UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Diana Šurjan

O nekim pristupima izučavanja grafova pomoću matrica

Master rad

Mentor:
dr Anna Slivková

Novi Sad, 2023

Sadržaj

Predgovor

U ovom master radu bavićemo se izučavanjem grafova pomoću matrica. Sadržaj rada je raspoređen u četiri dela.

Prvo poglavlje je uvodnog karaktera. Dat je kratak istorijski pregled u kojem se navode matematičari, koji su doprineli nastanku novih i daljem razvoju tada postojećih matematičkih teorija. Sadrži osnovne pojmove i definicije iz teorije grafova i linearne algebre koje se koriste u navedenoj problematici.

Drugo poglavlje se bavi grafovskim matricama. Upoznajemo se sa pojmovima matrica susedstva i matrica incidencije koji se na određeni način pridružuju grafu. Definišemo i matricu incidencije orijentisanih grafova. Dajemo pregled osnovnih osobina takvih matrica. Navodimo i dokazujemo teoreme vezane za rang i regularnost određenih grafovskih matrica.

U trećem delu fokusiramo se na spektralne osobine grafova. Upoznajemo se sa osnovnim pojmovima spektralne teorije grafova. Navedene su teoreme kao što su Rejlijev količnik, Teorema o preplitanju i Perron - Frobeniusova teorema. Na kraju ovog poglavlja izloženi su i spektri nekih poznatih specijalnih grafova.

U četvrtom poglavlju definišemo pojam jako regularnog grafa i neke njegove spektralne osobine. Navedena je i jedna važna teorema iz klasične teorije grafova - teorema o prijateljstvu, kao i njen dokaz.

⋆ ⋆ ⋆

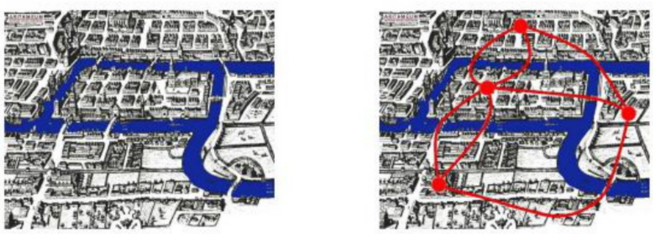
Ovim putem želela bih i da se zahvalim svom mentoru, dr Anni Slivkovoj na svim stručnim savetima, sugestijama i primedbama u toku pripreme ovog master rada. Takođe se zahvaljujem i članovima komisije, dr Ivici Bošnjaku i dr Samiru Zahiroviću.

Veliku zahvalnost dugujem i svojim roditeljima i svom mužu na podršci tokom osnovnih i master studija.

Novi Sad, april 2023. Diana Šurjan

1
Uvod

Teorija grafova je samostalna i važna oblast matematike. Grafovi se mogu koristiti za rešavanje mnogih praktičnih problema. Primenjujemo ih kod raznih problema optimizacije, kod postavljanja računarskih i električnih mreža i za modelovanje i rešavanje mnogih drugih složenih problema iz svakodnevnog života. Rad za koji se smatra da je prvi koristio teoriju grafova je rad *Leonarda Ojlera*, objavljen 1736. godine, u kojem je rešio problem *Sedam mostova Keningsberga*.
U vreme Ojlera, kroz grad Kenigsberg protiče reka Pregel koja deli grad na četri dela, međusobno povezanih sa sedam mostova kao što je prikazano na *slici 1.* Problem se sastoji u tome kako preći sve mostove a pritom ne preći ni jedan most dva ili više puta. Ojler je rešio problem tako što je posmatrao svaki deo grada kao celinu, odnosno kao čvor, dok je mostove posmatrao kao veze između čvorova. Na taj način je predstavio problem u vidu grafovske strukture. Tako analizirajući problem došao je do zaključka da ne postoji put kroz grad tako da se prođe preko svakog mosta tačno jednom.



Slika 1.

Nešto kasnije, 1845. godine rođen je rad *Gustafa Kirhofa* koji se odnosio na problem računa struje u električnom kolu. Nakon njega 1852. godine

Frensis Gatri izložio je problem četiri boje koji postavlja pitanje da li je moguće obojiti zemlje na geografskoj karti sa samo četiri boje tako da se ne pojave dve susedne zemlje obojene istom bojom. Ovaj problem su rešili *Kenet Apel* i *Volfgang Hejken* tek 1976. godine.

Deneš Kenig je 1936. godine objavio knjigu *Teorija konačnih i beskonačnih grafova* i ta godina se smatra godinom zasnivanja teorije grafova kao posebne matematičke discipline. Nekoliko decenija kasnije počinje i proučavanje grafova uz pomoć linearne algebre, preko karakterističnih korena i karakterističnih vektora matrica koje su im pridružene.

1.1 Osnovni pojmovi i osobine

U sledećem odeljku podsetićemo se na najvažnije definicije i teoreme iz teorije grafova i linearne algebre, koje će nas pratiti tokom rada.

Osnovna literatura koju smo koristili je [4, 8, 10, 11].

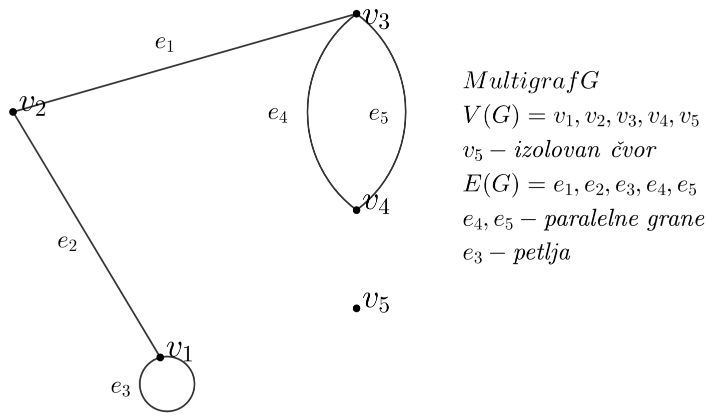
Graf G je uređeni par (V, E) gde je V neprazan konačan skup, a E je proizvoljan podskup skupa $V^{(2)} = \{\{u, v\} \subseteq V : u \neq v\}$[1]. Elemente skupa V zovemo čvorovi grafa, a elemente skupa E grane grafa. Ako je $e = \{u, v\}$ grana grafa, onda kažemo da su u i v *susedni čvorovi*, i da je grana e *incidentna* sa čvorovima u i v. Skup čvorova grafa G se označava sa $V(G)$, skup grana sa $E(G)$, broj čvorova sa $n(G)$, a broj grana sa $m(G)$. Ovako definisan graf nazivamo i prost graf. Takođe nekim slučajevima dozvoljavamo da različite grane budu incidentne sa istim parom čvorova, kao i da grana bude incidentna samo sa jednim čvorom.

Grane koje su incidentne sa istim parom čvorova nazivaju se *paralelne grane*.

Grana kod koje se početni i krajnji čvor poklapaju naziva se *petlja*.

Graf G je *prost* ukoliko u njegovom skupu grana, $E(G)$, nema ni petlji ni paralelnih grana. *Multigraf* je graf u čijem se skupu grana mogu pojavljivati paralelne grane i petlje.

[1]skup svih dvoelementnih podskupova skupa V



Slika 1.1.

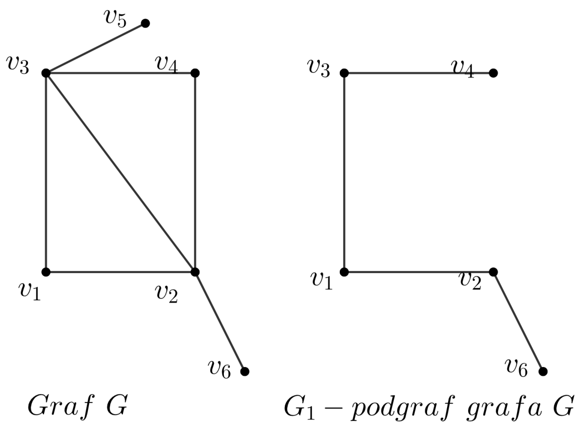
Stepen čvora v, u oznaci $d(v)$, je broj grana koje su incidentne sa njim. Sa $\delta(G)$ označavamo najmanji, a sa $\Delta(G)$ najveći stepen čvora u grafu G. Za čvor čiji je stepen 0 reći ćemo da je *izolovan.* Za čvor stepena 1 ćemo reći da je *viseći.*

Teorema 1.1. Zbir svih stepeni čvorova grafa jednak je dvostrukom broju njegovih grana.

Dokaz. Stepen čvora predstavlja broj grana koje su incidentne sa datim čvorom. Stoga, ako saberemo sve stepene čvorova, mi ćemo prebrojati sve grane i to svaku po dva puta. Time je tvrđenje pokazano. □

Graf je *regularan* ako su mu svi čvorovi istog stepena. Graf je *k-regularan* ako su mu svi čvorovi k-tog stepena.

Graf $H = (V_1, E_1)$ je *podgraf* grafa $G = (V, E)$, u oznaci $H \leqslant G$, ako je $V_1 \subseteq V$ i $E_1 \subseteq E$. Ako je H podgraf od G, onda je G *nadgraf* od H.



Slika 1.2.

Pokrivajući (razapinjući) podgraf H grafa G je podgraf čiji su čvorovi svi čvorovi grafa G tj. $V(H) = V(G)$.

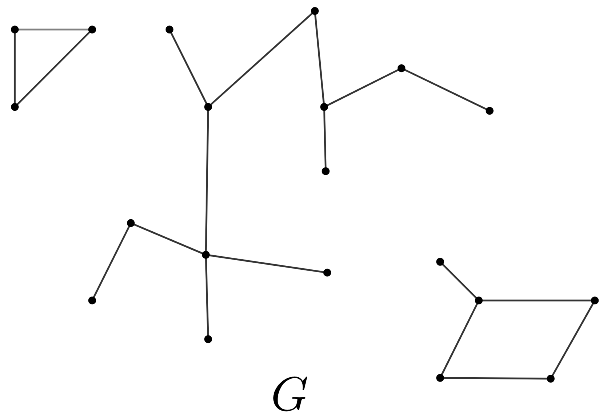
Neka je v čvor grafa G. *Uklanjanje čvora v iz grafa G* se vrši tako što se iz grafa G ukloni čvor v i sve grane koje su sa njim incidentne. Dobijen graf označavaćemo sa $G - v$.

Neka je e grana grafa G. *Uklanjanje grane e iz grafa G* se vrši tako što se iz grafa G ukloni grana e, a njeni krajevi ostaju u skupu čvorova grafa G. Dobijen graf označavaćemo sa $G - e$.

Put u grafu je niz različitih čvorova $v_1, ..., v_s$ tog grafa takav da su v_i i v_{i+1} susedni za sve $i \in 1, 2, \ldots, s-1$. Broj grana na putu zovemo *dužina puta*. *Rastojanje* između dva čvora u grafu je dužina najkraćeg puta koji ih povezuje. Rastojanje između čvorova u i v označavamo sa $d(u, v)$.

Graf je *povezan* ako za svaka dva čvora postoji put koji ih povezuje.

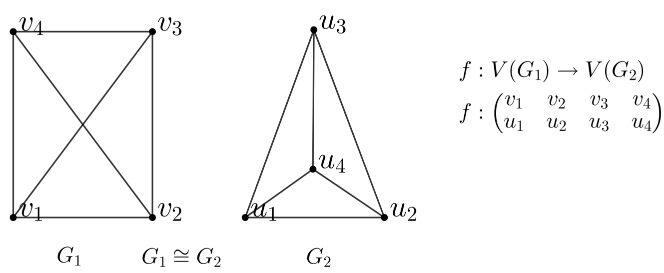
Komponenta povezanosti grafa je njegov podgraf koji je povezan i koji nije povezan putem ni sa jednim čvorom van ovog podgrafa.
Na primer, graf na slici 1.3 ima tri komponente povezanosti.



Slika 1.3.

Neka je graf $G = (V, E)$ povezan graf. *Ekscentricitet čvora* v je najveće rastojanje nekog drugog čvora u grafu od tog čvora: $ex(v) = max\{d(v, x) : x \in V\}$. *Poluprečnik grafa* G je minimalni ekscentricitet čvora u grafu: $r(G) = min\{ex(v) : v \in V\}$. *Dijametar grafa* G je maksimalni ekscentricitet čvora u grafu: $D(G) = max\{ex(v) : v \in V\}$.

Izomorfizam grafova $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ je bijekcija $\varphi : V_1 \to V_2$ takva da za svaka dva čvora $u \neq v$ grafa G_1 važi u je susedan sa v u G_1 ako i samo ako $\varphi(u)$ je susedan sa $\varphi(v)$ u G_2. Grafovi G_1 i G_2 su *izomorfni*, u oznaci $G_1 \cong G_2$, ako postoji izomorfizam $\varphi : V_1 \to V_2$.

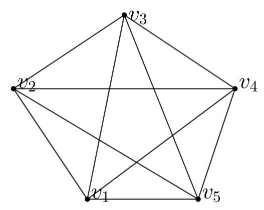


Slika 1.4.

Automorfizam grafa G je svaki izomorfizam $\varphi : G \to G$.

Sada ćemo navesti neke od specijalnih tipova grafova.

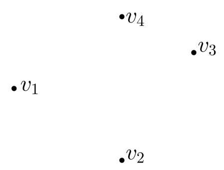
Kompletan graf sa n čvorova, u oznaci K_n, je graf kod koga je svaki čvor susedan sa svim ostalim.



K_5

Slika 1.5.

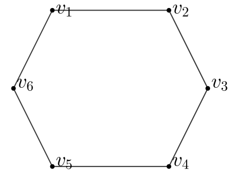
Prazan graf sa n čvorova, u oznaci $\overline{K_n}$, je graf koji nema nijednu granu.



$\bar{K}_4$

Slika 1.6.

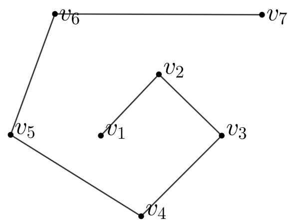
Kontura sa n čvorova, u oznaci C_n, je povezan graf koji ima sve čvorove stepena dva.



C_6

Slika 1.7.

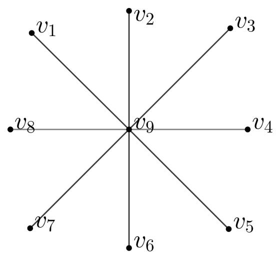
Put sa n čvorova, u oznaci P_n, je povezan graf koji ima sve čvorove stepena dva, sem dva koji su stepena jedan.



P_7

Slika 1.8.

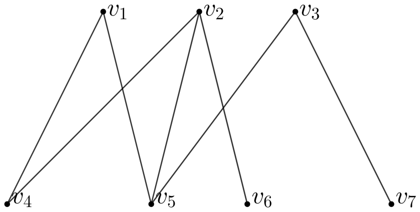
Zvezda sa n čvorova, u oznaci S_n, je graf koji ima jedan čvor koji je povezan sa svim ostalim i pored tih grana nema drugih.



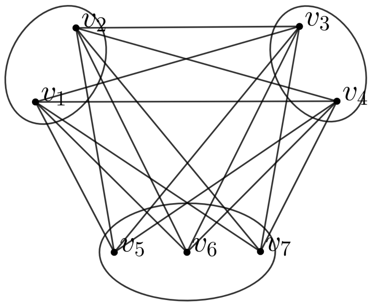
S_9

Slika 1.9.

Graf $G(X_1, X_2, ..., X_k)$ je k-partitan ako skup čvorova $V(G)$ delimo u k disjunktnih klasa $X_1, X_2, ..., X_k$. Svaka grana k-partitnog grafa spaja čvorove koji pripadaju različitim klasama. *Bipartitan graf* je vrsta k-partitnog grafa kod kojeg je skup čvorova podeljen u dve disjunktne klase. *Kompletan k-partitan graf* $K_{n_1,n_2,...,n_k}$ je k-partitan graf $G(X_1, X_2, ..., X_k)$, $|X_i| = n_i$, u kojem između svaka dva čvora iz različitih klasa postoji grana.



Slika 1.10.



Slika 1.11.

Bipartitni grafovi imaju vrlo korisnu karakterizaciju koja je data u narednom tvrđenju čiji se dokaz može naći u [10].

Teorema 1.2. Graf je bipartitan ako i samo ako ne sadrži podgraf koji je kontura neparne dužine.

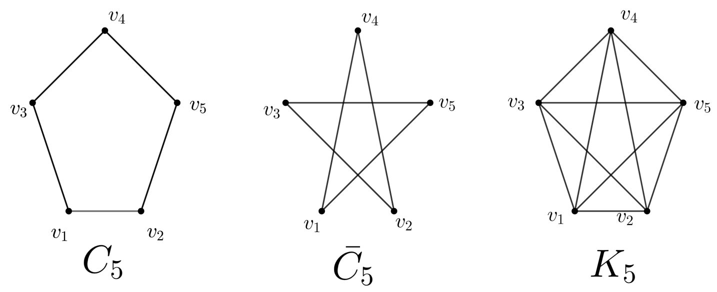
Stablo je povezan graf bez kontura. *Šuma* je graf bez kontura. Primetimo da je šuma je unija stabala.

Stablo koje se sastoji od svih čvorova i nekih grana grafa G je *pokrivajuće stablo.*

Definisaćemo i neke od operacija nad grafovima.

Za grafove $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ kažemo da su *disjunktni* ili *disjunktni po čvorovima* ako je $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Za grafove G_1 i G_2 kažemo da su *disjunktni po granama* ako je $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

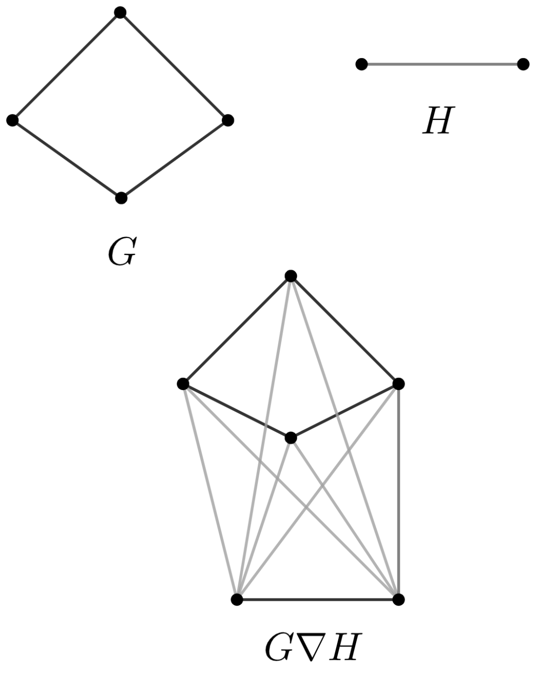
Komplement grafa G je graf $\overline{G}$ koji ima isti skup čvorova kao i graf G, a komplementaran skup grana, tj. $V(\overline{G}) = V(G)$, dok je $E(\overline{G}) = V^{(2)} \setminus E(G)$. Graf G je *samokomplementaran* ako je $G \cong \overline{G}$.



Slika 1.12.

Disjunktna unija grafova $G = (V_1, E_1)$ i $H = (V_2, E_2)$ je definisana samo u slučaju kada G i H imaju disjunktne skupove čvorova. Tada je to graf $G \cup H$ čiji skup čvorova je $V_1 \cup V_2$ a skup grana $E_1 \cup E_2$.

Potpuni proizvod grafova $G = (V_1, E_1)$ i $H = (V_2, E_2)$ je definisan samo u slučaju kada G i H imaju disjunktne skupove čvorova. Tada je graf $G \bigtriangledown H$ sa skupom čvorova $V_1 \cup V_2$ i skupom grana $E_1 \cup E_2 \cup \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$. To zapravo znači da $G \bigtriangledown H$ dobijamo tako što grafove stavimo jedan do drugog i onda spojimo svaki čvor jednog od njih sa svakim čvorom onog drugog.



Slika 1.13.

Kako ćemo se u nekim delovima ovog rada baviti i orijentisanim grafovima, onda ćemo ovde navesti i kratko objašnjenje za taj pojam.

Orijentisani graf ili *digraf* D je uređeni par $(V(D), E(D))$, gde je $V(D)$ konačan neprazan skup elemenata koje nazivamo čvorovima dok je $E(D)$ konačan skup uređenih parova elemenata iz $V(D)$ koje nazivamo granama.

Pojam grana kod orijentisanih grafova predstavlja uređeni par čvorova. Ukoliko je $e = (u, v) \in E(D)$ kažemo da je grana e orijentisana od u ka v. Čvor u naziva se *početak*, a čvor v *kraj* grane (u, v). Umesto (u, v) koristićemo oznaku uv. Činjenicu da grana ide od čvora u ka čvor v možemo označiti sa $u \to v$ i kažemo da je u *prethodnik* čvora v, a v *sledbenik* čvora u.

Broj grana koje izlaze iz čvora v zovemo *izlazni stepen čvora* v i označavamo sa $d^+(v)$, a broj grana koje ulaze u čvor v *ulazni stepen čvora* v i označavamo sa $d^-(v)$.

Na kraju podsetimo se i nekih pojmova iz linearne algebre.

Glavni pojam iz linearne algebre koji ćemo koristiti jesu matrice nad poljem realnih brojeva, tj. realne matrice.

Ako je A realna kvadratna matrica reda n, onda se matrica $\lambda E - A$ naziva *karakteristična matrica* matrice A.

Polinom po λ , $P(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ naziva se *karakteristični polinom* matrice A. Jednačina $\det(\lambda E - A) = 0$ naziva se *karakteristična jednačina* matrice A.

Karakteristični koreni matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jesu koreni njene karakteristične jednačine. S obzirom na to da je karakteristični polinom matrice A n-tog stepena, sledi da matrica A ima n karakterističnih korena nad poljem kompleksnih brojeva, gde svaki od njih brojimo onoliko puta kolika mu je višestrukost. Ovu višestrukost nazivamo algebarska višestrukost.

Skup svih karakterističnih korena matrice A naziva se *spektar* te matrice i označava sa $\sigma(A)$.

Ako su $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ karakteristični koreni matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, onda se $\rho(A) = max|\lambda_i|, i = 1, 2, ..., n$ naziva *spektralni radijus* matrice A.

Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora $V(F)$. *Karakteistični koren* transformacije A je svaki skalar $\lambda \in F$ za koji postoji vektor $x \in V(F), x \neq 0$, takav da je $A(x) = \lambda x$. Vektor x je *karakteristični vektor* transformacije A koji odgovara karakterističnom korenu λ.

Neka je $A \in F^{n,n}$. Ako su $x \in F^{n,n}$, $x \neq 0$ i $\lambda \in F$ takvi da važi $Ax = \lambda x$, onda je x karakteristični vektor matrice A, a λ karakteristični koren te matrice. S obzirom na izomorfnost strukture linearnih transformacija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora i strukture odogvarajućih matrica, sledi da je u konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru koordinatna kolona $[x]$ karakterističnog vektora x linearne transformacije A tog prostora karakteristični vektor matrice $[A]$ te transformacije, a karakteristični koreni linearne transformacije i njene matrice su isti.

Geometrijska višestrukost za karakteristični koren λ je jednaka $n - rang(\lambda E - A(G))$, gde je n red kvadratne matrice A. Algebarska višestrukost je uvek veća ili jednaka geometrijskoj višestrukosti.

Kako se u radu bavimo uglavnom neorijentisanim grafovima, matrice koje ćemo im pridruživati će biti simetrične i realne i sledeća teorema nam je od velikog značaja.

Teorema 1.3. Simetrična matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ima samo realne karakteristične korene, njihove algebarske i geometrijske višestrukosti su jednake i postoji skup karakterističnih vektora, reda n, koji čini ortonormiranu bazu[2] vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$.

[2]Baza $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ nekog vektorskog prostora V sa osobinom $|e_i| = 1$ i za svaka dva različita e_i i e_j je njihov skalarni proizvod jednak nuli, tj. $(e_i, e_j) = 0$.

2
Matrično predstavljanje grafova

Kako smo već na početku konstatovali, grafovi se mogu koristiti za rešavanje mnogih praktičnih problema. Takve probleme rešavamo najčešće pomoću računara. Iz tih razloga potrebno je na adekvatan način predstaviti grafove. Ne postoji neka univerzalna reprezentacija grafova koja bi rešila sve različite probleme u kojima se oni koriste. Jedan od uobičajenih načina reprezentacije grafova je pomoću matrica susedstva i matrica incidencije.

Koristili smo reference [1, 3, 7].

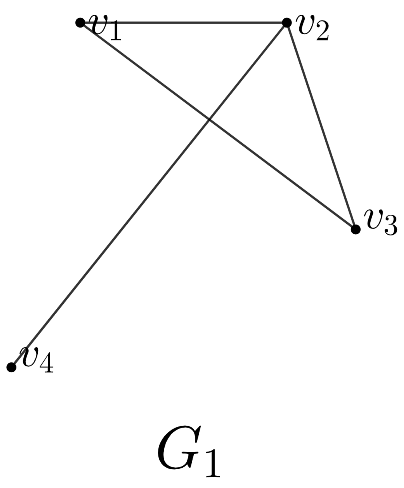
2.1 Matrica susedstva

Definicija 2.1. *Matrica susedstva* grafa G sa n čvorova je kvadratna matrica reda n, gde je a_{ij} broj grana od čvora v_i do čvora v_j, dok a_{ii} predstavlja broj grana koje počinju u čvoru v_i i završavaju se u istom.

Elementi matrice susedstva prostog grafa mogu biti samo 0 i 1. Elementi matrice multigrafa su prirodni brojevi i nula. Matrica susedstva neorijentisanog grafa je simetrična. Matricu susedstva grafa G označićemo sa $A(G)$.

Primer 2.1. Odrediti matricu susedstva sledećih grafova:

(a) prost graf G_1

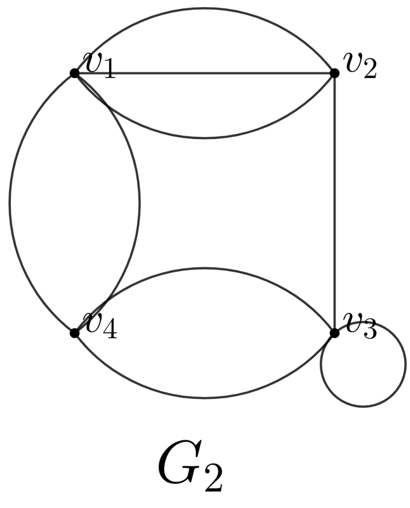


Slika 2.1.

Matrica susedstva prostog grafa G_1 je

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) multigraf G_2



Slika 2.2.

Matrica susedstva multigrafa G_2 je

$$A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

O matrici susedstva mogu se napraviti sledeća opšta zapažanja:

• Ako je graf G bez petlji, tada su svi elementi na glavnoj dijagonali matrice $A(G)$ jednaki nuli. U suprotnom ako postoji petlja u čvoru v_i tada elementu a_{ii} dodeljuje se vrednost 1.

• U grafu G, stepen čvora v_i je jednak zbiru elemenata u i-toj koloni, odnosno vrsti matrice $A(G)$.

• Graf G je nepovezan, sa komponentama G_1 i G_2, tada je matrica susedstva grafa G slična sa matricom:

$$A(G) = \left[\begin{array}{c|c} A(G_1) & 0 \\ \hline 0 & A(G_2) \end{array}\right],$$

gde su blokovi na dijagonali $A(G_1)$ i $A(G_2)$ matrice susedstva komponenata G_1 i G_2 redom, a blokovi van dijagonale su nula-matrice odgovarajućeg formata. Iz gornjeg predstavljanja se vidi da ne postoji grana koja povezuje čvorove iz G_1 sa čvorovima iz G_2.

• Ako je $A(G)$ matrica susedstva grafa G koja je oblika

$$A(G) = \left[\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right],$$

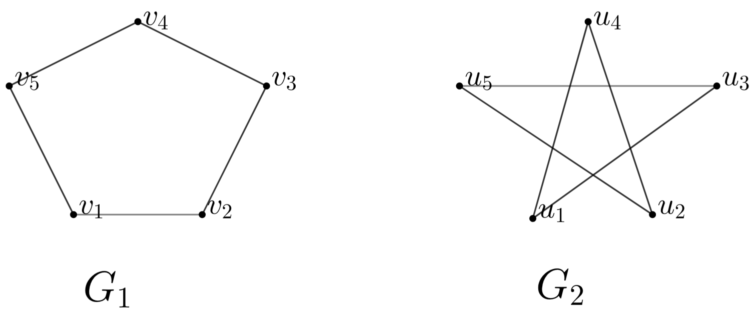
gde su B i C kvadratni blokovi a van dijagonale su nule, onda je G nepovezan graf i ima bar dve komponente čije su prateće matrice B i C.

• Za svaku kvadratnu, simetričnu i binarnu matricu A reda n postoji graf sa n čvorova, bez paralelnih grana, čija je matrica susedstva baš matrica A.

• Permutacija redova i odgovarajućih kolona podrazumeva preuređivanje čvorova u grafu. Primećujemo da su vrste i kolone matrice $A(G)$ raspoređene tako da odgovaraju istom redosledu čvorova. Prema tome, kada se dve vrste izmene u $A(G)$, odgovarajuće kolone se takođe zamenjuju.

Matrica susedstva grafa zavisi i od numeracije čvorova, ali se može pokazati da su sve matrice susedstva jednog grafa međusobno slične.

Primer 2.2. Na sledećoj slici imamo dva izomorfna grafa G_1 i G_2 (tj. imamo jedan isti graf sa dve različite numeracije čvorova). Potrebno je odrediti njihove matrice susedstva.



Slika 2.3.

Ovim grafovima odgovaraju različite matrice susedstva. To su

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

One su slične jer postoji matrica

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

takva da je $A(G_1) = X^{-1}A(G_2)X$. Ovde je X *permutaciona matrica* .

Teorema 2.1. Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$, $n = |V_1| = |V_2|$ su izomorfni ako i samo ako su njihove matrice susedstva $A(G_1)$ i $A(G_2)$ permutaciono slične, tj. ako i samo ako važi $A(G_2) = PA(G_1)P^{-1}$, gde je P

permutaciona matrica.

Dokaz. Neka su grafovi G_1 i G_2 izomorfni, tada matricu susedstva jednog grafa možemo dobiti permutacijom vrste i kolone matrice susedstva drugog grafa tj. $A(G_2) = PA(G_1)P^{-1}$, gde je P permutaciona matrica. Množenje $A(G_1)$ sa leve strane sa matricom P permutuje vrste, a množenje sa desne strane sa P^{-1} permutuje kolone matrice $A(G_1)$.
S druge strane, ako važi $A(G_2) = PA(G_1)P^{-1}$ onda postoji preslikavanje $f : G_1 \to G_2$ takvo da $e_i = (v_i, v_j) \in E_1$ (tj. $a_{ij} = 1$) ako i samo ako $e_i = (v_{f(i)}, v_{f(j)}) \in E_2$ (tj. $a_{f(i)f(j)} = 1$), što je i definicija izomorfizma grafova.
$\square$
Teorema koja sledi daje nam odgovor na pitanje koliki je broj šetnji dužine k između dva proizvoljna čvora.

Teorema 2.2. Neka je $A(G)$ matrica susedstva grafa $G = (V, E)$. Tada je broj šetnji dužine k između čvorova $v_i \in V$ i $v_j \in V$ jednak elementu $a_{ij}^{(k)}$, tj. elementu na poziciji (i, j) u matirci $A(G)^k$.

Dokaz. Tvrđenje ćemo dokazati matematičkom indukcijom po k.

Posmatrajmo matricu susedstva $A(G)$. Njena i-ta vrsta, $i = 1, 2, ..., n$, odgovara broju puteva dužine 1 od čvora v_i do svakog čvora grafa G, gde je na l-tom mestu broj puteva do čvora v_l. Kako je matrica grafa G simetrična, gornja pretpostavka važi i za kolone matrice $A(G)$. Kako od i-tog do l-tog čvora možemo stići na a_{il}, a od l-tog do j-tog čvora možemo stići na a_{lj} načina, sledi da od i-tog do j-tog čvora možemo stići na $\sum_{l=1}^{n} a_{il}a_{lj}$ načina, gde nam je dobijena suma broj različitih šetnji dužine 2, što je dalje jednak elementu matrice $A(G)^2$ na poziciji (i, j).

Pretpostavimo sad da tvrđenje važi za k i pokažimo da onda mora važiti i za $k + 1$.
Na osnovu indukcijske hipoteze znamo da elemenat $[A(G)^k]_{ij}$ matrice $A(G)^k$ predstavlja broj šetnji dužine k od i-tog do svakog l-tog čvora u vrsti. Kako u matrici $A(G)$ elementi j-te kolone predstavljaju broj šetnji dužine 1 do j-tog čvora od svakog l-tog čvora u koloni, dobijamo da element $\sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(k)}a_{lj}$ predstavlja broj šetnji dužine $k + 1$ od i-tog do j-tog čvora, tj. dobijamo da je ova suma elemenat $a_{ij}^{(k)}$ u matrici $A(G)^{k+1}$, što je i trebalo da pokažemo.

Na osnovu principa matematičke indukcije dobijamo da tvrđenje važi za svaki prirodan broj k. $\square$

Pomoću matrice susedstva grafa možemo odrediti i rastojanje između čvorova grafa.

Teorema 2.3. Neka je $G = (V, E)$ povezan graf. Rastojanje između čvorova $v_i \in V$ i $v_j \in V$ je k ako i samo ako je k najmanji prirodan broj za koji važi $[A(G)^k]_{ij} \neq 0$, gde je $A(G)$ matrica susedstva grafa G.

Dokaz. Neka je G povezan graf sa matricom susedstva $A(G)$ i neka su čvorovi v_i i v_j takvi da je dužina najkraćeg puta između njih $d(v_i, v_j) = k$ tj. broj puteva dužine $1, 2, ..., k-1$ između čvorova v_i i v_j je nula. Na osnovu teoreme 2.2. sledi $a_{ij} = a_{ij}^{(2)} = \cdots = a_{ij}^{(k-1)} = 0$. Znači k je najmanji prirodan broj za koji je $a_{ij}^{(k)} \neq 0$ tj. $[A(G)^k]_{ij} \neq 0$.

Sa druge strane, ako je k najmanji prirodan broj za koji važi $[A(G)^k]_{ij} \neq 0$ tj. $a_{ij} = 0, a_{ij}^{(2)} = 0, ..., a_{ij}^{(k-1)} = 0$, tada na osnovu teoreme 2.2 to znači da broj puteva dužine manje od k je nula. Sledi $d(v_i, v_j) = k$. $\square$

Posledica 2.1. Neka je $G = (V, E)$ povezan graf i neka je $A(G)$ matrica susedstva grafa G. Ako za čvorove $v_i \in V$ i $v_j \in V$ važi $d(v_i, v_j) = m$, onda su matrice $E, A(G), A(G)^2, ..., A(G)^m$ linearno nezavisne.

Dokaz. Bez umanjenja opštosti, neka je $i = 1$ i neka je $v_1 v_2 \dots v_j$ jedan put dužine m od čvora v_1 do v_j u grafu G. Dakle, $j = m + 1$. Primetimo da je za svako $k \leq m$

$$[A(G)^k]_{1k+1} > 0 \text{ i}$$
$$[A(G)^k]_{1l+1} = 0 \text{ za sve } l, k < l \leq m.$$

Da bismo dokazali da su matrice $E, A(G), A(G)^2, ..., A(G)^m$ linearno nezavisne, dovoljno je pokazati da je matrica

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ [A(G)]_{11} & [A(G)]_{12} & \cdots & [A(G)]_{1m+1} \\ [A(G)^2]_{11} & [A(G)^2]_{12} & \cdots & [A(G)^2]_{1m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [A(G)^m]_{11} & [A(G)^m]_{12} & \cdots & [A(G)^m]_{1m+1} \end{bmatrix}$$

regularna. Međutim, na osnovu gornjeg razmatranja, matrica M je donje trougaona sa elementima na dijagonali različitim od 0. Ovim je tvrđenje dokazano. $\square$

Teorema 2.4. Neka je $G = (V, E)$ graf sa n čvorova, $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, i neka je $A(G)$ matrica susedstva grafa G. Neka je data još i matrica $Y = A(G) + A(G)^2 + ... + A(G)^{n-1}$.
Graf G je povezan ako i samo ako su svi elementi van glavne dijagonale matrice Y različiti od nule tj. $y_{ij} \neq 0, i \neq j$.

Dokaz. Neka je G povezan graf i neka je dato $y_{ij} = [Y]_{ij} = [A(G)]_{ij} + [A(G)^2]_{ij} + ... + [A(G)^{n-1}]_{ij}$, gde $[A(G)^k]_{ij}$ označava elemenat matrice $A(G)^k$ na mestu (i, j). Kako, na osnovu teoreme 2.2, znamo da ovaj elemenat predstavlja broj šetnji dužine k između čvorova v_i i v_j dobijamo

$y_{ij} = \sum_{l=1}^{n-1} N_l$, gde je N_l broj šetnji dužine l između čvorova v_i i v_j.

Dalje sledi, da je y_{ij} jednak broju šetnji dužine manje od n, između čvorova v_i i v_j.

G je povezan graf, pa za svaki par $(i, j), i \neq j$ postoji šetnja iz v_i u v_j. Kako je G graf sa n čvorova, ta šetnja prelazi kroz najviše n čvorova, znači sigurno je dužine manje od n. Sledi, $y_{ij} \neq 0$ za svaki $(i, j), i \neq j$.

S druge strane, ako pretpostavimo $y_{ij} \neq 0$ za svaki $(i, j), i \neq j$ na osnovu teoreme 2.3 sledi da postoji bar jedna šetnja između čvorova v_i i v_j dužine manje od n. Proizilazi da je v_i povezan sa v_j. Kako smo $(i, j), i \neq j$, birali proizvoljno, sledi da je graf G povezan. $\square$

Naredne teoreme odnose se na određivanje broja grana, trouglova i kontura dužine 4 u grafu ako nam je data matrica susedstva.

Teorema 2.5. Neka je dat graf G i neka je broj grana u grafu označen sa e, a broj trouglova sa t. Ako je $A(G)$ matrica susedstva grafa G, onda važi

$$(a)\ trA(G) = 0,$$
$$(b)\ trA(G)^2 = 2e,$$
$$(c)\ trA(G)^3 = 6t.$$

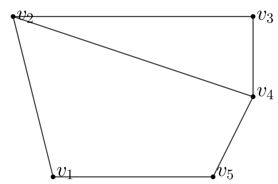
Dokaz.
(a) Kako su svi elementi na glavnoj dijagonali matrice susedstva jednaki nuli sledi $trA(G) = 0$.

(b) Elemenat $[A(G)^2]_{ii}$ predstavlja broj zatvorenih šetnji dužine 2 od čvora

v_i. Svaka zatvorena šetnja dužine 2 odgovara jednoj grani u grafu. Kako je $[A(G)^2]_{ii} = d(v)$, sledi $trA(G)^2 = 2e$.

(c) Da bismo dokazali treću tvrdnju, prvo konstatujemo da kroz svaku zatvorenu šetnju možemo prolaziti na dva različita načina. Znači, za svaki čvor v_i trougla, postoje dve zatvorene šetnje dužine 3 koje počinju u v_i i prolaze kroz trougao. Kako se svaki trougao sastoji od tri različita čvora, za svaki trougao u grafu možemo računati šest šetnji dužine 3. Kako je $\sum_{i=1}^{n}[A(G)^3]_{ii}$ jednaka broju šetnji dužine 3, u grafu G imamo $trA(G)^3 = \sum_{i=1}^{n}[A(G)^3]_{ii} = 6t$. $\square$

Primer 2.3. Neka je dat graf G sa 6 grana, koji ima $t = 1$ trouglova i neka je $A(G)$ matrica susedstva grafa G. Tada



G

Slika 2.4.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, trA(G) = 0$$

$$A(G)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, trA(G)^2 = 2e = 12$$

$$A(G)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}, trA(G)^3 = 6t = 6$$

Teorema 2.6. Neka je dat graf G i neka je $A(G)$ matrica susedstva grafa G. Broj kontura dužine 4 u grafu G je

$$q = \frac{1}{8}(trA(G)^4 + trA(G)^2 - 2\sum_{i=1}^{n} d_i^2),$$

gde je $d_1, d_2, ..., d_n$ niz stepena čvorova grafa G.

Dokaz. Dokazaćemo ekvivalentno tvrđenje tj.

$$trA(G)^4 = 8q - 2e + 2\textstyle\sum_{i=1}^{n} d_i^2.$$

Znamo, $trA(G)^4 = \sum_{i=1}^{n}[A(G)^4]_{ii}$. Elemenat $[A(G)^4]_{ii}$ predstavlja broj zatvorenih šetnji dužine 4 od čvora v_i. Postoje tri vrste takvih šetnji:
(a) Zatvorena šetnja u formi (v_i, x, v_i, y, v_i), gde su x i y čvorovi susedni sa čvorom v_i. Broj takvih šetnji je d_i^2, jer i čvor x i čvor y možemo da biramo na d_i načina.
(b) Zatvorena šetnja u formi (v_i, v_j, x, v_j, v_i), gde je čvor v_j u susedstvu sa čvorovima v_i i x, dok čvor x i čvor v_i su nesusedni. Broj takvih šetnji je $\sum\limits_j (d_j - 1)$, gde j prolazi kroz skup indeksa čvorova koji su susedni sa čvorom v_i.
(c) Šetnje kroz konture dužine 4 od čvora v_i. Za svaku takvu konturu možemo računati dve konture dužine 4, u oznaci $2q_i$, gde je q_i broj kontura dužine 4 Sledi,

$$[A(G)^4]_{ii} = 2q_i + d_i^2 + \sum_j (d_j - 1)$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
trA(G)^4 &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}(2q_i + d_i^2 + \sum\limits_j (d_j - 1)) \\
&= 8q + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(d_i^2 - d_i + \sum\limits_j d_j) \\
&= 8q - 2e + \textstyle\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum\limits_j d_j \\
&= 8q - 2e + \textstyle\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \\
&= 8q - 2e + 2\textstyle\sum_{i=1}^{n} d_i^2.
\end{aligned}$$

□

2.2 Matrica incidencije

U slučaju orijentisanih i neorijentisanih grafova imamo različite matrice incidencije.

2.2.1 Matrica incidencije neorijentisanog grafa

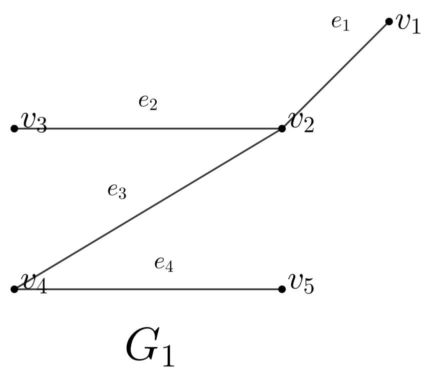
Definicija 2.2. Neka je $G = (V, E)$ neorijentisani graf kod koga je skup čvorova $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ i skup grana $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$. Tada je *matrica incidencije* grafa G, matrica $B(G) = [b_{ij}]_{n\times m}$ data sa

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{čvor } v_i \text{ je incidentan sa granom } e_j, \\ 0 & \text{čvor } v_i \text{ nije incidentan sa granom } e_j \ . \end{cases}$$

Kako su elementi matrica incidencije neorijentisanih grafova samo nule i jedinice, ove matrice ćemo posmatrati kao matrice nad poljem $GF(2)$.[3]

Primer 2.4. Odrediti matricu incidencije sledećih grafova:

(a) prost graf G_1



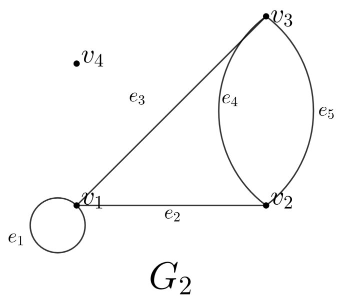
Slika 2.5.

[3]Polje nad skupom $\{0, 1\}$ i operacijama sabiranja i množenja po modulu 2.

Matrica incidencije prostog grafa G_1 je

$$B(G_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) multigraf G_2



Slika 2.6.

Matrica incidencije multigrafa G_2 je

$$B(G_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica incidencije neorijentisanog grafa je binarna matrica koja ima sledeće osobine:

• Ova matrica je matrica formata $n \times m$.

• Ako je G graf bez petlji, onda broj jedinica u i-toj vrsti matrice $B(G)$ jednak je broju grana incidentnih sa čvorom v_i, tj. stepenu čvora v_i.

• Ako je graf bez petlji, u svakoj koloni se nalaze po dve jedinice, što odgovara činjenici da je svaka grana incidentna sa dva čvora.

• U slučaju da postoji petlja, odgovarajuća kolona matrice $B(G)$ sadrži tačno jednu jedinicu.

• Vrsta matrice $B(G)$ čiji su svi elementi 0 odgovara čvoru koji je izolovan.

• Paralelne grane u grafu generišu identične kolone u matrici $B(G)$.

• Graf G je nepovezan sa komponentama G_1 i G_2, onda je matrica incidencije grafa G slična sa matricom

$$B(G) = \left[\begin{array}{c|c} B(G_1) & 0 \\ \hline 0 & B(G_2) \end{array}\right].$$

Iz gornje podele se vidi da ne postoji grana koja povezuje čvorove iz G_1 sa čvorovima iz G_2.

• Ako je matrica incidencije grafa G slična sa matricom oblika

$$B(G) = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right],$$

gde su B_1 i B_2 kvadratni blokovi, a van blokova su nule, onda je G nepovezan graf sa bar dve komponente.

• Zamenom mesta dve vrste preuređuje se numeracija čvorova, a zamenom mesta kolona dolazi do prenumeracije grana.

Teorema 2.7. Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$, $n = |V_1| = |V_2|$ su izomorfni ako i samo ako se njihove matrice incidencije $B(G_1)$ i $B(G_2)$ razlikuju samo po permutaciji vrsta, odnosno kolona.

Dokaz. Neka su grafovi G_1 i G_2 izomorfni .Tada postoji injektivno preslikavanje između čvorova i grana grafa G_1 i G_2 takvo da je očuvana relacija incidencije. Tada su matrice incidencije $B(G_1)$ i $B(G_2)$ ili identične ili se razlikuju samo po permutaciji vrsta, odnosno kolona. S druge strane, permutacijom vrsta i kolona u matrici incidencije grafa se dolazi samo do razmene numeracije čvorova i grana grafa.
□

Teorema 2.8. Neka je G povezan prost graf sa n čvorova. Rang matrice incidencije grafa G je tada $n - 1$.

Dokaz. Neka je G povezan graf sa n čvorova i m grana. Neka je $B(G)$ matrica incidencije grafa G i neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vektori vrste matrice

$B(G)$ definisane nad poljem $GF(2)$. Kako svaka vektor kolona matrice $B(G)$ sadrži tačno dve jedinice, suma svih vektora vrsta je nula po modulu 2. Znači

$$rang(B(G)) \leq n - 1 \ \ (1).$$

Kako je G povezan, matricu incidencije grafa G ne možemo napisati u obliku

$$B(G) = \left[\begin{array}{c|c} B(G_1) & 0 \\ \hline 0 & B(G_2) \end{array}\right].$$

gde se jedna komponenta sastoji od m vektora vrsta, a druga od $n - m$. Ne postoji kvadratna podmatrica reda m matrice incidencije $B(G)$ za $m < n-1$ takva da je suma tih m vrsta po modulu 2 jednak nuli. Znači

$$rang(B(G)) \geq n - 1 \ \ (2).$$

Iz (1) i (2) sledi $rang(B(G)) = n - 1$.
□

Teorema 2.9. Ako je G nepovezan graf sa k komponenata, tada

$$rang(B(G)) = n - k.$$

Dokaz. Neka je G nepovezan graf sa k komponenata. Tada matrica incidencije $B(G)$ ekvivalentna je matrici oblika

$$B(G) = \begin{bmatrix} B(G_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & B(G_2) & ... & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & ... & 0 & B(G_k) \end{bmatrix}$$

gde je $B(G_i)$ matrica incidencije i-te komponente. Iz teoreme 2.8 sledi da je $rang(B(G_i)) = n - 1$. Znači $rang(B(G)) = rang(B(G_1)) + rang(B(G_2)) + ... + rang(B(G_K)) = n_1 - 1 + n_2 - 1 + ... + n_k - 1 = n - k$.
□

Sledeće teoreme daju nam uslove za regularnost matrice incidencije.
Pre nego što formulišemo gore pomenute teoreme, definisaćemo pojam *redukovane matrice incidencije grafa.*

Definicija 2.3. Neka je G graf sa m grana i n čvorova, tada je format matrice incidencije $B(G)$ grafa G $n \times m$. Brisanjem bilo koje vrste matrice $B(G)$ dobijamo podmatricu formata $(n-1) \times m$ čiji je rang $n-1$. Znači te vektor vrste moraju biti linearno nezavisne. Odavde proizilazi da za opis grafa dovoljno je da bude poznato $n-1$ vrsta matrice incidencije grafa. Tako definisana podmatrica se naziva *redukovana matrica incidencije* grafa G, u oznaci B_f, i sadrži iste informacije kao i matrica incidencije grafa.

Teoreme 2.10. Graf reda n sa $n-1$ granom je stablo ako i samo ako je njegova redukovana matrica incidencije regularna.

Dokaz. Stablo sa n čvorova ima $n-1$ granu. Stablo je povezan graf. Redukovana matrica incidencije stabla sa n čvorova je kvadratna matrica reda $n-1$ i ranga $n-1$. Sledi da je ta matrica regularna.

S druge strane, graf sa n čvorova i $n-1$ granom, koji nije stablo, je nepovezan i rang matrice incidencije takvog grafa je manji od $n-1$. Znači redukovana matrica incidencije reda $n-1$ je regularna ako i samo ako je graf stablo sa n čvorova.
□

Teorema 2.11. Neka je G povezan graf sa n čvorova i neka je $B(G)$ matrica incidencije grafa G. Kvadratna podmatrica reda $n-1$ matrice $B(G)$ je regularna ako i samo ako sve $n-1$ grane koje odgovaraju kolonama te podmatrice predstavljaju pokrivajuće stablo grafa G.

Dokaz. Neka je G povezan graf sa n čvorova i m grana. U povezanom grafu broj grana je veći ili jednak sa $n-1$. Neka je $B(G)$ matrica incidencije grafa G sa n vrsta i m kolona.

Znamo da svaka kvadratna podmatrica reda $n-1$ od $B(G)$ je redukovana matrica incidencije nekog podgrafa H grafa G sa $n-1$ granom i obrnuto.

Znamo još da je kvadratna podmatrica matrice $B(G)$ regularna ako i samo ako je odgovarajući podgraf stablo. Stablo koje se sastoji od svih čvorova i nekih grana, u ovom slučaju $n-1$ grane, grafa G je pokrivajuće stablo.

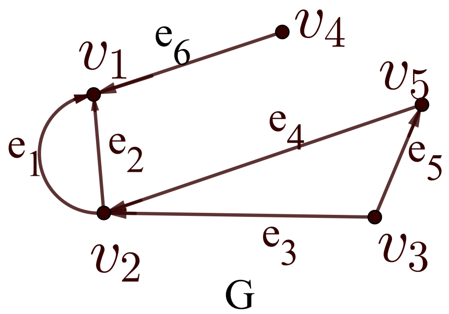
Sledi, kvadratna podmatrica reda $n-1$ je regularna ako i samo ako grane koje odgovaraju kolononama te matrice formiraju pokrivajuće stablo.
□

2.2.2 Matrica incidencije orijentisanog grafa

Definicija 2.4. Neka je $G = (V, E)$ orijentisani graf kod koga je skup čvorova $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ i skup grana $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$. Tada je *matrica incidencije* grafa G, matrica $F(G) = [b_{ij}]_{n\times m}$ nad poljem $\mathbb{R}$ data sa

$$f_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ako grana } e_j \text{ izlazi iz čvora } v_i, \\ 0 & \text{ako čvor } v_i \text{ i grana } e_j \text{ nisu susedni}, \\ -1 & \text{ako grana } e_j \text{ ulazi u čvor } v_i \ . \end{cases}$$

Primer 2.5. Odrediti matricu incidencije orijentisanog grafa.



Slika 2.7.

Matrica incidencije grafa G je

$$F(G) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Osobine matrice incidencije orijentisanog grafa:

- Ova matrica je isto matrica formata $n \times m$.

- Broj pojavljivanja -1 u i-toj vrsti matrice $F(G)$ jednak je broju grana koje ulaze u čvor v_i, tj. ulaznom stepenu čvora v_i.

• Broj pojavljivanja 1 u i-toj vrsti matrice $B(G)$ jednak je broju grana koje izlaze iz čvora v_i, tj. izlaznom stepenu čvora v_i.

• U svakoj koloni se nalaze po jedan element -1 i 1, što odgovara činjenici da svaka grana izlazi iz tačno jednog čvora i ulazi u tačno jedan čvor.

Sada ćemo navesti tvrđenja koje nam daju informacije o rangu i regularnosti matrice incidencije orijentisanog grafa.

Teorema 2.12. Ako je G povezan orijentisan graf sa n čvorova, onda rang matrice incidencije grafa G je $n-1$.

Dokaz. Neka je G povezan orijentisan graf sa n čvorova i m grana. Neka je $F(G)$ matrica incidencije grafa G, sa vektor vrstama označenih sa $F_1, F_2, ..., F_n$. Svaka kolona matrice $F(G)$ ima tačno jednu 1, tačno jednu -1, a ostali elementi su svi jednaki 0. Sledi $\sum_{j=1}^{n} F_j = 0$ što dalje znači da $rang(F(G)) \leq n-1$.

S druge strane, posmatrajmo $\sum_{j=1}^{k} F_j, k \leq n-1$. Kako je G povezan, matricu incidencije grafa G ne možemo napisati u obliku

$$F(G) = \left[\begin{array}{c|c} F(G_1) & 0 \\ \hline 0 & F(G_2) \end{array}\right]$$

gde se jedna komponenta sastoji od k vektora vrsta, a druga od $n-k$. Znači ne postoji kvadratna podmatrica reda $k \leq n-1$ matrice $F(G)$ takva da je $\sum_{j=1}^{k} F_j = 0$. Pokažimo sada da nijedna linearna kombinacija vektora $F_j, j = 1, 2, ..., k$ nije jednaka nuli.
Pretpostavimo suprotno, da je $\sum_{j=1}^{k} c_j F_j = 0$ linearna kombinacija, gde postoji bar jedan c_j različit od nule npr. $c_r \neq 0$, tada vrsta F_r ima nenula elemente u kolonama koji odgovaraju granama incidentnih sa čvorom v_r. Za svaku takvu kolonu postoji tačno jedna vrsta npr. F_s koja u istim kolonama ima iste nenula elemente samo sa suprotnim znakom. To implicira da $c_s = c_r$ za svako s za koji su čvorovi v_s i v_r susedni. Kako je G povezan graf važi $c_j = c$ za svako $j = 1, 2, ..., k$. Tada linearna kombinacija $c(\sum_{j=1}^{k} F_j)$ postaje nula. Dobili smo kontradikciju. Sledi $rang(F(G)) = n-1$. $\square$

Teorema 2.13. Ako je G nepovezan orijentisan graf sa k komponenata, tada $rang(F(G)) = n-k$.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu teoreme 2.9. Neka je G nepovezan graf sa k komponenata. Tada matrica incidencije $F(G)$ grafa G ima sledeći oblik

$$F(G) = \begin{bmatrix} F(G_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & F(G_2) & ... & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & ... & 0 & F(G_k) \end{bmatrix}$$

gde je $F(G_i)$ matrica incidencije i-te komponente. Iz teoreme 2.12 sledi da je $rang(F(G_i)) = n - 1$. Znači $rang(F(G)) = rang(F(G_1)) + rang(F(G_2)) + ... + rang(F(G_k)) = n_1 - 1 + n_2 - 1 + ... + n_k - 1 = n - k$.
□

Teorema 2.14. Neka je X proizvoljan skup grana povezanog grafa $G = (V, E)$ i $|X| = n - 1$. Neka je $F_X(G)$ kvadratna podmatrica reda $(n-1) \times (n-1)$ matrice incidencije grafa G. Kolone matrice $F_X(G)$ odgovaraju granama skupa X. $F_X(G)$ je regularna ako i samo ako podgraf $\langle X \rangle$ indukovan skupom grana grafa G je pokrivajuće stablo.

Dokaz. Neka je $F^{'}$ matrica incidencije koja odgovara grafu $\langle X \rangle$. Ako je $\langle X \rangle$ pokrivajuće stablo grafa G, tada se matrica $F_X(G)$ sastoji od vrsta matrice $F^{'}$. Kako je $\langle X \rangle$ povezan graf, $rang(F_X(G)) = n - 1$, znači $F_X(G)$ je regularna.
S druge strane, ako je $F_X(G)$ je regularna, onda u matrici $F^{'}$ postoji kvadratna podmatrica reda $n - 1$ koja je isto regularna i $rang(F^{'}) = n - 1$. Znači graf je $\langle X \rangle$ povezan i da predstavlja stablo. □

Za kvadratnu matricu kažemo da je *unimodularna* ako su njeni elementi celi brojevi i ako je njena determinanta jednaka 1 ili -1. Kvadratna matrica je *totalno unimodularna* ako je svaka njena kvadratna regularna podmatrica unimodularna.

Teorema 2.15. Neka je $F(G)$ matrica incidencije orijentisanog grafa G. Tada je matrica $F(G)$ totalno unimodularna.

Dokaz. Neka je $F(G)$ matrica incidencije orijentisanog grafa G. Pokazaćemo da determinanta svake podmatrice reda $k \times k$ matrice $F(G)$ je 0, 1 ili -1.

Tvrđenje ćemo dokazati matematičkom indukcijom po k.

Za $k = 1$ očigledno važi tvrđenje. Elementi matrice $F(G)$ su 0, 1 i -1.

Za $k-1$ pretpostavićemo da je tvrđenje istinito.

Neka nam je $F_K(G)$ kvadratna podmatrica reda k, matrice $F(G)$, tada imamo sledeće moguće slučajeve:
1. slučaj U matrici $F_K(G)$ postoji kolona čiji su svi elementi 0. Tada $detF_K(G) = 0$.

2. slučaj Ako svaka kolona matrice $F_K(G)$ ima tačno jedno pojavljivanje 1 i tačno jedno pojavljivanje -1, tada je $detF_K(G) = 0$.

3. slučaj Ako u matrici $F_K(G)$ postoji kolona koja sadrži tačno jedan nenula element 1 ili -1, tada računajući determinantu matrice $F_K(G)$ pomoću indukcijske hipoteze i gore pomenute kolone dobijamo da je $detF_K(G)$ 0,1 ili -1.
$\square$

3
O spektrima nekih klasa grafova

U ovom poglavlju bavićemo se proučavanjem grafova uz pomoć karakterističnih korena i karakterističnih vektora matrice koji se na određeni način pridružuje grafu. Najčešće korišćena grafovska matrica je matrica susedstva $A(G)$. Pre nego što krenemo sa izučavanjem spektralnih osobina grafova definisaćemo pojam *"spektar grafa"* i navešćemo par tvrđenja iz linearne algebre, neophodnih za analizu spektra matrice.

Koristili smo reference [1, 3, 5, 6, 9].

Definicija 3.1. Spektar grafa G je spektar njegove matrice susedstva $A(G)$.

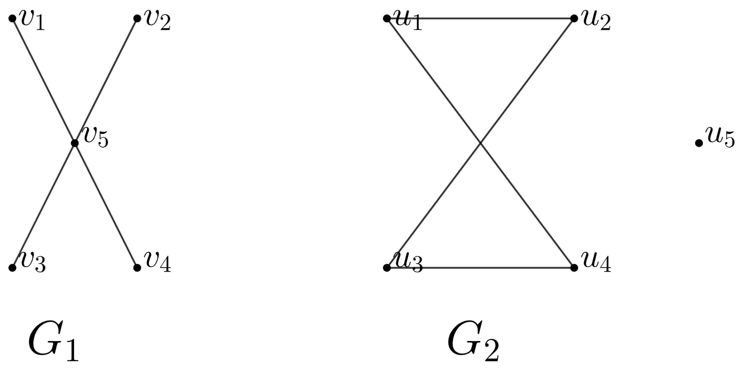
Spektar grafa je skup karakterističnih korena matrice susedstva, zajedno sa njihovim algebarskim višestrukostima. Ako su različiti karakteristični koreni matrice $A(G)$ takvi da važi $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k$, a njihove višestrukosti $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_k)$, tada spektar grafa G označavamo sa:

$$Spec_G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \ldots & m(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

Definicija 3.2. Grafovi sa istim spektrom nazivaju se *kospektralni.*

Dva grafa su *kospektralna* ako njihove matrice susedstva imaju iste spektre. Kospektralni grafovi ne moraju da budu izomorfni, ali izomorfni grafovi su uvek kospektralni.

Primer 3.1. Neka su dati grafovi G_1 i G_2. Oni su neizomorfni sa istim spektrom.



Slika 3.1.

Matrice susedstva grafova G_1 i G_2 su redom

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Odgovarajući karakteristični polinomi su:

$$P_{G_1}(\lambda) = det(\lambda E - A(G_1)) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^5 - 4\lambda^3$$

$$P_{G_2}(\lambda) = det(\lambda E - A(G_2)) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^5 - 4\lambda^3$$

Grafovi G_1 i G_2 imaju isti karakteristični polinom, znači oni imaju isti spektar tj.

$$Spec_{G_1} = Spec_{G_2} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Naredna teorema, poznata kao Courant-Fischer teorema, predstavlja min max i max min karakterizaciju karakterističnih korena.

Teorema 3.1. Neka je A realna simetrična matrica reda n sa karakterističnim korenima $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Tada za svako $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ važi

$$\lambda_k = \underset{U \subseteq \mathbb{R}^n; dim(U)=k}{max} \quad \underset{u \in U \setminus \{0\}}{min} \frac{u^T A u}{u^T u} = \underset{U \subseteq \mathbb{R}^n; dim(U)=n-k+1}{min} \quad \underset{u \in U \setminus \{0\}}{max} \frac{u^T A u}{u^T u}.$$

Dokaz. Dokazaćemo prvu jednakost. Neka je $x_1, x_2, ..., x_n$ ortonormiran skup karakterističnih vektora matrice A koji odgovaraju karakterističnim korenima $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Kako oni obrazuju bazu, za svaki vektor $y \in \mathbb{R}^n$ postoje realni koeficijenti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tako da je $y = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. U tom slučaju važi

$$yy^T = \Big(\textstyle\sum_{i=1}^n a_i x_i \Big)\Big(\sum_{i=1}^n a_i x_i \Big) = \sum_{i=1}^n a_i^2$$

$$yAy^T = \Big(\textstyle\sum_{i=1}^n a_i x_i \Big)\Big(\sum_{i=1}^n A a_i x_i \Big) = \Big(\sum_{i=1}^n a_i x_i \Big)\Big(\sum_{i=1}^n a_i \lambda_i x_i \Big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2.$$

Za svaki potprostor $U \subseteq \mathbb{R}^n$ dimenzije k važi da je njegov presek sa potprostorom indukovanim vektorima $\{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ netrivijalan. Postoji nenula vektor $u = \sum_{i=k}^n a_i x_i$ koji mu pripada. Na osnovu prethodnih jednačina važi

$$\frac{u^T A u}{u^T u} = \frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i a_i^2}{\sum_{i=k}^n a_i^2} \leq \frac{\sum_{i=k}^n \lambda_k a_i^2}{\sum_{i=k}^n a_i^2} = \lambda_k.$$

Znači, $\underset{u \in U \setminus \{0\}}{min} \dfrac{u^T A u}{u^T u} \leq \lambda_k$. Sa druge strane, ova vrednost se dostiže ako je U potprostor generisan sa prvih k karakterističnih vektora i to ako i samo ako je u karakteristični vektor koji odgovara λ_k. Sledi

$$\underset{U \subseteq \mathbb{R}^n; dim(U)=k}{max} \quad \underset{u \in U \setminus \{0\}}{min} \frac{u^T A u}{u^T u} = \lambda_k.$$

Druga jednakost se dokazuje analogno.

□

Sledeća teorema je direktna posledica teoreme 3.1.

Teorema 3.2. (Rejlijev količnik) Neka je A realna simetrična matrica reda n sa karakterističnim korenima $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Tada za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ važi Rejlijev odnos:

$$\lambda_1 \geq \frac{x^T A x}{x^T x} \geq \lambda_n,$$

pri čemu se leva (odnosno desna) jednakost dostiže ako i samo ako je x vektor karakteristični vektor koji odgovara λ_1 (odnosno λ_n).

Sledeća poznata teorema daje informacije o poretku karakterističnih korena matrice i njene podmatrice.

Teorema 3.3. (Teorema o preplitanju) Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ simetrična matrica. Neka je $A' \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ matrica koja se sastoji od prve $n-1$ kolone i prve $n-1$ vrste matrice A. Ako su karakteristični koreni za A i A' redom $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ i $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_{n-1}$ tada važi nejednakost

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n.$$

Kako matrica $A(G)'$ matrice susedstva grafa G odgovara indukovanom podgrafu $G-v$, gde je v čvor grafa G, onda možemo formirati sledeće tvrđenje.

Posledica 3.1. Ako je H indukovan podgraf grafa G, ako su $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_m$ karakteristični koreni grafa H i ako su $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ karakteristični koreni od G, tada $\lambda_{i+n-m} \leq \mu_i \leq \lambda_i$, za $i = 1, 2, \ldots, m$.

Teorema koja sledi daje nam informacije o najvećem karakterističnom korenu i njemu odgovarajućem karakterističnom vektoru nerazložive matrice. Pre nego što formulišemo samu teoremu, definisaćemo pojam nenegativne i nerazložive matrice.

Matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je *nenegativna*, u oznaci $A \geq 0$, ako su svi elementi matrice A nenegativni.

Matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}, n \geq 2$, je *razloživa* ako postoji permutaciona matrica $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ i prirodan broj $1 \leq r < n$, tako da je

$$PAP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

gde je $A_{11} \in \mathbb{R}^{r,r}$ i $A_{22} \in \mathbb{R}^{n-r,n-r}$. U suprotnom, ako takva permutaciona matrica ne postoji, za matricu A kažemo da je *nerazloživa*. U slučaju kada je $A \in \mathbb{R}^{1,1}$, A je razloživa matrica ako je njen jedini element 0, a nerazloživa u suprotnom.

Teorema 3.4. **(Perron-Frobenius)** Ako je A nenegativna matrica sa karakterističnim korenima $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, tada važi $|\lambda_1| \geq |\lambda_k|$, za $k = 1, 2, \ldots, n$ i može se odabrati odgovarajući karakteristični vektor $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ za λ_1 takav da je za sve $i \in \{1, 2, \cdots, n\}, x_i \geq 0$. Ako je A nerazloživa matrica, onda je vrednost algebarske višestrukosti korena λ_1 jedan i postoji odgovarajući karakteristični vektor $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ za λ_1 takav da je za sve $i \in \{1, 2, \cdots, n\}, x_i > 0$.

Matrica susedstva grafa G je nerazloživa, ako je G povezan graf. Prema tome, najveći karakteristični koren povezanog grafa ima algebarsku višestrukost jedan.

Odredimo sada vrednost karakterističnih korena nekih poznatijih vrsta grafova i njihovu višestrukost.

Prvo ćemo analizirati spektar kompletnog grafa. Sledeću tabelu smo dobili pomoću MATLAB-a tako što smo izračunali karakteristične korene odgovarajućih matrica susedstva. Sve vrednosti u radu dobijeni pomoću MATLAB-a su približne vrednosti.

K_n	$Spec_{K_n}$
K_4	$3; -1; -1; -1$
K_5	$4; -1,0001; -1,0001; -0,9999; -0,9999$
K_6	$5; -1,0009; -1,0003; -1,0003; -0,9992; -0,9992$
K_7	$6; -1,0024; -1,0024; -1; -1; -0.9976; -0.9976$
K_8	$7; -1,0091; -1,0057; -1,0057; -0,9979; -0,9979; -0,9918; -0,9918$

Tabela 1.

Iz tabele možemo primetiti da K_n ima jedan karakteristični koren jednak $n-1$ i preostali koreni su vrednosti jako blizu -1. U nastavku dajemo teoremu koja nam daje tačne vrednosti spektra kompletnih grafova. Odavde zapravo dobijamo da su koreni samo $n-1$ i -1 sa višestrukostima 1 i $n-1$, redom.

Teorema 3.5. Karakteristični polinom matrice susedstva kompletnog grafa K_n ima oblik $P(\lambda) = (\lambda + 1)^{n-1}(\lambda - n + 1)$, tj. njegov spektar je

$$Spec_{K_n} = \begin{pmatrix} -1 & n-1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dokaz. Matricu susedstva kompletnog grafa K_n napisaćemo kao razliku matrice J_n, čiji su svi elementi jedinice i jedinične matrice E_n.

$$A(K_n) = J_n - E_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Rang matrice J_n je jedan. Prema tome jedan karakteristični koren matrice J_n je n, a ostali karakteristični koreni su jednaki 0. Oduzimanjem jedinične matrice od J_n, i karakteristični koreni se smanjuju za 1.

$$A(K_n)x = (J_n - I_n)x = J_n x - x = \lambda x,$$

gde je x karakteristični vektor matrice $A(K_n)$.
Sledi, karakteristični koreni grafa K_n su $\lambda_1 = n - 1$ sa višestrukošću 1 i $\lambda_2 = -1$ sa višestrukošću $n - 1$. □

Teorema 3.6. Suma svih karakterističnih korena prostog grafa je jednaka nuli.

Dokaz.
Prvo ćemo dokazati da je trag kvadratne matrice jednak sumi svih njenih karakterističnih korena.
Neka je data kvadratna matrica A reda n, sa karakterističnim korenima $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, koja se može dijagonalizovati, tj. postoji regularna matrica P tako da je $A = PDP^{-1}$, gde je

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Kako za operator trag važi komutativnost, sledi

$$tr(A) = tr(PDP^{-1}) = tr(PP^{-1}D) = trD = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Pošto je trag matrice susedstva prostog grafa G nula, koristeći gore dokazanu činjenicu da je zbir karakterističnih korena kvadratne matrice jednak njenom tragu, zaključujemo da je suma svih karakterističnih korena grafa G jednaka nuli. □

Posmatrajmo sada tabelu 2 sa spektrima kompletnih bipartitnih grafova dobijenu pomoću MATLAB-a i odgovarajućih matrica susedstva. Možemo primetiti da je za ovakve grafove spektar simetričan. Štaviše, karakteristični koreni su a i $-a$ i preostale vrednosti su nule.

$K_{m,n}$	$Spec_{K_{m,n}}$
$K_{2,2}$	$-2; 2; 0; 0$
$K_{2,3}$	$-2,4495; 2,4495; 0; 0; 0$
$K_{2,4}$	$-2,8284; 2,8284; 0; 0; 0; 0$
$K_{3,3}$	$-3; 3; 0; 0; 0; 0$
$K_{3,4}$	$-3,4641; 3,4641; 0; 0; 0; 0; 0$
$K_{4,4}$	$-4; 4; 0; 0; 0; 0; 0; 0$

Tabela 2.

Dokažimo sada teoremu koja nam daje tačne vrednostni spektra kompletnih bipartitnih grafova.

Teorema 3.7. Ako je $K_{m,n}$ kompletan bipartitan graf, onda je njegov spektar:

$$Spec_{K_{m,n}} = \begin{pmatrix} \sqrt{mn} & -\sqrt{mn} & 0 \\ 1 & 1 & m+n-2 \end{pmatrix}.$$

Dokaz. Matrica susedstva $A(K_{m,n})$ ima oblik:

$$A(K_{m,n}) = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

gde je B matrica $m \times n$ čiji su svi elementi jednaki jedan.

Rang matrice $A(K_{m,n})$ je dva. Prema tome nulitet matrice $A(K_{m,n})$ je $m+n-2$, te je geometrijska višestrukost karakterističnog korena $\lambda = 0$ jednaka $m+n-2$. Zato $A(K_{m,n})$ ima bar $m+n-2$ karakterističnih korena jednakih nuli. Znači najviše dva karakteristična korena su različita od nule. Na osnovu teoreme 3.6 karakteristični koreni matrice $A(K_{m,n})$, koji su različiti od nule, imaju oblik λ i $-\lambda$.
Vrednost karakterističnog korena λ dobijamo rešavanjem karakteristične jednačine $A(K_{m,n})x = \lambda x$. Važi

$$A(K_{m,n})x = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m} \\ \vdots \\ x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m} \\ x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Sledi, vektor x možemo napisati pomoću n komponenti α i m komponenti β, te imamo:

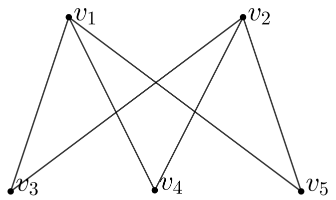
$$m\beta = \lambda\alpha \text{ i } n\alpha = \lambda\beta.$$

Iz čega sledi:

$$\lambda = \pm\sqrt{mn}.$$

$\square$

Primer 3.2. Odrediti spektar grafa $K_{2,3}$.



$K_{2,3}$

Slika 3.2.

Na osnovu teoreme 3.7 važi

$$Spec_{K_{2,3}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2\cdot 3} & -\sqrt{2\cdot 3} & 0 \\ 1 & 1 & 2+3-2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Definicija 3.3. Kvadratna matrica u kojoj su svi vektori vrsta sastavljeni od istih elemenata i svaki vektor vrsta je pomeren za jedan element udesno u odnosu na prethodni vektor vrsta se zove *matrica cirkulacije*, u oznaci C. Opšti oblik te matrice je

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & \dots & c_3 & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \dots & c_4 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \dots & c_0 & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \dots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični koreni matrice cirkulacije C određeni su sa:

$\lambda_j = c_0\omega^0 + c_{n-1}\omega^j + c_{n-2}\omega^{2j} + \ldots + c_2\omega^{(n-2)j} + c_1\omega^{(n-1)j}, j = 0, 1, \ldots, n-1,$

gde je $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$, *n-ti koren jedinice*[5], a i imaginarna jedinica.

Naredna teorema daje nam informacije o matrici susedstva i spektrima konture, ali posmatrajmo prvo spektar nekih konkretnih kontura.

C_n	$Spec_{C_n}$
C_4	$-2; 2; 0; 0$
C_5	$-1,618; -1,618; 0,618; 0,618; 2$
C_6	$-2; -1; -1; 1; 1; 2$
C_7	$-1,8019; -1,8019; -0,445; -0,445; 1,247; 1,247; 2$
C_8	$-2; -1,4142; -1,4142; 0; 0; 1,4142; 1,4142; 2$

Tabela 3.

Teorema 3.8. Karakteristični koreni konture C_n su:

$$\lambda_k = 2\cos(\frac{2k\pi}{n}),\ k = 1, 2, \ldots, n$$

sa višestrukošću 1 ako je $\lambda = \pm 2$ i sa višestrukošću 2 ako je $\lambda \neq \pm 2$.

Dokaz. Matrica susedstava $A(C_n)$ konture C_n je matrica cirkulacije i ima sledeći oblik

$$A(C_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[5]kompleksni broj koji daje 1 kada se podigne na neki pozitivni celobrojni stepen n

Karakteristični koreni matrice $A(C_n)$ su jednaki

$$\lambda_j = \omega^j + \omega^{(n-1)j} = \omega^j + \omega^{-j}, j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dalje sledi,

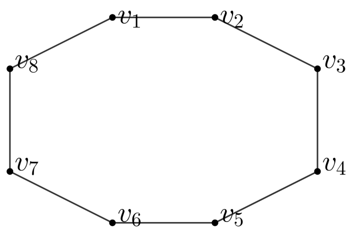
$$\lambda_j = \cos(\frac{2j\pi}{n}) + i\sin(\frac{2j\pi}{n}) + \cos(\frac{-2j\pi}{n}) + i\sin(\frac{-2j\pi}{n}), j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Kako je $\sin x$ neparna funkcija, a $\cos x$ parna funkcija dobijamo

$$\lambda_j = 2\cos(\frac{2j\pi}{n}) = Re\omega^j, j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

□

Primer 3.3. Odredi spektar konture C_8.



C_8

Slika 3.3.

Spektar konture C_8 odredićemo na osnovu teoreme 3.8.

$$\begin{gathered}
\lambda_0 = 2\cos 0 = 2, \\
\lambda_1 = 2\cos(\frac{2\pi}{8}) \approx \sqrt{2}, \\
\lambda_2 = 2\cos(\frac{4\pi}{8}) \approx 0, \\
\lambda_3 = 2\cos(\frac{6\pi}{8}) \approx -\sqrt{2}, \\
\lambda_4 = 2\cos(\frac{8\pi}{8}) \approx -2, \\
\lambda_5 = 2\cos(\frac{10\pi}{8}) \approx -\sqrt{2}, \\
\lambda_6 = 2\cos(\frac{12\pi}{8}) \approx 0, \\
\lambda_7 = 2\cos(\frac{14\pi}{8}) \approx \sqrt{2},
\end{gathered}$$

Znači spektar grafa C_8 je:

$$Spec_{C_8} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

U nastavku ćemo dokazati teoremu koja nam daje formulu za određivanje spektra puta, ali pre toga pogledajmo tablicu 4 sa izračunatim spektrima puteva.

P_n	$Spec_{P_n}$
P_4	$-1,618; -0,618; 0,618; 1,618$
P_5	$-1,7321; -1; 0; 1; 1,7321$
P_6	$-1,8019; 1,247; -0,445; 0,445; 1,247; 1,8019$
P_7	$-1,8478; -1,4142; -0,7654; 0; 0,7654; 1,4142; 1,8478$
P_8	$-1,8794; -1,5321; -1; -0,3473; 0,3473; 1; 1,5321; 1,8794$

Tabela 4.

Teorema 3.9. Spektar puta P_n je:

$$2\cos(\frac{k\pi}{n+1}),\ k = 1, 2, \ldots, n \text{ gde je svaki koren višestrukosti 1.}$$

Dokaz. Matrica susedstva grafa P_n je

$$A(P_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Njen karakteristični polinom je

$$det(\lambda E - A(P_n)) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & & \\ -1 & \lambda & -1 & & & \\ & -1 & \lambda & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & -1 \\ & & & & -1 & \lambda \end{vmatrix} = R_n(\lambda).$$

Razvijanjem determinante po kolonama, dobijamo

$R_n(\lambda)$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \\ -1 & \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \\ & & & -1 & \lambda \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda & -1 \\ 0 & & & -1 & \lambda \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \\ -1 & \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \\ & & & -1 & \lambda \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} - \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \\ -1 & \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \\ & & & -1 & \lambda \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$$= \lambda R_{n-1}(\lambda) - R_{n-2}(\lambda), n > 3$$

Odavde dobijamo rekurentnu vezu.

$$R_n(\lambda) = \lambda R_{n-1}(\lambda) - R_{n-2}(\lambda), n > 3$$

Primetimo da je gore navedena rekurentna veza u stvari *Čebiševljev polinom*[6] druge vrste za $x = \frac{\lambda}{2}$, tj. $R_n(\lambda) = U_n(\frac{\lambda}{2})$.
Čebiševljevi polinomi drugog reda mogu da se definišu i pomoću trigonometrijskih relacija:

$$U_n(\frac{\lambda}{2}) = \sin((n+1)\arccos(\frac{\lambda}{2}))$$

Rešavanjem karakteristične jednačine $R_n(\lambda) = U_n(\frac{\lambda}{2}) = 0$ dobijamo

$$\sin((n+1)\arccos(\frac{\lambda}{2})) = 0,$$

iz čega sledi

$$(n+1)\arccos(\frac{\lambda}{2}) = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Daljim sređivanjem dolazimo do rešenja, tj.

$$\lambda = 2\cos(\frac{k\pi}{n+1}), k \in \mathbb{Z}$$

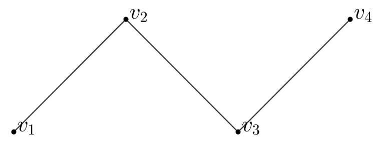
Kako nam treba samo prvih n rešenja, karakteristični koreni puta P_n su

[6] Definiše se formulama rekurzije: $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ i $U_{n+1} = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$

$$\lambda = 2\cos(\frac{k\pi}{n+1}), k = 1, 2, \ldots, n.$$

□

Primer 3.4. Odrediti spektar puta P_4.



P_4

Slika 3.4.

Na osnovu formule $2\cos(\frac{k\pi}{n+1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$ iz Teoreme 3.9. dobijamo:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 2\cos(\frac{\pi}{5}) \approx 1,61;\\
\lambda_2 &= 2\cos(\frac{2\pi}{5}) \approx 0,61;\\
\lambda_3 &= 2\cos(\frac{3\pi}{5}) \approx -0,61;\\
\lambda_4 &= 2\cos(\frac{4\pi}{5}) \approx -1,61;
\end{aligned}$$

gde je svaki koren višestrukosti jedan.

Teorema 3.10. Neka je dat graf G čiji je najveći stepen čvora $\Delta(G)$. Tada važi $\lambda_{max} \geq \Delta(G)$. Jednakost je zadovoljena ako i samo ako je graf G regularan.

Dokaz. Pretpostavimo da je stepen čvora v_i jednak $\Delta(G)$ i posmatrajmo vektor x koji na i-toj koordinati ima jedinicu, a ostali elementi su mu jednaki 0. Kako postoji i λ za koje je zadovoljena jednakost $A(G)x = \lambda x$, onda je vektor x karakteristični vektor, i to za $\lambda = \Delta(G)$. Prema tome važi $\lambda_{max} \geq \lambda$ tj. $\lambda_{max} \geq \Delta(G)$.

S druge strane, pretpostavimo da je λ maksimalni karakteristični koren regularnog grafa G i da je vektor $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n]^T$ karakteristični vektor koji mu odgovara. Prema *Perron-Frobeniusovoj teoremi* važi da maksimalnom karakterističnom korenu odgovara vektor sa pozitivnim koordinatama.

Prema tome svako $a_i, i = 1, 2, \ldots, n$ treba da bude veće od nule. Pošto je G regularan graf, onda svaka vrsta matrice susedstva ima tačno $\Delta(G)$ jedinica, pa sledi:

$$A(G)x = \lambda x$$

$$[a_1\Delta(G), a_2\Delta(G), \ldots, a_n\Delta(G)]^T = [a_1\lambda, a_2\lambda, \ldots, a_n\lambda]^T$$

$$\Delta(G) = \lambda.$$

□

Teorema 3.11. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ karakteristični koreni regularnog grafa G. Tada su karakteristični koreni grafa $\overline{G}$ sledeći: $n - 1 - r$ i $-\lambda_a - 1$, gde je r stepen čvora grafa G i $a \in \{2, 3, \ldots, n\}$.

Dokaz. Iz teoreme 3.10. sledi da je r jednak maksimalnom karakterističnom korenu grafa G. Odgovarajući karakteristični vektor z ima sve koordinate jednake 1. Neka su $\lambda_1 = r, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ karakteristični koreni grafa G i neka je x_a karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu $\lambda_a, a = 1, 2, \ldots, n$, tada vektori $x_1 = z, x_2, \ldots, x_n$ čine ortogonalnu bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ jer je $A(G)$ simetrična matrica.
Matrica susedstva komplementa grafa G ima sledeći oblik $A(\overline{G}) = J - E - A(G)$, gde je J kvadratna matrica čije su sve komponente jednake 1.
Na osnovu jednakosti $A(G)z = rz$ sledi:

$$A(\overline{G})z = (J - E - A(G))z = nz - z - rz = (n - 1 - r)z.$$

Kako je x_a ortogonalno sa z za $a = 2, 3, \ldots, n$, i matrica J se sastoji od n kolona vektora z dobijamo:

$$A(\overline{G})x_a = (J - E - A(G))x_a = 0 - x_a - \lambda_a x_a = -(\lambda_a + 1)x_a.$$

Prema tome, možemo zaključiti da $\bar{G}$ ima iste karakteristične vektore kao G, a karakteristični koreni grafa $\bar{G}$ su $n - 1 - r$ i $-(\lambda_a + 1), a = 2, 3, \ldots, n$. □

Teorema 3.12. Neka je dat kompletan p-partitan graf sa m čvorova u svakoj particiji, u oznaci $K_{m,\ldots,m}$ tada je njegov spektar

$$Spec_{K_{m,\ldots,m}} = \begin{pmatrix} p(m-1) & -m & 0 \\ 1 & p-1 & pm-p \end{pmatrix}.$$

Dokaz. Komplement grafa $K_{m,\ldots,m}$ se sastoji od p komponenata povezanosti K_m. Iz teoreme 3.5. znamo da je spektar grafa K_m:

$$Spec_{K_m} = \begin{pmatrix} -1 & m-1 \\ m-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na osnovu toga sledi da graf $\overline{K_{m,\ldots,m}}$ ima karakteristični koren $m-1$ sa višestrukošću p i karakteristični koren -1 sa višestrukošću $p(m-1)$. Na osnovu teoreme 3.11. sledi da su karakteristični koreni grafa $K_{m,\ldots,m}$:

$$\begin{gathered} m-1 = pm-1-\lambda_1 \implies \lambda_1 = pm-m \\ m-1 = -\lambda_i - 1 \implies \lambda_i = -m, i = 2,\ldots,p \\ -1 = -\lambda_j - 1 \implies \lambda_j = 0, j = p+1,\ldots,pm. \end{gathered}$$

□

Važno strukturno svojstvo grafa koje se može povezati sa spektrom je bipartitnost. Poslednja teorema ovog poglavlja je teorema koja pokazuje kako možemo bipartitni graf opisati pomoću njegovih karakterističnih korena. Da bismo u potpunosti razumeli gore pomenutu teoremu, prvo ćemo navesti i dokazati sledećih par tvrđenja. Na početku uvodimo definiciju elementarnog podgrafa grafa G.

Definicija 3.4. Podgraf H grafa G je *elementartni podgraf* ako svaka komponenta grafa H je ili grana ili kontura.

Teorema 3.13. Neka je G graf sa skupom čvorova $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ i sa skupom grana $E(G)$. Neka je dalje $A(G) = [a_{ij}]$ matrica susedstva grafa G. Tada

$$\det A(G) = \sum (-1)^{n-c_1(H)-c(H)} 2^{c(H)},$$

gde se sumira po pokrivajućim elementarnim podgrafovima H od G, $c_1(H)$ je broj komponenata grafa H koji odgovaraju granama, a $c(H)$ broj kontura u grafu H.

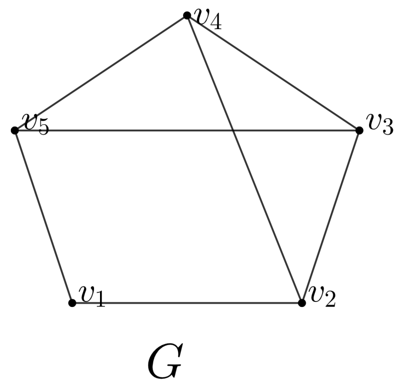
Dokaz. Determinanta matrice $A(G)$ ima oblik

$$\det A(G) = \sum_{\pi} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} \ldots a_{n\pi(n)},$$

gde je π permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Funkcija $sgn(\pi)$ je 1 ili -1 u zavisnosti od toga da li je π parna ili neparna. Znamo još da je $a_{i\pi(i)} = 0$ ako je $\pi(i) = i$ ili $\pi(i) = j$, za $v_i v_j \notin E(G)$. Takođe $a_{i\pi(i)} \neq 0$ ako i samo ako je π proizvod disjunktnih ciklusa dužine najmanje 2. Sledi, $sgn(\pi) a_{1\pi(1)} \ldots a_{n\pi(n)} = sgn(\pi) 1 \ldots 1 = sgn(\pi)$. Kako svaki ciklus dužine 2 u π odgovara jednoj grani u grafu G i svaki ciklus dužine veće od 2 u π odgovora konturi u grafu G, onda sledi da svaki nenula član sume odgovara jednom elementarnom podgrafu grafa G. Pretpostavimo da izraz $a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)}$ odgovara elementarnom pokrivajućem podgrafu H. Predznak permutacije π je (-1) na n minus broj kontura dužine najmanje 2 tj. $(-1)^{n-c_1(H)-c(H)}$. Dalje, svaka kontura se može povezati sa cikličkom permutacijom na dva različita načina što odgovara izrazu $2^{c(H)}$.

Na taj način dobili smo traženu formulu.
□

Primer 3.5. Posmatrajmo sad graf G:



Slika 3.5.

Pokrivajući elementarni podgrafovi grafa G su: H_1, H_2, H_3, H_4 za koje važi $V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = V(H_4) = V(G)$ i $E(H_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}$, $E(H_2) = \{v_1v_2, v_2v_4, v_4v_3, v_3v_5, v_5v_1\}$, $E(H_3) = \{v_1v_2, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_3\}$, $E(H_4) = \{v_1v_5, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_2\}$.

Na osnovu teoreme 3.13. dobijamo

$$\det A(G) = 2(-1)^{5-1-0}2^1 + 2(-1)^{5-1-1}2^1 = 0.$$

Dobijeni rezultat sledi i iz činjenice da su u matrici susedstva grafa G druga i peta vrsta identična.

Teorema 3.14. Neka je G graf sa skupom čvorova $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ i sa matricom susedstva $A(G)$, Dalje, neka je

$$P_G(\lambda) = \det(\lambda E - A(G)) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n$$

karakteristični polinom matrice $A(G)$. Tada važi $c_k = \sum(-1)^{c_1(H)+c(H)}2^{c(H)}$, gde sumiramo po svim elementarnim podgrafovima H od G sa k čvorova, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Dokaz. Primetimo da je c_k jednak sumi glavnih minora matrice $A(G)$ reda k, $k = 1, 2, \ldots, n$, sa predznakom $(-1)^k$. Na osnovu teoreme 3.13,

$$c_k = (-1)^k \sum(-1)^{k-c_1(H)-c(H)}2^{c(H)},$$

gde sumiramo po svim elementarnim pokrivajućim podgrafovima H od G sa k čvorova. Odakle odmah sledi tvrđenje teoreme.
□

Posledica 3.1. Neka je G graf sa skupom čvorova $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ i sa matricom susedstva $A(G)$. Dalje, neka je

$$P_G(\lambda) = \det(\lambda E - A(G)) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n$$

karakteristični polinom matrice $A(G)$. Pretpostavimo da važi $c_3 = c_5 = \ldots = c_{2k-1} = 0$. Tada u grafu G ne postoji neparna kontura dužine i, gde je $3 \leq i \leq 2k-1$ i broj kontura dužine $2k+1$ je $-\frac{1}{2}c_{2k+1}$.

Dokaz. Kako su $c_3 = c_5 = \ldots = c_{2k-1} = 0$, na osnovu teoreme 3.13 sledi da bilo koji elementarni podgraf grafa G, koji se sastoji od $2k+1$ čvorova, je kontura dužine $2k+1$. Dalje sledi

$$c_{2k+1} = \sum(-1)^{c_1(H)+c(H)}2^{c(H)},$$

gde sumiramo po svim konturama H u grafu G čija je dužina $2k+1$. Za takve konture važi $c_1(H) = 0$ i $c(H) = 1$. Prema tome sledi da je c_{2k+1} jednak (-2) puta broj kontura dužine $2k+1$.
□

Posledica 3.2. Koristeći oznake iz posledice 3.1, ako je $c_{2k+1} = 0$ za $k = 0, 1, \ldots,$ onda je G bipartitan.

Dokaz. Ako je $c_{2k+1} = 0$ za $k = 0, 1, \ldots,$ onda na osnovu posledice 3.1 u grafu G ne postoje konture neparnih dužina. Prema tome G mora da bude bipartitan.
□

Teorema 3.15. Neka je G bipartitan graf sa matricom susedstva $A(G)$. Ako je λ karakteristični koren matrice $A(G)$ višestrukosti k, onda je i $-\lambda$ karakteristični koren matrice $A(G)$ višestrukosti k.

Dokaz. Neka je G bipartitan i za njega važi $V(G) = X \cup Y, X \cap Y = \emptyset$, $|X| = |Y| = m$, dodajući izolovane čvorove, ako je potrebno. Ovo ne menja osobinu koju dokazujemo, jer se dodavanjem izolovanih čvorova $A(G)$ dopunjava kolonama i vrstama sa svim nulama. Sada matricu susedstva grafa G možemo zapisati u obliku

$$A(G) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B^T & 0 \end{array}\right],$$

gde je B kvadratna matrica reda m.
Neka je λ karakteristični koren matrice $A(G)$ sa karakterističnom vektorom $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Tada važi $A(G)v = \lambda v$ tj.

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B^T & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Iz toga sledi $By = \lambda x$ i $B^T x = \lambda y$. Važi nam i sledeća jednakost

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B^T & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -By \\ B^T x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix},$$

pa je $-\lambda$ karakteristični koren matrice $A(G)$ uz pridruženi karakteristični vektor $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$. Jasno je, da ako za λ postoji k linearno nezavisnih karakterističnih vektora, onda postoji i za $-\lambda$. Prema tome karakteristični koreni λ i $-\lambda$ imaju istu višestrukost čija je vrednost k.
□

Teorema 3.16. Neka je G graf sa skupom čvorova $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ i sa skupom grana $E(G)$. Neka je dalje $A(G)$ matrica susedstva grafa G. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(a) G je bipartitan;
(b) ako je

$$P_G(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n$$

karakteristični polinom matrice $A(G)$, onda važi $c_{2k+1} = 0, k = 0, 1, \ldots;$
(c) spektar od G je simetričan u odnosu na nulu.

Dokaz. Implikacija $(a) \implies (c)$ važi na osnovu teoreme 3.15.

Dokazujemo sad da $(c) \implies (b)$. Pretpostavimo da važi tvrđenje (c), onda se vrednost karakterističnog polinoma ne menja ako zamenimo λ sa $-\lambda$. Drugim rečima, karakteristični polinom matrice $A(G)$ je parna funkcija za koju važi da su svi koeficijenti neparne numeracije $c_3, c_5, \ldots$ jednaki nuli. Prema tome sledi (b).

Na kraju, na osnovu posledice 3.2 važi i implikacija $(b) \implies (a)$.

Time smo i završili dokaz teoreme.
$\square$

4 Spektralne osobine jako regularnih grafova

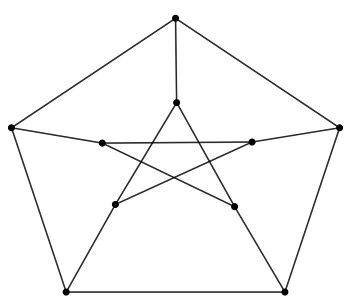
U ovom poglavlju bavićemo se jako regularnim grafovima. Navešćemo osnovne definicije, tvrđenja i primere vezane za jako regularne grafove, analiziraćemo njihov spektar i dokazaćemo teoremu o prijateljstvu.

Koristili smo reference [1, 7].

Definicija 4.1. Jako regularan graf sa parametrima (n, k, a, c) je svaki k-regularan graf G sa n čvorova za koji važi:

(a) nije ni kompletan graf, niti prazan graf;
(b) za svaka dva susedna čvora grafa G važi da je broj njihovih zajedničkih suseda jednak a;
(c) za svaka dva nesusedna čvora grafa G važi da je broj njihovih zajedničkih suseda jednak c.

Primer 4.1. Petersenov graf sa parametrima $(10, 3, 0, 1)$ je jedan jako regularan graf.



Petersonov graf sa parametrima (10, 3, 0, 1)

Slika 4.1.

Teorema 4.1. Neka je G jako regularan graf sa parametrima (n, k, a, c) i neka je $A(G)$ matrica susedstva grafa G. Tada važi

$$A(G)^2 = kE + aA(G) + c(J - E - A(G)),$$

gde je E jedinična matrica, a J kvadratna matrica čiji su svi elementi jednaki 1.

Dokaz. Svaki elemenat na glavnoj dijagonali matrice $A(G)^2$ je jednak k. Na osnovu teoreme 2.2 elemenat matrice $A(G)^2$ na poziciji (i, j) je jednak broju šetnji dužine 2 iz v_i u v_j. Kako je G jako regularan graf, u zavisnosti od toga da li su čvorovi v_i i v_j susedni ili nesusedni, taj broj će biti jednak ili a ili c. Prema tome, sledi

$$A(G)^2 = kE + aA(G) + c(J - E - A(G)).$$

□

Teorema 4.2. Neka je G graf koji nije ni kompletan, niti prazan i neka je $A(G)$ matrica susedstva grafa G. Tada ako se $A(G)^2$ može napisati kao linearna kombinacija matrice $A(G)$, E i J, onda je G jako regularan graf.

Dokaz. Pretpostavimo da se matrica $A(G)^2$ može napisati kao linearna kombinacija matrice $A(G)$,E i J. Znamo još da je $[A(G)^2]_{ij}$ broj zajedničkih suseda čvorova v_i i v_j, a $[A(G)^2]_{ii}$ jednak stepenu čvora v_i. Prema tome, na osnovu definicije jako regularnog grafa sledi tvrđenje.
□

Teorema 4.3. Neka je G jako regularan graf sa parametrima (n, k, a, c) i neka je $A(G)$ matrica susedstva grafa G. Tada svaki karakteristični koren matrice $A(G)$ ili je jednak k ili $\frac{1}{2}(a - c \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4(k - c)})$.

Dokaz. Kako je G k-regularan graf znamo da je k njegov karakteristični koren sa karakterističnim vektorom $\mathbf{1} = [1, 1, \ldots, 1]^T$. Neka je $\mu \neq k$ isto karakteristični koren matrice $A(G)$ sa odgovarajućim karakterističnim vektorom y, tako da je $A(G)y = \mu y$. Primetimo da je $y^T\mathbf{1} = 0$. Na osnovu teoreme 4.1 važi

$$A(G)^2 = kE + aA(G) + c(J - E - A(G)).$$

Stoga sledi,

$$A(G)^2 y = ky + aA(G)y + c(-y - A(G)y).$$

Dalje,

$$\mu^2 = k + a\mu + c(-1-\mu).$$

Sređivanjem dobijamo,

$$\mu^2 - (a-c)\mu - (k-c) = 0.$$

Rešenje ove poslednje jednačine je upravo $\mu = \frac{1}{2}(a-c\pm\sqrt{(a-c)^2+4(k-c)})$, što smo i tražili.

□

Teorema 4.4. Neka je G povezan, jako regularan graf sa parametrima (n,k,a,c). Tada su brojevi

$$m_1 = \frac{1}{2}\Big(n-1+\frac{(n-1)(c-a)-2k}{\sqrt{(a-c)^2+4(k-c)}}\Big)$$

i

$$m_2 = \frac{1}{2}\Big(n-1-\frac{(n-1)(c-a)-2k}{\sqrt{(a-c)^2+4(k-c)}}\Big)$$

nenegativni celi brojevi.

Dokaz. Na osnovu teoreme 4.2 karakteristični koreni grafa G su k i $\frac{1}{2}(a-c\pm\sqrt{(a-c)^2+4(k-c)})$. Kako je G povezan graf, vrednost višestrukosti karakterističnog korena k je 1. Neka je vrednost višestrukosti ostala dva karakteristična korena m_1 i m_2. Važi

$$1 + m_1 + m_2 = n.$$

Dalje, na osnovu teoreme 3.6 sledi

$$k+\frac{m_1}{2}(a-c+\sqrt{(a-c)^2+4(k-c)})+\frac{m_2}{2}(a-c-\sqrt{(a-c)^2+4(k-c)}) = 0.$$

Korišćenjem smene $m_2 = n-1-m_1$ dobijamo

$$k+\frac{m_1}{2}(a-c+\sqrt{(a-c)^2+4(k-c)})+\frac{n-1-m_1}{2}(a-c-\sqrt{(a-c)^2+4(k-c)}) = 0.$$

Izražavanjem m_1 sledi

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{\sqrt{(a-c)^2+4(k-c)}}\Big(-k-\frac{n-1}{2}(a-c-\sqrt{(a-c)^2+4(k-c)})\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(n-1+\frac{(n-1)(c-a)-2k}{\sqrt{(a-c)^2+4(k-c)}}\Big). \end{aligned}$$

Na kraju ubacivanjem gornjeg izraza u jednačinu $m_2 = n - 1 - m_1$ možemo izraziti i m_2

$$m_2 = \frac{1}{2}\Big(n - 1 - \frac{(n-1)(c-a) - 2k}{\sqrt{(a-c)^2 + 4(k-c)}}\Big).$$

Dokazali smo da m_1 i m_2 odgovaraju višestrukostima karakterističnih korena jako regularnog grafa G. Prema tome oni moraju biti nenegativni celi brojevi.
□

Teorema 4.5. Neka je G povezan graf. G je jako regularan graf ako i samo ako je regularan i ima najviše tri različita karakteristična korena.

Dokaz. Neka je $A(G)$ matrica susedstva grafa G. Matricu susedstva jako regularnog grafa, sa parametrima (n, k, a, c), možemo napisati u obliku

$$A(G)^2 = kE + aA(G) + c(J - E - A(G)).$$

Najveći karakteristični koren matrice $A(G)$ je k. Svi ostali karakteristični koreni su rešenje jednačine

$$\lambda^2 - (a-c)\lambda - (k-c),$$

Prema tome, broj različitih karakterističnih korena je najviše 3.
Obratno, pretpostavimo da je graf G k-regularan i ima najviše tri različita karakteristična korena. Kako je G k-regularan graf znamo da je k jedan od karakterističnih korena sa karakterističnim vektorom $\mathbf{1} = [1, 1, \ldots, 1]^T$. Neka su ostala dva karakteristična korena λ_1 i λ_2. Tada je

$$B = A(G)^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)A(G) + \lambda_1\lambda_2 E$$

matrica za koju važi $Bx = 0$, gde je x proizvoljan karakteristični vektor matrice $A(G)$ takav $x \neq \alpha\mathbf{1}, \alpha \in \mathbb{R}$.
Dalje, $B\mathbf{1} = d\mathbf{1}$, za $d = (k - \lambda_1)(k - \lambda_2)$ i prema tome $B = \frac{d}{n}J$.
Sledi,

$$A(G)^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)A(G) - \lambda_1\lambda_2 E + \tfrac{d}{n}J$$

Znači vrednost elementa $[A^2(G)]_{ij}$, $i \neq j$, zavisi samo od toga, da li su čvorovi v_i i v_j susedni ili nisu. Na osnovu toga proizilazi da je graf G jako regularan.
□

Teorema 4.6. (Teorema o prijateljstvu) Neka je G graf u kojem svaka dva različita čvora imaju tačno jednog zajedničkog suseda. Tada u grafu G postoji čvor koji je susedan sa svim ostalim čvorovima.

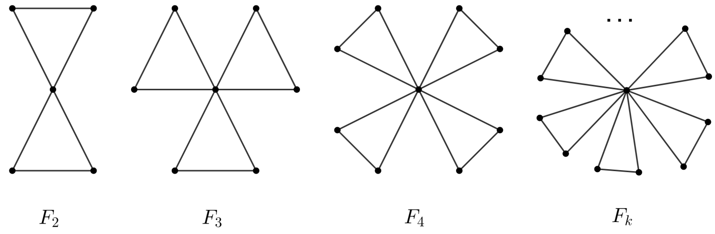
Dokaz. Prvo dokazujemo da svaka dva nesusedna čvora grafa G imaju isti stepen.

Pretpostavimo da su u i v nesusedni čvorovi. Za svaki čvor w koji je susedan sa čvorom u i nesusedan sa v postoji čvor w' koji je susedan i sa w i sa v. Za bilo koja dva različita suseda čvora u, npr. w_1 i w_2, čvorovi w_1' i w_2' takođe moraju biti različiti, inače bi čvorovi w_1 i w_2 imali dva zajednička suseda. Znači čvor v ima barem toliko susednih čvorova koliko ima i čvor u tj. $d(u) \leqslant d(v)$. Analogno se dobija i $d(v) \leqslant d(u)$, te sledi $d(u) = d(v)$.

Ako u grafu G postoji čvor v čiji je stepen jedinstven, tada zbog prethodno pokazanog taj čvor mora da bude povezan sa svim ostalim čvorovima. S time smo dokazali tvrđenje.

Pretpostavimo sad da ne postoji čvor jedinstvenog stepena u grafu G.
Ako u grafu G postoje čvorovi u i v takvi da $d(u) \neq d(v)$, tada mora da postoje i čvorovi x i y za koje važi $d(u) = d(x)$ i $d(v) = d(y)$. Proizilazi da su i x i u zajednički susedi čvorova v i y, što je kontradikcija.
Dakle, graf mora biti regularan. Ako je regularan, zbog uslova teoreme mora biti i jako regularan i važi $a = c = 1$. Na osnovu teoreme 4.4 broj $m_1 - m_2 = \dfrac{k}{\sqrt{k-1}}$ je ceo. Stoga $k - 1$ treba da deli k^2 što važi samo za $k = 2$. Ako je $k = 2$, onda kako svaka dva nesusedna čvora imaju jednog zajedničkog suseda, važi da je G kompletan graf, te je $G = K_3$. K_3 ispunjava uslove tvrđenja, te je dokaz završen. $\square$

Upravo zbog ove teoreme klasu grafova koji proizilaze iz ovakvih osobina nazivamo grafovima prijateljstva.



Slika 4.2.

Graf prijateljstva F_k, $k > 0$, dobija se od k trouglova tako da svi imaju jedno zajedničko teme. Ovi grafovi imaju osobinu da svaka dva čvora imaju tačno jednog zajedničkog suseda. Graf prijateljstva F_k ima tačno $2k+1$ čvorova, k trouglova i $3k$ grana. On se može predstavitii kao potpuni proizvod grafa K_1 i grafa koji je disjunktna unija k kopija K_2 tj. $F_k = K_1 \nabla k K_2$.

Odredimo sad spektar grafova prijateljstva. Pomoću MATLABA-a dobili smo tabelu vrednosti spektra F_n za $n \in \{2,3,4,5,6\}$. Možemo primetiti da se dosta vrednosti nalazi blizu 1 i -1.

F_n	$Spec_{F_n}$
F_2	$-1,5616; -1; -1; 1; 2,5616$
F_3	$-2; -1; -1; -1; 1; 1; 3$
F_4	$-2,3723; -1,001; -1,001; -0,9999; -0,9999; 1; 1; 3,3723$
F_5	$-2,7016; -1,008; -1,008; -0,9997; -0,9997; -0,999;$
	$0,999; 1; 1; 1,001; 3,7016$
F_6	$-3; -1,041; -1,002; -1,002; -0,998; -0,998; -0,996;$
	$0,9993; 0,9998; 0,9998; 1,0006; 1,0006; 4$

Tabela 5.

Da bismo izračunali tačne vrednosti spektra grafova prijateljstva pomoći će nam naredna teorema za čiji dokaz čitalaca može pogledati u [6, teorema 2.8].

Teorema 4.7. Neka su G i H prosti grafovi sa m i n čvorova, redom i pri tome su regularnosti redom r i s. Tada je karakteristični polinom grafa $G \nabla F$:

$$P_{G\nabla H}(\lambda) = \frac{P_G(\lambda)P_H(\lambda)}{(\lambda - r)(\lambda - s)}\Big((\lambda - r)(\lambda - s) - mn\Big).$$

Sada možemo dokazati narednu teoremu.

Teorema 4.8. Spektar grafa prijateljstva F_k je:

$$Spec_{F_k} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2} & 1 & -1 & \frac{1-\sqrt{1+8k}}{2} \\ 1 & k-1 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Dokaz. Kako važi $F_k = K_1 \nabla kK_2$, imamo

$$P_{F_k}(\lambda) = \frac{P_{K_1}(\lambda)P_{kK_2}(\lambda)}{(\lambda-0)(\lambda-1)}\Big((\lambda-0)(\lambda-1)-2k\Big) = \frac{\lambda P_{kK_2}(\lambda)}{\lambda(\lambda-1)}\Big(\lambda^2-\lambda-2k\Big).$$

Matrica susedstva grafa kK_2 ima $2k$ vrsta i $2k$ kolona.

$$A(kK_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

te karakteristični polinom je

$$P_{kK_2}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & & & \\ -1 & \lambda & & & & & \\ & & \lambda & -1 & & & \\ & & -1 & \lambda & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda & -1 \\ & & & & & 1- & \lambda \end{vmatrix}_{2k}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda & -1 & & & & \\ & -1 & \lambda & 0 & & & \\ & & 0 & \lambda & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda & -1 \\ & & & & & 1- & \lambda \end{vmatrix}_{2k-1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda & -1 & & & & \\ & -1 & \lambda & 0 & & & \\ & & 0 & \lambda & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda & -1 \\ & & & & & 1- & \lambda \end{vmatrix}_{2k-1}$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \\ -1 & \lambda & 0 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & -1 \\ & & & 1- & \lambda \end{vmatrix}_{2k-2} - \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \\ -1 & \lambda & 0 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & -1 \\ & & & 1- & \lambda \end{vmatrix}_{2k-2}$$

$$= (\lambda^2 - 1) P_{(k-1)K_2}(\lambda) = \ldots = (\lambda^2 - 1)^k$$

Sada možemo izraziti

$$P_{F_k}(\lambda) = \frac{(\lambda^2 - 1)^k}{\lambda - 1} \Big(\lambda^2 - \lambda - 2k \Big) = (\lambda - 1)^k (\lambda + 1)^k (\lambda^2 - \lambda - 2k),$$

odakle dobijamo traženi spektar.

□

Zaključak

Istorijska pozadina grafova navodi da mnoge važne teme nauke ne bi mogle biti objašnjene bez pomoći teorije grafova. Mnogi praktični problemi mogu se lako predstaviti u terminima teorije grafova.

U ovom radu analizirali smo grafove kroz jednostavne primere i teoreme koje se mogu lako objasniti. Ukratko je prikazana istorijska pozadina grafova, klasifikacija, matrična reprezentacija grafova, različite vrste operacija na grafovima, izomorfizam i neke važne teoreme. Kako spektri grafova i odgovarajući karakteristični vektori imaju značajnu primenu kod većine prirodno–matematičkih nauka, ovaj rad teži da upozna čitaoce i sa osnovima spektralne teorije grafova. Na kraju je dat i prikaz spektra matrice susedstva nekih specijalnih, dobro poznatih grafova, jako regularnih grafova i grafova prijateljstva.

Glavni cilj ovog rada je da predstavi teoriju grafova u terminima matrica. Nadam se da će budući istraživači pomoću ovog rada dobiti jasan i vizuelan koncept teorije grafova i uvid u moguće matrične reprezentacije grafova.

Prilog

U prilogu su navedene funkcije implementirane u Matlabu za tablice 1, 2, 3, 4, 5.

```
function [A,KPolinom,KKoren]=KKorenBipartitG(m,n) for k=2:m
for l=2:n
BP1=zeros(k)
BP2=ones(k,l)
BP3=ones(l,k)
BP4=zeros(l)
A=[BP1,BP2;BP3,BP4]
KPolinom=poly(A)
KKoren=real(roots(poly(A)))
end;
end;
```

```
function [A,KPolinom,KKoren]=KKorenKompletnogG(n)
sym B;
for i=3:n
A=ones(i)-eye(i)
B=sym(A)
KPolinom=poly(B)
KKoren=real(roots(poly(A)))
end;
```

```
function C=MSusedstvaKonture(n)
C=zeros(n);
C(n,1)=1;
C(1,n)=1;
for i=1:n
for j=1:n
if (i-j==1 —— i-j==-1)
```

```
C(i,j)=1;
end;
end;
end;

function [A,KPolinom,KKoren]=KKorenKonture(n)
for k=3:n
A=MSusedstvaKonture(k)
KPolinom=poly(A)
KKoren=real(roots(poly(A)))
end;

function P=MSusedstvaPuta(n)
P=zeros(n);
for i=1:n
for j=1:n
if (i-j==1 —— i-j==-1 )
P(i,j)=1;
end;
end;
end;

function [A,KPolinom,KKoren]=KKorenPuta(n)
for k=3:n
A=MSusedstvaPuta(k)
KPolinom=poly(A)
KKoren=real(roots(poly(A)))
end;

function FG=MSusedstvaGPrijatelj(n)
B=[0 1;1 0];
C=repmat(B,n,1);
D=blkdiag(C:);
FG=zeros(size(D,1)+1,size(D,2)+1);
FG(1:size(D,1),1:size(D,2))=D;
for k=1:(2*n+1)
for l=1:(2*n+1)
FG(k,2*n+1)=1;
FG(2*n+1,l)=1;
FG(2*n+1,2*n+1)=0;
end;
```

```
end;

function [A,KPolinom,KKoren]=KKorenGPrijatelj(n)
for k=1:n
A=MSusedstvaGPrijatelj(k)
KPolinom=poly(A)
KKoren=real(roots(poly(A)))
end;
```

Literatura

[1] R. B. Bapat, *Graphs and Matrices*, Hindustan Book Agency, India, 2010.

[2] A. L. Barabási, *Linked: The New Science of Networks*, Cambridge, MA, Perseus, 2002.

[3] L. W. Beineke, R. J. Wilson, P. J. Cameron *Topics in Algebraic Graph Theory*, Cambridge university press, 2005.

[4] I. Bošnjak, D. Mašulović, V. Petrović, R. Tošić, *Zbirka zadataka iz teorije grafova*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2005.

[5] A. E. Brauwer, W. H. Haemers, *Spectra of graphs*, Springer Science and Business Media, 2011.

[6] D. M. Cvetković, M. Doob, H.Sachs, *Spectra of graphs. Theory and application*, Academic Press, New York, 1980.

[7] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic graph theory*, Springer-Verlag New York, New York, 2001.

[8] D. Herceg, Z. Stojaković, *Numeričke metode linearne algebre - Zbirka zadataka*, IRO "GRAĐEVINSKA KNJIGA", Beograd, 1981.

[9] R. Y. Lin, *An elemntary proof of Perron-Frobenius theorem for nonnegative symmetric matrices*, Chines Journal of Physics, 15(4), 263.

[10] V. Petrović, *Teorija grafova*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1998.

[11] Z. Stojaković, I. Bošnjak, *Elementi linearne algebre*, Symbol, Novi Sad, 2010.

Biografija

Diana Šurjan je rođena 13. 01. 1990. godine u Novom Sadu. Nakon završene osnovne škole u Temerinu, upisala je Gimnaziju "Svetozar Marković" u Novom Sadu, na mađarskom nastavnom jeziku. Godine 2009. upisala je osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer primenjena matematika. Studiranje na master studijama nastavila je na istom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom zaključno sa oktobarskom ispitnim rokom 2022. godine. Time je stekla uslov za odbranu ovog master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Diana Šurjan
AU

Mentor: dr Anna Slivková
ME

Naslov rada: O nekim pristupima izučavanja grafova pomoću matrica
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2023
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (4/65/11/5/29/0/1)(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/broj grafika/priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Teorija grafova
ND

Ključne reči: graf, matrica, matrica susedstva, matrica incidencije, spektar grafa, jako regularni grafovi, teorema prijateljstva
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Ovaj rad se bavi sa proučavanjem grafova pomoću matrica. Rad se sastoji od četri poglavlja. Prvo poglavlje je uvodnog karaktera. Čine ga osnovni pojmovi i definicije i daje se istorijski osvrt na navedeni problem. U drugom poglavlju predstavljamo dve najčešće vrste matrica koje se pridružuju grafovima. Prva vrsta su matrice susedstva, a druga matrice kojima se mogu predstaviti grafovi matrice incidencije. U trećem delu rada fokusiramo se na neke spektralne osobine grafova. Izloženi su i spektri nekih poznatih specijalnih grafova. Konačno, u poslednjem poglavlju definisan je pojam jako regularanog grafa i neke njegove spektralne osobine. Takođe,

navodimo i jednu važnu teoremu iz klasične teorije grafova - teorema o prijateljstvu, kao i njen dokaz.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 30.01.2023.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Ivica Bošnjak, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Samir Zahirović, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Anna Slivková, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Diana Šurjan
AU

Mentor: dr Anna Slivková
MN

Title: On some approaches to studying graphs using matrices
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2023
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (4/65/11/5/29/0/1)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ supplements)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Graph theory
SD

Subject/Key words: graph, matrix, adjacency matrix, incidence matrix, spectra of graphs, strongly regular graphs, friendship theorem
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This Master thesis is about studying graphs using matrices. The paper consists of four chapters. The first chapter is of an introductory nature. It consists of basic concepts and definitions providing a historical overview of the mentioned problem. In the second chapter, we will present the two most common types of matrices that join graphs. The first are adjacency matrices, and the second type of matrices that can be used to represent graphs are incidence matrices. In the third part of the paper, we focus on some spectral properties of graphs. The spectra of some well-known special graphs will also be exposed. Finally, in the last chapter, the notion of a strongly regular

graph and some of its spectral properties will be defined. We will also state an important theorem from classical graph theory - the friendship theorem, as well as its proof.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 30.01.2023.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Ivica Bošnjak, associate professor at Faculty of Science in Novi Sad
Member: dr Samir Zahirović, assistant professor at Faculty of Science in Novi Sad
Mentor: dr Anna Slivková, assistant professor at Faculty of Science in Novi Sad