UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Jovana Jovičić

KLEENEJEVE TROVALENTNE LOGIKE

-Master rad-

Mentor

dr Rozália Sz. Madarász

2023, Novi Sad

Sadržaj

Predgovor

Upoznavajući se sa logičkim sistemima i razmišljajući izvan okvira apsolutno tačnog i netačnog, prirodno je zapitati se da li postoji još neka istinitosna vrijednost ili više njih? S obzirom na to da je nerjetko šta u našoj okolini, našem rezonovanju stvari i komunikaciji tačno-netačno, ili crno-bijelo, opravdano je zapitati se šta ako ne možemo sa sigurnošću da tvrdimo da je nešto tačno ili netačno ili šta ako je sivo? Da li je moguće konstruisati svijet koji i ove odgovore opravdava i njima daje smisao? Da li je moguće pronaći algebarsku strukturu koja će odgovarati sistemima sa više od dvije istinitosne vrijednosti?

U ovom master radu bavimo se viševrijednosnim iskaznim logikama, posebno opredjeljujući se za *Kleenejevu logiku.* Prikazujemo da neke teoreme koje važe u klasičnoj logici funkcionišu i u ovoj logici, kao i razlike između njih. Rad se sastoji od sedam glava.

U prvoj glavi koja je i uvodna, dajemo osvrt na „praistoriju" viševrijednosnih logika. Od Aristotela, koji se smatra osnivačem klasične logike, zatim doprinosi *Boehnera*, *Villjiama Okama, Johna Lockea,* zatim autori alternativnih logika poput *Hugh MacColla* , *Charlesa Sanders Peircea* i *Nikolai A. Vasil'eva,* potom osvrt na prve formalne sisteme koji su razvili *Jan Łukasiewicz* , *Paul Bernays* i *Emil Post* i nedugo poslije njih novi formalni sistem *Stephena C. Kleeneja.*

U drugoj glavi upoznajemo se detaljnije sa trovalentnim logikama *Łukasiewicza, Kleeneja,* vezama između njih, odnosno sa njihovim razlikama i sličnostima, zatim navodimo i osnovne osobine *Bochvarove* trovalentne logike.

U trećoj glavi pričamo o semantici *Kleenejeve* logike, uporedno podsjećajući se i dvovalentne klasične semantike. Definišemo je preko valuacije, zatim preko morfizma, pa dovodimo u vezu ova dva različita pristupa. Analogno definišemo i trovalentnu semantiku na ovaj način. Podsjećamo se definicija ideala, filtera neke mreže, kao i njihovih osnovnih osobina.

U četvrtoj glavi predstavljen je pojam DMF-algebre, koju možemo da posmatramo kao strukturu tipa $K\,(DMF)$ koja zadovoljava aksiome De Morganove algebre, aksiomu normalnosti i aksiomu fiksne tačke.

U petoj glavi krećemo sa sekventnim računom za *Kleenejevu* logiku. Definišemo tri različita računa $S(DL)$, $S(BA)$ i $S(DMF)$. Prvi se odnosi na ograničenu distributivnu mrežu, drugi se odnosi na Bulovu algebru i treći na DMF-algebre.

U šestoj glavi konačno dajemo dokaz kompletnosti za *Kleenejevu* logiku. Za potpun dokaz su nam neophodni topološki pojmovi, te se prvo podsjećamo istih.

U sedmoj, ujedno i poslednjoj glavi, dajemo neke napomene vezane za druge, još dovoljno neistražene, viševrijednosne logike. Prikazujemo i filozofski pogled na već upoznate logike.

***

Veliku zahvalnost dugujem mentoru, dr Rozáliji Sz. Madarász na nesebičnoj pomoći u odabiru teme, pisanju master rada, stručnim sugestijama, strpljenju i prenjetom znanju tokom čitavog školovanja. Takođe, želim se zahvaliti dr Anni Slivkovoj i dr Samiru Zahirović, što su prihvatili da budu članovi komisije, na prenjetom znanju, kao i savjetima prilikom pisanja ovog rada.

Za kraj, posebno se želim zahvaliti mojim roditeljima Gospovi i Jovi, sestri Zorani i bratu Zoranu na velikoj podršci i razumjevanju tokom čitavog školovanja. Takođe, hvala mom dragom Borislavu na strpljenju i upornom bodrenju tokom studija.

Novi Sad, 2023. godine

Jovana Jovičić

1 Uvod

1.1 Korjeni viševrijednosne logike

[2] Uobičajeni pogled na istoriju logike povezuje početak logike sa starom Grčkom, a Aristotel (384–322 p.n.e) se obično smatra osnivačem klasične logike. To je prvenstveno zbog njegovog razvoja sistema šema zaključivanja (silogizama) za deduktivno rasuđivanje koji je uticao na razvoj klasične logike oko dvije hiljade godina. Ovaj sistem, koji se obično naziva silogističkim, opisan je u jednom dijelu Aristotelovog glavnog djela pod naslovom *Organon*. Razvijajući svoju silogistiku, Aristotel je u potpunosti prihvatio princip bivalencije. Međutim, on je doveo u pitanje primjenljivost ovog principa na propozicije u vezi sa budućim nepredviđenim situacijama. Ovo pitanje se razmatra u jednom dijelu *Organona*, koji nosi naslov *O tumačenju* [1]. Suština njegovih argumenata se vidi iz sledećeg citata:

„Nužno je da sutra bude pomorska bitka, ili da ne bude, ili nije nužno da sutra bude pomorska bitka, kao što nije nužno ni da ona ne bude. Ali, nužno je da ona sutra bude ili ne bude.

A pošto su propozicije istinite na isti način kao stvari, očevidno se moraju kod svega što se tako odnosi da je u jednom kao i u drugom [gore navedenom] slučaju moguća i suprotnost, – i protivrečne propozicije nužnim načinom isto tako odnositi. To se događa kod onoga što ne postoji uvek ili što nije uvek nepostojeće. Tada nužnim načinom treba da jedna od dve protivrečne propozicije bude istinita, a druga lažna; ali ne ova ili ona određena propozicija, nego ma koja od njih, – i mada je jedna od njih verovatno istinitija nego druga, ona nije već [trenutno] istinita ili lažna."

Iako je Aristotel zasigurno doveo u pitanje primjenljivost principa bivalentnosti za propozicije koje uključuju buduće pojave, on zapravo nije napustio bivalentnost, tada duboko ukorjenjeni stub logičkih istraživanja.

Aristotel nije bio jedini filozof u staroj Grčkoj koji je dovodio u pitanje univerzalnu primjenljivost principa bivalentnosti u logici. Taj princip je još naglašenije doveo u pitanje jedan od njegovih savremenika, Epikur (341–270 p.n.e), i njegovi sljedbenici - epikurejci. Ovi filozofi su u osnovi odbacili princip bivalentnosti na osnovu svog snažnog vjerovanja u slobodnu volju i njihove privrženosti nedeterminizmu.

Stoici, grupa grčkih filozofa sa snažnim interesima u logici, kritikovali su Aristotelovo oklevanje u pogledu opšte primjenljivosti principa bivalentnosti. Postojalo je samo nekoliko rijetkih epizoda u istoriji logike pred kraj 19. vijeka, kada se princip bivalentnosti ponovo pojavio kao predmet rasprave i daljeg razvoja. Prva od ovih rijetkih epizoda dogodila se u 14. vijeku i prvenstveno se pripisuje poznatom engleskom filozofu *Vilijamu Okamu* (oko 1287–1347). *Okamova* analiza pokazuje da argumenti Aristotela, o istinitosnim vrijednostima budućeg događaja, neizbježno dovode do propozicija koje nisu ni istinite ni lažne.

Boehner (1945) uvodi naziv *neuter* (N) kao treću vrijednost – ni tačnu ni netačnu – za takve propozicije. Nakon što je detaljnije ispitao *Okamove* argumente, on pokazuje da ustvari oni sadrže opis istinitosne funkcije trovalentne implikacije, $p \to q$, koja je prikazana u sledećoj tabeli:

$\to$	F	N	T
F	T	T	T
N	N	T	T
T	F	N	T

Vrijednosti F i T u tabeli iznad predstavljaju netačne (*false*) i tačne (*true*) propozicije redom.

Okam je svojom analizom objasnio da Aristotelov argument o statusu istinitosti, tvrdnji koje se tiču budućih nepredviđenih okolnosti, neizbježno vodi kršenju principa bivalentnosti. *Okam* nije prihvatio ove argumente, djelimično iz teoloških razloga, a djelimično zbog svog snažnog vjerovanja u princip bivalentnosti. Kao posljedica toga, njegova ideja o trovrijednosnoj logici praktično nije imala uticaja na razvoj logike.

Godine 1465, Aristotelovi argumenti u vezi sa statusom istinitosti propozicija o budućim nepredviđenim okolnostima postali su predmet opsežnih i žestokih debata na Univerzitetu u Luvenu (sada u Belgiji). U debatama su učestvovali članovi Fakulteta umjetnosti, koji su podržali Aristotelove argumente, i pripadnici jedne frakcije Bogoslovskog fakulteta, koji su ih odbacili na strogo bogoslovskim osnovama. Na kraju, međutim, nijedna strana u ovim desetogodišnjim debatama nije bila očigledan pobjednik.

Od kraja 17. vijeka promišljanja o nepreciznosti ljudskih koncepata su se ponovo pojavila, bez očiglednog uticaja Aristotelovih ranih analiza, prvo u djelima *Johna Lockea*, a zatim nastavila da se pojavljuju u udžbenicima iz filozofije i logike, kao što su udžbenik *Wattsa* (1724) i *Baina* (1870). Iako je princip bivalentnosti jasno doveden u pitanje takvim razmatranjima, ovi radovi to nisu eksplicitno odbacili.

U kasnom 19. vijeku, logičari i matematičari su ponovo osporili princip bivalentnosti. Oni su tvrdili da je princip nepotrebno restriktivan i da je moguće razvijati različite alternativne logike napuštanjem istog. Pokrenule su se neke alternativne logike krajem 1910-ih i početkom 1920-ih, u svakoj od kojih je prepoznato više od dvije istinitosne vrijednosti. Autori ovih ranih ideja, bili su *Hugh MacColl* (1837–1909) škotski matematičar, *Charles Sanders Peirce* (1839–1914) poznati američki filozof sa jakim interesovanjima za logiku i matematiku, i *Nikolai A. Vasil'ev* (1880–1940), ruski filozof. Zanimljivo je i primjetiti da je već u svojoj analizi klasične logike *George Boole* (1815–1864) ukratko razmotrio ideju da neki prirodno izvedeni algebarski izrazi dozvoljavaju trihotomiju u logičkim vrijednostima, ali je zaključio da se takvi izrazi „ne mogu tumačiti u sistemu logike”.

U periodu od 1877. do 1908. *MacColl* je objavio brojne radove i knjigu u kojima je predstavio mnoge ideje koje se bave širokim spektrom pitanja koja se odnose na simboličku logiku. *MacColl* se smatra pretečom viševrijednosne logike zbog svog rada u modalnoj logici, koji je očigledno bio motivisan njegovim nepovjerenjem u materijalnu implikaciju i njegovom potragom za strogom implikacijom. On je izložio sistem iskazne logike u kojem se tvrdnje kvalifikuju kao istinite, netačne, izvjesne, nemoguće i promjenljive.

Godine 1902, *Peirce* je napisao esej pod naslovom „Minute logic” (objavljen samo posthumno u njegovim sabranim djelima *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*) u kojem je zamislio novu matematiku zasnovanu na trovrijednosnoj logici. Ovu matematiku je nazvao trihotomnom matematikom (*trichotomic mathematics*), a osnovnu trovrijednosnu logiku kao trijadnu logiku (*triadic logic*). Analizirajući ovaj dokaz, *Fisch* i *Turquette* (1966) su došli do zaključka da je *Peirce* uspio do 1909. godine da razvije osnovne ideje nekih trovrijednosnih logika.

Početkom 1910-ih *Nikolai A. Vasil'ev* (1880–1940), koji je u to vrijeme bio na Kazanskom univerzitetu u zapadnoj Rusiji, istražio je mogućnost nove logike, različite od klasične logike, koju je nazvao *imaginarna logika (imaginary logic)*. *Vasil'ev* je odabrao termin „imaginarna logika” jer je vidio paralelu između njegovih ideja i onih od *N. A. Lobachevskog* koji je razvio svoju imaginarnu geometriju – vrstu neeuklidske geometrije koja u izvjesnom smislu opisuje drugačiji svijet od onog koja opisuje klasična, euklidska geometrija. Glavna ideja *Vasil'eva* bila je ta, da pored našeg svijeta, koji je on vidio kao opisan aristotelovskom logikom, postoje i drugi, imaginarni svijetovi za koje je potrebna logika drugačija od klasične. Dok neki smatraju *Vasil'eva* pionirom viševrijednosne logike, neki smatraju takve zaključke neopravdanim i tvrde da on nikada nije iznio ideju o višestrukim istinitosnim vrijednostima.

Prve formalne sisteme viševrijednosnih logika razvili su *Jan Łukasiewicz* (1878–1956), *Paul Bernays* (1888–1977) i *Emil Post* (1897–1954). Iako su razvili svoje logike nezavisno i otprilike u isto vrijeme, *Łukasiewicz* ne samo da ima blagi prioritet da bude prvi, već je i njegova logika bila najuticajnija u kasnijim razvojima.

Łukasiewicz je prvo razvio trovrijednosnu logiku i predstavio je na predavanju Poljskom filozofskom društvu, koje je održao juna 1920. u Lavovu.

U ovom radu, *Łukasiewicz* dozvoljava da svaka propozicija ima jednu od tri vrijednosti. Dvije od njih su klasične vrijednosti 1 i 0, koje predstavljaju istinu, odnosno neistinu. Treća vrednost ne predstavlja ni istinu ni laž i tumači se kao „mogućnost”. Ova vrijednost je u ovom ranom radu označena sa 2, ali je kasnije usvojen zgodan simbol $\frac{1}{2}$.

Łukasiewiczeve logike sa konačnim i beskonačnim skupom istinitosnih vrijednosti igraju važnu ulogu u *fuzzy* logici. Zatim važnu ulogu u *fuzzy* logici u užem smislu ima *Kurt Gödel* (1906–1978) koji je razvio logiku u kontekstu intuicionističke logike, zatim trovrijednosna logika *Dmitri A. Bochvara* (1903–1990) za analizu nekih paradoksa klasične logike i teorije skupova, u kojoj je treća vrijednost protumačena kao „besmislenost” i trovrijednosna logika *Stephena C. Kleeneja* (1909–1994), u kojoj se treća vrijednost tumači kao „nije definisano”, a potom i neke probabilističke logike i logike razvijene u kontekstu kvantne mehanike.

Literatura o viševrijednosnoj logici brzo je rasla od početka 1920-ih. Rani glavni izvori u ovoj oblasti uključuju odličan i sveobuhvatan pregled literature o viševrijednosnoj logici.

Krajem 19. vijeka došlo je do oživljavanja interesovanja za neodređenost. *Peirce* je prepoznao prije svega neodređenost opštih pojmova, sveprisutnih u prirodnom jeziku, koji čini klasičnu logiku nesposobnom da formalizuje zdravorazumsko zaključivanje izjavama opisanim prirodnim jezikom.

Ubrzo nakon smrti *Peircea*, čuveni engleski filozof, logičar i matematičar *Bertrand Russell* (1872–1970) napisao je rad koji je u potpunosti posvećen neodređenosti. U ovom radu, *Russell* je direktno izložio ograničenja klasične dvovrijednosne logike, čemu je i sam neizmjerno doprineo. Sledeći odlomci iz njegovog rada prilično dobro prikazuju suštinu *Russellove* kritike:

> „Zakon isključenja trećeg je tačan kada se koriste precizni simboli, ali nije istinit kada su simboli nejasni, kao što su, u stvari, svi simboli...”

Pored argumenata zasnovanih na neodređenosti prirodnog jezika, u filozofskoj literaturi kasnog 19. vijeka mogu se naći i drugi argumenti protiv principa bivalentnosti. Jedna vrsta argumenata proizašla je iz metafizičkih pogleda engleskog filozofa, *Francis H. Bradleya* (1846–1924). Drugu vrstu argumenata, zasnovanu na epistemološkim osnovama, iznio je uticajni francuski fizičar, matematičar i filozof, *Pierre Duhem* (1861–1916).

Spomenimo na kraju malo poznatu činjenicu da je Aristotel bio tolerantan prema nepreciznosti. Ovo je u suprotnosti sa nekim spisima koji ga prikazuju kao „prvosveštenika” logičke preciznosti, zbog čega nažalost, svaku logiku koja odstupa od klasične logike nazivaju nearistotelovom logikom. Čuvari principa bivalentnosti u staroj Grčkoj su bili stoici, a ne Aristotel. Oni su zapravo bili prethodnici moderne dvovalentne logike kao što je ubjedljivo tvrdio *Łukasiewicz* (1930). Kao što je on primjetio, neklasične logike koje ne prihvataju princip dvovalentnosti trebalo bi, poslije velikog stoičkog filozofa, Hrisipa (279 – oko 206 p.n.e) da budu nazvane *nehrisipove* prije nego *nearistotelove.*[2]

2 Neke trovalentne logike

2.1 *Łukasiewiczeva* trovalentna logika

Poljski logičar *Jan Łukasiewicz* je jedan od prvih naučnika koji je razvio trovalentnu logiku. *Łukasiewicza* je zanimala istinitosna vrijednost od tzv. *future contingent sentences* (istinitosna vrijednost budućeg događaja), koju je prvi posmatrao Aristotel. *Future contingent sentences* je rečenica o budućnosti koja bi se mogla ispostaviti kao istinita, ali i lažna. Na primjer, ako posmatramo rečenicu: *Žena će biti predsjednik SAD 3000. godine*, takva rečenica, prema *Łukasiewiczu* danas nije ni tačna ni netačna. Jer ako je tačna, onda će morati da postoji žena predsjednica SAD 3000. godine, a ako je netačna, onda ne može biti žena predsjednica SAD 3000. godine. Ali pošto ne mora da postoji žena predsjednica SAD 3000. godine, iako bi mogla biti, slijedi da rečenica danas nije ni tačna ni netačna. S obzirom na pretpostavku da su *future contingent sentences* ni tačne, ni netačne, *Łukasiewicz* predstavlja logiku za takve rečenice.

U nastavku ćemo umjesto oznaka $0, 1$ i $\frac{1}{2}$ za istinitosne vrijednosti, koristiti oznake F,T i N redom.

Predstavimo tablicu istinitosti za *Łukasiewiczevu* logiku L_3:

P	**¬P**
T	F
N	N
F	T

P ∧ Q	T	N	F
T	T	N	F
N	N	N	F
F	F	F	F

P ∨ Q	T	N	F
T	T	T	T
N	T	N	N
F	T	N	F

P → Q	T	N	F
T	T	N	F
N	T	T	N
F	T	T	T

P ↔ Q	T	N	F
T	T	N	F
N	N	T	N
F	F	N	T

Iz tablica vidimo, da na primjer rečenica: *George Bush je bio predsjednik SAD 2004. godine i žena će biti predsjednik SAD 3000. godine* nije ni tačna ni netačna. Ali rečenica: *Ako žena bude predsjednik SAD 3000. godine, onda će žena biti predsjednik SAD 3000. godine* je tačna.

Definicija 2.1 *Formula u trovalentnom logičkom sistemu je tautologija ako uvijek ima vrijednost T (tj. 1), a kontradikcija ako uvijek ima vrijednost F (tj. 0).*

2.2 *Kleenejeva* jaka i slaba trovalentna logika

Stephen C. Kleene je uveo trovrijednosnu logiku kao dio svojih studija teorije izračunljivosti ([5]). Teorija izračunljivosti se pojavila u 1930-im u radovima *Alonzo Churcha, Kurt Gödela*, i *Alan M. Turinga*. Oni su pokušali da preciziraju neformalni pojam izračunljivosti i predložili su tri različite formalizacije: teoriju rekurzivnih funkcija inspirisanu *Herbrandom* i formulisanu po *Gödelu*, λ-račun *Churcha* i izračunljivost formalnim mašinama, koje se danas nazivaju Tjuringove mašine, po *Turingu*.

Kleene, koji je bio student *Churcha*, ubrzo je dao važan doprinos teoriji izračunljivosti, npr. sada već klasična teorema kojom se utvrđuje ekvivalentnost tri gore navedena formalna pojma izračunljivosti. Dok su se rani koncepti izračunljivosti odnosili na totalne funkcije i relacije, *Kleene* je uveo i proučavao fundamentalno važne pojmove parcijalno rekurzivnih funkcija i relacija.

Kleenejeva motivacija je bila sledeća. Prema tvrdnji koju je utvrdio *Gödel*, za bilo koje dvije (totalne) rekurzivne relacije, relacije dobijene iz njih pomoću operacija zasnovanih na klasičnim logičkim vezama, npr. komplement, presjek i unija, su takođe (potpuno) rekurzivne. Odgovarajuća tvrdnja za parcijalno rekurzivne relacije nije bila jasna. Konkretno, nije bilo očigledno šta operacije komplementa, unije, presjeka itd. treba da budu za parcijalne relacije. U tu svrhu, *Kleene* je uveo treću istinitosnu vrijednost $\frac{1}{2}$, i protumačio je kao ,,nedefinisano”. Jasno, svaka parcijalna relacija može se onda predstaviti svojom trovrijednosnom karakterističnom funkcijom R tako da $R(y) = 0$ znači da je R definisana i netačna (F) za y, $R(y) = 1$ znači da je R definisana i tačna (T) za y, a $R(y) = \frac{1}{2}$ znači da je R nedefinisana (N) za y. *Kleene* (1938) je definisao istinitosne funkcije kao:

P	**¬P**
T	F
N	N
F	T

P ∧ Q	T	N	F
T	T	N	F
N	N	N	F
F	F	F	F

P ∨ Q	T	N	F
T	T	T	T
N	T	N	N
F	T	N	F

P → Q	T	N	F
T	T	N	F
N	T	N	N
F	T	T	T

P ↔ Q	T	N	F
T	T	N	F
N	N	N	N
F	F	N	T

Njegov razlog je bio da željeno svojstvo, za parcijalne relacije koje nastaju od parcijalnih rekurzivnih relacija pomoću ovih operacija, budu parcijalno rekurzivne. Na primjer, ako su R i S

parcijalno rekurzivne relacije, parcijalna relacija $R \vee S$ definisana sa $(R \vee S)(y) = R(y) \vee S(y)$ je takođe parcijalno rekurzivna.

Kleene koristi svoju trovalentnu logiku i dalje je razrađuje u svojoj čuvenoj knjizi ([6]). On predstavlja uslove koje treba da prate sve razumne istinitosne funkcije relacija pogodnih za opisanu svrhu u prethodnom pasusu i takve istinitosne funkcije naziva regularnim. Istinitosne funkcije prikazane tabelama iznad su regularne i *Kleene* ih naziva **jakim**, za razliku od **slabe** istinitosne funkcije koje on definiše na sledeći način:

P	$\neg$**P**
T	F
N	N
F	T

P $\wedge$ **Q**	T	N	F
T	T	N	F
N	N	N	N
F	F	N	F

P $\vee$ **Q**	T	N	F
T	T	N	T
N	N	N	N
F	T	N	F

P $\rightarrow$ **Q**	T	N	F
T	T	N	F
N	N	N	N
F	T	N	T

P $\leftrightarrow$ **Q**	T	N	F
T	T	N	F
N	N	N	N
F	F	N	T

Kleene opravdava termin „jaka" primjećujući da je jaka tablica istinitosti najjače regularno proširenje klasične tablice, po tome što ima T ili F u svakoj poziciji gdje svako trovalentno regularno proširenje klasične istinitosne funkcije može imati T ili F.

U nastavku, kad god nije naznačeno da li je u pitanju jaka ili slaba *Kleenejeva* logika podrazumjevaćemo jaku *Kleenejevu* logiku.

Dienes (1949) je ispitao novu implikaciju u *Łukasiewiczevoj* logici, $\rightarrow_D$, tako da je $\varphi \rightarrow_D \psi$ ekvivalentno sa $(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$. Tablica istinitosti ove implikacije zadovoljava:

$$a \rightarrow_D b = \neg a \vee b$$

Ove definicije predstavljaju generalizaciju *Kleenejeve* jake tablice istinitosti, sa kojima se poklapaju u L_3.

Kleene je zapravo primjetio da je $\varphi \rightarrow \psi$ ekvivalentno sa $\neg\varphi \vee \psi$ ([6]).

Kleenejeva trovalentna logika postala je klasik u literaturi o viševrijednosnim logikama i inspiracija za dalja istraživanja, posebno parcijalne logike.

2.3 Sličnosti i razlike između *Kleenejeve* i *Lukasiewiczeve* logike

Pored različitih motivacija za uvođenje trovalentnih sistema, *Kleenejeve* i *Łukasiewiczeve* trovalentne logike se razlikuju još po nečemu.

Naime, predstavljajući tablice istinitosnih funkcija možemo primjetiti da se *Kleenejeve* tablice jake trovalentne logike poklapaju sa *Łukasiewiczevim* tablicama kada su u pitanju negacija, konjunkcija i disjunkcija, dok je jedina razlika u implikaciji i ekvivalenciji. Tačnije, centralni element koji se javlja u tablicama implikacije i ekvivalencije je različit.

Pa tako, već spomenuta rečenica u primjeru iznad (*Ako žena bude predsjednik SAD 3000. godine, onda će žena biti predsjednik SAD 3000. godine*) koja je tačna po *Łukasiewiczu,* po *Kleeneju* i dalje ne možemo utvrditi da li je tačna ili netačna, odnosno rečenica je nedefinisana.

Zatim, rezultati odnosno teoreme koje važe u *Łukasiewiczevoj* trovalentoj logici ne važe u *Kleenejevoj* upravo zbog pomenutih razlika. Tačnije imamo sledeća tvrđenja.

Teorema 2.1 *Svaka formula iz klasične logike, koja je tautologija u L_3 takođe je tautologija i u klasičnoj logici. Svaka formula iz klasične logike, koja je kontradikcija u L_3 takođe je kontradikcija i u klasičnoj logici.*

Dokaz: Primjetimo prvo sledeće, u normalnom[1] trovalentom sistemu, klasična dodjela istinitosnih vrijednosti se ponaša na isti način kao što se ponaša u klasičnoj logici. Odnosno, svaka formula koja je tačna za tu dodjelu u trovalentnom sistemu je takođe tačna za tu dodjelu u klasičnoj logici i svaka formula koja je netačna za tu dodjelu u trovalentom sistemu je takođe netačna za tu dodjelu u klasičnoj logici.
Svaka formula koja je tautologija u L_3 je tačna za svaku klasičnu dodjelu istinitosnih vrijednosti. Kako je L_3 normalna, onda važi da je formula tačna za sve dodjele istinitosnih vrijednosti u klasičnoj logici pa je zato tautologija u klasičnoj logici. Sličnim zaključcima pokazujemo i za kontradikciju. ■

Teorema 2.2 *Nije svaka formula koja je tautologija u klasičnoj logici, tautologija i u L_3 i nije svaka formula koja je kontradikcija u klasičnoj logici, kontradikcija i u L_3.*

Dokaz: Posmatrajmo sledeću formulu, koja je tautologije u klasičnoj logici: $A \vee \neg A$. Ova formula nema uvijek vrijednost T u L_3, jer za $v(A) = N$ vrijednost posmatrane formule je N. Dakle, tautologija u klasičnoj logici nije uvijek tautologija i u L_3.

Zatim, posmatrajmo formulu: $A \wedge \neg A$. Ova formula nema uvijek vrijednost F u L_3, jer za $v(A) = N$ vrijednost posmatrane formule je N. Dakle, kontradikcija u klasičnoj logici nije uvijek kontradikcija u L_3. ■

Teorema 2.3 *Ne postoje kontradikcije ni tautologije u Kleenejevoj logici.*

Dokaz: Kad god komponente složene formule uzimaju vrijednost N, vrijednost složene formule je takođe N, što možemo vidjeti posmatranjem istinitosnih tablica. Dakle, za neku proizvoljnu formulu postoji barem jedna dodjela istinitosnih vrijednosti za koju ona ima vrijednost N, pa nijedna formula ne može biti ni tautologija ni kontradikcija u *Kleenejevoj* logici. ■

[1] Trovalentni sistem nazivamo normalnim ukoliko su u njemu iskazni veznici normalni. Iskazni veznik je normalan ako, kad god veznik povezuje formule sa klasičnim istinitosnim vrijednostima, rezultujuća formula ima istu istinitosnu vrijednost kao i u klasičnoj logici.

Teorema koja važi u obe logike, vezana za logičku posljedicu, analogno se definiše i dokazuje u oba ova sistema.

Definicija 2.2 *Formulu F nazivamo logičkom posljedicom skupa formula Σ u trovalentnoj logici i pišemo $\Sigma \models F$ ako, kad god su sve formule iz skupa Σ tačne i formula F je nužno tačna.*

Teorema 2.4 *Svaka logička posljedica u Kleneejevom sistemu je takođe logička posljedica u klasičnoj iskaznoj logici. (Odnosno, ako $\Sigma \models_K F$ onda $\Sigma \models F$).*

Dokaz: Pretpostavimo da važi $\Sigma \models_K F$. Iz definicije logičke posljedice slijedi da za svaku klasičnu (i neklasičnu) dodjelu istinitosnih vrijednosti u *Kleenejevom* sistemu za koju su sve formule u Σ tačne, F je takođe tačna. Ali, kako je naš sistem normalan, ovo je tačno i u klasičnoj logici. ■

Teorema 2.5 *Nije svaka logička posljedica u klasičnoj logici, logička posljedica i u Kleenejevom sistemu.*

Dokaz: Da bi dokazali da obrnut smjer teoreme 2.4 ne važi, dajemo kontraprimjer koji je klasično ispravan, ali nije ispravan u *Kleenejevom* sistemu:

$$\frac{\neg(A \Leftrightarrow B)}{(A \Leftrightarrow C) \vee (B \Leftrightarrow C)}.$$

Zaista, da bi ovaj primjer bio ispravan u klasičnoj logici, A i B moraju imati različite istinitosne vrijednosti. Vrijednost od C će sigurno biti ekvivalentna ili sa A ili sa B (jer u klasičnoj logici postoje samo dvije istinitosne vrijednosti). Zato je zaključak sigurno tačan. Dakle, ispravnost zavisi od činjenice što imamo samo dvije istinitosne vrijednosti. Dok u *Kleenejevom* sistemu zaključak može imati vrijednost N, ako C ima vrijednost N, a A i B suprotne vrijednosti, što implicira da ovaj primjer nije ispravan u *Kleenejevoj* logici. ■

Teorema 2.6 *Svaka logička posljedica u Lukasiewiczevom sistemu je takođe logička posljedica u klasičnoj iskaznoj logici. (Odnosno, ako $\Sigma \models_L F$ onda $\Sigma \models F$).*

Dokaz: Analogno dokazu teoreme 2.4. ■

2.4 *Bochvarova* trovalentna logika

Ruski logičar *Dmitri A. Bochvar* uveo je trovalentnu logiku za dobijanje računa pogodnog za analizu paradoksa u klasičnoj logici kao što je Raselov paradoks. On je pokušao da obezbjedi sistem u kome je moguće formalno dokazati da su pojedini iskazi besmisleni. Treća istinitosna vrijednost N (tj. $\frac{1}{2}$), korištena pored klasičnih vrijednosti istine T (tj. 1) i F (tj. 0), tumači se kao „besmislenost”.

Svoju propozicionu logiku *Bochvar* motiviše semantičkim razmatranjima. On pravi razliku između unutrašnjeg i spoljašnjeg oblika tvrdnje. Na primjer, unutrašnjim oblicima „φ” i „φ ili ψ” odgovaraju spoljašnji oblici „φ je tačno” i „φ je tačno ili ψ je tačno”. On naglašava krucijalnu semantičku razliku između dva oblika. Na primjer, ako φ predstavlja besmislenu izjavu, onda unutrašnji oblik „nije φ” je i dalje besmislen, dok odgovarajući spoljašnji oblik „φ je lažan” nije besmislen jer je lažan. Logika spoljašnjih iskaza je klasična logika, što omogućava primjenu klasičnih principa pri rasuđivanju o unutrašnjim iskazima od kojih su neki besmisleni. Na ovom računu iskaza zasnovan je račun iskaznih funkcija ili predikata bez tipova unutar kojeg su paradoksi analizirani i razrješeni dokazom besmislenosti iskaza koji su u njihovoj osnovi.

Istinitosne funkcije unutrašnjih veznika logike B_3^I (*Bochvar's* „internal" three-valued system) opisane su u sledećim tabelama:

P	**¬P**
T	F
N	N
F	T

$\mathbf{P \wedge Q}$	T	N	F
T	T	N	F
N	N	N	N
F	F	N	F

$\mathbf{P \vee Q}$	T	N	F
T	T	N	T
N	N	N	N
F	T	N	F

$\mathbf{P \rightarrow Q}$	T	N	F
T	T	N	F
N	N	N	N
F	T	N	T

$\mathbf{P \leftrightarrow Q}$	T	N	F
T	T	N	F
N	N	N	N
F	F	N	T

Možemo primjetiti da su ove istinitosne funkcije iste kao i istinitosne funkcije slabe *Kleeneje-ve* logike. Tablice isitinitosti za spoljašnje veznike logike B_3^E (*Bochvar's* „external" three-valued system) su date kao:

P	**¬P**
T	F
N	T
F	T

$\mathbf{P \wedge Q}$	T	N	F
T	T	F	F
N	F	F	F
F	F	F	F

$\mathbf{P \vee Q}$	T	N	F
T	T	T	T
N	T	F	F
F	T	F	F

$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$	T	N	F
T	T	F	F
N	T	T	T
F	T	T	T

$\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q}$	T	N	F
T	T	F	F
N	F	T	T
F	F	T	T

U *Bochvarovom* sistemu, svi iskazni veznici su takođe normalni.
I ovdje, tautologije se definišu kao formule koje uvijek imaju vrijednost T, a kontradikcije kao one koje uvijek imaju vrijednost F.
Kao i u *Kleenejevom* sistemu, i u *Bochvarovom* sistemu unutrašnjih veznika B_3^I ne postoje ni tautologije ni kontradikcije. Zato što, kad god komponentne složene formule imaju vrijednost N i čitava formula će imati vrijednost N.
U *Bochvarovom* sistemu spoljašnjih veznika B_3^E, svaka formula iz klasične logike koje je tautologija u *Bochvarovom* sistemu tautologija je i u klasičnoj logici. Zatim i, svaka formula iz klasične logike koje je kontradikcija u *Bochvarovom* sistemu spoljašnjih veznika B_3^E je kontradikcija i u klasičnoj logici.

Teorema 2.7 *Svaka logička posljedica u Bochvarovom sistemu unutrašnjih veznika je takođe logička posljedica u klasičnoj iskaznoj logici. (Odnosno, ako $\Sigma \models_{B_3^I} F$ onda $\Sigma \models F$).*

Dokaz: Analogno dokazu teoreme 2.4. ■

Teorema 2.8 *Svaka logička posljedica u Bochvarovom sistemu spoljašnjih veznika je takođe logička posljedica u klasičnoj iskaznoj logici. (Odnosno, ako $\Sigma \models_{B_3^E} F$ onda $\Sigma \models F$).*

Dokaz: Analogno dokazu teoreme 2.4. ■

Ograničene propozicionalne logike su razvijene da bi se omogućila analiza paradoksa.

Bochvarovu ideju o trećoj istinitosnoj vrijednosti dalje je razvijalo nekoliko drugih logičara. Konkretno, aksiomatizacije *Bochvarove* i srodne logike proučavao je *Finn*.

3 Semantika *Kleenejeve* iskazne logike

Kleenejeva trovalentna logika obično se razvija na jeziku koji se zasniva na skupu veznika i konstanti, tj. $K(BA) = \{\wedge, \vee, \neg, 0, 1\}$. Kao posljedica ovog sintaktičkog izbora, formule moraju imati vrijednost na jeziku $K(BA)$ i prirodan izbor je klasa (normalnih) De Morganovih algebri. Podsjetićemo se definicije De Morganove algebre (DM-algebre), ali prije toga neophodno je da definišemo mrežu i neke osnovne osobine mreža.

Definicija 3.1 *Mreža je uređen skup* $(L, \leq)$ *u kome za svaka dva elementa* a *i* b *postoji* $inf\{a, b\}$ *i* $sup\{a, b\}$.

Teorema 3.1 *U svakoj mreži* $(L, \leq)$ *mogu se definisati binarne operacije* $\wedge$ *i* $\vee$*, na sledeći način:*

$$x \wedge y = inf\{x, y\} \quad i \quad x \vee y = sup\{x.y\},$$

gdje su x *i* y *proizvoljni elementi skupa* L.

Dokaz: Pogledati u [12]. ■

Definicija 3.2 *Mreža je struktura* $\boldsymbol{A}$ *na jeziku* $\boldsymbol{L}= \{\wedge, \vee\}$*, gdje su* x, y *i* z *proizvoljni elementi skupa* L*, za koju važe sledeće aksiome:*

(a) $x \wedge y = y \wedge x \quad i \quad x \vee y = y \vee x$ *(komutativni zakoni)*

(b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \quad i \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ *(asocijativni zakoni)*

(c) $x \wedge (y \vee x) = x \quad i \quad x \vee (y \wedge x) = x$ *(apsorbcioni zakoni)*

Ove dvije definicije mreže su ekvivalentne, jer komutativnost slijedi neposredno iz definicije infimuma i supremuma skupa (redoslijed elemenata nije svojstvo skupa), asocijativnost važi jer se obe strane svake jednakosti odnose na isti skup $\{x, y, z\}$. Za apsorpciju treba uočiti da je $x \leq x \vee y$, pa je na osnovu osobina infimuma i supremuma $x \wedge (x \vee y) = x$ i slično za drugu jednakost. Takođe, poznato je da za algebarsku strukturu koja ispunjava uslove iz definicije 3.2 može da se konstruiše mreža takva da je $x \leq y$ akko $x \wedge y = x$.

Ukoliko postoje, infimum i supremum skupa L su redom najmanji (0) i najveći (1) element, pa možemo dati sledeću definiciju.

Definicija 3.3 *Mreža je ograničena ako je ograničena kao uređen skup, tj. ako posjeduje najmanji element* 0 *i najveći element* 1.

Teorema 3.2 *U svakoj mreži važe identiteti :*

$$x \wedge x = x \quad i \quad x \vee x = x$$

Ti identiteti se zovu idempotentni zakoni.

Ovi zakoni slijede iz definicije 3.2.

Definicija 3.4 *Identiteti* $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad i \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ *su poznati kao distributivni zakoni.*

Definicija 3.5 *Distributivna mreža je mreža u kojoj važe distributivni zakoni.*

Ako proširimo jezik **L** sa dvije konstante 0 (najmanji element) i 1 (najveći element), tada važe i sledeće aksiome:

(1) $0 \wedge x = 0 \quad$ i $\quad 0 \vee x = x$;

(2) $1 \wedge x = x \quad$ i $\quad 1 \vee x = 1$.

3.1 Dvovalentna semantika

Podsjetimo se prvo kako smo definisali klasičnu (dvovalentnu) semantiku.

Neka je F_m algebra formula jezika $L = E \cup K(BA)$, gdje je $E = \{p_i : i \in \omega\}$ skup iskaznih slova, $K(BA) = \{\wedge, \vee, \neg, 0, 1\}$ skup veznika i konstanti. Algebra formula F_m je slobodna algebra u klasi svih struktura tipa $K(BA)$ imajući i E kao skup slobodnih generatora.

Klasična semantika se obično predstavlja kroz koncept „vrijednost u datoj valuaciji".

Valuacija je funkcija $v : E \to 2$. Svaka valuacija v indukuje morfizam $Val_v : F_m \to 2$, gdje je $2 = \{0, 1\}$. Kažemo

„formula α je tačna u valuaciji v akko $Val_v(\alpha) = 1$."

S druge strane, klasična (2-valentna) semantika može biti predstavljena i kao morfizam M iz F_m u partitivni skup:

$$\mathcal{P}(2^\omega) = (P(2^\omega), \cap, \cup, ^-, \emptyset, 2^\omega)$$

pa definišemo $M : F_m \to \mathcal{P}(2^\omega)$ kao (jedinstveni) morfizam indukovan sa $g : E \to P(2^\omega)$ gdje $g(p_i) = \{s \in 2^\omega : s(i) = 1\}$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} M(\alpha \wedge \beta) &= M(\alpha) \cap M(\beta) \\ M(\alpha \vee \beta) &= M(\alpha) \cup M(\beta) \\ M(\neg\alpha) &= \overline{M(\alpha)} \\ M(0) &= \emptyset \\ M(1) &= 2^\omega. \end{aligned}$$

Kažemo da je s model od α akko $s \in M(\alpha)$ i pišemo $s \models \alpha$. Dakle, značenje formule α je skup njenih modela, a model od α je element njenog značenja.

Ovi različiti pristupi klasičnoj semantici mogu se povezati na sledeći način. Prvo primjetimo da postoji bijekcija između E i ω, pa možemo pridružiti valuaciji v niz s_v tako da je $s_v(i) = v(p_i)$, i možemo pridružiti nizu s valuaciju v_s tako da je $v_s(p_i) = s(i)$, za sve $i \in \omega$. Tada možemo zaključiti:

$$s \in M(\alpha) \text{ akko } Val_{v_s}(\alpha) = 1.$$

Dakle, značenje formule α može biti definisano preko koncepta istine u odnosu na v.

Može se reći i da:

$$s_v \in M(\alpha) \text{ akko } Val_v(\alpha) = 1,$$

pa istinitost od α u odnosu na v može biti definisano preko koncepta značenja.

Sada možemo definisati koncept logičke posljedice.

Definicija 3.6 *Za sve formule* α, β *važi:* $\alpha \models \beta$ *akko* $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$.

U slučaju da je skup formula beskonačan skup, tada preslikavanje M proširujemo na skup formula ovako:
$M(\Sigma) = \bigcap\{M(\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$. Tada kažemo $\Sigma \models \alpha$ akko $M(\Sigma) \subseteq M(\alpha)$.

Može se pokazati da je $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$ akko za sve v važi $Val_v(\alpha) \leq Val_v(\beta)$ i $M(\Sigma) \subseteq M(\alpha)$ akko $\bigwedge\{Val_v(\sigma) : \sigma \in \Sigma\} \leq Val_v(\alpha)$, čime je pokazano da se logička posljedica može ekvivalentno definisati i u terminima značenja i u terminima valuacije.

Možemo reći da je α tautologija akko $1 \models \alpha$, što znači da je tautologija posljedica praznog skupa pretpostavki, jer $M(\emptyset) = \bigcap \emptyset = 2^\omega = M(1)$.

3.2 Trovalentna semantika

Sada na isti način, možemo definisati 3-valentnu semantiku *Kleenejeve* logike kao što smo definisali 2-valentnu semantiku klasične iskazne logike.

Prvo, možemo uvesti 3-valentnu semantiku kroz koncept istine uzimajući u obzir da je valuacija funkcija $v : E \to 3$, gdje je $3 = \{0, n, 1\}$. Svaka takva valuacija v može biti proširena na jedinstveni morfizam $Val_v : F_m \to 3$. Reći ćemo da je:

„α je tačna u valuaciji v ako $Val_v(\alpha) = 1$,
α je netačna u valuaciji v ako je $Val_v(\alpha) = 0$, i
α je nedefinisana u valuaciji v ako je $Val_v(\alpha) = n$."

Iz bilo kog skupa X možemo napraviti tzv. skup $\mathcal{D}(X)$ svih parcijalnih skupova na X. *Parcijalni skup* na X je par (A, B) gdje $A, B \subseteq X$ i $A \cap B = \emptyset$. A predstavlja *pozitivne slučajeve* i B predstavlja *negativne slučajeve* parcijalnih osobina (tj. osobine nedefinisane za elemente $X \setminus (A \cup B)$). Označimo sa $\mathcal{D}(X)$ algebru čije su operacije definisane na sledeći način:

$$
\begin{gathered}
(A, B) \wedge (A', B') = (A \cap A', B \cup B'), \\
(A, B) \vee (A', B') = (A \cup A', B \cap B'), \\
\neg(A, B) = (B, A), \\
0 = (\emptyset, X), \\
1 = (X, \emptyset), \\
n = (\emptyset, \emptyset).
\end{gathered}
$$

Uvodimo relaciju uređenja na parcijalnim skupovima ovako:

$$(A, B) \leq (A', B') \text{ akko } (A, B) \wedge (A', B') = (A, B).$$

Tada imamo $(A,B) \leq (A^{'},B^{'})$ akko $A \subseteq A^{'}$ i $B^{'} \subseteq B$. Svaka podalgebra $\mathbf{A}$ od $\mathcal{D}(X)$ naziva se *poljem* na X.

Dalje, definišemo 3-valentnu semantiku, slično kao 2-valentnu semantiku, imajući na umu da će uloge koje su igrale 2 i $\mathcal{P}(2^\omega)$ u dvovalentnoj logici sad preuzeti 3 i $\mathcal{D}(3^\omega)$.

Neka je F_m algebra formula na jeziku $L = E \cup K(DMF)$, gdje je $K(DMF) = \{\wedge, \vee, \neg, 0, 1, n\}$. Definišemo *značenje formula* kao morfizam $M : F_m \to \mathcal{D}(3^\omega)$ indukovan sa $g : E \to \mathcal{D}(3^\omega)$, gdje

$$g(p_i) = (\{s \in 3^\omega : s(i) = 1\}, \{s \in 3^\omega : s(i) = 0\}).$$

Tada imamo:

$$\begin{aligned}
M(\alpha \wedge \beta) = M(\alpha) \wedge M(\beta) &= (M(\alpha)_0 \cap M(\beta)_0, M(\alpha)_1 \cup M(\beta)_1),\\
M(\alpha \vee \beta) = M(\alpha) \vee M(\beta) &= (M(\alpha)_0 \cup M(\beta)_0, M(\alpha)_1 \cap M(\beta)_1),\\
M(\neg\alpha) = \neg(M(\alpha)) &= (M(\alpha)_1, M(\alpha)_0),\\
M(0) &= (\emptyset, 3^\omega)\\
M(1) &= (3^\omega, \emptyset),\\
M(n) &= (\emptyset, \emptyset).
\end{aligned}$$

Dakle, *značenje formula* od α u 3-valentnoj semantici je parcijalni skup $M(\alpha)$ na 3^ω. Elementi od $M(\alpha)_0$ i $M(\alpha)_1$ su, redom, *pozitivni* i *negativni* modeli od α. Kao i u klasičnoj semantici, može se uspostaviti ekvivalencija između ta dva pristupa. Prvo primjetimo da postoji bijekcija između E^ω i sekvenci 3^ω, pridružujući valuaciji v sekvencu s_v tako da je $s_v(i) = v(p_i)$, i možemo pridružiti nizu s valuaciju v_s tako da je $v_s(p_i) = s(i)$. Sada možemo dokazati sledeće teoreme.

Teorema 3.3 *Neka je α formula, tada važi:*

$$M(\alpha) = (\{s \in 3^\omega : Val_{v_s}(\alpha) = 1\}, \{s \in 3^\omega : Val_{v_s}(\alpha) = 0\}).$$

Dokaz:
Ako je α promjenljiva p_i, tada imamo
$M(p_i) = (\{s : s(i) = 1\}, \{s : s(i) = 0\}) = (\{s : Val_{v_s}(p_i) = 1\}, \{s : Val_{v_s}(p_i) = 0\})$.

Ako je $\alpha = \beta \wedge \gamma$ tada imamo
$M(\beta \wedge \gamma) = M(\beta) \wedge M(\gamma) = (M(\beta)_0 \cap M(\gamma)_0, M(\beta)_1 \cup M(\gamma)_1)$.
Dalje imamo
$M(\beta)_0 \cap M(\gamma)_0 = \{s : Val_{v_s}(\beta) = 1\} \cap \{s : Val_{v_s}(\gamma) = 1\} = \{s : Val_{v_s}(\beta \wedge \gamma) = 1\}$ i
$M(\beta)_0 \cup M(\gamma)_0 = \{s : Val_{v_s}(\beta) = 0\} \cap \{s : Val_{v_s}(\gamma) = 0\} = \{s : Val_{v_s}(\beta \wedge \gamma) = 0\}$

Drugi slučajevi se dokazuju analogno. ∎

Teorema 3.4 *Za svaku formulu α i svaku valuaciju $v : E \to 3$ važi:*

$$Val_v(\alpha) = \begin{cases} 1 & ako \quad s_v \in M(\alpha)_0,\\ 0 & ako \quad s_v \in M(\alpha)_1,\\ n & inače. \end{cases}$$

Dokaz:

Ako je α promjenljiva p_i, tada imamo:

- $Val_v(p_i) = 1$
  akko $v(p_i) = 1$ akko $s_v(i) = 1$ akko $s_v \in M(p_i)_0$
- $Val_v(p_i) = 0$
  akko $v(p_i) = 0$ akko $s_v(i) = 0$ akko $s_v \in M(p_i)_1$
- $Val_v(p_i) = n$
  akko $v(p_i) = n$ akko $s_v \notin M(p_i)_0$ i $s_v \notin M(p_i)_1$

Ako je $\alpha = \beta \wedge \gamma$, tada imamo:

- $Val_v(\beta \wedge \gamma) = 1$
  akko $Val_v(\beta) = 1$ i $Val_v(\gamma) = 1$
  akko $s_v \in M(\beta)_0$ i $s_v \in M(\gamma)_0$ akko $s_v \in M(\beta)_0 \cap M(\gamma)_0$
  akko $s_v \in M(\beta \wedge \gamma)_0$
- $Val_v(\beta \wedge \gamma) = 0$
  akko $Val_v(\beta) = 0$ ili $Val_v(\gamma) = 0$
  akko $s_v \in M(\beta)_1$ ili $s_v \in M(\gamma)_1$ akko $s_v \in M(\beta)_1 \cup M(\gamma)_1$
  akko $s_v \in M(\beta \wedge \gamma)_1$
- $Val_v(\beta \wedge \gamma) = n$ tada $s_v \notin M(\beta \wedge \gamma)_0$ i $s_v \notin M(\beta \wedge \gamma)_1$
  (jer smo dokazali da $s_v \in M(\beta \wedge \gamma)_0 \Rightarrow Val_v(\beta \wedge \gamma) = 1$ i da
  $s_v \in M(\beta \wedge \gamma)_1 \Rightarrow Val_v(\beta \wedge \gamma) = 0$).

U drugom smjeru, ako $s_v \notin M(\beta \wedge \gamma)_0$ i $s_v \notin M(\beta \wedge \gamma)_1$ tada $Val_v(\beta \wedge \gamma)$ mora biti n (jer ne može biti 0 ili 1, a kodomen od Val_v je 3).

Na sličan način pokazujemo i za ostale veznike. ∎

Uvodimo koncept logičke posljedice u *Kleenejevoj* 3-valentnoj logici.

Definicija 3.7 *Za sve formule α i β važi:*

$$\alpha \models \beta \textit{ akko } M(\alpha) \leq M(\beta) \textit{ tj. } M(\alpha)_0 \subseteq M(\beta)_0 \textit{ i } M(\beta)_1 \subseteq M(\alpha)_1.$$

U slučaju beskonačnog skupa premisa, prvo proširimo M na skup formula Σ ovako:

$$M(\Sigma) = \bigwedge\{M(\sigma) : \sigma \in \Sigma\} = (\bigcap\{M(\sigma)_0 : \sigma \in \Sigma\}, \bigcup\{M(\sigma)_1 : \sigma \in \Sigma\}).$$

Sledeća teorema pokazuje da se logička posljedica može ekvivalentno definisati i u terminima značenja formula i u terminima valuacije.

Teorema 3.5 *Za sve skupove formula Σ i svaku formulu α važi: $M(\Sigma) \leq M(\alpha)$ akko za sve $v : E \to 3$ važi*

$$\bigwedge\{Val_v(\sigma) : \sigma \in \Sigma\} \leq Val_v(\alpha).$$

Dokaz:

($\Rightarrow$) Pretpostavimo $M(\Sigma) \leq M(\alpha)$. Treba pokazati da $\bigwedge\{Val_v(\sigma) : \sigma \in \Sigma\} \leq Val_v(\alpha)$.

- 1. slučaj: $\bigwedge\{Val_v(\sigma) : \sigma \in \Sigma\} = 0$ jasno.
- 2. slučaj: $\bigwedge\{Val_v(\sigma) : \sigma \in \Sigma\} = 1$, tada $Val_v(\sigma) = 1, \forall \sigma \in \Sigma$
Zbog teoreme 3.4 onda važi $s_v \in M(\sigma)_0, \forall \sigma \in \Sigma$, pa $s_v \in \bigcap\{M(\sigma)_0 : \sigma \in \Sigma\}$.
Iz pretpostavke onda važi $\bigcap\{M(\sigma)_0 : \sigma \in \Sigma\} \subseteq M(\alpha)_0$, pa $s_v \in M(\alpha)_0$ i $Val_v(\alpha) = 1$ (gdje važi $v = v_s$).
- 3. slučaj: $\bigwedge\{Val_v(\sigma) : \sigma \in \Sigma\} = n$. Tada $\forall \sigma \in \Sigma$, $Val_v(\sigma) \in \{n, 1\}$.
Možemo dokazati da je $Val_v(\alpha) \neq 0$.
Pretpostavimo suprotno $Val_v(\alpha) = 0$. Tada $s_v \in M(\alpha)_1$. Ali iz naše pretpostavke važi $M(\alpha)_1 \subseteq \bigcup\{M(\sigma)_1 : \sigma \in \Sigma\}$, pa $s_v \in M(\sigma)_1$, za neko $\sigma \in \Sigma$.
Tada $Val_v(\sigma) = 0$, (zbog teoreme 3.4) što je u kontradikcija sa pretpostavkom.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo $\bigwedge\{Val_v(\sigma) : \sigma \in \Sigma\} \leq Val_v(\alpha)$. Treba $M(\Sigma) \leq M(\alpha)$.

- Prvo ćemo pokazati $\bigcap\{M(\sigma)_0 : \sigma \in \Sigma\} \subseteq M(\alpha)_0$.
Neka $s \in \bigcap\{M(\sigma)_0 : \sigma \in \Sigma\}$, tada je $s \in M(\sigma)_0$, $\forall \sigma \in \Sigma$. Zbog teoreme 3.4 važi $Val_{v_s}(\sigma) = 1$, $\forall \sigma \in \Sigma$, pa važi $\bigwedge\{Val_{v_s}(\sigma) : \sigma \in \Sigma\} = 1$ i zbog pretpostavke $Val_{v_s}(\alpha) = 1$. Zatim, $s \in M(\alpha)_0$ slijedi iz teoreme 3.4, gdje $s = s_{v_s}$.
- Zatim pokazujemo $M(\alpha)_1 \subseteq \bigcup\{M(\sigma)_1 : \sigma \in \Sigma\}$.
Neka $s \in M(\alpha)_1$, tada zbog teoreme 3.4 $Val_{v_s}(\alpha) = 0$ i iz pretpostavke važi $\bigwedge\{Val_{v_s}(\sigma) : \sigma \in \Sigma\} = 0$. Tada je $Val_{v_s}(\sigma) = 0$, za neko $\sigma \in \Sigma$. Kako je $s_{v_s} = s$, opet zbog teoreme 3.4 imamo $s \in M(\sigma)_1$ i $s \in \bigcup\{M(\sigma)_1 : \sigma \in \Sigma\}$.

$\blacksquare$

Posljedica 3.1 *Za sve formule α i β važi: $\alpha \models \beta$ akko za sve $v : E \to 3, Val_v(\alpha) \leq Val_v(\beta)$.*

Uporedimo neke pojmove klasične i 3-valentne semantike *Kleenejeve* logike. Prvo razmotrimo pojam tautologije. Tautologiju možemo definisati kao formulu α koja zadovoljava uslov $1 \models \alpha$ tj. $(3^\omega, \emptyset) \leq M(\alpha)$. No, tautologije u 3-valentnoj logici nisu jako interesantne. U stvari, svaka tautologija mora da sadrži konstantu 0 ili 1. Ako pretpostavimo da nema ni 0 ni 1 u α, tada $Val_v(\alpha) = n$ kada $v(p_i) = n$, za sve $i \in \omega$, pa $s_v \notin M(\alpha)_0$ i α nije tautologija. Npr. *zakon isključenja trećeg* (*tertium non datur*) nije tautologija.

Druge razlike možemo vidjeti između relacija $\models$ i $\Rightarrow$. Ako definišemo $\alpha \Rightarrow \beta$ kao $\neg\alpha \vee \beta$, klasična ekvivalenicija $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ akko $\Sigma \models \alpha \Rightarrow \beta$ više ne važi u *Kleenejevoj* logici.
Implikacija slijeva nadesno, poznata kao *teorema dedukcije* ne važi jer $p_i \models p_i$ i $\emptyset \not\models p_i \Rightarrow p_i$. U stvari $M(\emptyset) = M(\bigcap \emptyset, \bigcup \emptyset) = (3^\omega, \emptyset) = M(1)$, ali $M(\neg p_i \vee p_i) \neq (3^\omega, \emptyset)$.
Implikaciija sdesna nalijevo, poznata kao *modus ponens* ne važi jer $\neg p_i \models p_i \Rightarrow 0$, i $\{\neg p_i, p_i\} \not\models 0$. U stvari, $M(\neg p_i \vee 0) = (M(p_i)_1, M(p_i)_0) \vee (\emptyset, 3^\omega) = (M(p_i)_1, M(p_i)_0) = M(\neg p_i)$, ali $M(\neg p_i) \wedge M(p_i) = (\emptyset, M(p_i)_0 \cup M(p_i)_1) \nleq (\emptyset, 3^\omega)$.

4 DMF-algebre

Definicija 4.1 *Struktura* $\boldsymbol{A}$ *na* $\boldsymbol{L}= \{\wedge, \vee, \neg, 0, 1\}$ *gdje je* $\neg$ *unarna operacija, sa konstantama* 0 *i* 1 *je De Morganova algebra (DM-algebra) akko je* $\boldsymbol{A}$ *distributivna mreža sa najmanjim elementom* 0 *i najvećim elementom* 1 *koja zadovoljava zakon duple negacije:* $\neg\neg x = x$ *i De Morganove zakone:* $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ *i* $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$*. (To znači da je* $\neg$ *involucija i dualni automorfizam.)*

U ovom radu pričamo o 3-valentnoj logici na jeziku $K(DMF) = \{\wedge, \vee, \neg, 0, 1, n\}$ i prema tome posmatramo DMF-algebre, tj **De Morganove algebre sa jednom fiksnom tačkom za negaciju**, kao domene istinitosnih vrijednosti.(*De Morgan algebra with fixed point–DMF*)

Definicija 4.2 *DMF-algebra je algebra* $\boldsymbol{A}= (A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1, n)$ *gdje je* $(A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ *DM-algebra u kojoj je* $\neg n = n$*.*

Sa sintaktičke strane, sada imamo naziv za međuvrijednost n, što je potrebno da bi se neodređenost mogla izraziti. Aksiome za n čine dostupnim i oslabljene forme *teoreme dedukcije* i *modus ponensa.*

Sa semantičke strane, domen je sada ograničen, jer je svaka DMF-algebra očito DM-algebra, ali ne može se svaka DM-algebra proširiti do DMF-algebre (npr. svaka Bulova algebra je DM-algebra, ali ne postoji Bulova algebra sa elementom x takvim da važi $\neg x = x$).

4.1 Prosti ideali i morfizmi DMF-algebre

Glavni alat u dokazivanju teoreme kompletnosti za 3-valentnu logiku daje modifikovana verzija teoreme o prostom idealu u DMF-algebrama.

Definicija 4.3 *Ideal u mreži* L *je njen neprazni podskup* I *koji ispunjava uslove:*

(1) iz $a, b \in I$ *slijedi* $a \vee b \in I$*;*

(2) iz $a \in I$ *i* $c \leq a$ *slijedi* $c \in I$*.*

Definicija 4.4 *Filter u mreži* L *je njen neprazni podskup* F *koji ispunjava uslove:*

(1) iz $a, b \in F$ *slijedi* $a \wedge b \in F$*;*

(2) iz $a \in F$ *i* $a \leq c$ *slijedi* $c \in F$*.*

Definicija 4.5 *Ideal* I *je prost akko je pravi*[2] *i ako iz* $x \wedge y \in I$ *slijedi* $x \in I$ *ili* $y \in I$*.*

Definicija 4.6 *Filter* F *je prost akko je pravi*[3] *i ako iz* $x \vee y \in F$ *slijedi* $x \in F$ *ili* $y \in F$*.*

Postoji bijekcija između prostih ideala i prostih filtera, jer ideal je prost akko je njegov komplement prost filter.

[2] Ideal u mreži **L** je pravi ako se ne poklapa sa **L**.
[3] Filter u mreži **L** je pravi ako se ne poklapa sa **L**.

Teorema 4.1 [9] *Neka je $\boldsymbol{A}$ distributivna mreža, I i F su redom ideal i filter u $\boldsymbol{A}$ tako da važi $I \cap F = \emptyset$. Tada:*

(1) postoji prost ideal J takav da važi $I \subseteq J$ i $J \cap F = \emptyset$,

(2) postoji prost filter G takav da važi $F \subseteq G$ i $G \cap I = \emptyset$.

Posljedica 4.1 *Ako su x i y elementi distributivne mreže $\boldsymbol{A}$ i $x \nleq y$, tada postoji prost ideal I u $\boldsymbol{A}$ takav da $y \in I$ i $x \notin I$, i postoji prost filter F u $\boldsymbol{A}$ takav da $x \in F$ i $y \notin F$.*

Dokaz: Neka je $x \downarrow$ tzv. glavni ideal $\{a \in A : a \leq x\}$ i neka je $y \uparrow$ tzv. glavni filter $\{a \in A : y \leq a\}$.
Oni nemaju zajedničkih elemenata, jer $x \nleq y$, pa zbog teoreme 4.1 znamo da postoji prost ideal J takav da važi $x \downarrow \subseteq J$ i $J \cap y \uparrow = \emptyset$, i postoji prost filter G takav da važi $y \uparrow \subseteq G$ i $G \cap x \downarrow = \emptyset$. ■

Postoji čvrsta veza između prostih ideala i epimorfizma $\phi : \mathbf{A} \rightarrow 2$, gdje je $\mathbf{A}$ mreža.
Sa jedne strane vidimo, da ako je ϕ epimorfizam tada je skup $I_\phi = \phi^{-1}\{0\}$ prost ideal u $\mathbf{A}$.
Sa druge strane, možemo definisati, za svaki prost ideal I u A, funkciju $\phi_I : \mathbf{A} \rightarrow 2$ na sledeći način:

$$\phi_I(a) = \begin{cases} 0 & \text{ako} \quad a \in I, \\ 1 & \text{ako} \quad a \notin I. \end{cases}$$

Teorema 4.2 [9] *Ako je $\boldsymbol{A}$ ograničena mreža i I prost ideal u $\boldsymbol{A}$, tada je ϕ_I :$\boldsymbol{A} \rightarrow 2$ morfizam ograničene mreže, a ako je $\boldsymbol{A}$ Bulova algebra onda je ϕ_I Bulov morfizam.*

Dualno tvrđenje važi za filtere.

Mi ćemo dokazati slične rezultate za DMF-algebre, gdje ulogu prostog ideala I (ili filtera F) koji razdvaja tačke $x \nleq y$ preuzima sad par (I, F), gdje je $I \cap F = \emptyset$ i $F = \neg I$ i gdje ulogu morfizma ϕ_I :$\mathbf{A} \rightarrow 2$ preuzima ϕ_I :$\mathbf{A} \rightarrow 3$.
Pozvaćemo se na neke od rezultata, koji su dokazani u [10].

Definicija 4.7 *Neka je I ideal i F filter mreže $\boldsymbol{A}$. Tada za bilo koji par (I, F) relacija $\equiv_{I,F}$ se definiše na sledeći način:*

$$a \equiv_{I,F} b \text{ akko postoje } i \in I \text{ i } f \in F \text{ takvi da je } (a \vee i) \wedge f = (b \vee i) \wedge f.$$

Lema 4.1 *Neka je $\boldsymbol{A}$ distributivna mreža, I ideal i F filter. Tada za sve $a, b \in \boldsymbol{A}$ važi:*

$$a \equiv_{I,F} b \quad \text{akko} \quad (\exists i \in I)(\exists f \in F)((a \wedge f) \vee i = (b \wedge f) \vee i).$$

Definicija 4.8 *Relacija ekvivalencije Θ na mreži $(L, \wedge, \vee)$ je njena kongruencija ako i samo ako i za sve $x, y, z \in L$*

$$\text{iz } x\Theta y \text{ slijedi } (x \wedge z)\Theta(y \wedge z) \text{ i } (x \vee z)\Theta(y \vee z).$$

Zatim pokazujemo sledeću teoremu.

Teorema 4.3 *Ako je $\boldsymbol{A}$ distributivna mreža, I ideal i F filter u $\boldsymbol{A}$, onda je relacija $\equiv_{I,F}$ relacija kongruencije na $\boldsymbol{A}$.*

Dokaz: $\equiv_{I,F}$ je refleksivna i simetrična relacija (lako se uočava). Pokazujemo tranzitivnost: pretpostavimo $a \equiv_{I,F} b$ i $b \equiv_{I,F} c$. Treba da dokažemo $a \equiv_{I,F} c$.
Iz pretpostavke imamo da postoje $i, j \in I$ i $f, g \in F$ tako da

$$(a \vee i) \wedge f = (b \vee i) \wedge f \quad \text{i} \quad (b \vee j) \wedge g = (c \vee j) \wedge g.$$

Tada imamo:

$$\begin{aligned}
(a \vee (i \vee j)) \wedge (f \wedge g) &= ((a \vee i) \wedge (f \wedge g)) \vee (j \wedge (f \wedge g)) \\
&= (((b \vee i) \wedge f) \wedge g) \vee (j \wedge (f \wedge g)) \\
&= ((b \vee i) \wedge (f \wedge g)) \vee (j \wedge (f \wedge g)) \\
&= ((b \vee i) \vee j) \wedge (f \wedge g) \\
&= ((b \vee j) \vee i) \wedge (f \wedge g) \\
&= ((b \vee j) \wedge (f \wedge g)) \vee (i \wedge (f \wedge g)) \\
&= (((c \vee j) \wedge g) \wedge f) \vee (i \wedge (f \wedge g)) \\
&= ((c \vee j) \wedge (f \wedge g)) \vee (i \wedge (f \wedge g)) \\
&= ((c \vee j) \vee i) \wedge (f \wedge g) \\
&= (c \vee (i \vee j)) \wedge (f \wedge g)
\end{aligned}$$

što implicira $a \equiv_{I,F} c$.
Dalje pokazujemo da $\equiv_{I,F}$ čuva operaciju $\wedge$, tj.

$$\text{ako } a \equiv_{I,F} a^{'} \text{ i } b \equiv_{I,F} b^{'} \text{ onda } a \wedge b \equiv_{I,F} a^{'} \wedge b^{'}$$

Iz pretpostavke imamo

$$(\exists i \in I)(\exists f \in F)((a \wedge f) \vee i = (a^{'} \wedge f) \vee i)$$

i

$$(\exists j \in I)(\exists g \in F)((b \wedge g) \vee j = (b^{'} \wedge g) \vee j).$$

Pa imamo:

$$\begin{aligned}
((a \wedge b) \wedge (f \wedge g)) \vee (i \vee j) &= ((a \wedge f) \wedge (b \wedge g)) \vee (i \vee j) \\
&= (((a \wedge f) \vee i) \wedge ((b \wedge g) \vee i)) \vee j \\
&= (((a^{'} \wedge f) \vee i) \wedge ((b \wedge g) \vee i)) \vee j \\
&= ((a^{'} \wedge f) \wedge (b \wedge g)) \vee (i \vee j) \\
&= (((a^{'} \wedge f) \vee j) \wedge ((b \wedge g) \vee j)) \vee i \\
&= (((a^{'} \wedge f) \vee j) \wedge ((b^{'} \wedge g) \vee j)) \vee i \\
&= ((a^{'} \wedge f) \wedge (b^{'} \wedge g)) \vee (i \vee j) \\
&= ((a^{'} \wedge b^{'}) \wedge (f \wedge g)) \vee (i \wedge j).
\end{aligned}$$

što implicira $a \wedge b \equiv_{I,F} a^{'} \wedge b^{'}$.
Na isti način se pokazuje da $\equiv_{I,F}$ čuva i operaciju $\vee$. ■

Lema 4.2 *U DM-algebri $\boldsymbol{A}$ za sve $a, b \in \boldsymbol{A}$ važi:*

$$a \leq b \Rightarrow \neg b \leq \neg a.$$

Dokaz: Neka za proizvoljne elemente a, b važi $a \leq b$. Tada je: $a \wedge b = a$, odnosno $\neg(a \wedge b) = \neg a$. Sada, zbog De Morganovih zakona važi: $\neg a \vee \neg b = \neg a$ tj. imamo da je $\neg b \leq \neg a$. ■

Rezultati koji su takođe značajni su i sledeće teoreme.

Teorema 4.4 *Ako je $\boldsymbol{A}$ DM-algebra, onda*

(i) X je ideal akko $\neg X$ je filter,

(ii) X je filter akko $\neg X$ je ideal,

(iii) X je prost ideal (filter) akko $\neg X$ je prost filter (ideal).

Dokaz:
(i) ($\Rightarrow$) Neka je X ideal. Treba da dokažemo da je $\neg X$ filter.
Odnosno, da bi $\neg X$ bio filter, treba da dokažemo da važi, po definiciji:

(1) ako $a, b \in \neg X$ onda je $a \wedge b \in \neg X$ i

(2) ako $a \in \neg X$ i $a \leq b$ onda $b \in \neg X$

(1) Neka $a, b \in \neg X$. Tada $\neg a, \neg b \in \neg\neg X$, tj $\neg a, \neg b \in X$. Kako je X ideal, slijedi $\neg a \vee \neg b \in X$. Onda $\neg(\neg a \vee \neg b) \in \neg X$ te zbog De Morganovih zakona i zakona duple negacije dobijamo $a \wedge b \in \neg X$.

(2) Neka je $a \in \neg X$ i $a \leq b$. Zbog leme 4.2 važi $\neg b \leq \neg a$. Takođe $\neg a \in \neg\neg X$, tj. $\neg a \in X$. Sada, pošto je X ideal važi $\neg b \in \neg X$, te je konačno, zbog duple negacije $b \in X$.
Dakle, $\neg X$ je filter.
($\Leftarrow$) Dualno smjeru ($\Rightarrow$).

(ii) Analogno dokazu pod (i) jer je $\neg\neg X = X$.

(iii) Neka je X prost ideal. Tada je $\neg X$ filter (zbog (i)). Još treba pokazati da je prost.
Ako $a \vee b \in \neg X$ onda $\neg a \wedge \neg b \in X$ i $\neg a \in X$ ili $\neg b \in X$, jer je X prost.
Slijedi $a \in \neg X$ ili $b \in \neg X$ pa je $\neg X$ prost filter.
Na isti način dokazujemo i drugi smjer. ■

Označimo sa $\mathbf{A}/_{I,F}$ faktor algebru $\mathbf{A}/_{\equiv I,F}$. Može se pokazati da je faktor $\mathbf{A}/_{I,F}$ ograničena mreža koja nije trivijalna akko $I \cap F = \emptyset$. Dokaz vidjeti u [10].

Napomenimo da je $|x|_{I,F}$ klasa po x. Pisaćemo jednostavnije $|x|$ umjesto $|x|_{I,F}$ i $\equiv$ umjesto $\equiv_{I,F}$.

Teorema 4.5 *Neka je $\boldsymbol{A}$ De Morganova algebra. Ako je I ideal u $\boldsymbol{A}$, i $F = \neg I$ gdje je $\neg I = \{\neg i : i \in I\}$, onda je $\equiv_{I,F}$ relacija kongruencije i $\boldsymbol{A}/_{I,F}$ je De Morganova algebra.*

Dokaz: Zbog teoreme 4.4, $\neg I$ je filter, pa $\equiv_{I,F}$ čuva operaciju $\wedge$ i $\vee$ (zbog teoreme 4.3).
Ako $a \equiv_{I,F} b$, onda $(a \vee i) \wedge f = (b \vee i) \wedge f$ za neke $i \in I$ i $f \in F$.
Zbog De Morganovih zakona tada će važiti

$$(\neg a \wedge \neg i) \vee \neg f = (\neg b \wedge \neg i) \vee \neg f,$$

gdje $\neg i \in F$, $\neg f \in I$, pa važi $\neg a \equiv_{I,F} \neg b$.
Dakle, $\equiv_{I,F}$ čuva operaciju $\neg$ i jeste kongruencija na $\mathbf{A}$.
Važiće da je $\mathbf{A}/_{I,F}$ De Morganova algebra sa najmanjim elementom $|0|$ i najvećim elementom $|1|$, zato što je $\mathbf{A}$ De Morganova algebra i važi da je $F = \neg I$.

$\blacksquare$

Ovi rezultati se odmah mogu proširiti na DMF-algebre, pa za svaki par $(I, \neg I)$ u DMF-algebri $\mathbf{A}$ postoji homomorfizam iz $\mathbf{A}$ u DMF-algebru $\mathbf{A}/_{I,\neg I}$, koji je netrivijalan akko $I \cap \neg I = \emptyset$.

Teorema 4.6 *Za svaki ideal I DMF-algebre važi $I \cap \neg I = \emptyset$ akko $n \notin I$.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Neka važi $I \cap \neg I = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, $n \in I$. Tada, uslov implicira $\neg n \in \neg I$, ali $n = \neg n$ pa je $I \cap \neg I \neq \emptyset$, što je u kontradikcija sa pretpostavljenim.

($\Leftarrow$) Neka važi $n \notin I$. Pretpostavimo suprotno, $x \in I \cap \neg I$. Onda iz $x \in \neg I$ imamo $x = \neg i$, za neko $i \in I$ i iz $x \in I$ imamo $i \vee \neg i \in I$. Kako u DMF-algebri važi $n \leq i \vee \neg i$, onda važi $n \in I$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom. $\blacksquare$

Teorema 4.7 *Neka je $\boldsymbol{A}$ DM-algebra i I prost ideal od $\boldsymbol{A}$. Nula i jedinica od $\boldsymbol{A}/_{I,\neg I}$ su redom I i $\neg I$.*

Dokaz: Znamo $I \subseteq 0$ (jer za bilo koju distributivnu mrežu gdje su I i F redom ideal i filter važi da je $A/_{I,F}$ distributivna ograničena mreža gdje $0 = |i|$, za sve $i \in I$ i $1 = |f|$ za sve $f \in F$)[4].

Treba još $0 \subseteq I$. Pretpostavimo da važi $x \in 0$. Tada $x \equiv i$, za neko $i \in I$ pa imamo $j \in I, f \in \neg I$ tako da $(x \vee j) \wedge f = (i \vee j) \wedge f$. Obe strane jednakosti su elementi od I. Kako je I prost i $f \notin I$ (jer $I \cap \neg I = \emptyset$), onda mora $x \vee j \in I$ i $x \in I$. $\blacksquare$

Teorema 4.8 *Ako je $\boldsymbol{A}$ DMF-algebra i $a \nleq b$, onda postoji par (I, F) takav da je:*

(1.) I je prost ideal u $\boldsymbol{A}$ i F je prost filter u $\boldsymbol{A}$, gdje $I \cap F = \emptyset$,

(2.) $F = \neg I$,

(3.) $a \notin I$ i $b \in I$, ili $a \in F$ i $b \notin F$.

Dokaz: Ako je $a \nleq b$ onda $a \uparrow \cap b \downarrow = \emptyset$.
Zbog posljedice 4.1 postoji prost ideal I takav da $b \downarrow \subseteq I$ i $I \cap a \uparrow = \emptyset$.
Pa $b \in I$ i $a \notin I$.

(1) Ako $n \notin I$, onda $I \cap \neg I = \emptyset$, $\neg I$ je prost filter i $(I, \neg I)$ je par koji tražimo.

(2) Ako $n \in I$, imamo sledeća dva slučaja:

(2.1) $n \in b \downarrow$
Tada $n \leq b$ i $n \notin a \uparrow$, jer $a \nleq b$. Zbog posljedice 4.1 postoji prost filter F takav da $a \uparrow \subseteq F$ i $F \cap b \downarrow = \emptyset$. Pa $a \in F$ i $b \notin F$.
Važi i $n \notin F$ (jer ako $n \in F$ tada $b \in F$ i iz pretpostavke $n \in b \downarrow$ možemo reći $F \cap b \downarrow \neq \emptyset$ što je kontradikcija.)
Stoga iz $n \notin F$ imamo $\neg F \cap F = \emptyset$, a kako je $\neg F$ prost ideal, $(\neg F, F)$ je par koji tražimo.

[4] Opširnije u [10].

(2.2) $n \in I - b\downarrow$
Tada zbog posljedice 4.1 postoji prost filter F takav da $a\uparrow \subseteq F$ i $F \cap b\downarrow = \emptyset$.

(2.2.1) Ako važi $n \notin F$, onda je $(\neg F, F)$ traženi par.

(2.2.2) Pretpostavimo $n \in F$. Kako $a, n \in F$, onda je $a \wedge n \in F$.
Te imamo $a \wedge n \not\leq b$ (jer iz $a \wedge n \leq b$ mogli bi dobiti $b \in F$ ali $F \cap b\downarrow = \emptyset$).
Zbog posljedice, postoji prost ideal J tako da $b\downarrow \subseteq J$ i $J \cap (a \wedge n)\uparrow = \emptyset$.
Zato imamo $b \in J$ i $a \notin J$ (jer ako bi $a \in J$ možemo izvesti $a \wedge n \in J$, ali $J \cap (a \wedge n)\uparrow = \emptyset$).
Konačno, $n \notin J$ (jer ako $n \in J$ imamo $a \wedge n \in J$). Pa je $(J, \neg J)$ par koji tražimo.■

Sledeća teorema ilustruje vezu između morfizma $\phi : \mathbf{A} \to 3$ i para $(I, \neg I)$, gdje je I prost ideal u $\mathbf{A}$. Za svaki morfizam $\phi : \mathbf{A} \to 3$ i par $(I, \neg I)$ definišemo ideal $I_\phi = \phi^{-1}\{0\}$ i filter $F_\phi = \phi^{-1}\{1\}$. Za njih možemo reći da su prosti i da je $\neg I_\phi = F_\phi$. Dakle, za svaki morfizam $\phi : \mathbf{A} \to 3$ postoji par $(I, \neg I)$ gdje je I_ϕ prost ideal, $\neg I_\phi$ prost filter, i važi $I_\phi \cap \neg I_\phi = \emptyset$.

Sada pretpostavimo da je $\mathbf{A}$ DMF-algebra i I je prost ideal u $\mathbf{A}$ tako da $n \notin I$. Definišemo $\phi_I : \mathbf{A} \to 3$ tako da važi:

$$\phi_I(a) = \begin{cases} 0, & \text{ako} \quad a \in I, \\ 1, & \text{ako} \quad a \in \neg I, \\ n, & \text{ako} \quad a \in A \setminus (I \cup \neg I). \end{cases}$$

Teorema 4.9 *Ako je $\mathbf{A}$ DMF-algebra i I prost ideal u $\mathbf{A}$, takav da $n \notin I$ tada je $\phi_I : \mathbf{A} \to 3$ morfizam DMF-algebri.*

Dokaz: Očigledno važi

$$\phi_I(0) = 0$$
$$\phi_I(1) = 1$$
$$\phi_I(n) = n, \text{ jer } n \notin I \text{ i } n \notin \neg I.$$

Prvo pokazujemo da ϕ_I čuva operaciju $\wedge$:

(1) $\phi_I(x \wedge y) = 0$
Onda $x \wedge y \in I$ i $x \in I$ ili $y \in I$ (jer je I prost).
Stoga imamo $\phi_I(x) = 0$ ili $\phi_I(y) = 0$ i tada je $\phi_I(x) \wedge \phi_I(y) = 0$.

(2) $\phi_I(x \wedge y) = 1$
Onda $x \wedge y \in \neg I$ i oba i x i y ne pripadaju I (jer je $\neg I$ filter). Stoga imamo $\phi_I(x) = \phi_I(y) = 1$ i $\phi_I(x) \wedge \phi_I(y) = 1$.

(3) $\phi_I(x \wedge y) = n$
Onda $x \wedge y \notin I$ i $x \wedge y \notin \neg I$. Kako je I ideal imamo $x \notin I$ i $y \notin I$ (u suprotnom bi mogli dokazati $x \wedge y \in I$, što je u kontradikciji). Kako je $\neg I$ filter imamo $x \notin \neg I$ ili $y \notin \neg I$ (u suprotnom bi mogli dokazati $x \wedge y \in \neg I$, što je kontradikcija). Zato imamo sledeće slučajeve:

(3.1) $x, y \in A - (I \cup \neg I)$, tada $\phi_I(x) = \phi_I(y) = n$ pa je $\phi_I(x) \wedge \phi_I(y) = n$.

(3.2) $x \in A - (I \cup \neg I), y \in \neg I$, tada $\phi_I(x) = n, \phi_I(y) = 1$ pa je $\phi_I(x) \wedge \phi_I(y) = n$.

(3.3) $y \in A - (I \cup \neg I), x \in \neg I$, tada $\phi_I(x) = 1, \phi_I(y) = n$ pa je $\phi_I(x) \wedge \phi_I(y) = n$.

Na isti način provjeravamo za operaciju $\vee$.

Konačno, još provjeravamo da ϕ_I čuva i $\neg$.

- $\phi_I(\neg x) = 0$: tada $\neg x \in I$, pa i $x \in \neg I$ i $\phi_I(x) = 1$, tj. $\phi_I(\neg x) = \neg \phi_I(x)$.
- $\phi_I(\neg x) = 1$: tada $\neg x \in \neg I$ i $x \in I$ i $\phi_I(x) = 0$, tj. $\phi_I(\neg x) = \neg \phi_I(x)$.
- $\phi_I(\neg x) = n$: tada $\neg x \notin I$ i $\neg x \notin \neg I$, pa $x \notin I$ i $x \notin \neg I$. Tada $\phi_I(x) = n$ i kako je $n = \neg n$ dobijamo $\phi_I(\neg x) = \neg \phi_I(x)$.

■

5 Sekventni račun *Kleenejeve* logike

Sekvent je uređen par $(\Gamma; \alpha)$ gdje je $\Gamma \subseteq F_m$, $\alpha \in F_m$ i F_m je skup formula na jeziku $L = E \cup K(DMF)$.
Ako proizvod $\mathcal{P}(F_m) \times F_m$ označimo sa S_q (tj. skup svih sekvenata), tada je svaka relacija logičke posljedice $\models$ podskup od S_q. Naš zadatak je da opišemo relaciju $\models$ viđenu u prethodnoj sekciji u čistoj sintaktičkoj formi.

Kažemo da je n-arno pravilo ϱ, $n > 0$, podskup od ${S_q}^n \times S_q$.

Definicija 5.1 *Sekventni račun je uređen par $S = (B, R)$ gdje $B \subseteq S_q$ i $R = \{\varrho_i : i \in I\}$, gdje je svako ϱ_i n-arno pravilo za neko $n \in \omega$.*

Za svaki uređen par $((\sigma_0, ..., \sigma_{n-1}), \sigma)$ u ϱ kaže se da je primjena od ϱ, gdje su $(\sigma_0, ..., \sigma_{n-1})$ premise i σ zaključak te primjene. Svaka primjena od ϱ može se predstaviti kao:

$$\frac{(\sigma_0, ..., \sigma_{n-1})}{\sigma}$$

S obzirom na sekventni račun S, možemo definisati skup teorema od S kao najmanji podskup od S_q koji sadrži B i zatvoren je u odnosu na pravila iz R.

Definicija 5.2 *Neka je $S = (B, R)$ sekventni račun. Dokazni niz ili dokaz je konačan niz sekvenata tako da je u tom nizu svaki sekvent ili aksioma ili slijedi iz ranijih sekvenata po nekom pravilu iz R.*

Definicija 5.3 *Teorema u sekventnom računu je sekvent za koji postoji dokazni niz (dokaz).*

Kada je $(\Gamma; \alpha)$ teorema od S pišemo $\Gamma \vdash_S \alpha$ ili jednostavno pišemo $\Gamma \vdash \alpha$.

Definicija 5.4 *Neka je $\models$ data relacija logičke posljedice u nekoj logici. Kažemo da je sekventni račun S pouzdan u odnosu na tu logiku ako $\Gamma \vdash \alpha$ implicira $\Gamma \models \alpha$, a kompletan ako iz $\Gamma \models \alpha$ slijedi $\Gamma \vdash \alpha$.*

Dakle, zadatak je da definišemo pouzdan i kompletan sekventni račun za relaciju logičke posljedice za jaku *Kleenejevu* trovalentnu logiku.

Definicija 5.5 *Neka je dat sekventni račun S i skup formula Σ. Definišemo relaciju ρ na F_m postavljajući uslov:*

$$\alpha \rho \beta \text{ akko } \Sigma, \alpha \vdash \beta.$$

Kao i inače, često pišemo Σ, α umjesto $\Sigma \cup \{\alpha\}$.

Ako pretpostavimo da su svi sekventi $(\Gamma; \alpha)$ gdje $\alpha \in \Gamma$ aksiome u računu S, onda možemo dokazati da je relacija ρ refleksivna.

Ako pretpostavimo da u S važi pravilo:

$$\frac{(\Gamma; \alpha) \quad (\Delta, \alpha; \beta)}{(\Gamma, \Delta; \beta)}$$

zvano *cut rule*, tada možemo dokazati da je ρ tranzitivna.

Definicija 5.6 *Neka je S dati sekventni račun. Kažemo da su dvije formule α i β* ***sintaktički ekvivalentne*** *u odnosu na skup formula Σ, akko $\alpha\rho\beta$ i $\beta\rho\alpha$ tj. ako $\Sigma, \alpha \vdash \beta$ i $\Sigma, \beta \vdash \alpha$.*

Pišemo $\alpha \equiv_\Sigma \beta$ kao oznaku za sintaktičku ekvivalenciju između formula α i β u odnosu na Σ.

Relaciju ρ možemo proširiti na relaciju $\leq$ (jer je relacija $\equiv_\Sigma$ kongruencija) između klasa ekvivalencije po $\equiv_\Sigma$, tako što kažemo:

Definicija 5.7 *Neka je S neki sekventni račun, Σ neki skup formula. Na faktor skupu $F_m/{\equiv_\Sigma}$ definšemo relaciju $\leq$ na klasama kao: $|\alpha| \leq |\beta|$ akko $\alpha\rho\beta$ akko $\Sigma, \alpha \vdash \beta$.*

Definicija 5.8 *Neka je S neki sekventni račun, Σ neki skup formula. Skup $F_m/{\equiv_\Sigma}$, sa uređenjem $\leq$ je Lindenbaumova algebra od Σ.*

Osobine Lindenbaumove algebre zavise strogo od aksioma i pravila sekventnog računa S. Definisaćemo tri različita sekventna računa $S(DL), S(BA)$ *i* $S(DMF)$. Prvi se odnosi na **ograničenu distributivnu mrežu**, drugi se odnosi na **Bulovu algebru** i treći na **DMF-algebre**.

Definicija 5.9 *Aksiome i pravila sekventnog računa $S(DL)$ su sledeća:*

- *aksiome identiteta: $\Gamma \vdash \alpha$, gdje je $\alpha \in \Gamma$,*
- *aksima praznog skupa $\emptyset \vdash 1$,*
- *aksioma najvećeg elementa $\alpha \vdash 1$,*
- *aksioma najmanjeg elementa $0 \vdash \alpha$,*
- *cut rule,*
- *„first rule of introduction of $\wedge$ in the antecedent” ili $\wedge\vdash_0$,*

$$\frac{(\Gamma, \alpha_0; \beta)}{(\Gamma, \alpha_0 \wedge \alpha_1; \beta)},$$

- *„second rule of introduction of $\wedge$ in the antecedent” ili $\wedge\vdash_1$,*

$$\frac{(\Gamma, \alpha_1; \beta)}{(\Gamma, \alpha_0 \wedge \alpha_1; \beta)},$$

- *„rule of introduction of $\wedge$ in the consequent” ili $\vdash\wedge$,*

$$\frac{(\Gamma; \alpha)(\Gamma; \beta)}{(\Gamma; \alpha \wedge \beta)},$$

- *„rule of introduction of $\vee$ in the antecedent” ili $\vee\vdash$,*

$$\frac{(\Gamma, \alpha_0; \beta), (\Gamma, \alpha_1; \beta)}{(\Gamma, \alpha_0 \vee \alpha_1; \beta)},$$

- *„first rule of introduction of $\vee$ in the consequent” ili $\vdash\vee_0$,*

$$\frac{(\Gamma; \alpha_0)}{(\Gamma; \alpha_0 \vee \alpha_1)},$$

- *„second rule of introduction of $\vee$ in the consequent" ili* $\vdash \vee_1$,

$$\frac{(\Gamma;\alpha_1),(\Gamma;\alpha_1)}{(\Gamma;\alpha_0 \vee \alpha_1)}.$$

Lema 5.1 *U sekventnom računu $S(DL)$ za sve formule α i β važi:*

(1.) $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ *i* $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$,

(2.) $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ *i* $\beta \vdash \alpha \vee \beta$.

Dokaz:
(1.) Direktno primjenom aksiome identiteta i pravila $\wedge\vdash_0$ i $\wedge\vdash_1$;
(2.) Direktno primjenom aksiome identiteta i pravila $\vdash\vee_0$ i $\vdash\vee_1$. ■

Lema 5.2 *U sekventnom računu $S(DL)$ za sve skupove formula Γ,Δ i sve formule α,β,γ važi pravilo monotonosti:*

$$\frac{(\Gamma;\alpha)}{(\Gamma,\Delta;\alpha)}.$$

Lema 5.3 *U sekventnom računu $S(DL)$ za svaki skup formula Γ i za sve formule α,β,γ važi pravilo:*

$$\frac{(\Gamma,\alpha,\beta;\gamma)}{(\Gamma,\alpha\wedge\beta;\gamma)}.$$

Teorema 5.1 *Za svaki skup formula Σ, ako je $\equiv_\Sigma$ ekvivalencija generisana sa $\vdash_{DL}$, tada je $F_m/\equiv_\Sigma$ ograničena distributivna mreža.*

Dokaz: Vidjeti u [9]. ■

Definicija 5.10 *Iz sekventnog računa $S(DL)$ dobijamo sekventni račun $S(BA)$ dodavajući sledeće aksiome:*

- *„Tertium non datur": $1 \vdash \alpha \vee \neg\alpha$ (ili kraće tnd)*
- *„Contradiction": $\alpha \wedge \neg\alpha \vdash 0$.*

Teorema 5.2 *Za svaki skup formula Σ, ako je $\equiv_\Sigma$ ekvivalencija generisana sa $\vdash_{BA}$, tada je $F_m/\equiv_\Sigma$ Bulova algebra u kojoj je $|\alpha| = |1|$ akko $\Sigma \vdash \alpha$.*

Dokaz: Zbog teoreme 5.1, znamo da je $F_m/\equiv_\Sigma$ ograničena distributivna mreža, pa jedino treba da dokažemo da je $|\neg\alpha|$ komplement od $|\alpha|$, tj.

$$|\alpha| \vee |\neg\alpha| = |1| \quad \text{i} \quad |\alpha| \wedge |\neg\alpha| = |0|.$$

Zbog monotonosti i aksiome najvećeg elementa imamo:

$$\Sigma, \alpha \vee \neg\alpha \vdash 1,$$

dok zbog monotonosti i *tnd* imamo:

$$\Sigma, 1 \vdash \alpha \vee \neg\alpha.$$

Iz ova tvrđenja imamo da slijedi

$$\alpha \vee \neg\alpha \equiv_\Sigma 1.$$

Na isti način možemo dokazati

$$\alpha \wedge \neg\alpha \equiv_\Sigma 0,$$

što implicira da je $F_m/\equiv_\Sigma$ Bulova algebra.

Još treba $|\alpha| = |1|$ akko $\Sigma \vdash \alpha$.
($\Leftarrow$) Pretpostavimo $\Sigma \vdash \alpha$. Onda imamo $\Sigma, 1 \vdash \alpha$, zbog monotonosti.
S druge strane imamo

$$\frac{\Sigma, \alpha \vdash \alpha,\ \alpha \vdash 1}{\Sigma, \alpha \vdash 1}$$

(zbog aksiome identiteta, aksiome najvećeg elementa i *cut rule*). Dakle, $|\alpha| = |1|$.
($\Rightarrow$) Pretpostavimo $|\alpha| = |1|$. Tada $\alpha \equiv_\Sigma \beta$ i $\Sigma, 1 \vdash \alpha$.
Zbog aksiome praznog skupa $\emptyset \vdash 1$ i primjenom *cut rule* imamo $\Sigma \vdash \alpha$. ■

Definicija 5.11 *Iz sekventnog računa $S(DL)$ dobijamo sekventni račun $S(DMF)$ dodavajući sledeće aksiome i pravila:*

- *prva aksioma duple negacije:* $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$,
- *druga aksioma duple negacije:* $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$,
- *prva aksioma nedefinisanog elementa:* $n \vdash \neg n$,
- *druga aksioma nedefinisanog elementa:* $\neg n \vdash n$,
- *aksioma normalnosti:* $\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \beta \vee \neg\beta$,
- *kontrapozicija:*

$$\frac{\alpha; \beta}{\neg\beta; \neg\alpha}.$$

Teorema 5.3 *Za svaki skup formula Σ, ako je $\equiv$ ekvivalencija generisana sa $\vdash_{DMF}$, tada je $F_m/\equiv$ DMF-algebra.*

Dokaz: Znamo da je $F_m/\equiv$ ograničena distributivna mreža (zbog teoreme 5.1). Kontrapozicijom $\alpha \equiv \beta$ implicira $\neg\beta \equiv \neg\alpha$, pa možemo predstaviti operaciju $\neg|\alpha| = |\neg\alpha|$ u $F_m/\equiv$. Zatim pokažemo da aksiome DMF-algebre važe u $F_m/\equiv$. Iz aksiome duple negacije imamo $|\alpha| = \neg\neg|\alpha|$. Iz aksiome nedefinisanog elementa imamo $|n| = \neg|n|$. Iz aksiome normalnosti imamo $|\alpha| \wedge \neg|\alpha| \leq |\beta| \vee \neg|\beta|$. Važe i De Morganovi zakoni, što možemo detaljno vidjeti u [9]. ■

6 Teorema kompletnosti za *Kleenejevu* logiku

Sada smo u dobroj poziciji da dokažemo kompletnost sekventnog računa $S(DMF)$ u odnosu na relaciju logičke posljedice $\models$ u *Kleenejevoj* trovalentoj logici.

Prvo ćemo se podsjetiti dokaza teoreme kompletnosti za klasičnu iskaznu logiku.

Teorema 6.1 *Neka je $\models$ relacija logičke posljedice klasične iskazne logike, a $\vdash$ relacija dokazivosti sekventnog računa $S(BA)$. Tada za sve skupove formula Σ i sve formule α važi:*

$$\textit{ako } \Sigma \models \alpha, \textit{ onda } \Sigma \vdash \alpha.$$

Dokaz: Dovoljno je da dokažemo da $\Sigma, \xi \models \alpha$ implicira $\Sigma, \xi \vdash \alpha$, za sve formule ξ i α.

Naime, ako $\xi = 1$, onda sa semantičke strane imamo $\Sigma, 1 \models \alpha$ akko $\Sigma \models \alpha$. Sa sintaktičke strane, iz $\Sigma, 1 \vdash \alpha$ i aksiome praznog skupa $\emptyset \vdash 1$ možemo dobiti $\Sigma \vdash \alpha$ *cut* pravilom i iz $\Sigma \vdash \alpha$ možemo dobiti $\Sigma, 1 \vdash \alpha$ pravilom monotonije.

Sada pretpostavimo: $\Sigma, \xi \models \alpha$ i $\Sigma, \xi \nvdash \alpha$. Tada u Lindenbaumovoj algebri od Σ imamo: $|\xi| \nleq |\alpha|$ i zbog posljedice 4.1, postoji prost ideal I tako da $|\alpha| \in I$ i $|\xi| \notin I$.
Zbog teoreme 4.2 postoji Bulov morfizam $\phi_I : F_m / \equiv_\Sigma \to 2$.
Sada možemo definisati klasičnu valuaciju $v : E \to 2$ tako da je $v(p_i) = \phi_I(|p_i|)$. Svaka valuacija v indukuje jedinstveni morfizam $Val_v : F_m \to 2$.
Za svaki γ, $Val_v(\gamma) = \phi(|\gamma|)$ (jer Val_v i $\phi_I \circ |\quad|$ se slaže sa generatorima E od F_m).

Iz $|\alpha| \in I$ i definicije ϕ_I imamo $\phi_I(|\alpha|) = 0$ i $Val_v(\alpha) = 0$.
Iz $|\xi| \notin I$ i definicije ϕ_I imamo $\phi_I(|\xi|) = 1$ i $Val_v(\xi) = 1$.

Kako je $\Sigma \vdash \sigma$ za sve $\sigma \in \Sigma$, zbog teoreme 5.2 imamo $|\sigma| = |1|$, pa je $Val_v(\sigma) = \phi(|\sigma|) = 1$.
Dakle, postoji valuacija v za koju je tačno ξ i tačni svi $\sigma \in \Sigma$, ali za koju je netačno α, pa $\Sigma, \xi \not\models \alpha$ što je kontradikcija sa pretpostavkom. ■

Teorema 6.2 (Slaba teorema kompletnosti za Kleenejevu logiku (weak completeness)) *Ako je $\models$ relacija logičke posljedice u Kleenejevoj trovalentnoj logici, $\vdash$ je relacija dokazivosti generisana sa $S(DMF)$, tada za sve formule α i β*

$$\textit{iz} \quad \alpha \models \beta \quad \textit{slijedi} \quad \alpha \vdash \beta.$$

Dokaz: Dokaz dajemo kontrapozicijom, odnosno pretpostavimo da važi $\alpha \nvdash \beta$. Onda treba da dokažemo $\alpha \not\models \beta$.

Ako $\alpha \nvdash \beta$ onda u Lindebaumovoj algebri $F_m / \equiv$ važi $|\alpha| \nleq |\beta|$.
Zbog teoreme 4.8, postoji par (I, F) u $F_m / \equiv$ tako da

$$|\alpha| \notin I \quad i \quad |\beta| \in I \qquad ili \qquad |\alpha| \in F \quad i \quad |\beta| \notin F. \tag{1}$$

Zbog iste teoreme, I i F su prosti, $F = \neg I$ i $I \cap F = \emptyset$, pa $n \notin I$ (jer ako $n \in I$, tada $\neg n \in F$, ali $n = \neg n$, pa $n \in F$ i $I \cap F \neq \emptyset$).

Zbog teoreme 4.9, postoji morfizam $\phi : F_m/\equiv \to 3$ tako da:

$$\forall x \in I \quad \phi(x) = 0$$

$$\forall x \in F \quad \phi(x) = 1$$

$$\forall x \notin I \cup F \quad \phi(x) = n$$

Sada možemo definisati valuaciju $v : E \to 3$ tako da je $v(p_i) = \phi(|p_i|)$.

Kako se Val_v i $\phi \circ |\quad|$ slažu sa generatorima E od F_m, za svaku formulu ξ imamo

$$Val_v(\xi) = \phi(|\xi|).$$

Kako važi (1), moguća su naredna dva slučaja:

(1) $|\alpha| \notin I$ i $|\beta| \in I$ onda $Val_v(\alpha) \in \{n, 1\}$ i $Val_v(\beta) = 0$, pa $Val_v(\alpha) \nleq Val_v(\beta)$;

(2) $|\alpha| \in F$ i $|\beta| \notin F$ onda $Val_v(\alpha) = 1$ i $Val_v(\beta) \in \{0, n\}$, pa $Val_v(\alpha) \nleq Val_v(\beta)$.

U oba slučaja $\alpha \nvDash \beta$. ■

Posljedica 6.1 $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1} \models \beta$ *implicira* $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1} \vdash \beta$.

Prije dokazivanja „jake" teoreme kompletnosti za *Kleenejevu* trovalentnu logiku, podsjetićemo se nekih topoloških pojmova i tvrđenja.

Definicija 6.1 *Neka je $X \neq \emptyset$. Kolekcija $\mathcal{O}$ podskupova skupa X je kolekcija otvorenih skupova ako važe sledeći uslovi:*

(O1) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$,

(O2) ako $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ *onda* $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$,

(O3) za svaku kolekciju $\{O_i : i \in I\}$ *važi* $\bigcup_{i \in I} \in \mathcal{O}$.

Za kolekciju $\mathcal{O}$ kažemo da je topologija na skupu X, a za par $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je topološki prostor. Elemente kolekcije $\mathcal{O}$ nazivamo otvorenim skupovima, a skupove $C \subseteq X$, gdje $\overline{C} \in \mathcal{O}$ nazivamo zatvorenim skupovima.

Primjer: Neka je X proizvoljan neprazan skup. Tada je $\mathcal{O}_{disc} = \mathcal{P}(X)$ topologija na skupu X i zovemo je *diskretna topologija*. Za prostor $(X, \mathcal{O}_{disc})$ kažemo da je *diskretan*.

Definicija 6.2 *Neka je X neprazan skup. Kažemo da je $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ filter na skupu X akko*

(F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ *i* $X \in \mathcal{F}$;

(F2) ako $A, B \in \mathcal{F}$, *onda i* $A \cap B \in \mathcal{F}$;

(F3) ako je $A \in \mathcal{F}$ *i* $A \subset B \subset X$, *onda* $B \in \mathcal{F}$.

Kažemo da je filter $\mathcal{F}$ na skupu X neglavni akko $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

Definicija 6.3 *Kažemo da je filter $\mathcal{U}$ na skupu X ultrafilter ako za svaki filter $\mathcal{F}$ na X, iz $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ slijedi $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.*

U topološkom prostoru $(X, \mathcal{O})$, gdje je $A \subset X$, familiju $\{O_i : i \in I\}$ otvorenih podskupova skupa X zovemo *otvoren pokrivač* skupa A akko je $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. Za potkolekciju pokrivača koje je i sama pokrivač kažemo da je *potpokrivač* datog pokrivača.

Definicija 6.4 *Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je kompaktan akko svaki otvoren pokrivač skupa X ima konačan potpokrivač.*

Teorema 6.3 *Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je kompaktan ako i samo ako za svaki ultrafilter $U \subset \mathcal{P}(X)$ postoji tačka $x \in X$ čija svaka okolina pripada $\mathcal{U}$.*

Dokaz: Vidjeti u [8]. ■

Teorema 6.4 (Teorema Tihonova) *Proizvod proizvoljne kolekcije kompaktnih topoloških prostora je kompaktan prostor.*

Dokaz: Vidjeti u [8]. ■

Označimo sa $(3, \zeta)$ topološki prostor u kojem $3 = \{0, n, 1\}$ i neka je ζ diskretna topologija na 3.
Označimo sa $(3^\omega, \zeta^*)$ proizvod prostora gdje je ζ^* topologija indukovana projekcijom π_i. Podbaza za ζ^* je data kao $\mathcal{S} = \{\pi_i^{-1}(A) : A \in \zeta, i \ \in \omega\}$.
Zbog teoreme Tihonova važi da je $(3, \zeta^*)$ kompaktan prostor kao proizvod kompaktnih prostora.

Lema 6.1 *Za svaki $\alpha \in F_m$, $M(\alpha)_0$ i $M(\alpha)_1$ su i otvoreni i zatvoreni (cloopen) skupovi u topologiji ζ^*.*

Dokaz: Dokaz radimo indukcijom po složenosti formule.

$$M(p_i)_0 = \{s \in 3^\omega : s(i) = 1\} = \pi_i^{-1}(\{1\}), \text{ pa } M(p_i)_0 \in \zeta^*, \text{ jer } \{1\} \in \zeta.$$

$$\overline{M(p_i)_0} = \{s \in 3^\omega : s(i) = 0 \text{ ili } s(i) = n\} = \pi_i^{-1}(\{0, n\}), \text{ pa } \overline{M(p_i)_0} \in \zeta^*, \text{ jer } \{0, n\} \in \zeta.$$

$$M(p_i)_1 = \{s \in 3^\omega : s(i) = 0\} = \pi_i^{-1}(\{0\}), \text{ pa } M(p_i)_1 \in \zeta^*, \text{ jer } \{0\} \in \zeta.$$

$$\overline{M(p_i)_1} = \{s \in 3^\omega : s(i) = 1 \text{ ili } s(i) = n\} = \pi_i^{-1}(\{1, n\}), \text{ pa } \overline{M(p_i)_1} \in \zeta^*, \text{ jer } \{1, n\} \in \zeta.$$

Dakle, $\{M(p_i)_0, \overline{M(p_i)_0}, M(p_i)_1, \overline{M(p_i)_1}\} \in \zeta^*$.

- Neka je $\alpha = \beta \wedge \gamma$.
  Tada $M(\alpha)_0 = M(\beta)_0 \cap M(\gamma)_0$ pa zbog pretpostavke, važi da su $M(\beta)_0$ i $M(\gamma)_0$ *cloopen* pa je i $M(\alpha)_0$ *cloopen* takođe.
  Slično, $M(\alpha)_1 = M(\beta)_1 \cup M(\gamma)_1$ pa dobijamo takođe da je $M(\alpha)_1$ *cloopen.*

- Neka je $\alpha = \beta \vee \gamma$.
  Na isti način dolazimo do istih zaključaka, odnosno da su $M(\alpha)_0$ i $M(\alpha)_1$ *cloopen.*

- Neka je $\alpha = \neg\beta$.
  Tada $M(\neg\beta)_0 = M(\beta)_1$ i $M(\neg\beta)_1 = M(\beta)_0$, a $M(\beta)_1$ i $M(\beta)_0$ su *cloopen*, pa važi i da su $M(\neg\beta)_0$ i $M(\neg\beta)_1$ takođe *cloopen.*

- Ako je $\alpha = 1$, tada $M(\alpha)_0 = 3^\omega$ i $M(\alpha)_1 = \emptyset$, a oba i 3^ω i $\emptyset$ su *cloopen.*

- Ako je $\alpha = 0$, tada $M(\alpha)_0 = \emptyset$ i $M(\alpha)_1 = 3^\omega$ pa analogno važi.

- Ako je $\alpha = n$, tada $M(\alpha)_0 = \emptyset$ i $M(\alpha)_1 = \emptyset$, te takođe analogno važi da su *cloopen.*

■

Teorema 6.5 *Ako je $\models$ relacija logičke posljedice Kleenejeve trovalentne logike, onda za sve skupove formula Σ i sve formule α,*

$$\text{iz } \Sigma \models \alpha \text{ slijedi } \Sigma' \models \alpha, \text{ za neki konačan podskup } \Sigma' \subseteq \Sigma.$$

Dokaz: Pretpostavimo da važi $\Sigma \models \alpha$. Tada imamo $M(\Sigma) \leq M(\alpha)$. Pa iz $M(\Sigma) \leq M(\alpha)$ važi $\bigwedge\{M(\sigma) : \sigma \in \Sigma\} \leq M(\alpha)$. Dalje, po definiciji, važi:

$$\bigcap\{M(\sigma)_0 : \sigma \in \Sigma\} \subseteq M(\alpha)_0, \qquad (1)$$
$$M(\alpha)_1 \subseteq \bigcup\{M(\sigma)_1 : \sigma \in \Sigma\}. \qquad (2)$$

Iz (1) važi

$$\overline{M(\alpha)_0} \subseteq \bigcup\{\overline{M(\sigma)_0} : \sigma \in \Sigma\}$$

Zbog leme 6.1 važi:

$\overline{M(\alpha)_0}$ je zatvoren i $\{\overline{M(\sigma)_0} : \sigma \in \Sigma\}$ je otvoren pokrivač zatvorenog skupa $\overline{M(\alpha)_0}$.

Kako je $(3^\omega, \zeta^*)$ kompaktan i znamo da je svaki zatvoren podskup kompaktnog prostora kompaktan, važiće onda da je $\overline{M(\alpha)_0}$ kompaktan, pa postoje ${\sigma_1}^0, ..., {\sigma_n}^0 \in \Sigma$ takvi da

$$\overline{M(\alpha)_0} \subseteq \overline{M({\sigma_1}^0)_0} \cup ... \cup \overline{M({\sigma_n}^0)_0},$$

odakle dobijamo

$$M({\sigma_1}^0)_0 \cap ... \cap M({\sigma_n}^0)_0 \subseteq M(\alpha)_0. \qquad (3)$$

Iz (2) važi, na isti način (zbog leme 6.1) da imamo otvoren pokrivač $\{M(\sigma)_1 : \sigma \in \Sigma\}$ zatvorenog skupa $M(\alpha)_1$, pa zbog kompaktnosti $(3^\omega, \zeta^*)$ imamo da postoje ${\sigma_1}^1, ..., {\sigma_m}^1 \in \Sigma$ takve da

$$M(\alpha)_1 \subseteq M({\sigma_1}^1)_1 \cup ... \cup M({\sigma_m}^1)_1. \qquad (4)$$

Iz (3) važi dalje da je:

$$M({\sigma_1}^0)_0 \cap ... \cap M({\sigma_n}^0)_0 \cap M({\sigma_1}^1)_0 \cap ... \cap M({\sigma_m}^1)_0 \subseteq M(\alpha)_0.$$

Iz (4) važi dalje da je:

$$M(\alpha)_1 \subseteq M({\sigma_1}^0)_1 \cup ... \cup M({\sigma_n}^0)_1 \cup M({\sigma_1}^1)_1 \cup ... \cup M({\sigma_m}^1)_1.$$

Pa za $\Sigma' = \{{\sigma_1}^0, ..., {\sigma_n}^0, {\sigma_1}^1, ..., {\sigma_m}^1\}$ imamo $\Sigma' \models \alpha$. ■

Sada možemo lako da dokažemo „jaku" kompletnost.

Teorema 6.6 (Teorema kompletnosti za Kleenejevu logiku (full completeness)) *Ako je $\models$ relacija posljedice u trovalentnoj logici, $\vdash$ je relacija dokaza generisana od $S(DMF)$, tada*

$$\textit{iz} \quad \Sigma \models \alpha \quad \textit{slijedi} \quad \Sigma \vdash \alpha.$$

Dokaz: Ako $\Sigma \models \alpha$ onda $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{n-1} \models \alpha$ za neke $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{n-1} \in \Sigma$, zbog teoreme 6.5. Tada $\sigma_0 \wedge \sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_{n-1} \models \alpha$, pa je i $\sigma_0 \wedge \sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_{n-1} \vdash \alpha$, zbog teoreme 6.2.
Sada $\Sigma \vdash \sigma_i$, za sve $i < n$, zbog aksiome identiteta i $\Sigma \vdash \sigma_0 \wedge ... \wedge \sigma_{n-1}$ primjenom pravila $\vdash \wedge$ n-puta, pa dobijamo $\Sigma \vdash \alpha$ zbog pravila *cut*. ■

7 Završne napomene

Kako je sve više pažnje u poslednjih par godina preusmjereno na viševrijednosne logike, zanimljivo je spomenuti i **imune i infektivne** logike koje se takođe zasnivaju na trovrijednosnim logikama. One sadrže imun odnosno infektivan element koji se ponaša kako i sam naziv kaže ([11]).

Infektivne logike se mogu poistovjetiti sa slabom *Kleenejevom* logikom, s obzirom da treća vrijednost „zarazi" preostale dvije u bilo kojoj kombinaciji veznika. Ove logike se puno spominju u teoriji skupova i sematici paradoksa. Dakle, prema nekim naučnicima – među kojima su istaknuti *Bochvar* i *Hallden*, izjave koje se sastoje od paradoksa predstavljaju besmislenu rečenicu. Odnosno, izrazi koji su, iako gramatički ispravni, ne prenose značenje. Mišljenje ovih autora je bilo da konjunkcija besmislene rečenice sa smislenom rečenicom jedino rezultira besmislenom rečenicom. Po njima, nemoguće je da nešto ima smisla i ima komponentu kojoj nedostaje značenje. Kraće rečeno, besmislenost ima zarazno ponašanje. S tim ciljem *Bochvar* je i formulisao već spomenuti račun iskaza (*statement calculus*). Na ovom računu iskaza zasnovan je račun iskaznih funkcija ili predikata bez tipova unutar kojeg su paradoksi analizirani i razrješeni dokazom besmislenosti iskaza koji su u njihovoj osnovi. Spoljašnje funkcije i iskazi su, sa druge strane isključeni iz tog domena. Tu se, na vrlo bitan način ispoljava razlika između objekta i metajezika, što će doći do izražaja prilikom razmatranja paradoksa.

Imune logike se, s druge strane, nekako zanemaruju u savremenoj literaturi. Imun element, bez obzira sa kojim elementom se „spaja" kao rezultat daje preostali element. Ovu strukturu prezentuje *Sobocinski.* Tablice istinitosnih funkcija u toj logici izgledaju ovako:

P	$\neg$**P**
T	F
N	N
F	T

P $\wedge$ **Q**	T	N	F
T	T	T	F
N	T	N	F
F	F	F	F

P $\vee$ **Q**	T	N	F
T	T	T	T
N	T	N	F
F	T	F	F

Moguća tumačenja ovih operacija u poređenju sa „radom" infektivnog elementa su sledeća. Dok tumačenje zasnovano na slaboj *Kleenejevoj* logici smatra da su besmislene rečenice zarazne, ovaj pogled kaže da su besmislene rečenice bezazlene u pogledu semantike. One su kao buka ili smetnja. Dakle, ocjenjuju se kao semantički neefikasne i trebamo ih izostaviti kao besmislene dijelove. To je moguća primjena ove logike, ali potpuno razvijena priča o njoj treba sačekati drugu priliku.

Već spomenuta slaba *Kleenejeva* logika razmatra se često i u filozofiji. Tačnije kao mogući instrument za analiziranje paradoksa. Sledeća razmatranja su upravo takve vrste, gdje navodimo filozofski pogled na ove trovrijednosne logike. [7]

„Krajnji uzrok paradoksa leži u tome što mi ne vidimo šta je zaista $\in$-relacija (u pojmovnom svijetu), nego vidimo njenu zamjenu u onome što smo mi sami konstruisali. Jednako malo vidimo šta pojam „pojam" zapravo jeste."([4])

Dakle prvo treba da razumijemo šta sve može da dovede do paradoksa. Jedna od mogućih grešaka je razumjevanje i upotreba samog pojma, odnosno nemogućnost sagledavanja da je primjena tog pojma besmislena. Samim tim, rečenice o primjeni tj. opisu tog pojma ne bi mogle biti ni istinite ni lažne.

U pomenutom radu [7], zbog uspostavljanja veze između primjene pojma i njemu odgovarajućeg predikata, uvodi se sledeća definicija:

Definicija 7.1 *Predikati koji nisu definisani za sve objekte domena nazivaju se parcijalnim predikatima.*

Cilj uvođenja ove definicije je spoznaja da u klasičnoj logici nije moguće odrediti vrijednost rečenica koje nisu ni istinite ni lažne. Odnosno, u ovoj logici nije moguće posmatrati parcijalne predikate, nego nam treba alternativna logika koja dozvoljava i treći ishod.

Zato se priča nastavlja u upoznavanju sa *Kleenejevom* logikom, kao jedne od mogućnosti davanja odgovora.

Već smo spomenuli *Kleenejevu* motivaciju uvođenja treće vrijednosti, odnosno treća vrijednost se može tumačiti kao *neodređeno*. Samim tim, imamo dvije interpretacije logičkih veznika. U oba slučaja, veznici su isti kao i u klasičnoj logici, ali novost je ponašanje veznika u odnosu na treću istinitosnu vrijednost.

Prva interpretacija se zasniva na slaboj *Kleenejevoj* logici u kojoj se vrijednosti potformula izračunavaju jedna za drugom (*sekvencijalno izračunavanje*). Jaka interpretacija, zasnovana na jakoj *Kleenejevoj* logici, odgovara izračunavanju potformula neke formule istovremeno (*paralelno izračunavanje*). [7]

Postoji još jedna motivacija interpretacije treće vrijednosti kao *besmislenost* koju je dao *Jan Łukasiewicz*. „Ako je neka rečenica besmislena, onda bi i svaka druga rečenica izgrađena pomoću nje primjenom veznika trebalo takođe da bude besmislena."[7] Razlika između njegove logike i *Kleenejeve* jake trovalentne logike je u interpretaciji implikacije i ekvivalencije.

Zašto pričamo i o filozofskom pogledu na već poznate logičke sisteme?

Iz pomenutog rada [7], navodimo neke zaključke kao odgovore na probleme koje klasična logika ne rješava.

„Svaki od pomenutih logičkih sistema korišćen je na neki način u cilju postizanja alternativnog rešenja skupovno-teorijskih i semantičkih paradoksa koje se ne zasniva na uvođenju tipova ili nivoa jezika."

„Trovrednosna logika čini se odgovarajućom formalnom osnovom koja omogućava razmatranje primena predikata koje nisu ni istinite ni lažne. To naizgled omogućava da u teoriji zasnovanoj na takvoj logičkoj osnovi svaka primena pojma ipak bude u korelaciji sa odgovarajućom primenom predikata, jer bi način na koji je ta korelacija formulisana bio drugačiji od klasičnog."

„Rešenje paradoksa tako može biti postignuto u teoriji zasnovanoj na trovrednosnoj logici ali samo ako je implikaciji i ekvivalenciji pripisan poseban status u odnosu na druge veznike, koji može biti opravdan s obzirom na posebnu ulogu koje one mogu imati u teoriji pojmova. Paradoksi su izbegnuti zahvaljujući mogućnosti da rečenice koje tvrde primenu određenog pojma ili njemu odgovarajućeg predikata, a koje bi u dvovrednosnoj logici vodile kontradikcijama, budu proglašene besmislenim."

Zaključak

U ovom radu, bavili smo se trovalentim logičkim sistemima, sličnostima i razlikama sa klasičnim sistemom, kao i teoremama koje se dokazuju paralelno i u klasičnoj logici.

Najprije smo se podsjetili kako je tekao razvoj ovih sistema kroz istoriju do danas. Iako su prolazili kroz velike kritike i neprihvatanja, trovrijednosni sistemi su ipak privlačili pažnju i imali potrebu za formulisanjem.

Prikazali smo *Kleenejevu* trovalentnu logiku na jeziku koji uključuje, pored Bulovih konstanti, i simbol za međuvrijednost istine n. Upoznali smo se sa *Łukasiewiczevom* logikom i posmatrali kako se i po čemu ova dva sistema razlikuju.

Zatim, razvijali smo semantiku korišćenjem DMF-algebre (De Morganove algebre sa jednom fiksnom tačkom za negaciju) umjesto šire klase koju čine De Morganove algebre. Zatim smo uveli sekventni račun, za koji smo dokazali da je potpun u odnosu na trovalentnu *Kleenejevu* semantiku.

Potom smo dali dokaz kompletnosti zasnovan na teoremi o prostom idealu koji je tipičan za DMF-algebre. Dokaz je u potpunosti algebarski samo u pogledu slabe kompletnosti, jer smo u dokazu jake kompletnosti primorani da koristimo topološke metode (*teorema Tihonova*).

Na kraju smo dali napomene, uzimajući u obzir gdje se još sve pojavljivao trovalentni sistem, na koji sve način možemo interpretirati treću vrijednost, kao i drugačiji, filozofski, pogled koji možemo imati na ove sisteme.

Literatura

[1] Aristotel, *Organon*, prevela sa starogrčkog K. Atanasijević, Kultura, Beograd, 1970.

[2] R. Belohlavek, J. W. Dauben, G. J. Klir, *Fuzzy Logic and mathematics* – A historical perspective, Oxford University Press, 2017.

[3] M. Bergmann, *An introduction to Many-valued and Fuzzy logic*, Cambrige University Press, 2008.

[4] K. Gödel, *Kurt Gödel Maxims and Philosophical Remarks. Vol. X,* Crocco, G., Van Atten, M., Cantu, P. & Rollinger, R. (editors), 2020. hal.archives-ouvertes.fr/hal-02892852.

[5] S. C. Kleene, On a notation for ordinal numbers. *J Symb Logic 3,* 1938. 150-155.

[6] S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics.* Amsterdam: North-Holland, 1952.

[7] J. B. Kostić, *Samoreferencija i teorija pojmova*, doktorska disertacija, Filozofski fakultet u Beogradu, 2021.

[8] M. Kurilić, *Osnovi opšte topologije*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1998.

[9] M. Negri, *An algebraic completeness proof for Kleene's 3-Valued logic*, Bolletino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, 5-B (2002).

[10] M. Negri, *Three-valued logic and DMF-algebras*, Bolletino dell'Unione Matematica Italiana-Januar, 1996.

[11] B. D. Re, D. Szmuc, *Immune logics*, Argentina, 2021.

[12] B. Šešelja, *Teorija mreža*, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2006.

Biografija

Jovana Jovičić je rođena 12.01.1996. godine u Banjaluci. Osnovnu školu „Ivan Goran Kovačić" završila je kao odličan učenik u Mrkonjić Gradu, gdje i živi od 1996. godine. Gimnaziju opšteg smjera završava 2014. godine sa odličnim uspjehom kroz cijelo školovanje, takođe u Mrkonjić Gradu. Iste godine upisuje osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu, smjer Primjenjena matematika. Diplomirala je u junu 2020. godine i stekla zvanje Matematičar. Zatim upisuje integrisane akademske studije Master profesor matematike na istom fakultetu. Od septembra 2021. godine predaje matematiku u Gimnaziji „Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu. Položivši poslednji ispit u oktobru 2022. godine, stekla je pravo na odbranu ovog rada.

Novi Sad, mart 2023. Jovana Jovičić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
BF
Tip zapisa: Tekstualni štampani tekst
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Jovana Jovičić
AU
Mentor: dr Rozália Sz. Madarász
MN
Naslov rada: Kleenejeve trovalentne logike
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2023.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: (7 glava /43 strane / 12 referenci /0 tabela /0 slika /0 grafika /0 priloga)
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Algebra i matematička logika
ND
Predmetna odrednica/ključne reči: viševrijednosna logika, Kleenejeva trovalentna logika, DMF-algebre, logička posljedica, slaba teorema kompletnosti, teorema kompletnosti
PO
UDK
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku,

Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Tema ovog master rada je Kleenejeva trovalentna logika kao jedna od nekoliko viševrijednosnih logika. Na početku rada dajemo pregled istorijskog razvoja ideje o logikama sa više istinitosnih vrijednosti. Zatim se upoznajemo sa nekim od njih, poput Lukasiewiczeve, Kleenejeve i Bochvarove trovalentne logike. Zatim, dajemo pregled najvažnijih pojmova koji opisuju semantiku Kleenejeve iskazne logike, kao i definiciju logičke posljedice. Priču nastavljamo sa upoznavanjem DMF-algebri, nakon kojih uvodimo sekventni račun Kleenejeve logike. Konačno, prezentujemo kompletan dokaz teoreme kompletnosti u ovoj trovalentnoj logici. Da bi ovaj dokaz uspješno prikazali, neophodna su i neka topološka tvrđenja kojih se prvo prisjećamo. Za sam kraj, pored filozofskih razmatranja, prikazujemo i nekoliko ne tako poznatih trovalentnih logika.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 06.03.2023.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Anna Slivková, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor: dr Rozália Sz. Madarász, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu
Član: dr Samir Zahirović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Master thesis
CC
Author: Jovana Jovičić
AU
Mentor: Rozália Sz. Madarász, Ph.D.
MN
Title: Kleene's 3-valued logic
TI
Language of text: Serbian (latin)
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2023.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publication place: Department of Mathematics and Informatics,
Faculty of Science, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: (7 chapters /43 pages /12 references /0 tables /0 pictures /0 graphs /0 appendixes)
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipine: Algebra and Mathematical Logic
SD
Subject/Key words: many-valued logic, Kleene's 3-valued logic, DMF-algebras, logic consequence, weak completeness, full completeness
SKW
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics,

Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: In this Master's Thesis we deal with Kleene's 3-valued logics, as one of several many-valued logics. In the beginning, we review the historical development of the idea of the logic with many truth values. Then, we get acquainted with some of them, such as Lukasiewicz's, Kleene's and Bochvar's 3-valued logics. Then, we review the most importante terms which describe semantics of Kleene's logic and we review the definition of logic consequence. We continue the story with an introduction of DMF-algebras, after which we introduce sequential calculus of Kleene's logic. For the full completeness result we need a topological detour through the compactness of the space of models, so we shortly recall the main definitions and theorems. At the very end, in addition to philosophical considerations, we present several not so well-known 3-valued logics.
AB
Accepted by the Scientific Board on: March 3rd, 2023.
ASB
Defended on:
DE
Defend board:
DB
President: Anna Slivková, Ph.D., Assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor: Rozália Sz. Madarász, Ph.D., Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Samir Zahirović, Ph.D., Assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

.