



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET  
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I  
INFORMATIKU



Dušica Baljak

# Diskretizacija i modifikacija signala sa primenama

Master rad

Mentor:  
Prof. dr Nenad Teofanov

Novi Sad, 2023

# Sadržaj

<b>Predgovor</b>	<b>3</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>5</b>
1.1 Pojam i vrste signala . . . . .	5
1.2 Neki elementarni diskretni i neprekidni (kontinualni) signali . . . . .	9
1.2.1 Jedinični impuls . . . . .	9
1.2.2 Hevisajdov signal . . . . .	11
1.2.3 Eksponencijalni signal . . . . .	11
1.2.4 Diskretni i neprekidni sinusoidni signali . . . . .	13
1.3 Digitalna obrada signala . . . . .	16
<b>2 Furijeova analiza</b>	<b>18</b>
2.1 Furijeovi redovi . . . . .	18
2.1.1 Dirihleovi uslovi . . . . .	22
2.2 Furijeova transformacija . . . . .	25
2.2.1 Inverzna Furijeova transformacija . . . . .	30
2.2.2 Osobine Furijeove transformacije . . . . .	31
2.3 Uzorkovanje . . . . .	37
2.3.1 Periodično uzorkovanje . . . . .	38
2.3.2 Teorema o uzorkovanju . . . . .	44
<b>3 Diskretne transformacije</b>	<b>46</b>
3.1 Diskretna Furijeova transformacija . . . . .	46
3.1.1 Ciklična konvolucija . . . . .	48
3.2 Diskretna kosinusna transformacija . . . . .	49
3.2.1 Jednodimenzionalna DCT . . . . .	50
3.2.2 Dvodimenzionalna DCT . . . . .	51
3.3 Osobine diskretne kosinusne transformacije . . . . .	53
3.3.1 Dekorelacija . . . . .	53
3.3.2 Kompaktnost energije . . . . .	54
3.3.3 Separabilnost . . . . .	57
3.3.4 Simetrija . . . . .	57
3.3.5 Ortogonalnost . . . . .	58
3.4 Brza Diskretna kosinusna transformacija . . . . .	58
3.5 Poređenje DCT sa drugim transformacijama . . . . .	59
<b>4 Brza Furijeova transformacija</b>	<b>61</b>
4.1 Princip dekompozicije . . . . .	61
4.1.1 FFT algoritam sa razbijanjem po vremenu . . . . .	62

4.1.2	Primer Kuli-Tuki algoritama za $N=8$ . . . . .	66
4.1.3	FFT algoritam za razbijanje po frekvenciji . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Modifikacija signala</b>	<b>71</b>
5.1	Spektralno curenje i definicija prozorskih funkcija . . . . .	71
5.2	Karakteristike prozorskih funkcija . . . . .	73
5.3	Pravougaona prozorska funkcija . . . . .	75
5.4	Trougaona prozorska funkcija . . . . .	76
5.5	Kosinusna/sinusna prozorska funkcija . . . . .	78
5.6	Hannova prozorska funkcija . . . . .	79
5.7	Hamingova prozorska funkcija . . . . .	81
5.8	Blekmanova prozorska funkcija . . . . .	82
5.9	Kaiserova prozorska funkcija . . . . .	85
5.10	Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija . . . . .	86
5.11	Poređenje prozorskih funkcija . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Primeri</b>	<b>90</b>
6.1	Primeri FFT implementacije . . . . .	90
6.1.1	FFT audio signala . . . . .	90
6.1.2	FFT algoritam koji prikazuje kosinusne talase . . . . .	93
6.2	Primer algoritma za kompresiju slike DCT-om . . . . .	95
	<b>Biografija</b>	<b>100</b>
	<b>Ključna dokumentacija</b>	<b>101</b>

# Predgovor

Furijeova analiza je oblast primenjene matematičke analize koja se u velikoj meri koristi u mnogim naučnim oblastima. U ovom radu će se izložiti primena Furijeove analize u rešavanju nekih zadataka digitalne obrade signala.

U prvoj glavi rada, odnosno u uvodnom delu, uvodi se pojam signala i navodi jedna moguća klasifikacija signala. Takođe, definišće se i osnovni pojmovi u vezi sa digitalnom obradom signala, odnosno opisaće se ukratko faze kroz koje prolaze analogni signali tokom konvertovanja u digitalne signale.

S obzirom da je Furijeova transformacija najčešće korišćena alatka za analizu signala, druga glava u radu temelji se na nekim segmentima Furijeove analize. Definišće se Furijeova transformacija i dokazati njena osnovna svojstva. Budući da je jedna od ključnih stvari u digitalnoj obradi signala prevođenje analognog u digitalni signal, jedan deo ove glave je posvećen uzorkovanju. Definišće se Najkvistova teorema o uzorkovanju, kao i pojava poznatija kao aliasing.

U trećoj glavi rada izučavaće se neke od diskretnih transformacija. Prvo je definisana diskretna Furijeova transformacija (DFT) koja se dobija diskretizacijom jedne periode Furijeove transformacije, zatim i njena ciklična konvolucija. Potom je definisana diskretna kosinusna transformacija (DCT). Prvo se uvodi jednodimenzionalana kosinusna transformacija, a potom češće korišćena, dvodimenzionalana diskretna kosinusna transformacija. Definišće se i neka osnovna svojstva DCT poput dekorelacije, kompaktnosti energije, separabilnosti, simetrije i ortogonalnosti.

Četvrta glava posvećena je brzom Furijeov transformaciji (FFT), algoritmu koji omogućava brzo izračunavanje diskretne Furijeove transformacije. FFT je prikazana kroz dva svoja algoritma sa razbijanjem po vremenu i sa razbijanjem po frekvenciji. Takođe kroz primer je detaljnije pojašnjen Kuli - Tuki algoritam.

Budući da je tema rada modifikacija signala, u petoj glavi objašnjeni su neki od razloga zbog kojih se pribegava modifikaciji signala. Jedan od načina za realizaciju modifikacije signala je korišćenje prozorske funkcije, pa se u ovom delu definiše pojam i uloga takvih funkcija. Potom se posmatra nekoliko prozorskih funkcija kao što su pravougaona, trougaona, Hanova i Hemingova funkcija koja predstavlja poboljšanu verziju Hanove funkcije.

Šesta glava rada je posvećena nekim primerima koji će biti napisani u obliku Matlab kodova uz njihovu analizu i obrazloženja.

\*\*\*

*Ogromnu zahvalnost upućujem svom mentoru dr Nenadu Teofanovu na stručnim savetima, pomoći, podršci i strpljenju prilikom izrade ovog rada kao i za svo preneto znanje tokom studiranja.*

*Takođe, zahvaljujem se članovima komisije, dr Marku Nedeljkovu i dr Jeleni Aleksić, kao i svim ostalnim profesorima sa kojima sam saradivala tokom osnovnih i master studija.*

*Najveću zahvalnost, na podršci i razumevanju tokom svih ovih godina, dugujem porodici, majci Vesni i Stevanu!*

*Dušica Baljak*

# 1 Uvod

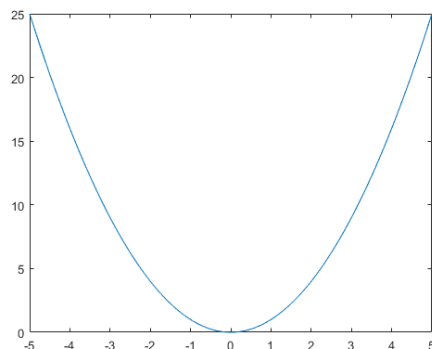
U ovoj glavi se navodi opšta definicija pojma signala, kao i podela na neke osnovne tipove signala. Potom se navode neki osnovni elementarni signali i na kraju glave se uopšteno definiše pojam digitalne obrade signala. Pri izradi ove glave korišćena je literatura [1], [2], [9], [12], [13].

## 1.1 Pojam i vrste signala

Pojam signala se može definisati na više načina. Najopštije, signali predstavljaju merljive veličine koje nose informacije o nekom vremenski promenljivom fizičkom procesu. Jednostavnije rečeno, signal predstavlja skup podataka ili informacija. Matematički, signal možemo predstaviti kao funkciju nezavisne promenljive  $t$ ,  $x(t)$ , pri čemu  $t$  predstavlja vreme. Neki od primera signala su pritisak, temperatura, govor, cene na berzi, struja i napon, video, sila i brzina,... Postoji više različitih podela signala. U ovom delu predstavljeni su neki osnovni tipovi signala.

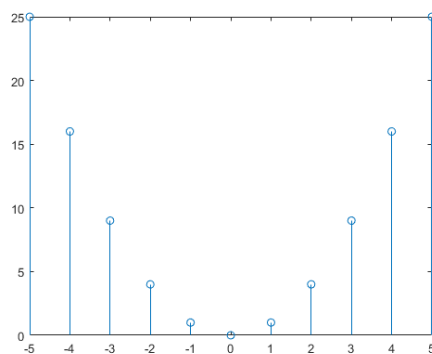
Jedna od najosnovnijih i najbitnijih podela signala je podela na neprekidne i diskretne signale. Međutim ove signale je moguće klasifikovati po vremenu i po amplitudi (vrednosti) te na osnovu toga sledi razlog za sledeću podelu: Prema vremenskoj promenljivoj:

- *Vremenski neprekidan signal* - signal  $x(t)$  koji je definisan u svakom trenutku vremena unutar nekog vremenskog intervala odnosno, signal  $x(t)$  je neprekidan ako je  $t$  neprekidna promenljiva. Svi procesi u prirodi predstavljaju kontinualne funkcije. Na slici 1 grafički je prikazan neprekidni signal.
- *Vremenski diskretni signal* - signal sa definisanim vrednostima samo u diskretnim trenucima vremena unutar nekog vremenskog intervala. Odnosno, kako bi kontinualne signale prilagodili radu na računaru uvodi se pojam diskretnog signala  $x[n]$ , gde je  $n$  ceo broj. Dobijeni su uzorkovanjem neprekidnih signala  $x(t)$  u određenim vremenskim trenucima. Međutim, nisu svi diskretni signali dobijeni na ovaj način. Neki signali se mogu smatrati prirodnim diskretnim nizovima. Primeri signala koji spadaju u ovu kategoriju uključuju dnevne cene akcija, statistiku



Slika 1: Grafički prikaz neprekidnog signala  $x(t) = t^2$

stanovništva, zalihe robe u skladištima i slično. Na slici 2 dat je grafički prikaz diskretnog signala.



Slika 2: Grafički prikaz diskretnog signala  $x[n] = n^2$

Prema prirodi amplitude signali mogu biti:

- *Analogni signali* - signal može da poprmi beskonačno mnogo različitih vrednosti amplitude u određenom neprekidnom intervalu.
- *Digitalni signali* - signal može da primi samo konačan broj vrednosti amplitude, odnosno digitalni signal je diskretni signal sa brojčanom vrednošću. Npr. binarni signal je digitalni signal sa samo dve vrednosti amplitude ( 0 i 1).

Postupak kojim se iz analognog dobija digitalni signal naziva se kvantizacija<sup>1</sup>.

Sledeća važna podela je na:

- *Determinističke signale* kod kojih je fizički opis i u matematičkom i u grafičkom delu potpuno poznat.
- *Stohastičke (slučajne) signale* kod kojih se vrednosti signala ne mogu tačno predvideti (šum), pa se ne mogu opisati matematičkom funkcijom, ali su poznati neki statistički parametri signala (npr. srednja vrednost)

Na osnovu vrednosti funkcije signale delimo na:

- *Realne signale* - realna matematička funkcija vremenskog argumenta odnosno realni signali su oni signali koji imaju realnu vrednost funkcije.
- *Kompleksne signale* - kompleksna funkcija vremena (za svako  $t$ , vrednost signala je jednoznačno definisan kompleksan broj, koji je opisan svojim modulom i argumentom). Kompleksni signali su oblika  $x = x_1 + i x_2$  pri čemu su  $x_1$  i  $x_2$  dva realna signala. Ukoliko je signal  $x_2$  jednak nuli, onda signal  $x$  postaje realan signal.

Takođe još jedna od podela je na:

- *Parne signale* - signal  $x(t)$  je paran ako je  $x(t) = x(-t)$ . Ukoliko je signal paran on je simetričan u odnosu na  $y$ -osu. Grafički prikaz parnog signala dat je na slici 3.
- *Neparne signale* - signal  $x(t)$  je neparan ako je  $x(t) = -x(-t)$ . Ukoliko je signal neparan, on je simetričan u odnosu na koordinatni početak. Na slici 4 grafički je prikazan neparan signal.

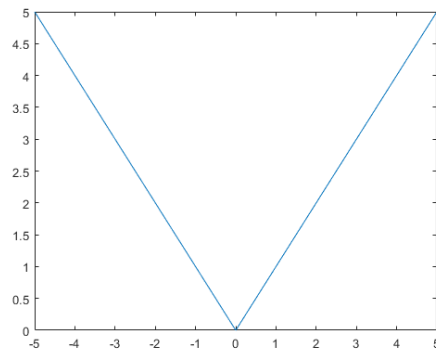
Jedna od bitnijih podela signala je i na:

- *Periodične neprekidne signale*: Neprekidan vremenski signal  $x(t)$  je periodičan sa periodom  $T > 0$  ako je  $x(t) = x(t + T)$  za  $t \in \mathbb{R}$ .
- *Periodične diskretne signale*: Za diskretan vremenski signal  $x[n]$  kažemo da je periodičan sa periodom  $N > 0$  ako za svako  $n \in \mathbb{N}$  važi  $x[n + N] = x[n]$ .

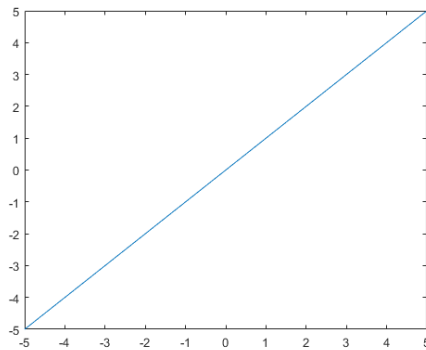
---

<sup>1</sup>engl. quantisation





Slika 3: Grafički prikaz parnog signala  $x(t) = |t|$



Slika 4: Grafički prikaz neparnog signala  $x(t) = t$

Najmanja vrednost za  $T$  ili  $N$  za koje vredi uslov periodičnosti neprekidnog ili diskretnog signala predstavlja osnovni period tog signala. Signal koji ne zadovoljava nijedan uslov periodičnosti je aperiodičan ili neperiodičan signal. Na slici 5 dat je grafički prikaz periodičnog signala.

Još jedna podela signala je na osnovu kauzalnosti signala. Prema tome postoje:

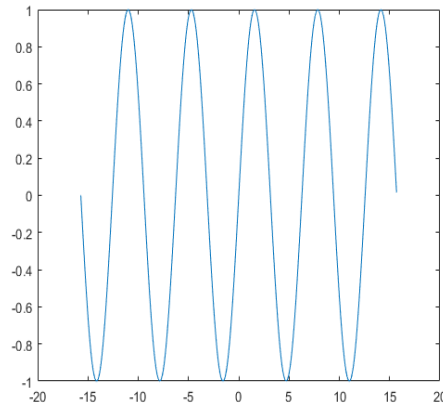
- *Kauzalni signali:*

Neprekidni signal  $x(t)$  je kauzalan ako važi da je  $x(t) = 0, t < 0, t \in \mathbb{R}$ .

Diskretni signal  $x[n]$  je kauzalan ako je  $x[n] = 0, n < 0, n \in \mathbb{Z}$ .

- *Antikauzalni signali:*

Neprekidan signal  $x(t)$  je antikauzalan ako važi da je  $x(t) = 0, t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ .



Slika 5: Grafički prikaz periodičnog signala  $x(t)$

Diskretni signal  $x[n]$  je antikauzalan ako je  $x[n] = 0, n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$ .

## 1.2 Neki elementarni diskretni i neprekidni (kontinualni) signali

U ovom delu poglavlja navedeno je nekoliko elementarnih diskretnih i kontinualnih signala koji se često koriste i služe da se iz njih izvedu neki složeniji signali.

### 1.2.1 Jedinični impuls

Niz koji ima samo jedan nenula element naziva se jedinični impuls. To je najjednostavniji diskretni signal koji se često naziva i Dirakov<sup>2</sup> impuls i označava se sa  $\delta[n]$ , a definiše se na sledeći način:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

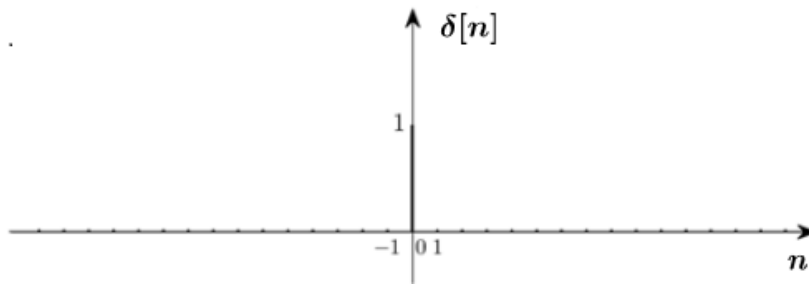
Prema tome, Dirakov impuls je diskretni signal koji svuda ima vrednost nula osim u nuli gde je  $n = 0$ . Na slici 6 dat je grafički prikaz ovog signala. Jedinična sekvenca pomerena za  $k$  uzoraka se definiše kao:

$$\delta[n - k] = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

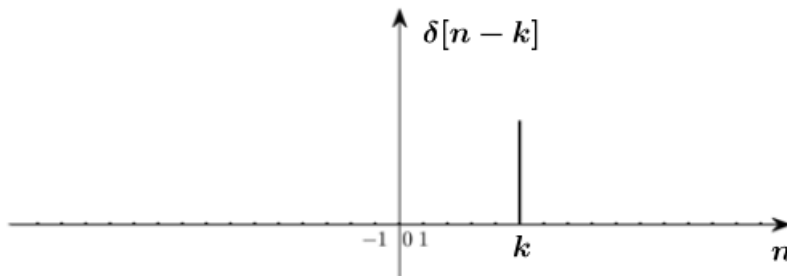
i predstavljena je na slici 7.

---

<sup>2</sup>Paul Dirac, 1902-1984, fizičar



Slika 6: Dirakov impuls



Slika 7: Pomeraj Dirakovog impulsa

Proizvoljni vremenski diskretni signal može da se prikaže preko jediničnog impulsa i to kao suma pomerenih jediničnih impulsa različitih amplituda. Drugim rečima, ako su date amplitude  $x[0], x[1], x[2], \dots$   $n$ -ti član niza dat je sledećim izrazom:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k].$$

Ova, najvažnija, osobina jediničnog impulsa naziva se osobina selektivnosti.

U neprekidnom slučaju, Dirakov impuls,  $\delta(t)$  definiše se sledećim uslovima:

- (i)  $\delta(t) = 0$  za  $t \neq 0$ ;
- (ii)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ ;
- (iii)  $\int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt = \begin{cases} 1, & t_1 < 0 < t_2, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

Pomereni Delta impuls u neprekidnom slučaju definiše se na sledeći način:

$$\delta(t - t_0) = 0, \text{ za } t \neq t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

U digitalnoj obradi signala, posebno je korisna relacija koja predstavlja svojstvo selektivnosti:

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt,$$

pri čemu je  $x(t)$  proizvoljan neprekidni signal u trenutku  $t_0$ . Drugim rečima, vrednost signala u određenom trenutku  $t_0$ , može se predstaviti kao konvolucija Dirakovog impulsa  $\delta(t)$  i signala  $x(t)$  u tom trenutku.

### 1.2.2 Hevisajdov signal

Hevisajdov<sup>3</sup> signal  $u[n]$ , poznat i pod nazivom jedinični odskočni signal, u diskretnom slučaju definiše se na sledeći način:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Jedinični odskočni niz se može predstaviti i preko jediničnog impulsa na sledeći način:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - k].$$

Hevisajdov signal u diskretnom slučaju prikazan je na slici 8.

U neprekidnom slučaju, Hevisajdova funkcija se definiše na sledeći način:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

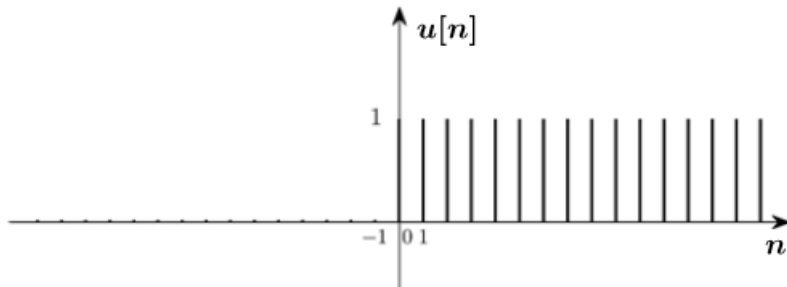
### 1.2.3 Eksponecijalni signal

Eksponecijalni diskretni signal je jako važan u predstavljanju linearnih diskretnih sistema. Ovi diskretni signali dati su izrazom:

$$x[t] = A\alpha^t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

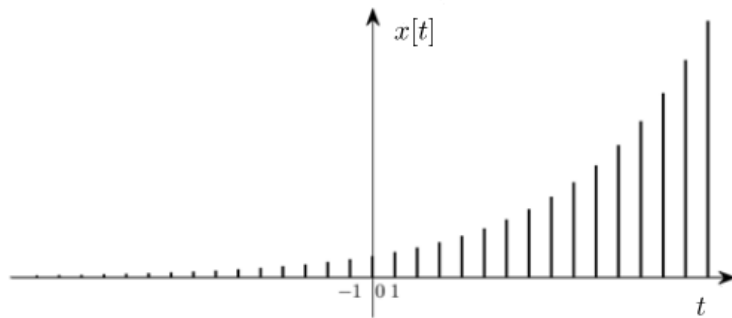
---

<sup>3</sup>Oliver Heaviside



Slika 8: Diskretni Hevisajdov (jedinični odskočni) signal

Pri čemu su u opštem slučaju vrednosti  $A$  i  $\alpha$  kompleksne. Ako su  $A$  i  $\alpha$  realne vrednosti, onda je i ovaj niz realan. Ako je  $0 < \alpha < 1$  i  $A$  pozitivno onda su vrednosti sekvenci pozitivne i opadaju sa povećanjem  $t$ . Za  $-1 < \alpha < 0$  vrednosti sekvence se smenjuju u znaku, ali opet opadaju sa porastom  $t$ . Ako je  $|\alpha| > 1$  onda sekvenca raste kako  $t$  raste. Grafički prikaz diskretnog eksponencijalnog signala dat je na slici 9.



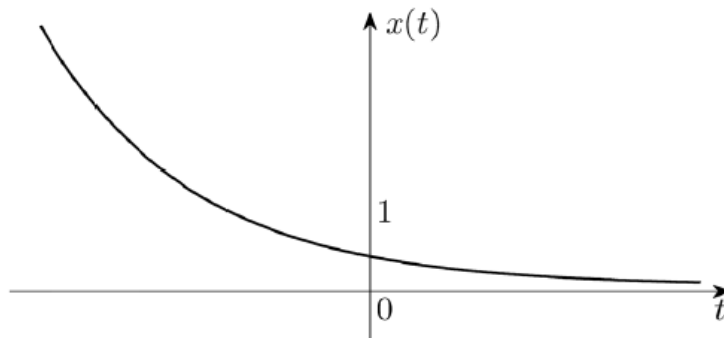
Slika 9: Diskretni eksponencijalni signal  $x[t] = A\alpha^t$  za  $\alpha > 1$

Eksponencijalni neprekidni signal definisan je na sledeći način:

$$x(t) = A\alpha^t, t \in \mathbb{R},$$

pri čemu su, kao i kod diskretnog eksponencijalnog signala, u opštem slučaju parametri  $A$  i  $\alpha$  kompleksne konstante. Signali koji eksponencijalno rastu koriste se za opisivanje nekih prirodnih pojava poput lančanih reakcija kod

složenih hemijskih procesa, ali se u prirodi fizičke pojave češće opisuju signalima koji opadaju. Takva pojava je npr. radioaktivno rasipanje. Kao i u diskretnom slučaju ukoliko su konstante  $A$  i  $\alpha$  realni brojevi dobija se realan eksponencijalni signal. Neprekidni ekponencijalni signal je prikazan na slici 10.



Slika 10: Realni kontinualni eksponencijalni signal  $x(t) = A\alpha^t$  za  $0 < \alpha < 1$

Sa kompleksnim eksponencijalnim signalima usko su povezani i sinusni signali, stoga su i oni definisani u nastavku.

#### 1.2.4 Diskretni i neprekidni sinusoidni signali

U digitalnoj obradi signala od velike važnosti su i signali koji opisuju jednostavne harmonijske oscilacije odnosno sinusoidni signali.

Na osnovu poznate činjenice da su sinusna i kosinusna matematička funkcija istog oblika samo međusobno fazno pomerene za  $\frac{\pi}{2}$ , odnosno važi identitet

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

sinusne signale možemo zapisati preko kosinusne funkcije. Prema tome, diskretni sinusoidni signal definisan je izrazom:

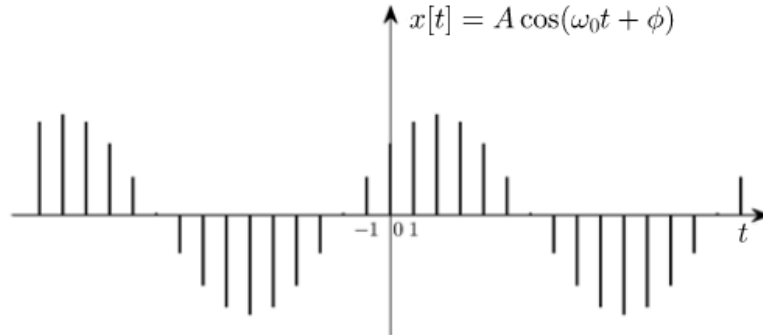
$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi), -\infty < n < \infty, \quad (1)$$

gde je  $n \in Z$ ,  $A$  amplituda sinusiode,  $\phi$  faza u radijanima,  $\omega_0$  učestanost u radijanima.

Međutim, izraz (1) može da se zapiše i kao:

$$x[n] = A \cos(2\pi f n + \phi), -\infty < n < \infty,$$

ukoliko se umesto  $\omega$  iskoristi promenljiva učestanost definisana sa  $\omega = 2\pi f$ . Diskretni sinusoidni signal je prikazan na slici 11.



Slika 11: Diskretni sinusni signal  $x[n]$

U neprekidnom obliku sinusoidni signal je definisan na sledeći način:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), -\infty < t < \infty. \quad (2)$$

Često se umesto  $\omega$  koristi i linearna učestanost  $F$  koja ima jedinicu  $Hz$  ili broj perioda signala u sekundi pri čemu važi da je

$$\omega = 2\pi F \quad (3)$$

Ukoliko se iskoristi izraz (3) sinusoidni signal može se zapisati kao:

$$x(t) = A \cos(2\pi F t + \phi), -\infty < t < \infty. \quad (4)$$

Signal dat izrazom (4) je periodičan za svaku konstantnu vrednost učestanosti  $F$ . Takođe bitna osobina signala datim izrazom (4) je da su kontinualni signali sa različitim učestanostima međusobno različiti. Dok povećanje učestanosti  $F$  za posledicu ima povećanje broja oscilacija u nekom vremenskom intervalu.

Preostaje još da se pojašni povezanost sinusnih i eksponencijalnih signala. Razlog bliskosti između sinusoidnih i eksponencijalnih signala je što sinusoidni signal može, koristeći Ojlerov identitet  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , da prikaže kao zbir dva konjugovano-kompleksna eksponencijalna signala jednakih amplituda, odnosno

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = \frac{A}{2} e^{i(\omega t + \phi)} + \frac{A}{2} e^{-i(\omega t + \phi)}. \quad (5)$$

Prvi sabirak u izrazu (5) odgovara pozitivnoj učestanosti  $\omega$  u radijanima po sekundi, dok drugi sabirak odgovara negativnoj učestanosti (Učestanost se interpretira kao broj perioda signala u jedinici vremena za periodične signale i ona je samim tim pozitivna vrednost, ali zarad matematičkih potreba uvode se i negativne vrednosti učestanosti).



### 1.3 Digitalna obrada signala

Digitalna obrada signala - DSP jedna je od najmoćnijih tehnologija koje su oblikovale i oblikuju nauku i inženjerstvo u dvadeset i prvom veku. Revolucionarne promene su već napravljene u širokom spektru polja kao što su komunikacije, medicinsko snimanje, radari i sonori, reprodukcija muzike, istraživanja nafte itd. Svako od ovih područja je razvilo duboku DSP tehnologiju sa svojim sopstvenim algoritmima i specijalizovanim tehnikama.

Od ostalih područja u računarskoj nauci, digitalna obrada signala se razlikuje po jedinstvenoj vrsti podataka koje koristi - signali. U većini slučajeva ovi signali potiču kao podaci iz stvarnog sveta kao što su seizmičke vibracije, vizuelne slike, zvučni talasi itd. Dakle, digitalna obrada signala predstavlja proces analize i modifikacije signala u cilju optimizacije ili poboljšanja njegove efikasnosti. To uključuje primenu različitih matematičkih i računskih algoritama na analogne i digitalne signale u cilju dobijanja novog signala koji je višeg kvaliteta od prvobitnog signala. Tačnije, DSP se bavi predstavljanjem analognih signala nizom brojeva ili simbola i obrađivanjem ovih signala. Ti brojevi predstavljaju izmerene vrednosti signala u sukcesivnim vremenskim intervalima. Odnosno, ne beleže se sve vrednosti signala, već vrednosti u nekim tačkama u vremenu. Ovako dobijeni signal se naziva diskretni signal jer je skup tačaka u kojima se posmatra vrednost signala diskretan. Potom se vrši kompjuterska obrada signala i time se dobija digitalni signal. Ovo svođenje analognog tj. neprekidnog signala na diskretni odnosno diskretizacija po vremenu se naziva semplovanje ili uzorkovanje, o čemu će biti više reči u narednom poglavlju, a svođenje diskretnog na digitalni, odnosno diskretizacija po amplitudi se naziva kvantovanje.

Počeci DSP-a potiču iz 1960-ih i 1970-ih kada su digitalni računari postali dostupni u naučnim istraživanjima. Kako su računari bili skupi u to vreme DSP je bila ograničena na nekoliko aplikacija. Četiri ključne oblasti rada bile su radari i sonori, istraživanje nafte, istraživanje svemira i medicinski snimci. Revolucija personalnih računara desila se 1980-ih i 1990-ih i izazvala je ekspanziju DSP-a. DSP je stigla u proizvodima kao što su mobilni telefoni, uređaji za reprodukciju kompaktnih diskova i elektronaska pošta itd.

Digitalna obrada signala se odvija u nekoliko faza:

- Pretvaranje analognih signala u digitalni oblik
- Obrada digitalnog oblika signala
- Pretvaranje obrađenog digitalnog signala u analognu formu.

Prema gore navedenim fazama u digitalnoj obradi signala, prvo se (uz pomoć takozvanog sample-on hold kola) vrši uzorkovanje digitalnog signala u periodičnim intervalima. Zatim se ovakav signal šalje na A/D (analogno/digitalni) konvertor i signal se digitalizuje. Ovako dobijeni digitalni signal je binarna sekvenca i njegova obrada se dalje vrši u digitalnom-signal procesoru implementiranjem odgovarajućeg algoritma obrade signala. Kao izlaz iz digitalnog signal-procesora se ponovo dobija binarna sekvenca koja se u D/A (digitalno/analogni) konvertoru pretvara u stubičasti analogni signal. Na kraju, u cilju odstranjivanja neželjenih visokofrekventnih komponenata, koristi se nisko propusni filter nakon čega se dobija željeni obrađeni analogni signal.

Glavni razlog zbog koga se ranije pribegavalo analognoj obradi signala je taj što se u postupku digitalne obrade signala generiše mnogo brojeva, a u ranijem periodu nije postojala neophodna tehnologija koja je mogla da memoriše, obrađuje ili reprodukuje ovoliku količinu brojeva.

Razvojem računara, koji omogućavaju efikasno korišćenje postojećih algoritama i podstiču razvoj novih, i digitalna obrada ostvaruje napredak. Stoga je danas skoro celokupna obrada signala digitalna, tj. sve analitičke proračune nad digitalnim signalima, dobijenim od analognih, obavljaju računari.

## 2 Furijeova analiza

Furijeova analiza je vrlo važan i moćan alat u digitalnoj obradi signala. Pruža mogućnost mapiranja u drugi domen u kojim se njima može manipulirati.

Prilikom obrade signala korisno je signal predstaviti kao kombinaciju prostijih signala jer se time dobija bolji uvid u prirodu signala, a takođe i obrada složenog signala se može pojednostaviti putem obrade jednostavnih signala. Samim tim, ova glava rada je posvećeno nekim osnovnim pojmovima Furijeove analize.

Prvo je ispitano kako se za određenu periodičnu funkciju može dobiti Furijeov red i koja svojstva on poseduje. Potom pod kojim uslovima Furijeovi redovi daju tačan prikaz periodičnih funkcija. Nakon toga sledi prelazak sa periodičnih na neperiodične funkcije, odnosno prelazak sa Furijeovog reda na Furijeovu transformaciju. Literatura korišćena za ovo poglavlje je [1], [2], [4], [9], [12], [15].

### 2.1 Furijeovi redovi

Najprostije periodične funkcije, koji se nazivaju i harmonici, najčešće su oblika

$$A \sin(\omega t + \varphi), -\infty < t < \infty$$

pri čemu  $A$  predstavlja amplitudu,  $\omega$  ugaonu frekvenciju, a  $\varphi$  početnu fazu harmonika  $A \sin(\omega t + \varphi)$ . Ovakav naziv funkcije potiče od harmonijskih oscilacija, koje se opisuju ovakvim funkcijama. Period ovakvih prostih funkcija je  $2\pi/\omega$ .

Neka je  $x(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  periodični složeni signal sa periodom  $T$ . Pri razlaganju periodične funkcije sa periodom  $T$  na proste harmonike, ugaone frekvencije ovih prostih harmonika treba da se izaberu tako da svaki od njih bude  $T$  periodična funkcija, odnosno da  $2k\pi/\omega = T$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Suma beskonačno mnogo harmonika je

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T} + \varphi_k\right) \quad (6)$$

Ova suma je periodična sa periodom  $T$ ,  $A_k$  predstavlja amplitudu,  $\varphi_k$  fazu za sinus funkciju frekvencije  $k$ . Ukoliko se na izraz (6) primeni adicione formule

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

on se može se zapisati na sledeći način:

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \right) \quad (7)$$

U gore navedenoj formuli iskorišćene su sledeće oznake:

$$\frac{a_0}{2} = A_0, \quad a_k = A_k \sin \varphi_k, \quad b_k = A_k \cos \varphi_k$$

I konačno, uvođenjem sledećih oznaka

$T$  - period talasa,

$f_1 = \frac{1}{T}$  - osnovna frekvencija talasa,

$\omega = 2\pi f_1$  - osnovna kružna frekvencija talasa,

$k$  - ceo broj koji predstavlja harmonike osnovne frekvencije,

izraz (7) postaje:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t). \quad (8)$$

Prema tome, za periodičnu funkciju sa periodom  $T$  potrebno je odrediti konstante  $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$  tako da važi

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t). \quad (9)$$

Ukoliko se pretpostavi da se funkcija  $x(t)$  može razviti u uniformno konvergentan red na  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  dat sa (9), on se može integraliti član po član, odnosno

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt &= \frac{a_0}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos k\omega t dt + b_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin k\omega t dt \right) \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = a_0 \pi, \end{aligned}$$

Odakle je

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \quad (10)$$

Množeći (9) sa  $\cos nx$  i integraleći sabirak po sabirak od  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  dobija se

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega t dt = \\ & \frac{a_0}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos k\omega t dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos k\omega t \cos k\omega t dt + b_k \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin k\omega t \cos k\omega t dt \right) \\ & = \frac{a_0}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 k\omega t dt = a_n \pi, \\ & a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega t dt \quad (11) \end{aligned}$$

Analogno, množeći (9) sa  $\sin nx$  i integraleći sabirak po sabirak od  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  dobija se

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin k\omega t dt \quad (12)$$

Izrazi (10), (11), (12) nazivaju se *Furijeovi koeficijenti* funkcije  $x(t)$ . Jednakost (9) sa Furijeovim koeficijentima (10), (11), (12) nazivaju se *Furijeov trigonometrijski red* funkcije  $x(t)$ .

Medjutim, izraz (8) može da se zapiše drugačije ukoliko se iskoristi Ojlerova<sup>4</sup> formula

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

---

<sup>4</sup>Leonhard Euler (1707-1783) - švajcarski matematičar i fizičar

pa Furijeov trigonometrijski red postaje Furijeov eksponencijalni red pri čemu su uvedeni novi koeficijenti  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Za ovo izvodjenje iskoristiće se svojstva da za neko  $c_k \in \mathbb{C}$  važi da je

$$c_k + \overline{c_k} = 2\operatorname{Re}(c_k)$$

i

$$ic_k - i\overline{c_k} = -2\operatorname{Im}(c_k)$$

gde je  $\overline{c_k}$  oznaka za konjugovano kompleksni broj. Odnosno, traže se koeficijenti  $c_k$  takvi da važi:

$$a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t = c_k e^{ik\omega t} + \overline{c_k} e^{-ik\omega t}$$

i ukoliko se ovde iskoristi Ojlerova formula, dobija se sledeće:

$$a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t = c_k (\cos k\omega t + i \sin k\omega t) + \overline{c_k} (\cos k\omega t - i \sin k\omega t)$$

Dalje sledi da je:

$$a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t = \cos k\omega t (c_k + \overline{c_k}) + \sin k\omega t (ic_k - i\overline{c_k})$$

Sada, ukoliko se iskoriste gore navedena svojstva dobija se da je:

$$a_k = 2\operatorname{Re}(c_k),$$

$$b_k = -2\operatorname{Im}(c_k).$$

Potom, nakon množenja druge jednačine sa  $i$  i dodavanja prvoj dobija se:

$$\overline{c_k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

pri čemu je iskorišćeno da je  $\operatorname{Re}(c_k) - i\operatorname{Im}(c_k) = \overline{c_k}$ . Ako se sada uvede oznaka  $c_{-k} = \overline{c_k}$  Furijeov red može se zapisati na sledeći način:

$$(8) \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

gde je  $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$  i  $ck = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ , a  $c_0 = \overline{c_0} = \frac{a_0}{2}$ . Koeficijenti su dati sledećom formulom:

$$(9) \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-ik\omega t} dx$$

Na ovaj način dobijen je Furijeov eksponencijalni red. Izraze,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \quad (13)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (14)$$

nazivamo Furijeov transformacioni par za neprekidne periodične signale pri čemu prvi izraz u transformacionom paru (13) predstavlja sintezu signala jer periodičan neprekidan signal predstavlja u obliku sume elementarnih kompleksnih eksponencijalnih funkcija, dok je drugi izraz (14) analiza signala jer govori o vrednostima koeficijenata Furijeovog reda kojima se množe elementarne kompleksne eksponencijalne funkcije prilikom sinteze signala.

Kao što je već napomenuto, koeficijenti Furijeovog reda  $c_k$  su kompleksni brojevi, stoga mogu da se zapišu kao

$$c_k = |c_k| e^{i\varphi_k}.$$

Moduo koeficijenata Furijeovog reda  $|c_k|$  naziva se amplitudni spektar signala, koji nosi informaciju o modulima, a argument koeficijentata Furijeovog reda,  $\arg c_k = \varphi_k$  naziva se fazni spektar koji nosi informaciju o fazama tj. pomaku u vremenu pojedinačnih kompleksnih eksponencijalnih funkcija čijim se sumiranjem dobija posmatrani signal. Bitno je napomenuti, da je spektar periodičnog signala diskretan, odnosno sastoji se od celobrojnih umnožaka osnovne frekvencije  $f$ .

### 2.1.1 Dirihleovi uslovi

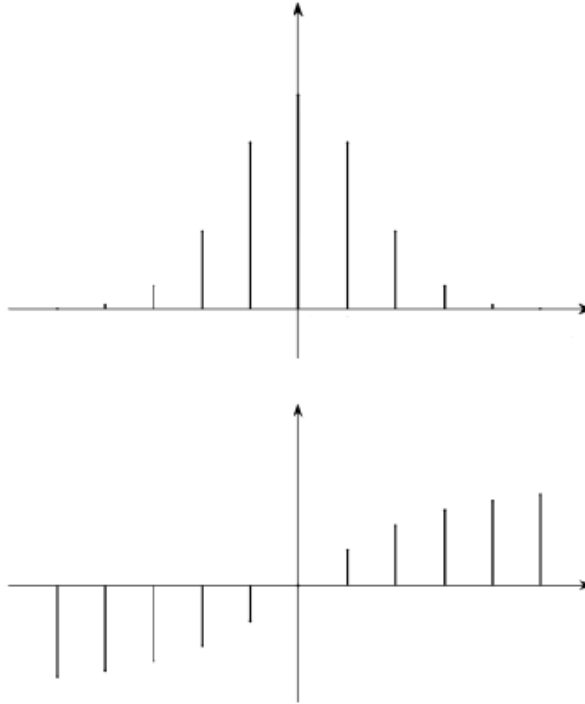
Sve prethodno izvedeno je pod pretpostavkom da se funkcija  $x(t)$  može razviti u uniformno konvergentni red. Sada se nameće pitanje da li red (13) čiji su koeficijenti dati sa (14) konvergentan na  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ .

Dirihleovi uslovi<sup>5</sup> predstavljaju dovoljne uslove za egzistenciju razvoja signala u Furijeov red. Prema Dirihleovim uslovima, neophodno je da signal:

- Bude apsolutno integrabilan na bilo kom otvorenom intervalu trajanja jedne periode odnosno,  $\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt < \infty$ ;

---

<sup>5</sup>Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), nemački matematičar



Slika 12: a) amplitudni spektar i b) fazni spektar periodičnog signala

- Ima konačan broj minimuma i maksimuma na bilo kom otvorenom intervalu trajanja jedne periode  $t_0 < t < t_0 + T$ ;
- Ima konačan broj prekida prvog reda (diskontinuiteta) na bilo kom otvorenom intervalu trajanja jedne periode  $t_0 < t < t_0 + T$ .

Uslovi za uniformnu kovergenciju su nešto jači:

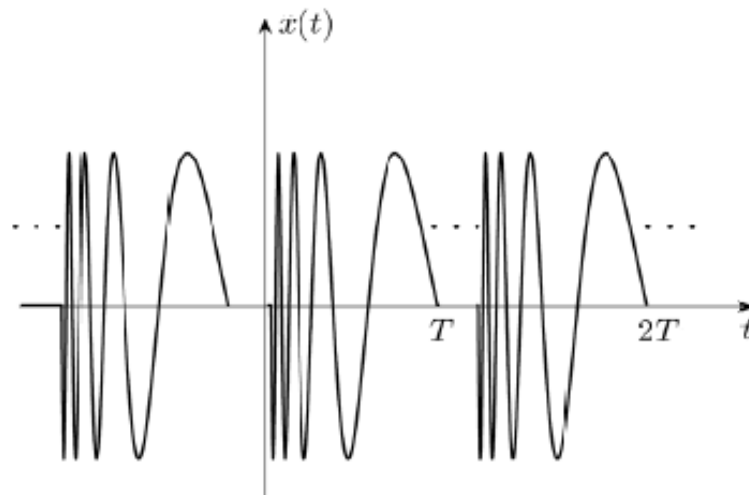
**Teorema 2.1** *Ako je funkcija  $x$  neprekidna na intervalu  $[t_0, t_0 + T]$  i važi  $x(t_0) = x(t_0 + T)$  i ako je  $x'$  deo po deo neprekidna, onda Furijeov red funkcije  $x$  konvergira uniformno ka  $x$  na  $[t_0, t_0 + T]$ .*

Uslov apsolutne integrabilnosti potvrđuje da su svi članovi Furijeovog reda konačni odnosno,

$$|c_k| = \left| \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-ik\omega t} dt \right| \leq \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t) e^{-ik\omega t}| dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)| dt < \infty.$$

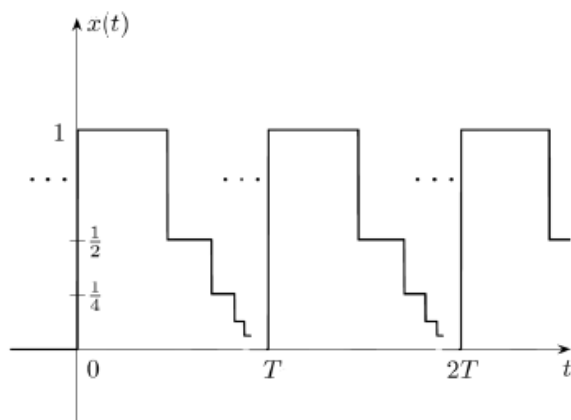


Signali koji ispunjavaju uslov apsolutne integrabilnosti, a da ne ispunjavaju jedan ili oba preostala Dirihleova uslova u praksi se jako retko javljaju. Jedan primer ovakvog signala koji je apsolutno integrabilan, ali ne zadovoljava drugi Dirihleov uslov jer ima beskonačno mnogo ekstrema unutar jednog perioda je prikazan na slici 13. Na slici 14 dat je primer apsolutno integrabilnog signala



Slika 13: Signal promenljive učestanosti sa beskonačno mnogo minimuma i maksimuma unutar jednog perioda

koji ne zadovoljava treći Dirihleov uslov. Sa slike se vidi da je svaki period signala podeljen na beskonačno mnogo intervala, tako da je prvi interval jednak polovini perioda signala, a svaki sledeći dva puta kraći od prethodnog. U svakom od tih intervala vrednost signala je konstantna i dva puta manja u odnosu na vrednost u prethodnom, odnosno, unutar jednog perioda signal ima beskonačno mnogo diskontinuiteta.



Slika 14: Primer signala sa beskonačno diskontinuiteta unutar jednog perioda

## 2.2 Furijeova transformacija

Sada sledi prelazak sa Furijeovih redova na Furijeovu transformaciju. Reč prelaz je odgovarajuća reč jer prelaskom na Furijeovu transformaciju prelazi se sa periodičnih na neperiodične funkcije. Neperiodična funkcija može se posmatrati kao periodična funkcija gde period postaje sve duži i duži. Drugim rečima neperiodična funkcija može da se posmatra kao periodična funkcija kojoj period teži u beskonačnost.

Radi lakšeg razumevanja, gore izloženo će biti prvo prikazano na jednostavnijem primeru, a potom će ova priča biti generalizovana za opšti slučaj.

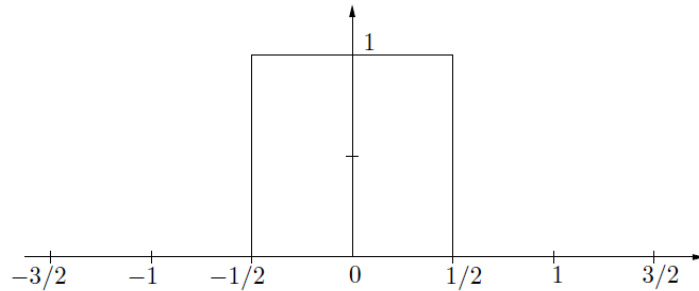
Neka je pravougana funkcija definisana na sledeći način:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/2, \\ 0, & |t| \geq 1/2 \end{cases} \quad (15)$$

Grafik ove funkcije je prikazan na slici 15.

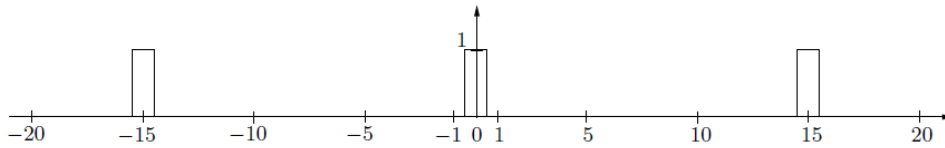
Sa grafika pravougane funkcije vidi se da je  $\Pi(t)$  parna funkcija i širine 1. Slikovito,  $\Pi(t)$  može se posmatrati kao prekidač koji je uključen na jednu sekundu dok je ostatak vremena isključen. Funkcija  $\Pi(t)$  se zbog svog grafika naziva još i šesir funkcija, indikatorska funkcija ili karakteristična funkcija za interval  $(-1/2, 1/2)$ .

$\Pi(t)$  nije periodična funkcija. Prema tome nema Furijeov red. Međutim, funkcija  $\Pi(t)$  ima jedinstven oblik na intervalu  $[-1/2, 1/2]$  koji se može iskoristiti za formiranje perioda. Ponavljajući deo funkcije gde ona nije jednaka nuli u pravilnim intervalima razdvojenim sa dugim intervalima gde je funkcija nula dobija se periodična verzija funkcije  $\Pi(t)$ . Ponovo na slikovit način,



Slika 15: Pravougaona funkcija  $\Pi(t)$

samo sada periodična funkcija  $\Pi(t)$  može da se posmatra kao prekidač koji se pali na sekund i proces paljena se ponavlja, a u periodu između dva paljena drži se ugašen. Dole je prikazan grafik funkcije  $\Pi(t)$  koje je periodizovana za period 15.



Slika 16: Funkcija  $\Pi(t)$  periodizovana za period 15

Potrebno je konstruisati funkciju  $x$  takvu da joj je period  $T$  i da je na intervalu  $[-T/2, T/2]$  jednaka funkciji  $\Pi$ . Furijeovi koeficijenti ove funkcije dati su sa

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2\pi i n t / T} x(t) dt$$

Ukoliko se Furijeovi koeficijenti predstave preko funkcije  $\Pi$  dobija se

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2\pi i n t / T} \Pi(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i n t / T} \cdot 1 dt \\ &= \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{-2\pi i n / T} e^{-2\pi i n t / T} \right]_{t=-1/2}^{t=1/2} = \frac{1}{2\pi i n} (e^{\pi i n / T} - e^{-\pi i n / T}) = \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{T}\right) \end{aligned}$$

Vrednosti Furijeovih koeficijentata  $c_n$  mogu se posmatrati kao funkcija koja zavisi od  $\frac{n}{T}$ . Sada ako  $T \rightarrow \infty$ , onda za svako  $n$ , ukoliko je  $T$  veoma veliko,  $n/T$  je veoma malo te sledi da je

$$\frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{T}\right) \text{ veličine oko } \frac{1}{T} \quad (\sin x \approx x \text{ ako je } x \text{ malo})$$

Drugim rečima, za svako  $n$  transformacija,

$$\frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{T}\right)$$

teži nuli kao  $1/T$ .

Uvodeći funkciju  $\hat{x}\left(\frac{n}{T}\right)$  takvu da važi:

$$\hat{x}\left(\frac{n}{T}\right) = T \cdot c_n$$

i uvrštavajući u nju već izračunatu vrednost za Furijeove koeficijente dobija se:

$$\hat{x}\left(\frac{n}{T}\right) = T \cdot c_n = T \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{T}\right) = \frac{\sin(\pi n/T)}{\pi n/T}.$$

Ukoliko  $T$  teži u beskonačnost može se primetiti da sada promenljiva  $n/T$  iz diskretne prelazi u neprekidnu, pa samim tim povećavanjem broja  $T$  zapravo smanjujemo razmak između vrednosti koje varijabla prima. Konačno, uvodeći smenu  $s = \frac{n}{T}$  dobija se:

$$\hat{x}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} \Pi(t) dt.$$

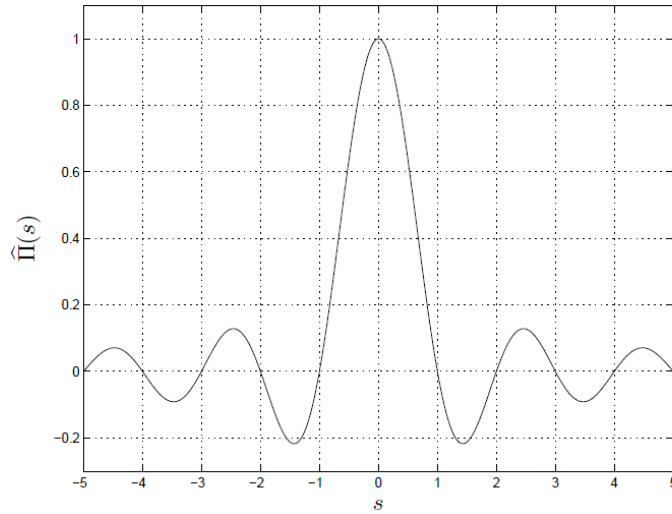
Sada sledi izračunavanje integrala.

$$\hat{x}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} \Pi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} \cdot 1 dt = \frac{\sin \pi s}{\pi s}.$$

Ovo upravo jeste Furijeova transformacija funkcije  $\Pi(t)$ , odnosno

$$\hat{\Pi}(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi s}.$$

Na slici 17 je prikazan grafik Furijeove transformacije funkcije  $\Pi(t)$ .



Slika 17: Furijeova transformacija funkcije  $\Pi(t)$

Funkcija  $\sin \pi x / \pi x$  koja se ovde puno koristi zbog svoje upotrebe dobila je naziv "sinc" funkcija.

$$\text{sinc } x = \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

gde je

$$\text{sinc } 0 = 1.$$

Sinc funkcija je neprekidna funkcija jer je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Sada se postavlja pitanje kako bi transformacija izgledala u opštem slučaju. Odgovor na postavljeno pitanje se dobija ukoliko se iskoristi ista ideja kao u priloženom primeru.

Sada će da se uradi periodizacija bilo koje funkcije sa namerom da  $T \rightarrow \infty$ . Pretpostavka je da je  $x(t)$  nula izvan  $|t| \leq 1/2$ . (Može se uzeti bilo koji interval, potrebno je samo pretpostaviti da je funkcija jednaka nuli izvan nekog intervala, tako da se može periodizovati). Periodizovaće se funkcija  $x(t)$  periodom  $T$  i izračunati Furijeovi koeficijenti:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2\pi i n t / T} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i n t / T} x(t) dt. \quad (16)$$

Ukoliko se ovo proceni

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{1}{T} \left| \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi int/T} x(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} |e^{-2\pi int/T}| |x(t)| dt = \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} |x(t)| dt = \frac{A}{T}, \end{aligned}$$

gde je

$$A = \int_{-1/2}^{1/2} |x(t)| dt,$$

koje je neki fiksiran broj, nezavisno od  $n$  i  $T$ . Očigledno je da  $c_n$  teži nuli kao i  $1/T$ . Ukoliko se izraz za Furijeove koeficijente funkcije  $x(t)$  zapiše preko funkcije  $X$  koja zavisi od promenljive  $n/T$  odnosno

$$X\left(\frac{n}{T}\right) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2\pi int/T} dt.$$

Sada nova formula za Furijeov red glasi:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X\left(\frac{n}{T}\right) e^{2\pi int/T}$$

Odnosno,

$$X\left(\frac{n}{T}\right) = T c_n = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2\pi int/T} dt$$

Kako je  $T \rightarrow \infty$ , granice mogu da se zamene  $T/2 \rightarrow \infty$ , diskretna promenljiva  $n/T$  postaje neprekidna i ukoliko se izvrši zamena  $n/T$  sa  $s$  dobija se ista forma integrala:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ist} x(t) dt$$

Konačno sledi formalna definicija Furijeove transformacije:

**Definicija 2.1** Data je apsolutno integrabilna funkcija  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Furijeova transformacija funkcije  $x$  je funkcija  $X$  definisana sa

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \text{ pri čemu je } \omega \text{ dato sa } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Specijalno, transformacija u nuli jednaka je

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

što je zapravo površina ispod grafika funkcije na celom domenu funkcije. Za Furijeovu transformaciju pored notacije koja je ovde korišćena,  $X$ , često se sreće i oznaka  $\mathcal{F}(x(t))(\omega)$  kao i  $\hat{x}(t)$ . U praksi se često domen definisanosti signala odnosno vremenski domen naziva originalni, a domen definisanosti Furijeove transformacije frekvencijski ili transformacioni domen.

Uslov apsolutne integrabilnosti je dovoljan za egzistenciju Furijeove transformacije većine fizičkih signala. Međutim uslov apsolutne integrabilnosti nije i potreban uslov jer postoje signali koji nisu apsolutno integrabilni npr. Dirakova funkcija, sinusni i drugi periodični signali, ali za koje se ipak može odrediti Furijeova transformacija.

Kao i kod diskretnog spektra, Furijeova transformacija je kompleksna funkcija i može se predstaviti kao

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{i\phi(\omega)}.$$

Moduo Furijeove transformacije  $|X(\omega)|$  određuje amplitude elementarnih funkcija i naziva se amplitudni spektar signala, a argument  $\phi(\omega) = \arg X(\omega)$  je fazni spektar signala jer utiče na fazne pomake elementarnih signala.

### 2.2.1 Inverzna Furijeova transformacija

Kao što je već rečeno, Furijeova transformacija analizira signal na osnovu njegove frekvencije. Ali takođe nas interesuje kako da nađemo njenu inverznu funkciju, odnosno kako da rekonstruišemo funkciju  $x(t)$  u vremenski domen iz njene transformacije, odnosno iz njenog frekvencijskog domena  $X(s)$ ?

Prvi korak pri izvođenju Furijeove transformacije je bio da se formula za Furijeov koeficijent (16) zapiše pomoću funkcije  $X$ , koja zavisi od promenljive  $n/T$ . Tada formula za Furijeov red glasi:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X\left(\frac{n}{T}\right) e^{2\pi i n t / T} \quad (17)$$

Sada, kada  $T \rightarrow \infty$ , suma u (17) prelazi u integral, a  $\frac{1}{T}$  zapravo predstavlja beskonačno malu vrednost  $ds$ , odnosno:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(s)e^{2\pi ist} ds. \quad (18)$$

Na ovaj način je  $x(t)$  "obnovljena" iz  $X(s)$ . Ova nova transformacija koju smo konstruisali, naziva se inverzna Furijeova transformacija, čije su najčešće oznake  $\check{f}$  ili  $\mathcal{F}^{-1}$

U nastavku se definiše teorema koja daje zanimljivu jednakost između Furijeove transformacije funkcije i inverzne Furijeove transformacije te funkcije.

**Teorema 2.2.1** *Data je apsolutno integrabilna funkcija  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  takva da je  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ . Neka su transformacije  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{F}^{-1}$  definisane sa*

$$\mathcal{F}(x(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

za ove transformacije važi da je:

- $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(x(t)) = x(t)$
- $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(x(t)) = x(t)$

Može se primetiti da je Furijeova transformacija dobijena iz jednačine za koeficijente Furijeovog reda, dok je inverzna Furijeova transformacija dobijena baš iz jednačine Furijeovog reda.

## 2.2.2 Osobine Furijeove Transformacije

Kako bi se pojednostavila analiza signala u frekvencijskom domenu neohodno je poznavati osobine Furijeove transformacije. U ovom delu navedeno je nekoliko osobina Furijeove transformacije koje imaju veliku primenu u rešavanju konkretnih problema. Radi lakšeg zapisa, uvodi se oznaka  $G(\mathbb{R})$  za familiju funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  koje su deo po deo neprekidne i apsolutno integrabilne.



## 1. Linearnost

Furijeova transformacija je linearna transformacija, odnosno ako su  $f(t), g(t) \in G(\mathbb{R})$  i neka su  $\mathcal{F}(x(t))(\omega)$  i  $\mathcal{F}(y(t))(\omega)$  Furijeove transformacije tih funkcija, respektivno, tada za svako  $a, b \in \mathbb{C}$  važi:

$$\mathcal{F}(ax + by)(\omega) = a\mathcal{F}(x(t))(\omega) + b\mathcal{F}(y(t))(\omega)$$

*Dokaz.* Budući da je integral linearni operator, direktno sledi da je:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(ax + by)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [ax(t) + by(t)] e^{-i\omega t} dt \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= a\mathcal{F}(x(t))(\omega) + b\mathcal{F}(y(t))(\omega)\end{aligned}$$

□

## 2. Svojtvo pomeranja u vremenskom domenu

Neka je  $\mathcal{F}(x(t))(\omega)$  Furijeova transformacija signala  $x(t) \in G(\mathbb{R})$ . Pomeranje signala  $x(t)$  u vremenu za  $a$  vremenskih jedinica implicira množenje spektra kompleksnom eksponencijalnom funkcijom  $e^{-i\omega a}$

$$\mathcal{F}(x(t - a))(\omega) = e^{-i\omega a} \mathcal{F}(x(t))(\omega),$$

*Dokaz.* Ukoliko se iskoristi definicija Furijeove transformacije za signal pomeren u vremenu dobija se:

$$\mathcal{F}[x(t - a)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - a) e^{-i\omega t} dt$$

Nakon uvođenja smene  $y = t - a$ , dobija se

$$\mathcal{F}[x(t - a)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(y) e^{-i\omega(y+a)} dy$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-i\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} x(y) e^{-i\omega y} dy \\
&= e^{-i\omega a} \mathcal{F}(x(t))(\omega).
\end{aligned}$$

Može se primetiti da se amplitudni spektar ne menja prilikom pomeranja signala u vremenu, odnosno:

$$|e^{-i\omega a} \mathcal{F}(x(t))(\omega)| = |e^{-i\omega a}| |\mathcal{F}(x(t))(\omega)| = |\mathcal{F}(x(t))(\omega)|$$

□

Pri ovom izvođenju iskorišćena je činjenicu da je  $|e^{-i\omega a}| = 1$ .

### 3. Svojstvo pomeranja u frekvencijskom domenu

Neka je  $x \in G(\mathbb{R})$  i neka je  $\mathcal{F}(x(t))(\omega)$  Furijeova transformacija funkcije  $x(t)$ . Množenje signala u vremenu sa kompleksnom eksponencijalnom funkcijom  $e^{i\omega_0 t}$  ima za posledicu pomeranje spektra po frekvencijskoj osi za  $\omega_0$ . Odnosno,

$$\mathcal{F}(x(t)e^{-i\omega_0 t}) = \mathcal{F}(x(t))(\omega - \omega_0).$$

*Dokaz.* Dokaz za ovo svojstvo se izvodi slično kao i za prethodno. □

### 4. Skaliranje

Skaliranje odnosno proširenje ili suženje signala u jednom domenu dovodi do suženja odnosno proširenja u drugom domenu. Neka  $x(t) \in G(\mathbb{R})$  i neka  $\mathcal{F}(x(t))(\omega)$  Furijeova transformacija signala  $x(t)$  tada za svako  $a \in \mathbb{R}$   $a \neq 0$  važi da je

$$\mathcal{F}(x(at))(\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(x(t))\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

*Dokaz.* Prvo je potrebno naći Furijeovu transformaciju od  $x(at)$ . Odnosno,

$$\mathcal{F}[x(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-i\omega t} dt$$

Uvodeći smenu  $at = p$  dobija se:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{a} \int_{-a\infty}^{a\infty} x(p) e^{-i\omega \frac{p}{a}} dp.$$

Sada, za  $a < 0$  sledi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(at)] &= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} x(t) e^{-i\frac{\omega}{a}t} dt = -\frac{1}{|a|} \int_{\infty}^{-\infty} x(t) e^{-i\frac{\omega}{a}t} dt = \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\frac{\omega}{a}t} dt = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(x(t)) \left( \frac{\omega}{a} \right) \end{aligned}$$

Za  $a > 0$  sledi:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\frac{\omega}{a}t} dt = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(x(t)) \left( \frac{\omega}{a} \right)$$

□

## 5. Konvolucija u vremenskom domenu

Konvolucija dve funkcije  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  definiše se kao

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau.$$

Konvoluciji signala u vremenskom domenu odgovara množenje u frekven-  
cijskom domenu. Odnosno, ako su  $x_1(t)$  i  $x_2(t) \in \mathbb{R}$  i  $\mathcal{F}(x_1(t))(\omega)$  i  $\mathcal{F}(x_2(t))(\omega)$  Furijeove transformacije ovih funkcija respektivno. Tada važi:

$$\mathcal{F}(x_1(t) * x_2(t))(\omega) = \mathcal{F}(x_1(t))(\omega) \cdot \mathcal{F}(x_2(t))(\omega).$$

*Dokaz.* Potrebno je naći Furijeovu transformaciju konvolucije dva sig-  
nala, odnosno:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t) * x_2(t)] e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Sada ukoliko se izvrši zamena redosleda integracije dobija se:

$$\mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \right] d\tau$$

i potom se uvedi smena  $\theta = t - \tau$  i dobija se:

$$\mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta \right] e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Budući da integral u uglastim zagradama ne zavisi od  $\tau$  sledi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta \right] \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] \\ &= \mathcal{F}(x_2(t))(\omega) \cdot \mathcal{F}(x_1(t))(\omega). \end{aligned}$$

□

## 6. Konvolucija u frekvencijskom domenu

Modulaciona teorema kaže da konvoluciji Furijeovih transformacija signala u frekvencijskom domenu, odgovara množenje signala u vremenskom domenu.

Neka su  $x_1(t)$  i  $x_2(t) \in \mathbb{R}$  i  $\mathcal{F}(x_1(t))(\omega)$  i  $\mathcal{F}(x_2(t))(\omega)$  Furijeove transformacije ovih funkcija respektivno. Tada važi:

$$\mathcal{F}((x_1 \cdot x_2)(t))(\omega) = \mathcal{F}(x_1(t))(\omega) * \mathcal{F}(x_2(t))(\omega).$$

*Dokaz.* Za dokaz ovog svojstva neophodno je prvo pronaći inverznu Furijeovu transformaciju konvolucije Furijeovih transformacija dva signala koja je podeljenja sa  $2\pi$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(x_1(t))(\omega) * \mathcal{F}(x_2(t))(\omega) \right] &= \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(x_1(t))(\omega) * \mathcal{F}(x_2(t))(\omega) \right] e^{i\omega t} d\omega &= \\ = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x_1(t))(\phi) \mathcal{F}(x_2(t))(\omega - \phi) d\phi \right] e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Dalje, nakon zamene redosleda integracije dobija se:

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(x_1(t))(\omega) * \mathcal{F}(x_2(t))(\omega) \right] =$$

$$\left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x_1(t))(\phi) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x_2(t))(\omega - \phi) e^{-i\omega t} d\omega \right] d\phi.$$

Potom se uvodi smena  $\eta = \omega - \phi$

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(x_1(t))(\omega) * \mathcal{F}(x_2(t))(\omega) \right] =$$

$$\left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x_1(t))(\phi) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x_2(t))(\eta) e^{i\eta t} d\eta \right] e^{i\phi t} d\phi$$

jasno je da integral u uglastim zagradama ne zavisi od  $\phi$  stoga:

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(x_1(t))(\omega) * \mathcal{F}(x_2(t))(\omega) \right] =$$

$$\left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x_2(t))(\eta) e^{i\eta t} d\eta \right] \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x_1(t))(\phi) e^{i\phi t} d\phi \right]$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(x_1(t))(\omega) * \mathcal{F}(x_2(t))(\omega) \right] = x_1(t) \cdot x_2(t).$$

□

## 7. Izvodi u vremenskom domenu

Neka je  $x(t) \in \mathbb{R}$  i neka je  $\mathcal{F}(x(t))(\omega)$  Furijeova transformacija tog signala. Tada važi:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow i\omega \mathcal{F}(x(t))(\omega).$$

Drugim rečima, derivacija signala u vremenskom domenu dovodi do naglašavanja viskofrekvencijskih komponenti signala u frekvencijskom domenu (zbog množenja sa  $i\omega$ ).

*Dokaz.* Prvo je potrebno da se signal  $x(t)$  izrazi preko njegove inverzne Furijeove transformacije nakon čega je potrebno potražiti njegov izvod:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x(t))(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \mathcal{F}(x(t))(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Lako je primetiti da je dobijeni izraz inverzna Furijeova transformacija od  $i\omega \mathcal{F}(x(t))(\omega)$  pa je:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow i\omega \mathcal{F}(x(t))(\omega).$$

Ponavljajući ovaj postupak  $n$  puta dobija se:

$$\frac{d^n x(t)}{(dt)^n} \leftrightarrow (i\omega)^n \mathcal{F}(x(t))(\omega).$$

□

## 8. Izvodi u frekvencijskom domenu

Neka je  $x(t) \in G(\mathbb{R})$  i neka je  $\mathcal{F}(x(t))(\omega)$  Furijeova transformacija ovog signala tada važi sledeće:

$$tx(t) \leftrightarrow i \frac{d\mathcal{F}(x(t))(\omega)}{d\omega}.$$

Dakle, izvodu u frekvencijskom domenu odgovara množenje sa nezavisnom varijablom  $t$  u vremenskom domenu.

*Dokaz.* Za početak, potrebno je pronaći izvod Furijeove transformacije po  $\omega$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}(x(t))(\omega) \Big| \frac{d}{d\omega}$$

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} tx(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{d\mathcal{F}(x(t))(\omega)}{d\omega}$$

pa važi:

$$tx(t) \leftrightarrow i \frac{d\mathcal{F}(x(t))(\omega)}{d\omega}.$$

Za izvode višeg reda važi:

$$t^n x(t) \leftrightarrow i^n \frac{d^n \mathcal{F}(x(t))(\omega)}{d\omega^n}.$$

□

## 2.3 Uzorkovanje - sampling

Kako je već izloženo u uvodnom delu ovog rada, jedan od načina za dobijanje diskretnih vremenskih signala dolazi iz uzorkovanja neprekidnih signala. Proces pretvaranja analognih signala u digitalni oblik naziva se analogno-digitalna (A/D) konverzija. Obrnuti proces, odnosno rekonstrukcija analognog

signala iz njegovih uzoraka poznata je kao digitalno-analoga (D/A) konverzija. Za ove konverzije od ključnog je značaja teorema o uzorkovanju koja daje precizne uslove pod kojima analogni signal može biti jedinstveno predstavljen na osnovu svojih uzoraka.

Uzorkovanje generalno nije invertibilna operacija, odnosno iz dobijenog izlaza (niza diskretnih vrednosti)  $x[n]$  generalno nije moguće rekonstruisati ulazni signal  $x_c(t)$  jer mnogi neprekidni signali mogu da daju isti izlazni niz uzoraka. Ovaj problem u uzorkovanju predstavlja vrlo bitno pitanje u obradi signala. Međutim ovo može da se ukloni ograničavanjem ulaznih signala u konvertor.

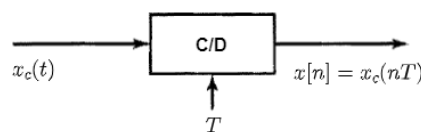
### 2.3.1 Periodično uzorkovanje

Diskretizacija je najčešća metoda dobijanja diskretnog signala uzorkovanjem neprekidnog signala pri čemu se niz uzoraka  $x[n]$  dobija iz neprekidnog signala  $x_c(t)$  u skladu sa formulom:

$$x[n] = x_c(nT), -\infty < n < \infty, .. \quad (19)$$

U formuli (19),  $T$  je period uzorkovanja, a njegova recipročna vrednost,  $f_s = 1/T$  je frekvencija uzorkovanja u sekundima, odnosno brzina uzorkovanja. Frekvencija uzorkovanja takođe može biti prikazana i kao  $\omega_s = 2\pi/T$ .

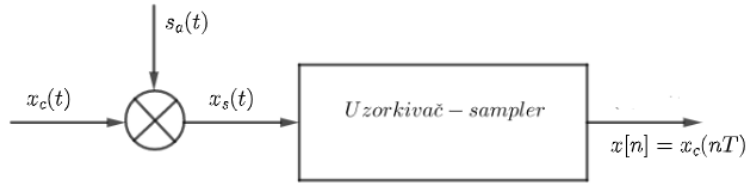
Proces pretvaranja neprekidnog signala u diskretni prema izrazu (19) vrši se u sempleru koji se naziva i idealni C/D konvertor (continuous to discrete) i prikazan je na slici 18



Slika 18: Blok shema idealnog C/D konvertera

Međutim, idealni C/D konverter sa slike 18 ne može da se realizuje u praksi, te se proces diskretizacije aproksimira uz pomoć A/D konvertera (analogno-digitalni konverter). Kako bi se ova priča malo pojednostavila, proces uzorkovanja je prikazan u dve etape kao na slici 19.

Na osnovu slike 19 može da se primeti da je prva faza procesa uzorkovanja modulacija niza Dirakovih funkcija, a druga faza je pretvaranje dobijenog



Slika 19: Skica uzorkovanja

niza impulsa u niz brojeva.

Sledi analiza semplovanja u frekvencijskom domenu. Neka je  $x_s(t)$  semplovani signal dobijen iz neprekidnog signala  $x_c(t)$ . Sistem u kome se odvija uzorkovanje može se posmatrati i kao modulator u kome se odvija množenje originalnog neprekidnog signala  $x_c(t)$  sa nizom impulsa  $s_a(t)$ . Stoga semplovani signal može da se posmatra kao proizvod  $x_c(t)$  i  $s_a(t)$ . Odnosno,

$$x_s(t) = x_c(t)s_a(t) \quad (20)$$

što je prikazano na slici 20.

Ukoliko se periodični niz impulsa zameni Dirakovim  $\delta$  funkcijama dobija se:

$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s), \quad (21)$$

Izraz (20) može da se zapiše kao:

$$x_s(t) = x_c(t)s_a(t) = x_c(nT_s) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (22)$$

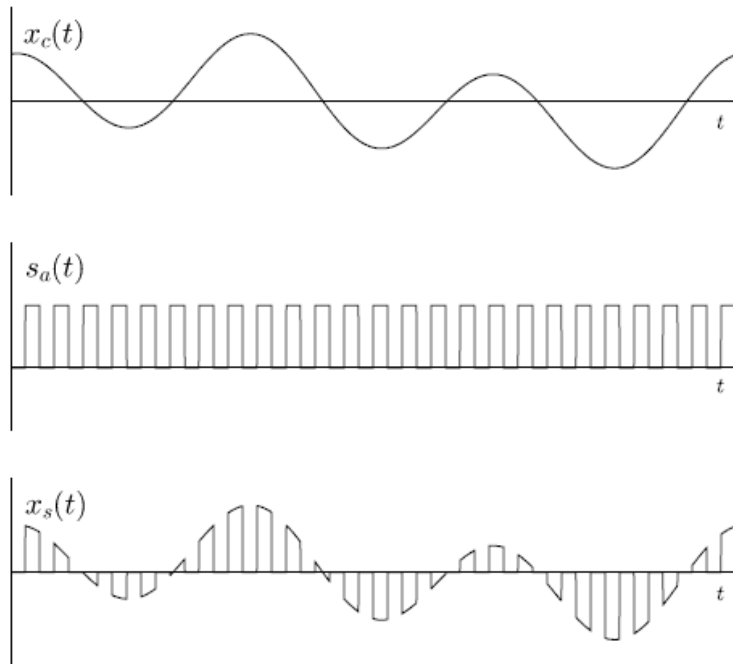
pri čemu su iskorišćene relacije (21) i (19).

Kada se iskoristi osobina selektivnosti Dirakove funkcije (videti poglavlje 1.2.1), izraz (22) može se zapisati na sledeći način:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

Budući da se semplovani signal može predstaviti kao proizvod originalnog i niza impulsa, stoga Furijeova transformacija signala  $x_c(t)$  je konvolucija Furijeove transformacije  $X_s(j\omega)$  i  $S_a(j\omega)$  (videti poglavlje 2.2.2). Može se





Slika 20: Množenje originalnog signala nizom pulseva

primetiti da je Furijeova transformacija impulsne funkcije, impulsna funkcija. Odnosno,

$$S_a(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

gde je  $\omega_s = 2\pi/T_s$  frekvencija uzorkovanja u radianima u sekundi. Stoga,

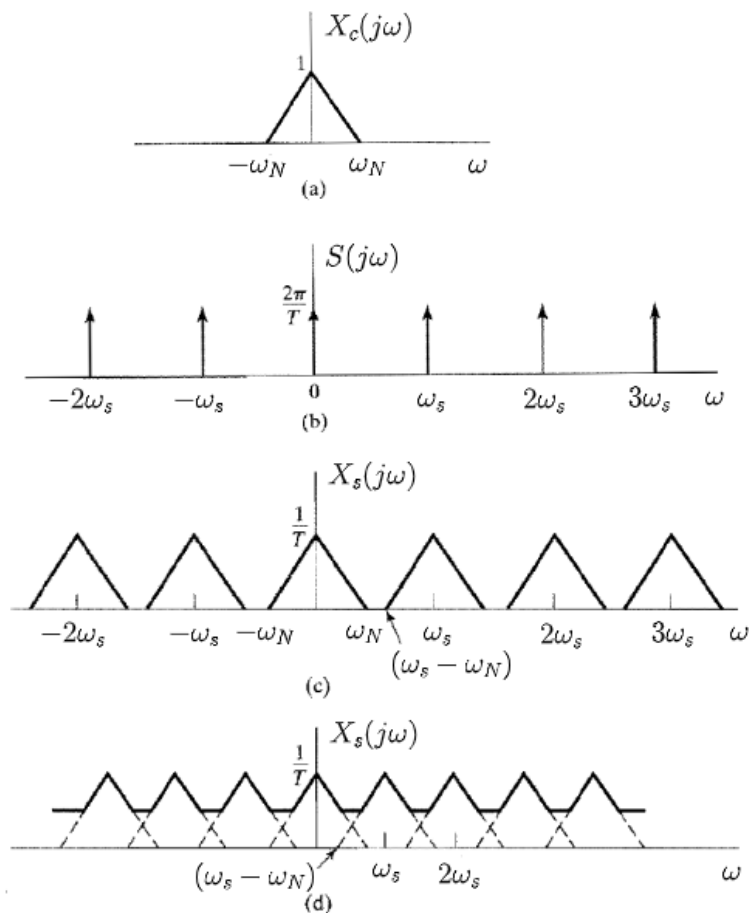
$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} (X_c(j\omega) * S_a(j\omega))$$

gde je  $*$  notacija za konvoluciju. Konačno, nakon primene konvolucije dobija se:

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\omega - jk\omega_s). \quad (23)$$

Formula (23) predstavlja relaciju između Furijeovih transformacija ulaza i izlaza idealnog impulsnog modulatora. Takođe, na osnovu formule (23) može se primetiti da se Furijeova transformacija od  $x_s(t)$  sastoji od beskonačno periodično ponovljenih kopija Furijeove transformacije  $x_c(t)$ . Odnosno spektar

uzorkovanog signala  $|X_s(j\omega)|$  se sastoji od beskonačnog broja transliranih verzija originalnog spektra  $|X_c(j\omega)|$  koje su pomerene za vrednost frekvencije smplovanja i njenih celobrojnih umnožaka.



Slika 21: Množenje originalnog signala nizom pulseva. a) Spektar originalnog signala; b) Periodični niz impulsa; c) Furijeova transformacija uzorkovanog signala kada je  $\omega_s \geq 2\omega_N$ ; d) Furijeova transformacija uzorkovanog signala u slučaju da je  $\omega_s < 2\omega_N$

Na Slici 21 je predstavljen proces uzorkovanja u frekvencijskom domenu. Pod a) je prikazan frekvencijski ograničen spektar kontinualnog signal  $X_c(j\omega)$  čija je najviša frekvencija  $\omega_N$ . Pod b) je prikazan spektar niza Dirakovih impulsa  $s(t)$  odnosno periodični niz impulsa  $S(j\omega)$ , dok slika 21 pod c) prikazuje  $X_s(j\omega)$  kao rezultat konvolucije  $X_c(j\omega)$  i  $S(j\omega)$  koja je skalirana sa  $1/2\pi$ . Očigledno je da u slučaju kada je

$$\omega_s - \omega_N \geq \omega_N$$

odnosno

$$\omega_s \geq 2\omega_N$$

kao na slici c) kopije od  $X_c(j\omega)$  se ne preklapaju te kada se saberu u formuli 23 kopija od  $X_c(j\omega)$  ostaje na svakom celobrojnom umnošku od  $\omega_s$ . Prema tome,  $x_c(t)$  se može rekonstruisati iz  $x_s(t)$  sa idealnim niskopropusnim filterom. Na slici d) uvedena je pretpostavka da je  $\omega_s < 2\omega_N$  usled čega se kopije od  $X_c(j\omega)$  preklapaju.

### 2.3.2 Teorema o uzorkovanju i alijasing

Glavni problem rekonstrukcije signala je dobijanje originalnog signala iz uzoraka te se samim tim nameće pitanje koliko često treba uzimati uzorke da bi od smplovanog signala mogli rekonstruisati originalni signal. Odgovor daje sledeća teorema:

**Teorema 2.2 (Najkvistova teorema o uzorkovanju)** *Neka je  $x_c(t)$  signal ograničenog opsega odnosno,*

$$X_a(j\omega) = 0 \quad \text{za } |\omega| \geq \omega_N.$$

*Tada je  $x_c(t)$  jedinstveno određenim svojim uzorcima  $x_a(nT_s)$ ,  $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ako je*

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\omega_N \quad (24)$$

Frekvencija  $\omega_N$  obično se naziva Najkvistova (Nayquist) frekvencija, a minimalna frekvencija uzorkovanja,  $\omega_s = 2\omega_N$ , naziva se Najkvistova ocena odnosno granična frekvencija.

Drugim rečima teorema kaže da frekvencija smplovanja mora biti bar duplo veća od najveće frekvencije originalnog signala. Dakle, ako je  $\omega_s \geq 2\omega_N$  učestanost uzimanja uzorka, onda se signal  $x(t)$  može jednoznačno rekonstruisati iz uzoraka  $x(nT)$ , gde je  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Međutim, izbor brzine uzimanja uzoraka zavisi i od primene za koju se uzorkovanje koristi. Svrha uzorkovanja u obradi signala je digitalna obrada signala i rekonstrukcija originalnog signala iz uzoraka. Međutim prilikom obrade signala, učestanost uzorkovanja zavisi i od osobina neprekindog signala. Na primer, ako se uzorkuje temperatura vazduha ili atmosferski pritisak odnosno ako se signal koji se uzorkuje sporo menja, nema potrebe da se signal uzorkuje malim period diskretizacije kao npr. 1 sekunda, jer je vremenska konstanta promene ovih signala reda i nekoliko sati. Ali ako, na primer, merimo brzinu kretanja vozila period uzorkovanja od 1 sekund bi bio možda i predug.

Nasuprot ovoj priči, ukoliko uslov (24) nije zadovoljen dolazi do preklapanja spektralnih komponentata, odnosno do pojave poznate pod nazivom aliasing. Drugim rečima, aliasing je pojava koja nastaje ukoliko se signal uzorkuje ređe nego što to nalaže Najkvistova teorema. Ovo dovodi do mogućnosti da jednom nizu uzoraka odgovara više različitih signala. Prema tome, originalni signal se ne može rekonstruisati iz uzoraka na jedinstven način jer prilikom rekonstrukcije može da dodje do zamene učestansoti odnosno da se komponentete viskoih frekvencija zamena sa komponentama niskih frekvencija.

Postoje dve stvari koje se mogu učiniti kako bi se sprečila ili bar ublažila pojava aliasinga. Prva mogućnost bi bila da se poveća frekvencija uzorkovanja za sve uzorke kod kojih se pojavio aliasing, dok je druga mogućnost da se koriste anti-aliasing filteri. U praksi, se signal uvek filtrira pre samplovanja.

Dakle, zaključak je da pojava aliasinga u digitalnoj obradi signala nepoželjna i da ukoliko nije zadovoljen uslov Najkvistove teoreme ne samo da će biti izgubljena informacija o signalu, već će se dobiti pogrešna informacija o signalu.

### 3 Diskretne transformacije

U ovoj glavi predstavljene su dve diskretne transformacije. Prvi deo glave posvećen je diskretnoj Furijeovoj transformaciji. Dok je u drugom delu ove glave prikazana još jedna veoma značajna transformacija koja koristi samo kosinusne funkcije. Literatura korišćena pri izradi ove glave je [2], [11], [12], [15].

#### 3.1 Diskretna Furijeova transformacija

S obzirom da se Furijeovi redovi koriste za uvid u frekvencijski sadržaj periodičnih funkcija, a Furijeova transformacija za frekvencijski sadržaj neperiodičnih funkcija, postavlja se pitanje da li postoji transformacija koja pruža uvid u frekvencijski sadržaj signala koji nisu ni periodični, ni neperiodični, ni deterministički. Transformacija koja radi sa ovakvim signalima, naziva se diskretna Furijeova transformacija (*Discrete Fourier Transform*). Diskretna Furijeova transformacija - DFT dobija se diskretizacijom jedne periode Furijeove transformacije.

DFT ima veoma široku primenu. Diskretna Furijeova transformacija je od ključnog interesa u praktičnoj primeni na digitalnim računarima jer računari rade isključivo sa diskretnim vrednostima, a kod DFT-a su oba domena (frekvencijski i vremenski) diskretna. Takođe, DFT ima ogromnu primenu u digitalnoj obradi signala gde se koristi kao neophodan alat u spektralnoj analizi signala i omogućava efikasno izvođenje filtriranja u frekvencijskom domenu. Značaj DFT-a u digitalnoj obradi signala potiče od toga što postoje mnogobrojni algoritmi za njeno izračunavanje.

DFT je transformacija koja uzima niz od  $N$  kompleksnih vrednosti i transformiše ga u niz od  $N$  kompleksnih vrednosti, odnosno

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-i2\pi mn/N}, m = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (25)$$

$x[n]$  je diskretni niz vrednosti uzorkovanih u kontinualnoj promenljivoj  $x(t)$  iz vremenskog domena.

Obično se o DFT-u misli kao o pretvaranju podataka iz vremenskog domena u prikaz u frekvencijskom domenu. Stoga, ovaj proces možemo preokrenuti i dobiti originalni signal vremenske domene izvođenjem IDFT-a

na vrednostima  $X[m]$  frekvencijskog domena. Inverzna DFT je definisana na sledeći način:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{i2\pi mn/N} \quad (26)$$

Uobičajeno je da se za predstavljanje eksponencijalnog faktora u izrazima (25) i (26) uvede oznaka

$$W_N = e^{-i2\pi/N} \quad (27)$$

Sada, ukoliko u izraze (25) i (26) uvrsti (27) dobija se:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{mn} \quad (28)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] W_N^{-mn} \quad (29)$$

Eksponencijalni faktori  $W_N^{mn}$  nazivaju se rotacioni faktori (twiddle factors). Ovi rotacioni faktori imaju sledeće osobine:

- Periodičnost:

$$W_N^{mn} = W_N^{m(n+N)} = W_N^{(m+N)n}$$

- Simetrija:

$$(W_N^{mn})^* = W_N^{m(N-n)}$$

Transformacioni par dat izrazima (28) i (29) može se prikazati i u matričnom obliku, tako što sekvence  $x[n]$  i  $X[k]$  predstavimo kao vektore sa  $N$  vrsta i jednom kolonom, odnosno  $\mathbf{x}_N = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]^T$  i  $\mathbf{X}_N = [X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}]^T$ , a rotacione faktore predstavimo u vidu matrice  $\mathbf{W}_N$  čije su dimenzije  $N \times N$ . Dakle, izraz (25) u matričnom obliku može se zapisati na sledeći način:

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N \quad (30)$$

gde je matrica transformacije data sa:

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$



Inverzna DFT u matricnom obliku (26) i (30) data je sa:

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X}_N \quad (31)$$

Matrica transformacije  $\mathbf{W}_N$  ima osobinu da je:

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^*.$$

Odnosno, ova osobina pokazuje da je inverzna matrica matrice  $\mathbf{W}_N$  jednaka normalizovanoj konjugovanoj matrici  $\mathbf{W}_N^*$ .

Odavde sledi da je

$$\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^* = N \mathbf{I}_N \quad (32)$$

pri čemu je  $\mathbf{I}_N$  jedinična matrica dimenzije  $N \times N$ . Dakle, transformaciona matrica  $\mathbf{W}_N$  je ortogonalna matrica.

Ukoliko se izraz (32) ubaci u izraz za inverznu DFT u matricnom obliku (31) dobija se:

$$\mathbf{x}_N = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{X}_N.$$

### 3.1.1 Ciklična konvolucija

Nizovi  $x_1[n]$  i  $x_2[n]$  dužine  $N$  mogu se pojedinačno rekonstruisati inverznom DFT iz svojih DFT  $X_1$  i  $X_2$ . Proizvod ove dva DFT-a dat je sa

$$Y[k] = X_1[k]X_2[k], 0 \leq k \leq N - 1 \quad (33)$$

i ukoliko se na njega primeni inverzna DFT dobija se niz  $y[n]$  od  $N$  elemenata.

Inverzna DFT sekvence  $Y[k]$  je:

$$y[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] e^{j2\pi km/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1[k] X_2[k] e^{j2\pi km/N}.$$

Ukoliko prethodni izraz raspiše detaljnije, dobija se:

$$\begin{aligned} y[m] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] \right] \left[ \sum_{l=0}^{N-1} x_2[l] \right] e^{j2\pi km/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] \sum_{l=0}^{N-1} x_2[l] \left[ \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(m-n-l)/N} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Može se primeti da izraz u zagradi predstavlja geometrijsku progresiju čija je suma članova:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N, & a = 1, \\ \frac{1-a^N}{1-a}, & a \neq 1. \end{cases}$$

Ukoliko se uporedi ova sumu sa izrazom (34) vidi se da je

$$a = e^{j2\pi(m-n-l)/N}. \quad (35)$$

Vidimo da u izrazu (35)  $a = 1$  kada je  $(m - n - l)$  umnožak od  $N$ , a  $a^N = 1$  za bilo koju vrednost  $a \neq 1$ . Na osnovu ovoga iz izraza za geometrijsku progresiju dobija se:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N, & l = m - n + pN = (m - n) \bmod N, \text{ } p \text{ ceo broj,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Na osnovu prethodno izvedenih izraza, izraz za  $y[m]$  možemo zapisati u konačnom obliku:

$$y[m] = x_1[m] \otimes x_2[m]. \quad (36)$$

Izraz (36) predstavlja cirkularnu (kružnu) konvoluciju. Dakle, operacija množenja dve diskretne Furijeove transformacije odgovara u vremenskom domenu operaciji ciklične konvolucije.

## 3.2 Diskretna kosinusna transformacija

Diskretna kosinusna transformacija (DCT), slično kao i ostale transformacije, predstavlja signal kao sumu frekvencijskih komponenti sa odgovarajućim koeficijentima. DCT ima veliku primenu u kompresiji zvučnih i vizuelnih podataka, kao u rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina. Diskretna kosinusna transformacija ima mnogo sličnosti sa diskretnom Furijevom transformacijom, pri čemu DCT koristi samo realne brojeve.

Kodiranje predstavlja jednu od najbitnijih stavki prilikom obrade slika odnosno video zapisa. Ono se bazira na pretpostavci da pikseli na slici pokazuju određeni nivo korelacije sa susednim pikselima. Slično tome, u sistemu za prenos video zapisa, susedni pikseli u uzastopnim kadrovima pokazuju veoma veliku povezanost. Shodno tome, ove korelacije se mogu iskoristiti za predviđanje vrednosti piksela odgovarajućih suseda. Transformacija je dakle definisana da mapira ove prostorne - korelisane podatke u transformisane odnosno nekorelirane koeficijente. Jasno je da bi transformacija trebala da iskoristi činjenicu da je sadržaj informacija pojedinog piksela relativno mali, odnosno da u velikoj meri vizuelni doprinos piksela može da se predvidi na osnovu njihovih suseda.

### 3.2.1 Jednodimenzionalna DCT

Najčešće korišćena definicija za jednodimenzionalnu DCT na niz

$$f(0), f(1), \dots, f(N-1)$$

je

$$C(u) = \alpha(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right], \quad (37)$$

za  $u = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Inverzna jednodimenzionalna DCT transformacija je definisana na sledeći način:

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} \alpha(u) C(u) \cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right], \quad (38)$$

za  $x = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . U izrazima (37) i (38)  $\alpha(u)$  je definisano kao:

$$\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & u \neq 0 \end{cases} \quad (39)$$

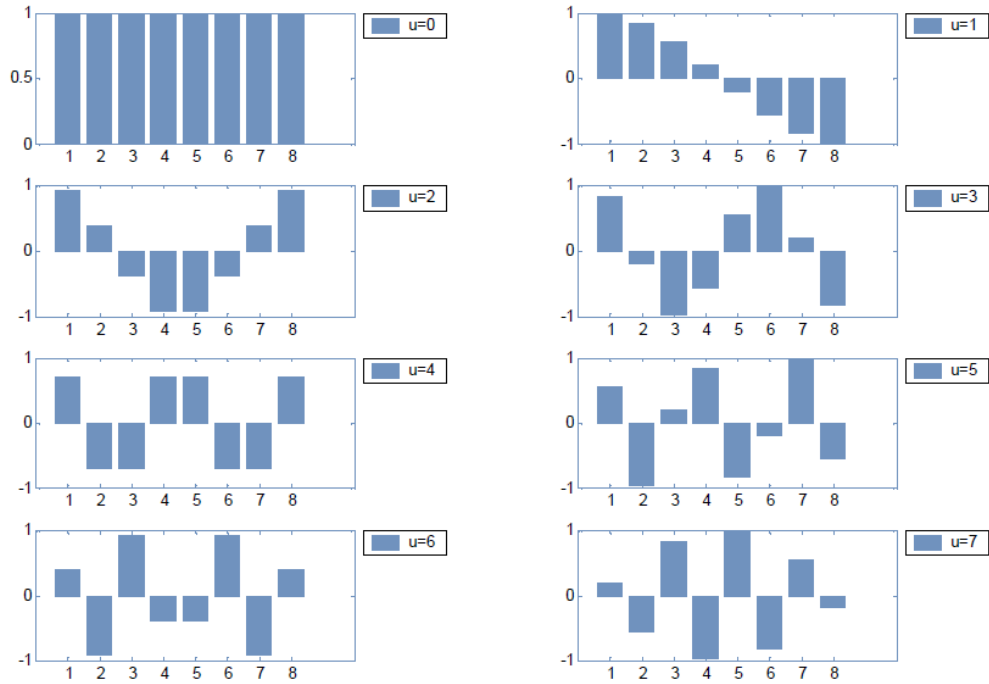
U izrazu (37) za  $u = 0$ , dobija se  $C(u = 0) = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x)$ . Prema tome, prvi koeficijent transformacije je prosečna vrednost sekvence uzorka. Ta vrednost se naziva DC koeficijent. Svi ostali koeficijenti transformacije se nazivaju AC koeficijenti. <sup>6</sup>

Sada će u izrazu (37) komponente  $f(x)$  i  $\alpha(u)$  na trenutak biti zane-marene. Na slici 22 prikazana je suma  $\sum_{x=0}^{N-1} \cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]$  za  $N = 8$  za različite vrednosti parametra  $u$ . Prvi gornji levi oblik talasa ( $u = 0$ ) daje konstantnu (DC) vrednost, dok svi ostali talasni oblici ( $u = 1, 2, 3, \dots, 7$ ) daju talasne oblike sa progresivno rastućim frekvencijama. Ti talasni oblici se nazivaju kosinusne bazne funkcije i ove bazne funkcije su ortogonalne.

Ulazni niz se može podeliti na podnizove i potom se na svaki deo može pri-meniti DCT nezavisno. Veoma je važno primetiti da se u ovakvom proračunu vrednosti baznih funkcija neće promeniti. Menja se samo vrednost  $f(x)$  u svakom podnizu. Ova osobina je veoma važna jer pokazuje da se bazne funkcije mogu unapred izračunati "van mreže". Ovim se smanjuje broj matematičkih operacija (množenja i sabiranja) čime se postiže efikasnost računanja.

---

<sup>6</sup>Ovaj naziv potiče od istorijske upotrebe DCT-a za analizu električnih kola sa jednos-mernom i naizmeničnom strujom.



Slika 22: Jednodimenzionalna kosinusna transformacija bazne funkcije ( $N = 8$ )

### 3.2.2 Dvodimenzionalna DCT

Najčešća sfera delovanja DCT je primena na sliku. Samim tim ovo zahteva proširenje na dvodimenzionalni prostor. Dvodimenzionalna DCT je direktno proširenje jednodimenzionalne i data je izrazom

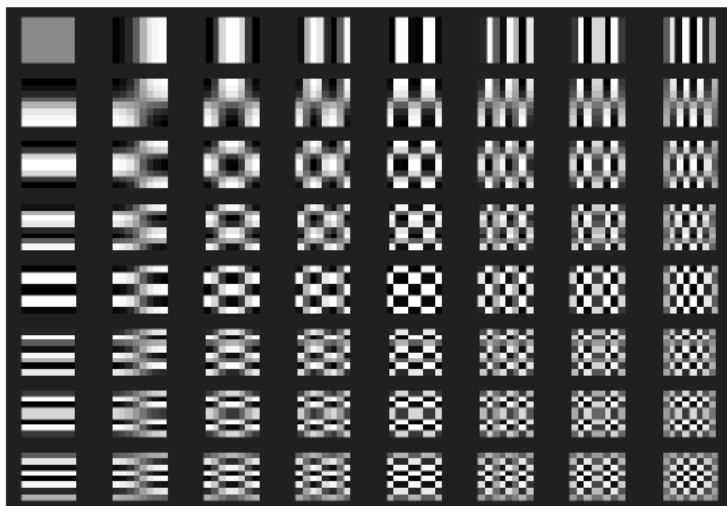
$$C(u, v) = \alpha(u)\alpha(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right] \cos\left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right], \quad (40)$$

za  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N-1$  i  $\alpha(u)$  i  $\alpha(v)$  su definisani kao pod (39). Inverzna dvodimenzionalna DCT je definisana kao

$$f(x, y) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \alpha(u)\alpha(v)C(u, v) \cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right] \cos\left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right],$$

za  $x, y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Bazne funkcije dvodimenzionalne DCT prikazane su na slici 23. Ponovo se može primetiti da bazne funkcije pokazuju progresivno povećanje frekvencije i u vertikalnom i u horizontalnom pravcu. U gornjem levom uglu slike 23 se nalazi bazna funkcija nulte frekvencije čije su koordinate  $(0, 0)$ . Dakle, ova funkcija predstavlja konstantnu vrednost i naziva se DC koeficijentom. Ostali koeficijenti su koeficijenti kosinusa frekvencije koji odgovara toj tački u izrazu (40). Takođe, sa slike 23 može se uočiti da je veća frekvencija slike u njenom donjem desnom uglu, odnosno što je koordinata funkcije veća to je i frekvencija kosinusa koji je opisuje veća. Prema tome, koeficijentima u gornjem levom uglu će biti opisane niskofrekvencijske informacije u bloku slike, dok će koeficijentima u donjem desnom uglu diskretne kosinusne transformacije biti opisane viskofrekvencijske informacije jer će sa njima biti najviše u korelaciji.



Slika 23: Dvodimenzionalna DCT baznih funkcija ( $N=8$ ). Neutralna siva boja predstavlja nulu, bela predstavlja pozitivne amplitude, a crna negativne amplitude

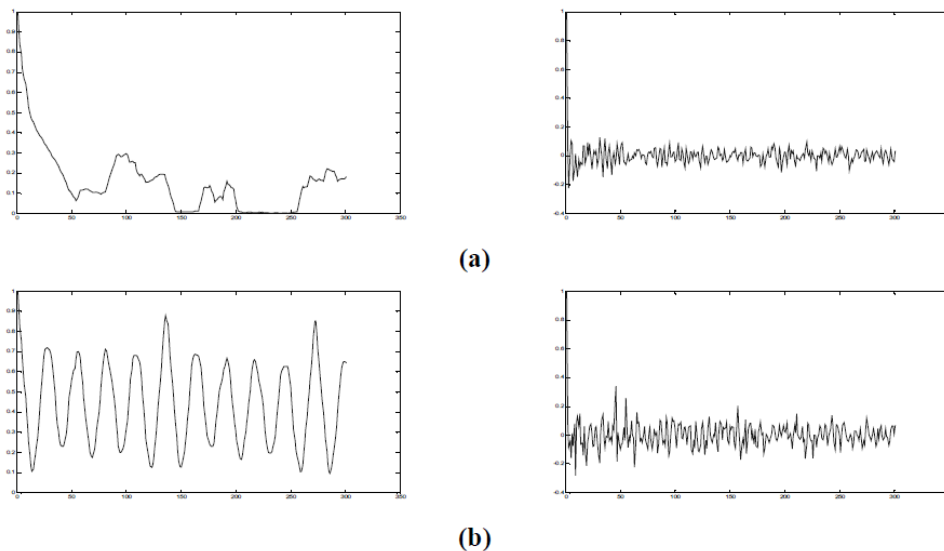
### 3.3 Osobine diskretne kosinusne transformacije

U ovom delu rada, navešće se neka osnovna svojstva DCT koja su od posebne važnosti za aplikacije koje se bave obradom slika.

#### 3.3.1 Dekorelacija

Jedna od glavnih prednosti transformacije slike je uklanjanje suvišnosti odnosno redundanse između susednih piksela. To dovodi do toga da se nekorelisani koeficijenti transformacije mogu kodirati nezavisno.

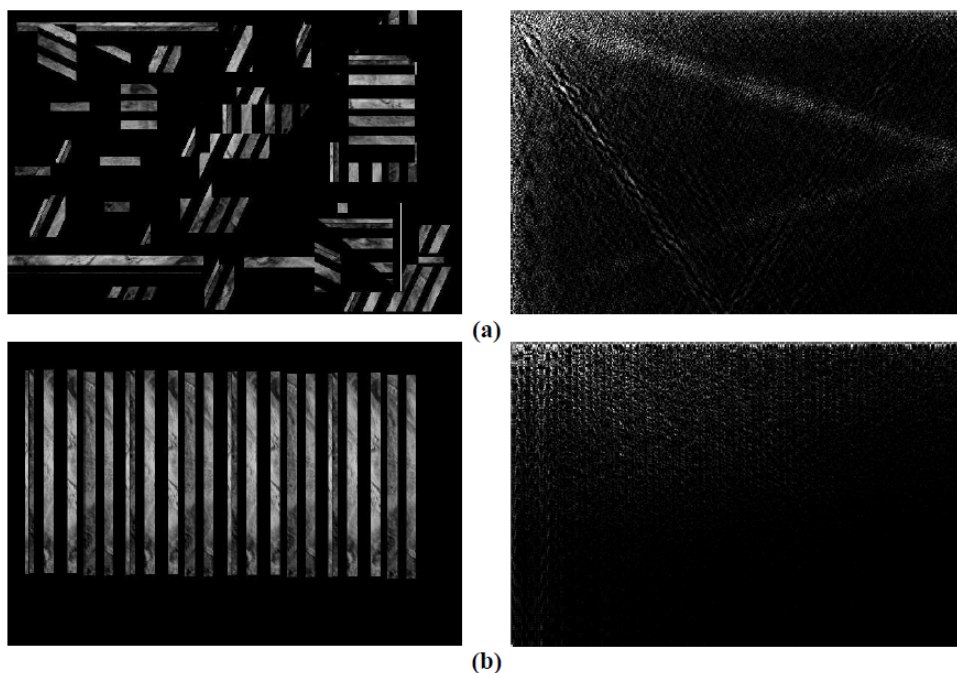
Autokorelacija slike pre i posle primene DCT prikazana je na slici 24. Jasno se vidi je da je amplituda autokorelacije posle DCT vrlo mala u svakom potezu. Prema tome, može se zaključiti da DCT pokazuje odlična dekorelaciona svojstva.



Slika 24: (a) Normalizovana autokorelacija nekorelisane slike pre i posle DCT; (b) Normalizovana autokorelacija korelisane slike pre i posle DCT.

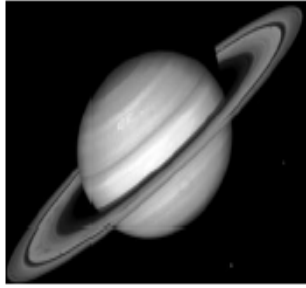
### 3.3.2 Kompaktnost energije

Učinkovitost šeme transformacije može se direktno oceniti njenom sposobnošću da "spakuje" ulazne podatke u što je moguće manje koeficijenta što omogućava da se koeficijenti sa relativno malim amplitudama odbace bez unošenja vizuelne distorzije u rekonstruisanu sliku. Na slici 25 prikazane su dve slike i njihove DCT. Jasno se vidi da nekorelisana slika svoju energiju širi, dok je energija korelisane slike "spakovana" u područje niske frekvencije (tj. gornji levi ugao).

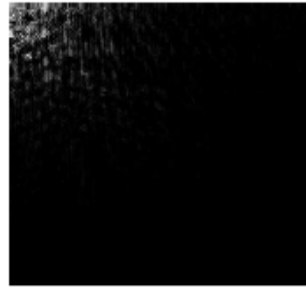


Slika 25: (a) Primer nekorelisane slike i njene DCT; (b) Korelisana slika i njena DCT

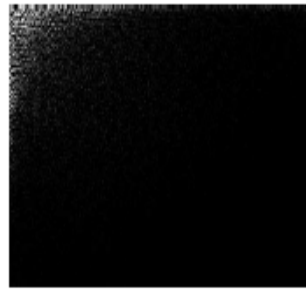
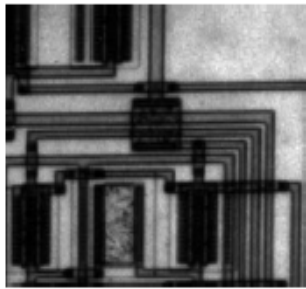
Još nekoliko primera ovog svojstva dato je na slici 26. Ukoliko bi se bolje pogledala slika 26 može se zaključiti da se ona sastoji iz četiri široke klase slika. Slike pod (a) i (b) sadrže velika područja čiji se intenzitet polako menja. Ove slike se mogu klasifikovati kao slike niske frekvencije sa niskim prostornim detaljima. Primena DCT na ovim slikama pruža dobru kompaktnost energije u području niskih frekvencija transformisane slike. Slika (c) sadrži brojne ivice (odnosno oštre promene intenziteta) i stoga se može klasifikovati kao slika visoke frekvencije sa malim prostornim sadržajem. Međutim podaci o slici pokazuju visoku korelaciju koju koristi DCT algoritam da bi se



(a)

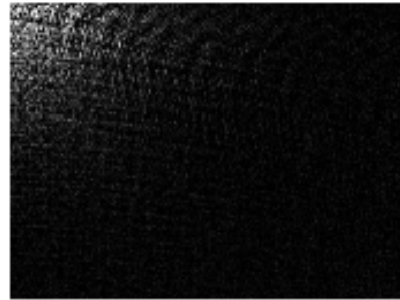


(b)



(c)

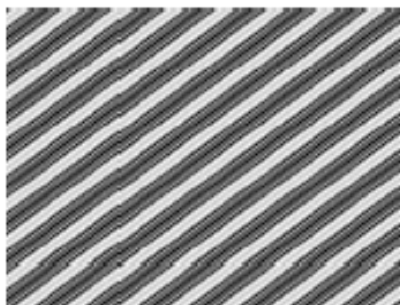




(d)



(e)



Slika 26: (a) Saturn i njegova DCT; (b) Dete i njegova DCT; (c) Strujno kolo i njegova DCT; (d) Drveće i njegova DCT; (e) Životinja i njegova DCT; (f) Sinusni talas i njegova DCT

obežbedila dobra kompaktnost energije. Slike (d) i (e) su slike sa progresivno visokim frekvencijama i prostornim sadržajem. Zbog toga su koeficijenti transformacije raspoređeni na niske i visoke frekvencije. Slika (e) prikazuje periodičnost pa DCT sadrži i impulse sa amplitudama proporcionalnim težini određene frekvencije u originalnom talasnom obliku.

Prema tome, može se zaključiti da DCT pruža izvrsnu kompaktnost energije za korelisane podatke.

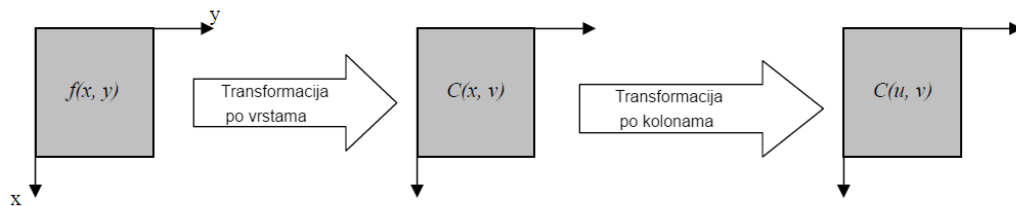
### 3.3.3 Separabilnost

Formula za DCT (40) može biti predstavljena i na sledeći način:

$$C(u, v) = \alpha(u)\alpha(v) \sum_{x=0}^{N-1} \cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right] \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right], \quad (41)$$

za  $u, v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

Ovo svojstvo naziva se separabilnost. Njegova glavna prednost je to što se  $C(u, v)$  može izračunati u dva koraka uzastopnim jednodimanezionalnim operacijama na redovima i kolonama slike. Ova ideja je prikazana na slici 27.



Slika 27: Računanje 2-dimenzionalne DCT uz primenu svojstva separabilnosti

### 3.3.4 Simetrija

Ukoliko se u izrazu (41) pogledaju operacije koje se vrše na redovima i kolonama može se primetiti da su u pitanju iste operacije.

Takve transformacije se nazivaju simetrične. Separabilna i simetrična transformacija se može izraziti u obliku

$$T = AfA, \quad (42)$$

gde je  $A$  je simetrična matrica dimenzija  $N \times N$  sa koeficijentima  $a(i, j)$  koji su predstavljeni izrazom

$$a(i, j) = \alpha(j) \sum_{j=0}^{N-1} \cos\left[\frac{\pi(2j+1)i}{2N}\right],$$

a  $f$  je  $N \times N$  matrica slike.

Ovo je izuzetno korisno svojstvo jer implicira da se matrica transformacije <sup>7</sup> može unapred izračunati "van mreže", a zatim se primeni na sliku, čime se obezbeđuje poboljšanje u efikasnosti računanja.

### 3.3.5 Ortogonalnost

Obrnuta transformaciju od izraza (42) označena je na sledeći način:

$$f = A^{-1}TA^{-1}.$$

Budući da su bazne funkcije DCT ortogonalne, inverzna matrica matrice  $A$  jednaka je svojoj transponovanoj, odnosno,  $A^{-1} = A^T$ . Prema tome, ovo svojstvo dovodi do određenog smanjenja složenosti pri izračunavanju.

## 3.4 Brza Diskretna kosinusna transformacija

Prethodno navedena svojstva predstavljaju osnovu za brži algoritam izračuna DCT-a. Kao i DFT i izračunavanje DCT-a se može olakšati pomoću FFT-a (FFT je obrađena u narednoj glavi). Ovaj algoritam je predstavljen za 1-D DCT, ali može se proširiti i na 2-D slučaj. Ovde je važno napomenuti da DCT nije realni deo diskretne Furijeove transformacije. Što se lako može proveriti uvidom u matrice transformacije DCT i DFT.

Jednodimenzionalna sekvenca  $f(x)$  u (37) može se izraziti kao zbir parne i neparne sekvence

$$\hat{f}(x) = f_p(x) + f_n(x),$$

---

<sup>7</sup>U terminima obrade signala ova matrica se naziva jezgro transformacije. U ovom slučaju ono se sastoji od osnovnih funkcija na Slici (23)

gde  $f_p(x) = f(2x) = \hat{f}(x)$ ,  $f_n = f(2x + 1) = \hat{f}(N - x - 1)$  i  $0 \leq x \leq \frac{N}{2} - 1$

Sabiranje u (37) može biti podeljeno kako bi se dobilo:

$$\begin{aligned}
C(u) &= \alpha(u) \left\{ \sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2x) \cos\left[\frac{\pi(4x+1)u}{2N}\right] + \sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2x+1) \cos\left[\frac{\pi(4x+3)u}{2N}\right] \right\} \\
&= \alpha(u) \left\{ \sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f_p(x) \cos\left[\frac{\pi(4x+1)u}{2N}\right] + \sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1} f_n(x) \cos\left[\frac{\pi(4x+3)u}{2N}\right] \right\} \\
&= \alpha(u) \sum_{x=0}^{N-1} \hat{f}(x) \cos\left[\frac{\pi(4x+1)u}{2N}\right] \\
&= \operatorname{Re}[\alpha(u)e^{-j\pi u/2N} \sum_{x=0}^{N-1} \hat{f}(x)e^{-j2\pi ux/N}] = \operatorname{Re}[\alpha(u)W_{2N}^{u/2} \operatorname{DFT}\{\hat{f}(x)\}_N]
\end{aligned}$$

Za inverznu transformaciju parne tačke mogu biti izračunate smatrajući da  $f(2x) = \hat{f}(2x)$  dok neparne tačke mogu biti izračunate smatrajući da  $f(2x+1) = \hat{f}[2(N-1-x)]$  za  $0 \leq x \leq \frac{N}{2} - 1$ .

### 3.5 Poređenje DCT sa drugim transformacijama

Ovde će se prikazati superiornost DCT nad ostalim transformacijama prilikom obrade slike. Tačnije, DCT će biti upoređena sa Karhunen - Loeve Transform (KLT) i sa Diskretnom Furijeovom transformacijom (DFT). KLT transformacija nije deo ovog master rada, ovde je samo upoređena sa DCT kako bi se pokazalo koliko DCT nadvladava ostale transformacije kada je u pitanju obrada slika.

KLT je linearna transformacija u kojoj su bazne funkcije preuzete iz statističkih svojstava podataka slike i mogu biti prilagodljive. Optimalna je u smislu kompaktnosti energije, odnosno nastoji da "spakuje" što više energije u što je moguće manje koeficijentana. Međutim, jezgro transformacije uglavnom nije separabilno. Drugim rečima, KLT je zavisian od podataka i samim tim, je bez brze transformacije. Izvođenje odgovarajuće baze za svaki podblok slike zahteva nerazumne računске resurse. Iako su predloženi neki brzi KLT algoritmi, ipak je ukupna složenost značajno veća od odgovarajućih

DCT i DFT algoritama.

Sa druge strane, jezgro DFT transformacije je linearno, separabilno i simetrično. Dakle, kao i DCT ono ima fiksne baze i moguće su brze implementacije. Takođe pokazuje dobru dekorelaciju i karakteristike kompaktnosti energije. Međutim, DFT je kompleksna transformacija i stoga propisuje da se kodiraju i veličina slike i podaci o fazi. Pored toga, DCT omogućava bolju kompaktnost enrgije od DFT za većinu prirodnih slika. Dalje, implicitna periodičnost DFT transformacije dovodi do graničnih diskontinuiteta koji rezultiraju značajnim sadržajem visoke frekvencije.

## 4 Brza Furijeova transformacija

U ovoj glavi biće prikazana brza Furijeova transformacija (FFT), algoritam za brzo računanje diskretne Furijeove transformacije (DFT) koja je naročito je pogodan za izvršavanje na računaru. Prednost u odnosu na diskretnu Furijeovu transformaciju je u tome što se kod FFT-a izbegava ponovno izračunavanje izraza koji se međusobno potiru. Postoji više vrsta FFT algoritama, među kojima je najpopularniji Kuli-Tuki algoritam.

Literatura korišćena za izradu ove glave je [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8].

### 4.1 Princip dekompozicije

Ukoliko bi se DFT računala direktno preko sume

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{mn}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (43)$$

to zahteva  $N$  množenja i  $N-1$  sabiranja za svaki od  $N$  elemenata  $X[m]$ . Ukoliko je  $x[n]$  kompleksna vrednost tada svako množenje zahteva četiri realna množenja i dva realna sabiranja:  $(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(bc+ad)$ . Svaki od kompleksnih  $N-1$  sabiraka zahteva dve operacije sabiranja:  $(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$ . Budući da je u opštem slučaju  $x[n]$  kompleksna vrednost, izraz (43) se može napisati u sledećem obliku:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} (Re[x[n]] Re[W_N^{mn}] - Im[x[n]] Im[W_N^{mn}])$$

$$+ j (Re[x[n]] Im[W_N^{mn}] + Im[x[n]] Re[W_N^{mn}]), \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Prema gronjem izrazu za izračunavanje koeficijenta  $X[m]$  potrebno je  $4N$  realnih množenja i  $(4N-2)$  realnih sabiranja. Ukupan broj koeficijenata DFT je  $N$ , stoga je i ukupno potrebno  $4N^2$  množenja i  $4N^2 - 2N$  sabiranja. U nekim hardverima za digitalnu obradu signala, množenje i sabiranje je jedna operacija, i nepotrebno je voditi odvojeno praćenje množenja i sabiranja. Shodno tome, izvrši se  $4N^2$  realnih operacija. Ovaj broj donekle može da se smanji. Ako je  $x[n]$  realno, tada su potrebne samo  $2N^2$  operacije, ali u ovom slučaju za  $X$  moraju izračunati samo vrednosti za  $m=0$  do  $N-2$ , smanjujući ukupan iznos za otprilike polovinu. Ako je  $x$  parno ili neparno, mogu se iskoristiti osobine simetrije, ali i dalje ostaje činjenica

da je direktno izračunavanje DFT-a proporcionalno  $N^2$ . Kaže se da je broj aritmetičkih operacija je srazmeran sa kvadratom dužine niza,  $O(N^2)$ , što direktno izračunavanje DFT-a čini praktično neprimenljivim za veće vrednosti  $N$ .

S druge strane, FFT algoritam rešava problem efikasnog izračunavanja DFT-a. Broj operacija za algoritam FFT je  $O(N \log_2 N)$  kada je  $N$  dat kao celobrojni stepen dvojke. Čak i za malu transformaciju, na primer  $N = 32$ , uštede su znatne: 170 naspram 1024. Za  $N = 512$ , veličinu koja se obično susreće u analizi signala razlika je ogromna: otprilike 4600 prema 256000!. FFT ostvaruje ovaj podvig korišćenjem simetrije svojstvene DFT vektorima. FFT algoritam zasniva se na sukcesivnoj dekompoziciji DFT-a na manje podnizove i potom koristi osobine periodičnosti i simetrije rotacionih faktora. Ova svojstva omogućavaju velike mogućnosti u smislu sažimanja procesa izračunavanja DFT-a uz pomoć FFT-a.

Kako je već napomenuto, algoritam brze Furijeove transformacije se zasniva na dekompoziciji. Pretpostavlja se da je dužina niza  $N$  data kao celobrojni stepen broja dva, odnosno

$$N = 2^p \quad (44)$$

Ukoliko ulazni niz ne zadovoljava uzlov (44) on se može dopuniti nulama do najbližeg većeg broja  $N = 2^p$ . Potom se vrši dekompozicija niza. Ovaj postupak se naziva još i razbijanje sa osnovom 2. Razlog za to je što se ulazni niz dužine  $N$  prvo razbija na dva podniza dužina  $N/2$ , potom se ova dva niza dalje razbijaju na isti način. Ovo razbijanje se vrši sve dok se ne dođe do elementarnih nizova dužine dva. Ovaj princip pruža veliku uštedu u procesu računanja nasuprot direktnom izračunavanju DFT-a. Postoji više vrsta FFT algoritama. U ovom radu biće objašnjena dva:

- FFT algoritam sa razbijanjem po vremenu
- FFT algoritam sa razbijanjem po frekvenciji

#### 4.1.1 FFT algoritam sa razbijanjem po vremenu

FFT algoritam za razbijanje u vremenu (eng. FFT Decimation in Time) zasniva se na dekompoziciji datog vremenskog niza  $x[n]$  dužine  $N$  na dva dvostruko manja podniza sve dok se ne dođe do trivijalnog slučaja, odnosno do niza dužine 2. Algoritam se zasniva na razdvajanju parnih i neparnih članova niza  $x[n]$ .

Neka je niz  $x[n]$  ulazni niz DFT-a, a niz  $X[k]$  izlazni niz iz DFT-a. Uz pomoć FFT-a treba da se izračuna svih  $N$  koeficijenta DFT-a iz  $N$  uzoraka

vremenskog signala  $x[n]$ . DFT je definisana pomoću izraza (25). Sada se ova suma razbija na dva dela jer je dužina niza stepen dvojke odnosno,  $N = 2^p$  ( $p$  ceo broj). Odnosno, ulazni niz  $x[n]$  podeliti na dva podniza dvostruko manje dužine pri čemu jedan podniz se sastoji iz parnih, a drugi iz neparnih članova. Kada se to primeni na izraz (25) dobija se:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]W_N^{2nm} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]W_N^{(2n+1)m} \quad (45)$$

Radi lakšeg zapisa uvode se sledeće oznake. Niz  $x[2n]$  koji se sastoji od parnih članova označen je sa  $x_1[k]$ , a niz od sačinjen od neparnih članova sa  $x_2[k]$ . Odnosno,  $x[2n] = x_1[k]$  i  $x[2n+1] = x_2[k]$ , za  $k = 0, 1, \dots, (N/2 - 1)$ . Ukoliko se to sada primeni na izraz (45) dobija se:

$$X[m] = \underbrace{\sum_{k=0}^{N/2-1} x_1[k]W_{N/2}^{km}}_{\text{DFT dužine } N/2} + W_N^m \underbrace{\sum_{k=0}^{N/2-1} x_2[k]W_{N/2}^{km}}_{\text{DFT dužine } N/2} \quad (46)$$

ovde je takođe iskorišćeno da je  $W_N^{2k} = W_{N/2}^k$  jer je  $e^{j2\pi 2k/N} = e^{j2\pi k/(N/2)}$ . Iz izraza (46) može se primetiti da su obe sume diskretne Furijeove transformacije nizova  $x_1[k]$  i  $x_2[k]$ . Stoga, izraz (46) može da se zapiše kao:

$$X[m] = X_1[m] + W_N^m X_2[m] \quad (47)$$

Dalje, ukoliko se iskoristi činjenica da su nizovi  $X_1[m]$  i  $X_2[m]$  periodični sa periodom  $N/2$ , odnosno za njih važi

$$X_1[m] = X_1[m + N/2]$$

$$X_2[m] = X_2[m + N/2]$$

i ukoliko se iskoristi činjenica da je  $W_N^{N/2} = -1$  na izraz (47) dobija se:

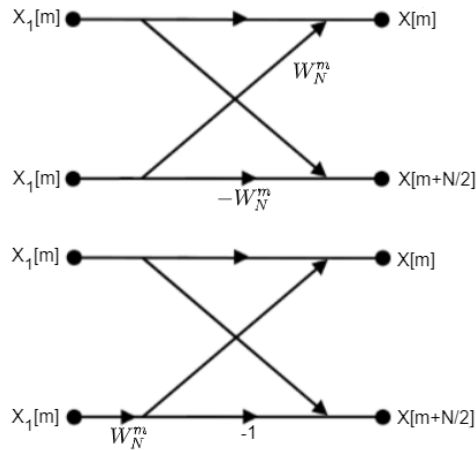
$$\begin{aligned} X[m + N/2] &= X_1[m + N/2] + W_N^{m+N/2} X_2[m + N/2] \\ &= X_1[m] - W_N^m X_2[m] \end{aligned} \quad (48)$$

Prema tome, dolazi se do zaključka da pri izračunavanju  $k$ -tog koeficijenta DFT-a  $X[k]$  odmah može da se računa i  $k + N/2$ -ti koeficijent DFT-a,  $X[k - N/2]$ .

Jednačinama (47) i (48) definisan je skup operacija FFT algoritma. Uobi-



čajno je da se FFT algoritam grafički predstavlja uz pomoć grafa koji predstavlja tok izračunavanja algoritma i koji se zbog svog specifičnog izgleda naziv leptir. Na slici (28) je prikazan ovaj graf operacija. Čvorovi u kojima se strelice seku predstavlja kompleksno sabiranje, dok je množenje prikazano kao prenos pojedinih grana na grafu.



Slika 28: Struktura leptira FFT algoritma. Na gornjoj slici je prikazan par (47) i (48), a na donjoj slici je struktura sa jednim kompleksnim množenjem

Međutim, ovim i dalje nije završen postupak izračunavanja DFT-a. Ovim je završena samo prva dekompozicija u izračunavanju DFT-a. Isti princip se primenjuje i na izračunavanje dva DFT-a dužine  $N/2$  što predstavlja drugu dekompoziciju DFT-a. Prvi korak ove dekompozicije je razdvajanje parnih i neparnih uzoraka pri čemu se od niza  $x_1[k]$  formiraju dva podniza  $x_{11}[k] = x_1[2k]$  i  $x_{12}[k] = x_1[2k+1]$  oba dužine  $N/4$ . Isti princip se koristi i za razbijanje niza  $x_2[k]$ . Dalji postupak je isti kao i u prethodnoj dekompoziciji. Odnosno, leptir dobijen razbijanjem niza  $x_p[k]$  na dva podniza dužine  $N/4$  je dat jednačinama:

$$X_1[m] = X_{11}[m] + W_N^{2m} X_{12}[m]$$

$$X_1[m + N/4] = X_{11}[m] - W_N^{2m} X_{12}[m]$$

Ovim je niz  $X_1[m]$  razbijen na dve DFT dužine  $N/4$ . Razbijanje niza  $X_2[m]$  radi se analogno.

Računanje FFT-a počinje od računanja DFT-a u samo dve tačke. Svaka dekompozicija zapravo predstavlja po jednu etapu pri čemu je ukupan broj etapa jednak  $\log_2 N$ . Poslednja dekompozicija koja računa DFT u dve tačke

je prva etapa FFT algoritma. Drugim rečima prva etapa FFT algoritma računa  $N/2$  DFT od dve tačke. U ovom slučaju rotacioni koeficijenti su  $-1$  i  $1$  pa u ovo početnoj etapi nema množenja. Posle opisa algoritma može se zaključiti da svaka etapa ima  $N/2$  kompleksna množenja (uključujući i ona sa  $1$  i  $-1$ ) i  $N$  kompleksnih sabiranja. Prema tome ukupan broj kompleksnih množenja je

$$M = \frac{N}{2} \log_2(N),$$

a ukupan broj kompleksnih sabiranja jednak je:

$$S = N \log_2(N).$$

Svaka etapa može se tumačiti na sledeći način. Kako se ulazni skup od  $N$  kompleksnih brojeva transformiše u neki drugi skup brojeva pomoću leptir operatora, dolazi se do zaključka da je potrebno rezervisati jedan memorijski prostor za smeštanje ulaznih podataka, a drugi za izlazne podatke. Ali kako svaki leptir koristi par ulaznih podatak i vraća par izlaznih podataka pa su u okviru etape leptiri nezavisni. Odnosno, ne postoje dva leptira koji koriste iste podatke. To pruža posebnu pogodnost u korišćenju memorijskog prostora. Drugim rečima u registrima se par ulaznih podataka leptira može zameniti sa izračunatim parom izlaznih podataka. Ovaj način računanja je poznat kao računanje u mestu.

Međutim, sa druge strane, da bi se ovaj princip primenio mora se voditi računa o redosledu ulaznih podataka. Usled razbijanja niza na parni i neparni deo dolazi do promene redosleda uzoraka ulaznog niza, a redosled izlaznih podatak ostaje nepromenjen. Redosled preuređivanja može se odrediti tako što se indeks ulaznog podatka napiše u binarnom obliku, ali unazad. Za  $N = 4$  može se pisati da je:

$$X_0 = x(0)$$

$$X_1 = x(4)$$

$$X_2 = x(2)$$

$$X_3 = x(6)$$

$$X_4 = x(1)$$

$$X_5 = x(5)$$

$$X_6 = x(3)$$

$$X_7 = x(7)$$

### 4.1.2 Primer Kuli-Tuki algoritama za N=8

Radi boljeg razumevanja Kuli Tuki algoritam je prikazan na primeru za niz dužine  $N = 8$ . Kao što je rečeno algoritam se zasniva na deljenju niza dužine  $N$  na dva dela i rekurzivnoj obradi dva dela posebno. Potom se svaki deo rekurzivno deli na dva dela i tako sve do trivijalnog slučaja. Za osam tačaka FFT algoritma potrebno je  $N \log_2 N = 8 \cdot 3 = 24$  operacije. Za fiksnu vrednost  $m$  i za  $N = 8$  DFT je data izrazom:

$$X[m] = \sum_{n=0}^7 x[n] W_8^{-mn} = x[0]W_8^0 + x[1]W_8^{-m} + x[2]W_8^{-2m} + x[3]W_8^{-3m} \\ + x[4]W_8^{-4m} + x[5]W_8^{-5m} + x[6]W_8^{-6m} + x[7]W_8^{-7m},$$

gde je  $W_N^n = e^{i2\pi n/N}$ .

Prvi korak je prepoznavanje istih članova, odnosno  $W_8^{-m} = W_8^{-m}W_8^0$ ,  $W_8^{-3m} = W_8^{-m}W_8^{-2m}$  itd. Razdvajanjem neparnih i parnih indeksa u nizu dobija se:

$$X[m] = (x[0]W_8^0 + x[2]W_8^{-2m} + x[4]W_8^{-4m} + x[6]W_8^{-6m}) \\ + W_8^{-m}(x[1]W_8^0 + x[3]W_8^{-2m} + x[5]W_8^{-4m} + x[7]W_8^{-6m}).$$

Može se pometiti da je  $W_8^2 = W_4$ . Ukoliko se ovo iskoristi dobije se:

$$X[m] = \underbrace{(x[0]W_4^0 + x[2]W_4^{-m} + x[4]W_4^{-2m} + x[6]W_4^{-3m})}_{X_{0246}[m]} \\ + W_8^{-m} \underbrace{(x[1]W_4^0 + x[3]W_4^{-m} + x[5]W_4^{-2m} + x[7]W_4^{-3m})}_{X_{1357}[m]} \\ = X_{0246}[m] + W_8^{-m} X_{1357}[m],$$

gde su  $X_{0246}$  i  $X_{1357}$  DFT u 4 tačke nizova  $(x[0], x[2], x[4], x[6])$  i  $(x[1], x[3], x[5], x[7])$  respektivno.

Što se tiče broja operacija za ovakvu podelu računanja zaključuje se da svaka dva DFT-a u četiri tačke zahteva četiri množenja - sabiranja za svaku od osam podela vrednosti  $X[m]$ . Njihovo kombinovanje sa rotacionim faktorom doprinosi još jednom množenju. To je ukupno devet operacija što izgleda kao korak u nazad u poređenju sa osam operacija za direktno izračunavanje. Ali DFT u četiri tačke je periodična sa periodom 4, odnosno,

$$X_{0246}[m+4] = x[0]W_4^0 + x[2]W_4^{-(m+4)} + x[4]W_4^{-2(m+4)} + x[6]W_4^{-3(m+4)} \\ = x[0]W_4^0 + x[2]W_4^{-m} + x[4]W_4^{-2m} + x[6]W_4^{-3m}$$

$$= X_{0246}[m]$$

$$X_{1357}[m+4] = X_{1357}[m],$$

jer je  $W_4^{4k} = 1$ . Ovo pojednostavljuje osam vrednosti od  $X$  do

$$X[0] = X_{0246}[0] + W_8^0 X_{1357}[0] = X_{0246}[0] + X_{1357}[0]$$

$$X[4] = X_{0246}[0] + W_8^{-4} X_{1357}[0] = X_{0246}[0] - X_{1357}[0]$$

$$X[1] = X_{0246}[1] + W_8^{-1} X_{1357}[1]$$

$$X[5] = X_{0246}[1] + W_8^{-5} X_{1357}[1] = X_{0246}[1] - W_8^{-1} X_{1357}[1]$$

$$X[2] = X_{0246}[2] + W_8^{-2} X_{1357}[2]$$

$$X[6] = X_{0246}[2] + W_8^{-6} X_{1357}[2] = X_{0246}[2] - W_8^{-2} X_{1357}[2]$$

$$X[3] = X_{0246}[3] + W_8^{-3} X_{1357}[3]$$

$$X[7] = X_{0246}[3] + W_8^{-7} X_{1357}[3] = X_{0246}[3] - W_8^{-3} X_{1357}[3]$$

gde je korišćeno  $W_8^{-4} = e^{i2\pi 4/8} = e^{i\pi} = -1$ . Sledi prebrojavanje operacija:

$$\underbrace{16}_{\text{DFT u 4 tačke}} \text{ operacija} + \underbrace{2}_{\text{dva DFT}} + \underbrace{4}_{\text{x"twiddle" faktor}} = 36$$

Kako je direktnim proračunom potrebno 64 operacije, ovako se dobija nešto više od polovine operacija.

Ovaj proces se može ponoviti izražavajući svaku DFT u 4 tačke u smislu DFT-a u dve tačke:

$$\begin{aligned} X_{0246}[m] &= x[0]W_4^0 + x[2]W_4^{-m} + x[4]W_4^{-2m} + x[6]W_4^{-3m} \\ &= (x[0] + x[4]W_2^{-m}) + W_4^{-m}(x[2] + x[6]W_2^{-m}) \\ &= X_{04}[m] + W_4^{-m}X_{26}[m] \end{aligned}$$

i slično i za

$$X_{1357}[m] = X_{15}[m] + W_4^{-m}X_{37}[m].$$

$X_{04}$  je DFT od  $(x[0], x[4])$ ,  $X_{26}$  je DFT od  $(x[2], x[6])$ , itd. Ove DFT u dve tačke su periodične sa periodom 2, te je  $X_{04}[m+2] = X_{04}[m]$ , i slično. Stoga,

$$X_{0246}[0] = X_{04}[0] + X_{26}[0]$$

$$X_{0246}[2] = X_{04}[0] - X_{26}[0]$$

$$X_{0246}[1] = X_{04}[1] + W_4^{-1}X_{26}[1]$$

$$X_{0246}[3] = X_{04}[1] - W_4^{-1}X_{26}[1]$$

i slično i za  $X_{1357}$ . Sada DFT u dve tačke je jako jednostavna, na primer:

$$X_{26}[0] = x[2]W_2^0 + x[6]W_2^0 = x[2] + x[6]$$

$$X_{26}[1] = x[2]W_2^0 + x[6]W_2^{-1} = x[2] - x[6].$$

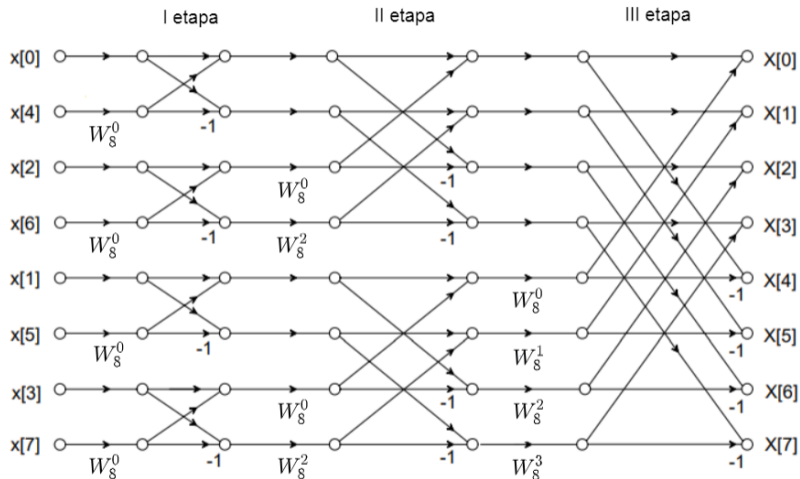
Ovo zahteva samo dve operacije (sabiranje i oduzimanje). Broj operacija za DFT u 4 tačke, izračunato na ovaj način je

$$\underbrace{2 \text{ operacija}}_{\text{DFT u 2 tačke}} + \underbrace{4}_{4 \text{ DFT}} + \underbrace{2}_{x \text{ "twiddle" faktor}} = 10$$

umesto 16 operacija koje bi bile direktnim računanjem. Konačni broj operacija za DFT sa osam tačaka je

$$\underbrace{10 \text{ operacija}}_{\text{DFT u 4 tačke}} + \underbrace{2}_{2_{DFT}} + \underbrace{4}_{x \text{ "twiddle" faktor}} = 24,$$

kako se i očekivalo.



Slika 29: Dijagram protoka signala za FFT u osam tačaka

Redosled izračunavanja za brzu Furijeovu transformaciju u osam tačaka je predstavljen kao dijagram protoka signala na slici 29. Osnovni leptir je prikazan u gornjem levom uglu. Strelice odgovaraju operacijama množenja, a tačke su operacije sabiranja, na primer,  $X_{04}[0] = f[0] + f[4]$  i  $X_{04}[1] = x[0] - x[4]$ . Postoje  $\log_2 8 = 3$  nivoa, sa osam operacija množenja i sabiranja po nivou. Prvi nivo (levo) izračunava četiri DFT-a u dve tačke. Drugi nivo (centar) kombinuje ih sa dve DFT u 4 tačke. Treći nivo (desno) kombinuje DFT u četiri tačke sa DFT-om u osam tačaka.

### 4.1.3 FFT algoritam za razbijanje po frekvenciji

Druga klasa FFT algoritama može se izvesti razbijanjem izlaznog niza  $X[m]$  na sve manje i manje podnizove. Ovi algoritmi nazivaju se FFT algoritmi za razbijanje po frekvenciji (eng. FFT Decimation in Frequency) i mogu se izvesti na sledeći način.

Neka je  $N$  dužina niza koja se može izraziti kao stepen dvojke, tj.  $N = 2^p$ . Zbog toga se proračun parnih i neparnih koeficijenta DFT posmatra nezavisno. Parni uzorci su

$$X[2m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{2nm}$$

Ukoliko se izvrši razdvajanje ove sume na prvih  $N/2$  članova i na poslednjih  $N/2$  članova i iskoristi se činjenica da je  $W_N^{2nm} = W_{N/2}^{nm}$  dobija se:

$$X[2m] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_{N/2}^{nm} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_{N/2}^{nm}$$

Potom ukoliko se izvrši promena indeksa u drugoj sumi dobija se:

$$X[2m] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_{N/2}^{nm} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n + N/2] W_{N/2}^{(n+N/2)m}$$

Konačno, korišćenjem činjenice da je  $W_{N/2}^{(n+N/2)m} = W_{N/2}^{nm}$  sledi:

$$X[2m] = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x[n] + x[n + N/2]] W_{N/2}^{nm} \quad (49)$$

Isti postupakom na neparne uzorke od  $X[m]$  dobija se:

$$X[2m + 1] = \sum_{n=0}^{N/2-1} W_N^n [x[n] - x[n + N/2]] W_{N/2}^{nm} \quad (50)$$

Izrazi (49) i (50) predstavljaju dva DFT dužine  $N/2$ , i ukoliko se uvedu smene

$$x[n] + x[n + N/2] = x_{11}$$

$$W_N^n [x[n] - x[n + N/2]] = x_{12}$$

se može zapisati kao:

$$X[2m] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{11} W_{N/2}^{nm}$$

$$X[2m + 1] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{12} W_{N/2}^{nm}$$

Ova dva izraza predstavljaju prvu etapu izračuna po ovom algoritmu. I ovaj algoritam može da se prikaže preko grafa odnosno leptira. Dekompozicija se vrši kao i u prethodnom algoritmu dok se ne dođe do elementarnih DFT od 2 člana. I takođe može da se primeni princip računanja u mestu.

## 5 Modifikacija signala

U ovoj glavi biće navedene neke prozorske funkcije kojima može da se vrši modifikacija signala. Budući da nijedan prozor nije najbolji u svim aspektima, trebalo bi ga odabrati prema zahtevima korisnika. Prvo je uvedena pojava koja je razlog za korišćene prozora pri modifikaciji signala, potom su izložene karakteristike koje kvalifikuju funkciju za funkciju prozora, i na kraju poglavlja je dat sažet pregled nekih popularnih prozorskih funkcija koje se obično koriste u digitalnoj obradi signala. Pri izradi ovog poglavlja korišćena je literatura [4], [5], [10], [12], [14], [15].

### 5.1 Spektralno curenje i definicija prozorskih funkcija

U modifikaciji signala veliku primenu nalaze prozorske funkcije koje su naročito značajne u smanjivanju efekta curenja spektra. Stoga je potrebno, pre svega, definisati pojmove curenja spektra i prozorske funkcije.

*Spektralno curenje* predstavlja pojavu da uzorci spektra (DFT) prostoperiodičnog signala konačnog trajanja nisu jednaki spektru signala iste učestanosti, ali beskonačnog trajanja. Ovo je nepoželjna osobina koja utiče na kvalitet analize spektra posmatranog signala korišćenjem DFT. Ono je zapravo posledica nepoklapanja učestanosti ulaznog signala sa nekom od učestanosti na kojima se izračunava DFT, odnosno u izračunatom spektru javljaju se komponente kojih uopšte nema u originalnom signalu. Kako bi se smanjila ova pojava koriste se razne modifikacije signala ulaznog signala.

Sposobnost razdvajanja komponenata u spektru ulaznog signala se definiše kao *frekvencijska selektivnost DFT-a*. Komponente koje pripadaju glavnom luku, centralnom maksimumu u magnitudi transformacije, ne mogu se razdvojiti. Prema tome, selektivnost DFT, zavisi od broja tačaka u kojima se izračunava DFT. Modifikacija ulazne sekvence koja dovodi do smanjenja spektralnog curenja takođe utiče na frekvencijsku selektivnost DFT jer ovakav način modifikacije utiče na širinu glavnog luka.

Da bi se smanjio efekat curenja spektra, a samim tim i da bi se poboljšale frekvencijske komponente DFT potrebno je izvršiti modifikaciju ulaznog signala. Modifikacija će biti vršena prozorskim funkcijama tako što se uzorci ulaznog signala pomnože uzorcima težinske ili prozorske funkcije  $w[n]$ . Pro-



zorske funkcije, poznate i kao funkcije aperiodizacije ili sužavanja, su matematičke funkcije koje imaju nultu vrednost van nekog izabranog intervala, obično su simetrične oko sredine intervala, obično im je maksimum u sredini i obično se sužavaju oko sredine. Prilikom množenja signala prozorskom funkcijom preostaje deo u kome se funkcije preklapaju, odnosno proizvod funkcije sa prozorskom funkcijom je nula van intervala. U praksi se deo unutar prozorske funkcije prvo izoluje, a zatim se samo ti podaci pomnože sa vrednostima prozorske funkcije. Stoga se može zaključiti da je sužavanje, a ne segmentacija glavna svrha prozorskih funkcija.

Ulazna funkcija,  $x[n]$ , koja je modifikovana prozorskom funkcijom, postaje:

$$y[n] = w[n]x[n].$$

Diskretna transformacija ovako modifikovane funkcije je data sa:

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} w[n]x[n]W_N^{nk} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W[n]X[k-n].$$

Može se primetiti da gornji izraz zapravo predstavlja cikličnu kovoluciju spektra ulaznog signala  $X[k]$  i prozorske funkcije  $W[k]$ .

Prozorske funkcije imaju široku primenu i u dizajniranju FIR (Finite impulse response) filtera. FIR filteri su digitlni filteri sa konačnim impulsnim odzivom. S obzirom da nemaju povratnu spregu (rekurzivni deo filtera), u literaturi se mogu naći pod nazivom nerekurzivni digitalni filteri. Proces dizajniranja FIR filtera putem prozorskih funkcija može se podeliti u nekoliko etapa:

1. Definisane specifikacije filtera;
2. Određivanje funkcije prozora prema specifikacijama filtera;
3. Izračunavanje redosleda filtera potrebnog za dati skup specifikacija;
4. Izračunavanje koeficijenata funkcije prozora;
5. Izračunavanje idealnih koeficijenata filtera prema redosledu filtera;

6. Izračunavanje koeficijenata FIR filtera prema dobijenoj funkciji prozora i idealnih koeficijenata filtera.

Ako rezultujući filter ima preširok ili preuzak prelazni region, potrebno je promeniti redosled filtera povećavanjem ili smanjivanjem u skladu sa potrebama, a nakon toga koraci 4, 5. i 6. se ponavljaju onoliko puta koliko je potrebno. Shodno tome, izabrana funkcija prozora mora da zadovolji date specifikacije.

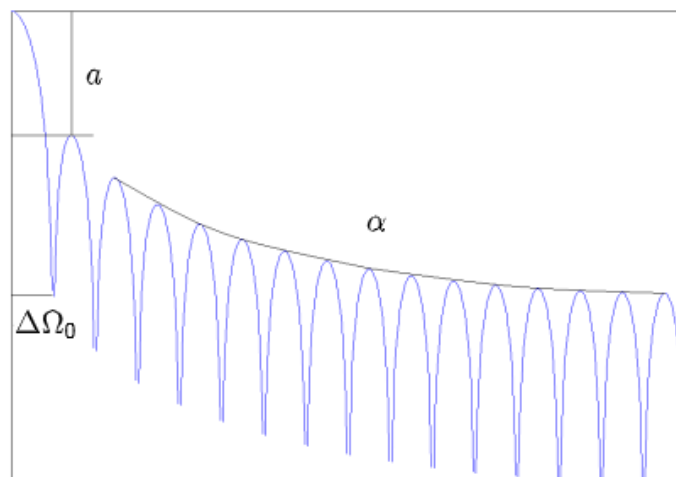
Međutim u ovom radu baziraćemo se na modifikaciji signala prozorskim funkcijama zarad smanjenja spektralnog curenja.

## 5.2 Karakteristike prozorskih funkcija

Svaka prozorska funkcija se opisuje u vremenskom i frekvencijskom domenu. Ovde,  $w[n]$  predstavlja prozorsku funkciju dužine  $N$  u vremenskom domenu i  $W(\Omega)$  predstavlja neprekidnu Furijeovu transformaciju datu sa

$$W(\Omega) = W(j\Omega) = \int_{-\tau}^{\tau} w[n]e^{-j\Omega n} dn$$

koja prikazuje spektar prozorske funkcije. Tipičan izgled spektra prozorske funkcije je prikazan na slici (30) sa sledećim parametrima:



Slika 30: Tipičan izgled spektra prozorske funkcije

- $\Delta\Omega_0/2$  - širina glavnog luka u spektru prozorske funkcije je veoma važna jer komponente koje se nalaze unutar glavnog luka se praktično ne mogu razdvojiti nakon primene DFT.  
Pogodnije za korišćenje su one prozorske funkcije koje imaju užu glavni luk jer je time olakšano filtriranje signala i efikasnije zauzimanje frekventnog opsega. Takođe i što je glavni luk užu, uža je i prelazna zona između propusnog i nepropusnog opsega, a i selektivnost je veća.
- $a$  - relativno slabljenje prvog bočnog luka u odnosu na glavni luk pokazuje koliko će izonositi najveće "prelivanje" energije od prve komponente na prvu susednu. Ukoliko prozorska funkcija ima veće slabljenje ona se smatra pogodnijom prozorskom funkcijom jer što je slabljenje bočnih lukova veće samim tim je i slabljenje u nepropusnom opsegu veće. Relativno slabljenje bočnih lukova se iskazuje u decibelima (dB).
- $\alpha$  - nagib sa kojim opadaju bočni lukovi u spektru. Prikazuje kojom brzinom opadaju bočni lukovi u spektru, odnosno kojom brzinom se smanjuje prelivanje energije jedne komponente ka ostalim nesusednim komponentama. Takođe i ova brzina bi trebalo da bude što je moguće veća.

Prema tome, svaki prozor,  $w[n]$  i Furijeova transformacija,  $W(\Omega)$ , moraju da poseduju sledeća svojstva:

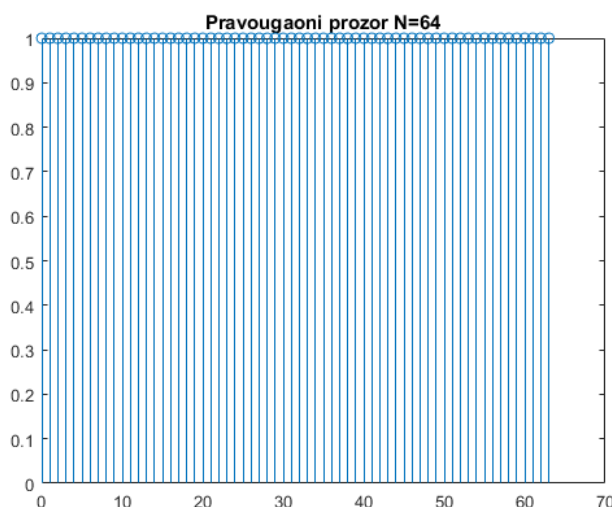
- $w[n]$  treba da bude realna i nenegativna.
- $w[n]$  treba da bude neparna funkcija, odnosno  $w[n]=w[-n]$  i stoga je  $W(\Omega)$  realna.
- $w[n]$  treba da dostigne maksimum za  $t = 0$ , odnosno,  $|w[n]| \leq f(0)$  za svako  $n$  i  $w[n] = 0$  za  $|n| > \tau$ , gde  $\tau$  predstavlja jednostrano trajanje prozora.
- $W(\Omega)$  treba da ima glavni luk i bočne lukove sa obe strane.
- Širina glavnog luka treba da bude što je moguće uža.
- Glavni luk mora da sadrži veliki deo ukupne energije.
- Maksimalni nivo bočnog luka - MSSL trebao bi biti što je moguće manji u odnosu na vrh glavnog luka.

U nastavku su izložene neke poznate prozorske funkcije koje se koriste u obradi signala.

### 5.3 Pravougaona prozorska funkcija

Pravougaona prozorska funkcija ili kako je još nazivaju uniformna funkcija definisna je na sledeći način:

$$(3.2) \quad w_R(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, N - 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



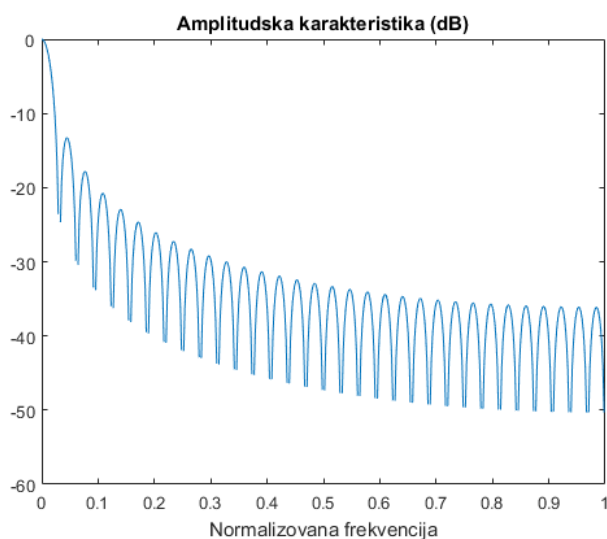
Slika 31: Pravougaona prozorska funkcija u vremenskom domenu

Spektar ove prozorske funkcije definisan je na sledeći način:

$$W_R(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j\Omega N}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{\sin(\Omega N/2)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j\Omega(N-1)/2} \quad (51)$$

Može se primetiti da prozorska funkcija ne vrši nikakvu modifikaciju signala već je njen rezultat direktno skraćivanje, odnosno odsecanje signala.

Spektar prozorske funkcije je prikazan na slici 32 i ima linearnu faznu karakteristiku dok je amplitudna karakteristika ove prozorske funkcije data sa  $\frac{\sin(\Omega N/2)}{\sin(\Omega/2)}$ . Širina glavnog luka pravougaone prozorske funkcije iznosi  $4\pi/N$  dok prvi bočni luk ima slabljenje od -13 dB u odnosu na glavni luk, a bočni lukovi opadaju sa nagibom od -6 db/oktavi. Prema tome, osnovni nedostatak ove prozorske funkcije je malo slabljenje bočnih lukova u amplitudskom spektru. Velika amplituda u spektru ove prozorske funkcije posledica je diskontinuiteta sekvence  $w[n]$  jer je poznato da sekvence koje imaju manje bočne lukove u spektru nemaju diskontinuitet u vremenskom domenu.



Slika 32: Spektar pravougaone prozorskse funkcije

Kao što je već poznato dobra prozorska funkcija je ona prozorska funkcija koja ima postepen prelaz od centra funkcije prema krajevima. Ukoliko bi povećali dužinu prozorske funkcije neke karakteristike ove funkcije bi se poboljšale. Odnosno povećala bi se amplituda glavnog i bočnih lukova u spektru pravougaonog prozora, dok se širina bočnih lukova smanju, a površina ispod njih ostaje nepromenjena. Na ovaj način se povećava selektivnost projektovanog filtera dok amplituda oscilovanja u funkciji prenosa, ostaje ista, bez obzira na dužinu impulsnog odziva filtera. Ovo je poznato pod imenom Gibsov fenomen i on se ne može prevazići pravougaonom prozorskom funkcijom. Za razliku od ostalih prozorskih funkcija koje su svojevrsni kompromis između zahteva za što užim prelaznim regionom i što većeg slabljenja opsega zaustavljanja, ovaj prozor karakterišu ekstremne vrednosti. Naime, postiže se minimalni prelazni region, ali po cenu slabljenja opsega zaustavljanja.

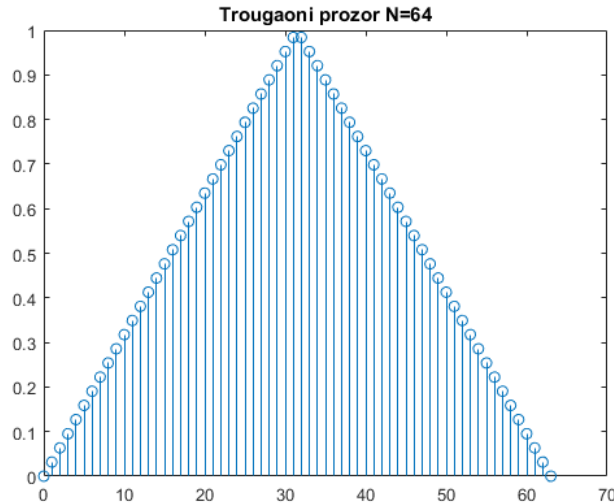
## 5.4 Trougaona prozorska funkcija

Trougaona prozorska funkcija, ili kako je neki nazivaju Bartletova, je izvedena linearnim spajanjem dva pravougaona prozora koja imaju upola kraće trajanje.

Ova prozorska funkcija je određena funkcijom vremenskog domena:

$$w_T(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N}, & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \\ w_T[N - n], & n = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N - 1. \end{cases}$$

koja je prikazana na slici 33.



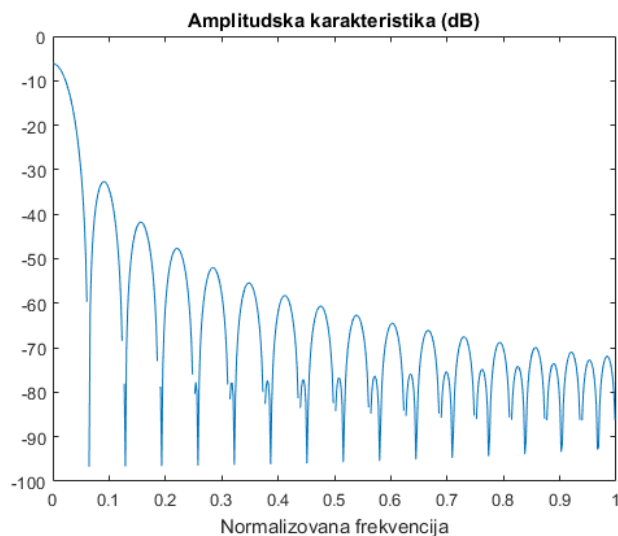
Slika 33: Trougaona (Bartletova) funkcija u vremenskom domenu

Trougaona prozorska funkcija je simetrična oko centralnog uzorka, pa samim tim ima linearnu faznu karakteristiku, ali joj nedostaje poslednja tačka u nizu koja je dodata sledećoj periodu u periodičnom proširenju prozorske funkcije. Spektar trougaone funkcije, koja se dobija direktnom primenom Furijeove transformacije na sekvencu  $w_T[n]$ , dat je sa:

$$W_T(e^{j\Omega}) = \frac{2}{N} \left[ \frac{\sin(\frac{\Omega N}{4})}{\sin \frac{\Omega}{2}} \right]^2 e^{j\Omega(\frac{N}{2}-1)} \quad (52)$$

U izrazu (52) može se primetiti da je amplitudski spektar trougaone prozorske funkcije jednak kvadratu amplitudskog spektra pravougaone prozorske funkcije. Trougaona prozorska funkcija se može posmatrati kao konvolucija dve pravougaone prozorske funkcije dužine  $\frac{N}{2}$ , pri čemu je poslednja tačka rezultata zanemarena, a glavni razlog za pojavu kvadrata je taj što konvolucija u vremenskom domenu odgovara množenju u frekvencijskom domenu.

Spektar trougaone prozorske funkcije je prikazan na slici 34. Može se primetiti sa slike da je polovina širine glavnog luka ove prozorske funkcije dvostruko veća od glavnog luka pravougaone prozorske funkcije, odnosno širina bočnog luka ove prozorske funkcije iznosi  $8\pi/N$ , a bočni lukovi opadaju sa -12 db/oktavi. Maksimalna amplituda bočnih lukova je -26 dB ispod glavnog luka.



Slika 34: Spektar Bartletove prozorske funkcije

U poređenju sa pravougaonom prozorskom funkcijom, trougaonu prozorsku funkciju odlikuje bolje slabljenje u nepropusnom opsegu, ali je selektivnost manja s obzirom da je širina glavnog luka trougaone funkcije dugo veća od širine glavnog luka pravougaone funkcije pa samim tim je i šira pralazna zona između propusnog i nepropusnog opsega. Prema tome, ova funkcija takođe predstavlja neku vrstu kompromisa između zahteva za što užim prelaznim regionom i što većim slabljenjem opsega, gde se prelazni region smatra važnijom karakteristikom. Jedna od prednosti dizajniranja filtera ovom prozorskom funkcijom je jednostavnost izračunavanja koeficijentata.

Prigušenje trouglastog prozora je malo za većinu aplikacija digitalnih filtera, ali je znatno veće od onog za pravougaoni prozor. U nekim slučajevima, kada nisu potrebna velika prigušenja, ovaj filter se može koristiti jer pruža jednostavan način izračunavanja koeficijenata.

## 5.5 Kosinusna/sinusna prozorska funkcija

Kosinusne (sinusne) funkcije oblika  $\cos^\alpha x$  ili  $\sin^\alpha x$  koriste se kako bi se napravili još blaži prelazi u blizini krajeva prozorske funkcije, odnosno kako bi se još više smanjili bočni lukovi. Razlika između prozorskih funkcija kosinusnog i sinusnog tipa je u vremenskom pomeranju za polovinu dužine

sekvence kao i u tome što je kosinusna funkcija simetrična u odnosu na koordinatni početak. Prema tome, sinusni oblik funkcije, dat izrazom (53), je pogodniji za primenu u spektralnoj analizi pomoću DFT-a

$$w[n] = \sin^\alpha\left(\frac{n\pi}{N}\right), n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (53)$$

gde parametar  $\alpha \in [1, 4]$ .

Za  $\alpha = 1$  dobija se sinusna prozorska funkcija:

$$w_C[n] = \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right), n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

## 5.6 Hannova prozorska funkcija

Ukoliko se u jednačini (53) uzme za vrednost parametra  $\alpha = 2$ , što je i najčešća vrednost ovog parametra, dobija se Hanova prozorska funkcija. Ova funkcija je dobila naziv po austrijskom meteorologu Julius Von Hannu i poznata je pod nazivima podignuti kosinus, kvadratni kosinus ili Hanning prozorska funkcija.

U vremenskom domenu Hanova prozorska funkcija je definisana sa:

$$w_H[n] = \sin^2\left(\frac{n\pi}{N}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right)\right], n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (54)$$

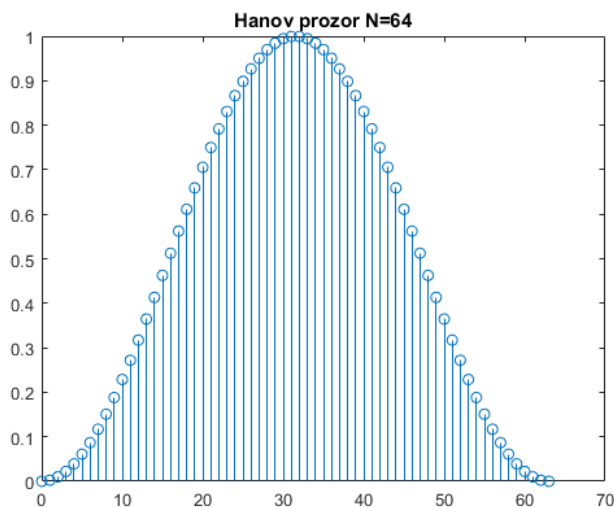
Iz izraza (54) se vidi da je na krajevima intervala  $w_H[n] = 0$ .

Spektar ove prozorske funkcije dat je sa:

$$W_H(e^{j\Omega}) = 0,5W_R(e^{j\Omega}) - 0,25[W_R(e^{j(\Omega - \frac{2\pi}{N})}) + W_R(e^{j(\Omega + \frac{2\pi}{N})})]$$

gde je  $W_R(e^{j\Omega})$  spektar pravougaone prozorske funkcije date izrazom (51). Spektar Hanove prozorske funkcije predstavlja superpoziciju spektra pravougaonog prozora pomnoženog faktorom 0,5 i spektra pravougaonih prozora pomerenih za  $\pm 2\pi/N$  i pomoženih sa 0,25. Maksimumi pomerenih spektara se nalaza na mestima gde centralni spektar ima nule. Cilj ovakvog sabiranja tri spektra je da smanji amplitudu prvog bočnog luka. Ova spektralna interperatacija ima takođe i važnu praktičnu primenu. Kada se određuje DFT iz spektra  $W_H(e^{j\Omega})$  uzorci se uzimaju sa razmakom  $5\pi/N$ , tj. uzimaju se tačno na mestima gde se nalaze nule spektra  $W_R(e^{j\Omega})$ . Prema tome, u rezultatnom spektru  $W_H(e^{j\Omega})$  postoje samo tri nenulta uzorka na pozicijama  $-2\pi/N$ , 0 i  $2\pi/N$  i one se nalaze na mestima gde leže centralni uzorci tri spektra koji ulaze u superpoziciju. Ovo omogućava da se množenje u vremenskom domenu sa Hanovom prozorskom funkcijom zameni superpozicijom





Slika 35: Vremenski domen Hanove prozorske funkcije

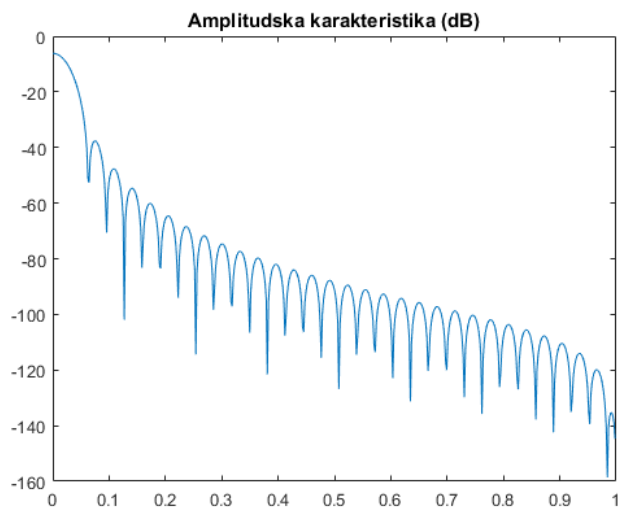
spektara u frekvencijskom domenu. Prema tome, spektar signala ograničenog Hanovom prozorskom funkcijom  $Y[k]$  se dobija ako se nađe spektar signala bez množenja sa prozorskom funkcijom  $X[k]$  i primeni formula:

$$Y[k] = \frac{1}{2} \left( X[k] - \frac{1}{2}(X[k-1] + X[k+1]) \right) \quad (55)$$

za svaki DFT uzorak. Kako se superpozicioni koeficijenti  $\pm 1/2$  lako realizuju pomeranjem u desno, a ne množenjem, vidi se da se  $N$  realnih množenja u vremenskom domenu zamenjuje sa  $2N$  realnih sabiranja i  $2N$  pomeraja u spektralnom domenu. Samim tim se smanjuje potreban memorijski prostor jer nije potrebno čuvati vrednosti uzoraka prozorske funkcije. Takođe, u nekim slučajevima, računanje spektra uz pomoć izraza 55 može predstavljati veoma značajno ubrzanje.

Digitalni filteri dizajnirani sa ovom prozorskom funkcijom imaju veće slabljenje opsega zaustavljanja od onih dizajniranih sa trougaonom prozorskom funkcijom. Prvi bočni luk u frekvencijskom domenu ovog filtera ima slabljenje od -31 dB dok je prelazno područje isto kao i kod trougaone prozorske funkcije jer je širina glavnog luka ista kao i kod trougaone funkcije, odnosno iznosi  $8\pi/N$ .

Još jedna prednost ove prozorske funkcije je mogućnost realnog smanjenja opsega zaustavljanja narednih lukova. Već drugi luk ima slabljenje od -41dB. Spektar prozorske funkcije ima znatno manje bočne lukove, jer je prelazak sa nenultih na nulte vrednosti prozorske funkcije "gladak".



Slika 36: Spektar Hanove prozorske funkcije

## 5.7 Hamingova prozorska funkcija

Hamingova prozorska funkcija je jedna od najpopularnijih i najčešće korišćenih prozorskih funkcija. Ova prozorska funkcija nosi naziv po Hammingu<sup>8</sup> i može se smatrati optimizovanom Hanovom prozorskom funkcijom.

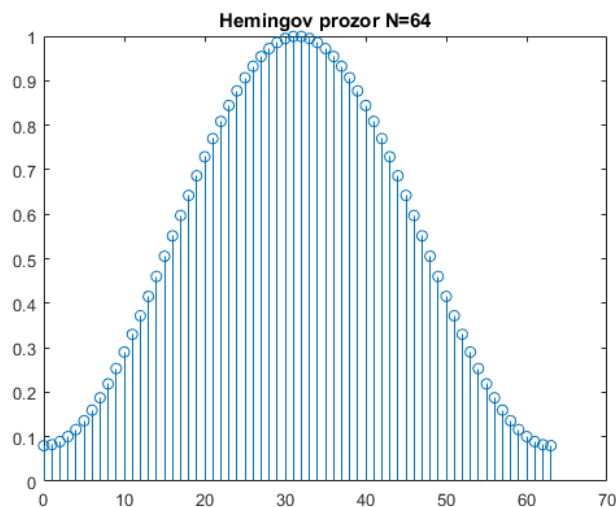
Osnovi cilj poboljšanja u odnosu na Hanovu prozorsku funkciju je još bolje smanjenje bočnih lukova. Hamingova prozorska funkcija i njen spektar definisani su na sledeći način:

$$w_H[n] = \alpha_H - (1 - \alpha_H) \cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right), n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (56)$$

$$W_H(e^{j\Omega}) = \alpha_H W_R(e^{j\Omega}) - 0,5(1 - \alpha_H) [W_R[e^{j(\Omega-2\pi/N)}] + W_R[e^{j(\Omega+2\pi/N)}]] \quad (57)$$

Ukoliko za vrednost  $\alpha_H$  uzme da je 0,54 (što se lako izračunavanjem može i utvrditi) prvi bočni luk se potpuno eliminiše. Širina centralnog luka je gotovo ista kao i kod Hanove prozorske funkcije. Maksimalna amplituda bočnih lukova je -43 dB. Takođe ukoliko se u (56) umesto  $n$  uvrsti 0 ili  $N$  dobija se da je  $w[0] = w[N] = 0,08$ , odnosno Hamingova prozorska funkcija ima diskontinuitet na krajevima što je razlog zbog koga bočni lukovi opadaju sa

<sup>8</sup>Richard Hamming, 1915-1998, matematičar



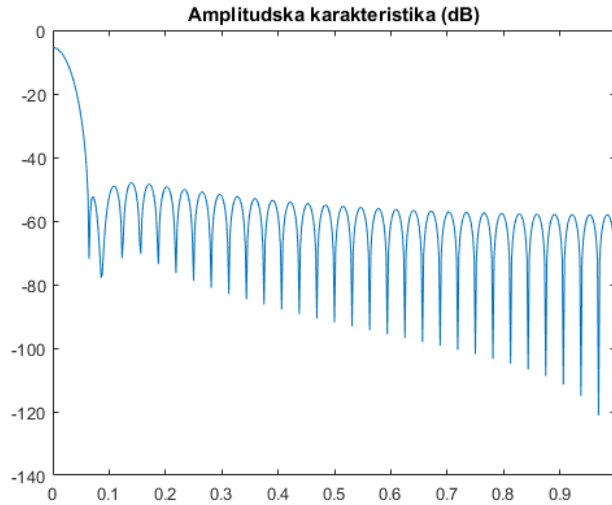
Slika 37: Vremenski domen Hemingove prozorske funkcije

nagibom od samo  $-6\text{dB/oktavi}$ . Takođe potrebno je naglasti da Hamingova prozorska funkcija daje najniže nivoe bočnih funkcija.

Što se tiče frekvencijskog domena vidi se da je prvi bočni luk oslabljen tako da je minimalno slabljenje zaustavnog opsega definisano u smislu drugog bočnog luka i iznosi  $41\text{ dB}$ . Svi bočni lukovi imaju skoro iste maksimalne vrednosti od oko  $-45\text{ dB}$ . Prema tome, filter dizajniran sa Hemingovom prozorskom funkcijom ima minimalno slabljenje opsega zaustavljanja od  $-53\text{ dB}$  što je dovoljno za većinu primena digitalnih filtera. Prelazno područje je nešto šire od Hanove prozorske funkcije dok je slabljenje zaustavnog opsega znatno veće. Za razliku od minimalnog slabljenja zaustavnog opsega, prelazno područje se može promeniti promenom redosleda filtera. Prelazno područje se sužava dok je minimalno slabljenja zaustavnog opsega ostaje nepromenjeno kako se redosled filtera povećava.

## 5.8 Blekmanova prozorska funkcija

Blekmanova prozorska funkcija, zajedno sa Kajzerovom, Hamingovom i Hanovom, smatra se najčešće korišćenim i najpopularnijim prozorom. Relativno visoko slabljenje čini ovu prozorsku funkciju veoma pogodnom za gotovo sve



Slika 38: Spektar Hemingove prozorske funkcije

primene. U opštem obliku Blekmanova prozorska funkcija je data izrazom:

$$w[n] = \sum_{m=0}^M (-1)^m a_m \cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right), n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (58)$$

pri čemu koeficijenti  $a_m$  zadovoljavaju uslov:

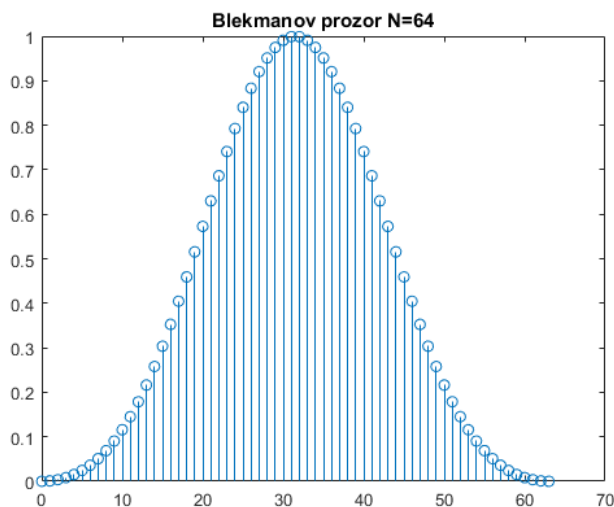
$$\sum_{m=0}^M a_m = 1.$$

Ideje koje su korišćene u razvoju Hanove i Hamnigove prozorske funkcije kombinovane su i u razvoju Blekmanove prozorske funkcije.

Analitički oblik spektra ove funkcije dat je sa:

$$W(e^{j\Omega}) = \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{a_m}{2} [W_R(e^{j(\Omega-2\pi m/N)}) + W_R(e^{j(\Omega+2\pi m/N)})]. \quad (59)$$

Ukoliko se u izraze (58) i (59) uvrsti  $M = 1$  dobija se Hanova i Hemingova prozorska funkcija, u zavisnosti od koeficijenata  $a_m$ . Još bolji rezultat se postiže sabiranjem tri ili četiri člana tj. kada se u ove izraze uvrsti  $M = 2$  ili  $M = 3$ . Prema tome, Blekmanov frekvencijski domen podseća na Hanov frekvencijski domen. Razlika je u slabljenju prvog bočnog luka koji iznosi -51 dB kao i u glavnom luku koji je nešto širi. Bočni lukovi prateći prvi, uzrokuju dodatno slabljenje opsega.



Slika 39: Vremenski domen Blekmanove prozorske funkcije

Vrednosti koeficijenata  $a_0 = 0,42659071 \approx 0,42$ ,  $a_1 = 0,49656062 \approx 0,50$  i  $a_2 = 0,07684867 \approx 0,08$  dobijaju se ukoliko se uzme da je  $M = 2$  i postave se nule funkcije  $W(e^{j\Omega})$  na učestanosti  $\omega = 7\pi/N$  i  $9\pi/N$  koje odgovaraju položajima trećeg i četvrtog bočnog luka pravougaone prozorske funkcije.

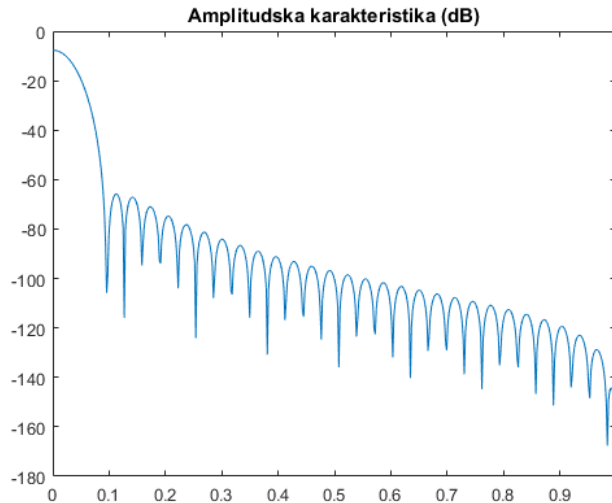
Prozorska funkcija koja koristi ove aproksimativne vrednosti koeficijenata naziva se Blekmanova prozorska funkcija, i data je izrazima:

$$w_B[n] = 0,42 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right), n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

$$W_B(e^{j\Omega}) = \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{a_m}{2} [W_R(e^{j(\Omega-2\pi/N)}) + W_R(e^{j(\Omega+2\pi/N)})].$$

Maksimalna amplituda bočnih lukova u odnosu na maksimalnu amplitudu glavnog luka je -58 dB, dok je pad bočnih lukova -18 dB/oktavi, razlog za ovo opadanje bočnih lukova je povećanje širine glavnog luka na  $12\pi/N$ . Ukoliko se za prozorsku funkciju koriste tačne vrednosti koeficijenata dobijaju se lošiji rezultati, odnosno maksimalna amplituda bočnih lukova iznosi -51dB u odnosu na maksimalnu amplitudu glavnog luka, a nagib opadanja bočnih lukova je samo -6 dB/oktavi jer  $w_B \neq 0$  na krajevima intervala definisanosti. Međutim ukoliko se koeficijenti odrede metodom optimizacije, dobija se bolji rezultat. Na taj način se dobijaju optimalne Blekmanove prozorske funkcije od tri ili četiri člana. Vrednosti ovih koeficijenata su prikazane u tabeli ispod.

	3 člana ( 51dB)	3 člana (- 58dB)	3 člana (- 67dB)	4 člana (- 92dB)
$a_0$	0,42659071	0,42	0,42323	0,35875
$a_1$	0,49656062	0,50	0,49755	0,48829
$a_2$	0,076848971	0,08	0,07922	0,14128
$a_3$				0,01168



Slika 40: Spektar Blekmanove prozorske funkcije

## 5.9 Kaiserova prozorska funkcija

Kaiser je 1966. godine otkrio da skoro optimalni prozor može biti oblikovan korišćenjem modifikovane Beselove funkcije prve vrste. Odnosno Kajzerova ili Kajzer-Beselova (Kaiser-Bessel) prozorska funkcija predstavlja jednostavnu diskretnu aproksimaciju funkcije ograničenog trajanja  $T_K$  koja maksimizira energiju u opsegu učestanosti  $B_K$  uz pomoć modifikovane Beselove funkcije prve vrste nultog reda  $I_0(x)$ , gde je aproksimativna vrednost ove funkcije izračunava uz pomoć reda:

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2.$$

Ovaj red jako brzo konvergira tako da se u samo nekoliko sabiraka postiže maksimalna tačnost izračunavanja na računaru. Koristeći funkciju  $I_0(x)$  uzorci Kajzerove prozorske funkcije se dobijaju iz izraza:

$$w_K[n] = \frac{I_0\{\beta\sqrt{1 - [1 - 2n/(N - 1)]^2}\}}{I_0(\beta)}, n = 0, 1, \dots, N - 1$$

gde je  $\beta = 0,5T_K B_K$ . Iz izraza može da primeti da Kajzerova prozorska funkcija zavisi od paramtera  $\beta$ , koji predstavlja parametar oblika, i parametra dužine  $N$ . Ovo omogućava da se pravi kompromis između širine prelaznog opsega i slabljenja u nepropusnom opsegu. Ukoliko se uzme za vrednost parametra  $\beta = 0$  Kajzeorava funkcija postaje ista kao pravougaona prozorska funkcija iste dužine. Prema tome, kontinualnom promenom parametra  $\beta$  može se povećati slabljenje bočnih lukova na račun proširenja glavnog luka dok se kod prethodno definisanih funkcija to moglo postići samo ukoliko bi se promenila dužinu prozorske funkcije što nije dovoljno fleksibilno.

## 5.10 Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija

Uzorci Dolf-Čebiševljeve prozorske funkcije dati su na sledeći način:

$$W_D[k] = (-1)^k \frac{\cos(N \cos^{-1}[\beta \cos(\pi k/N)])}{\cosh[N \cosh^{-1}(\beta)]}, k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

pri čemu je:

$$\beta = \cosh \left[ \frac{1}{N} \cosh^{-1}(10^\alpha) \right]$$

$\alpha$  predstavlja logaritam odnosa amplitude centralnog luka i amplituda jednakih bočnih lukova.

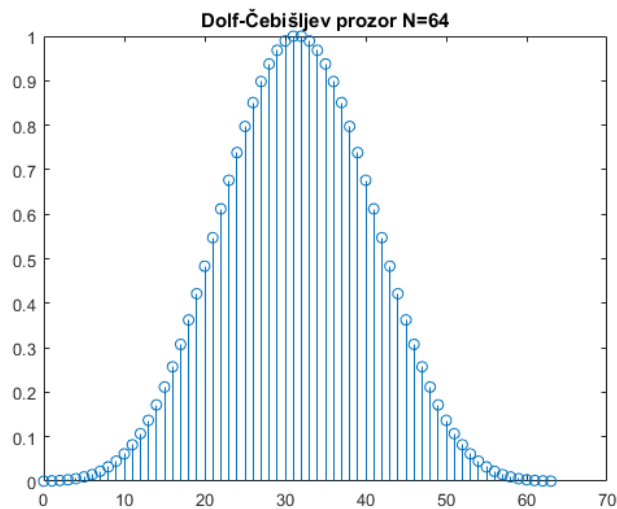
Uzorci Doff-Čebiševljeve prozorske funkcije u vremenskom domenu dobijaju se ukoliko na uzorke  $W_D[k]$  primeni inverzna DFT i potom skaliranje da bi maksimalna amplituda bila jednaka jedan.

## 5.11 Poređenje prozorskih funkcija

Budući da tačna definicija dobre prozorske funkcije ne postoji, sledi komparacija prozorskih funkcija da bi se shodno tome zaključilo koja od njih je najbolja u odnosu na pojedine karakteristike.

Poređenje prozorskih funkcija vrši se na osnovu relativnog slabljenja bočnih lukova, relativne širine glavnog luka i na osnovu faktora curenja.

Budući da se pod pojmom faktora curenja podrazumevamo odnos snage sadržane u bočnim lukovima i ukupne snage signala, to znači da će faktor curenja biti manji ukoliko prozorska funkcija ima širi glavni luk i manju amplitudu bočnih lukova. Tada je više snage koncentrisano u glavnom luku nego u bočnim lukovima. Na osnovu ovakve definisanosti faktora curenja možemo da zaključimo da su bolje one prozorske funkcije koje imaju manji faktora curenja jer tada postoje manji gubitci snage signala.



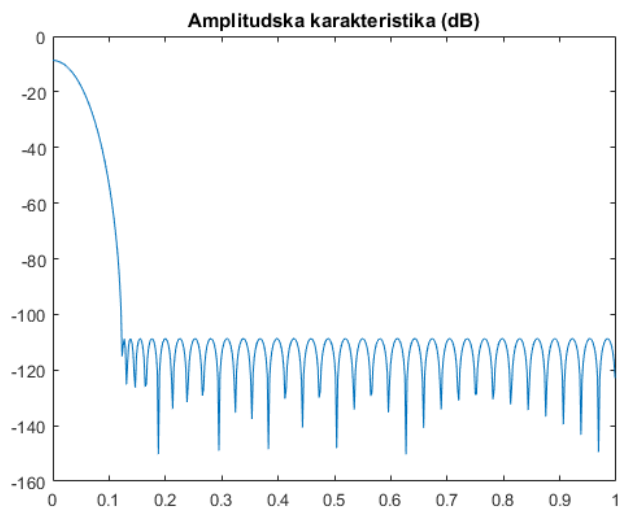
Slika 41: Vremenski domen Dolf - Čebišljeve prozorske funkcije

U nastavku su izložene tabele u kojima su prikazani parametri na osnovu kojih se vrši komparacija prozorskih funkcija.

Prozorska funkcija	Relativno slabljenje bočnih lukova
Praougaona prozorska funkcija	-13,3 (dB)
Trougaona prozorska funkcija	-26,6 (dB)
Hanova prozorska funkcija	-31,5 (dB)
Hemingova prozorska funkcija	-42,5 (dB)
Kajzerova prozorska funkcija	-44 (dB)
Blekmanova prozorska funkcija	-58,1 (dB)
Don-Čebiševljeva prozorska funkcija	-100 (dB)

Prozorska funkcija	Relativna širina glavnog luka
Praougaona prozorska funkcija	0,027344
Trougaona prozorska funkcija	0,039063
Hanova prozorska funkcija	0,042969
Hemingova prozorska funkcija	0,039063
Kajzerova prozorska funkcija	0,070313
Blekmanova prozorska funkcija	0,050781
Don-Čebiševljeva prozorska funkcija	0,054688





Slika 42: Spektar Dolf - Čebišljeve prozorske funkcije

Prozorska funkcija	Faktor curenja (%)
Praougaona prozorska funkcija	9,14
Trougaona prozorska funkcija	0,28
Hanova prozorska funkcija	0,05
Hemingova prozorska funkcija	0,03
Kajzerova prozorska funkcija	0
Blekmanova prozorska funkcija	0
Don-Čebiševljeva prozorska funkcija	0

Na osnovu gornjih tabela i na osnovu prethodno definisanih prozorskih funkcija može se zaključiti da složenije funkcije imaju i veće slabljenje bočnih lukova pa samim tim imaju i bolje ponašanje u nepropusnom opsegu, odnosno imaju veće slabljenje u nepropusnom opsegu. Najjednostavnije prozorske funkcije poput pravougaone i trougaone imaju i najmanje slabljenje bočnih lukova. Međutim, visina bočnih lukova se može smanjiti ukoliko se funkcija prozora "zaobli" pri krajevima, tako da se dobije postepen pad ka nuli. Ovo za posledicu ima veću širinu glavnog luka, pa se samim tim povećava i prelazni opseg. Iz priloženih tabela vidi se da najveće bočne lukove ima pravougaona prozorska funkcija kod koje postoji nagli pad u prelazu sa nenultih na nulte vrednosti. Sa druge strane, što je prozorska funkcija jednostavnija ona ima i manju širinu glavnog luka.

Sa aspekta faktora curenja, iz treće tabele da se primetiti da su najbolje Blekmanova, Dolf-Čebišjeva i Kajzerova funkcija, dok je najgora pravougaona koja ima i najuži glavni luk, pa samim tim i najmanje energije u njemu.

Prema tome može se zaključiti da ne postoji po definiciji idealna prozorska funkcija odnosno funkcija koja ima veliki pad bočnih lukova i malu širinu glavnog luka. Izbor prozorske funkcije je zapravo kompromis po pitanju širine glavnog luka i opadanja bočnih lukova.

## 6 Primeri

U prethodnim poglavljima date su neke teoretkse osnovne vezane za digitalnu obradu signala. Ovo poglavlje je pre svega namenjeno primerima objašnjenih transformacija. Neki od njih biće prezentovani uz pomoć MATLAB kodova.

### 6.1 Primeri FFT implementacije

Budući da je algoritam brze Furijeove transformacije FFT jako moćan alat u rešavanju mnogih problema u digitalnoj obradi signala, ovde je izloženo nekoliko primera.

U MATLAB-u postoji ugrađena funkcija za FFT algoritam, njen zapis u MATLAB-u je  $fft()$ . Ukoliko se u MATLAB-u zada funkcija kao  $Y = fft(X)$ , ova funkcija izračunava diskretnu Furijeovu transformaciju signala  $X$  koristeći algoritam brze Furijeove transformacije. U slučaju da je  $X$  vektor,  $fft$  vraća Furijeovu transformaciju kao vektor, dok u slučaju da je  $X$  matrica, onda  $fft(X)$  tretira kolone kao vektore i vraća Furijeovu transformaciju svake kolone posebno. U slučaju da je  $X$  više dimenzionalni niz, onda  $fft(X)$  tretira vrednost duž cele prve dimenzije niza, koji su različiti od 1, kao vektor, i vraća Furijeovu transformaciju svakog vektora.

Ukoliko se funkcija u MATLAB-u zada kao  $Y = fft(X, n)$ , ova funkcija vraća  $n$  vrednosti DFT. Ukoliko se drugačije ne navede,  $Y$  ima isti broj vrednosti kao i  $X$ . U slučaju da je  $X$  vektor čija je dužina veća od  $n$  tada se vektor  $X$  dopunjava nulama do dužine  $n$ . U slučaju da je  $X$  vektor dužine veće od  $n$ , onda se vektor  $X$  skraćuje na dužinu  $n$ . U slučaju da nam je  $X$  matrica, tada se svaka kolona tretira kao poseban vektor. U slučaju da je  $X$  višedimenzionalni niz, tada se vrednosti duž cele prve dimenzije niza, koji su različiti od 1, tretiraju kao vektori.

Takođe funkciju u MATLABU-u, može da se zada i na sledeći način:  $Y = fft(X, n, dim)$ . Ovakva funkcija vraća FFT transformaciju dužine  $dim$ . Na primer ukoliko je  $X$  matrica, tada funkcija  $fft(X, n, 2)$  vraća  $n$  vrednosti FFT svakog reda.

#### 6.1.1 FFT audio signala

Koristeći FFT izdvaja se korisni signal iz buke. Kod za ovu primenu FFT je dat sa:

Listing 1: Algoritam za izdvajanje korisnog signala iz buke

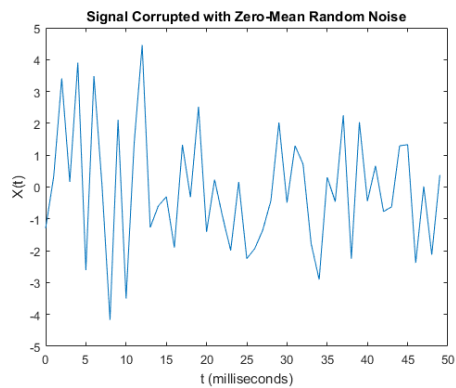
```

1 Fs = 1000; % Sampling frequency
2 T = 1/Fs; % Sampling period
3 L = 1000; % Length of signal
4 t = (0:L-1)*T; % Time vector
5 S = 0.7*sin(2*pi*50*t) + sin(2*pi*120*t);
6 X = S + 2*randn(size(t));
7 plot(1000*t(1:50),X(1:50))
8 title('Signal Corrupted with Zero-Mean Random Noise')
9 xlabel('t (milliseconds)')
10 ylabel('X(t)')
11 Y = fft(X);
12 P2 = abs(Y/L);
13 P1 = P2(1:L/2+1);
14 P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
15 f = Fs*(0:(L/2))/L;
16 subplot(f,P1)
17 title('Single-Sided Amplitude Spectrum of X(t)')
18 xlabel('f (Hz)')
19 ylabel('|P1(f)|')
20 Y = fft(S);
21 P2 = abs(Y/L);
22 P1 = P2(1:L/2+1);
23 P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
24 subplot(f,P1)
25 title('Single-Sided Amplitude Spectrum of S(t)')
26 xlabel('f (Hz)')
27 ylabel('|P1(f)|')

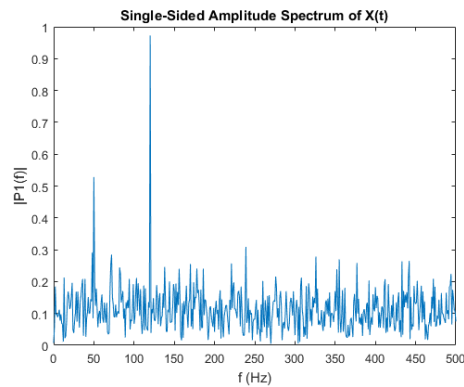
```

Prvo su u kodu navedeni parametri signala, frekvencija uzorkovanja i vremensko trajanje. Potom se formiraju signali koji sadrže sinusoide određenih frekvencija i amplituda. Potom sledi iscertavanje signala u vremenskom domenu. Na slici (43) je predstavljen signal na kome je izvršena decimacija po vremenu. Na osnovu slike može da se zaključi da je teško identifikovati frekventijske komponente signala  $X(t)$ .

Dalje u kodu se izračunava FFT signala sa decimacijom po frekvenciji. Potom se vrednosti dvostranog spektra  $P2$  prebacuju u pozitivne i tako se formira jednostrani spektar  $P1$  i potom se dalje izračunavanje vrši na celoj dužini signala. Posle ovih koraka sledi iscertavanje signala  $P1$  u frekvencijskom domenu. Amplitude nisu tačne vrednosti kao na početku, a razlog za



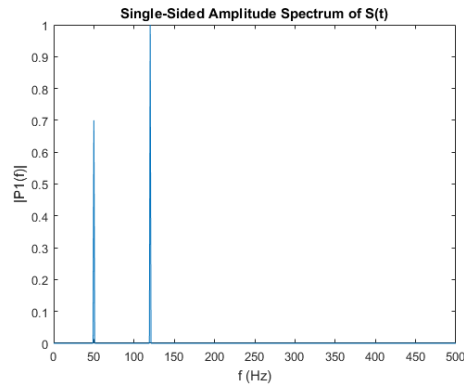
Slika 43: Noisy signal decimacija po vremenu



Slika 44: Noisy signal decimacija po frekvenciji

to je prisustvo belog šuma. Što je signal duži on će proizvesti bolju aproksimaciju frekvencije. Na slici (44) prikazan je signal u frekencijskom domenu.

Sledeći korak u kodu je primena FFT na originalni signal bez prisustva šuma (amplitude koje su zadate u kodu su 0.7 i 1.0) i iscrtava se signal u frekventnom domenu koji je prikazan na slici (45).



Slika 45: Noisy signal decimacija po  $S(t)$

### 6.1.2 FFT algoritam koji prikazuje kosinusne talase

Ovde je prikazan primer algoritma koji prikazuje kosinusni signal u vremenskom i frekvencijskom domenu.

Listing 2: Primer algoritma za prikazivanje kosinusnog talasa

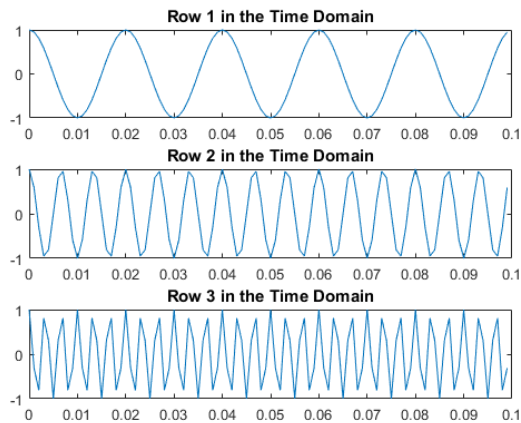
```

1  Fs = 1000; % Sampling frequency
2  T = 1/Fs; % Sampling period
3  L = 1000; % Length of signal
4  t = (0:L-1)*T; % Time vector
5  x1 = cos(2*pi*50*t); % First row wave
6  x2 = cos(2*pi*150*t); % Second row wave
7  x3 = cos(2*pi*300*t); % Third row wave
8  X = [x1; x2; x3];
9  for i = 1:3
10 subplot(3,1,i)
11 plot(t(1:100),X(i,1:100))
12 title(['Row ',num2str(i), ' in the Time Domain'])
13 end
14 n = 2^nextpow2(L);
15 dim = 2;
16 Y = fft(X,n,2);
17 P2 = abs(Y/n);
18 P1 = P2(:,1:n/2+1);
19 P1(:,2:end-1) = 2*P1(:,2:end-1);
20 for i=1:3
21 subplot(3,1,i)
22 plot(0:(Fs/n):(Fs/2-Fs/n),P1(i,1:n/2))
23 title(['Row ',num2str(i), ' in the Frequency Domain'])
24 end

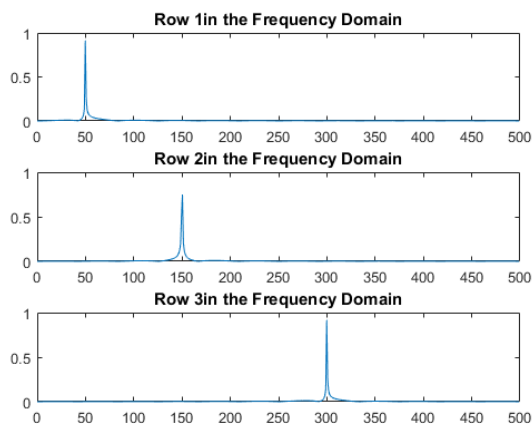
```

Na početku koda navedeni su parametri signala sa frekvencijom od 1Hz i trajanjem od 1 sekunde. Nakon toga se kreira matrica u kojoj svaki red pred-

stavlja kosinusni talas sa različitim frekvencijama. Prva for petlja tumači se tako da postoje tri reda sa po 1000 vrednosti, gde su u prvom redu talasi čija je frekvencija 50Hz, drugom 150Hz i u trećem su talasi frekvencije 300 Hz. Kodom je prikazano prvih 100 vrednosti iz svakog reda i izvršeno je poređenje njihovih frekvencija u vremenskom domenu. Rezultat je prikazan na slici 46. Kako bi postigli bolje performanse algoritma, ulazni signal je dopunjen nulama. Za definisanje nove dužine niza koristi se funkcija *nextpow2*. Nakon ovog postupka izračunava se FFT signala i određuje se dvostrani i jednostrani spektar svakog signala. I na kraju, druga for petlja iscrtava jednostrani amplitudi spektar za svaki red signala.



Slika 46: Kosinusni signal decimacija po vremenu



Slika 47: Kosinusni talas decimacija po frekvenciji

## 6.2 Primer algoritma za kompresiju slike DCT-om

Ovde je predstavljen primer algoritma za kompresiju slike diskretnom kosinusnom transformacijom. Kod za kompresiju je:

Listing 3: Kod za kompresiju slike Diskretnom kosinusnom transformacijom

```

1 I = imread('cameraman.tif');
2 I = im2double(I);
3 T = dctmtx(8);
4 dct1 = @(block_struct) T * block_struct.data * T';
5 B = blockproc(I,[8 8],dct1);
6 mask = [1 1 1 1 0 0 0 0
7         1 1 1 0 0 0 0 0
8         1 1 0 0 0 0 0 0
9         1 0 0 0 0 0 0 0
10        0 0 0 0 0 0 0 0
11        0 0 0 0 0 0 0 0
12        0 0 0 0 0 0 0 0
13        0 0 0 0 0 0 0 0];
14 B2 = blockproc(B,[8 8],@(block_struct) mask .* block_struct.data
15               );
16 invdct = @(block_struct) T' * block_struct.data * T;
17 I2 = blockproc(B2,[8 8],invdct);
18 figure
19 imshow(I);
    
```

Ovaj primer pokazuje kako kompresovati sliku pomoću DCT-a. Primer izračunava dvodimenzionalnu DCT od 8x8 blokova na ulaznoj slici, odbacuje



(postavlja na nulu) sve osim 10 do 64 DCT koeficijenta u svakom bloku, a zatim rekonstruiše sliku pomoću dvodimenzionalnog DCT-a inverznog oblika svakog bloka. Primer koristi metod računaja matrice transformacije. DCT se koristi u JPEG algoritmu kompresije slike. Ulazna slika je podeljena na blokove 8x8 ili 16x16, a dvodimenzionalna DCT se izračunava za svaki blok. DCT koeficijenti se potom kvantizuju, kodiraju i prenose. JPEG prijemnik (ili čitač JPEG datoteka) dekodira kvantizovane DCT koeficijente, izračunava inverzni dvodimenzionalni DCT svakog bloka, a zatim ih vraća u jednu sliku. Za tipične slike, mnogi DCT koeficijenti imaju vrednosti blizu nule. Ovi koeficijenti se mogu odbaciti bez ozbiljnog uticaja na kvalitet rekonstruisane slike.

Lako se može doneti zaključak da iako u rekonstruisanoj slici postoji određeni gubitak kvaliteta, iako je odbačeno gotovo 85% DCT koeficijenta jasno je prepoznatljivo koja je slika u pitanju.



Slika 48: Originalna slika



Slika 49: Slika posle izvršene kompresije

## Literatura

- [1] Nenad Teofanov, *Predavanja iz primenjene analize*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011.
- [2] Ljiljana Milić, Zoran Dobrosavljačić, *Uvod u digitalnu obradu signala*, elektrotehnički fakultet Akademska misao, 1999.
- [3] E. Oran Brigham, *The Fast Fourier Transform and its applications*, Prentice Hall, 1974
- [4] Richard G. Lyons, *Understanding Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 2004.
- [5] Monson H. Hayes, *Schaum's outlines of Theory and Problems of Digital Signal Processing*, Mc Grow Hill, 1999.
- [6] Brad Osgood, *Lecture Notes for The Fourier Transform and its Applications*, Electrical Engineering Department, Stanford University
- [7] J. F. James, *A Student's Guide to Fourier transform with applications in Physics and Engineering third edition*, Cambridge University Press, 2011.
- [8] R. J. Beerends, H. G. ter Morsche, J.C. van den Berg and E. M. van de Vrie, *Fourier nad Laplace Transform*, Cambridge University Press, 2003.
- [9] Zdenka Babić, *Analiza i obrada kontinualnih signala* Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Banja Luci, Banja Luka 2012
- [10] Zoran Milivojević, *Digital Filter Design*, MikroElektronika 1st edition, 2009.
- [11] Syed Ali Khayam, *The Discrete Cosine Transform (DCT): Theory and Application*, Department of Electrical & Computer Engineering, Michigan State University, 2003.
- [12] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer, *Discrete-time-signal processing 3rd edition*, Prentice Hall, 2010.
- [13] Marina Marjanović-Jakovljević, Vladimir Matić, *Priručnik iz signala i sistema sa rešenim primerima u Pythonu*, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2017.
- [14] Almir Đedović, *Diplomski rad- Prozoiranje signala i curenje spektra*, Elektro tehnički fakultet u Sarajevu, Sarajevo, 2012.

[15] <http://tnt.etf.bg.ac.rs/oe3dos/materijali/predavanja/knjiga/DOS4a.pdf>

## Biografija

Dušica Baljak je rođena 06.02.1992. godine u Somboru. Nakon završene osnovne škole u Prigrevici, upisala je opšti smer gimnazije "Nikola Tesla" u Apatinu. 2011. godine upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika (matematika finansija). Studiranje na master studijama na istom fakultetu je nastavila u oktobru 2015. godine. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom zaključno sa julskim ispitnim rokom 2018. godine. Time je stekla uslov za odbranu ovog master rada. Trenutno je zaposlena u Erste banci u Novom Sadu.

## Ključna dokumentacija

**Redni broj:**

**RBR**

**Identifikacioni broj:**

**IBR**

**Tip dokumentacije:** Monografska dokumentacija

**TD**

**Tip zapisa:** Tekstualni štampani materijal

**TZ**

**Vrsta rada:** Master rad

**VR**

**Autor:** Dušica Baljak

**AU**

**Mentor:** dr Nenad Teofanov

**ME**

**Naslov rada:** Diskretizacija i modifikacija signala sa primenama

**NR**

**Jezik publikacije:** Srpski (latinica)

**JP**

**Jezik izvoda:** s / en

**JI**

**Zemlja publikovanja:** Republika Srbija  
**ZP**

**Uže geografsko područje:** Vojvodina  
**UGP**

**Godina:** 2023  
**GO**

**Izdavač:** Autorski reprint  
**IZ**

**Mesto i adresa:** Novi Sad, Trg D. Obradovića 4  
**MA**

**Fizički opis rada:** (6/106/0/3/49/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)  
**FO:**

**Naučna oblast:** Matematika  
**NO**

**Naučna disciplina:** Matematička analiza  
**ND**

**Ključne reči:** Signali, digitalna obrada signala, Furijeov red, Furijeova transformacija, uzorkovanje, diskretna Furijeova transformacija, Diskretna kosinusna transformacija, brza Furijeova transformacija, prozorska funkcija, spektralno curenje.  
**PO, UDK**

**Čuva se:** U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu  
**ČU**

**Važna napomena:**  
**VN**

**Izvod:** Ovaj rad se bavi sa proučavanjem diskretizacije i modifikacije signala. U uvodnom delu se definišu funkcije na kojima se vrši proučavanje, odnosno signali. Zatim se uvodi Furijeov red i Furijeova transformacija, po-

tom se prikazuje način na osnovu koga se uzimaju uzorci signala. Nakon toga se uvodi definicija Diskretne Furijeove transformacije. Takođe proučavaju se transformacije poput Diskretne kosinusne transformacije i Brze Furijeove transformacije. Zatim se uvodi pojam prozorske funkcije i proučavaju se neke najpoznatije prozorske funkcije. Na kraju rada date su neke primene Brze Furijeove transformacije u digitalnoj obradi signala preko Matlab kodova.

**IZ**

**Datum prihvatanja teme od strane NN veća:** 11.01.2019.

**DP**

**Datum odbrane:**

**DO**

**Članovi komisije:**

**ČK**

**Predsednik:** dr Marko Nedeljkov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

**Član:** dr Jelena Aleksić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

**Mentor:** dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu



UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCE  
KEY WORDS DOCUMENTATION

**Accession number:**

ANO

**Identification number:**

INO

**Document type:** Monograph type

DT

**Type of record:** Printed text

TR

**Contents Code:** Master's thesis

CC

**Author:** Dušica Baljak

AU

**Mentor:** dr Nenad Teofanov

MN

**Title:** Diskretization and modification of signals with applications

TI

**Language of text:** Serbian (Latin)

LT

**Language of abstract:** s / en

LA

**Country of publication:** Republic of Serbia

CP

**Locality of publication:** Vojvodina

**LP**

**Publication year:** 2023

**PY**

**Publisher:** Author's reprint

**PU**

**Publication place:** Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

**PP**

**Physical description:** (6/106/0/3/49/0/0)(chapters/ pages/ quotations/  
tables/ pictures/ graphics/ enclosures)

**PD**

**Scientific field:** Mathematics

**SF**

**Scientific discipline:** Mathematical analysis

**SD**

**Subject/Key words:** Signals, Digital signal processing, Fourier series, Fourier transform, sampling, discrete Fourier transform, Discrete cosine transform, fast Fourier transform, window function, spectral leakage.

**SKW**

**Holding data:** The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

**HD**

**Note:**

**N**

**Abstract:** This master thesis studies signal sampling and modifications. The introductory part explains the functions on which the study is performed, ie signals. Then the Fourier series and the Fourier transform are introduced, and the way in which the signal samples are taken is shown. It also defines Discrete cosine transform and Fast Fourier transform. In the following chapter, the concept of the window function is introduced and some of the most famous window functions are studied. At the end of the master thesis, some applications of the Fast Fourier transform in digital signal processing

are applied in the Matlab program.

**AB**

**Accepted by the Scientific Board on:** 11.01.2019.

**ASB**

**Defended:**

**DE**

**Thesis defend board:**

**DB**

**President:** dr Marko Nedeljkov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad

**Member:** dr Jelena Aleksić, full professor at Faculty of Science in Novi Sad

**Mentor:** dr Nenad Teofanov, full professor at Faculty of Science in Novi Sad