neko $k = k_0$, onda je $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konstantan niz za $k \geq k_0$ i onda konvergira ka x_{k_0}. Kako $f(x_{k_0}) = x_{k_0}$ i $x_{k_0} \notin \{a_1, \ldots, a_m\}$, onda x_{k_0} jeste rešenje problema Ferma-Toričelija (4.13).

Pretpostavimo sada da je $x_k \neq x_{k+1}$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Na osnovu Teoreme 4.30 tada sledi da je niz $\{\varphi(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ nenegativnih brojeva opadajući, pa samim tim i konvergentan. Odavde dobijamo da važi

$$\lim_{k\to\infty} (\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})) = 0. \tag{4.22}$$

Po samoj konstrukciji niza $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, imamo da svako x_k pripada kompaktnom skupu $co\{a_1, \ldots, a_m\}$. Dalje, možemo da izaberemo podniz $\{x_{k_\nu}\}$ niza $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ koji konvergira ka nekoj proizvoljnoj tački z^* kad $\nu \to \infty$. Sada želimo da pokažemo da važi $z^* = x^*$, to jest da je z^* jedinstveno rešenje Ferma-Toričelijevog problema (4.13). Zaista, iz (4.22) sledi

$$\lim_{\nu\to\infty} (\varphi(x_{k_\nu}) - \varphi(f(x_{k_\nu}))) = 0,$$

što implicira da važi $\varphi(z^*) = \varphi(f(z^*))$, to jest $f(z^*) = z^*$ i tada z^* jeste rešenje problema (4.13) ako $z^* \notin \{a_1, \ldots, a_m\}$. Ostaje još da ispitamo slučaj kada $z^* \in \{a_1, \ldots, a_m\}$. Neka bez umanjena opštosti važi $z^* = a_1$. Pretpostavimo suprotno, to jest da važi $z^* = a_1 \neq x^*$ i onda uzmimo neko $\delta > 0$ dovoljno malo da važi (4.21) za neko $s \in \mathbb{N}$ i pri tome neka $Z(a_1; \delta)$ ne sadrži x^* i a_i, $i = 2, \ldots, m$. Kako $x_{k_\nu} \to z^* = a_1$, možemo pretpostaviti bez umanjenja opštosti da je ovaj niz u potpunosti sadržan u $Z(a_1; \delta)$. Za $x = x_{k_1}$ izaberimo l_1 takvo da

$$x_{l_1} \in Z(a_1; \delta) \text{ i } f(x_{l_1}) \notin Z(a_1; \delta).$$

Sada birajući $k_\nu > l_1$ i primenjujući Teoremu 4.32 dobijamo $l_2 > l_1$ takvo da

$$x_{l_2} \in Z(a_1; \delta) \text{ i } f(x_{l_2}) \notin Z(a_1; \delta).$$

Ponavljajući ovaj postupak, dobijamo podniz $\{x_{l_\nu}\}$ takav da važi

$$x_{l_\nu} \in Z(a_1;\delta) \text{ i } f(x_{l_\nu}) \notin Z(a_1;\delta),$$

za koji možemo pretpostaviti da konvergira ka q^* zadovoljavajući $f(q^*) = q^*$. Sada razlikujemo dva slučaja:

1. Ako $q^* \notin \{a_1, \ldots, a_m\}$, onda na osnovu prethodnog tumačenja, predstavlja rešenje problema (4.13), što je kontradikcija, jer rešenje $x^* \notin Z(a_1;\delta)$.

2. Ako $q^* \in \{a_1, \ldots, a_m\}$, onda mora biti a_1 jer $a_i \notin Z(a_1;\delta)$, $i = 2, \ldots, m$. Dakle, imamo

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\|f(x_{l_\nu}) - a_1\|}{\|x_{l_\nu} - a_1\|} = \infty,$$

   što je u suprotnosti sa pretpostavkama Teoreme (4.32).

□

4.5.3 Uopštenje problema pomoću funkcije minimalnog vremena

Poslednje poglavlje ovog rada biće posvećeno uopštenju Ferma-Toričelijevog problema (4.13) i rešavanju Ferma-Toričelijevog problema definisanog preko funkcije minimalnog vremena za konačno mnogo zatvorenih i konveksnih ciljnih podskupova od $\mathbb{R}^n$ i skupom ograničenja sa istom strukturom. Čitalac se može više upoznati sa različitim uopštenjima Ferma-Toričelijevog problema u dodatnoj literaturi [10].

Neka su ciljni skupovi X_i, $i = 1, \ldots, m$ i skup ograničenja X_0 neprazni, zatvoreni i konveksni podskupovi od $\mathbb{R}^n$. Posmatramo funkciju minimalnog vremena $\mathcal{T}_F(x; X_i) = \mathcal{T}^F_{X_i}(x)$ iz Definicije (4.2) za X_i, $i = 1, \ldots, m$ sa konstantnim kretanjem duž zatvorenog, konveksnog i ograničenog podskupa F od $\mathbb{R}^n$, za koji važi $0 \in F^\circ$. Tada *uopšteni Ferma-Toričelijev problem* formulišemo na sledeći način:

$$\text{minimizirati } \mathcal{H}(x) := \sum_{i=1}^{m} \mathcal{T}_F(x; X_i) \qquad (4.23)$$
$$x \in X_0$$

Cilj ovog poglavlja jeste da ustanovimo postojanje i jedinstvenost uopštenog Ferma-Toričelijevog problema (4.23). Dokaz ovog rezultata će biti dat kroz nekoliko važnih tvrđenja u nastavku. Počinjemo sa dokazivanjem dva svojstva funkcionala Minkovskog datog u Definiciji 4.3.

Teorema 4.34. *Neka je F zatvoren, ograničen i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$ takav da $0 \in F^\circ$. Tada $\rho_F(x) = 1$ ako i samo ako $x \in \partial F$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $\rho_F(x) = 1$, onda postoji niz realnih brojeva $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ koji konvergira ka $t = 1$, pri čemu važi $x \in t_k F$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Kako je F zatvoren, onda $x \in F$. Ostaje još da pokažemo da $x \notin F^\circ$. Pretpostavimo suprotno, to jest da $x \in F^\circ$ i izaberimo proizvoljno $t > 0$ dovoljno malo da važi $x+tx \in F$. Tada $x \in (1+t)^{-1}F$, što nam govori da $\rho_F(x) \leq (1+t)^{-1} < 1$, a to je kontradikcija sa pretpostavkom.

Neka je sada $x \in \partial F$. Kako je F zatvoren, imamo da $x \in F$ i samim tim važi $\rho_F(x) \leq 1$. Ostaje da pokažemo da je ispunjeno $\rho_F(x) = 1$, pa pretpostavimo suprotno, to jest da važi $\gamma := \rho_F(x) < 1$. Tada postoji niz realnih brojeva $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ koji konvergira ka γ, pri čemu važi $x \in t_k F$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Primetimo da sada važi $x \in \gamma F = \gamma F + (1-\gamma)0 \subset F$. Dalje, na osnovu Teoreme 4.18, funkcional Minkovskog ρ_F je neprekidan, pa je skup $\{u \in \mathbb{R}^n \mid \rho_F(u) < 1\}$ otvoren podskup od F koji sadrži x. Dakle, $x \in F^\circ$, čime je dokaz obrnute inkluzije završen. $\square$

Teorema 4.35. *Neka je F zatvoren, ograničen i strogo konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$, za koji važi $0 \in F^\circ$. Tada za $x, y \neq 0$ važi*

$$\rho_F(x+y) = \rho_F(x) + \rho_F(y) \tag{4.24}$$

ako i samo ako $x = \lambda y$, za neko $\lambda > 0$.

Dokaz. Kako je F ograničen skup, možemo primetiti da važi $\rho_F(x), \rho_F(y) \geq 0$. Sada pretpostavimo da važi uslov linearnosti (4.24), onda je ispunjeno

$$\rho_F\left(\frac{x+y}{\rho_F(x)+\rho_F(y)}\right) = 1,$$

iz čega sledi

$$\rho_F\left(\frac{x}{\rho_F(x)} \cdot \frac{\rho_F(x)}{\rho_F(x)+\rho_F(y)} + \frac{y}{\rho_F(y)} \cdot \frac{\rho_F(y)}{\rho_F(x)+\rho_F(y)}\right) = 1.$$

Primetimo onda da važi

$$\frac{x}{\rho_F(x)} \cdot \frac{\rho_F(x)}{\rho_F(x)+\rho_F(y)} + \frac{y}{\rho_F(y)} \cdot \frac{\rho_F(y)}{\rho_F(x)+\rho_F(y)} \in \partial F.$$

Kako imamo da je ispunjeno

$$\frac{x}{\rho_F(x)}, \frac{y}{\rho_F(y)} \in F \text{ i } \frac{\rho_F(x)}{\rho_F(x)+\rho_F(y)} \in (0,1),$$

onda iz konveksnosti skupa F sledi

$$\frac{x}{\rho_F(x)} = \frac{y}{\rho_F(y)},$$

odnosno važi

$$x = \lambda y, \text{ za } \lambda = \frac{\rho_F(x)}{\rho_F(y)}.$$

Dokaz obrnute inkluzije očigledan. $\square$

U narednim redovima navodimo posledicu vezanu za projekciju tačke x na ciljni skup X duž F, datu u Definiciji 3.6. Nakon toga, prelazimo na dokaz važne teoreme koja će za rezultat dati da je funkcija $\mathcal{H}(x)$ iz problema (4.23) strogo konveksna na skupu ograničenja X_0.

Teorema 4.36. *Neka je F zatvoren, ograničen i strogo konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$, za koji važi $0 \in F^\circ$ i neka je X neprazan, zatvoren i konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$. Tada za svako $x \in \mathbb{R}^n$ skup $P_X^F(x)$ sadrži samo jedan elemenat.*

Dokaz. Dovoljno je posmatrati samo slučaj kada $x \notin X$. Jasno je da $P_X^F(x) \neq \emptyset$. Sada pretpostavimo suprotno, to jest da postoje $a, b \in P_X^F(x)$, takvi da $a \neq b$. Tada imamo da važi

$$\mathcal{T}_F(x; X) = \rho_F(a - x) = \rho_F(b - x) = r > 0,$$

što implicira da važi

$$\frac{a-x}{r}, \frac{b-x}{r} \in \partial F.$$

Kako je F strogo konveksan skup, imamo da

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a-x}{r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b-x}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{a+b}{2} - x\right) \in F^\circ,$$

iz čega dobijamo da važi

$$\rho_F(c - x) < r = \mathcal{T}_F(x; X), \text{ gde je } c := \frac{a+b}{2} \in X,$$

što je kontradikcija, pa je time dokaz teoreme završen. $\square$

Teorema 4.37. *Neka su skupovi X_i, $i = 1, \dots, m$ strogo konveksni. Tada, ako za neko $x, y \in X_0$, $x \neq y$ postoji $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ takvo da važi*

$$\mathcal{L}(x, y) \cap X_{i_0} = \emptyset,$$

za liniju $\mathcal{L}(x, y)$ koja povezuje x i y, onda je funkcija

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{T}_F(x; X_i),$$

definisana u problemu (4.23), strogo konveksna na skupu ograničenja X_{i_0}.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da postoje $x, y \in X_0$, $x \neq y$ i $t \in (0,1)$ takvi da važi

$$\mathcal{H}(tx + (1-t)y) = t\mathcal{H}(x) + (1-t)\mathcal{H}(y).$$

Dalje, kako je svaka od funkcija $\mathcal{T}_F(x; X_i)$ za $i = 1, \ldots, m$, konveksna funkcija, imamo da za $i = 1, \ldots, m$ važi

$$\mathcal{T}_F(tx + (1-t)y; X_i) = t\mathcal{T}_F(x; X_i) + (1-t)\mathcal{T}_F(y; X_i). \tag{4.25}$$

Pretpostavimo sada da $\mathcal{L}(x, y) \cap X_{i_0} = \emptyset$ za neko $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ i definišimo

$$u := P^F_{X_{i_0}}(x) \text{ i } v := P^F_{X_{i_0}}(y).$$

Tada na osnovu (4.25), Teoreme 4.19 i konveksnosti funkcionala Minkovskog, imamo da važi

$$\begin{aligned}
t\rho_F(u - x) + (1-t)\rho_F(v - y) &= t\mathcal{T}_F(x; X_{i_0}) + (1-t)\mathcal{T}_F(y; X_{i_0}) \\
&= \mathcal{T}_F(tx + (1-t)y; X_{i_0}) \\
&\leq \rho_F(tu + (1-t)v - (tx + (1-t)y)) \\
&\leq t\rho_F(u - x) + (1-t)\rho_F(v - y),
\end{aligned}$$

što nam daje da važi $tu + (1-t)v = P^F_{X_{i_0}}(tx + (1-t)y)$. Tada mora važiti $u = v$, jer bi u suprotnom imali da $tu + (1-t)v \in X^{\circ}_{i_0}$, što je kontradikcija. Dakle, imamo $u = v = P^F_{X_{i_0}}(tx + (1-t)y)$, pa ponovo primenjujući (4.25) dobijamo

$$\rho_F(u - (tx + (1-t)y)) = \rho_F(t(u - x)) + \rho_F((1-t)(u - y)),$$

pa onda imamo $u - x, u - y \neq 0$, jer znamo da $x, y \notin X_{i_0}$. Na osnovu Teoreme 4.24, možemo pronaći $\lambda > 0$ takvo da je ispunjeno $t(u - x) = \lambda(1-t)(u - y)$, što daje

$$u - x = \frac{\lambda(1-t)}{t} \cdot (u - y), \text{ za } \frac{\lambda(1-t)}{t} \neq 1.$$

Ovim je dokazana inkluzija

$$u = \left(\frac{1}{1 - \dfrac{\lambda(1-t)}{t}} \right) \cdot x - \left(\frac{\dfrac{\lambda(1-t)}{t}}{1 - \dfrac{\lambda(1-t)}{t}} \right) \cdot y \in \mathcal{L}(x, y),$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom, pa je time dokaz teoreme završen. □

Konačno, stižemo do unapred zadatog cilja ovog poglavlja i dajemo ključan rezultat vezan za rešenje uopštenog Ferma-Toričelijevog problema (4.23). Rezultat koji navodimo sledi direktno na osnovu prethodno dokazanih teorema.

Teorema 4.38. *Neka su skupovi X_i, $i = 1, \ldots, m$ strogo konveksni i neka je bar jedan od njih ograničen. Tada uopšteni Ferma-Toričelijev problem (4.23) ima jedinstveno rešenje.*

Zaključak

" Konveksne funkcije su kao planine, one imaju samo jedan vrh, što znači da su jedinstvene i da se lako mogu pronaći. "

Ovim ilustrujemo značaj konveksnih funkcija u optimizaciji, jer one imaju jedinstven minimum, pa iz tog razloga lako možemo odrediti globalni minimum funkcije, što je i cilj optimizacije.

" Subdiferencijal je mapa koja nam pomaže da pronađemo put do minimuma planina koje nisu diferencijabilne. "

Ovim ilustrujemo značaj subdiferencijala u optimizaciji, jer on pomaže u pronalaženju minimuma funkcija koje nisu diferencijabilne u svim tačkama.

Cilj ovog rada je bio da nakon detaljnog definisanja ovih značajnih pojmova u optimizaciji, dođemo do centralnog dela posvećenog posledicama svojstva konveksnosti. Kao prva posledica predstavljene su teoreme Radona, Karateodorija i Helija, koje su značajne jer ističu različite karakteristike konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$. Sledeća posledica konveksnosti kojom smo se bavili jeste pojam horizontalnog konusa, gde smo videli kako predstavljamo ograničenost skupa u terminima njegovog horizontalnog konusa. Nastavljajući na treću posledicu, prešli smo na funkciju minimalnog vremena i njenu vezu sa funkcionalom Minkovskog, a zatim se upoznali i sa subgradijentom funkcije minimalnog vremena. Nakon toga, izveli smo potrebne i dovoljne uslove za postojanje optimalnih rešenja problema konveksne optimizacije, što je četvrta posledica konveksnosti. Na samom kraju, bavili smo se Ferma-Toričelijevim problemom i pronalaženjem njegovog optimalnog rešenja, kao petom posledicom konveksnosti. Nakon formulacije Ferma-Toričelijevog problema za tri tačke, geometrijske interpretacije ovog problema i prikazivanja Vajsfeldovog algoritma za numeričko rešavanje, prešli smo i završili ovaj rad sa uopštenjem Ferma-Toričelijevog problema, gde smo napravili vezu ovog problema sa funkcijom minimalnog vremena i funkcionalom Minkovskog.

Bibliografija

[1] D. P. Bertsekas, A. Nedić, A. E. Ozdaglar, *Convex Analysis and Optimization*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2003.

[2] J. M. Borwein, A. S. Lewis, *Convex Analysis and Nonlinear Optimization*, Springer, Switzerland, 2006.

[3] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004.

[4] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Subgradients*, Lecture Notes, Stanford University, 2008.

[5] Lj. Gajić, *Teorija optimizacije*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1988.

[6] O. Hadžić, S. Pilipović, *Uvod u funkcionalnu analizu*, Univerzitet u Novom Sadu, 1996.

[7] M. Kurilić, *Osnovi opšte topologije*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1998.

[8] D. G. Luenberger, Y. Ye, *Linear and Nonlinear Programming*, Springer, 2008.

[9] B. S. Mordukhovich, N.M Nam, *An easy path to convex analysis and application*, Washington University, St. Louis, 2014.

[10] B. S. Mordukhovich, N. M. Nam, *Applications of variational analysis to a generalized Fermat-Torricelli problem*, Springer, 2010.

[11] T. R. Mukundan, *Generalized Fermat–Torricelli Problem*, Mathematics Magazine, India 2018.

[12] K. Surla, Z. Lozanov-Crvenković, *Operaciona istraživanja*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2002.

[13] N. Teofanov, M. Žigić, *Osnovi optimizacije*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2018.

[14] S. Zlobec, J. Petrić, *Nelinearno programiranje*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.

[15] https://en.wikipedia.org/wiki/Hermann Minkowski

[16] https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/mathematics-biographies/hermann-minkowski

Biografija

Snežana Kuvalja rođena je 27. juna 1997. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu "Đura Jakšić"u Kaću završila je 2012. godine. Nakon završetka osnovne škole upisuje Srednju ekonomsku školu "Svetozar Miletić"u Novom Sadu, smer Ekonomski tehničar, koju završava 2016. godine. Iste godine upisuje osnovne akademske studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike. U četvrtoj godini (školska 2019/20.) studija prebacuje se i nastavlja na integrisanim akademskim studijama, novi smer Master profesor matematike, na istom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene planom i programom i time stekla pravo na odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Snežana Kuvalja
AU

Mentor: dr Milica Žigić
ME

Naslov rada: O posledicama konveksnosti
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2023.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (4/78/16/0/7/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Konveksno programiranje
ND

Ključne reči: konveksni skupovi, konusi, hiperravni, konveksne funkcije, subdiferencijal, funkcija rastojanja tačke od skupa, projekcija tačke na skup, horizontalni konus, funkcija minimalnog vremena, funkcional Minkovskog, problem konveksne optimizacije, Ferma-Toričelijev problem
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom master radu su kroz prve tri glave predstavljeni značajni pojmovi u optimizaciji, kao što su konveksni skupovi, konveksne funkcije i subdiferencijali. Nakon toga, kroz četvrtu glavu predstavljen je centralni deo ovog rada posvećen posledicama svojstva konveksnosti. Kao prve posledice predstavljene su teoreme Radona, Karateodorija i Helija, koje su značajne

jer ističu različite karakteristike konveksnih skupova u $\mathbb{R}^n$. Sledeća posledica konveksnosti jeste pojam horizontalnog konusa, gde je predstavljena ograničenost skupa u terminima njegovog horizontalnog konusa. Nastavljajući na treću posledicu, prelazi se na proučavanje fumkcije minimalnog vremena i njenu vezu sa funkcionalom Minkovskog, a zatim i na upoznavanje sa subgradijentom funkcije minimalnog vremena. Nakon toga, izvode se potrebni i dovoljni uslovi za postojanje optimalnih rešenja problema konveksne optimizacije, što je četvrta posledica konveksnosti. Na samom kraju, reč je o Ferma-Toričelijevom problemu i pronalaženju njegovog optimalnog rešenja, što predstavlja petu posledicu konveksnosti. Nakon formulacije Ferma-Toričelijevog problema za tri tačke, geometrijske interpretacije ovog problema i prikazivanja Vajsfeldovog algoritma za numeričko rešavanje, ovaj rad se završava sa uopštenjem Ferma-Toričelijevog problema, gde se pravi veza ovog problema sa funkcijom minimalnog vremena i funkcionalom Minkovskog.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 05.06.2023.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Sanja Rapajić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
Mentor: dr Milica Žigić, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
Član: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Snežana Kuvalja
AU

Mentor: Milica Žigić, PhD
MN

Title: On some consequences of convexity
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2023.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (4/78/16/0/7/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Convex programming
SD

Subject/Key words: convex sets, cones, hyperplanes, convex functions, subdifferential, distance function of a point from a set, projection of a point onto a set, horizontal cone, minimum time function, Minkowski functional, convex optimization problem, Fermat-Torricelli problem
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: In this master's thesis, important concepts in optimization, such as convex sets, convex functions and subdifferentials, are presented through the first three chapters. After that, the fourth chapter presents the central part of this paper dedicated to the consequences of convexity. As a first consequence, the theorems of Radon, Helly and Caratheodory are presented, which are significant because they emphasize different characteristics of con-

vex sets in $\mathbb{R}^n$. The next consequnce of convexity is the notion of a horizontal cone, where the boundedness of a set is represented in terms of its horizontal cone. Continuing with the third consequnce, we move on to the study of the minimal time function and its connection with the Minkowski functional, and then to the introduction to the subgradient of the minimal time functions. Next, the necessary and sufficient conditions for the existence of optimal solutions of the convex optimization problem are derived, which is the fourth consequence of convexity. At the very end, it is about the Fermat-Torricelli problem and finding of its optimal solution, as the fifth consequnce of convexity. After the formulation of the Fermat-Torricelli problem for three points, the geometric interpretation of this problem and the presentation of Weiszfeld's algorithm for numerical solution, this paper ends with a generalization of the Fermat-Torricelli problem, where the connection of this problem with the minimum time function and the Minkowski functional is made.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 5th June 2023
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Sanja Rapajić, full professor at Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor: dr Milica Žigić, associate professor at Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Sciences, University of Novi Sad