UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Renata Šimak

Broj pi

Master rad

Novi Sad, 2023.

Sadržaj

Predgovor

Master rad "Broj π" je podeljen u tri glave, i svaka glava sadrži više poglavlja. Prva glava uvodi osnovne pojmove vezane za broj π, jednu od najpoznatijih matematičkih konstanti koja se i danas široko koristi, kao u matematici tako i u drugim prirodnim naukama. Broj π definisaćemo kao površinu kruga poluprečnika 1. Zatim ćemo dati Lambertov dokaz o njegovoj iracionalnosti, odnosno da se vrednost broja π ne može izraziti preko razlomka. Lindeman je dokazao, i više od toga, da je broj π i transcendentan, što znači da ne postoji polinom sa racionalnim koeficijentima čiji bi koren bio broj π. Ovo, između ostalog pokazuje da ga ne možemo izraziti ni kao konačan red ili rezultat numeričkih ili algebarskih operacija (sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja celih brojeva). Predstavićemo i metod kojim je Arhimed, koji je živeo za matematiku i od matematike, uporedjivao odnos obima upisanih i opisanih pravilnih mnogouglova i prečnika odgovarajuće kružnice. Takođe, biće data i geometrijska interpretacija broja π, koja se kroz istoriju razvijala u Egipatu, Kini, Grčkoj, Indiji, i drugim evropskim zemljama. Navešćemo i zanimljiv navod iz Biblije u kojem se iznenadajuće pojavljuje broj π.

U drugoj glavi predstavićemo modernija saznanja o broju π, počevši od klasičnog perioda do danas. Osnovna karakteristika ovog perioda je da se uvodi korišćenje novih metoda tog vremena za preciznije odredjivanje vrednosti broja π, broja sa beskonačnim decimalnim zapisom. Naime, korišćene su funkcije date preko beskonačnih redova, na primer Gama funkcija, Rimanove zeta funkcija i druge. Poznati matematičar Leonard Ojler razvio je i jednu od najpoznatijih jednačina, u kojoj se koristi pet fundamentalnih matematičkih konstanti 0, 1, e, i i π. U ovoj glavi razmotrićemo i druga dostignuća poznatih matematičara, koji su dali pečat ovom vremenu. Na primer, sredinom 20. veka san je postao stvarnost, kada je D. F. Ferguson zamenio papir i olovku mehaničkom opremom, kao što je stoni kalkulator, i izračunao 808 cifara decimalnog zapisa broja π. Posle kalkulatora, ENIAC je bio prvi elektronski računar, kojim je izračunato 2037 cifara broja π. Veliki napredak u razvoju brzih algoritama za izračunavanje broja π su dali Džonatan i Piter Borvajn. Njihov algoritam se bazirao na neizmeničnoj upotrebi aritmetičke i geometrijske sredine niza brojeva i konvergirao je ka π. Zatim je formulisan i drugi algoritam koji je kvadratno konvergirao ka π, a već sledeći algoritam u nizu je kubno konvergirao ka π, čime se značajno ubrzava metod za odredjivanje novih decimala u zapisu broja π. Naime, ovim metodama je moguće odrediti čak četiri cifre u sekundi. Nemoguće je znati njegovu tačnu vrednost, jer je broj decimalnih mesta beskonačan, ali se znanje o ovom broju stalno ažurira i to zahvaljujući novim tehnologijama.

Treća glava je posvećena primenama broja π, kroz primere gde se pojavljuju pomalo neočekivani ishodi formulisanih problema. Prvi primer daje odnos obima i poluprečnika dva ili više koncentričnih krugova, i upoređuje ga za male i velike vrednosti poluprečnika. Drugi govori o dva neočekivana aspekta ponašanja zamišljenog konopca oko ekvatora, kada mu se dužina samo malo poveća. Zaključak ovog poglavlja je da broj π ne uzimamo zdravo za gotovo, jer ume da iznenadi, bez obzira što je uvek isti.

Novi Sad, 2023.

Renata Šimak

Glava 1

Uvod

Broj π, jedinstven u matematici, danas je postao sveprisutan i u popularnoj kulturi. Poznat je i kao Arhimedova konstanta ili Ludolfov broj. Želja da se razume broj π, a prvobitno i potreba, da se izračuna što tačnija vrednost broja pi, koji predstavlja odnos obima kruga i njegovog prečnika, izazivala je matematičare – velike i manje velike – tokom mnogih vekova, a posebno danas, kada je π je pružio ubedljive primere mogućih dometa računarske matematike. Oznaku π uveo je matematičar Vilijem Džouns 1707. godine, kada je objavio svoje delo "Novi uvod u matematiku", a popularizovao ju je Leonard Ojler koji je odgovoran za većinu moderne nomenklature. Oznaka π potiče od grčke reči "perimetros", što znači meriti okolo.

Danas se broj π definiše formalno kao prva pozitivna nula funkcije sin definisane preko stepenog reda. Prva hiljadu i jedna decimalna broja π data je u nastavku

$$
\begin{aligned}
\pi \approx 3{,}&1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445\\
&9230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709\\
&3844609550582231725359408128481117450284102701938521105559644\\
&6229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712\\
&0190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458\\
&7006606315588174881520920962829254091715364367892590360011330\\
&5305488204665213841469519415116094330572703657595919530921861\\
&1738193261179310511854807446237996274956735188575272489122793\\
&8183011949129833673362440656643086021394946395224737190702179\\
&8609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271\\
&4526356082778577134275778960917363717872146844090122495343014\\
&6549585371050792279689258923542019956112129021960864034418159
\end{aligned}
$$

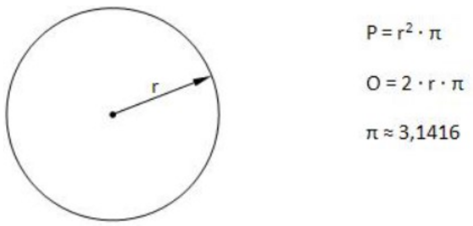
81362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320838142061717766914730359825349042875546873115956286388235378759375195778185778053217122680661300192787661119590921642019893

U uvodnom poglavlju definisaćemo broj π, i kao najznačajniji deo, dokazati da je on iracionalnan broj koristeći poznati Burbakijev dokaz. Transcendentnost broja π će biti komentarisana, bez dokaza. Zatim ćemo dati pregled razvoja geometrijskih metoda za određivanje njegove vrednosti. Čitaoca za više detalja upućujemo na [7], [4], a po pitanju istorijskog dela i na [8], [9], a dalje i na literaturu koje je tu navedena.

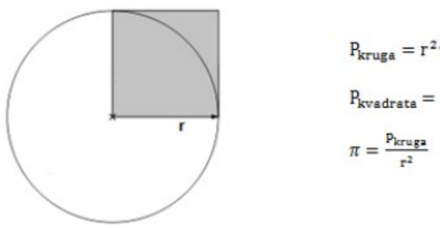
1.1 Broj bez kraja

Definicija 1.1. *Odnos obima kruga i njegovog prečnika predstavlja broj π.*

Definicija 1.2. *Odnos površine kruga i površine kvadrata konstruisanog nad njegovim poluprečnikom naziva se broj π.*



Definicija 1.1



Definicija 1.2

Broj π iza zareza ima beskonačan broj decimala i taj niz nije periodičan. Drugim rečima, to znači da je π iracionalnan, ne može se predstaviti preko razlomka. Njegovu iracionalnost dokazao je Johann Heinrich Lambert 1761. godine.

Definicija 1.3. *Realan broj α nazivamo racionalnim ako se može zapisati u obliku $\frac{p}{q}$, gde je p ceo broj, a q je prirodan broj.*

Definicija 1.4. *Ukoliko realan broj nije racionalan za njega kažemo da je iracionalan.*

Primeri nekih iracionalnih brojeva su: π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \ldots$

Primer 1.1. $\sqrt{2}$ je iracionalan broj.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, tj. racionalan broj i da je $NZD(p,q) = 1$. Odave, kada ga kvadriramo dobijamo da je $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$, pa sledi da je $2q^2 = p^2$, te zaključujemo da je p^2 paran. Odavde dalje sledi da $2|p$, pa je $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Sada ćemo zameniti p sa $2k$, i dobijamo $2q^2 = (2k)^2$, tj. $g^2 = 2k^2$, te odavde sledi da je i q^2 paran, pa i $2|q$, te je $q = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Sada dobijamo kontradikciju, jer i p i q su deljivi brojem 2 tako da njihov najveći zajednički delilac ne može biti jednak 1. Dokazali smo da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj. $\square$

Mnogo je teži Lambertov dokaz da je broj π je iracionalan. Sledeći dokaz te teoreme, koji je baziran na Burbakijevom, pokazao mi je prof. dr Petar Marković, na čemu mu se zahvaljujem. Pre dokaza glavnog rezultata, treba nam jedna lema.

Lema 1.2. *Za sve $n \geq 0$ važi*

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{e^{n-1}}{n^n}.$$

Dokaz. Počinjemo od poznate nejednakosti koja važi za svako realno $x \geq 0$, da

$$1 + x \leq e^x.$$

Ova nejednakost sledi, na primer, iz definicije broja e primenom Bernulijeve nejednakosti, ili još lakše, iz Maklorenovog reda za eksponencijalnu funkciju. Nejednakost važi i za negativne x, ali to nam neće trebati.

Stoga za svako prirodno k važi

$$\frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} \leq e^{\frac{1}{k}}. \tag{1.1}$$

Sad dokazujemo niz jednakosti:

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot (n-1)^{n-2} \cdot n^{n-1}}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot \ldots \cdot (n-1)^{n-1}} =$$

$$\frac{n^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1)} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^n}{n!}.$$

Konačno, spajanjem poslednje jednakosti i (1.1) dobijamo

$$\frac{n^n}{n!} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(k+1)^k}{k^k} \leq \prod_{i=1}^{n-1} (e^{\frac{1}{k}})^k = \prod_{i=1}^{n-1} e = e^{n-1}.$$

Deljenjem obe strane dobijene nejednakosti sa n^n dobijamo tvrdjenje leme.

$\square$

Sad prelazimo na dokaz iracionalnosti broja π.

Teorema 1.3 (Lambert)**.** *π je iracionalan.*

Dokaz. Neka je b prirodan broj, a n nenegativan ceo broj. Definišemo realne brojeve $A_n(b)$ na sledeći način:

$$A_n(b) = b^n \int_0^{\pi} \frac{x^n(\pi - x)^n}{n!} \sin(x) dx.$$

Pokazaćemo seriju tvrdjenja o ovim brojevima.

Tvrdjenje 1. $A_n(b) > 0$.

Dokaz tvrdjenja 1. Kako je $\frac{x^n(\pi-x)^n}{n!} \sin(x) = 0$ za $x \in \{0, \pi\}$. Sa druge strane, $\frac{x^n(\pi-x)^n}{n!} \sin(x) > 0$ za $x \in (0, \pi)$, pa sledi da je integral

$$\int_0^{\pi} \frac{x^n(\pi - x)^n}{n!} \sin(x) dx > 0,$$

a stoga i

$$A_n(b) = b^n \int_0^{\pi} \frac{x^n(\pi - x)^n}{n!} \sin(x) dx > 0.$$

$\square$

Zatim, dokazujemo i

Tvrdjenje 2. Za svako dovoljno veliko n, $A_n(b) < 1$.

Dokaz tvrdjenja 2. Iz nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo da, za $x \in [0, \pi]$,

$$x(\pi - x) \leq \left(\frac{x + \pi - x}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Iz gornje nejednakosti i leme 1.2 dobijamo da

$$A_n(b) = b^n \int\limits_0^\pi \frac{x^n(\pi-x)^n}{n!}\sin(x)dx \leq \frac{b^n}{n!}\int\limits_0^\pi \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} dx =$$
$$\frac{b^n\pi^{2n+1}}{n!2^{2n}} \leq \frac{b^n\pi^{2n+1}e^{n-1}}{n^n 2^{2n}} = \frac{\pi^{n+1}}{e4^n}\cdot\left(\frac{b\pi e}{n}\right)^n.$$

Levi razlomak je manji od 1 kadgod $n \geq 1$, jer $\pi^2 < 4e$ i $\pi < 4$, dok je desni razlomak manji od 1 kadgod $n > b\pi e$, dakle za svako dovoljno veliko n. $\square$

Sada pretpostavimo da je π racionalan broj, recimo $\pi = \frac{a}{b}$ gde $a \in \mathbb{Z}$ i $b \in \mathbb{N}$. Koristeći pretpostavku $\pi = \frac{a}{b}$, izraz za $A_n(b)$ se transformiše u

$$A_n(b) = b^n \int\limits_0^\pi \frac{x^n(\pi-x)^n}{n!}\sin(x)dx = \int\limits_0^\pi \frac{x^n(b(\frac{a}{b}-x))^n}{n!}\sin(x)dx =$$
$$\frac{1}{n!}\int\limits_0^\pi x^n(a-bx)^n\sin(x)dx.$$

Obeležimo sa $f(x) := x^n(a-bx)^n$. Dakle, $f(x)$ je polinom sa celobrojnim koeficijentima stepena $2n$.

Tvrdjenje 3. Za svako k, $f^{(k)}(0)$ i $f^{(k)}(\frac{a}{b})$ su celi brojevi deljivi sa $n!$.

Dokaz tvrdjenja 3. Iz formule za izvod proizvoda dobija se formula za k-ti izvod od $f(x)$, gde $k < n$, i to je

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{n!}{(n-i)!}x^{n-i}\frac{n!}{(n-k+i)!}(a-bx)^{n-k+i}(-b)^{k-i}.$$

Za $k < n$, svaki od sabiraka u gornjem izrazu za $f^k(0)$, kao i za $f^k(\frac{a}{b})$, postaje 0.

Što se tiče izvoda $f^{(k)}(x)$ za $n \leq k \leq 2n$, dobija se izraz

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=k-n}^{n}\binom{k}{i}\frac{n!}{(n-i)!}x^{n-i}\frac{n!}{(n-k+i)!}(a-bx)^{n-k+i}(-b)^{k-i}.$$

Zamenom vrednost $f^k(0)$, jedino sabirak $i = n$ se ne anulira, i dobijamo

$$f^k(0) = \binom{k}{n}n!\frac{n!}{(2n-k)!}a^{2n-k}(-b)^{k-n}.$$

Kako je $n \leq k \leq 2n$, razlomak $\frac{n!}{(2n-k)!}$ je ceo broj, pa je $f^{(k)}(0)$ ceo broj deljiv sa $n!$.

Slično, za $x = \frac{a}{b}$ i $n \leq k \leq 2n$, dobijamo da se svi sabirci u izrazu za $f^{(k)}(x)$ anuliraju, osim onog kada $i = k - n$. Tada imamo

$$f^k\left(\frac{a}{b}\right) = \binom{k}{k-n} \frac{n!}{(2n-k)!} \frac{a^{2n-k}}{b^{2n-k}} n!(-b)^n =$$
$$\binom{k}{k-n} (-1)^n n! a^{2n-k} b^{k-n} \frac{n!}{(2n-k)!}.$$

Kao i malopre, razlomak $\frac{n!}{(2n-k)!}$ je ceo broj, pa je $f^{(k)}(\frac{a}{b})$ ceo broj deljiv sa $n!$.

Tvrdjenje 4. Ako pretpostavimo da $\pi = \frac{a}{b}$ gde $a \in \mathbb{Z}$ i $b \in \mathbb{N}$, onda je $A_n(b)$ ceo broj za svako celo n.

Dokaz tvrdjenja 4. Računamo $A_n(b)$ uzastopnom primenom parcijalne integracije, uz pretpostavku da $\pi = \frac{a}{b}$.

$$A_n(b) = \frac{1}{n!} \int_0^\pi f(x) \sin(x) dx =$$
$$\frac{1}{n!}(-f(x)\cos(x))\Big|_0^\pi - \frac{1}{n!} \int_0^\pi -f'(x)\cos(x) dx =$$
$$\frac{1}{n!}(-f(x)\cos(x))\Big|_0^\pi + \frac{1}{n!}(f'(x)\sin(x))\Big|_0^\pi - \frac{1}{n!} \int_0^\pi f''(x)\sin(x) dx = \ldots$$
$$\ldots = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{2n} ((-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} f^{(k)}(x) \mathrm{trig}(x))\Big|_0^\pi,$$

gde sa $\mathrm{trig}(x)$ obeležavamo $\sin(x)$ kada je k paran broj, a $\cos(x)$ kada je k neparan broj. Poslednji član sume je kada je $k = 2n$, jer bi se proces parcijalne integracije nastavio koristeći integral od $f^{(2n+1)}(x)\cos(x)dx$, a to je nula jer $f(x)$ je polinom stepena $2n$. Uvrštavanjem vrednosti 0 i π vidimo da je $\mathrm{trig}(x)$ ceo broj za $x \in \{0, \pi\}$, dok je po prethodno dokazanom svaki $f^{(k)}(x)$ ceo broj deljiv sa $n!$ za $x \in \{0, \pi\} = \{0, \frac{a}{b}\}$. Dakle, svaki sabirak u gornjoj sumi je ceo broj, pa stoga i $A_n(b)$ mora biti ceo broj. □

Konačno, iz tvrdjenja 1 i 2 sledi da, za svaki prirodan broj b i dovoljno velike vrednosti celog broja n, $A_n(b)$ ne može biti ceo broj, ali iz tvrdjenja 4 onda dobijamo kontradikciju sa pretpostavkom da je π racionalan broj. □

1.2 O transcendentnosti broja π

Broj π nije moguće izraziti korišćenjem konačnog broja celih brojeva, uz pomoć četiri osnovne operacije i korenovanja, što se naziva da π nije izraziv preko radikala. Još opštije, broj π je transcendentan, tj. ne može se dobiti kao rešenje neke algebarske jednačine oblika:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdot + a_{n-1} x + a_n = 0, \;\; n \in \mathbb{N}$$

sa racionalnim koeficijentima. To je dokazao Ferdinand fon Lindeman 1882. godine. Naravno, svaki polinom sa racionalnim koeficijentima možemo pomnožiti sa proizvodom imenilaca koeficijenata da dobijemo polinom sa celobrojnim koeficijentima koji ima iste korene. Dakle, Lindemanova teorema kaže da ne postoji polinom sa celobrojnim koeficijentima čiji bi koren bio broj π. Ova teorema je mnogo teža od Lambertove, i njen dokaz prevazilazi nivo ove teze.

Transcendentni brojevi su podskup iracionalnih brojeva, a to znači da su svi transcendentni brojevi i iracionalni, ali nisu svi iracionalni transcendentni. Na primer, broj π jeste transcendentan dok je $\sqrt{2}$ iracionalan ali ne i transcendentan, jer je rešenje jednačine $x^2 - 2 = 0$.

Brojevi koji nisu transcendentni se zovu algebarski. O algebarskim brojevima poznato je sledeće.

Teorema 1.4. *Zbir, razlika, proizvod i količnik (sem deljenja nulom) algebarskih brojeva daju ponovo algebarski broj. Dakle, algebarski brojevi čine potpolje polja kompleksnih brojeva.*

1.3 Povezanost Biblije i broja π

Broj π nalazimo i u Bibliji (Prva knjiga o carevima, 7:23). Opisi Solomonovog hrama, 950. godine p.n.e, govore i o livenju velikog, okruglog, bakarnog obrednog suda. I između hrama i žrtvenika nalazio se umivaonik, nazvan "Medeno more" zbog svoje veličine. Broj π nalazimo baš u opisu umivaonika.

"I sali more; deset lakata bješe mu od jednog kraja do drugog, okruglo unaokolo, a pet lakata bješe visoko, a unaokolo mu bješe trideset lakata".

Odnos obima i prečnika iznosi $\pi \approx 30/10 = 3$. Ovo nije precizna vrednost, ali u odbranu Solomonovim zanatlijama, veliki stepen geometrijske preciznosti i nije bio moguć. s obzirom na iracionalnost broja π. Bilo je nemoguće da dođu do savršeno tačnog odnosa, pa su pretpostavili da je u pitanju ceo broj i rekli: "Bilo koji krug koji ima obim veličine tri pesnice ima prečnik veličine jedne pesnice." Oslanjali su se na sva merenja koja su im bila dostupna., a na preciznost koja im je bila dovoljna.

Međutim, pomenimo da je u to vreme bilo i preciznijih procena broja π. Na primer, još davne 1700. god. p. n. e. Egipćani su procijenili π na $3,16$, a Sumeri su računali π kao $3,125$, dok Kinezi od oko 500. god. p. n. e. koriste $\pi = 355/113$.

1.4 Traganje za brojem π geometrijskim putem

Mesopotamija

Biblijkska procena $\pi \approx 3$ nije bila najbolja čak ni u Solomonovo vreme. U Vavilonu (posle 2000. p.n.e.), na jednoj sačuvanoj pločici korišćena je procena $\pi \approx 3.125$ dobijena upisivanjem pravilnog šestougla u krug i pretpostavkom da je obim šestougla oko $\frac{24}{25}$ od obima kruga.

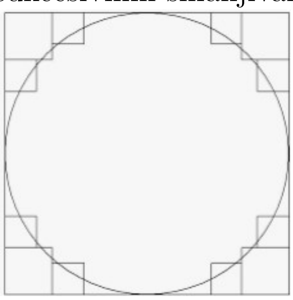
Egipat

Bogati istorijski izvori poticali su iz Egipta. Razvoju matematike doprinela je poljoprivredna proizvodnja, kako merenje zemljišta tako i potrebe navodnjavanja, izgradnja veličanstvenih hramova i piramida. Egipćani su koristili papirus kao materijal za pisanje. Najvažniji su Ahmesov (Rindov) i Moskovski papirus.

Ahmesov (Rindov) papirus

Napisan je oko 1650. godine pre nove ere, od strane sveštenika Ahmesa. Većina od njegovih 80 zadataka, su vezana za svakodnevni život.

Ahmes je ostavio svitak dužine oko 5 m i širine oko $3,3$ m koji predstavlja najstariju matematičku raspravu pronađenu do danas. U četrdesetosmom problemu Ahmesovog papirusa pomenuta je približna vrednost broja π, kada su sukcesivnim smanjivanjem računali površinu kvadrata.



Označimo sa A kvadrat koji je opisan oko kruga poluprečnika 1, vrednost kojom aproksimiramo površinu kruga sa P_0 i prečnik kruga sa $d = 2$.

Površina kruga P_0 prečnika d slična je površini kvadrata A, koji je opisan oko kruga.

$$P_0 = d^2,$$

pa je odavde približna vrednost broja $\pi = 4$.

Ako umanjimo površinu kvadrata za četiri kvadrata, kojima su stranice $\frac{d}{6}$, tada će

$$P_0 = d^2 - 4\left(\frac{d}{6}\right)^2 = \frac{8}{9}d^2,$$

dati da je približna vrednost broja π jednaka $3,555$.

Ako novu vrednost umanjimo za osam kvadrata, stranice $\dfrac{d}{9}$, tada će

$$P_0 = \frac{8}{9}d^2 - 8\left(\frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2 = \frac{256}{81}$$

implicirati da je približna vrednost broja π jednaka $3,1605$.

Moskovski papirus

Napisan je oko 1850. godine pre nove ere, a objavljen je 1830. godine od strane B. A. Turaev i B. B. Struve. Predstavlja svitak dužine oko $0,5$ m i oko $0,8$ m širine. Sadrži 25 zadataka, gde su poznata velika dostignuća egipatske matematike. Već u rešenju desetog zadatka Egipćani su znali obrazac za površinu lopte. Zadatak je tražio da se izračuna površinu polulopte, ako je poluprečnik $4\dfrac{1}{2}$. Ispod opisujemo postupak za rešavanje ovog problrma, koji je dat na Maskovskom papirusu:

Polulopta je polovina jajeta, pa je $\dfrac{1}{9}$ od 9 jednaka 1.

Kad se to duzme od 9 dobija se da je ostatak 8.

Kad se izračuna $\dfrac{1}{9}$ od 8 dobija se: $\dfrac{8}{9}$ (što oni zapisuju kao $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{18}$).

Ako izračunamo ostatak od 8 pri oduzimanju $\dfrac{8}{9}$, dobićemo $7\dfrac{1}{9}$.

Kada izračunamo $7\dfrac{1}{9}$ puta $4\dfrac{1}{2}$ dobijemo 32, što je i bio traženi rezultat.

Ovaj postupak za rešavanje datog problema, današnjom notacijamo, možemo izraziti formulom za površinu (gde je d je prečnik osnove kupole):

$$P = d\left[\left(2d - \frac{1}{9}\cdot 2d\right) - \frac{1}{9}\left(2d - \frac{1}{9}2d\right)\right]$$

tj.

$$P = \left[\left(1 - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right)\right] 2d^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 2d^2 = 2\left(\frac{8}{9}d\right)^2.$$

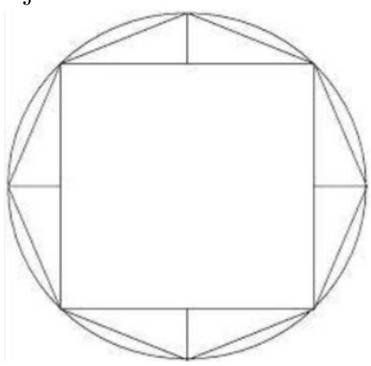
Odavde, zaključujemo da su Egipćani i u vreme Moskovskog papirusa, dakle dva veka pre Ahmesovog papirusa, primenjivali izraz $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$ za površinu kruga što odgovara da je $\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3,1605$.

Grčka

Nakon Ahmesa, Grci su dublje ispitivali temu kružnih mera. Prvi o kom se zna da se ovim problemom bavio bio je Anaksagora početkom 5. veka p.n.e., ali se detaljniji podaci o tom radu ne znaju. Jedino znamo iz Plutarha da je Anaksagora na ovom problemu radio dok je bio u zatvoru.

Antifont

Krajem 5. veka p. n. e. Antifont je radio u Atini i doprineo je izračunavanju broja π dok je razmatrao problem kvadrature kruga. Ideja je bila da se u zadati krug upisuju pravilni poligoni, a u svakom narednom upisivanju sa duplo većim brojem stranica. Nakon upisivanja kvadrata u zadati krug, nad njegovim stranicama se konstruišu jednakokraki trouglovi. Svaki naredni put, se broj ivica udvostručuje, obim i površina poligona su sve bliži obimu i površini kruga, i jednom bi se poligon i krug podudarili. Ovaj metod je u stvari preteča Arhimedovog metoda, ali bez razumevanja graničnih procesa koje je Arhimed imao.



Arhimedov metod

Arhimed je oko 250. p. n. e. prvi u istoriji matematike odredio približnu vrednost broja π, a time i dužinu kružnice, iterativnim matematičkim metodom kojim se može proizvoljno približiti broju π. To je učinio tako što je određivao odnos poluobima upisanih i opisanih pravilnih n-touglova u/oko kružnice poluprečnika 1. Poluobim takve kružnice je π, upisani n-tougao ima manji, a opisani veći poluobim. Povećavanjem vrednosti n dobijaju se sve bolje aproksimacije broja π.

Arhimed je koristio sledeću aproksimaciju za broj $\sqrt{3}$, koju smatra kao poznatu:

$$\frac{265}{163} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

U spisu "Merenje kruga" izveo je formulu za dužinu kružnice koristeći opisane i upisane mnogouglove. Počevši od pravilnih šestouglova, polovljenjem uglova došao je do pravilnih upisanih i opisanih 96-uglova i zaključio da važi:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

odnosno:

$$3,1408 < \pi < 3,1429$$

Možemo videti da je tačno odredio dve decimale.

Arhimed je znao da nijedna od njegove dve dobijene vrednosti nije tačna, ali da je daljim računom istim metodom moguće odrediti približnu vrednost broja π sa proizvoljnom tačnošću. Svi rezultati koje prikazujemo do kraja ove glave koriste taj isti Arhimedov metod, ali za različite n-touglove.

Ponavljamo da je Arhimedova metoda značajna jer pokazuje Arhimedovo razumevanje graničnih vrednosti koja je vekovima ispred svog vremena, i koje nije prevazidjeno sve do Njutnovog i Lajbnicovog otkrića diferencijalnog računa skoro 2000 godina kasnije.

Ptolomej

Oko 150. godine, motivisan svojim astronomskim proračunima, Ptolomej je izračunao $\pi \approx 3\frac{17}{120} \approx 3,14166$, što je dobio računajući obim pravilnog 360-ugla. Pritom je koristio formule analogne adicionim formulama za sinus zbira i razlike uglova.

Kina

Naučnici kažu da su matematičkom značaju doprineli indijske, a kasnije i arapske nauke, ali nije otkriven razvoj kada se ravijala matematika u Kini. Poznato nam je da su bili orijentisani na nalaženje algoritama za rešavanje konkretnih zadataka. Imali su mnoga postignuća u matematici.

Čang Hong

Bio je ministar i astronom cara Antija koji je živeo u 6. veku p.n.e. Pre smrti je zapisao nešto značajno:

$$\frac{(obim\ kruga)^2}{(strana\ opisanog\ kvadrata)^2} = \frac{5}{8}.$$

Za jedinični krug :

$$\frac{\pi^2}{16} = \frac{5}{8}$$

sledi da je $\pi \approx \sqrt{10}$, odnosno $\pi \approx 3,162$.

Bila je to najčešće korišćena aproksimacija za π u Kini, iako je bila daleko od tačne vrednosti.

Liu Hui

Bio je najpoznatiji kineski matematičar i živeo je u 3. veku. Nije bio zadovoljan aproksimacijom $\pi \approx$ Čang Honga, i odlučio je da je popravi. On je u krug upisao pravilan šestougao, pa dvanaestugao, i tako redom do 96-ugla. Računajući površinu (umesto obima kao Grci) tih upisanih n-touglova, kao i oblika koji se dobijaju kad se nad svakom stranom konstruišu dodatni pravougaonici, uspeo je da uklješti površinu kruga izmedju dve vrednosti koje obe konvergiraju ka π kad se broj strana povećava. Kao i za Arhimeda pet vekova pre njega, i za Liu Huija možemo tvrditi da je imao rigrozno razumevanje graničnih vrednosti i iterativnih postupaka.

Primenivši svoj algoritam do pravilnog 96-tougla, Liu Hui došao je do zaključka da se vrednost broja π nalazi između 3.141024 i 3.142704. Za poboljšanje aproksimacije koristio je pravilni 3072-ugao, pa beleži vrednost:

$$\pi \approx \frac{3972}{1250} \approx 3,14159.$$

Zu Čongži

Zu Čongži (429-501) bio je poznat astronom i matematičar, a povećao je tačnost broja π na 6 decimala.

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927,$$

što je tačno do šest decimalnih mesta. Koristio je metod od Liu Huija za pravilni 12288-tougao, i tako dobio racionalnu aproksimaciju broja π koja nije prevazidjena sledećih skoro hiljadu godina.

Indija

Indijski matematičari su vekovima strpljivo tragali za tajanstvenim brojem π. U 6. veku p. n. e. u astronomskoj knjizi "Šatapata Bramana" dobija se aproksimacija $\pi \approx \frac{339}{108} \approx 3,139$. U poznatom epu "Mahabharata" (napisan izmedju 500. i 300. godine p.n.e), iz dela "Bišma Parva" možemo zaključiti da je autor aproksimirao $\pi \approx 3$.

Arjabhata

Živeo je od 476. do 550. U svom delu "Ganitapada" on piše: "Dodaj 4 broju 100, pomnoži sa 8 i dodaj 62000. Ovim pravilom može se računati obim za krug prečnika 20000", odnosno

$$\pi \approx \frac{62832}{20000} = 3,1416.$$

Još je napisao da ako je "a" jednako strani pravilnog poligona sa "n" strana upisanog u krug jediničnog prečnika, i "b" je strana pravilnog upisanog poligona sa "2n" strana, onda je

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{(1 - a^2)}}.$$

Sa ovom jednačinom je otkrio svoju vrednost za $\pi = \sqrt{9,8684}$, gde je računao spoljašnji rub poligona sa 384 stranice. Arjabhata je koristio reč "približno" na način koji neke komentatore navodi na zaključak da je Arjabhata verovao da se π ne može tačno izračunati, tj. da je iracionalan. Ako je to tačno, on je imao iznenadjujuće dobru intuiciju, jer je iracionalnost broja π dokazao Lambert tek u 18. veku, kao što smo videli.

Bramagupta

Aproksimirao je broj $\pi = \sqrt{10}$. Računao je obime upisanih poligona sa 12, 24, 48, 96 stranica i redom je dobijao za broj π sledeće vrednosti:

$$\sqrt{9,65}, \ \sqrt{9,81}, \ \sqrt{9,86}, \ \sqrt{9,87}.$$

Došao je do zaključka kako se oblik poligona približava krugu, da se spoljašnji rub povećava, pa se i π približava vrednosti $\sqrt{10}$. Nije primetio da dobijeni kvadratni brojevi konvergiraju broju manjem od $\sqrt{10}$. Pošto se lako pamti, ova netačna vrednost se kasnije proširila iz Indije u Evropu.

Arapska matematika

Najznačajniji doprinosi arapske matematike srednjeg veka nalaze se u oblasti algebre. Mada su u geometriji mahom prevodili i prepisivali rezultate starih Grka, Arapi su imali i nove doprinose u geometriji, pa i u aproksimiranju broja π. Braća Banu Musa (IX vek) dobili su Arhimedove aproksimacije na svoj način, Muhamed al-Hvarizmi (IX vek) tvrdio je da se tačna vrednost π ne može dobiti, ali kao aproksimacije koristio je Arhimedovu, Bramaguptinu i Arjabhatinu u svom radu, a Abu'l-Rajhan al-Biruni (X-XI vek) je aproksimirao Arhimedovim metodom i koristio pravilni 180-tougao, čime je postigao sličan nivo aproksimacije kao indijski matematičari pre njega, a neprecizniji od Zu Čongžija. Samo jedan arapski matematičar je, medjutim, značajno unapredio prethodne aproksimacije.

Džamšid al-Kaši

Džamšid al-Kaši (1380-1429) rodjen je u Kašanu, današnji Iran, a umro je u Samarkandu. Ovaj persijski matematičar stekao je veliki uticaj na nauku arapskog sveta kad je Tamerlanov unuk, Ulug beg, osnovao univerzitet u Samarkandu. Na tom univerzitetu al-Kaši je proveo poslednjih 15 godina života i ostvario svoje najznačajnije rezultate. Pored brojnih drugih rezultata, izračunao je π Arhimedovim metodom koristeći pravilni n-tougao za $n = 805306368 = 3 \cdot 2^{28}$. On je procenio π kao sredinu broja koji dobija za upisani i opisani pravilni n-tougao, i dobio aproksimaciju

$$\pi \approx 3,14159265358979325,$$

koja je tačna u svim decimalama sem poslednje, dakle tačno aproksimira prvih 16 decimalnih mesta broja π. Ovo nadmašuje tačnost koju je dobio indijski matematičar Madava analitičkim metodama nešto ranije, holandski matematičar Adrian van Rumen uspeo je da ponovi al-Kašijev rezultat oko 1600. godine, koristeći isti mnogougao, ali je izračunao poslednje dve cifre netačno, pa je njegov rezultat tačan na prvih 15 decimalnih mesta. Tek je Ludolf van Cojlen uspeo da popravi al-Kašijev rezultat 180 godina kasnije.

Evropa

Evropska matematika srednjeg veka bila je zaostala za kineskom, indijskom i arapskom matematikom, i tek razvijenom i poznom srednjem veku pojavljuju se prvi originalni naučni rezultati. Najistaknutiji evropski srednjevekovni matematičar je bio Leonardo iz Pize (1180-1250), poznati Fibonači. U knjizi

"Primenjena geometrija", za broj π je našao aproksimaciju:

$$\pi \approx \frac{1440}{458\frac{1}{3}} = \frac{864}{275} \approx 3,1418.$$

Tek je u renesansnom periodu Evropa počela značajno da doprinosi naučnom, pa i matematičkom razvoju sveta.

Fransoa Vijet

Fransoa Vijet (1540-1603) bio je pravnik, i član fransuskog parlamenta. Nije bio profesionalni matematičar ali je doprineo velikom uspehu matematike - usavršavanju teorije jednačina. Bavio se i klasičnim problemima grčke matematike: kvadraturom kruga, podelom ugla na tri jednaka dela i konstrukcijom kocke duplo veće zapremine u odnosu na datu, sva tri korišćenjem samo lenjira i šestara. Odredjivao je broj π i geometrijskom i analitičkom metodom, pa ćemo ga pomenuti ponovo i u sledećoj glavi ove teze.

Primenom Arhimedove metode na pravilni n-tougao za $n = 393216 = 3 \cdot 2^17$ doprineo je poboljšanju aproksimacije broja π na deset decimalnih mesta, dakle nepreciznije od al-Kašija i van Rumena (koji mu je bio savremenik), ali bolje od drugih prethodnika. Njegova procena je:

$$3,1415926535 < \pi < 3,1415926537.$$

Ludolf van Cojlen

Bio je nemačko-holandski matematičar koji je živeo od 1540. do 1610. 1596. odredio je 20 decimala broja π Arhimedovim metodom za pravilni n-tougao, gde je $n = 15 \times 2^{31}$ stranica. Zanimljivo je da na njegovom spomeniku je urezano: "Kada je prečnik 1, onda je obim kruga veći od njega za

$$3,14125914159265358979323846264338327 9".$$

On je pred kraj života uspeo da, koristeći Arhimedov metod i pravilne mnogouglove sa oko 2^{62} strane, odredi prvih 35 decimala broja π i njihova vrednost prvi put je objavljena 1611. kad je urezana na njegov nadgrobni spomenik. Četiri godine kasnije, van Cojlenova udovica objavila je posthumno njegov rad koji pokazuje kako je došao do tih 35 cifara. To je i aproksimacija koja je više nego dovoljna za sve praktične potrebe, čak i dan danas, i dalja poboljšanja imaju čisto teorijski značaj. Njemu u čast, broj π naziva se Ludolfov broj.

Glava 2

Nova znanja i nada za budućnost

U drugom poglavlju, predstavićemo analitičke metode za izračunavanje vrednosti broja π, kao i moderne algoritme koji upotrebom računara u kratkom vremenskom periodu mogu dati i 10^{14} decimala broja π. Pratili smo izlaganja data u [4].

2.1 Računanje π analitičkim metodama

Najraniji rezultat ovog tipa objavio je indijski matematičar Madhava od Sangamagrame (1340-1425), osnivač škole za astronomiju i matematiku u Kerali. Mnogi njegovo autorstvo osporavaju i smatraju da je pravi autor tih rezultata bio jedan učenik škole koju je osnovao Madhava i koji je živeo u XVI veku. Taj rezultat ponovo su otkrili Džejms Gregori i Gotfrid Vilhelm Lajbnic u XVII veku, pa ćemo o tome reći više malo kasnije.

Fransoa Vijet

Vijet je poznat po predstavljanju broja π pomoću beskonačnog proizvoda:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Gornji izraz se tumači kao proizvod:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2},$$

gde je niz $\{a_n\}$ zadat sa

$$a_1 = \sqrt{2} \text{ i } a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}.$$

Proizvod konvergira ka $\dfrac{2}{\pi}$ linearno, što je brže od nekih drugih kasnijih metoda, ali su ubrzo pronadjeni nizovi i redovi koji računaju π brže.

Vijetova formula je prvi poznat beskonačni proizvod, a i prva analitička formula koja računa π posle Madhavine, sa mnogo bržim stepenom konvergencije. Smatra se početkom oblasti matematičke analize. Ubrzanom varijacijom Vijetove formule, π je izračunat do na stotine hiljada cifara.

Džon Volis

Džon Volis (1616-1703) bio je profesor geometrije na Oxfordu, glavni kriptograf engleskog parlamenta i sveštenik. Interpolacijom izvesnih odredjenih integrala i koristeći metode koje nisu potpuno rigorozne, došao je do zaključka koji je poznat kao Volisova formula:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9} \cdots$$

Volisova jednačina je beskonačni proizvod, koja uključuje samo racionalne operacije bez kvadratnih operacija. Stepen konvergencije je osetno sporiji nego kod Vijetove formule, ali Volisov proizvod je kasnije imao značajne primene, na primer kod računanja izvoda u tački nula Dirihleove eta funkcije i Rimanove zeta funkcije.

Madhava od Sangamagrame, Džejms Gregori i Gotfrid Vilhelm Lajbnic

Džejms Gregori (1638-1675) bio je škotski matematičar i astronom. Za nas je najznačajniji njegov rezultat kad je dokazao sledeću formulu koju je mnogo ranije dokazao i Madhava (ili njegov sledbenik):

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots, \ (-1 < x < 1).$$

Ako je $x = 1$ onda dobijamo formulu:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Gornje dve formule je dve godine posle Gregorija dokazao i čuveni nemački matematičar Gotfrid Vilhelm Lajbnic (1646-1716). Kao izraz za π gornja suma je nepraktična jer konvergira izrazito sporo, potrebno je sabrati oko pet milijardi članova reda da bi se obezbedila tačnost do na deset decimalnih mesta. Ali, prvi izraz, koji danas često nazivaju Madhava-Gregori-Lajbnicov red, može se iskoristiti i za vrednosti x različite od 1 sa mnogo boljim rezultatima.

Koristeći da je $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, dobijamo:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3\cdot 3} - \frac{1}{7\cdot 3\cdot 3\cdot 3} + \cdots\right),$$

niz koji konvergira brže. Smatra se da je Madhava uspeo da izračuna tim metodom π do na 13 tačnih decimala. To je bilo malo slabije od Madhavinog savremenika al-Kašija, ali metod je mnogo originalniji i značajniji.

Postoje i mnogi drugi načini za korišćenje formule, recimo adicionim formulama za tangens zbira dobijamo da

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

Ova i slične varijante primene Madhava-Gregori-Lajbnicove formule dale su mnogo bolje rezultate i izračunale π na stotine decimalnih cifara. Recimo, engleski matematičar Džon Mejčin (1686-1751) izračunao je 1706. godine prvih 100 decimalnih cifara broja π koristeći Madhava-Gregori-Lajbnicove formule i izraz

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Isak Njutn

Isak Njutn (1642-1727) bio je engleski matematičar, fizičar, astronom, alhemičar, i filozof prirode. On je otkrio red koji se može iskoristiti za izračunavanje π, koji glasi:

$$\arcsin x = x + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots$$

Pomoću ove formule, izračunao je 15 cifara broja π koirsteći samo prvih 22 člana reda. Kako je $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$, važi sledeća jednakost:

$$\pi = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{4} + 24\cdot\left(\frac{1}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} - \frac{1}{9\cdot 2^9} - \cdots\right).$$

Pošto je sve ovo otkrio dok se u provinciji skrivao od kuge koja je vladala Londonom godine 1665., komentarisao je: "Nećete mi verovati ako vam kažem koliko puta sam izveo ove proračune, nemajući preča posla u to vreme."

Leonard Ojler

Leonard Ojler (1707-1783) bio je jedan od najvećih matematičara svih vremena. Radio je širom Evrope, ali najviše u Berlinu i Sankt Petersburgu. Oslepeo je u šezdesetoj godini, ali to ga nije sprečavalo da svoje obimne teorije diktira asistentima. Dokazao je mnoge formule u vezi broja π, na primer:

$$\frac{\pi}{4} = 5 \cdot \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2 \cdot \arctan\left(\frac{3}{79}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots .$$

Prve dve formule se mogu iskoristiti za brze račune varijacijom Mejčinovog metoda, i Ojler je na taj način za samo nekoliko sati izrašunao prvih 22 cifre broja π, što je inače bio posao koji su radili mesecima. Poslednja formula je samo najjednostavnija od beskonačno mnogo formula koje je Ojler izveo o kvadratu broja π koristeći tzv. Bernulijeve brojeve.

Dokazao je i najpoznatiju jednačinu matematike, koja glasi

$$e^{x\pi} + 1 = 0.$$

Ova jednačina, izmedju ostalog, koristi se i u dokazu transcendentnosti broja π (koji smo preskočili zbog težine).

Vilijam Šenks

Vilijem Šenks (1812-1882) bio je engleski matematičar-amater. Veliki deo svog života posvetio je u računanju broja π. Prvo je izračunao 530 cifara broja π od kojih prvih 527 tačno godine 1853. uz pomoć Mejčinove formule. Posle dvadeset godina, izračunao je 1873. godine 707 cifara broja π. De Morgan je primetio nedostatak u broju pojavljivanja cifre 7 i objavio u svojoj knjizi "Skup paradoksa, II deo", čime je podstakao sumnje u tačnost Šenksovog računa. Ferguson je 1944. pomoću ranog kompjutera otkrio da je Šenks napravio grešku na 528. mestu. Greška je bila u prepisivanju cifre, a ne matematičke prirode, i sav račun koji je obavio sledećih 20 godina time je postao pogrešan. Ipak, njegovih 527 tačnih cifara broja π nisu prevazidjeni skoro ceo vek.

2.2 Broj π u elektronskom zapisu

Sa značajnim razvojem računarske tehnologije 1950-ih godina, broj π je izračunat na hiljade, a zatim milione decimala. Ove proračune je značajno olakšalo otkriće naprednih algoritama za izvođenje osnovnih aritmetičkih operacija sa visokom preciznošću. Na primer, 1965. god otkriveno je da se novootkrivena brza Furijeova transformacija (FFT) može koristiti za obavljanje množenja s viskom preciznoćú mnogo brže od konvencionalnih metoda. Takve metode su dramatično smanjile vreme potrebno za izračunavanje π i drugih konstanti i to sa velikom preciznosti. Danas smo u stanju da računamo vrednosti algebarskih operacija, u suštini, jednako brzo kao množenja. Uprkos ovom napretku, do 1970-ih godina sve kompjuterske evaluacije tačne vrednosti broja π i dalje su koristile klasične formule, obično Mejčinovog tipa.

Prvi kompjuterski proračun broja π izvršen je na ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer).

Balantajnov (1939) red za π

Još jedna od Ojlerovih formula za arctan je

$$x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n+1)!(x^2+1)^{n+1}} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ona je omogućila Žan Gilu i M. Bujeu da izraze formulu, koju su iskoristili 1973. godine za izračunavanje milion decimala broja *pi*, gde su iz $\pi/4 = 12\arctan(1/18) + 8\arctan(1/57) - 5\arctan(1/239)$ dobili formulu

$$\pi = 864 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n+1)!325^{n+1}} + 1824 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n+1)!3250^{n+1}} - 20\arctan\left(\frac{1}{239}\right),$$

gde su članovi drugog reda sada samo pomaci prvog za jedno decimalno mesto.

Ramanudžanov tip eliptičnih redova

Srinivasa Ramanudžan (1887-1920) je otkrio potpuno nove vrste formule razvoja u beskonačne redove, zasnovane na aproksimacijama eliptičnih integrala, oko 1910. godine, ali one nisu bile poznate (niti u potpunosti dokazane) sve donedavno kada su njegovi spisi objavljeni širokoj javnosti. Jedan od najznačajnijih je red

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \cdot \frac{(1103 + 26390 \cdot n)}{(4 \cdot 99)^{4n}}.$$

Svaki član ovog reda daje dodatne sigurno tačne decimale broja π. Kada je Gosper koristio ovu formulu za izračunavanje 17 miliona cifara broja π, 1985. godine, one su se poklopile i sa mnogo miliona decimala u prethodnim procenama.

Otprilike u isto vreme, David i Gregori Čudnovski su pronašli sledeću varijaciju Ramanudžanove formule.

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(6n)!(13591409 + 545140134n)}{(3n)!(n!)^3(640320)^{3n+3/2}}.$$

Svaki član ovog reda donosi dodatnih 14 tačnih decimala broja π. Čudnovski su primenili ovu formulu na pametan način, što im je omogućila da iskoriste rezultate početnog nivoa preciznosti kako bi proširili proračun na još veću preciznost. Ovu tehniku su koristili u nekoliko izračunavanja vrednosti broja *pi* velikih razmera, što je 1994. godine kulminiralo tada rekordnim izračunavanjem na preko četiri milijarde decimalnih cifara.

Iako su redovi Ramanudžana i Čudnovskih u praksi znatno efikasnije od klasičnih formula, one dele svojstvo da se broj potrebnih članova reda povecćava linearno sa željenim brojem cifara: ako želite da izračunate duplo više decimala broja π, morate izračunati duplo više članova reda.

Primetimo, Red Ramanudžanovog tipa

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\binom{2n}{n}}{16^n} \right)^3 \frac{42n+5}{16}$$

omogućava da iyračuna milijardita decimala od $1/\pi$, ili neka druga, bez da ce izračunava prva polovina ovog reda, što je bio uvod u kasnije brže formule za izračunavanje.

Algoritmi smanjene složenosti izračunavanja

Godine 1976. Judžin Salamin i Ričard Brent su nezavisno otkrili algoritam smanjene složenosti izračunavanja π. Zasnovan je na iteraciji aritmetičko-geometrijske sredine (AGM) i nekim drugim idejama koje su dali Gausu i Ležandru još oko 1800. godine, iako Gaus, kao ni mnogi posle njega, nikada nisu direktno uvideli njihovu vezu sa izraŭnavanjem vrednosti broja *pi*.

Poznat je Brent - Salamen algoritam kvadratne brzine:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_0 = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

$$b_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}}$$
$$c_n = a_n^2 - b_n^2$$
$$s_n = s_{n-1} - 2^n c_n$$
$$p_n = \frac{2a_n^2}{s_n}$$

gde p_n kvadratno konvergira ka π. Ovaj algoritam duplira broj cifara posle svakog koraka računanja. Uzastopne iteracije daju 1, 4, 9, 20, 42, 85, 173, 347 i 697 tačnih decimalnih cifara broja π i koriste $\log N$ operacije za N decimala. Tako dvadeset i pet iteracija izračunava π sa tačnošću od preko 45 miliona decimalnih cifara. Nedostatak je što svaka od ovih iteracija mora biti izvedena sa potpunom preciznošću krajnjeg rezultata.

Kombinovanje moćnih računara i Gaus-Brent-Salamen algoritma naglo je pojednostavilo računanje broja π. Narednih godina Džonatan i Piter Borvajn nastavili su Salaminovim koracima, i tako su razvijali decimalni zapis broja π. Njihov metod je omogućio da se izračunava još brže i još dalje.

Džonatan i Piter Borvajn

Braća Džonatan i Piter Borvajn su otkrili veliki broj brzih algoritama za izračunavanje broja π. Prvi je bio baziran na aritmetičko-geometrijskoj sredini i dat sledećim algoritmom:

$$a_0 = \sqrt{2}, \quad b_0 = 2 + \sqrt{2}, \quad y_1 = \sqrt{\sqrt{2}}$$

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{2\sqrt{a_n}}$$
$$y_{n+1} = \frac{a_n y_n}{(1 + y_n)\sqrt{a_n}}$$
$$b_n = b_{n-1} \frac{1 + a_n}{1 + y_n}$$

gde b_n konvergira ka π. Drugi u nizu bio je brži algoritam baziran na aritmetičkoj-geometrijskoj sredini:

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_0 = \frac{1}{2}$$

$$y_{k+1} = \frac{1 - (1 - y_k^2)^{1/2}}{1 + (1 - y_k^2)^{1/2}}$$

$$a_{k+1} = a_k(1 + y_k + 1)^2 - 2^{k+1} y_{k+1}$$

gde $\dfrac{1}{a_n}$ kvadratno konvergira ka π.

Sledeći u nizu je kubni algoritam:

$$a_0 = \frac{1}{3}, \quad s_0 = \frac{(\sqrt{3} - 1)}{2}$$

$$r_{k+1} = \frac{3}{1 + 2(1 - s_k^3)^{1/3}}$$

$$s_{k+1} = \frac{r_{k+1} - 1}{2}$$

$$a_{k+1} = r_{k+1}^2 a_k - 3^k (r_{k+1}^2 - 1)$$

gde $1/a_k$ kubno konvergira ka π. Ovaj algoritam približno utrostručuje broj cifara broja π.

Algoritme sa cifarskim izdvajanjem koje su otkrili: Bejli, Borvajn i Pluf zovu se BBP. Za generisanje ovog algoritma korišćena heksidecimalna baza. BBP algoritam glasi:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) .$$

Najnovija saznanja

U decembru 2002. godine Jasumasa Kanada je izračunao broj π na preko $1,24 \cdot 10^{12}$ decimalnih cifara. Njegov tim je prvo izračunao π u heksadecimalnom zapisu (osnova 16) na 1.030.700.000.000 decimalnih mesta, koristeći sledeće dve arkustangensne relacije:

$$\pi = 48 \arctan \frac{1}{49} + 128 \arctan \frac{1}{57} - 20 \arctan \frac{1}{239} + 48 \arctan \frac{1}{110443}$$

$$\pi = 176 \arctan \frac{1}{57} + 28 \arctan \frac{1}{239} - 48 \arctan \frac{1}{682} + 96 \arctan \frac{1}{12943}.$$

Prvu formulu je 1982. godine pronašao K. Takano, profesor srednje škole i pisac pesama. Drugu formulu je pronašao F.C.V. Štromer 1896. Kanada je potvrdio da su rezultati ova dva proračuna usaglašeni, a zatim je konvertovao heksadecimalni niz cifara u decimalni. Rezultirajući decimalni zapis je proveren konvertovanjem nazad u heksadecimalni. Ove konverzije su same po sebi netrivijalne i zahtevaju masivno izračunavanje.

Ovaj proces se prilično razlikuje od onih iz koji su izvođenip rethodnih četvrt veka. Jedan od razloga je taj što algoritmi smanjene operativne složenosti zahtevaju da su operacije množenja, deljenja i kvadratnog korena velike preciznosti. Ovo dalje zahteva velik broj FFT operacija koje zahtevaju ogromne količine memorije i masivnu komunikaciju između čvorova velikog paralelnog sistema. Za ovo najnovije izračunavanje, čak ni veoma veliki sistem dostupan u Tokiju nisu imali dovoljno memorije. Kanada i njegov tim su izračnali ove dve formule koristeći šemu analognu onoj koju su koristili Gosper i Čudnovski u svojim proračunima preko nizova, tako što su uspeli da izbegnu eksplicitno skladištenje izračunatih brojeva velike preciznosti. Ovo je rezultiralo šemom koja je približno konkurentna u numeričkoj efikasnosti sa kvadratnim algoritmima Salamin-Brent i Borvajna koje su se do tada koristili, ali sa znatno nižim ukupnim zahtevom za memorijom.

Ema Haruka je 8. juna 2022. godine objavila da je izračunala 10^{14} cifara broja π tokom 158 dana korišćenjem algoritma tipa braće Čudnovski, i to je trenutni rekord.

Glava 3

Zanimljivosti i primena

U ovoj glavi navešćemo nekoliko zanimljivih primera u kojima figurira broj π, a čiji su ishodni unekoliko neočekivani. Videćemo, na primer, da ako povećamo obim kruga za jedan metar, poluprečnik će se uvek povećati za oko 16 cm, bez obzira koliki je poluprečnik prvobitno bio. Sadržaj ovog poglavlja, kao i slike, prate izlaganje knjige [7], te se zainteresovani čitala poziva da se tamo uputi u više detalja.

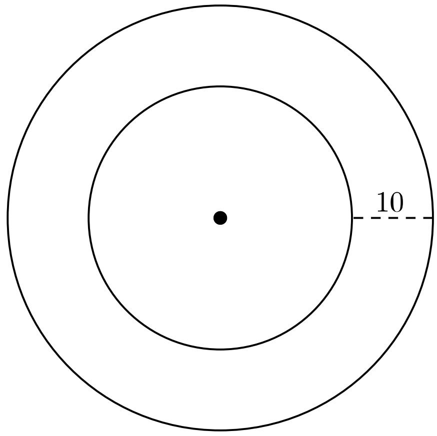
3.1 Konstanta među koncentričnim kružnicama

Odnos obima kružnice i njenog prečnika pojavljuje se kao konstanta koja povezuje dve ili više koncentričnih kružnica. Formulišimo problem na sledeći način:
Dve koncenrične kružnice su udaljene deset jedinica (kao na slici 3.1). Kolika je razlika u obimima ove dve kružnice?

Najjednostavniji način dobijanja odgovora jeste određivanje oba prečnika, odakle se lako dobija razlika obima. Označimo prečnik manje kružnice sa d. Tada je prečnik veće kružnice $d + 20$ (prečnik d manje kružnice i dvostruka razlika poluprečnika). Da bismo pronašli traženu razliku potrebno je da oduzmemo obime ovih dveju kružnica. Obimi iznose $\pi \cdot d$ i $\pi \cdot (d + 20)$, te je razlika

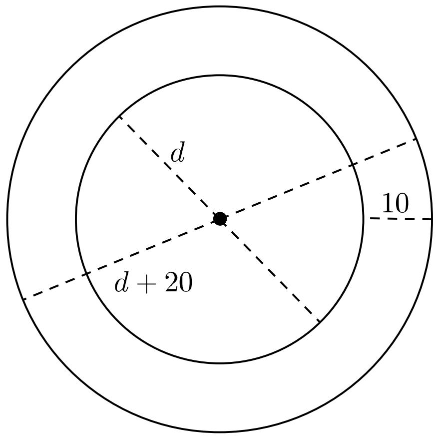
$$\pi(d + 20) - \pi d = 20\pi.$$

Elegantniji postupak dobijanja ove tražene razlike jeste korišćenjem ekstremnog slučaja. Do ekstremnog slučaja dolazimo tako što se dijametar d smanjuje i smanjuje, čuvajući rastojanje među kružnicama, i tako sve dok se manja kružnica ne postane tačka. To znači da je kružnica koja se smanjila



Slika 3.1. Dve koncentrične kružnice udaljene 10 jedinica.

do tačke postala centar veće. Udaljenost između dveju kružnica sada postaje poluprečnik veće kružnice. Prema tome, razlika između dužina obima posmatranih kružnica je samo obim veće, to jest 20π.



Slika 3.2. Koncentrične kružnice sa svojim prečnicima čije je rastojanje fiksirano a dijametar manje se smanjuje.

Možemo primetiti da oba postupka daju isti odgovor ali da se posmatranjem ekstremnog slučaja problem rešava mnogo brže, sa manje računanja.

Problem se može sagladati i bez uslova koncentričnosti. Tražimo razliku obima $O_2 - O_1$, gde je O_1 obim manje kružnice sa prečnikom d_1, a O_2 obim manje kružnice sa prečnikom d_2. Važi

$$O_1 = \pi \cdot d_1 \quad \text{i} \quad O_2 = \pi \cdot d_2.$$

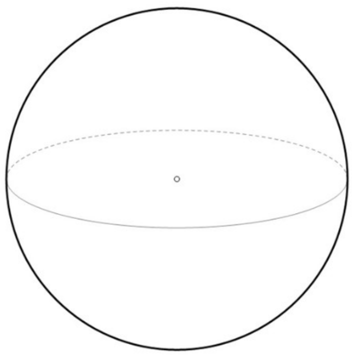
Odavde imamo

$$O_2 - O_1 = \pi d_2 - \pi d_1 = \pi(d_2 - d_1).$$

Pokazali smo da je razlika obima jednaka razlici prečnika pomnoženoj sa π. To zapravo znači da je odnos razlike obima i razlike prečnika konstantan i jednak je broju π.

3.2 Konopac oko Ekvatora

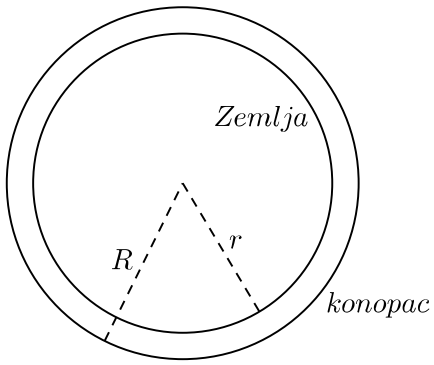
Pozabavimo se još jednim zanimljivim poznatim paradoksom (prvo pojavljivanje ovog paradoksa je u članku Henrija Ernesta Dadenija *The Paradox Party. A Discussion of Some Queer Fallacies and Brain-Twisters* iz 1909. godine). Problem se svodi na sledeće. Najpre, radi jednostavnosti, pretpostavimo da je Zemlja savršena sfera i da je njena površina glatka. Oko ekvatora je smešten konopac koji je stegnut tako da konopac dodiruje površinu Zemlje celom dužinom. Zatim se konopac produžuje za tačno jedan metar. To, naravno, čini da konopac više nije tesno stegnut oko Zemlje i pretpostavimo da je se nalazi ekvidistantno od nje, tj. ekvatora. Pitanje koje se postavlja jeste: da li je moguće da se miš komotno provuče između konopca i Zemlje?



Slika 3.3. Savršena sfera koja predstavlja Zemlju sa konopcem oko ekvatora.

Na prvi pogled deluje da jedan metar na toliku dužinu konopca ne pravi veliku razliku i da prostora za miša neće biti. Međutim, računica može poprilično da iznenadi.

Kao što smo već rekli, pretpostavimo da je Zemlja savršena sfera i takođe radi lakšeg računanja pretpostavimo da je dužina ekvatora 40.000 km. Neka je situacija kao na slici 3.4.



Slika 3.4. Prikaz poluprečnika Zemlje i konopca.

Poznate formule obima O daju nam

$$O = 2r\pi, \quad \text{tj.} \quad r = \frac{O}{2\pi}$$

i

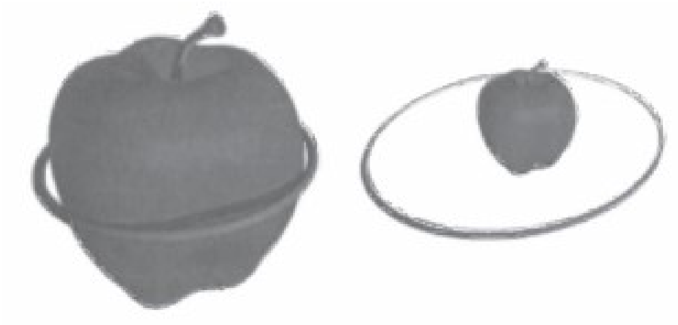
$$O + 1 = 2\pi r, \quad \text{tj.} \quad R = \frac{O+1}{2\pi}.$$

Treba nam razlika poluprečnika, što je

$$R - r = \frac{O+1}{2\pi} - \frac{O}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \approx 0,159\,\text{m} \approx 16\,\text{cm}.$$

Dakle, konopac je od površine Zemlje udaljen oko 16 cm što ostavalja puno prostora za provlačenje sitne životinje kao što je miš! Tu dolazimo do paradoksalnog ali vrlo zanimljivog zaključka: samo jedan dodatan metar na 40.000.000 metara pravi čak toliku razliku u poluprečniku.

Razmotrimo prvobitni problem prikazan gore. Može se zaključiti da je rešenje nezavisno od obima Zemlje s obzirom na to da nije bio uključen u krajnji proračun. Jedina relevantna stvar bilo je $\frac{1}{2\pi}$, što nam ponovo pokazuje da prečnik kružnice nije bio relevantan već samo konstanta π. Dakle, umesto Zemlje mogli bismo uzeti i mnogo manje predmete, kao što su košarkaška lopta, jabuka ili novčić, obmotati ih koncem, zatim konac produžiti za jedan metar, napraviti krug od njega, prvobitni predmet staviti u centar – svaki put bi rastojanje od konca do predmeta bilo približno 16 cm.



Slika 3.5. Jabuka obmotana koncem i jabuka u centru konca produženog za jedan metar.

Pokažimo da je konačan ishod u rastojanju između konca i predmeta koji se obmotava jedino zavisi od π, kao što smo i gore zaključili, i od količine dodatog konca.

Označimo sa r poluprečnik lopte koju obmotavamo i sa u njen obim. Neka je v dužina dodatog konca i a rastojanje od lopte do konca (ekvidistantno razmaknutog od lopte). Tada za obim lopte i obim produženog konca važi

$$u = 2r\pi \quad \text{i} \quad u + v = 2(r + a)\pi.$$

Odavde imamo

$$v = 2(r + a)\pi - 2r\pi = 2a\pi,$$

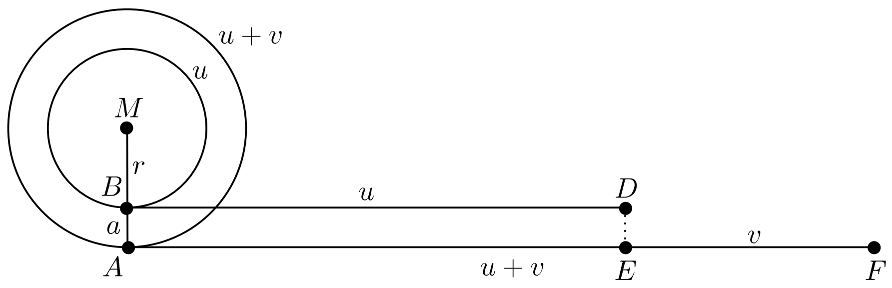
te konačno dobijamo da je rastojanje između konca i lopte

$$a = \frac{v}{2\pi}.$$

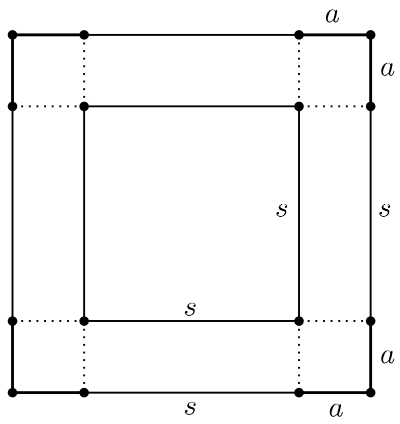
Intuitivno je možda lakše shvatiti ovo ako odmotamo konac a slično i obim lopte kao na slici 3.6. Kao i malopre, u je obim lopte a $u + v$ dužina produženog konca. "Odmotani" obimi su predstavljeni dužima BD i AF, redom. Kako je $u = 2r\pi$ i $u + v = 2(r + a)\pi$ i $2\pi \approx 6$, možemo zaključiti da je MB približno šestina duži BD, a MA približno šestina duži AF. Odavde sledi da je rastojanje između lopte i konca a, tj. AB, takođe približno šestina razlike obima EF. Drugim rečima, razlika u poluprečnicima zavisi od razlike obima.

Pretpostavimo sada da umesto kružnice imamo kvadrat i oko njega konac postavljen ekvidistantno od kvadrata čija je dužina veća za 1 metar od obima kvadrata. Koliko je tada konac udaljen od kvadrata?

Ako je kvadrat stranice s na ovakav način okružen koncem na rastojanju a, dobijamo da je dužina konca $4s+8a$, tj. sledi da je razlika u obima kvadrata



Slika 3.6. Lopta i ekvidistantni konac sa “odmotanim” obimom i koncem.



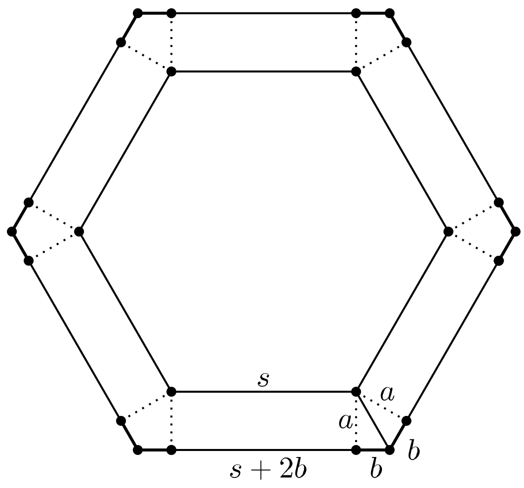
Slika 3.7. Kvadrat stranice s sa koncem na ekvidistantnom rastojanju.

i konca, što iznosi 1 metar, jednaka $8a$. Dakle, konac je na rastojanju $\frac{1}{8}$ m, tj. $12,5\,\mathrm{cm}$.

Slično kao i kod kružnica, rastojanje zavisi od dodate dužine konca a ne od dužine stranice kvadrata.

Umesto kvadrata možemo posmatrati i jednakostranični trougao ili bilo koji pravilni mnogougao. Pokažimo da sada rastojanje konca od mnogougla zavisi od broja stranica. Neka je dat n-tougao sa stranicom s i koncem na udaljenosti a čija je dužina jednaka obimu n-tougla povećanom za jedan. Na slici 3.8 možemo videti slučaj kada je $n = 6$.

Sada imamo da je dužina konopca $n(s + 2b)$, dok je obim n-tougla $n \cdot s$. Prema tome jedan metar iznosi $2nb$, tj. $b = \frac{1}{2n}$. S druge strane, rastojanje a se može izraziti pomoću b. Kako ove dužine figurišu u pravouglom trouglu čiji je ugao naspram katete dužine b polovina n-tog dela punog ugla, tj. ugao



Slika 3.8. Šestougao stranice s sa koncem na ekvidistantnom rastojanju.

naspram pomenute katete iznosi $\frac{\pi}{n}$, važi

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{b}{a}.$$

Sada imamo

$$a = \frac{\frac{1}{2n}}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{2n\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}}.$$

Povećavanjem broja stranica u pravilnom mnogouglu približavaćemo se kružnici. Prema tome, ako pustimo da n teži u beskonačnost, pri tome ostavljajući da je konac uvek duži tačno jedan metar od obima mnogougla, dobićemo rastojanje na kojem je konac od kružnice. Zaista,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{2\pi}.$$

Problem sa konopcem oko ekvatora možemo preformulisati na slične probleme.

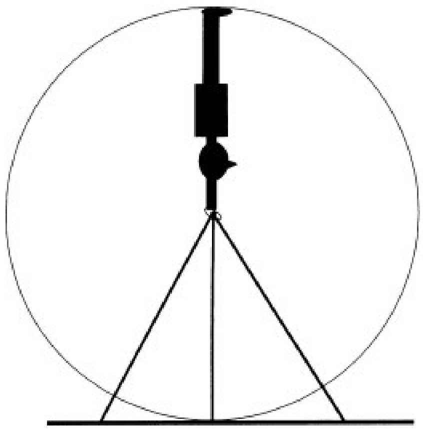
Zamislimo ponovo da je Zemlja oblika savršene sfere i da je ekvator dužine 40.000.000 m. Ako bi dete šetalo po ekvatoru oko sveta pri tome noseći balon sa sobom koji lebdi na visini od $2,2\,\mathrm{m}$, koliko će put balona biti duži od puta koji dete prepešači?

Kao i u prethodnim proračunima dobijamo da je razlika u dužinama pređenih puteva:

$$O_2 - O_1 = 2(r + 2,2)\pi - 2r\pi = 4,4 \cdot \pi.$$

Sada ova razlika zavisi samo od visine na kojoj se nalazi balon i konstante π. Dakle, dobijamo da je razlika približno $13,82\,\mathrm{m}$.

Okrenimo sada osobu naopačke i smanjimo unutrašnju kružnicu na jako malu – blizu tačke, pa možemo formulisati problem sličan prethodnima: Muškarac radi vežbu na vratilu kada, držeći se za vratilo potpuno opruženog tela, pravi pun krug. Koliki će put preći njegova stopala ako imamo u vidu da njegove šake skoro da nisu promenile poziciju i da njegova visina sa podignutim rukama iznosi $240\,\mathrm{cm}$?



Slika 3.9. Čovek na vratilu.

Pošto šake kao da stoje u mestu, put koji prelaze stopala jednak je obimu kružnice sa poluprečnikom $240\,\mathrm{cm}$, tj. $2 \cdot 240 \cdot \pi\,\mathrm{cm} \approx 15\,\mathrm{m}$.

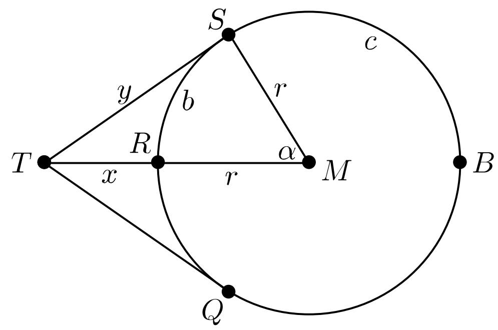
U svim ovim primerima obim kruga nije kritičan, glavna veličina koja daje rezultate jeste broj π.

3.3 Još jedno iznenađenje

Sada kada je naša intuicija donekle narušena iznenađujućim rezultatima konopca oko Zemlje, predstavljamo još jednu moguću situaciju.

Konopac koji je 1 metar duži od obima ekvatora sada više nije ekvidistanatan od njega. Umesto toga, zategnut je do jedne spoljne tačke (kao na slici 3.10). Setimo se kada je konopac bio podjednako razmaknut iznad ekvatora, između je postojao prostor od samo $16\,\mathrm{cm}$. Sada se ovaj konopac, koji je većinom svoje dužine tesno uz Zemljinu površinu, uzdiže iznad površine približno 122 metra!

Razmotrimo zašto je to tako. Ovaj put odgovor očigledno zavisi od obima ekvatora, ne samo od konstante π – iako će i sada π igrati bitnu ulogu.



Slika 3.10. Konopac oko ekvatora zategnut do jedne izdvojene tačke.

Konopac (dužine obima ekvatora povećanog za 1 m) je zategnut do spoljašnje tačke T i takvom položaju njega zapravo čine dve tangentne duži TS i TQ zajedno sa lukom SBQ. Nas zanima dužina duži TR koju ćemo označiti sa x.

Uvedimo i naredne oznake: M je sredšte kružnice, r je poluprečnik kružnice, y je tangnetna duž, b je luk nad $\angle RMS$, c je luk nad $\angle SMB$ (gde je B presek kružnice i prave određene sa T i M) i $\alpha = \angle RMS$.

Dužina konopca iznosi $2r\pi + 1$. S druge strane njegova dužina je $2y + 2c$, dok imamo i $2r\pi = 2b + 2c$, odakle dobijamo

$$2b + 1 = 2y, \quad \text{tj.} \quad b = y - 0,5.$$

U $\triangle MST$ imamo da važi $\text{tg}\alpha = \frac{y}{r}$, tj. $y = r \cdot \text{tg}\alpha$.

Kako je α centralni ugao, važi

$$\frac{b}{\alpha} = \frac{2r\pi}{360^\circ}, \text{ odakle je } b = \frac{2\pi \cdot r \cdot \alpha}{360^\circ}.$$

Pretpostavimo, ponovo, da je obim ekvatora 40.000.000 m. Tada je poluprečnik

$$r = \frac{40.000.000\,\text{m}}{2\pi} \approx 6.366.198\,\text{m}.$$

Kombinovanjem dobijenih jednakosti dobijamo

$$b = \frac{2\pi \cdot r \cdot \alpha}{360^\circ} = y - 0,5 = r \cdot \text{tg}\alpha - 0,5.$$

Ovako dobijena jednakost se ne može rešiti jednostavno na uobičajeni način. Rešavanju ćemo pristupiti numerički, tj. tako što ubacimo različite vrednosti za ugao α i uporedimo kada su rezultati dovoljno blizu, uzimajući pri tome da je $r = 6.366.198$ m. Rezultati su prikazani u tabeli 3.1.

α	$b = \frac{2\pi \cdot r \cdot \alpha}{360°}$	$b = r \cdot \text{tg}\alpha - 0,5$	broj cifara koje se poklapaju
$30°$	$3.333.333,478$	$3.675.525,629$	1
$10°$	$1.111.111,159$	$1.122.531,971$	2
$5°$	$555.555,5796$	$556.969,6547$	2
$1°$	$111.111,1159$	$111.121,8994$	4
$0,3°$	$33.333,33478$	$33.333,13940$	5
$0,4°$	$44.444,44637$	$44.444,66844$	5
$0,35°$	$38.888,89057$	$38.888,87430$	6
$0,355°$	$39.444,44615$	$39.444,45091$	6
$0,353°$	$39.222,22392$	$39.222,22019$	7
$0,354°$	$39.333,33504$	$39.333,33554$	8
$0,3545°$	$39.388,89059$	$39.388,89322$	7
$0,355°$	$39.444,44615$	$39.444,45091$	6

Table 3.1. Uporedna tabela za vrednost b.

Iz ovih proračuna se može zaključiti da $\alpha \approx 0,354°$. Za ovo α dobijamo približnu vrednost za y, tj.

$$y = r \cdot \text{tg}\alpha \approx 6.366.198 \cdot 0,006178544171 \approx 39.333,83554\,\text{m}.$$

To znači da je konopac između odvajanja od tla do tačke do koje je zategnut dugačak oko 40 kilometara. Ostaje da vidimo koliko je ta tačka udaljena od površine Zemlje. Sada vrednost x možemo izračunati primenjujući Pitagorinu teoremu na $\triangle TMS$. Važi $TM^2 = r^2 + y^2$, te

$$\begin{aligned} TM^2 &= (6.366.198)^2 + (39.334)^2 = 40.528.476.975.204 + 1.547.163.556 \\ &= 40.530.024.138.760. \end{aligned}$$

Odavde $TM \approx 6.366.319,512\,\text{m}$.

Takođe važi $x = TM - r$, pa konačno dobijamo $r \approx 121,512\,\text{m}$.

Ovakav rezultat ispada neverovatno, jer intuitivno deluje da će jedan metar da se izgubi u velikom obimu Zemlje. Međutim, što je sfera veća, konopac se može povući dalje od nje.

Dakle, videli smo da π može da nas zavara i da se igra našom intuicijom. Stoga nikada ne bi trebalo uzimati taj broj, koji se zove π, zdravo za gotovo. Ovo nam govori da je odnos obima kružnice i njegovog prečnika veoma poseban broj u matematici i da u matematičkom svetu zaslužuje veoma posebno mesto.

Zaključak

Master rad "Broj pi" posmatra, naravno, broj pi (π), matematičku konstantu koja predstavlja odnos prečnika kruga i njegovog obima, poznatu i pod nazivom Arhimedova konstanta ili Ludolfov broj. Na početku rada je detaljno dokazano da je pi iracionalan broj, a posebno je komentarisana i njegova transcendentnost. U nastavku je dat istorijski pregled određivanja tačne vrednosti broja pi, prvo geometrijskim, pa analitičkim metodama, na kraju i upotrebom računara, kakav je bio i istorijski sled. Rad je završen izborom nekoliko zanimljivih primera u kojima figuriše broj pi.

Kako je broj pi transcendentan broj, tačno numeričko određivanje njegove vrednosti nikad neće biti moguće, te će uvek predstavljati izazov da se tačnoj vrednosti što bliže približi. Broj pi i dalje intrigira matematičku naučnu javnost. Na primer, jedno od aktuelnih otvorenih pitanja je pitanje da li je broj pi normalan, tj. da li se u njegovom decimalnom zapisu svaki niz cifara javlja upravo onoliko često koliko bi se to statistički moglo očekivati ako bi se cifre proizvodile potpuno "nasumično". Sadašnje znanje u ovom smeru je veoma oskudno; na primer, ne zna se čak ni koje se od cifara $0, \ldots, 9$ pojavljuju beskonačno često u decimalnom razvoju ovog broja.

Literatura

[1] J. Arndt, C. Haenel, *Pi - Unleashed*, Germany, Springer Berlin Heidelberg, 2001.

[2] P. Beckmann, *A History of Pi*, United States, St. Martin's Press, 1971.

[3] J. L. Berggren, J. M. Borwein, P. Borwein, *Pi: A Source Book,* Germany, Springer, 2004.

[4] J. M. Borwein, *The Life of* π*: From Archimedes to ENIAC and Beyond,* In: N. Sidoli, G. van Brummelen(eds) From Alexandria, Through Baghdad, Springer, Berlin, Heidelberg, 2014.

[5] P. Eymard, J. P. Lafon, *The number* π, United Kingdom, American Mathematical Society, 2004.

[6] Lj. Gajić, *Predavanja iz Analize 1*, UNS, PMF, Novi Sad, 2006.

[7] I. Lehmann, A. S. Posamentier, *Pi: A Biography of the World's Most Mysterious Number*, United States, Prometheus Books, 2004.

[8] Z. Lučić, *Ogledi iz istorije antičke geometrije,* JP službeni glasnik, Beograd, 2009.

[9] S. Sovilj, *Razvoj aproksimacija broja* π *kroz istoriju,* masrer rad, Matematički fakultet, Beograd,2016.

Biografija

Renata Šimak rođena 20.05.1989. godine u Pančevu. Osnovnu školu završava 2004. godine u Padini. Nakon završetka osnovne škole upisuje srednju ekonomsku školu, smer ekonomski tehničar u Alibunaru i završava 2008. godine. Iste godine upisuje osnovne akademske studije na Matematičkom fakultetu u Beogradu, smer profesor matematike i računarstva. Godine 2018. u Novom Sadu upisuje Integrisane master akademske studije, smer profesor matematike M5.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Renata Šimak
AU

Mentor: dr Milica Žigić
ME

Naslov rada: Broj pi
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2023.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (3/54/9/1/14/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: istorija matematike
ND

Ključne reči: broj pi, Lambertov dokaz, izračunavanje vrednosti broja pi
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom master radu je posmatran broj pi (π), matematička konstanta koja predstavlja odnos prečnika kruga i njegovog obima, poznata i pod nazivom Arhimedova konstanta ili Ludolfov broj. Na početku je detaljno dokazano da je pi iracionalan broj, a posebno je komentarisana i njegova transcendentnost. U nastavku je dat istorijski pregled određivanja tačne vrednosti broja pi, prvo geometrijskim, pa analitičkim metodama, na kraju i upotrebom računara, kakav je bio i istorijski sled. Rad je završen izborom nekoliko zanimljivih primera u kojima figuriše broj pi.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 17.11.2022.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Petar Marković, redovni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Milica Žigić, vanredni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Anna Slivkova, docent Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Renata Šimak
AU

Mentor: Milica Žigić, PhD
MN

Title: The number pi
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2023
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (3/54/9/1/14/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: History of mathematics
SD

Subject/Key words: the number pi, Lambert's proof, calculation of the value of the number pi
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: In this master's thesis, the number pi (π) is observed, a mathematical constant that represents the ratio of the diameter of a circle to its circumference, also known as Archimedes' constant or Ludolf's number. At the beginning, it was proved in detail that it is an irrational number, and its transcendence was also commented on. After that, a historical overview of the methods for calculating the exact value of the number pi was given, first by geometrical methods, then by analytical methods, and finally by the use of computers, which also corresponds to the historical sequence. The

paper is finished with a selection of several interesting examples in which the number pi figures.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 17.11.2022.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Petar Marković, PhD, Full professor at the Faculty of Sciences in Novi Sad
Mentor: Milica Žigić, PhD, Associate professor at the Faculty of Sciences in Novi Sad
Member: Anna Slivkova, PhD, Assistant professor at the Faculty of Sciences in Novi Sad