UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Jelena Dimitrić

Dovoljni uslovi za postojanje ekstrema varijacionog problema i primeri

Master rad

Mentor:
dr Milica Žigić

Novi Sad, 2023.

Sadržaj

Predgovor

"For since the fabric of the universe is most perfect and the work of a most wise Creator, nothing at all takes place in the universe in which some rule of maximum or minimum does not appear."
(Leonhard Euler)

Optimizacija je grana matematike koja se bavi proučavanjem i rešavanjem problema u kojima se traži rešenje koje je "najbolje" pri određenim uslovima. Nalaženje optimalnog rešenja je nešto sa čime se srećemo u svakodnevnom životu. Varijacioni račun je podoblast optimizacije čiji je osnovni zadatak nalaženje funkcije za koju data funkcionela postiže ekstremnu vrednost. Te funkcije su najčešće glatke i prolaze kroz granične tačke. Problemi varijacionog računa nalaze veliku primenu u najrazličitijim oblastima fizike, mašinstva, ekonomije, avioindustrije, aeronautike, brodogradnje, automobilske i vojne industrije gde je zadatak rešiti neki realan problem. Recimo, to su: nalaženje najkraće putanje u cilju smanjenja vremena putovanja, maksimizacija profita određene kompanije kroz minimizaciju njenih troškova ili maksimizaciju efikasnosti proizvodnje,... Zbog navedenih razloga se u ovom radu bavimo uslovima koji će obezbediti egzistenciju rešenja pomenutih varijacionih problema.

Rad se sastoji od pet poglavlja. U prvom poglavlju formulišemo problem brahistohrone i dajemo pregled osnovnih pojmova teorije diferencijalnih jednačina koje koristimo u nastavku rada.

U drugom poglavlju predstavljamo najjednostavniji problem i u nastavku rada se bavimo njegovim rešavanjem. Definišemo funkcionelu u vidu određenog integrala odgovarajućeg oblika. Cilj nam je nalaženje ekstrema te funkcionele, pri čemu su zadovoljeni odgovarajući granični uslovi. S obzirom da u ovom poglavlju proučavamo prvu varijaciju, tražimo uslov koji je ekvivalentan tome da je prva varijacija pomenute funkcionele jednaka nuli. Tako stižemo do Ojler-Lagranžove jednačine čiji su rezultati prilično važni. Iz tog razloga je izvodimo na tri načina. Počinjemo sa Ojlerovim pristupom, a onda nastavljamo sa Lagranžovim pristupom. Razmatramo i način na koji je Di Boa Rejmond modifikovao Lagranžovo izvođenje.

Treće poglavlje je posvećeno analiziranju primera kod kojih su funkcionele specijalnog oblika. Takođe, u ovom poglavlju detaljnije obrađujemo problem brahistohrone koji smo predstavili u prvom poglavlju.

U četvrtom poglavlju se vraćamo na problem nalaženja ekstrema funkcionele kojim smo se bavili u drugom poglavlju, ali sada u svetlu druge varijacije. Izvodimo još neke uslove koji su potrebni ili dovoljni da bi pomenuta funkcionela imala lokalni ekstrem. Počinjemo sa Ležandrovim pristupom ovom problemu i sagledavamo njegove prednosti i nedostatke, a zatim proučavamo i Jakobijev pristup. Takođe, kroz primer problema navigacije ilustrujemo šta se dešava u situacijama u kojima nam nisu zadata oba granična uslova kao što je to bio slučaj u većini problema koji su analizirani u prethodnom delu rada. Na samom kraju poglavlja se bavimo jakim varijacijama. Ukazujemo na probleme sa slabim varijacijama i izvodimo Vajerštrasov uslov koji je još jedan u nizu potrebnih uslova za postojanje ekstrema posmatrane funkcionele.

Peto poglavlje sadrži gradivo koje je cilj ovog rada. Uslovi koji su predstavljeni u prethodnom delu rada nisu dovoljni za jake lokalne ekstreme. Iz tog razloga u ovom poglavlju proučavamo Vajerštrasove dovoljne uslove i Hilbertov dokaz istih. Kako bismo stigli do njih, za početak uvodimo pojam polja ekstremala, a zatim Hilbertov invarijantni integral i Vajerštrasovu E-funkciju. Na kraju poglavlja prikazujemo Karateodorijev metod ekvivalentnih varijacionih problema koji se ponekad naziva i "kraljevski put" do varijacionog računa i predstavlja najbrži i najelegantniji način za izvođenje dovoljnih uslova za probleme varijacionog računa.

Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru dr Milici Žigić na velikoj pomoći prilikom pisanja ovog rada, kao i za preneto znanje tokom studija.

Takođe, zahvaljujem se članovima komisije, dr Sanji Konjik i dr Nenadu Teofanovu.

Na kraju, zahvaljujem se svojoj porodici i prijateljima na podršci.

Novi Sad, jun 2023.

Jelena Dimitrić

Poglavlje 1

Uvod

Varijacioni račun je oblast matematičke analize koja se bavi određivanjem funkcija koje minimiziraju ili maksimiziraju neke druge veličine koje zavise od tih funkcija. Od svog nastanka u XVII veku budi interesovanje kod mnogih matematičara i naučnika. Razlog za to je činjenica da se različiti matematički problemi mogu ispitivati korišćenjem principa varijacionog računa. Neki od tih problema su:

- Problem brahistohrone;
- Problem najmanje udaljenosti;
- Izoperimetrijski problem;
- Fermaov princip;
- Dirihleov problem...

U nastavku ćemo razmotriti problem brahistohrone. Za više detalja o ovom problemu preporučujemo literaturu koja je korišćena za realizaciju narednog odeljka, a to je: [9], [11], [13] i [14]. Takođe, zainteresovanog čitaoca upućujemo i na: [1], [2], [5], [8] i [12]. Slike koje se nalaze u narednom odeljku su preuzete iz [9], dok je slika 1.4 preuzeta sa sajta [15].

1.1 Brahistohrona

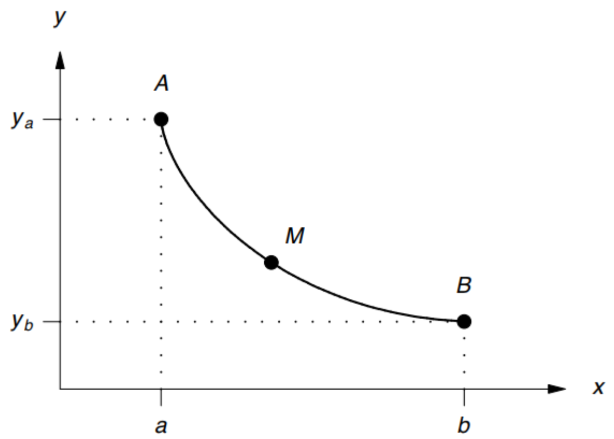
U junu 1696. godine, Johan Bernuli[1] je pozvao najveće matematičare sveta da reše sledeći problem.

[1] Johann Bernoulli (1667-1748) - švajcarski matematičar

Problem brahistohrone:

Date su tačke A i B u vertikalnoj ravni. Odrediti glatku krivu po kojoj će materijalna tačka stići iz tačke A u tačku B za najkraće vreme. Kretanje se odvija pod dejstvom sile teže, bez trenja i početne brzine.

Zamislimo česticu M mase m u vertikalnom gravitacionom polju ubrzanja g koja se kreće duž krive $y = y(x)$ između tačaka $A(a, y_a)$ i $B(b, y_b)$ (videti sliku 1.1). Označimo sa T vreme spuštanja čestice. Pošto se brzina kretanja



Slika 1.1. Putanja materijalne tačke

duž tražene krive opisuje sa

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + y'^2}\frac{dx}{dt},$$

važi

$$T = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{dt}{ds} ds = \int_0^L \frac{1}{v} ds = \int_a^b \frac{1}{v}\sqrt{1 + y'^2} dx,$$

gde je L dužina luka krive.

Ako se naša čestica kreće bez trenja, zakon održanja mehaničke energije garantuje da zbir kinetičke[2] i potencijalne[3] energije čestice ostaje konstantan. Ukoliko naša čestica kreće iz stanja mirovanja, možemo pisati

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_a.$$

[2]Kinetička energija: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.

[3]Potencijalna energija: $E_p = mgy$.

Brzina čestice je onda

$$v = \sqrt{2g(y_a - y)}.$$

Sada želimo da nađemo brahistohronu. Reč *brahistohrona* potiče od grčkih reči $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ - kratak i $\chi\rho o\nu o\varsigma$ - vreme. Dakle, želimo da nađemo krivu

$$y = y(x) \leq y_a$$

koja minimizira integral

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y_a - y}} dx.$$

Nekoliko poznatih matematičara je odgovorilo na Bernulijev izazov. Rešenja su 1697. godine objavili Gotfrid Vilhelm Lajbnic[4], Isak Njutn[5], Johan Bernuli, Jakob Bernuli[6] i Gijom Lopital[7].

Lajbnic je dao geometrijsko rešenje. On je izveo diferencijalnu jednačinu za brahistohronu, ali nije precizirao kako izgleda rezultujuća kriva.

Njutnovo "anonimno" rešenje je objavljeno u naučnom časopisu *Philosophical Transactions*. Njutn je dao tačan odgovor, ali nije ostavio objašnjenje za svoju metodu. Uprkos njegovoj anonimnosti, Johan Bernuli je prepoznao da je to Njutnov rad.

Johan Bernuli je dao dva rešenja. Prvo rešenje se oslanja na analogiju između mehaničke brahistohrone i svetlosti. Bio je oduševljen Fermaovim[8] principom, poznatim i kao princip najmanjeg vremena[9]. Tvrdio je da je brahistohrona kriva koju bi pratio svetlosni zrak na svom putu kroz sredinu čija gustina je obrnuto proporcionalna brzini koju telo dobija prilikom svog pada. On je razbio optičku sredinu na tanke horizontalne slojeve, izabrao odgovarajući indeks prelamanja, iskoristio Snelov[10] zakon prelamanja svetlosti i odredio oblik brahistohrone. Svoje drugo rešenje je opisao mnogo godina kasnije. To drugo rešenje nije privuklo pažnju u to vreme, ali se sada uzima kao prvi dokaz dovoljnosti u varijacionom računu.

[4]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) - nemački matematičar, filozof, pronalazač, pravnik, istoričar i diplomata

[5]Isaac Newton (1643-1727) - engleski fizičar, matematičar i astronom

[6]Jacob Bernoulli (1655-1705) - švajcarski matematičar

[7]Guillaume-François-Antoine Marquis de l'Hôpital (1661-1704) - francuski matematičar

[8]Pierre de Fermat (1601-1655) - francuski matematičar i pravnik

[9]Fermaov princip kaže da se svetlosni zrak prostire tako da mu je optička dužina puta najmanja moguća.

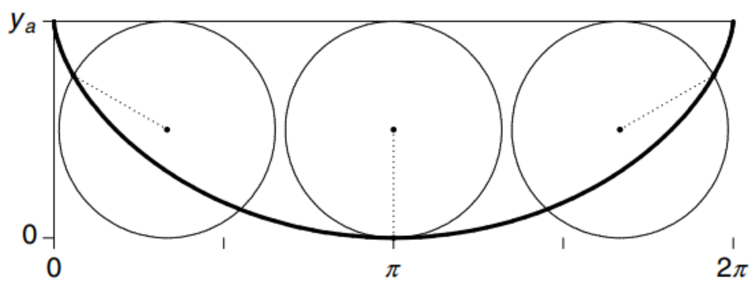
[10]Willebrord van Royen Snell (1580-1626) - holandski matematičar i astronom

Rezultat njegovog starijeg brata, Jakoba Bernulija, nije bio tako "elegantan", ali je sadržao ključnu ideju variranja samo jedne vrednosti krive rešenja tokom nekog vremena. Ova ideja je obezbedila osnovu za dalji rad u varijacionom računu.

Videćemo da je brahistohrona obrnuta cikloida.

$$x(\phi) = a + R(\phi - \sin\phi), \ \ y(\phi) = y_a - R(1 - \cos\phi),$$

gde je parametar R jedinstveno određen pomoću početne i krajnje tačke. Ova cikloida je kriva u ravni koja opisuje kretanje tačke koja je fiksirana na kružnici poluprečnika R dok se ona kreće duž prave $y = y_a$ (videti sliku 1.2). Kristijan Hajgens[11] je pokazao da je obrnuta cikloida tautohrona. Reč



Slika 1.2. Cikloida za $R = \frac{1}{2}y_a$ i $a = 0$

tautohrona potiče od grčkih reči $\tau\alpha\upsilon\tau o$ - isti i $\chi\rho o\nu o\varsigma$ - vreme. Vreme za koje se čestica spusti na dno te krive je nezavisno od gornje početne tačke.

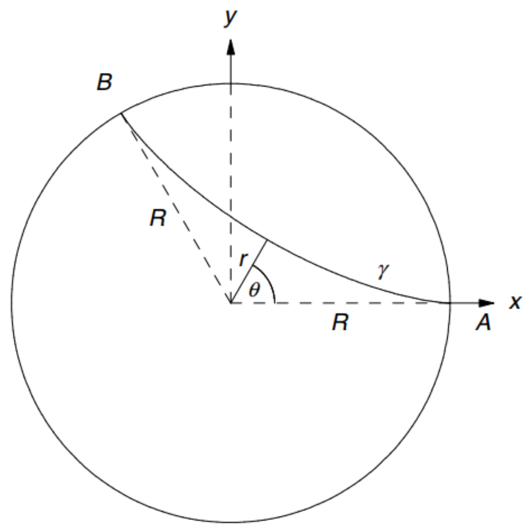
Problem brahistohrone je jedan od mnogih problema gde želimo da odredimo funkciju $y(x)$ koja minimizira ili maksimizira integral

$$J[y(x)] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx.$$

Ojler je prvi smislio sistematičan metod za rešavanje ovakvih problema.

U nastavku ovog poglavlja ćemo razmotriti jedan problem za čije rešenje je potrebno minimizirati ili maksimizirati taj integral. To je drugi problem brahistohrone koji se odnosi na kretanje kroz Zemlju. Dakle, videćemo da on može biti rešen upotrebom varijacionog računa.

[11]Christiaan Huygens (1629-1695) - holandski matematičar, astronom i fizičar



Slika 1.3. Put kroz Zemlju

1.1.1 Brahistohrona kroz Zemlju

U avgustu 1965. godine, američki naučno-popularni časopis *Scientific American* je objavio članak *High speed tube transportation* čiji je autor L. K. Edvard. On je dao predlog za podzemne vozove koji bi se kretali kroz Zemlju, vučeni gravitacijom i potpomognuti pneumatskim pogonom. Prednosti koje je Edvard naveo su sledeće:

1. Veći deo tunela se spušta u duboke stene, gde su troškovi tuneliranja smanjeni, a slučajna pomeranja zemljišta svedena na minimum. Stena je homogenija i manja je verovatnoća dotoka vode.

2. Sa dubinom se smanjuju smetnje vlasnicima imovine na tom prostoru, pa bi troškovi korišćenja bili niži.

3. Dubok tunel ne smeta podzemnim železnicama, temeljima zgrada, bunarima,...

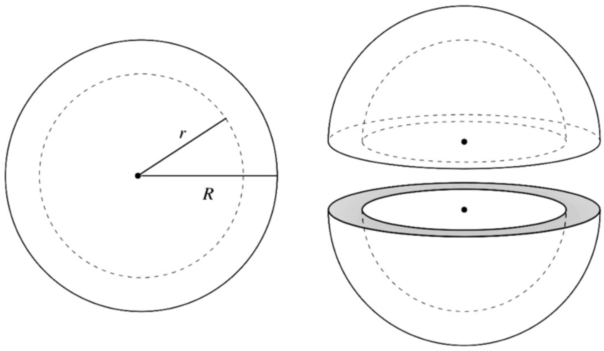
Pneumatski voz je konstruisan u Njujorku, ispod Brodveja, 1870. godine. To je bila prva podzemna železnica u Njujorku.

Razmotrimo sada problem brahistohrone kroz Zemlju. Pretpostavimo da je Zemlja homogena sfera poluprečnika R. Posmatrajmo put kroz Zemlju sa polarnim koordinatama u centru Zemlje (videti sliku 1.3). Zamislimo česticu mase m koja se kreće između dve tačke, $A = (r_a, \theta_a)$ i $B(r_b, \theta_b)$, na ili blizu Zemljine površi. Sada želimo da nađemo ravansku krivu γ koja minimizira vreme putovanja

$$T = \int_0^T dt = \int_\gamma \frac{dt}{ds} ds = \int_\gamma \frac{1}{v} ds = \int_\gamma \frac{1}{v} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

između tačaka A i B, gde je v brzina čestice.

Kada je čestica izvan Zemljinog omotača (sferne školjke), on vrši gravitacionu silu jednaku onoj u središtu Zemlje. Čestice unutar Zemljinog omotača ne osećaju tu silu. Sferna školjka je generalizacija prstena u tri dimenzije. To je oblast lopte između dve koncentrične sfere različitih poluprečnika (videti sliku 1.4). Integracijom preko sfernih školjki različitih poluprečnika, može se



Slika 1.4. Sferna školjka

pokazati da se gravitaciona potencijalna energija unutar Zemlje može napisati kao

$$V(r) = \frac{1}{2} \frac{mg}{R} r^2,$$

gde je g gravitaciono ubrzanje na Zemljinoj površi.

Za česticu koja kreće iz stanja mirovanja sa Zemljine površi, zakon održanja energije omogućava da zaključimo da je

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \frac{mg}{R} r^2 = \frac{1}{2} mgR,$$

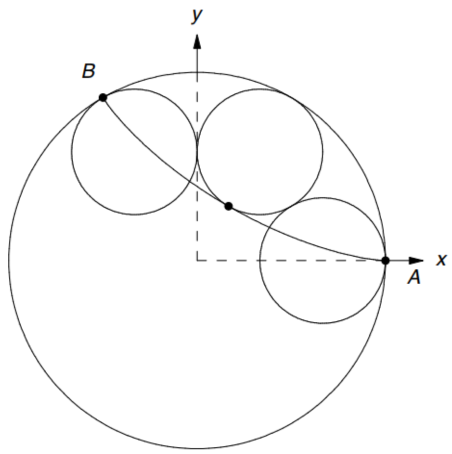
tako da je

$$v = \frac{\sqrt{g(R^2 - r^2)}}{\sqrt{R}}.$$

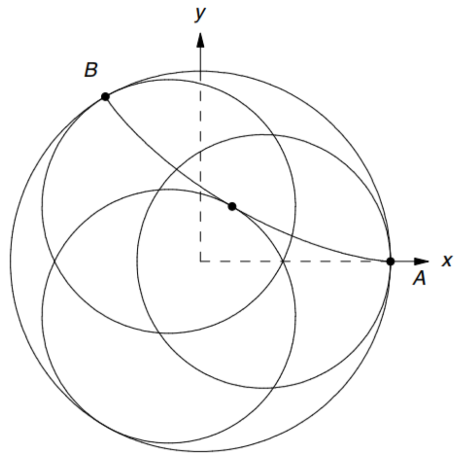
Iz toga sledi da je ukupno vreme putovanja

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta a}^{\theta b} \sqrt{\frac{(\frac{dr}{d\theta})^2 + r^2}{R^2 - r^2}} d\theta.$$

Problem brahistohrone ćemo detaljnije obraditi malo kasnije. Videćemo da je brahistohrona kroz Zemlju zapravo *hipocikloida*, tj. kriva koju iscrtava tačka sa ruba kruga, koji se bez trenja kotrlja po unutrašnjoj strani ruba drugog fiksiranog kruga (videti sliku 1.5). Sa S_{AB} smo označili dužinu luka



(a) Hipocikloida sa unutrašnjim poluprečnikom $(R - \frac{S_{AB}}{\pi})$



(b) Hipocikloida sa unutrašnjim poluprečnikom $\frac{S_{AB}}{\pi}$

Slika 1.5. Hipocikloide

krive na Zemljinoj površi koja spaja tačke A i B.

Najbrži Amtrak voz pređe 400 milja[12] između Bostona i Vašingtona za šest i po sati. Voz podzemne železnice koji se kreće pravolinijski od Bostona do Vašingtona bi putovao 42 minuta ukoliko bi se ta železnica nalazila 5 milja ispod Zemlje. Voz podzemne železnice koji se kreće duž hipocikloide bi bio najbrži. Vreme za koje bi on stigao od jednog do drugog grada bi iznosilo $10,7$ minuta ako bi se ta železnica nalazila 125 milja ispod Zemlje.

Tunel oblika hipocikloide koji bi spojio San Diego i San Francisko bi imao najveću dubinu od oko $260km$ ispod Zemljine površine i bio bi dugačak oko $1100km$. Sa druge strane, tunel koji bi kroz Zemlju pravom linijom povezao ove gradove bi imao maksimalnu dubinu od oko $13km$, a bio bi dugačak oko $805km$. Materijalna tačka bi, krećući se po hipocikloidi, stigla od San Diega do San Franciska za 12 minuta, a prolazak kroz prav tunel bi trajao 42 minuta.

[12] Jedna kopnena milja je $1,609344\ km$.

1.2 Osnovni pojmovi - diferencijalne jednačine

U ovom odeljku navodimo osnovne pojmove teorije diferencijalnih jednačina, koje ćemo koristiti u nastavku rada. Više detalja o pojmovima ovog odeljka se može pronaći u literaturi koja je korišćena u ovom odeljku, a to je [3].

Definicija 1.1. *Jednačina koja sadrži izvode jedne ili više nepoznatih funkcija po jednoj ili više promenljivih se naziva diferencijalna jednačina.*

Definicija 1.2. *Red diferencijalne jednačine je red najvećeg izvoda koji se u njoj pojavljuje.*

U zavisnosti od toga da li nepoznata funkcija zavisi od jedne ili više promenljivih, diferencijalna jednačina može biti:

a) *obična diferencijalna jednačina* - nepoznata funkcija zavisi od *jedne* nezavisne promenljive. Tada se u diferencijalnoj jednačini pojavljuju samo obični izvodi.

b) *parcijalna diferencijalna jednačina* - nepoznata funkcija zavisi od *više* nezavisnih promenljivih. Tada se u diferencijalnoj jednačini pojavljuju parcijalni izvodi.

Napomena 1.1. Običnu diferencijalnu jednačinu ćemo kraće označavati sa ODJ, a parcijalnu diferencijalnu jednačinu sa PDJ, bez obzira na množinu i promenu imenice.

Mi u nastavku navodimo osnovne pojmove teorije običnih diferencijalnih jednačina.

Definicija 1.3. *Jednačina u kojoj se javljaju obični izvodi nepoznate funkcije y nezavisno promenljive x se naziva obična diferencijalna jednačina (u daljem tekstu ODJ shodno napomeni 1.1). Opšti oblik ODJ n-tog reda za funkciju $y = y(x)$ je*

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0, \tag{1.1}$$

dok je njen normalni oblik

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)),$$

gde su F i f poznate funkcije.

Definicija 1.4. *Funkcija $y = \phi(x)$ koja je definisana i n puta diferencijabilna na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ je rešenje (integral) ODJ (1.1),*

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0,$$

na intervalu I ako za svako $x \in I$ važi

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{(n)}(x)) = 0.$$

Definicija 1.5. *Grafik rešenja $y = \phi(x)$, $x \in I$, ODJ (1.1)*

$$\{(x, \phi(x)) : x \in I\}$$

nazivamo integralnom krivom ODJ (1.1).

Definicija 1.6. *ODJ zajedno sa početnim uslovima se naziva početni problem.*

Kada rešavamo ODJ prvog reda,

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

obično dobijamo rešenje koje sadrži proizvoljnu konstantu $c \in \mathbb{R}$ (slično kao kod neodređenog integrala). Rešenje koje sadrži proizvoljnu konstantu c predstavljamo jednačinom

$$G(x, y(x), c) = 0$$

i zovemo ga *(jednoparametarska) familija krivih* (u ravni).

Slično, za ODJ n-tog reda,

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0,$$

dobijamo *n-parametarsku familiju krivih*

$$G(x, y(x), c_1, ..., c_n) = 0.$$

Dakle, jedna ODJ može da ima beskonačno mnogo rešenja i svako rešenje odgovara nekom izboru konstante.

Rešenje ODJ koje ne sadrži proizvoljnu konstantu se naziva *partikularno* rešenje. Dakle, partikularno rešenje dobijamo od n-parametarske familije krivih za konkretan izbor konstanti $c_1, ..., c_n$.

ODJ može imati rešenje koje nije član familije krivih, tj. rešenje koje se ne može dobiti specijalnim izborom konstanti. Takvo rešenje se naziva *singularno* rešenje.

Ukoliko se svako rešenje ODJ,

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0,$$

na intervalu I, dobija iz n-parametarske familije krivih $G(x, y(x), c_1, ..., c_n) = 0$, izborom konstanti $c_1, ..., c_n$, tada kažemo da je ta familija krivih *opšte* rešenje te jednačine. Kod početnog problema konstante određujemo iz početnog uslova.

Definicija 1.7. *ODJ (1.1) je linearna ukoliko je F linearna funkcija po $y(x), y'(x), ..., y^n(x)$, tj. oblika*

$$a_n(x)y^n(x) + a_{n-1}(x)y^{n-1}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x),$$

gde su $a_k(x)$, $k = 0, ..., n$ i $g(x)$ funkcije definisane na nekom intervalu i $a_n(x) \neq 0$ na tom intervalu. Linearna jednačina je homogena ukoliko je $g(x) = 0$ za svako x. U suprotnom je nehomogena, a član $g(x)$ se naziva nehomogen član.

Jednačina koja nije ovog oblika je *nelinearna.* Nelinearne funkcije koje zavise od nepoznate funkcije i/ili njenih izvoda (npr. $\sin y$, $e^{y'}, ...$) ne mogu da se pojave u linearnoj ODJ. Kod nelinearnih ODJ se često dešava da jednačina ima singularna rešenja. Dakle, može se desiti da rešenje postoji lokalno, ali ne i na nekom posmatranom intervalu.

ODJ koje razdvajaju promenljive su oblika $\dfrac{dy}{dx} = g(x)h(y)$. Za $h(y) \neq 0$ zapisujemo $\dfrac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$, odakle integracijom dobijamo rešenje ove ODJ.

Poglavlje 2

Prva varijacija

U ovom poglavlju ćemo predstaviti najjednostavniji problem, a to je nalaženje ekstrema funkcionele (2.1), pri čemu važe odgovarajući granični uslovi. S obzirom da ćemo se u ovom poglavlju baviti prvom varijacijom, tražićemo uslov koji je ekivalentan tome da je prva varijacija pomenute funkcionele jednaka nuli. Tako ćemo stići do Ojler-Lagranžove jednačine čiji su rezultati prilično važni i nju ćemo izvesti na tri načina. Počećemo sa Ojlerovim[1] pristupom i onda nastaviti sa Lagranžovim[2] pristupom. Zatim ćemo razmotriti kako je Di Boa Rejmond modifikovao Lagranžovo izvođenje. Više detalja o narednim temama se može pronaći u literaturi koja je korišćena za realizaciju ovog poglavlja, a to je: [6], [7], [9], [10], [13] i [14]. Slike koje se nalaze u ovom poglavlju su preuzete iz [9]. Zainteresovanog čitaoca upućujemo i na: [1], [2], [4], [5], [8], [11] i [12].

2.1 Najjednostavniji problem

Naš cilj je minimizirati (ili maksimizirati) određeni integral oblika

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx, \tag{2.1}$$

pri čemu su granični uslovi

$$y(a) = y_a, \;\; y(b) = y_b.$$

Pišemo $J[y]$ umesto $J(y)$ da bismo naglasili da se bavimo i funkcionelama, a ne samo funkcijama. Rešavajući određeni integral dobijamo realan broj za

[1] Leonhard Paul Euler (1707-1783) - švajcarski matematičar i fizičar

[2] Joseph-Louis Lagrange (Giuseppe Luigi Lagrangia, 1736-1813) - italijansko-francuski matematičar i astronom

svaku funkciju $y(x)$. Funkcionela je operator koji preslikava funkcije u realne brojeve. Funkcionalna analiza je, prvobitno, proučavala funkcionele. Svrha varijacionog računa je maksimiziranje ili minimiziranje funkcionela.

Podsetimo se sada pojmova neprekidnosti i diferencijabilnosti funkcije jedne realne promenljive.

Definicija 2.1. *Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je neprekidna u tački $x_0 \in X$ ako je $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Definicija 2.2. *Funkcija f je neprekidna na intervalu I ako je neprekidna u svakoj tački tog intervala.*

Definicija 2.3. *Funkcija f je diferencijabilna u tački x_0 ako postoje broj A i funkcija $\alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$, takvi da se priraštaj funkcije $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ može zapisati u obliku*

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x).$$

Linearna funkcija $A \cdot \Delta x$ se naziva diferencijal funkcije f u tački x_0 i označava sa dy.

Teorema 2.1. *Funkcija f je diferencijabilna u tački x_0 ako i samo ako ima (konačan) izvod u tački x_0 i pri tome je $A = f'(x_0)$.*

Definicija 2.4. *Funkcija f je diferencijabilna na intervalu I ako je diferencijabilna u svakoj tački tog intervala.*

U nastavku ćemo se susretati sa funkcionelama koje deluju na sve ili deo nekoliko dobro poznatih prostora funkcija. Prostori funkcija koji se najčešće sreću u varijacionom računu su:

(a) $C[a, b]$, prostor funkcija koje su neprekidne nad intervalom $[a, b]$;

(b) $C^1[a, b]$, prostor funkcija koje su neprekidne i imaju neprekidan prvi izvod nad intervalom $[a, b]$;

(c) $C^2[a, b]$, prostor funkcija koje su neprekidne i imaju neprekidan prvi i drugi izvod nad intervalom $[a, b]$;

(d) $D[a, b]$, prostor funkcija koje su po delovima neprekidne nad intervalom $[a, b]$;

(e) $D^1[a, b]$, prostor funkcija koje su neprekidne i koje imaju po delovima neprekidan prvi izvod na intervalu $[a, b]$.

Po delovima neprekidna funkcija može imati konačan broj prekida nad intervalom $[a, b]$. Desna i leva granična vrednost funkcije postoje u tačkama prekida. Funkcija koja je po delovima neprekidno diferencijabilna je neprekidna, ali može imati konačan broj "špiceva[3]".

Želimo da nađemo ekstrem funkcionele. Ekstrem je reč koju je uveo Di Boa Rejmond[4] 1879. godine i koristimo je kada pričamo i o maksimumu i o minimumu. Termin se zadržao.

2.2 Ojlerov pristup

Ojler je bio prva osoba koja je sistematizovala proučavanje varijacionih problema. U njegovom delu, *Metode za nalaženje krivih linija koje poseduju osobine maksimuma ili minimuma*[5], koje je objavljeno 1744. godine je obrađeno 100 specijalnih problema. Knjiga takođe sadrži opšti metod za rešavanje ovih problema. Nekoliko godina kasnije, nakon što je dobio pismo od Lagranža 1755. godine, Ojler je odustao od svog metoda zbog Lagranžovog elegantnijeg "varijacionog metoda". Nazvao ga je *varijacioni račun* u čast Lagranža.

Ojlerova glavna ideja je bila da prvo krene od varijacionog problema za n-dimenzionalni slučaj i da onda pređe na granični slučaj kada $n \to \infty$.

Podelimo zatvoren interval $[a, b]$ na $n+1$ jednakih podintervala (videti sliku 2.1). Pretpostavimo da su podintervali ograničeni tačkama

$$x_0 = a,\ \ x_1, ..., x_n,\ \ x_{n+1} = b.$$

Svaki podinterval je širine

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n+1}.$$

Umesto glatke funkcije $y(x)$ ćemo posmatrati poligonalnu liniju sa temenima

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}),$$

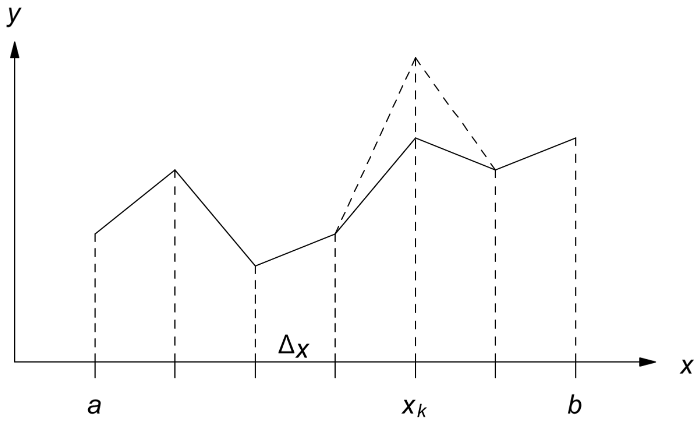
pri čemu je $y_i = y(x_i)$. Sada možemo aproksimirati funkcionelu $J[y]$ sa

$$J(y_1, ..., y_n) \equiv \sum_{i=0}^{n} f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right)\Delta x.$$

[3]Tačke u kojima funkcija ima špic su tačke u kojima funkcija nije diferencijabilna.

[4]Paul David Gustav du Bois-Reymond (1831-1889) - nemački matematičar

[5]Leonhard Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti*, 1744.



Slika 2.1. Poligonalne linije

Primetimo da radimo sa funkcijom n promenljivih jer su tačke $y_0 = y_a$ i $y_{n+1} = y_b$ fiksirane.

Šta postižemo podizanjem ili spuštanjem jedne od slobodnih tačaka y_i? Da bismo odgovorili na ovo pitanje, izaberimo jednu od slobodnih tačaka y_i, y_k, a zatim nađimo parcijalni izvod po promenljivoj y_k. Pošto se y_k pojavljuje u samo dva člana navedene sume (za $i = k$ i za $i = k - 1$), parcijalni izvod je oblika

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial y_k} &= f_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right)\Delta x \qquad (2.2) \\ &+ f_{y'}\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right) \\ &- f_{y'}\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right). \end{aligned}$$

Da bismo našli ekstrem, ovaj parcijalni izvod treba da izjednačimo sa nulom za svako k. Takođe, želimo da odredimo graničnu vrednost kada $n \to \infty$. U ovom slučaju, $\Delta x \to 0$ i desna strana jednakosti (2.2) ide u nulu. Jednačina $0 = 0$ nije od velike pomoći. Da bismo dobili netrivijalan zaključak, podelićemo levu i desnu stranu jednakosti sa Δx.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x}\frac{\partial J}{\partial y_k} &= f_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) \qquad (2.3) \\ &- \frac{1}{\Delta x}\left[f_{y'}\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) - f_{y'}\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right)\right]. \end{aligned}$$

Kada pustimo da $n \to \infty$ i $\Delta x \to 0$ u jednačini (2.3), dobijamo *varijacioni* *izvod*

$$\frac{\delta J}{\delta y} = f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y'). \tag{2.4}$$

Varijacioni izvod igra istu ulogu za funkcionele kao parcijalni izvod za funkcije više promenljivih. Za lokalni minimum, očekujemo da će ovaj izvod biti jednak nuli u toj tački. Tako dobijamo *Oljer-Lagranžovu jednačinu*

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \tag{2.5}$$

Ojler-Lagranžova jednačina je jedini potreban uslov, ali ne i dovoljan.

Primer 2.2. (*Najkraća kriva u ravni*).

Pogledajmo šta Ojler-Lagranžova jednačina kaže o obliku najkraće krive između dve tačke, (a, y_a) i (b, y_b), u ravni. Želimo da minimiziramo dužinu luka funkcionele

$$J[y] = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Podintegralna funkcija,

$$f(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2},$$

ne zavisi od y tako da se Ojler-Lagranžova jedačina svodi na

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0.$$

Integraleći jednom dobijamo

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = const.$$

Lako zaključujemo da je

$$y' = c,$$

pri čemu je c konstanta. Ako bismo integralili još jednom i novu integracionu konstantu označili sa d, dobili bismo da je

$$y = cx + d.$$

Ovo je jednačina prave. Dakle, rešenje ovog problema je duž čiji su krajevi date tačke. Konstante c i d se mogu odrediti iz graničnih uslova. ✓

2.3 Lagranžov pristup

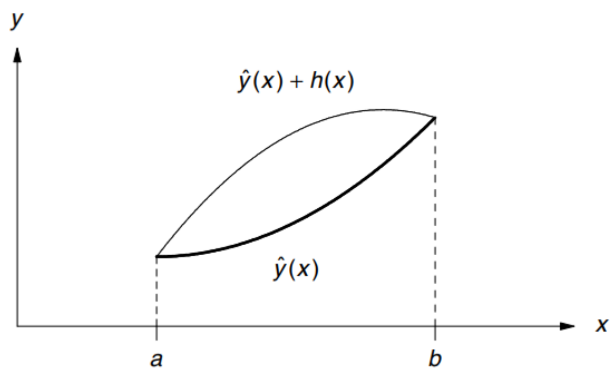
Vratimo se na problem minimiziranja ili maksimiziranja funkcionele

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx,$$

pri čemu su granični uslovi

$$y(a) = y_a, \;\; y(b) = y_b.$$

Ojler je izveo Ojler-Lagranžovu jednačinu variranjem jedne slobodne y-koordinate. Lagranž je shvatio da je mogao izvesti ovu istu jednačinu varirajući istovremeno sve slobodne y-koordinate.



Slika 2.2. Mala varijacija

Pretpostavimo da funkcija $y = \hat{y}(x)$ rešava naš problem (videti sliku 2.2). Uvodimo sada $h(x)$, malo odstupanje (devijaciju), tj. *varijaciju* tako da je

$$y(x) = \hat{y}(x) + h(x),$$

pri čemu je

$$h(a) = 0 \;\text{ i }\; h(b) = 0.$$

Obratimo pažnju na tačku koja je promakla Lagranžu, ali za koju se ispostavilo da je prilično važna. Šta tačno znači kada kažemo da je varijacija mala? Uobičajen način za merenje bliskosti dve funkcije je izračunavanje *norme* razlike te dve funkcije. Postoji mnogo normi i videćemo da su naši zaključci o ekstremima (maksimumu i minimumu) prilično osetljivi na to koju normu koristimo.

Koristićemo dve različite norme tokom daljeg rada. To su *slaba* norma

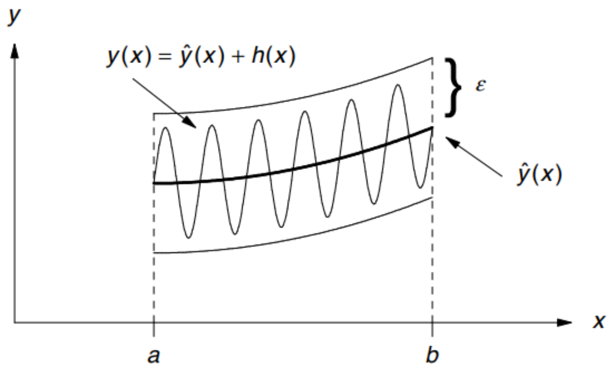
$$\|h\|_w = \max_{[a,b]} |h(x)|$$

i *jaka* norma

$$\|h\|_s = \max_{[a,b]} |h(x)| + \sup_{[a,b]} |h'(x)|.$$

Supremum (najmanje gornje ograničenje) koristimo u slučaju da radimo sa funkcijama koje su po delovima neprekidno diferencijabilne. Ako su funkcije neprekidno diferencijabilne, supremum može biti zamenjen maksimumom.

Koristićemo slabu i jaku normu da uspostavimo bliskost u prostoru funkcija. S obzirom da slaba norma ne nameće nikakvu restrikciju na izvod,



Slika 2.3. Jaka varijacija

ε-okolina u slabo normiranom prostoru obuhvata *jake varijacije* (videti sliku 2.3) koje se značajno razlikuju od optimalnog rešenja u nagibu, pritom ostajući bliske po ordinati.

Jake varijacije mogu imati proizvoljno velike izvode.

Primer 2.3.

Posmatrajmo funkciju

$$h(x) = \varepsilon \sin\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right).$$

S obzirom da je $|\sin(x)| \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$, posmatrana funkcija nikada ne prelazi ε, tj. $|h(x)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Međutim, njen izvod

$$h'(x) = \frac{1}{\varepsilon} \cos\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right),$$

može da postane proizvoljno veliki kada je ε dovoljno malo. ✓

Za razliku od slabe norme, jaka norma postavlja ograničenje na veličinu izvoda. Uzimajući

$$\|h\|_s < \varepsilon,$$

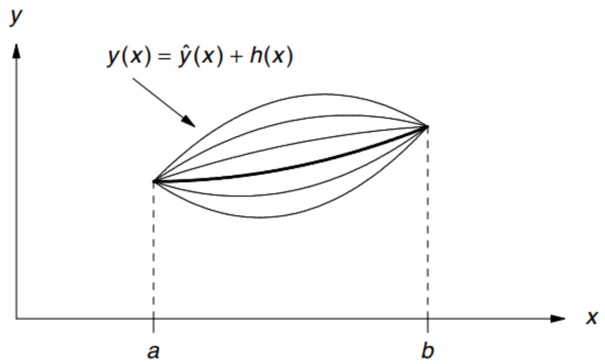
podrazumevamo ne samo da je

$$\max_{[a,b]} |h(x)| < \varepsilon,$$

već i da je

$$\sup_{[a,b]} |h'(x)| < \varepsilon.$$

U jako normiranom prostoru, ε-okolina sadrži samo slabe varijacije (videti sliku 2.4) koje su blizu optimalnog rešenja i po ordinati i po nagibu.



Slika 2.4. Slabe varijacije

Pošto su jake varijacije nadskup slabih varijacija, funkcija koja minimizira funkcionelu u odnosu na obližnje jake varijacije takođe minimizira tu funkcionelu u odnosu na obližnje slabe varijacije. Potreban uslov za slab lokalni minimum je takođe potreban uslov i za jak lokalni minimum. Lagranžov pristup koristi slabe varijacije. Ovo je u redu ukoliko želimo potrebne uslove, ali se javlja problem ukoliko želimo dovoljne uslove. Napomenimo da postoje primeri funkcionela koje imaju minimum u odnosu na slabe varijacije, ali ga nemaju u odnosu na jake varijacije.

Razmotrićemo male slabe varijacije

$$h(x) = \varepsilon\eta(x),$$

gde je

$$\eta(a) = 0, \;\; \eta(b) = 0$$

i $h(x)$ i $h'(x)$ su istog reda veličine. Stoga pretpostavljamo da je funkcija $\eta(x)$ nezavisna od parametra ε. Kako ε teži nuli, varijacija $h(x)$ teži nuli i po ordinati i po nagibu. Radi lakšeg označavanja, mi ćemo takođe i funkcionelu $J[y]$ posmatrati kao funkciju koja zavisi od parametra ε.

$$J(\varepsilon) \equiv J[\hat{y} + \varepsilon\eta] = \int_a^b f(x, \hat{y} + \varepsilon\eta, \hat{y}' + \varepsilon\eta')dx.$$

Pogledajmo sada *totalnu varijaciju*

$$\Delta J = J(\varepsilon) - J(0).$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\Delta J &= \int_a^b f(x, \hat{y} + \varepsilon\eta, \hat{y}' + \varepsilon\eta')dx - \int_a^b f(x, \hat{y}, \hat{y'})dx \\
&= \int_a^b [f(x, \hat{y} + \varepsilon\eta, \hat{y}' + \varepsilon\eta') - f(x, \hat{y}, \hat{y'})]dx.
\end{aligned}$$

Pretpostavićemo da funkcija f ima dovoljan broj neprekidnih parcijalnih izvoda. Koristeći uobičajen Tejlorov razvoj dobijamo

$$\Delta J = \delta J + \frac{1}{2}\delta^2 J + O(\varepsilon^3). \tag{2.6}$$

Prva varijacija je

$$\begin{aligned}
\delta J &= \left.\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon \\
&= \varepsilon \int_a^b [f_y(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta + f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta']dx.
\end{aligned}$$

Druga varijacija je

$$\begin{aligned}
\delta^2 J &= \left.\frac{d^2 J(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 \\
&= \varepsilon^2 \int_a^b [f_{yy}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta^2 + 2f_{yy'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta\eta' + f_{y'y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta'^2]dx.
\end{aligned}$$

Za dovoljno malo ε, očekujemo da će prva varijacija, koja se ne anulira, dominirati desnom stranom totalne varijacije (2.6). Takođe, očekujemo da će druga varijacija, koja se ne anulira, dominirati članovima višeg reda.

Ako je $J[\hat{y}]$ lokalni minimum, moramo imati da je

$$\Delta J \geqslant 0$$

za svako dovoljno malo ε. Međutim, s obzirom da je prva varijacija neparna u ε, možemo promeniti njen znak menjajući znak od ε. Da bismo sprečili ovo menjanje znaka, tražimo da je

$$\delta J = 0.$$

Takođe, za minimum tražimo da je

$$\delta^2 J \geqslant 0.$$

Ako bismo želeli lokalni maksimum, tražili bismo da je

$$\delta J = 0, \;\; \delta^2 J \leq 0.$$

Mi ćemo se fokusirati na prvu varijaciju. U svetlu navedenih argumenata, možemo sa sigurnošću reći:

Prvi varijacioni uslov:

Potreban uslov da funkcionela $J[y]$ ima lokalni minimum ili maksimum za $y = \hat{y}(x)$ je da se prva varijacija za $J[y]$ anulira, tj. $\delta J = 0$, za $y = \hat{y}(x)$ i za sve dopustive varijacije $\eta(x)$.

Prva varijacija,

$$\delta J = \varepsilon \int_a^b [f_y(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta + f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta']dx, \tag{2.7}$$

je prilično nepraktično zapisana. Iz tog razloga ćemo prvu varijaciju zapisati tako da nemamo zavisnost od dopustivih varijacija $\eta(x)$. Postoje dva načina da to uradimo. U oba se koristi parcijalna integracija. Počnimo sa Lagranžovim pristupom.

2.3.1 Lagranžovo pojednostavljenje

Posmatrajmo podintegralnu funkciju u jednačini (2.7). Primenićemo metodu parcijalne integracije na drugi član tog zbira.

$$\int_a^b f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y'})\eta' dx = \eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\bigg|_a^b - \int_a^b \eta \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx.$$

S obzirom da varijacije potencijalnog rešenja treba da se anuliraju u krajnjim tačkama intervala,

$$\eta(a) = 0, \;\; \eta(b) = 0,$$

naš prvi potreban uslov se svodi na

$$\varepsilon \int_a^b \eta(x)\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]_{\hat{y},\hat{y}'} dx = 0 \tag{2.8}$$

za sve dopustive $\eta(x)$. Indeks u poslednjoj jednačini označava da se u izrazu u uglastim zagradama podrazumeva da je $y = \hat{y}(x)$ i $y' = \hat{y}'(x)$.

Primetimo da upotreba parcijalne integracije zahteva da pretpostavimo da je $\hat{y}'(x)$ dva puta diferencijabilna. Parcijalni izvod $f_{y'}$ je funkcija koja zavisi od y' (kao i od y i x) i ako y'' ne postoji, postojanje

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

je neizvesno. Videćemo sada da Lagranžovo pojednostavljenje zapravo zahteva da pretpostavimo da je $\hat{y}''(x) \in C[a, b]$ ili da je $\hat{y}(x) \in C^2[a, b]$.

Lagranž je tvrdio, ali nije dokazao, da se za sve $\eta(x)$ jednačina (2.8) mora anulirati, dajući Ojler-Lagranžovu jednačinu

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0.$$

Ojler je u razgovoru sa Lagranžom istakao da njegov zaključak nije očigledan i da on ipak treba da dokaže da se za sve $\eta(x)$ mora anulirati. Ovaj dokaz je naknadno dao Di Bua Rejmon 1879. godine. Njegov rezultat je sada poznat kao fundamentalna lema varijacionog računa.

Lema 2.4. ***(Fundamentalna lema varijacionog računa).***
Ako je $M(x) \in C[a, b]$ i

$$\int_a^b M(x)\eta(x)dx = 0$$

za svako $\eta(x) \in C^1[a, b]$, pri čemu je

$$\eta(a) = \eta(b) = 0,$$

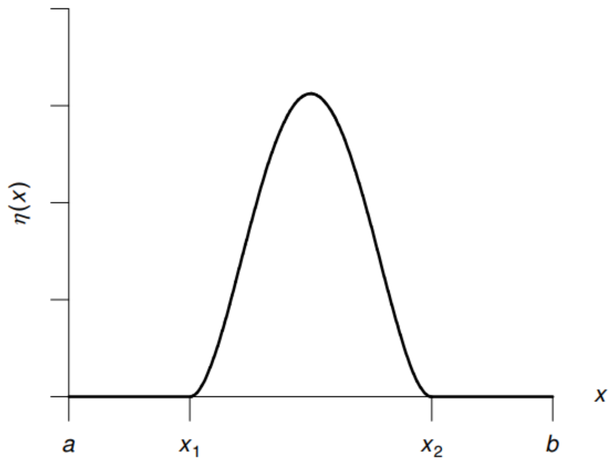
onda je

$$M(x) = 0$$

za sve $x \in [a, b]$.

Dokaz. Dokaz izvodimo kontrapozicijom. Pretpostavimo, bez umanjenja opštosti, da je $M(x)$ pozitivno u nekoj tački iz intervala (a, b). Tada $M(x)$ mora biti pozitivno u nekom intervalu $[x_1, x_2]$ unutar intervala $[a, b]$. Neka je sada (videti sliku 2.5)

$$\eta(x) = \begin{cases} (x - x_1)^2(x - x_2)^2, & x \in [x_1, x_2] \\ 0, & x \notin [x_1, x_2]. \end{cases}$$



Slika 2.5. Nenegativno ispupčenje

Jasno, $\eta(x) \in C^1[a,b]$. Sa ovakvim izborom $\eta(x)$,

$$\int_a^b M(x)\eta(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} M(x)(x-x_1)^2(x-x_2)^2 dx.$$

Pošto je podintegralna funkcija nenegativna,

$$\int_a^b M(x)\eta(x)dx > 0.$$

Ovo je u kontradikciji sa našom pretpostavkom i to sada implicira da je

$$M(x) = 0, \;\; x \in (a,b).$$

Neprekidnost $M(x)$ nam garantuje da se $M(x)$ takođe anulira u krajnjim tačkama intervala. □

Da bismo mogli da primenimo fundamentalnu lemu varijacionog računa, moramo biti sigurni da je

$$M(x) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

neprekidno na zatvorenom intervalu $[a,b]$. Ako bismo primenili pravilo lanca, desnu stranu poslednje jednačine možemo zapisati u takozvanom *ultra-diferenciranom* obliku

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f_{y'}}{\partial x}\frac{dx}{dx} - \frac{\partial f_{y'}}{\partial y}\frac{dy}{dx} - \frac{\partial f_{y'}}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} \\ &= f_y - f_{y'x} - f_{y'y}y' - f_{y'y'}y''. \end{aligned}$$

Da bismo dobili Ojler-Lagranžovu jednačinu koristeći Lagranžovo pojednostavljenje, moramo dodatno pretpostaviti da je $\hat{y}''(x) \in C[a,b]$ ili da je $\hat{y}(x) \in C^2[a,b]$.

Sada, napravivši pretpostavku da je $\hat{y}(x) \in C^2[a,b]$, možemo formulisati potreban uslov za lokalni maksimum ili minimum:

> ***Ojler-Lagranžov uslov:***
>
> Svako $\hat{y}(x) \in C^2[a,b]$ koje minimizira (ili maksimizira) određeni integral $J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$ zadovoljava Ojler-Lagranžovu diferencijalnu jednačinu $\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0.$

Lagranžovo pojednostavljenje zahteva od nas da pretpostavimo da naša rešenja imaju neprekidne druge izvode. Možemo li oslabiti ovu pretpostavku? Počnimo sa potrebnim uslovom koji kaže da prva varijacija mora da se anulira,

$$\delta J[\eta] = \varepsilon \int_a^b [f_y(x, \hat{y}, \hat{y'})\eta + f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y'})\eta']dx = 0, \tag{2.9}$$

i pokušajmo sa drugačijim pristupom.

2.3.2 Di Boa Rejmondovo pojednostavljenje

Pretpostavimo sada da su funkcije $\hat{y}(x)$ i $\eta(x)$ neprekidno diferencijabilne, tj. $\hat{y}(x), \eta(x) \in C^1[a,b]$. Posmatrajmo podintegralnu funkciju u jednačini (2.7). Pošto $f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')$ zavisi od $\hat{y}(x)$, ova funkcija ne mora biti diferencijabilna. Posledica toga je da ne možemo primeniti metodu parcijalne integracije na drugi član tog zbira.

Umesto toga, metodu parcijalne integracije ćemo primeniti na prvi član tog zbira. Dobijamo:

$$\int_a^b f_y(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta dx = \eta(x)\phi(x)\Big|_a^b - \int_a^b \phi(x)\eta'(x)dx,$$

gde je

$$\phi(x) = \int_a^x f_y(u, \hat{y}(u), \hat{y}'(u))du.$$

S obzirom da imamo samo pretpostavku o neprekidnosti $f_y(x, \hat{y}, \hat{y}')$ i $\eta'(x)$, ova parcijalna integracija je u redu. Pošto je

$$\eta(a) = \eta(b) = 0,$$

potreban uslov (2.9) se svodi na

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y} du \right)_{\hat{y}, \hat{y}'} \eta'(x) dx = 0. \tag{2.10}$$

Očigledno nam je potrebna još jedna lema da bismo nastavili dalje.

Lema 2.5. ***(Di Boa Rejmondova lema).***
Ako je $M(x) \in C[a, b]$ i

$$\int_a^b M(x)\eta'(x) dx = 0$$

za svako $\eta(x) \in C^1[a, b]$, pri čemu je

$$\eta(a) = \eta(b) = 0,$$

onda je

$$M(x) = c, \;\; c = const.$$

za sve $x \in [a, b]$.

Dokaz. Ovu lemu možemo dokazati razmatrajući jednu dobro odabranu varijaciju $\eta(x)$. Označimo sa μ glavnu vrednost od $M(x)$ na zatvorenom intervalu $[a, b]$,

$$\mu = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b M(x) dx.$$

Očigledno je

$$\int_a^b [M(x) - \mu] dx = 0.$$

Razmotrimo sada varijaciju $\eta(x)$ definisanu na sledeći način:

$$\eta(x) = \int_a^x [M(u) - \mu] du.$$

Lako se vidi da je $\eta(x) \in C^1[a, b]$. Funkcija $\eta(x)$ se takođe anulira u $x = a$ i $x = b$. Jasno je da je to dopustiva varijacija. Štaviše,

$$\eta'(x) = M(x) - \mu.$$

Prema pretpostavci,

$$\int_a^b M(x)\eta'(x)dx = \int_a^b M(x)[M(x)-\mu]dx = 0.$$

Takođe,

$$\int_a^b M(x)[M(x)-\mu]dx - \mu\int_a^b [M(x)-\mu]dx = 0.$$

Poslednju jednačinu možemo zapisati kao

$$\int_a^b [M(x)-\mu]^2 dx = 0.$$

Neka je $x_0 \in [a,b]$ tačka u kojoj je funkcija $M(x)$ neprekidna. Ako je $M(x_0) \neq \mu$, onda bi morao da postoji podinterval oko $x = x_0$ na kome je $M(x) \neq \mu$. Međutim, ovo je očigledno nemoguće zbog naše poslednje zapisane jednačine. Dakle, $M(x) = \mu$ u svim tačkama neprekidnosti. Odatle zaključujemo da je $M(x)$ konstantno za sve $x \in [a,b]$. □

Sada želimo da primenimo ovu lemu na potreban uslov (2.10),

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y}du\right)_{\hat{y},\hat{y}'} \eta'(x)dx = 0.$$

Napomenimo da je

$$M(x) = \frac{\partial f}{\partial y'} - \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y}du$$

neprekidna na $[a,b]$ i da su pretpostavke leme zadovoljene. Sada sledi da je

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y}du + c \tag{2.11}$$

za sve $x \in [a,b]$. Ovo je poznato kao *integralni oblik* Ojler-Lagranžove jednačine.

Desna strana jednačine (2.11) je diferencijabilna. Ovo dalje implicira da je leva strana jednačine (2.11) diferencijabilna i da $\hat{y}(x)$ zadovoljava Oljer-Lagranžovu jednačinu

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Drugim rečima, sva rešenja sa neprekidnim prvim izvodom (ne samo ona sa neprekidnim drugim izvodom), zadovoljavaju Ojler-Lagranžovu jednačinu.

Diferencijabilnost od $f_{y'}(x,\hat{y},\hat{y}')$ se takođe može koristiti za dokaz egzistencije drugog izvoda $\hat{y}''(x)$ za sve vrednosti x za koje je $f_{y',y'}(x,\hat{y},\hat{y}') \neq 0$.

Poglavlje 3

Primeri

U opštem slučaju ne postoji "recept" za rešavanje Ojler-Lagranžove jednačine. Stoga ćemo u ovom poglavlju razmotriti neke specijalne slučajeve koji se često sreću u praksi. Takođe, problem brahistohrone o kom smo pričali u poglavlju 1 ćemo detaljnije obraditi. Videćemo da je brahistohrona kroz Zemlju zapravo hipocikloida. Za više detalja o narednim primerima preporučujemo literaturu koja je korišćena za realizaciju ovog poglavlja, a to je: [9], [11], [13] i [14]. Slike koje se nalaze u ovom poglavlju su preuzete iz [9] i [11].

3.1 Specijalni slučajevi

Posmatrajmo Ojler-Lagranžovu jednačinu,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0,$$

i krive koje je zadovoljavaju. Krive koje zadovoljavaju Ojler-Lagranžovu jednačinu se nazivaju *ekstremale*. Ne treba pomešati taj termin sa terminom *ekstrem* koji je uveo Di Boa Rejmond za maksimum ili minimum.

Da bismo napisali Ojler-Lagranžovu jednačinu u svom eksplicitnom obliku, moramo uzeti u obzir činjenicu da je $f_{y'}$ funkcija tri promenljive, x, y i y', i da su y i y' funkcije koje zavise od x. Dakle,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f_{y'}}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}$$

pa se Ojler-Lagranžova jednačina može zapisati u *ultra-diferenciranom* obliku

$$f_y - f_{y'x} - f_{y'y}y' - f_{y'y'}y'' = 0.$$

Ovo znači da je Ojler-Lagranžova jednačina u opštem slučaju obična diferencijalna jednačina drugog reda. Pošto je

$$y'' = \frac{1}{f_{y'y'}}(f_y - f_{y'x} - f_{y'y}y'),$$

situacija će mnogo zavisiti od toga da li se $f_{y'y'}$ anulira ili ne. Ako se $f_{y'y'}$ nikad ne anlulira, onda imamo *regularan problem.* Ako se $f_{y'y'}$ uvek anulira, onda imamo specijalne slučajeve.

3.1.1 Degenerisane funkcionele

Slučaj degenerisane funkcionele se javlja ako je podintegralna funkcija naše funkcionele ili nezavisna od y',

$$f(x, y, y') = M(x, y),$$

ili zavisi linearno od y',

$$f(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'.$$

Prva mogućnost je specijalan slučaj druge. Funkcionele za koje je ovo tačno se nazivaju *degenerisane funkcionele.* Ojler-Lagranžova jednačina za degenerisane funkcionele ima oblik

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}y' - \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}y' = 0$$

ili

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \tag{3.1}$$

Ova jednačina ne sadrži izvode nepoznate funkcije i nije diferencijalna jednačina.

U praksi se javlja nekoliko podslučajeva. U prvom podslučaju, Ojler-Lagranžova jednačina (3.1) daje jednu ili više krivih. One mogu zadovoljavati granične uslove. Međutim, češće se dešava da krive ne zadovoljavaju jedan od graničnih uslova i onda ne možemo rešiti naš problem na taj način.

Primer 3.1. Funkcionela

$$J[y] = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(x - y)^2 + (\sin y)y'\right] dx$$

ima Ojler-Lagranžovu jednačinu oblika

$$y - x = 0.$$

Rešenje ove algebarske jednačine,

$$y = x,$$

ne zadovoljava većinu graničnih uslova. ✓

Primer 3.2. Funkcionela

$$J[y] = \int_{-1}^{1} \cos y \ dx$$

ima Ojler Lagranžovu jednačinu oblika

$$-\sin y = 0.$$

Ekstem se može javiti duž jedne od horizontalnih pravih

$$y = n\pi, \ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

ali samo ako ta prava zadovoljava granične uslove.

Jednačina

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

je zadovoljena za svako $y(x)$ i funkcionela je nezavisna od putanje integracije. Zaista, za podintegralnu funkciju

$$f(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y',$$

funkcionela

$$J[y] = \int_{a}^{b} f(x, y, y')dx$$

može biti zapisana kao

$$J[y] = \int_{a}^{b} M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Sada, ako je

$$M(x, y) = \frac{\partial S}{\partial x}, \ \ N(x, y) = \frac{\partial S}{\partial y}$$

za neku funkciju $S(x, y)$, onda je

$$J[y] = \int_{a}^{b} dS = S(b, y_b) - S(a, y_a)$$

i imamo nezavisnost od putanje. ✓

Primer 3.3. Posmatrajmo funkcionelu

$$J[y] = \int_0^1 (y + xy')dx,$$

pri čemu su granični uslovi

$$y(0) = 0, \;\; y(1) = 1.$$

Ojler-Lagranžova jednačina se svodi na identitet

$$1 = 1$$

i integral je nezavisan od putanje integracije. Zaista,

$$\int_0^1 (y + xy')dx = \int_{(0,0)}^{(1,1)} ydx + xdy$$

pa je

$$\int_0^1 (y + xy')dx = \int_{(0,0)}^{(1,1)} d(xy) = xy\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = 1. \;\checkmark$$

3.1.2 Slučaj kada nemamo eksplicitnu zavisnost od y

Posmatrajmo sada podintegralne funkcije koje ne zavise od y,

$$J[y] = \int_a^b f(x, y')dx.$$

U ovom slučaju, Ojler-Lagranžova jednačina se svodi na

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \;\text{ ili }\; \frac{\partial f}{\partial y'} = c.$$

U mehanici, y se naziva *ciklična* koordinata i prvi integral odgovara očuvanju impulsa.

3.1.3 Slučaj kada nemamo eksplicitnu zavisnost od x

Posmatrajmo sada podintegralne funkcije koje ne zavise od x,

$$J[y] = \int_a^b f(y, y')dx.$$

U ovom slučaju, Ojler-Lagranžova jednačina se svodi na

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = f_y - f_{y'y} y' - f_{y'y'} y'' = 0.$$

Posmatrajmo sada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f - y' f_{y'}) &= f_y y' + f_{y'} y'' - y' f_{y'y} y' - y' f_{y'y'} y'' - y'' f_{y'} \\ &= f_y y' - y' f_{yy'} y' - y' f_{y'y'} y'' \\ &= (f_y - f_{y'y} y' - f_{y'y'} y'') y'. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\frac{d}{dx}(f - y' f_{y'}) = 0$$

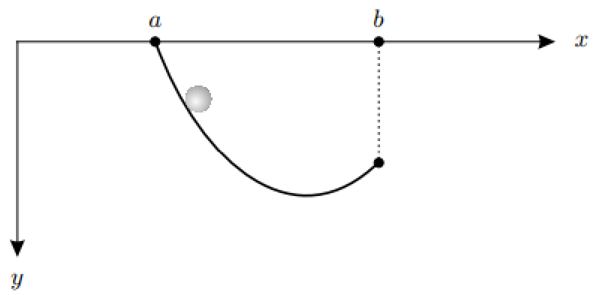
je ekvivalentno Ojler-Lagranžovoj jednačini sve dok je $y' \neq 0$. Ovo implicira da je prvi izvod Ojler-Lagranžove jednačine

$$f - y' f_{y'} = c.$$

U mehanici, ovo u najjednostavnijem slučaju vodi ka održanju energije. Mnogi poznati problemi u varijacionom računu imaju podintegralnu funkciju koja ne zavisi eksplicitno od nezavisne promenljive x. Jedan od njih je problem brahistohrone o kom smo pričali u uvodnom delu. Sada ćemo ga detaljnije obraditi.

3.2 Studija slučaja: Brahistohrona

Preispitajmo problem brahistohrone (videti sliku 3.1). Podsetimo se, treba



Slika 3.1. Problem brahistohrone

odrediti glatku krivu po kojoj će materijalna tačka stići iz jedne u drugu tačku za najkraće vreme, pri čemu se kretanje odvija pod dejstvom sile teže, bez trenja i bez početne brzine. Dakle, želimo da minimiziramo integral

$$T = \int_a^b \frac{1}{v} ds = \int_a^b \frac{1}{v} \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

pri čemu su granični uslovi

$$y(a) = y_a, \;\; y(b) = y_b.$$

Ovo je *izolovani sistem*. To znači da u njemu važi zakon održanja (konzervacije). Za česticu koja kreće iz stanja mirovanja, važi

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgy = mgy_a$$

te je

$$v = \sqrt{2g(y_a - y)}.$$

Tako nam ostaje problem minimiziranja

$$J[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y_a - y}} dx,$$

pri čemu važe gore navedeni granični uslovi.

Neka je

$$z \equiv y_a - y.$$

Sada je

$$J[z] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + z'^2}{z}} dx.$$

Pošto u ovom integralu ne postoji eksplicitna zavisnost od x, integraleći Ojler-Lagranžovu jednačinu dobijamo

$$f - z' \frac{\partial f}{\partial z'} = \alpha$$

ili

$$\frac{\sqrt{1 + z'^2}}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{z'^2}{\sqrt{1 + z'^2}} = \alpha.$$

Poslednja jednačina se svodi na

$$\frac{1}{\sqrt{z[1 + (z')^2]}} = \alpha.$$

Rešavajući po z', dobijamo da je

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{1-\alpha^2 z}{\alpha^2 z}}.$$

Poslednja diferencijalna jednačina razdvaja promenljive,

$$dx = \sqrt{\frac{\alpha^2 z}{1-\alpha^2 z}} dz.$$

Neka je

$$z = \frac{1}{\alpha^2}\sin^2\theta.$$

Sada je

$$dz = \frac{2}{\alpha^2}\sin\theta\cos\theta d\theta.$$

Naša diferencijalna jednačina se svodi na

$$dx = \frac{2}{\alpha^2}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}\sin\theta\cos\theta d\theta$$

ili

$$\alpha^2 dx = 2\sin^2\theta d\theta = (1-\cos 2\theta)d\theta.$$

Sledi da je

$$\alpha^2 x = \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \beta.$$

Neka je

$$y = y_a - z$$

tako da je

$$y = y_a - \frac{1}{\alpha^2}\sin^2\theta = y_a - \frac{1}{2\alpha^2}(1-\cos 2\theta).$$

Ako uzmemo da je

$$R \equiv \frac{1}{2\alpha^2},\ \ \phi \equiv 2\theta,\ \ a = \frac{\beta}{\alpha^2},$$

naše rešenje možemo napisati u parametarskom obliku na sledeći način

$$\begin{aligned} x(\phi) &= a + R(\phi - \sin\phi) \\ y(\phi) &= y_a - R(1-\cos\phi). \end{aligned}$$

Ovo je parametrizacija krive koju iscrtava tačka sa ruba kruga poluprečnika R koji se kotrlja po pravoj $y = y_a$ (videti sliku 1.2). Takva kriva se naziva *cikloida*.

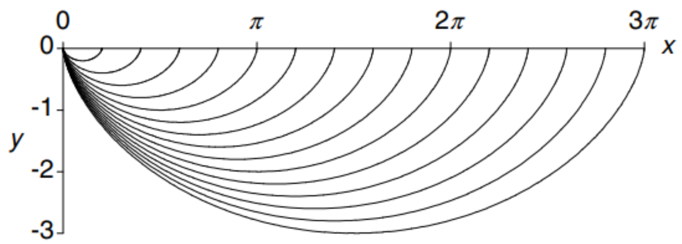
Ako uzmemo da je

$$x(0) = 0, \;\; y(0) = 0$$

naš levi granični uslov, ostaje nam jednoparametarska familija cikloida,

$$x = R(\phi - \sin\phi), \;\; y = -R(1 - \cos\phi)$$

koja čini polje ekstremala (videti sliku 3.2). Svaka ekstremala se proteže duž x-ose do svoje maksimalne dubine.



Slika 3.2. Jednoparametarska familija cikloida

Poglavlje 4

Druga varijacija

U ovom poglavlju ćemo se vratiti na problem nalaženja ekstrema funkcionele (4.1), pri čemu važe odgovarajući granični uslovi. Za razliku od poglavlja 2 u kom smo u svetlu prve varijacije došli do Ojler-Lagranžove jednačine, ovde ćemo koristeći drugu varijaciju izvesti još neke uslove koji su potrebni ili dovoljni da bi pomenuta funkcionela imala lokalni ekstrem. Počećemo sa Ležandrovim pristupom i razmotriti njegove prednosti i nedostatke, a zatim ćemo proučiti i Jakobijev pristup.

Takođe, kroz primer problema navigacije ćemo ilustrovati šta se dešava u situacijama u kojima nam nisu zadata oba granična uslova kao što je to u većini problema koje smo analizirali do sada bio slučaj. Na samom kraju poglavlja ćemo se baviti jakim varijacijama. Ukazaćemo na probleme sa slabim varijacijama i izvesti Vajerštrasov uslov koji je još jedan u nizu potrebnih uslova za postojanje ekstrema naše funkcionele.

Više detalja o narednim temama se može pronaći u literaturi koja je korišćena za realizaciju ovog poglavlja, a to je: [9], [11], [13] i [14]. Slike koje se nalaze u ovom poglavlju su preuzete iz [9] i [11]. Zainteresovanog čitaoca upućujemo i na: [1], [2] i [8].

4.1 Uvod

Vratimo se sada na problem minimiziranja (ili maksimiziranja) određenog integrala oblika

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx, \tag{4.1}$$

pri čemu su granični uslovi

$$y(a) = y_a, \;\; y(b) = y_b.$$

Kako znamo da li radimo sa maksimumom ili sa minimumom? Takođe, da li postoje drugi potrebni uslovi pored Ojler-Lagranžove jednačine?

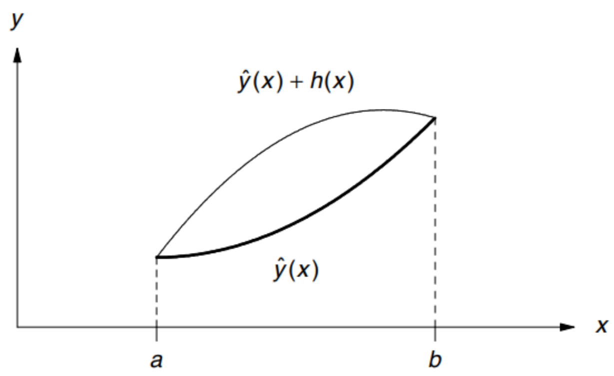
Pretpostavimo da funkcija $y = \hat{y}(x)$, $\hat{y}(x) \in C^1[a,b]$, rešava naš problem i da je $h(x)$ mala *varijacija* ovog rešenja.

$$y(x) = \hat{y}(x) + h(x),$$

pri čemu važi

$$h(a) = 0 \ \text{ i } \ h(b) = 0.$$

Pogledajmo sliku 4.1. Nastavićemo da koristimo jaku normu i slabe vari-



Slika 4.1. Mala varijacija

jacije,

$$h(x) = \varepsilon\eta(x), \tag{4.2}$$

$\eta \in C^1[a,b]$, pri čemu su zadovoljeni granični uslovi

$$\eta(a) = 0, \ \ \eta(b) = 0.$$

Pretpostavimo da su $\eta(x)$ i $\eta'(x)$ dovoljno bliske nuli. Takođe, za funkciju $\eta(x)$ se pretpostavlja da je nezavisna od ε tako da, kada ε ide u 0, varijacija $h(x)$ teži u 0 i po ordinati i po nagibu.

Pogledajmo sada *totalnu varijaciju*

$$\Delta J \equiv J[y] - J[\hat{y}] = J[\hat{y} + h] - J[\hat{y}].$$

Za našu funkcionelu (4.1) i slabu varijaciju (4.2), totalna varijacija je oblika

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_a^b f(x, \hat{y} + \varepsilon\eta, \hat{y}' + \varepsilon\eta')dx - \int_a^b f(x, \hat{y}, \hat{y}')dx \\ &= \int_a^b [f(x, \hat{y} + \varepsilon\eta, \hat{y}' + \varepsilon\eta') - f(x, \hat{y}, \hat{y}')]dx. \end{aligned}$$

Setimo se da smo koristeći uobičajen Tejlorov razvoj (2.6) dobili

$$\Delta J = \delta J + \frac{1}{2}\delta^2 J + O(\varepsilon^3),$$

pri čemu je *prva varijacija* bila oblika

$$\delta J = \varepsilon \int_a^b [f_y(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta + f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta']dx,$$

a *druga varijacija* oblika

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b [f_{yy}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta^2 + 2f_{yy'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta\eta' + f_{y'y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta'^2]dx.$$

Pretpostavimo da je $\delta J = 0$. To znači da je

$$\Delta J = \frac{1}{2}\delta^2 J + O(\varepsilon^3).$$

Za dovojno malo ε, totalnom varijacijom dominira druga varijacija. Iz toga sledi

Drugi varijacioni uslov:

Potreban uslov da funkcionela $J[y]$ ima lokalni minimum ili maksimum za $y = \hat{y}(x)$, $\hat{y}(x) \in C^1[a, b]$ je da druga varijacija bude pozitivna (negativna) ili 0, tj. $\delta^2 J \geqslant (\leq)\ 0$, za sve slabe $\eta(x) \in C^1[a, b]$ koje se anuliraju u a i b.

Napomenimo da smo pretpostavili da su naše ekstremale neprekidno diferencijabilne i da su naše varijacije neprekidno diferencijabilne i slabe. Ove pretpostavke su mogle biti i oslabljene. Međutim, mi smo pratili istorijski redosled događaja. Druga varijacija je izučavana pre nego što su naučnici razmatrali rešenja koja imaju "špic" i bavili se jakim varijacijama.

4.2 Ležandrov uslov

Radi jednostavnosti, zapišimo drugu varijaciju kao

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b (P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2)dx,$$

gde je

$$P \equiv f_{yy}(x, \hat{y}, \hat{y}'), \;\; Q \equiv f_{yy'}(x, \hat{y}, \hat{y}'), \;\; R \equiv f_{y'y'}(x, \hat{y}, \hat{y}').$$

Da bismo nastavili, transformisaćemo drugu varijaciju u pogodniji oblik. Postoji nekoliko mogućih pristupa. Iz istorijskih razloga, pratićemo Ležandrov[1] pristup. Napomenimo da postoje problemi sa ovim pristupom i na njih je ukazao Lagranž. Mi ćemo razmotriti i prednosti i mane ovog pristupa.

Za neko $\omega \in C^1[a, b]$,

$$\int_a^b \frac{d}{dx}[\omega(x)\eta^2(x)]dx = \omega(x)\eta^2(x)\bigg|_a^b = 0$$

pošto se varijacija $\eta(x)$ anulira u a i b. Ako to dodamo drugoj varijaciji, dobijamo

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b [(P + \omega')\eta^2 + 2(Q + \omega)\eta\eta' + R\eta'^2)]dx.$$

Prethodna jednakost se može zapisati kao

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b \left\{ R\left(\eta' + \frac{Q + \omega}{R}\eta\right)^2 + \left[(P + \omega') - \frac{(Q + \omega)^2}{R}\right]\eta^2 \right\} dx.$$

Do sada, nismo postavljali neko ograničenje na $\omega(x)$. Pretpostavimo sada da je

$$\omega' = -P + \frac{(Q + \omega)^2}{R}. \tag{4.3}$$

Odatle je

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b R\left(\eta' + \frac{Q + \omega}{R}\eta\right)^2 dx.$$

Pošto je $\left(\eta' + \frac{Q + \omega}{R}\eta\right)^2$ nenegativno, znak druge varijacije je određen znakom od R. Ležandr je tvrdio da R ne sme da menja znak unutar intervala $[a, b]$ ukoliko želimo da imamo lokalni ekstrem. Ovaj potreban uslov je danas poznat kao *Ležandrov uslov*. On je takođe tvrdio da ako je R nenula i ne menja znak (*ojačan Ležandrov uslov*), onda je $\delta^2 J$ istog znaka kao i R (dovoljan uslov). Bio je u pravu u vezi potrebnog uslova, ali se javio problem kod dovoljnog uslova (*Ležandrova greška*). Lagranž je ukazao na nedostatak Ležandrovog razmatranja. Ležandr je pretpostavio da diferencijalna jednačina (4.3) ima rešenje ω koje postoji unutar celog intervala $[a, b]$. Na osnovu teorije običnih diferencijalnih jednačina znamo da rešenje postoji, ali za nelinearne ODJ kao što je ova znamo samo da ono postoji lokalno, ali ne i na celom intervalu $[a, b]$.

[1]Adrien-Marie Legendre (1752-1833) - francuski matematičar

Primer 4.1.

Neka je
$$P = -1, \;\; Q = 0, \;\; R = 1.$$
Tada je
$$\omega' = 1 + \omega^2. \tag{4.4}$$
Uzmimo da je početni uslov
$$\omega(0) = 0.$$
Pošto je desna strana jednačine (4.4) neprekidna kao funkcija od x i ω i parcijalni izvodi s obzirom na ω su neprekidni u blizini $x = 0$ i $\omega = 0$, očekujemo jedinstveno rešenje u nekoj okolini tačke $(0,0)$. Funkcija
$$\omega(x) = \mathrm{tg} x$$
je traženo rešenje. Međutim, ovo rešenje ne postoji u $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$. ✓
Ovaj primer nam ukazuje na to da dužina intervala $[a, b]$ može imati uticaj.

Ležandrov uslov:

Potreban uslov da funkcionela $J[y]$ ima lokalni minimum (maksimum) u $y = \hat{y}(x)$ je da $R(x) \equiv \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)) \geqslant 0 \;\; (\leq 0)$ na $[a, b]$.

U sledećem dokazu i u nastavku ovog poglavlja ćemo pretpostavljati, bez umanjenja opštosti, da pričamo o minimumu.

Dokaz. Pretpostavimo da je
$$R(c) < 0$$
za neku vrednost c unutar intervala (a, b). Pošto je $R(x)$ neprekidno, postoji zatvoren interval $[c - \delta_1, c + \delta_1]$, unutar $[a, b]$, gde je $R(x) < 0$. Takođe, sledi da postoji još jedan zatvoren interval, $[c - \delta_2, c + \delta_2]$, unutar $[a, b]$, gde diferencijalna jednačina
$$\omega' = -P + \frac{(Q + \omega)^2}{R}$$
ima neprekidno diferencijabilno rešenje $\omega(x)$. Neka je $[x_1, x_2]$ manji od pomenuta dva intervala i izaberimo $\eta(x)$ tako da
$$\eta(x) = 0, \;\; x \notin (x_1, x_2),$$

$$\eta(x) \neq 0, \;\; x \in (x_1, x_2).$$

Pošto je $\eta \in C^1[a,b]$,

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \;\text{ i }\; \eta'(x_1) = \eta'(x_2) = 0.$$

Za ovakvo $\eta(x)$,

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} (P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2)dx.$$

Za ovaj interval integracije možemo primeniti Ležandrovu transformaciju i dobijamo da je

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_{x_1}^{x_2} R\left(\eta' + \frac{Q+\omega}{R}\eta\right)^2 dx \tag{4.5}$$

i to je nepozitivno. Ako bi se jednačina (4.5) anulirala, zahtevali bismo da je

$$\eta'(x) + \frac{Q+\omega}{R}\eta(x) \equiv 0$$

za $x_1 \leq x \leq x_2$ pošto je na tom intervalu $R(x) < 0$. Ova linearna ODJ prvog reda i granični uslov $\eta(x_1) = 0$ bi onda podrazumevali da je $\eta(x) \equiv 0$ za $x_1 < x < x_2$. Pošto smo izabrali $\eta(x)$ tako da je nenula na ovom otvorenom intervalu, možemo zaključiti da je integral na desnoj strani jednačine (4.5) negativan.

Pokazali smo da ako je $R(c)$ negativno, možemo naći proizvoljno malu varijaciju koja nam daje da je

$$\delta^2 J < 0.$$

Međutim, ovo se ne slaže sa postojanjem minimuma. Prema tome, zahtevamo da je

$$R(x) \geqslant 0$$

na zatvorenom intervalu $[a, b]$. $\square$

Napomenimo da postoje specijalni slučajevi u kojima $R(x)$ ima izolovanu nulu u $[a, b]$. U većini slučajeva koji nas zanimaju, $R(x) > 0$ ili $R(x) < 0$ svugde u intervalu $[a, b]$.

4.3 Jakobijev uslov

Ležandr je pokušao da pokaže da je ojačan Ležandrov uslov zapravo i dovoljan uslov za postojanje lokalnog minimuma. Njegovo rezonovanje je bilo pogrešno. On je, kako Lagranž ističe, implicitno pretpostavio da jednačina (4.3) ima rešenje koje je konačno i neprekidno nad celim intervalom $[a, b]$. To ne mora biti tačno. Potrebno je proučiti detaljnije tu diferencijalnu jednačinu. Prilikom proučavanja te jednačine, otkrićemo nove potrebne i/ili dovoljne uslove za lokalne ekstreme.

Diferencijalna jednačina (4.3),

$$\omega' = -P + \frac{(Q+\omega)^2}{R},$$

se naziva *Rikatijeva*[2] *jednačina.* Rikatijeva jednačina je ODJ čiji je opšti oblik

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x). \tag{4.6}$$

Ako je $a(x) = 0$, Rikatijeva jednačina se svodi na linearnu ODJ. Ako je $c(x) = 0$, dobijamo Bernulijevu jednačinu. Bernulijeva jednačina je ODJ čiji je opšti oblik

$$y' = p(x)y^\alpha + q(x)y, \ \ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}.$$

Ako je $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$, Bernulijeva jednačina se svodi na linearnu ODJ.

Ukoliko znamo jedno partikularno rešenje, možemo odrediti opšte rešenje Rikatijeve jednačine (4.6). Zaista, neka je $y_p(x)$ partikularno rešenje Rikatijeve jednačine (4.6),

$$y_p' = ay_p^2 + by_p + c.$$

Uvedimo novu promenljivu $z(x)$ koja meri razliku između opšteg rešenja i partikularnog rešenja,

$$z(x) \equiv y(x) - y_p(x).$$

Sledi da je

$$z' = az^2 + (2ay_p + b)z.$$

Ova poslednja jednačina je Bernulijeva jednačina.

4.3.1 Jakobijeva jednačina

Jedan od razloga zbog kojih je Rikatijeva jednačina važna je taj da se svaka homogena linearna ODJ drugog reda može pretvoriti u Rikatijevu jednačinu

[2] Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) - italijanski matematičar

i obrnuto. Da bi se jednačina (4.3) pretvorila u linearnu ODJ drugog reda, uvodimo

$$\omega(x) = -Q - R\frac{u'(x)}{u(x)},$$

pod pretpostavkom da je

$$u(x) \neq 0, \;\; x \in [a, b]. \tag{4.7}$$

Rezultujuća jednačina,

$$\frac{d}{dx}(Ru') + (Q' - P)u = 0,$$

se naziva *Jakobijeva*[3] *jednačina*. Ona takođe može biti zapisana kao

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{R'}{R}\frac{du}{dx} + \frac{(Q' - P)}{R}u = 0.$$

Druga varijacija,

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b R\left(\eta' + \frac{Q + \omega}{R}\eta\right)^2 dx,$$

je sada oblika

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b R\left(\eta' - \frac{u'}{u}\eta\right)^2 dx.$$

Uvodeći Jakobijevu jednačinu i transformisavši drugu varijaciju koristeći rešenja Jakobijeve jednačine, možemo formulisati dovoljan uslov koji obezbeđuje da je druga varijacija pozitivno definitna.

Slab dovoljan uslov:

Neka je $y = \hat{y}(x)$. Ako je
(a) $R(x) > 0$, za sve $x \in [a, b]$ i
(b) Jakobijeva jednačina ima rešenje $u = u(x) \neq 0$ za sve $x \in [a, b]$
onda je $\delta^2 J$ pozitivno definitna, tj. $\delta^2 J > 0$ za sve dopustive slabe varijacije $\eta(x)$ koje su različite od 0.

[3] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) - nemački matematičar

Dokaz. Ako Jakobijeva jednačina ima rešenje koje se ne anulira nigde na intervalu $[a,b]$, možemo primeniti Ležandrovu transformaciju na drugu varijaciju, kao što je opisano ranije. Za $R(x) > 0$, druga varijacija se anulira samo ako je

$$\eta' - \frac{u'}{u}\eta \equiv 0$$

za sve $x \in [a,b]$. Pošto je

$$\eta(a) = 0, \ \ \eta(b) = 0$$

i pošto se $u(x)$ ne anulira u tim krajnjim tačkama, jedino rešenje linearne ODJ prvog reda je

$$\eta(x) = 0.$$

□

Ako se svako rešenje Jakobijeve jednačine anulira u bar jednoj tački intervala $[a,b]$, onda nećemo moći da izvršimo Ležandrovu transformaciju na drugu varijaciju nad celim intervalom. U tom slučaju ćemo izgubiti dovoljan uslov za pozitivnu definitnost druge varijacije. Ako postoje dve tačke intervala $[a,b)$ u kojima se netrivijalno rešenje Jakobijeve jednačine anulira, druga varijacija može biti negativna. Tako dolazimo do novog potrebnog uslova za lokalni ekstrem.

Uskoro ćemo rešiti Jakobijevu jednačinu. Pre nego što to uradimo, hajde da ukratko vidimo još neke načine na koje ova jednačina nastaje. Oni će nam omogućiti da na alternativniji način zapišemo drugu varijaciju, što će se ispostaviti korisnim za ovo poglavlje.

Prema tome, zapišimo podintegralnu funkciju druge varijacije kao funkciju koja zavisi od η i η',

$$\begin{aligned} \delta^2 J &= \varepsilon^2 \int_a^b (P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2)dx \\ &= \varepsilon^2 \int_a^b 2\Omega(\eta, \eta')dx. \end{aligned}$$

Pošto je podintegralna funkcija homogena[4] stepena dva, sledi da je

$$2\Omega = \eta\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} + \eta'\frac{\partial\Omega}{\partial\eta'}.$$

[4]Neprekidna funkcija $f = f(x_1, ..., x_n)$ je *homogena funkcija stepena* k na domenu D ako za sve $(x_1, ...x_n) \in D$ važi $f(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, ..., x_n)$, za sve $\lambda > 0$.

Sada drugu varijaciju možemo zapisati kao

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b \left(\eta \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} + \eta' \frac{\partial \Omega}{\partial \eta'} \right) dx.$$

Ako integralimo drugi član podintegralne funkcije metodom parcijalne integracije, koristeći činjenicu da se $\eta(x)$ anulira u krajnjim tačkama, dobijamo

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b \eta \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta'} \right) \right] dx.$$

Dalje,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta'} \right) = (P - Q')\eta - \frac{d}{dx}(R\eta') \equiv \Psi(\eta),$$

pa je

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b \eta \Psi(\eta) dx. \tag{4.8}$$

Često se kaže da je Jakobijeva jednačina Ojler-Lagranžova jednačina za drugi varijacioni problem.

4.3.2 Rešenja Jakobijeve jednačine

Jakobi je 1837. godine smislio metod za rešavanje pomenute jednačine. On je pokazao da se opšte rešenje Jakobijeve jednačine može izvesti direktnim diferenciranjem opšteg rešenja Ojler-Lagranžove jednačine.

Pretpostavimo da imamo opšte rešenje,

$$y = \hat{y}(x, \alpha, \beta),$$

Ojler-Lagranžove jednačine koje nastaje iz prve varijacije. Pošto je Ojler-Lagranžova jednačina diferencijalna jednačina drugog reda, opšte rešenje sadrži dve konstante, α i β.

Ako ubacimo opšte rešenje u Ojler-Lagranžovu jednačinu, dobijamo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, \hat{y}(x, \alpha, \beta), \hat{y}'(x, \alpha, \beta)) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial y'}(x, \hat{y}(x, \alpha, \beta), \hat{y}'(x, \alpha, \beta)) \right] = 0.$$

Ovaj identitet je zadovoljen za sve vrednosti x, α i β. Prema tome, možemo diferencirati ovaj identitet s obzirom na α ili β. To ćemo uraditi za α, tako što ćemo obrnuti redosled diferenciranja između x i α:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \frac{\partial \hat{y}'}{\partial \alpha} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{\partial \hat{y}'}{\partial \alpha} \right) = 0.$$

Sada ovo možemo zapisati kao

$$P\frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha}+Q\frac{\partial \hat{y}'}{\partial \alpha}-\frac{d}{dx}\left(Q\frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha}+R\frac{\partial \hat{y}'}{\partial \alpha}\right)=0$$

ili

$$(P-Q')\frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha}+(Q-Q)\frac{\partial \hat{y}'}{\partial \alpha}-\frac{d}{dx}\left(R\frac{\partial \hat{y}'}{\partial \alpha}\right)=0.$$

Dakle,

$$(P-Q')\frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha}-\frac{d}{dx}\left(R\frac{\partial \hat{y}'}{\partial \alpha}\right)=0.$$

Primetimo da je ovo Jakobijeva jednačina sa

$$u=\frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha}\ \text{ i }\ u'=\frac{\partial \hat{y}'}{\partial \alpha}.$$

Time smo dokazali važnu teoremu koju ćemo sada formulisati.

Jakobijeva teorema:

Ako je $y=\hat{y}(x,\alpha,\beta)$ opšte rešenje Ojler-Lagranžove jednačine, onda odgovarajuća Jakobijeva jednačina, $\dfrac{d}{dx}(Ru')+(Q'-P)u=0$, ima dva partikularna rešenja: $u_1(x)=\dfrac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha}$ i $u_2(x)=\dfrac{\partial \hat{y}}{\partial \beta}$.

Ova dva rešenja su u opštem slučaju linearno nezavisna. Opšte rešenje Jakobijeve diferencijalne jednačine je oblika

$$u(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x).$$

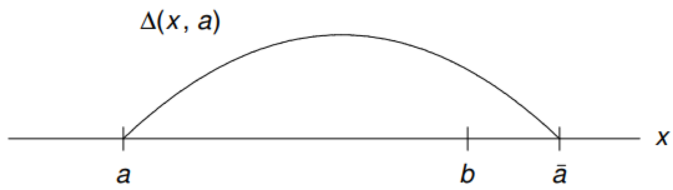
4.3.3 Jakobijev kriterijum

Pogledajmo sada jedno partikularno rešenje Jakobijeve jednačine izabrano na pogodan način:

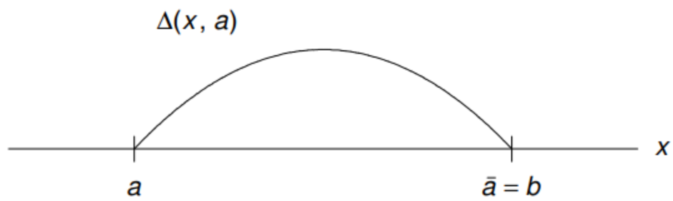
$$\Delta(x,a)=u_2(a)u_1(x)-u_1(a)u_2(x).$$

Ovo rešenje je izabrano tako da se anulira za $x=a$.

Ako se sledeća nula od $\Delta(x,a)$, $x=\bar{a}$, javlja posle $x=b$ (videti sliku 4.2), možemo slobodno konstruisati rešenje $u(x)$ koje se ne anulira na zatvorenom intervalu $[a,b]$ razmatrajući $\Delta(x,a-\varepsilon)$ za dovoljno malo ε. Tada smo sigurni,



Slika 4.2. $\bar{a} > b$



Slika 4.3. $\bar{a} = b$

zbog slabog uslova dovoljnosti, da je $\delta^2 J > 0$ za sve dopustive $\eta(x)$ koji se ne anuliraju.

Ako se sledeća nula od $\Delta(x, a)$, $x = \bar{a}$, javlja u $x = b$ (videti sliku 4.3), situacija se menja. Sada možemo naći netrivijalnu, dopustivu varijaciju koja uzrokuje da se druga varijacija anulira. Da bismo ovo razumeli, primetimo prvo da uslov (5.8) implicira da ne možemo više drugu varijaciju zapisati kao

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b R\left(\eta' - \frac{u'}{u}\eta\right)^2 dx.$$

Međutim, još uvek možemo da koristimo jednačinu (4.8) da zapišemo drugu varijaciju kao

$$\delta^2 J = \varepsilon^2 \int_a^b \eta \Psi(\eta) dx.$$

Ako sada izaberemo $\eta(x)$ da bude umnožak od $u(x) = \Delta(x, a)$, $\eta(x)$ zadovoljava granične uslove $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Za ovakav izbor je $\Psi(\eta) \equiv 0$, tako da se druga varijacija anulira.

Jednom kada se druga varijacija anulira za netrivijalne $\eta(x)$, znak totalne varijacije, ΔJ, zavisi od znaka treće varijacije, $\delta^3 J$. Generalno, treća varijacija se može učiniti negativnom izborom odgovarajućeg znaka za ε. Ako bi treća varijacija bila jednaka 0, posmatrali bismo četvrtu varijaciju. Jakobi je tvrdio, ali nije dokazao, da neće biti ekstrema ako se sledeća nula od $\Delta(x, a)$, $x = \bar{a}$, javlja pre $x = b$.

Jakobijev uslov:

Potreban uslov za lokalni minimum (maksimum) je da je $\Delta(x,a) \neq 0$ za sve vrednosti x, pri čemu $x \in (a,b)$.

4.3.4 Konjugovane tačke

Prva nula od $\Delta(x,a)$, koja se nalazi posle $x = a$ se naziva konjugat od a i označava sa $x = \bar{a}$. Tačka $\bar{A}$ na ekstremali sa x-koordinatom $\bar{a}$ je konjugat[5] za tačku A sa x-koordinatom a.

Postoje dva načina za određivanje konjugovanih tačaka.

Analitički metod:

Vrednost $\bar{a}$ zadovoljava jednačinu

$$\Delta(\bar{a},a) = u_2(a)u_1(\bar{a}) - u_1(a)u_2(\bar{a}) = 0.$$

Odatle sledi da je

$$\frac{u_1(\bar{a})}{u_2(\bar{a})} = \frac{u_1(a)}{u_2(a)}$$

i

$$\left.\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \hat{y}}{\partial \beta}}\right|_{x=\bar{a}} = \left.\frac{\frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \hat{y}}{\partial \beta}}\right|_{x=a}.$$

Koristili smo Jakobijev rezultat da se mogu dobiti partikularna rešenja Jakobijeve jednačine diferenciranjem dvoparametarskog opšteg rešenja odgovarajuće Ojler-Lagranžove jednačine, s obzirom na parametre. Poslednje prikazana jednačina može u nekim slučajevima biti rešena za $x = \bar{a}$.

Geometrijski metod:

Neka je $u(x)$ rešenje Jakobijeve jednačine, $\hat{y}(x,\alpha,\beta)$ opšte rešenje odgovarajuće Ojler-Lagranžove jednačine i γ neka konstanta. Posmatrajmo dve

[5] Mnogi istraživači nazivaju i $\bar{a}$ i $\bar{A}$ konjugovanim tačkama, dok drugi prave razliku između konjugovane vrednosti $\bar{a}$ i konjugovane tačke $\bar{A}$. Slično, neki istraživači svaku nulu od $\Delta(x,a)$ koja se nalazi posle $x = \bar{a}$ nazivaju konjugovanom tačkom, dok ostali koriste taj termin za prvu takvu nulu.

krive

$$y = \hat{y}(x, \alpha, \beta) \text{ i } y = \hat{y}(x, \alpha, \beta) + \gamma u(x).$$

Ove dve krive se seku kada je

$$u(x) = 0.$$

Ako se ove dve krive seku u tački A, one će se takođe seći i u konjugovanoj tački $\bar{A}$.

Posmatrajmo sada dve bliske ekstremale,

$$y = \hat{y}(x, \alpha, \beta) \tag{4.9}$$

i

$$y = \hat{y}(x, \alpha + \Delta\alpha, \beta) \tag{4.10}$$

za dovoljno malo $\Delta\alpha$. Zanemarujući članove višeg reda, druga ekstremala može biti aproksimirana sa

$$y = \hat{y}(x, \alpha, \beta) + \frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha}\Delta\alpha$$

ili

$$y = \hat{y}(x, \alpha, \beta) + \Delta\alpha \cdot u_1(x).$$

Sada je jasno da ako se bliske ekstremale, (4.9) i (4.10), seku u tački A, onda se one takođe seku i u konjugovanoj tački $\bar{A}$ ili u njenoj blizini (zbog aproksimacije).

Sada ćemo sve ovo razmotriti malo preciznije. Umesto naše dvoparametarske familije ekstremala ćemo posmatrati jednoparametarsku familiju ekstremala, $y = \hat{y}(x, c)$, pri čemu ćemo obratiti pažnju na snop ekstremala koje ishode iz fiksne tačke $A = (a, y_a)$ (videti sliku 4.4). Posmatrajmo sada dve bliske krive,

$$y = \hat{y}(x, c) \text{ i } y = \hat{y}(x, c + \Delta c),$$

ove jednoparametarske familije.

Ove dve ekstremale se seku ukoliko imaju iste koordinate. Možemo koristiti jednačinu

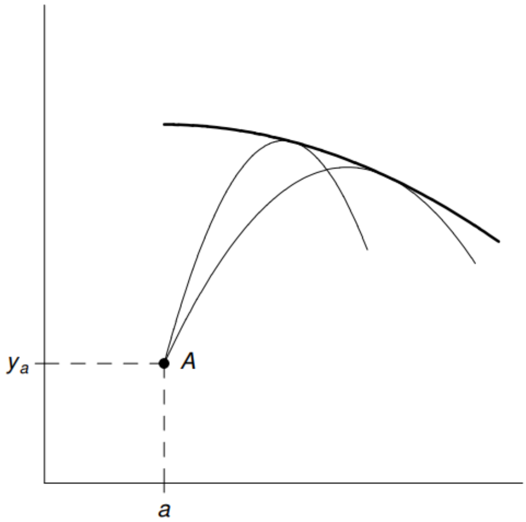
$$\hat{y}(x, c + \Delta c) = \hat{y}(x, c)$$

da odredimo x-koordinatu tačke preseka i jednačinu

$$y = \hat{y}(x, c)$$

da odredimo y-koordinatu. Takođe, ove uslove možemo zapisati kao

$$y = \hat{y}(x, c)$$



Slika 4.4. Omotač (obvojnica)

i

$$\frac{\hat{y}(x, c + \Delta c) - \hat{y}(x, c)}{\Delta c} = 0.$$

Podelili smo sa Δc da bismo dobili netrivijalan rezultat u graničnom slučaju, kada Δc teži u 0.

U tom graničnom procesu,

$$y = \hat{y}(x, c), \;\; \frac{\partial \hat{y}}{\partial c}(x, c) = 0$$

i dobijamo našu konjugovanu tačku. Ovo je *c-diskriminatna*, skup jednačina koji opisuje omotač naše jednoparametarske familije. Prema tome, ako familija ekstremala, koje ishode iz tačke A, ima omotač, konjugovana tačka za element ove familije je tačka preseka te ekstremale sa omotačem.

Primer 4.2.

Posmatrajmo funkcionelu

$$J[y] = \int_0^b (y'^2 - y^2) dx,$$

pri čemu je $0 < b < \pi$ i važe granični uslovi

$$y(0) = 0, \;\; y(b) = 1.$$

Ojler-Lagranžova jednačina za ovaj problem je oblika

$$y'' + y = 0.$$

Opšte dvoparametarsko rešenje ove jednačine je

$$\hat{y}(x, \alpha, \beta) = \alpha \sin x + \beta \cos x.$$

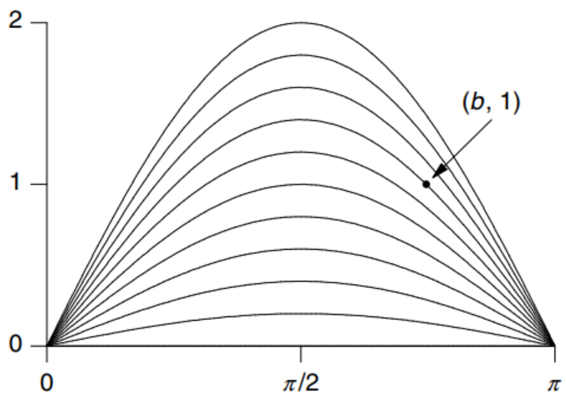
Primenom graničnih uslova, dobijamo da je

$$\alpha = \frac{1}{\sin b} \ \text{ i } \ \beta = 0.$$

Odavde dobijamo ekstremalu

$$\hat{y}(x) = \frac{\sin x}{\sin b}$$

(videti sliku 4.5).



Slika 4.5. Jednoparametarska familija ekstremala

Proverom Ležandrovog uslova, dobijamo da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 2 > 0.$$

Dakle, ojačan Ležandrov uslov je zadovoljen.

Pošto je

$$P = f_y y(x, \hat{y}, \hat{y}') = -2,$$
$$Q = f_y y'(x, \hat{y}, \hat{y}') = 0,$$
$$R = f'_y y'(x, \hat{y}, \hat{y}') = 2,$$

Jakobijeva jednačina,

$$\frac{d}{dx}(Ru') + (Q' - P)u = 0,$$

se svodi na

$$u'' + u = 0.$$

Jakobijev direktan metod,

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = c_1 \frac{\partial \hat{y}}{\partial \alpha} + c_2 \frac{\partial \hat{y}}{\partial \beta},$$

generiše opšte rešenje ove jednačine,

$$u(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Sada možemo analitički odrediti konjugovanu vrednost. Vrednost $\bar{a}$ zadovoljava

$$\frac{u_1(\bar{a})}{u_2(\bar{a})} = \frac{u_1(a)}{u_2(a)},$$

što, u ovom slučaju, daje

$$\frac{\sin \bar{a}}{\cos \bar{a}} = \frac{\sin 0}{\cos 0},$$

tj.

$$\mathrm{tg}\bar{a} = \mathrm{tg}0 = 0.$$

Sledi da je

$$\bar{a} = \pi.$$

Takođe, konjugovanu tačku možemo odrediti i grafički, posmatrajući jednoparametarsku familiju ekstremala

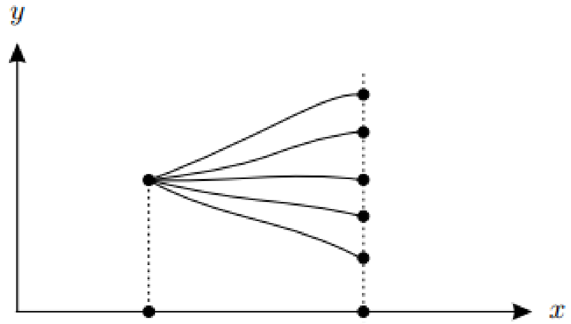
$$y(x) = \alpha \sin x,$$

koja ishodi iz početne tačke (videti sliku 4.5). Jasno je da se "prava" ekstremala i ekstremale njoj bliske seku u $\bar{a} = \pi$. ✓

4.4 Pokretne granice - uslovi

4.4.1 Prirodni granični uslovi

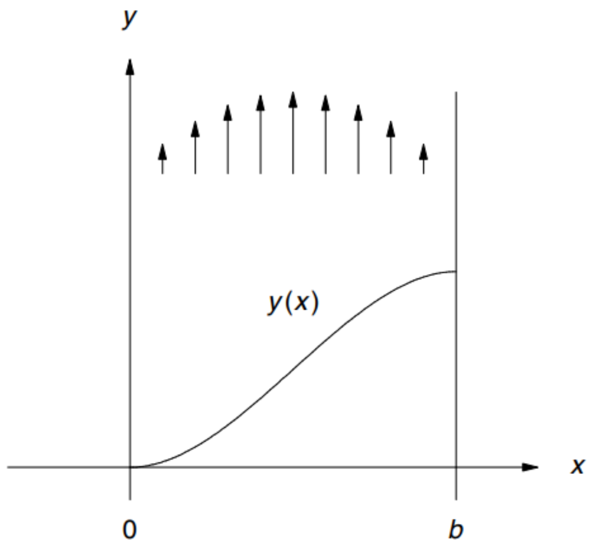
U većini problema koje smo proučavali su bila zadata oba granična uslova. Međutim, u nekim situacijama je deo problema optimizacije i određivanje jednog ili više graničnih uslova (videti sliku 4.6).



Slika 4.6. Promenljiva krajnja tačka

Primer 4.3. (Zermelov[6] problem navigacije).

Zamislimo čamac koji prelazi reku (videti sliku 4.7). Obale reke su para-



Slika 4.7. Prelaženje reke

lelne prave i rastojanje između njih smo označili sa b. Uzećemo da leva obala bude y-osa. Pretpostavićemo da nizvodna struja ima brzinu koja zavisi od x,

$$v = v(x),$$

i da se čamac kreće konstantnom brzinom c ($c > v$), u mirnoj vodi, tako da

[6]Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953) - nemački matematičar

je brzina promene položaja čamca

$$\frac{dx}{dt} = c\cos\theta,$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x) + c\sin\theta,$$

gde je $\theta = \theta(x)$ ugao upravljanja čamcem. Zamislimo da čamac kreće iz koordinatnog početka. Koja kriva $y = y(x)$ minimizira vreme putovanja preko reke? Za vreme prelaska važi da je

$$T = \int_0^b \frac{dt}{dx}dx = \int_0^b \frac{1}{c\cos\theta}dx.$$

Da bismo ovaj problem sagledali na standardan način, treba podintegralnu funkciju da zapišemo kao funkciju od v, c i y'. Pošto je

$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v + c\sin\theta}{c\cos\theta},$$

možemo pisati

$$y' \cdot c\cos\theta - v = \pm c\sqrt{1 - \cos^2\theta}.$$

Nakon kvadriranja obe strane,

$$c^2\cos^2\theta y'^2 - 2vc\cos\theta y' + v^2 = c^2(1 - \cos^2\theta),$$

pa dobijamo

$$(c^2 - v^2)\frac{1}{\cos^2\theta} + 2vy'c\frac{1}{\cos\theta} - c^2(1 + y'^2) = 0.$$

Rešavajući po $\frac{1}{\cos\theta}$, dobijamo da je

$$T = \int_0^b \frac{\sqrt{c^2(1 + y'^2) - v^2(x)} - v(x)y'}{c^2 - v^2(x)}dx,$$

gde je $v(x)$ poznata funkcija. Naveli smo samo jedan granični uslov za ovaj problem, početnu tačku

$$y(0) = 0.$$

Krajnja tačka može biti bilo gde duž suprotne obale, $x = b$. Različite krajnje tačke će dati različita vremena za koja čamac pređe reku. Deo ovog problema je i pronalaženje tačke za koju će pomenuto vreme biti minimalno. ✓

Imajući na umu ovaj primer, minimizirajmo

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y')dx,$$

pri čemu su x-koordinate krajnjih tačaka date, a y-koordinate nisu. Videli smo da je prva varijacija oblika

$$\delta J = \varepsilon \int_a^b [f_y(x, \hat{y}, \hat{y'})\eta + f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y'})\eta']dx.$$

Primenićemo parcijalnu integraciju. Radi jednostavnosti ćemo pratiti Lagranžov pristup. Sledi da je

$$\int_a^b f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y'})\eta']dx = \eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\bigg|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \eta \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx,$$

pa prva varijacija dobija oblik

$$\delta J = \varepsilon\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\bigg|_{x=a}^{x=b} + \varepsilon \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta(x)dx.$$

Prva varijacija se mora anulirati za sve $\eta(x)$. To znači da će to važiti i u krajnjim tačkama i Ojler-Lagranžova jednačina mora biti zadovoljena. Ako "levi" granični uslov (u početnoj tački) nije preciziran, $\eta(x)$ se ne mora anulirati u $x = a$ i umesto toga zahtevamo da je

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(a, \hat{y}(a), \hat{y}'(a)) = 0. \tag{4.11}$$

Slično, ako "desni" granični uslov (u krajnjoj tački) nije preciziran, $\eta(x)$ se ne mora anulirati u $x = b$ i umesto toga zahtevamo da je

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(b, \hat{y}(b), \hat{y}'(b)) = 0. \tag{4.12}$$

Ove dve jednačine se često nazivaju *prirodni granični uslovi.*

4.5 Jake varijacije

4.5.1 Problemi sa slabim varijacijama

Ojler-Lagranžova jednačina, ojačan Ležandrov uslov i ojačan Jakobijev uslov su dovoljni uslovi za slabe lokalne ekstreme. Oni su najviše obeležili takozvani klasični varijacioni račun (pre-Weierstrassian calculus of variations). Nažalost, ovi uslovi nisu dovoljni za jake lokalne ekstreme.

Primer 4.4.

Posmatrajmo funkcionelu

$$J[y] = \int_a^b (y' + 1)^2 y'^2 dx$$

sa graničnim uslovima

$$y(a) = y_a, \ \ y(b) = y_b.$$

Pošto nedostaje zavisna promenljiva, Ojler-Lagranžova jednačina za ovaj problem se svodi na

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 4y'^3 + 6y'^2 + 2y' = \alpha.$$

Sledi da y' mora biti konstanta i da je ekstremala za ovaj problem prava

$$y = mx + k$$

koja povezuje dve granične tačke.

Pogledajmo Ležandrov test. Za našu ekstremalu,

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 2(6m^2 + 6m + 1)$$

(videti sliku 4.8). Gde je R pozitivno, a gde je negativno? Označimo sa m_1 i m_2 dva rešenja jednačine

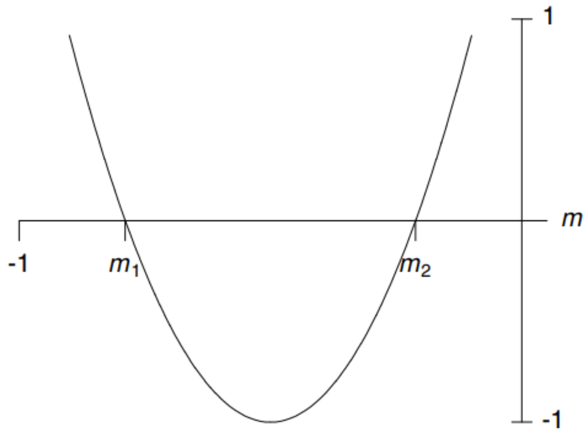
$$6m^2 + 6m + 1.$$

Rešavajući jednačinu, dobijamo

$$m_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 24}}{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

Dakle, $m_1 \approx -0.788675$ i $m_2 \approx -0.21132$. Pošto je R konkavna funkcija po m, sledi da je:

$$R > 0 \text{ za } m < m_1 \text{ ili } m > m_2;$$
$$R < 0 \text{ za } m_1 < m < m_2.$$



Slika 4.8. Grafički prikaz za R

Prema tome, ojačan Ležandrov uslov za minimum je zadovoljen za $m < m_1$ ili $m > m_2$ i odgovarajući uslov za maksimum je zadovoljen za $m_1 < m < m_2$.

Za Jakobijev uslov je dovoljno napomenuti da je

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = c_1 \frac{\partial y}{\partial m} + c_2 \frac{\partial y}{\partial k} = c_1 x + c_2$$

opšte rešenje Jakobijeve jednačine i da se

$$\Delta(x, a) = u_2(a) u_1(x) - u_1(a) u_2(x)$$

svodi na

$$\Delta(x, a) = x - a.$$

Ovo rešenje se anulira u $x = a$, ali se nigde više ne anulira. Ne postoji konjugovana tačka i ojačan Ležandrov uslov je zadovoljen.

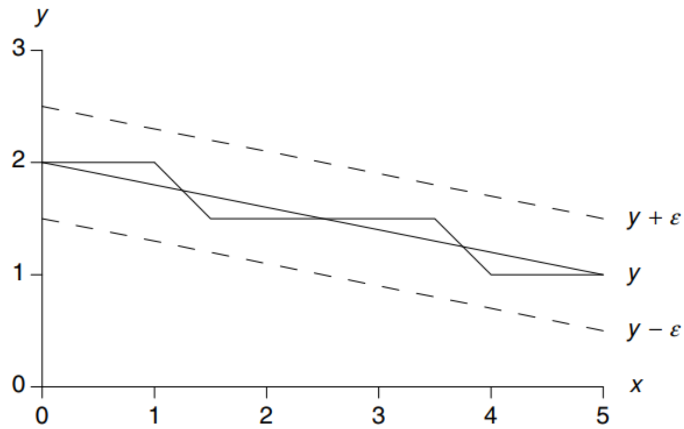
Naša ekstremala zadovoljava dovoljne uslove za slab lokalni minimum (kada je $m < m_1$ i $m > m_2$) i za slab lokalni maksimum (kada je $m_1 < m < m_2$). Ipak, ekstremala nije minimum ili maksimum (u odnosu na jake varijacije) za $-1 < m < 0$.

To se najjasnije vidi kada razmatramo minimum. Posmatrajmo pravu

$$y = -\frac{1}{5}x + 2, \;\; 0 \leq x \leq 5,$$

sa graničnim uslovima

$$y(0) = 2, \;\; y(5) = 1.$$



Slika 4.9. Ekstremala koja je izlomljena linija

U bilo kojoj, proizvoljno maloj, okolini ove ektremale, gde imamo slabu normu i jaku varijaciju, možemo spojiti naše krajnje tačke izlomljenom linijom koja se sastoji od segmenata koji imaju nagib 0 i -1 (videti sliku 4.9). Za ovu izlomljenu liniju će funkcionela J biti 0, pa će ona biti minimum za J. Možemo se zapitati da li korišćenje ekstremala u vidu izlomljene linije može biti problematično. Međutim, uvek možemo učiniti glatkim delove gde se javlja "špic" ekstremale i tako napraviti neprekidno diferencijabilnu funkciju čiji je integral proizvoljno blizak nuli. Pravi problem je da izvod razlike ekstremala u vidu izlomljene linije i ektremala u vidu prave ne ide u 0 kada ε teži u 0. Uvek će postojati delovi ove razlike sa nagibom

$$-1 - (\frac{1}{5}) = -\frac{4}{5}.$$

Napomenimo da problem nije isključivo vezan za postojanje ovakvih ekstremala. Zapravo, one su na vrhu "ledenog brega" i to je samo mali korak ka razmatranju jakih varijacija. ✓

Primer 4.5.

Posmatrajmo funkcionelu

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y'^3)dx,$$

pri čemu su granični uslovi

$$y(0) = 0, \;\; y(1) = 0.$$

Prvi integral za ovaj problem je oblika

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 2y' + 3y'^2 = \alpha.$$

Sledi da je y' konstanta i da je ekstremala prava

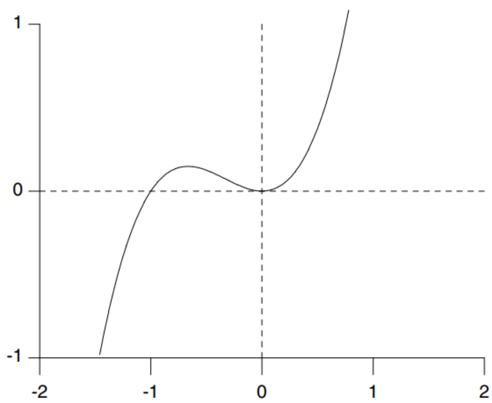
$$y = 0 \ \text{ za } \ 0 < x < 1.$$

Duž ove ekstremale, $J[y]$ je jednako nuli.

Za ovu ekstremalu

$$R = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right|_{y=0} = 2$$

i ojačan Ležandrov uslov za minimum je zadovoljen. Takođe,



Slika 4.10. Indikatrisa

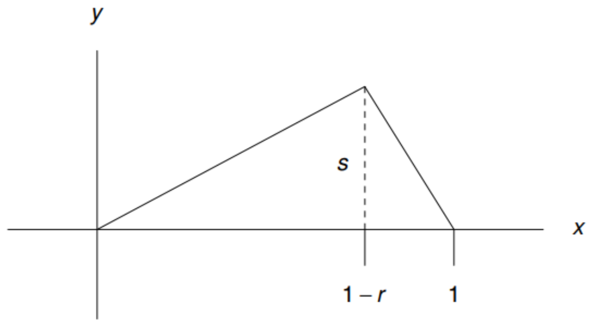
$$\Delta(x, 0) = x,$$

pa ne postoji konjugovana tačka te je i ojačan Jakobijev uslov ispunjen. Dakle, svi uslovi za slab lokalni minimum su ispunjeni. Prikaz indikatrise (videti sliku 4.10) pokazuje da ne postoji prava koja je tangenta na dve različite tačke indikatrise.

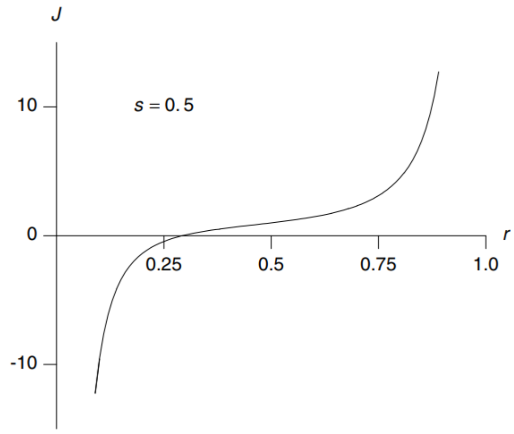
Uprkos svemu ovome, $J[y]$ se može učiniti negativnim. Posmatrajmo funkciju

$$y = \begin{cases} \dfrac{sx}{1-r}, & 0 \le x \le 1-r, \\[2ex] \dfrac{s(1-x)}{r}, & 1-r \le x \le 1 \end{cases}$$

(videti sliku 4.11). Za ovu funkciju,



Slika 4.11. "Špicasta" varijacija



Slika 4.12. $J[y]$ za "špicastu" varijaciju

$$J[y] = \int_0^{1-r} \frac{s^2}{(1-r)^2}\left(1 + \frac{s}{1-r}\right)dx + \int_{1-r}^{1} \frac{s^2}{r^2}\left(1 - \frac{s}{r}\right)dx,$$

pa je

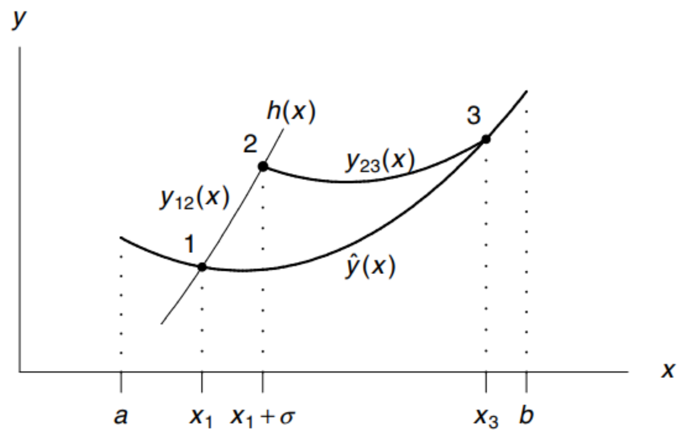
$$J[y] = \frac{s^2}{r(1-r)}\left[1 + \frac{sr}{1-r} - \frac{s(1-r)}{r}\right].$$

Slika 4.12 prikazuje grafik ove funkcije za tipičnu vrednost od s. ✓

Uslovi kojima smo se bavili su potrebni, ali ne i dovoljni za jake varijacije. Postoji dodatni uslov koji je dobio ime po Vajerštrasu. U nastavku ćemo formulisati taj uslov.

4.5.2 Vajerštrasov uslov

Zamislimo da imamo ekstremalu, $y = \hat{y}(x)$, bez špiceva (videti sliku 4.13). Neka tačka 1, sa koordinatama (x_1, y_1), leži na ovoj krivoj i neka tačka 3, sa



Slika 4.13. Jaka varijacija

koordinatama (x_3, y_3), takođe leži na ovoj krivoj, ali tako da se nalazi desno od tačke 1. Neka proizvoljna kriva, $y = h(x)$, seče ekstremalu u tački 1. Neka tačka 2, čija je x-koordinata $x_1 + \sigma$, bude tačka krive $y = h(x)$, ali tako da se nalazi desno od tačke 1. Napomenimo da se nagib krive $y = h(x)$ u tački 1 razlikuje od nagiba $\hat{y}(x)$ u tački 1. Ovo ostaje tačno čak i ako pomerimo tačku 2 bliže tački 1 duž $y = h(x)$. Neka je $y_{23}(x)$ ekstremala koja povezuje tačke 2 i 3.

Označimo sa I_{12} vrednost našeg integrala između tačaka 1 i 2 duž luka $y_{12}(x)$, sa I_{23} vrednost našeg integrala između tačaka 2 i 3 duž luka $y_{23}(x)$ i sa I_{13} vrednost našeg integrala između tačaka 1 i 3 duž $\hat{y}(x)$. Po formuli za promenljivu krajnju tačku, imamo

$$I_{23} - I_{13} = -\left[\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + q\frac{\partial f}{\partial y'}\right]\sigma.$$

Vrednosti x, y i y' u ovom izrazu su procenjene duž $\hat{y}$, u tački 1. Za malo σ, imamo da je

$$I_{12} = f(x_1, \hat{y_1}, q)\sigma.$$

Za varijaciju integrala možemo pisati

$$I_{12} + I_{23} - I_{13} = \left[f(x_1, \hat{y_1}, q) - f(x_1, \hat{y_1}, \hat{y_1}') - \frac{\partial f}{\partial y'}(x_1, \hat{y_1}, \hat{y_1}')(q - \hat{y_1}')\right]\sigma.$$

Ovaj izraz mora biti nenegativan ako $\hat{y}(x)$ treba da bude minimum. Tačka 1 je bila proizvoljna u gornjem razmatranju. Budući da je to slučaj, posmatrajmo

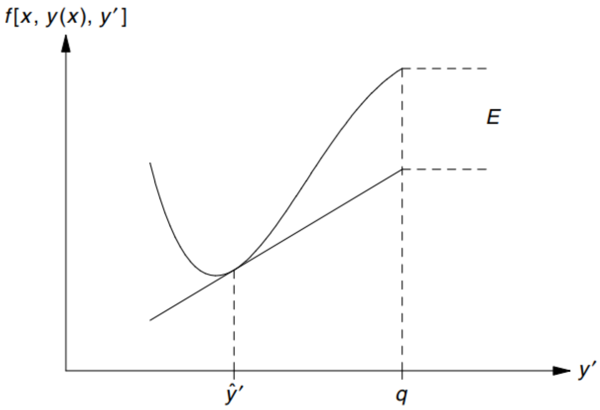
$$E(x, y, p, q) = f(x, y, q) - f(x, y, p) - \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, p)(q - p).$$

Ova funkcija je poznata kao Vajerštrasova[7] E-funkcija. Sada možemo formulisati novi potreban uslov u terminima ove funkcije.

Vajerštrasov uslov:

Da bi funkcionela $J[y]$ imala jak lokalni minimum (maksimum) u $y = \hat{y}(x)$, mora važiti da je $E(x, \hat{y}, \hat{y}', q) \geqslant 0$ (≤ 0) u svakoj tački od $y = \hat{y}(x)$ i za svaku konačnu vrednost q.

Vajerštrasov uslov ima jednostavnu geometrijsku interpretaciju (videti sliku 4.14). On implicira da indikatrisa mora ležati iznad tangente kroz $\hat{y}'$.



Slika 4.14. Vajerštrasov uslov

Evo male tabele u kojoj su navedeni svi potrebni uslovi za jak lokalni ekstrem koje smo do sada videli.

Potrebni uslovi za jak ekstrem:

(a) Ojler-Lagranžov uslov;
(b) Ležandrov uslov;
(c) Jakobijev uslov;
(d) Vajerštrasov uslov;

Pogledajmo sada neke jednostavne primere korišćenja Vajerštrasovog potrebnog uslova.

[7]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) - nemački matematičar

Primer 4.6.

Prethodno smo proučavali funkcionelu

$$J[y] = \int_0^b f(x, y, y')dx = \int_0^b (y'^2 - y^2)dx,$$

pri čemu je $0 < b < \pi$ i granični uslovi

$$y(0) = 0, \;\; y(b) = 1.$$

Zaključili smo da ekstremala

$$\hat{y}(x) = \frac{\sin x}{\sin b}$$

zadovoljava sve kriterijume da bude slab lokalni minimum. Proverimo sada Vajerštrasov uslov. Za ovaj problem, E-funkcija je oblika

$$\begin{aligned} E(x, \hat{y}, \hat{y}', q) &= f(x, \hat{y}, q) - f(x, \hat{y}, \hat{y}') - \frac{\partial f}{\partial y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')(q - \hat{y}') \\ &= (q^2 - \hat{y}^2) - [(\hat{y}')^2 - \hat{y}^2] - 2\hat{y}'(q - \hat{y}') \\ &= q^2 - 2q\hat{y}' + (\hat{y}')^2 \\ &= (q - \hat{y}')^2. \end{aligned}$$

Dakle, jasno je da je

$$E(x, \hat{y}, \hat{y}', q) \geqslant 0,$$

pa je Vajerštrasov uslov ispunjen. ✓

Primer 4.7.

Za funkcionelu

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y'^3)dx,$$

pri čemu su granični uslovi

$$y(0) = 0, \;\; y(1) = 0,$$

videli smo da je ekstremala koja nas zanima, oblika

$$\hat{y}(x) = 0 \;\text{ za }\; 0 < x < 1,$$

zapravo prava nultog nagiba. Vajerštrasova E-funkcija za ovu ekstremalu se svodi na

$$E(x, \hat{y}, \hat{y}', q) = q^2(1 + q)$$

i jasno je da ona može biti bilo kog znaka, u zavisnosti od znaka za q. Prema tome, Vajerštrasov uslov nije ispunjen i ekstremala $y = 0$ nije jak lokalni minimum. ✓

Primer 4.8.

Za funkcionelu

$$J[y] = \int_a^b (y' + 1)^2 y'^2 dx,$$

ekstremale su prave nagiba m. E-funkcija za ovaj skup ekstremala je oblika

$$\begin{aligned} E(x, \hat{y}, \hat{y}', q) &= q^2(q+1)^2 - m^2(m+1)^2 - 2m(m+1)(2m+1)(q-m) \\ &= (q-m)^2[q^2 + 2(m+1)q + (3m^2 + 4m + 1)]. \end{aligned}$$

Znak E-funkcije zavisi od znaka izraza u uglastim zagradama. Ovaj izraz je kvadratna funkcija po q i ima minimum u

$$q = -(m+1).$$

Za ovu vrednost q, izraz u uglastim zagradama se svodi na

$$m(m+1).$$

Za $m < -1$ ili $m > 0$, ovaj izraz je pozitivan i Vajerštrasov potreban uslov za minimum je ispunjen. Za $-1 < m < 0$, ovaj izraz je negativan i Vajerštrasov uslov za minimum (u odnosu na jake varijacije) nije ispunjen. ✓

Poglavlje 5

Dovoljni uslovi

Potrebnim uslovima Ojlera, Lagranža i Jakobija smo se bavili u prethodnom delu ovog rada. Ovi uslovi nisu dovoljni za jake lokalne ekstreme. Vajerštras je 1879. godine formulisao četvrti potreban uslov, koristeći svoju E-funkciju. On je takođe shvatio da može da ojača i kombinuje ova četiri potrebna uslova kako bi izveo dovoljne uslove koji garantuju postojanje jakih lokalnih ekstrema.

Hilbert[1] je 1900. godine pojednostavio dokaz za Vajerštrasove dovoljne uslove. Naš cilj, u ovom poglavlju, je da razumemo Vajerštrasove dovoljne uslove i Hilbertov dokaz tih dovoljnih uslova. Zatim ćemo pogledati Karateodorijev[2] metod ekvivalentnih varijacionih problema. Karateodorijev elegantan metod se ponekad naziva i "kraljevski put" do varijacionog računa. Prateći Hilbertove i Karateodorijeve pristupe, prvo moramo razumeti šta se podrazumeva pod pojmom "polje ekstremala".

Više detalja o narednim temama se može pronaći u literaturi koja je korišćena za realizaciju ovog poglavlja, a to je: [2] i [9]. Slike koje se nalaze u ovom poglavlju su preuzete iz [9].

5.1 Polje ekstremala

Označimo sa D domen u (x, y)-ravni i neka je

$$y = \phi(x, c) \tag{5.1}$$

jednoparametarska familija krivih koja pokriva D. Ako jedan i samo jedan član ove familije prolazi kroz svaku tačku domena D, onda ovu familiju krivih

[1]David Hilbert (1862-1943) - nemački matematičar

[2]Constantin Carathéodory (1873-1950) - grčki matematičar

zovemo *regularno polje* na domenu D. Činjenica da je polje regularno podrazumeva da postoji funkcija sa jednom vrednošću,

$$c = \psi(x, y),$$

takva da je

$$y = \phi(x, \psi(x, y))$$

za svaku tačku našeg domena.

Za regularno polje, nagib tangente na krivu $y = \phi(x, c)$ u svakoj tački sada definiše funkciju $p(x, y)$, koju zovemo *nagib polja*. Ovaj nagib je definisan analitički preko dve jednačine:

$$p(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, c), \quad c = \psi(x, y). \tag{5.2}$$

Primer 5.1.

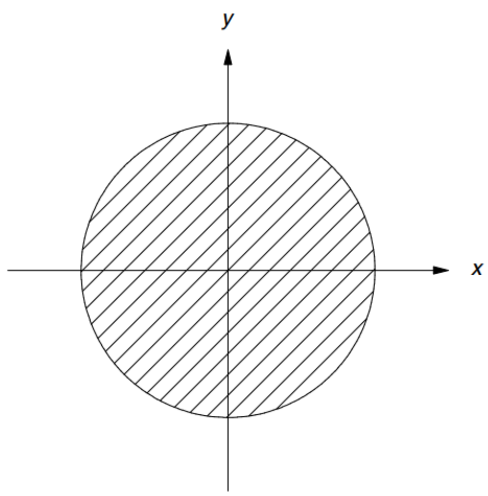
Posmatrajmo jedinični krug

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Skup paralelnih pravih

$$y = x + c$$

je regularno polje na tom krugu sa nagibom $p(x, y) = 1$ (videti sliku 5.1). Funkcija $\psi(x, y)$ je oblika



Slika 5.1. Regularno polje

$$c = \psi(x, y) = y - x.$$

Jednoparametarska familija parabola

$$y = (x - c)^2 - 1$$

nije regularno polje na ovom krugu jer u opštem slučaju dve parabole mogu proći kroz istu tačku. ✓

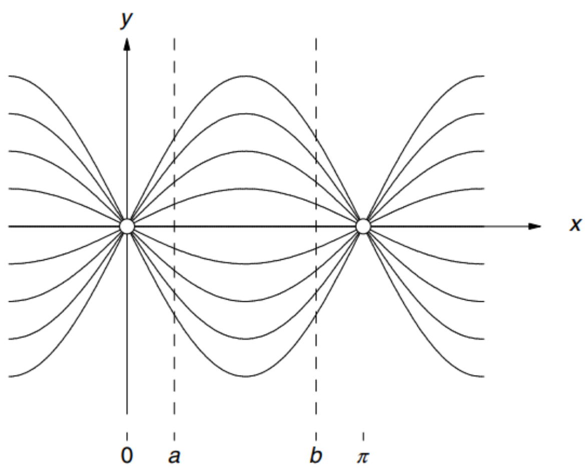
Ako sve krive jednoparametarske familije krivih prolaze kroz istu tačku i formiraju snop[3] krivih, one ne formiraju regularno polje. Međutim, ako ove krive pokrivaju ceo domen D i nikada ne seku jedna drugu sem u centru ili ivici snopa, kaže se da one čine *centralno polje*.

Primer 5.2.

Snop sinusnih krivih

$$y = \phi(x, c) = s \sin x$$

(videti sliku 5.2) je centralno polje za dovoljno male trake $0 \leq x \leq b$, za $b < \pi$. Primetimo da je to regularno polje za trake $a \leq x \leq b$, za $a > 0$ i $b < \pi$. ✓

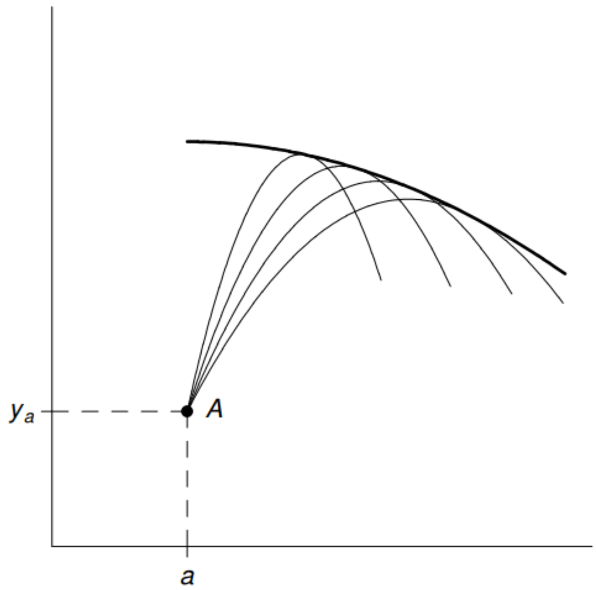


Slika 5.2. Snop sinusnih krivih

Ako imamo regularno ili centralno polje koje je istovremeno i jednoparametarska familija ekstremala za varijacioni problem, onda takvo polje nazivamo *polje ekstremala*.

[3]U geometriji, snop je familija geometrijskih objekata sa zajedničkim svojstvom. Na primer: skup pravih koje prolaze kroz datu tačku u ravni, skup kružnica koje prolaze kroz dve date tačke u ravni...

Prekrivanje domena poljem ekstremala je blisko povezano sa Jakobijevim uslovom. Za jednostavne probleme, najlakši način za generisanje jednoparametarske familije ekstremala je početi sa opštim rešenjem Ojler-Lagranžove jednačine i zadati jedan od graničnih uslova, recimo za tačku A. To nam onda daje jednoparametarsku familiju eksremala, $y = \phi(x, c)$, koja ishodi iz tačke A. Jedna od ovih ekstremala može zadovoljavati drugi granični uslov, recimo za tačku B. Označimo tu ekstremalu sa $\hat{y}(x)$. Videli smo, u poglavlju 4, da će se dva beskonačno bliska člana jednoparametarske familije koja ishodi iz tačke A seći u konjugovanoj tački ležeći na obvojnici[4] familije krivih (videti sliku 5.3). Konjugovana tačka leži na c-diskriminanti definisa-



Slika 5.3. Omotač (obvojnica)

noj sa dve jednačine:

$$y = \phi(x, c), \quad \frac{\partial y}{\partial c}(x, c) = 0.$$

Ako ekstremala $\hat{y}(x)$ ne dodiruje ovu obvojnicu, obližnje ekstremale, koje su članovi naše jednoparametarske familije, ne seku $\hat{y}(x)$. Tada imamo centralno polje koje obuhvata $\hat{y}(x)$ i koje prekriva neku okolinu od $\hat{y}(x)$. Ukoliko $\hat{y}(x)$ dodiruje obvojnicu, obližnjie ekstremale će seći $\hat{y}(x)$ i u tom slučaju nemamo to polje. Dakle, da bismo imali polje ekstremala oko posmatrane ekstremale, mora biti zadovoljen ojačan Jakobijev uslov.

[4]Obvojnica (engl. *envelope*) za familiju krivih u ravni je kriva koja koja je tangentna na svaki član te familije u nekoj tački.

Za polje ekstremala, možemo reći nešto više o nagibu polja $p(x, y)$. Naime, diferencirajući jednačine (5.2), vidimo da je

$$p_x = \phi_{xx} + \phi_{xc}c_x, \;\; p_y = \phi_{xc}c_y. \tag{5.3}$$

Diferenciranjem jednačine (5.1) dobijamo

$$c_x = -\frac{\phi_x}{\phi_c}, \;\; c_y = \frac{1}{\phi_c}. \tag{5.4}$$

Iz naših jednačina nagiba (5.2) i jednačina (5.3) i (5.4) sledi da je

$$p_x + pp_y = \phi_{xx}.$$

Pošto je $\phi(x, c)$ ekstremala i zadovoljava Ojler-Lagranžovu jednačinu za svaku vrednost c, znamo iz ultra-diferenciranog oblika (poglavlje 2) da je

$$f_{y'y'}\phi_{xx} + f_{y'y}\phi_x + f_{y'x} - f_y = 0.$$

Parcijalni izvodi podintegralne funkcije f naše funkcionele su funkcije čiji je argument x, $\phi(x, c)$ i $\phi_x(x, c)$. Sledi da nagib $p(x, y)$ mora zadovoljavati PDJ prvog reda

$$(p_x + pp_y)f_{y'y'} + pf_{y'y} + f_{y'x} - f_y = 0. \tag{5.5}$$

Videćemo u nastavku da se ova ista PDJ pojavljuje i u drugačijem obliku.

5.2 Hilbertov invarijantni integral

Vratimo se na problem nalaženja ekstrema funkcionele

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx,$$

pri čemu su granični uslovi

$$y(a) = y_a, \;\; y(b) = y_b.$$

Pretpostavićemo da smo pronašli ekstremalu, $y = \hat{y}(x)$, koja zadovoljava oba granična uslova i koja je okružena poljem ekstremala. Ovo implicira da $y = \hat{y}(x)$ zadovoljava i Ojler-Lagranžovu jednačinu i ojačan Jakobijev uslov.

Hajde sada da ispitamo totalnu varijaciju

$$\Delta J = J[y] - J[\hat{y}]$$

tj.

$$\Delta J = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx - \int_a^b f(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x))dx \tag{5.6}$$

za krive $y = y(x)$ koje zadovoljavaju naše granične uslove i koje leže u domenu koji je prekriven poljem ekstremala. Zahtevamo da je $\Delta J \geqslant 0$ za minimum i da je $\Delta J \leq 0$ za maksimum. U poglavlju 2 smo pisali $y(x) = \hat{y}(x) + \varepsilon\eta(x)$, ali više ne možemo da koristimo taj pristup jer sada dopuštamo i jake varijacije, pa ne možemo garantovati da je $\eta(x)$ malo.

Umesto toga, pratićemo Hilbertov pristup i zameniti drugi integral u jednačini (5.6) sa njemu ekvivalentnim koji ne zavisi od putanje integracije,

$$\int_a^b \Phi(x, y(x), y'(x))dx.$$

Želimo da ovaj integral ima vrednost $J[\hat{y}(x)]$, ne samo za $y = \hat{y}(x)$, nego za sve $y = y(x)$ koji zadovoljavaju naše granične uslove i leže u domenu koji je prekriven poljem ekstremala. Kakav oblik $\Phi(x, y, y')$ treba da ima?

Hilbert je uzeo da opšti oblik $\Phi(x, y, y')$ bude

$$\Phi(x, y, y') = f(x, y, p) + (y' - p)f_{y'}(x, y, p),$$

gde je $p = p(x, y)$ još uvek nepoznata funkcija. Napomenimo da je $\Phi(x, y, y')$ opšteg oblika

$$\Phi(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y',$$

pri čemu su, u ovom slučaju,

$$M(x, y) = f(x, y, p) - pf_{y'}(x, y, p) \ \text{ i } \ N(x, y) = f_{y'}(x, y, p).$$

Videli smo, u poglavlju 3, da integrali ovog oblika ne zavise od putanje integracije ako

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Pošto je

$$\frac{\partial M}{\partial y} = f_y - p(f_{y'y} + f_{y'y'}p_y)$$

i

$$\frac{\partial N}{\partial x} = f_{y'x} + f_{y'y'}p_x,$$

sada zahtevamo da $p = p(x, y)$ zadovoljava

$$(p_x + pp_y)f_{y'y'} + pf_{y'y} + f_{y'x} - f_y = 0.$$

Ova jednačina je identična PDJ za nagib našeg polja ekstremala (5.5). Dakle, ako izaberemo da $p = p(x, y)$ bude taj nagib, integral

$$\int_a^b [f(x, y, p) + (y' - p)f_{y'}(x, y, p)]dx \tag{5.7}$$

je nezavisan od putanje integracije. Za sve što u nastavku budemo radili ćemo podrazumevati da je $p = p(x, y)$ nagib našeg polja ekstremala.

Za $y = \hat{y}(x)$ i $y' = \hat{y}'(x)$, sada imamo da je $p(x, y) = \hat{y}'(x)$ (duž $y = \hat{y}(x)$) i integral (5.7) se svodi na $J[\hat{y}]$. Pošto je integral (5.7) nezavisan od putanje integracije, takođe ima vrednost $J[\hat{y}]$ za sve krive $y = y(x)$, koje zadovoljavaju naše granične uslove i leže u domenu koji je pokriven pomenutim poljem ekstremala.

5.3 Vajerštrasova E-funkcija

Posmatrajmo totalnu varijaciju

$$\Delta J = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx - \int_a^b f(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x))dx.$$

Ukoliko zamenimo drugi integral u totalnoj varijaciji sa Hilbertovim invarijantnim integralom (5.7), dobijamo da je

$$\Delta J = \int_a^b [f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p)f_{y'}(x, y, p)]dx,$$

pri čemu se sada integracija vrši nad proizvoljnom krivom u domenu koji je prekriven poljem ekstremala. Primetimo da je podintegralna funkcija upravo Vajerštrasova E-funkcija,

$$E(x, y, p, y') = f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p)f_{y'}(x, y, p).$$

Dakle, možemo pisati da je

$$\Delta J = \int_a^b E(x, y, p, y')dx.$$

Kao deo dovoljnog uslova za minimum ćemo zahtevati da E-funkcija bude nenegativna. Ako je $E(x, y, p, y') \geqslant 0$, onda je $\Delta J \geqslant 0$. Sa druge strane, kao deo dovoljnog uslova za maksimum ćemo zahtevati da E-funkcija bude nepozitivna. Ako je $E(x, y, p, y') \leq 0$, onda je $\Delta J \leq 0$.

Za slabe ekstreme, jedan ili drugi uslov mora biti zadovoljen za sve x i y koji su blizu ekstremala $\hat{y}$ i za sve vrednosti $y'(x)$ koje su blizu $p(x, y) = \hat{y}'(x)$. Dodajući ove nove uslove na naše ranije zahteve dolazimo do dovoljnih uslova za slabe ekstreme.

Dovoljni uslovi za slab ekstrem:

(1) $\hat{y}(x)$ je ekstremala, tj. rešenje Ojler-Lagranžove jednačine koje zadovoljava odgovarajuće granične uslove.

(2) Ekstremala $\hat{y}(x)$ se može ugraditi u polje ekstremala. (Ovaj uslov može biti zamenjen sa ojačanim Jakobijevim uslovom.)

(3) Vajerštrasova E-funkcija, $E(x, y, p, y')$, je konstantnog znaka za sve (x, y) koji su dovoljno blizu ekstremale $\hat{y}(x)$ i za sve vrednosti $y'(x)$ koje su dovoljno blizu $p(x, y) = \hat{y}'(x)$. Za minimum treba da važi da je $E(x, y, p, y') \geqslant 0$, a za maksimum da je $E(x, y, p, y') \leq 0$.

Za jak ekstrem, ponovo zahtevamo da je $E \geqslant 0$ (za minimum) ili $E \leq 0$ (za maksimum) za sve vrednosti x i y koje su blizu ekstremale $\hat{y}(x)$, ali sada za sve $y'(x)$, a ne samo za one koji su blizu $p(x, y) = \hat{y}'(x)$. Dodavanje ovih novih uslova na naše ranije zahteve nam pruža dovoljne uslove za jake ekstreme.

Dovoljni uslovi za jak ekstrem:

(1) $\hat{y}(x)$ je ekstremala, tj. rešenje Ojler-Lagranžove jednačine koje zadovoljava odgovarajuće granične uslove.

(2) Ekstremala $\hat{y}(x)$ se može ugraditi u polje ekstremala. (Ovaj uslov može biti zamenjen sa ojačanim Jakobijevim uslovom.)

(3) Vajerštrasova E-funkcija, $E(x, y, p, y')$, je konstantnog znaka za sve (x, y) koji su dovoljno blizu ekstremale $\hat{y}(x)$ i za sve vrednosti $y'(x)$. Za minimum treba da važi da je $E(x, y, p, y') \geqslant 0$, a za maksimum da je $E(x, y, p, y') \leq 0$.

Primer 5.3.

Posmatrajmo funkcionelu

$$J[y] = \int_0^1 y'^3 dx,$$

pri čemu su granični uslovi

$$y(0) = 0, \ \ y(1) = 1.$$

Pošto nedostaje zavisna promenljiva, Ojler-Lagranžova jednačina za ovaj problem se svodi na

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 3y'^2 = \alpha.$$

Sledi da je y' konstantno. Ekstremale za ovaj problem su prave oblika

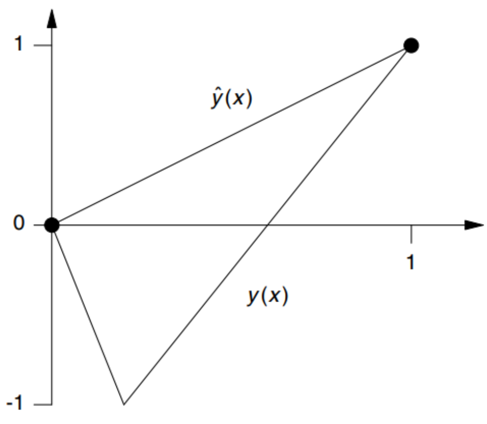
$$y = mx + k.$$

Posmatrajmo ekstremalu $\hat{y}(x) = x$, koja povezuje dve granične tačke. Snop pravih $y = mx$ sa centrom $(0,0)$ je centralno polje koje uključuje $\hat{y}(x) = x$. Nagib polja za ovo polje je $p(x,y) = m$. Duž $\hat{y}(x) = x$, $p(x,y) = 1$.

Vajerštrasova E-funkcija za ovaj problem je oblika

$$\begin{aligned} E(x,y,p,y') &= f(x,y,y') - f(x,y,p) - (y'-p)f_{y'}(x,y,p) \\ &= y'^3 - m^3 - 3m^2(y'-m) \\ &= (y'-m)^2(y'+2m). \end{aligned}$$

Za y' koje je blizu $m = 1$, $E \geqslant 0$ i svi dovoljni uslovi za slab lokalni minimum su zadovoljeni. Dakle, $\hat{y}(x) = x$ je slab lokalni minimum. Međutim, $\hat{y}(x) = x$ nije jak lokalni minimum zato što ako je y' proizvoljno, znak E-funkcije neće ostati konstantan.



Slika 5.4. Izlomljena linija

Zaista, hajde da uporedimo vrednost funkcionele duž ekstremale $\hat{y}(x) = x$ sa vrednošću naše funkcionele duž izlomljene linije

$$y = \begin{cases} -5x, & 0 \le x \le 0.2, \\ 2.5x - 1.5, & 0.2 \le x \le 1. \end{cases}$$

(videti sliku 5.4). Duž $\hat{y} = x$,

$$J[\hat{y}(x)] = \int_0^1 1dx = 1.$$

Duž izlomljene linije,

$$J[y(x)] = \int_0^{0.2} (-5)^3 dx + \int_{0.2}^1 (2.5)^3 dx = -12.5.$$

Jasno, $J[y(x)] < J[\hat{y}(x)]$. ✓

Provera dovoljnosti pomoću Vajerštrasove E-funkcije može biti komplikovana. Dakle, bilo bi korisno kada bismo imali jednostavniji uslov. U poglavlju 4.5 smo videli da je Vajerštrasov uslov zapravo lokalni uslov konveksnosti za podintegralnu funkciju našeg varijacionog problema. U cilju da dokažemo dovoljnost, zamenićemo taj uslov lokalne konveksnosti jačim uslovom. To će biti uslov globalne konveksnosti.

Dovoljni uslovi za jak minimum:

(1) $\hat{y}(x)$ je ekstremala, tj. rešenje Ojler-Lagranžove jednačine koje zadovoljava odgovarajuće granične uslove.

(2) Ekstremala $\hat{y}(x)$ ne sadrži konjugovane tačke.

(3) U svim tačkama ekstremale i neke njene okoline, za sve konačne vrednosti od y' važi: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(x, y, y') > 0$.

Obratimo pažnju na razliku između uslova

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(x, y, y') > 0 \tag{5.8}$$

i ojačanog Ležandrovog uslova. Nejednakost (5.8) mora da se primeni za sve y', a ne samo duž posmatrane ekstremale.

Primer 5.4.

Za Fermaov tip integrala sa podintegralnom funkcijom oblika

$$f = g(x, y)\sqrt{1 + y'^2},$$

lako se pokazuje da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{g(x,y)}{(\sqrt{1+y'^2})^3}.$$

Stoga, svaka ekstremala koja ne sadrži konjugovanu tačku daje jak lokalni minimum, pod uslovom da je

$$g(x,y) > 0$$

duž ekstremale. ✓
Ova opšta klasa integrala obuhvata rastojanja, brahistohronu i minimalnu obrtnu površ.

5.4 Kraljevski put

Karateodori je 1935. godine uveo metod koji je ekvivalentan varijacionim problemima. Ovaj metod je jedan od najbržih i najelegantnijih načina za izvođenje dovoljnih uslova za probleme varijacionog računa, toliko da je Karateodorijev metod nazvan kraljevskim putem do varijacionog računa. Ovaj metod takođe ističe vezu između varijacionog računa i klasične Hamilton[5]-Jakobijeve teorije. Hajde da prođemo kraljevskim putem.

Počnimo sa problemom minimiziranja funkcionele

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx,$$

pri čemu su granični uslovi

$$y(a) = y_a, \ \ y(b) = y_b. \tag{5.9}$$

Neka je $S(x,y)$ dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija i neka je C kontura[6]. Neka $y = y(x)$ zadovoljava granične uslove (5.9). Duž konture C, važi

$$\int_a^b \left(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y}y'\right)dx = \int_a^b \frac{dS}{dx}dx = S(b, y_b) - S(a, y_a).$$

Uvedimo dalje

$$f^*(x,y,y') \equiv f(x,y,y') - \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial y}y'.$$

[5]William Rowan Hamilton (1805-1865) - irski matematičar, fizičar i astronom
[6]Kontura je zatvorena kriva koja nema samopresečnih tačaka.

Duž konture C, funkcionela

$$\begin{aligned} J^*[y] &= \int_a^b f^*(x,y,y')dx \qquad (5.10) \\ &= \int_a^b f(x,y,y')dx - [S(b,y_b) - S(a,y_a)] \end{aligned}$$

se razlikuje od naše originalne funkcionele, $J[y]$, do na konstantu. Prema tome, svaka kontura koja minimizira $J[y]$ takođe minimizira i $J^*[y]$. Za dva varijaciona problema, sa podintegralnim funkcijama $f(x,y,y')$ i $f^*(x,y,y')$, se kaže da su *ekvivalentna*. Svaka moguća $S(x,y)$ generiše ekvivalentan varijacioni problem. Karateodori je tražio $S(x,y)$ i nagib polja $p(x,y)$ koji novi varijacioni problem čine prilično lakim za rešavanje. Zahtevao je da $S(x,y)$ i $p(x,y)$ budu izabrani tako da

$$f^*(x,y,y') = 0, \text{ za } y' = p(x,y),$$

$$f^*(x,y,y') \geqslant 0, \text{ za } y' \neq p(x,y),$$

ili, ekvivalentno, tako da

$$f(x,y,y') - \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial y}y' = 0, \text{ za } y' = p(x,y), \qquad (5.11)$$

$$f(x,y,y') - \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial y}y' \geqslant 0, \text{ za } y' \neq p(x,y), \qquad (5.12)$$

za sve x i y (ili bar za sve x i y koji su dovoljno blizu rešenja).

Ako želimo da minimiziramo funkcionelu (5.10), sada je dovoljno da izaberemo, kao naše rešenje, krivu koja zadovoljava

$$y' = p(x,y),$$

pri čemu su granični uslovi

$$y(a) = y_a, \ \ y(b) = y_b.$$

Duž ove minimizirajuće krive,

$$\int_a^b f(x,y,y')dx = S(b,y_b) - S(a,y_a). \qquad (5.13)$$

Pošto se minimum funkcionele $J^*[y]$ dobija za $y' = p(x,y)$, izvod leve strane jednačine (5.11) po y' se anulira. Odatle sledi da je

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,p(x,y)). \qquad (5.14)$$

Jednačina (5.10) sada može biti zapisana kao

$$\frac{\partial S}{\partial x} = f(x, y, p(x, y)) - p(x, y)\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, p(x, y)). \tag{5.15}$$

Karateodori je poslednje dve navedene jednačine smatrao prilično važnim i nazvao ih je *fundamentalne jednačine varijacionog računa.* Drugi ih zovu *Karateodorijeve jednačine.*

Ako se Karateodorijeve jednačine, jednačine (5.14) i (5.15), iskoriste da eliminišu S_x i S_y u nejednakosti (5.12), dobijamo da je

$$f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p)f_{y'}(x, y, p) \geqslant 0.$$

Ova nejednakost može biti zapisana korišćenjem Vajerštrasove E-funkcije kao

$$E(x, y, p, y') \geqslant 0.$$

Nju smo već videli i to je bio jedan od uslova za jak minimum.

Ostaje da detaljnije okarakterišemo $S(x, y)$ i $p(x, y)$. U tu svrhu, uvedimo novu promenljivu

$$z \equiv \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, p). \tag{5.16}$$

Sada možemo uvesti Hamiltonovu funkciju (Hamiltonijan)

$$H(x, y, z) = zp - f(x, y, p).$$

Sada sledi, iz Karateodorijeve jednačine, da $S(x, y)$ mora zadovoljavati PDJ

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}) = 0. \tag{5.17}$$

Jednačina (5.17) je poznata kao *Hamilton-Jakobijeva jednačina.*

Ako možemo rešiti Hamilton-Jakobijevu jednačinu po $S(x, y)$, onda dobijamo, koristeći jednačine (5.14) i (5.16), da je

$$z = \frac{\partial S}{\partial y}. \tag{5.18}$$

Ova promenljiva određuje nagib $p(x, y)$ našeg polja,

$$y' = p(x, y) = \frac{\partial H}{\partial z}(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}). \tag{5.19}$$

Možemo integraliti ovaj nagib, poštujući granične uslove (5.9), kako bismo minimizirali našu funkcionelu i rešili naš problem.

Uzimajući običan izvod jednačine (5.18), dobijamo

$$z' = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} y'.$$

Uzimajući parcijalni izvod po y Hamilton-Jakobijeve jednačine dobijamo

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0.$$

Kombinujući ove dve jednačine dobijamo

$$z' = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}). \tag{5.20}$$

Jednačine (5.19) i (5.20) su Hamiltonove jednačine. Rešenje dobijeno korišćenjem Hamilton-Jakobijeve jednačine je ekstremala, tj. rešenje Ojler-Lagranžove jednačine. Obično je najlakše integraliti Ojler-Lagranžovu jednačinu direktno, ali nam Hamilton-Jakobijeva jednačina u nekim slučajevima pruža alternativni način za nalaženje rešenja.

Primer 5.5.

Posmatrajmo problem minimiziranja rastojanja,

$$J[y] = \int_0^b \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

između početne tačke i tačke (b, y_b). Dakle, želimo da minimiziramo našu funkcionelu, pri čemu su granični uslovi

$$y(0) = 0 \text{ i } y(b) = y_b. \tag{5.21}$$

Rešavanje ovog problema ćemo započeti uvođenjem nove promenljive

$$z = \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, p) = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \tag{5.22}$$

pri čemu je

$$p = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Hamiltonijan sada ima oblik

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= zp - f(x, y, p) \\ &= \frac{z^2}{\sqrt{1 - z^2}} - \sqrt{1 + \frac{z^2}{1 - z^2}} \\ &= -\sqrt{1 - z^2} \end{aligned}$$

i Hamilton-Jakobijeva jednačina je oblika

$$\frac{\partial S}{\partial x} - \sqrt{1 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2} = 0$$

ili

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

Potražimo rešenje koje zadovoljava

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = \alpha, \ \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = 1 - \alpha.$$

S obzirom na ove jednačine, sledi da je

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{\alpha},$$

pa je

$$S(x, y) = \sqrt{\alpha} x + g(y).$$

Takođe,

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \sqrt{1 - \alpha},$$

pa je

$$S(x, y) = \sqrt{1 - \alpha} y + h(x).$$

Upoređujući ova dva rešenja, vidimo da je

$$S(x, y) = \sqrt{\alpha} x + \sqrt{1 - \alpha} y + \beta. \tag{5.23}$$

Zbog jednačine (5.13), $S(x, y)$ za ovaj problem je samo rastojanje između početne tačke i tačke (x, y). Dakle, želimo rešenje Hamilton-Jakobijeve jednačine koje zadovoljava

$$S(x, 0) = |x|, \ \ S(0, y) = |y|. \tag{5.24}$$

Nažalost, ne postoje vrednosti α i β koje će dati rešenje (5.23) koje zadovoljava ove uslove. Međutim, postoji još jedno rešenje, takozvani singularni integral.

Da bismo dobili taj singularni integral, moramo uzeti obvojnicu rešenja (5.23), eliminisanjem α između jednačine (5.23) i jednačine

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{x}{2\sqrt{\alpha}} - \frac{y}{2\sqrt{1 - \alpha}} = 0.$$

Ova poslednja jednačina implicira da je

$$\alpha = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

i ako zamenimo ovaj izraz za α u rešenju (5.23), dobijamo da je

$$S(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \beta.$$

Za $\beta = 0$ sada nemamo problem da zadovoljimo jednačine (5.24). Za ovaj problem, $S(x, y)$ je Euklidsko rastojanje.

Sledi da je

$$z = \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

i zbog jednačine (5.22) imamo da je

$$p = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{y}{x}.$$

Ako integralimo nagib našeg polja,

$$\frac{dy}{dx} = p(x, y) = \frac{y}{x},$$

poštujući granične uslove (5.21), dobijamo da je naše rešenje prava

$$y(x) = \frac{y_b}{b} x. \checkmark$$

Karateodorijev metod ekvivalentnog varijacionog problema nas brzo vodi ka Ojler-Lagranžovoj jednačini i Vajerštrasovom uslovu i predstavlja osnovu za mnoga savremena istraživanja u oblasti varijacionog računa.

Zaključak

U radu smo se bavili dovoljnim uslovima za postojanje ekstrema varijacionog problema. Najpre smo formulisali problem brahistohrone i dali pregled osnovnih pojmova teorije diferencijalnih jednačina koje smo koristili u nastavku rada.

Nakon toga smo predstavili najjednostavniji problem. U tu svrhu smo definisali pojam funkcionele. Potom smo se bavili njegovim rešavanjem i cilj je bio nalaženje ekstrema pomenute funkcionele, pri čemu su bili zadovoljeni odgovarajući granični uslovi. S obzirom da smo pristupili rešavanju problema koristeći prvu varijaciju, tražili smo uslov koji je ekvivalentan tome da je prva varijacija te funkcionele jednaka nuli. Pratili smo tri pristupa koja su nas dovela do Ojler-Lagranžove jednačine. Prvi pristup je bio Ojlerov, a onda smo nastavili sa Lagranžovim pristupom. Zatim smo razmatrali i način na koji je Di Boa Rejmond modifikovao Lagranžovo izvođenje.

Dalje smo analizirali primere kod kojih su funkcionele specijalnog oblika i posvetili se detaljnijem proučavanju problema brahistohrone koji smo predstavili na samom početku rada.

Zatim smo se vratili na problem nalaženja ekstrema funkcionele, ali sada u svetlu druge varijacije. Izveli smo još neke uslove koji potrebni ili dovoljni da bi ta funkcionela imala lokalni ekstrem. Počeli smo sa Ležandrovim pristupom, a zatim prikazali i Jakobijev pristup. Takođe, kroz primer problema navigacije smo ilustrovali šta se dešava u situacijama u kojima nam nisu zadata oba granična uslova. Ukazali smo na probleme sa slabim varijacijama i prešli na upotrebu jakih varijacija. Izveli smo Vajerštrasov uslov koji je još jedan u nizu potrebnih uslova za postojanje ekstrema naše funkcionele.

Međutim, videvši da uslovi koje smo predstavili u prethodnom delu rada nisu dovoljni za jake lokalne ekstreme, nastavili smo da proučavamo Vajerštrasove dovoljne uslove i Hilbertov dokaz istih. Kako bismo ih mogli proučavati, uveli smo pojam polja ekstremala, Hilbertov invarijantni integral i Vajerštrasovu E-funkciju. Na kraju smo prikazali i Karateodorijev metod koji predstavlja najbrži i najelegantniji način za izvođenje dovoljnih uslova za probleme varijacionog računa.

Literatura

[1] B. van Brunt, *Calculus of Variations*, Springer, New York, 2004.

[2] J. A. Burns, *Introduction to The Calculus of Variations and Control with Modern Applications*, CRC Press, Virginia Tech, Blacksburg, Virginia, 2014.

[3] M. Čolić, *Matematika za studente fizike: diferencijalne jednačine i elementi teorije verovatnoće i statistike*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2020.

[4] B. Dacorogna, *Introduction to The Calculus of Variations*, Imperial College Press, London, 2004.

[5] P. Freguglia, M. Giaquinta, *The Early Period of the Calculus of Variations*, Birkhäuser, Switzerland, 2016.

[6] Lj. Gajić, *Predavanja iz Uvoda u analizu*, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Novi Sad, 2013.

[7] Lj. Gajić, *Predavanja iz Analize I*, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Novi Sad, 2006.

[8] H. Kielhöfer, *Calculus of Variations - An Introduction to the One-Dimensional Theory with Examples and Exercises*, Springer, Rimsting, Bayern, Germany, 2018.

[9] M. Kot, *A First Course in the Calculus of Variations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014.

[10] L. P. Lebedev, M. J. Cloud, V. A. Eremeyev, *ADVANCED ENGINEERING ANALYSIS - The Calculus of Variations and Functional Analysis with Applications in Mechanics*, World Scientific, Singapore, 2012.

[11] D. Liberzon, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Princeton University Press, New Jersey, 2012.

[12] F. Rindler, *Calculus of Variations*, Springer, Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry, United Kingdom, 2018.

[13] N. Teofanov, M. Žigić, *Osnovi optimizacije*, Departman za matematiku i informatiku, PMF, Novi Sad, 2018.

[14] *Introduction to the calculus of variations*, The Open University, United Kingdom, 2016.

[15] $https : //en.wikipedia.org/wiki/Spherical_shell$

Biografija

Jelena Dimitrić je rođena 2.2.2000. godine u Šapcu. Završila je osnovnu školu "Janko Veselinović" u Šapcu 2014. godine kao nosilac Vukove diplome. Iste godine je upisala Medicinsku školu "Dr Andra Jovanović" u Šapcu i završila je 2018. godine sa odličnim uspehom. Zatim je upisala integrisane akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, na studijskom programu Master profesor matematike. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom integrisanih studija u junskom ispitnom roku 2023. godine, stekavši pravo za odbranu master rada. Školske 2020/2021. godine je bila stipendista grada Šapca, a školske 2022/2023. godine stipendista Fonda za mlade talente Republike Srbije - stipendija "Dositeja".

Novi Sad, jun 2023.

Jelena Dimitrić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Jelena Dimitrić
AU

Mentor: dr Milica Žigić
ME

Naslov rada: Dovoljni uslovi za postojanje ekstrema varijacionog problema i primeri
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2023.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5/99/15/0/30/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Varijacioni račun
ND

Ključne reči: variacioni problem, funkcionela, ekstrem, prva varijacija, potrebni uslovi, Ojler-Lagranžova jednačina, druga varijacija, dovoljni uslovi
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom master radu se bavimo dovoljnim uslovima za postojanje ekstrema varijacionog problema. U prvom poglavlju formulišemo problem brahistohrone i dajemo pregled osnovnih pojmova teorije diferencijalnih jednačina koji se pojavljuju u ovom radu. U drugom poglavlju predstavljamo

najjednostavniji problem i u nastavku rada se bavimo njegovim rešavanjem. Definišemo funkcionelu i cilj nam je nalaženje njenog ekstrema, pri čemu su zadovoljeni odgovarajući granični uslovi. Pošto u ovom poglavlju proučavamo prvu varijaciju, tražimo uslov koji je ekvivalentan tome da je prva varijacija pomenute funkcionele jednaka nuli. Tako stižemo do Ojler-Lagranžove jednačine koju izvodimo na tri načina. Počinjemo sa Ojlerovim pristupom, a onda nastavljamo sa Lagranžovim pristupom. Razmatramo i način na koji je Di Boa Rejmond modifikovao Lagranžovo izvođenje. Treće poglavlje je posvećeno analiziranju primera kod kojih su funkcionele specijalnog oblika. Takođe, u ovom poglavlju se detaljnije bavimo problemom brahistohrone. U četvrtom poglavlju se vraćamo na problem nalaženja ekstrema funkcionele, ali sada u svetlu druge varijacije. Počinjemo sa Ležandrovim pristupom i sagledavamo njegove prednosti i nedostatke, a zatim proučavamo i Jakobijev pristup. Takođe, kroz primer problema navigacije ilustrujemo šta se dešava u situacijama u kojima nam nisu zadata oba granična uslova. Na samom kraju poglavlja se bavimo jakim varijacijama. Ukazujemo na probleme sa slabim varijacijama i izvodimo Vajerštrasov uslov. Peto poglavlje sadrži gradivo koje je cilj ovog rada. Uslovi koji su predstavljeni u prethodnom delu rada nisu dovoljni za jake lokalne ekstreme. Stoga u ovom poglavlju proučavamo Vajerštrasove dovoljne uslove i Hilbertov dokaz istih. Uvodimo pojam polja ekstremala, Hilbertov invarijantni integral i Vajerštrasovu E-funkciju. Na kraju poglavlja prikazujemo Karateodorijev metod ekvivalentnih varijacionih problema koji se ponekad naziva i "kraljevski put" do varijacionog računa i predstavlja najbrži i najelegantniji način za izvođenje dovoljnih uslova.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 8.5.2023.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Nenad Teofanov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor: dr Milica Žigić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Sanja Konjik, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Jelena Dimitrić
AU

Mentor: Milica Žigić, PhD
MN

Title: Sufficient conditions for the existence of extremum of the variational problem and examples
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2023.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (5/99/15/0/30/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Variational calculus
SD

Subject/Key words: variational problem, functional, extremum, the first variation, necessary conditions, Euler–Lagrange equation, the second variation, sufficient conditions
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: In this master thesis we deal with sufficient conditions for the existence of extremum of the variational problem. In the first chapter we formulate the brachistochrone problem and we give a review of some basic concepts of the theory of differential equations that appear in this thesis.

In the second chapter we present the simplest problem and in the continuation of the thesis we deal with its solution. We define the functional and our goal is to find the extremum of that functional, where the appropriate boundary conditions are satisfied. Since in this chapter we study the first variation, we are looking for a condition equivalent to setting the first variation of the mentioned functional equal to zero. Thus we arrive at Euler-Lagrange equation. We derive this equation in three ways. We begin with Euler's approach and then move on to Lagrange's approach. We consider du Bois-Reymond's modification of Lagrange's approach. The third chapter is dedicated to the analysis of examples, where the functionals are of a special form. Also, in this chapter we deal with the brachistochrone problem in more detail. In the fourth chapter, we return to the problem of finding the extremum of a functional, but in light of the second variation. We begin with Legendre's approach to this problem and look at its advantages and disadvantages. Then we study the Jacobi's approach. Also, through an example of a navigation problem, we illustrate what happens in situations where both boundary conditions are not given to us. At the end of the chapter we deal with strong variations. We point out problems with weak variations and derive the Weierstrass's condition. Fourth section represents the goal of this thesis. The conditions presented in the previous part of the thesis are not sufficient for strong relative extremes. For this reason, in this chapter we study Weierstrass's sufficient conditions and Hilbert's proof of them. We introduce the field of extemals, Hilbert's invariant integral and Weierstrass's E-function. At the end of the chapter, we show Caratheodory's method of equivalent variational problems. Caratheodory's method is sometimes called the royal road to the calculus of variations. This method is one of the quickest and most elegant ways of deriving sufficient conditions for the calculus of variations.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 8.5.2023.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Nenad Teofanov, PhD, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Mentor: Milica Žigić, PhD, Associate Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member: Sanja Konjik, PhD, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad