UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Anđela Stojilković

Mreže, formalna analiza koncepta i primer iz elektronske muzike

\- Master rad -

Mentor:

Prof. Dr. Andreja Tepavčević

Novi Sad, 2023.

Sadržaj

Predgovor

Glavna tema ovog rada je formalna analiza koncepta, koja predstavlja metodu analize podataka i upravljanja informacijama. Kao što se kasnije detaljnije navodi, uvedena je od strane nemačkog matematičara, Rudolf-a Wille-a i njegove istraživačke grupe. Zbog matematičke prirode većine publikacija tog vremena, znanje o formalnoj analizi koncepata ostalo je ograničeno na uzan krug matematičara, algebrista. Kroz finansirane istraživačke projekte, formalna analiza koncepata implementirana je i u druge naučne oblasti, pre svega u građevinarstvu, u saradnji sa ministarstvom građevinarstva North-Rhine Westfalia-e, 2000. godine. Međutim, ove primene nisu implementirane daleko izvan Nemačke. Neki od značajnijih radova koji su podstakli interes za formalnu analizu koncepata bili su rad Freeman-a i White-a iz 1993. o analizi društvenih mreža, koji je podstakao korišćenje softvera formalne analize koncepata među sociolozima, zatim radovi Fischer-a iz 1998. i Eisenbart-a iz 2001. u oblasti softverskog inženjerstva, koji su osvojili nagrade najbolji rad na konferencijama.

Neki delovi formalne analize koncepata su nezavisno otkriveni od strane različitih istraživača. Na primer, Godin-ovo korišćenje mreža koncepta 1989. zasnovano je na nezavisnom otkriću Barbut-a i Monjardet-a iz 1970. godine. Godinov rad imao je uticaja na začetak ove teorije u Francuskoj, delovima Kanade sa preovlađujućim francuskim govornim područjem, kao i na rad Carpineto-a i Romano-a u Italiji, 1993. godine. Vremenom su se ove grupe spojile u međunarodnu zajednicu formalne analize koncepata.

♡

Naposletku, iskoristila bih ovu priliku da se zahvalim mentoru dr. Andreji Tepavčević na izdvojenom vremenu, strpljenju, pomoći i stručnim savetima tokom izrade mog master rada.

Takođe, zahvalila bih se dr. Petru Đapiću i dr. Nebojši Mudrinskom na tome što su pristali da budu članovi komisije i na korisnim sugestijama.

Posebnu zahvalnost dugujem mojoj mami, Miri, koja mi je oduvek bila vetar u leđa i bez čije bezuslovne podrške i razumevanja ne bih postigla ovaj uspeh.

Anđela Stojilković

1 Osnovni pojmovi

Pre nego što krenemo sa definicijama i tvrđenjima osvrnimo se na otkriće i primenu teorije mreža.

Otkrivanje samog pojma nametnulo se prirodnim putem. Smatra se da ih je prvi otkrio Richard Dedekind, početkom 1890ih. Dok je radio na poboljšanoj verziji Dirichlet-ovih predavanja iz teorije brojeva[1], zapitao se: Ako posmatramo tri podgrupe A, B i C, neke Abelove grupe G, koliko različitih podgrupa možemo dobiti koristeći samo preseke i zbirove, poput A + B, (A ∩ B) + C, itd (odgovor je 28). Tako ga je bavljenje ovim i sličnim pitanjima prirodno navelo da otkrije osnove teorije mreža. Takođe, neke od osnova je otkrio i Ernst Schröder u svojoj knjizi Algebra i Logika[2] . Međutim, tek veza koju je Dedekind uspostavio između apstraktne algebre i teorije mreža, omogućila je njen razvoj. Sa napretkom univerzalne algebre, 1930ih, Dedekindov rad je ponovo otkriven i tako je teorija mreža nastavila sa rastom i razvojem. Otkriće kompletnih mreža dugujemo Garrett-u Birkhoff-u[3] (1933.).

Teorija mreža primenjiva je i u drugim matematičkim disciplinama, kao što su kombinatorika, teorija brojeva i teorija grupa. Dok se u računarstvu primenjuje kod distribuiranog računanja, teoriji konkurentnosti, semantici programskih jezika, rudarenju podataka, analizi koncepata, veštačkoj inteligenciji, prepoznavanju obrazaca, analizi slika, itd.

Sada navodimo osnovne definicije i tvrđenja.

(V, $\leq$) je uređeni skup, gde je V neprazan skup, a $\leq$ relacija poretka (refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija) na V. Oznaka $\leq$ se koristi i kada se ne misli na znak "manje ili jednako" na skupu brojeva. Osim toga, neprazan podskup V_1 skupa V u odnosu na restrikciju relacije na V_1 određuje uređeni podskup uređenog skupa.

Definicija 1.1. : Preslikavanje ϕ : K $\rightarrow$ L takvo da x $\leq$ y $\Rightarrow$ ϕ(x) $\leq$ ϕ(y) za sve x, y $\in$ K, gde su (K, $\leq$) i (L, $\leq$) uređeni skupovi, naziva se **izotona funkcija** (eng. order-preserving), a kada je zadovoljen uslov da ϕ(x) $\leq$ ϕ(y) $\Rightarrow$ x $\leq$ y, reč je o **izotonom potapanju između uređenih**

[1]Originalan naziv je Vorlesungen über Zahlentheorie.

[2]Originalan naziv je Die Algebra der Logik.

[3]Američki matematičar, 1911.- 1996.

skupova (eng. order-embeding). Odavde sledi i da je ta funkcija injekcija:

ϕ(x)=ϕ(y) $\Leftrightarrow$ (ϕ(x)$\leq$ ϕ(y) i ϕ(y)$\leq$$\phi$(x) $\Rightarrow$ (x$\leq$y i y$\leq$x) $\Leftrightarrow$ x=y.

Definicija 1.2. : Skup u kome su svaka dva elementa uporediva, odnosno važi x $\leq$ y ili y $\leq$ x, naziva se **lanac**.
Poredak koji zadovoljava ovaj uslov nazivamo **linearnim** (**totalnim**).
Uređeni skup takav da je svaki lanac koji je u njemu sadržan konačan naziva se **lančano konačan** (eng. chain finite).

Definicija 1.3. : Neka je b $\in$ P i (P, $\leq$) uređeni skup.
Tada je b *najmanji* u P ako važi da je ($\forall$ x $\in$ P)(b $\leq$ x); dualno, kažemo da je *najveći* u P kada je ($\forall$ x $\in$ P)(x $\leq$ b).

Definicija 1.4. : Neka je X neprazan podskup od $\mathbb{R}$. Svako q $\in$ $\mathbb{R}$ koje za sve x $\in$ X zadovoljava q $\leq$ x je **donje ograničenje (minoranta)** skupa X. Analogno, svako y $\in$ $\mathbb{R}$ koje za sve x $\in$ X zadovoljava x $\leq$ y je **gornje ograničenje (majoranta)** skupa X.

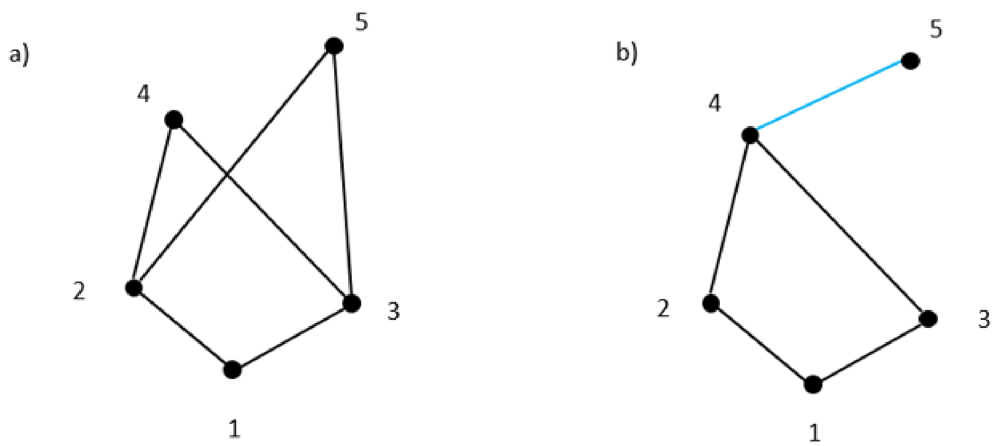
Definicija 1.5. : Najveće donje ograničenje (ako postoji) skupa X naziva se **infimum** skupa X i obeležava kao infX. Najmanje gornje ograničenje (ako postoji) skupa X naziva se **supremum** skupa X i obeležava kao supX.

Uvodimo oznake $\bigwedge$ M := inf M i $\bigvee$ M := sup M.

Definicija 1.6. : Uređeni skup (M, $\leq$) u kome postoji inf{a,b} i sup{a,b} za svaka dva njegova elementa a i b, naziva se **mreža**[4].

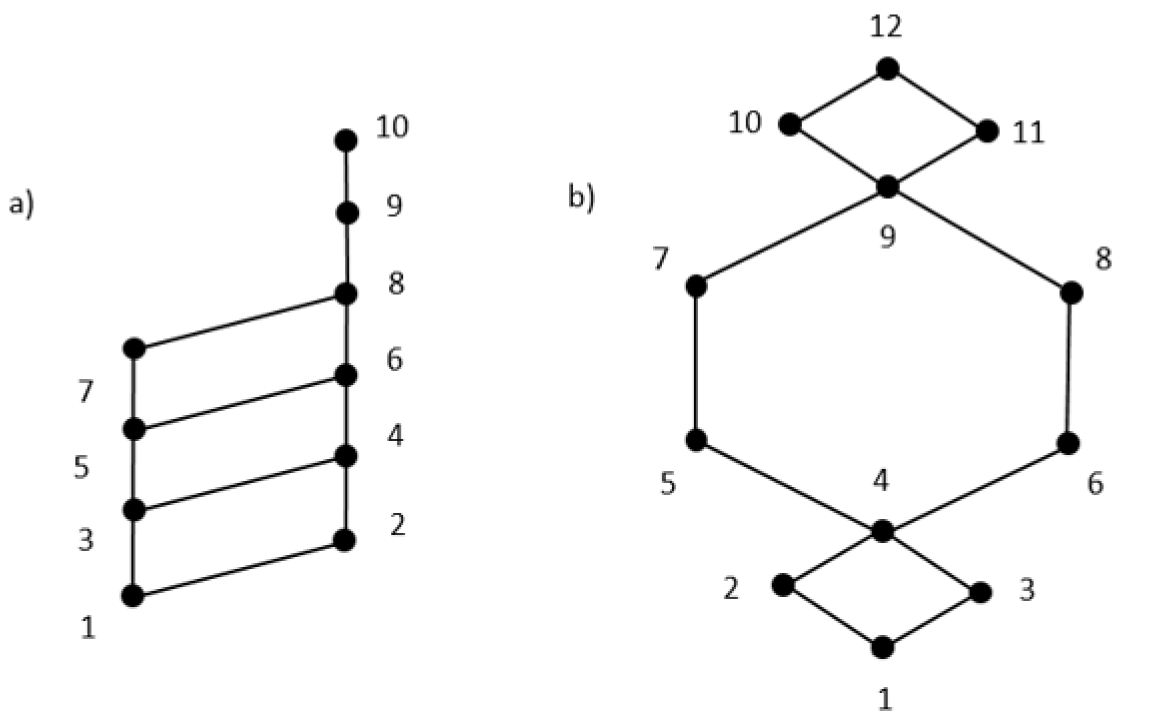
Primer 1.7. ***(Dopuna do mreže)*** : Na slici 1 dati su Haseovi dijagrami, s tim što u primeru pod a) to nije mreža iz razloga što elementi 2 i 3 imaju dva gornja ograničenja 4 i 5, koja su neuporediva, pa samim tim nemaju supremum. Međutim, ovaj dijagram možemo dopuniti do mreže, (slika 1, primer b)), tako što dodamo liniju između elemenata 4 i 5, i obrišemo novonastali višak linija, a to su linije koje spajaju elemente 2 i 5, i 3 i 5. Ove linije su višak iz razloga što su 2 i 3 već povezani sa 4, a 4 je povezano sa 5, te su tako i 2 i 3 povezani sa 5. Zapravo se odgovarajućoj relaciji poretka dodaje još uređeni par (4, 5), tako da 5 postaje najveći element u tom uređenom skupu.

[4]Na engleskom lattice. Ne treba poistovećivati sa nazivima poput grid, net, network itd. jer se oni koriste za druge pojmove.



Slika 1

Primer 1.8. : Na slici 2 dati su Haseovi dijagrami nekih mreža sa 10 i 12 elemenata, redom.



Slika 2

Mreža se može definisati i kao algebarska struktura. Tada uređenu trojku (M, $\wedge$, $\vee$) nazivamo mrežom ako zadovoljava zakone komutativnosti, asocijativnosti i apsorpcije.

Napomena 1.9. : Operacije infimuma i supremuma su komutativne, apsorptivne i asocijativne. [5]

Za relaciju poretka $\leq$ važe sledeće veze sa infimumom i supremumom:

$$x \leq y \quad \text{akko} \quad x = x \wedge y \quad \text{akko} \quad x \vee y = y \ .$$

Na osnovu do sada rečenog, očigledno je da su pojmovi mreže kao uređenog skupa i mreže kao algebarske strukture ekvivalentni.

Definicija 1.10. : Neka su $(M_1, \wedge, \vee)$ i $(M_2, \wedge, \vee)$ mreže. Funkciju f : $M_1 \to M_2$ takvu da za sve x, y $\in M_1$ važi
f (x $\wedge$ y) = f(x) $\wedge$ f(y) (1) i
f (x $\vee$ y) = f(x) $\vee$ f(y) (2)
nazivamo **homomorfizam između mreža**. Ako je f i bijekcija, u pitanju je **izomorfizam**.
Kada je zadovoljen samo uslov (1) reč je o **$\bigwedge$-homomorfizmu** , a kada je zadovoljen samo uslov (2) o **$\bigvee$-homomorfizmu**.

Definicija 1.11. : Mreža čiji svaki podskup ima infimum i supremum je kompletna mreža.

Najmanji element kompletne mreže M je njen infimum, naziva se nulti element i obeležava se sa 0 ; dok je najveći element kompletne mreže M njen supremum koji se naziva jedinični element i obeležava sa 1.

Definicija 1.12. : Neka je s element kompletne mreže S. Kada s ne možemo predstaviti kao supremum strogo manjih elemenata, s nazivamo **ili-nerazloživ**, dok kada ga možemo predstaviti tako reč je o ***ili-razloživom*** elementu.
Dualno, kada s ne možemo predstaviti kao infimum strogo većih elemenata, nazivamo ga **i-nerazloživ** , dok kada ga možemo tako predstaviti reč je o ***i-razloživom*** elementu.

Ako je mreža ograničena u smislu ograničenosti uređenog skupa, odnosno ako ima najmanji i najveći element, kažemo da je *ograničena.*

Definicija kompletne mreže pretpostavlja da za svaki njen podskup postoje infimum i supremum, tj. ima i najmanji i najveći element. Stoga zaključujemo da je svaka kompletna mreža ograničena.

Trivijalno sledi da je svaka konačna mreža kompletna i ograničena.

Princip dualnosti važi za mreže. Odnosno, ako simbole $\leq \vee, \wedge, \bigvee, \bigwedge$, 0, 1 zamenimo simbolima $\geq, \wedge, \vee, \bigwedge, \bigvee$, 1, 0 dobićemo dualna tvrđenja.

Tvrđenje 1.13. : Uređeni skup takav da svaki njegov podskup ima infimum je kompletna mreža.

Definicija 1.14. : Neka je S kompletna mreža. Za proizvoljan podskup $A \subseteq S$, takav da se svaki element skupa S može predstaviti kao supremum nekog podskupa od A, kažemo da je **supremum-gust** (eng. supremum-dense) u S. Dualno, kada se može predstaviti kao infimum kažemo da je **infimum-gust** (eng. infimum-dense) u S.

Definicija 1.15. : Relacija pokrivanja se obeležava sa $\prec$, gde je

$$x \prec y \Leftrightarrow x < y \text{ i } \neg\ (\exists\, z)(\, x < z < y\,)$$

gde su $x, y \in P$, dok je $(P, \leq)$ uređeni skup.

Kažemo da *x prethodi y*, tj. da je *x pokriveno sa y.*

Definicija 1.16. : Svaki element koji pokriva najmanji element 0 uređenog skupa P (pod pretpostavkom da takav element postoji) naziva se *atom*. Dualno, kada je u pitanju najveći element 1, reč je o *koatom*u.

Definicija 1.17. : Mreža M, takva da za svaki njen element x različit od najmanjeg postoji atom a, takav da je $a \leq x$ naziva se <u>atomarna</u>.

Primeri mreža :

″Najpoznatiji″ primeri mreža su partitivni skup (bilo kog nepraznog skupa) u odnosu na inkluziju i svi skupovi brojeva ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, itd.) u odnosu na uobičajeni poredak $\leq$.

Partitivni skup je očigledno kompletna mreža jer je infimum svake kolekcije podskupova njen presek, a supremum unija. Slično, **skupovi brojeva** su mreže (ali ne kompletne) jer je $\inf\{a, b\} = \min\{a, b\}$ i $\sup\{a, b\} = \max\{a, b\}$. Isto važi i u bilo kom lancu, te je stoga svaki **lanac** mreža.

Još jedan od poznatijih primera kompletne mreže je i bilo koji **zatvoreni realni interval** $[a\ ,\ b]$ u odnosu na uobičajeni poredak $\leq$ sa uobičajenim infimumom i supremumom, dok je **(** $\mathbb{N}$**,** $|$ **)** nekompletna atomarna mreža gde su $\inf\{a, b\} = \text{nzd}\{a, b\}$ i $\sup\{a, b\} = \text{nzs}\{a, b\}$. Bitno je primetiti da *uređeni podskup mreže* nije uvek mreža. Tako je skup { 1, 2, 3, ... 28, 29 } sa relacijom deljenja podskup ($\mathbb{N}$, |), ali on sam nije mreža.

Definicija 1.18. : **Direktan proizvod** mreža $(M_1, \leq_1)$ i $(M_2, \leq_2)$ je mreža $(M_1 \times M_2, \leq)$ takva da je
(a, b) $\leq$ (c, d) $:\Leftrightarrow$ a $\leq_1$ c i b $\leq_2$ d, za a, b $\in M_1$ i c, d $\in M_2$.

Napomena 1.19. : Direktan proizvod mreža kad se definišu kao algebarske strukture, definiše se po komponentama i saglasan je sa ovom definicijom.

Definicija 1.20. : **Linearna suma** mreža $(M_1, \leq_1)$ i $(M_2, \leq_2)$ je mreža $(M_1 \cup M_2, \leq)$ takva da je

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq_1 y \text{ ako } x, y \in M_1 \\ x \leq_2 y \text{ ako } x, y \in M_2 \\ x \in M_1 \text{ i } y \in M_2 \end{cases}$$

Linearna suma mreža M_1 i M_2 obeležava se sa $M_1 \oplus M_2$.

Sledeće tvrđenje je značajno zbog konstrukcija novih mreža od poznatih mreža.

Tvrđenje 1.21. : a) Ako je (M, $\leq$) mreža, onda je i $(M^d, \leq)$[5] mreža. (U ovom i narednim slučajevima $\leq$ označava relaciju poretka koja ispunjava uslov da je mreža.)
b) Ako su $(M_1, \leq)$ i $(M_2, \leq)$ mreže, onda je i $M_1 \times M_2$ mreža.
c) Slično, ako su $(M_1, \leq)$ i $(M_2, \leq)$ mreže, onda je i $M_1 \oplus M_2$ mreža. (Svaki element prve uporediv je sa svakim elementom druge mreže.)

Još neki primeri kompletnih mreža su :
i) (ε(A), $\subseteq$) gde je ε(A) skup relacija ekvivalencije na A
ii) (SubG , $\subseteq$) gde je skup svih podgrupa proizvoljne grupe G
iii) ($Sub\mathrm{G}_N$, $\subseteq$) gde je skup svih normalnih podgrupa proizvoljne grupe G.

Definicija 1.22. : Kolekcija podskupova nepraznog skupa G koja ga sadrži i zatvorena je za preseke, naziva se **sistem zatvaranja SZ**.

Partitivni skup P(G) je očigledno SZ.

[5] Ovo je uređen skup dualan mreži.

Napomena 1.23. : Podstrukture mnogih matematičkih struktura su sistemi zatvaranja; poput svih vektorskih *potprostora* nekog vektorskog prostora, svih *podgrupa* neke grupe ili svih *potprstena* nekog prstena i dr.

Sistem zatvaranja je kompletna mreža u odnosu na inkluziju.

Definicija 1.24. : Funkcija φ : X $\to \overline{X}$, iz P(G) u P(G) takva da je

$$1)\ \mathrm{X} \subseteq \overline{X}$$
$$2)\ \overline{X} = \overline{\overline{X}}$$
$$3)\ \mathrm{X} \subseteq \mathrm{Y} \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y},$$

gde su X, Y $\subseteq$ G, naziva se **operator zatvaranja** na skupu G ; pritom je $\overline{X}$ **zatvorenje** podskupa X.

Teorema 1.25. : Skup svih zatvorenja $\overline{X}$ operatora zatvaranja φ je uvek sistem zatvaranja, za sve X $\subseteq$ G. Važi i obrnuto.
Za sistem zatvaranja SZ na G, operator zatvaranja na G je je funkcija koja svakom skupu X pridružuje presek podskupova koji sadrže X.

Posledica 1.26. : Svaka kompletna mreža je izomorfna mreži svih zatvorenja nekog sistema zatvaranja.
Obrnuto, neka je SZ sistem zatvaranja. Tada je (SZ , $\subseteq$) kompletna mreža za sve podskupove SZ - a. Pritom je infimum presek, dok je supremum neke familije skupova zatvorenje unije tih skupova.

Definicija 1.27. : Za proizvoljne uređene skupove (P, $\leq$) i (R, $\leq$) , par f-ja f : P $\to$ R i g : R $\to$ P koje zadovoljavaju

$$1)\ \mathrm{p}_1 \leq \mathrm{p}_2 \Rightarrow \mathrm{f}\ (\mathrm{p}_1) \geq \mathrm{f}\ (\mathrm{p}_2)$$
$$2)\ \mathrm{r}_1 \leq \mathrm{r}_2 \Rightarrow \mathrm{g}\ (\mathrm{r}_1) \geq \mathrm{g}\ (\mathrm{r}_2)$$
$$3)\ \mathrm{p} \leq \mathrm{g}\ (\mathrm{f}\ (\mathrm{p}))\ \mathrm{i}\ \mathrm{r} \leq \mathrm{f}\ (\mathrm{g}\ (\mathrm{r}))$$

nazivamo **Galoa-korespondencijom** (*Galoa vezom*). Za preslikavanja f i g tada kažemo da su **dualno spojena** (eng. dually adjoint) jedno sa drugim.

Tvrđenje 1.28. : Za preslikavanja f i g, par (f, g) je Galoa-korespondencija ako i samo ako važi:

$$\mathrm{p} \leq \mathrm{g}\ (\ \mathrm{r}\ ) \Leftrightarrow \mathrm{r} \leq \mathrm{f}\ (\ \mathrm{p}\ )\ .$$

Dopuna 1.29. : *Specijalan slučaj Galoa-korespondencije.*
Neka su C i D dva skupa takva da su f : P(C) $\to$ P(D) i g : P(D) $\to$ P(C)

preslikavanja koja zadovoljavaju uslove 1) - 3) iz definicije 1.27. . I je $\subseteq$, a f svakom podskupu A iz C dodeljuje podskup f(A) iz D, i tada je reč o *Galoa-korespondenciji između C i D.*

Tvrđenje 1.30. : Preslikavanje $A \to g(f(A))$ je jedan operator zatvaranja na C, a preslikavanje $B \to f(g(B))$ je jedan operator zatvaranja na D. Preslikavanjima f i g je definisan dualni izomorfizam između sistema zatvaranja.

Definicija 1.31. : **Dedekind-Meknil mreža** (eng. Dedekind-MacNeille completion) uređenog skupa P je najmanja kompletna mreža koja sadrži P i u kojoj P može biti izotono potopljen skup.

Definicija 1.32. : Neka je $(P, \leq)$ uređeni skup. Tada je podskup $I \subseteq P$ koji zadovoljava $(x \in I$ i $z \leq x) \Rightarrow z \in I$ za sve $x, z \in P$, **polu-ideal**, a podskup $F \subseteq P$ koji zadovoljava $(x \in F$ i $x \leq z) \Rightarrow z \in F$ za sve $x, z \in P$, **polu-filter**.

Definicija 1.33. : Neka je $(P, \leq)$ uređen skup i $a,b,c,d \in P$ takvi da je $b \leq c$.
Tada je $[b, c] := \{ x \in P \mid b \leq x \leq c \}$ **interval**,
skup $(a] := \{ x \in P \mid x \leq a \}$ je **glavni ideal** (eng. principal ideal) i
skup $[d) := \{ x \in P \mid x \geq d \}$ je **glavni filter** (eng. principal filter).

Teorema 1.34. (Dedekindova teorema mreža/Dedekind's completion theorem) :
Neka je **P** uređeni skup. Tada je izotono potapanje τ od **P** u $\underline{\mathcal{L}}(P, P, \leq)$[6] dato sa

$$\tau(x) := ((x],[x)) \text{ za } x \in P.$$

Povrh toga važi $\tau (\bigvee X) = \bigwedge \tau(X)$ (ili $\tau (\bigwedge X) = \bigvee \tau(X)$ ako supremum (ili infimum) skupa X postoje u **P**. Neka je sada μ proizvoljno izotono potapanje od **P** u kompletnu mrežu V. Tada uvek postoji izotono potapanje λ od $\underline{\mathcal{L}}(P, P, \leq)$ u V takvo da je $\mu = \lambda \circ \tau$.

Ova teorema je generalizacija Dedekindove konstrukcije realnih brojeva od racionalnih brojeva.

[6] Pogledati definiciju 2.7.

2 Mreže koncepta datih konteksta

Formalna analiza koncepata bazira se na primeni *teorije mreža*, a otkrio ju je Rudolf Wille[7] 1981. godine, a 1982. objavljuje prvi naučni rad na temu formalne analize koncepata pod nazivom ”Restruktuiranje teorije mreža: Pristup baziran na hijerarhiji koncepata”[8]. Wille je pripadao grupi naučnika sa Matematičkog fakulteta u Darmštatu (Darmstadt) koji su krenuli da rade na ovoj oblasti krajem sedamdesetih. Njegovi saradnici na ovom polju bili su Bernhard Ganter i Peter Burmeister i drugi. Prvobitna motivacija za njen nastanak bila je praktična primena *teorije poretka*. Filozofske osnove ove oblasti postavili su Charlesa S. Peirce[9] i Port-Royal Logic (fr. Logique de Port-Royal)[10] . Detaljan filozofski pristup može se pronaći u [7].

Formalni kontekst i formalni koncept su osnovni izrazi formalne analize koncepata. Korišćenjem prideva “formalni” naglašavamo da je reč o matematičkim izrazima koji ne obuhvataju sva značenja reči kontekst i koncept standardnog jezika. U daljem tekstu umesto formalni kontekst i formalni koncept pisaćemo samo kontekst i koncept, osim u definicijama. Formalizovanje konteksta i interpretacija koncepta preko intenta i ekstenta, značajno je doprinela uspešnosti rada grupe iz Darmštata. Ova grupa učestvovala je u preko sto saradničkih projekata primene formalne analize koncepata u raznim oblastima.

2.1 Koncept i kontekst

Definicija 2.1. : *Formalni kontekst* sadrži dva skupa, G i M, kao i relaciju I između njih i obeležava se sa K := (G, M, I). Elementi skupa G su objekti, dok su elementi skupa M atributi konteksta. Da je objekat g u relaciji I sa atributom m zapisujemo kao gIm ili (g, m) $\in$ I, a čitamo “objekat g ima atribut m”.

Relacija I naziva se i **relacija incidencije konteksta** (eng. the incidence relation of the context).

[7]Nemački matematičar, 1937. - 2017.

[8]Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts

[9]Američki filozof i matematičar, poznat kao ”otac pragmatizma”; 1839. - 1914.

[10]Francuski udžbenik iz logike poznat i pod nazivom ”La logique, ou l’art de penser”.

Manji konteksti se najčešće predstavljaju tabelama u kojima se objekti navode u redovima, a atributi u kolonama i te tabele se nazivaju **x-tabele** (eng. cross table). Kada objekat g ima osobinu m, tada u red g i kolonu m upisujemo x.

Primer 2.2. : U tabeli 1 prikazan je kontekst u kome su objekti izvođači elektronske muzike, a atributi podžanrovi elektronske muzike.

A	B	C	D	E	F	G	H
	Dubstep	Trance	EDM	House	Techno	Drum and bass	Future bass
FuntCase	X					X	
Boris Brejcha		X			X		
TroyBoi	X			X			
Skrillex	X		X	X			
Tiesto		X		X			
Flume			X				X
Alok			X	X			
Deborah de Luca					X		
Solomun				X	X		

Tabela 1

Definicija 2.3. : Za skup objekata A $\subseteq$ G definišemo skup atributa zajedničkih objektima iz A sa

$$A^{\downarrow} := \{ \text{ m} \in \text{M} \mid \text{g}I\text{m za sve g} \in \text{A } \}$$

Slično, za skup atributa B definišemo skup objekata kojima su svi atributi u B sa

$$B^{\uparrow} := \{ \text{ g} \in \text{G} \mid \text{g}I\text{m za sve m} \in \text{B } \}.$$

Notacija : Iz praktičnih razloga, umesto $A^{\downarrow}$ i $B^{\uparrow}$ pisaćemo A$'$ i B$'$.

Definicija 2.4. : *Formalni koncept* konteksta (G, M, I) je par (A, B) takav da je A $\subseteq$ G, B $\subseteq$ M, A$'$= B i B$'$= A. A zovemo **ekstentom** a B **intentom** koncepta (A, B).
BB (G, M, I) označava *skup svih koncepata konteksta (G, M, I).*

U nekim knjigama ([13], [14]) se ovo što mi definišemo kao formalni koncept naziva polukoncept (eng. semiconcept), dok kad umesto jednakosti stavimo podskup, tj. kada je $A' \subseteq$ B i $B' \subseteq$ A dobijamo predkoncept (eng. preconcept).

Skup svih ekstenta konteksta označavaćemo sa ϑ, a skup svih intenta sa ν .

Tvrđenje 2.5. : Neka je (G, M, I) kontekst, A, A_1, $A_2 \subseteq$ G skupovi objekata i B, B_1, B_2 skupovi atributa. Tada važi:

1) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2' \subseteq A_1'$ 1') $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_2' \subseteq B_1'$

2) $A \subseteq A''$ 2') $B \subseteq B''$

3) $A' = A'''$ 3') $B' = B'''$

4) $A \subseteq B' \Leftrightarrow B \subseteq A' \Leftrightarrow A \times B \subseteq I$

Dokaz 2.5. :
1) Neka je m $\in A_2'$, što znači da je gIm za sve g $\in A_2$.
Kako je $A_1 \subseteq A_2$, onda je gIm i za sve g $\in A_1$, pa direktno sledi m $\in A_1'$.
2) Kako je A skup objekata, a A' skup atributa zajedničkih objektima iz A i A'' skup objekata kojima su svi atributi u A', očigledno sledi da je $A \subseteq A''$.
1') i 2') analogno 1) i 2).
3) $A' \subseteq A'''$ sledi direktno iz 2')
dok $A''' \subseteq A'$ dobijamo iz 1) i 2).
3') analogno 3).
4) Direktno iz definicije.

Ovo tvrđenje nam pokazuje da operatori A' i B' formiraju Galoa-korespondenciju između mreža P(G) i P(M); dok nam tvrđenje 1.30. daje dva sistema zatvaranja na G i M, koja su dualno izomorfna (jedno drugom).

A' je intent nekog koncepta za svako A $\subseteq$ G jer je (A'', A') uvek koncept.

Najmanji ekstent koji sadrži A je A'', pa je A ekstent akko je $A = A''$. Isto važi i za intente.

Generalno gledano, unija proizvoljnog broja ekstenta ne daje ekstent; dok je presek proizvoljnog broja ekstenta (intenta) uvek ekstent (intent), tj. formalno govoreći dobijamo:

Tvrđenje 2.6. : Neka je T indeksni skup takav da je za svako $t \in$ T, $A_t \subseteq$ G skup objekata.Tada važi

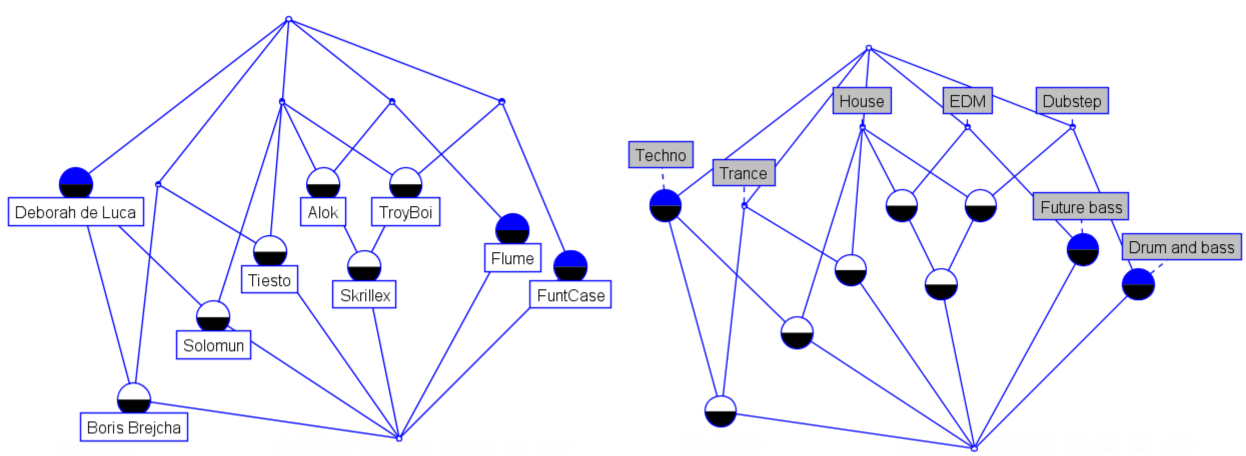
$$(\bigcup A_t)' = \bigcap A_t'$$

Analogno važi i za skup atributa.

Dokaz 2.6. : Za m $\in (\bigcup A_t)'$ po definiciji znamo da važi gIm za sve g $\in \bigcup A_t$. Kako ovo važi za sve g-ove iz unije, očigledno važi i za svako g $\in A_t$, za svako $t \in$ T. Sada opet na osnovu definicije zaključujemo da je m $\in A'_t$ za svako $t \in$ T, što je konačno ekvivalentno iskazu da je m $\in \bigcap A'_t$, što je i trebalo pokazati.

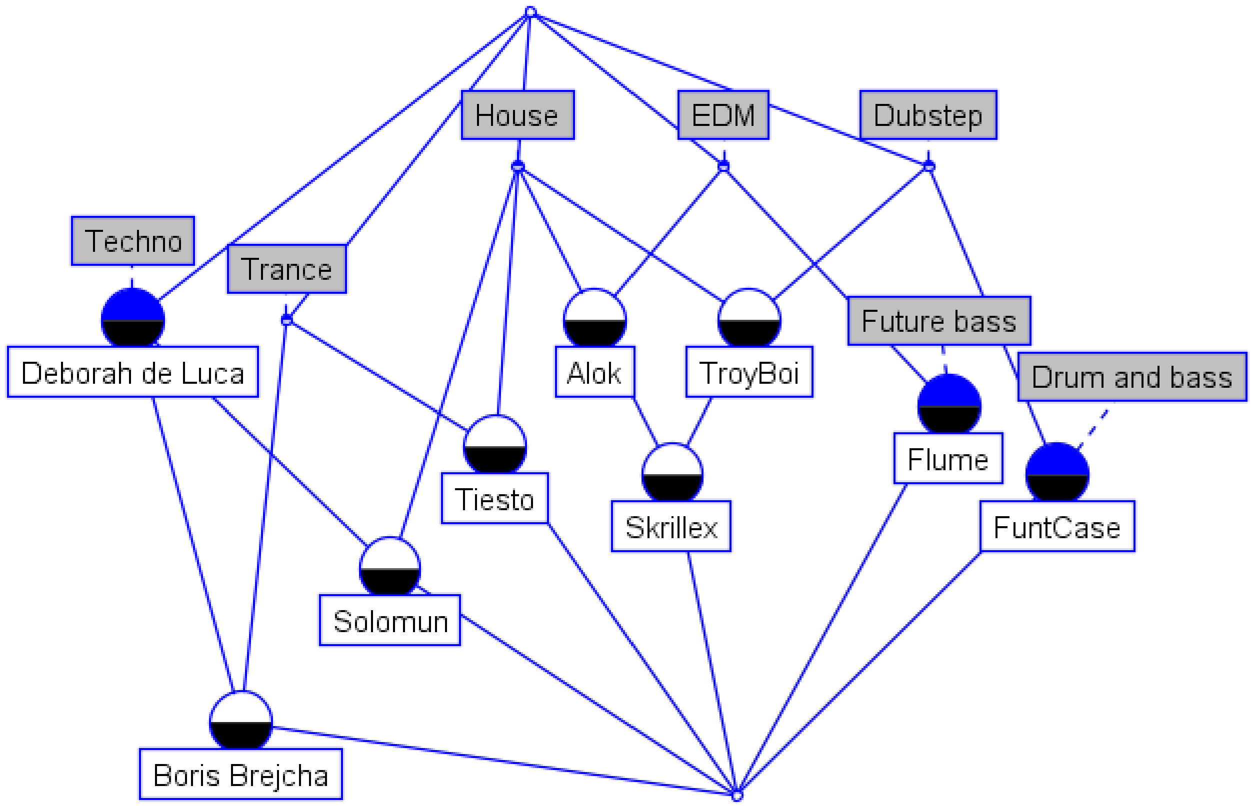
Definicija 2.7. : Neka su (A_1, B_1) i (A_2, B_2) koncepti konteksta. Kada je $A_1 \subseteq A_2$ (umesto toga možemo reći i $B_2 \subseteq B_1$), (A_1, B_1) je **podkoncept** koncepta (A_2, B_2), a (A_2, B_2) **super koncept** koncepta (A_1, B_1), i pišemo $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$. Relaciju $\leq$ nazivamo **hijerarhijski poredak** (eng. hierarchical order) koncepata. Skup svih koncepata konteksta (G, M, I) uređenih na ovaj način nazivamo **mreža koncepta** (eng. concept lattice) i obeležavamo sa $\underline{\mathcal{L}}$ (G, M, I).

Primer 2.8. *Mreža koncepta za kontekst iz primera 2.2.* :
Slika 3 a) prikazuje mrežu koncepta ovog konteksta sa imenima objekata, slika 3 b) sa imenima atributa, a slika 4 i sa imenima objekata i sa imenima atributa.



a) b)

Slika 3



Slika 4

Teorema 2.9.
(OSNOVNA TEOREMA MREŽA KONCEPATA) :

Mreža koncepta $\underline{\mathcal{L}}$ (G, M, I) je kompletna mreža u kojoj su infimum i supremum definisani kao

$$\bigwedge_{t\in T}(A_t, B_t) = \left(\bigcap_{t\in T} A_t, \left(\bigcup_{t\in T} B_t\right)''\right)$$

$$\bigvee_{t\in T}(A_t, B_t) = \left(\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)'', \bigcap_{t\in T} B_t\right)$$

Kompletna mreža S izomorfna je $\underline{\mathcal{L}}$(G, M, I) ako i samo ako postoje preslikavanja $\tilde{f}$: G $\rightarrow$ S i $\tilde{h}$: M $\rightarrow$ S takva da je $\tilde{f}$(G) supremum-gust u S, a $\tilde{h}$(M) infimum-gust u S, i gIm je ekvivalentno sa $\tilde{f}$(g) $\leq$ $\tilde{h}$ (m) za sve g $\in$ G i sve m $\in$ M. Specijalno važi S $\cong$ $\underline{\mathcal{L}}$ (S, S, $\leq$) .

Dokaz 2.9. : Kako za svako $t \in$ T važi $A_t = B_t'$, formulu infimuma

$$(\bigcap_{t \in T} A_t, (\bigcup_{t \in T} B_t)'')$$

na osnovu tvrđenja 2.6. možemo transormisati u

$$((\bigcup_{t \in T} B_t)', (\bigcup_{t \in T} B_t)'').$$

Znamo da je koncept jer je oblika (X', X''). Ekstent ovog koncepta je presek ekstenta od (A_t, B_t) i tako znamo da naš transformisani izraz može biti samo infimum. Analogno se pokazuje za supremum. Ovim je dokazano da je $\underline{\mathcal{L}}$ (G, M, I) kompletna mreža.

Sada dokazujemo postojanje preslikavanja sa odgovarajućim osobinama za specijalan slučaj S = $\underline{\mathcal{L}}$ (G, M, I).
Neka je

$$\tilde{f} \text{ (g) := (\{g\}'', \{g\}') za g} \in \text{G i}$$

$$\tilde{h} \text{ (m) := (\{m\}', \{m\}'') za m} \in \text{M.}$$

Dalje, $\tilde{f}$(g) $\leq$ $\tilde{h}$(m) akko {g}'' $\subseteq$ {m}' akko {m}$\subseteq${g}' akko m $\in$ {g}' a to je ekvivalentno sa gIm. Na osnovu prethodno dokazanih formula zaključujemo

$$\bigvee_{g \in A} (\{\text{g}\}'', \{g\}') = (\text{ A, B }) = \bigwedge_{m \in B} (\{\text{m}\}', \{m\}'') .$$

Ovo važi za svaki koncept (A, B), odnosno $\tilde{f}$ (G) je supremum-gust a $\tilde{h}$ (M) je infimum-gust u $\underline{\mathcal{L}}$ (G, M, I). U opštem slučaju, kada je S $\cong$ $\underline{\mathcal{L}}$(G, M, I) i k : $\underline{\mathcal{L}}$ (G, M, I) $\to$ S izomorfizam, data preslikavanja definišemo malo drugačije:

$$\tilde{f} \text{ (g) := k(\{g\}'', \{g\}') za g} \in \text{G i}$$

$$\tilde{h} \text{ (m) := k(\{m\}', \{m\}'') za m} \in \text{M,}$$

ali dokaz je skoro isti.

Ako je sada S kompletna mreža i $\tilde{f}$: G $\to$ S, h : M $\to$ S preslikavanja sa odgovarajućim osobinama onda k : $\underline{\mathcal{L}}$ (G, M, I) $\to$ S definišemo kao

$$\text{k (A, B) :=} \bigvee \{ \tilde{f}\text{(g)} \mid \text{g} \in \text{A}\}.$$

k je očigledno izotona funkcija. Kako bi pokazali da je k izomorfizam, pokazaćemo da k^{-1} postoji i da je isto izotona funkcija.
Definišemo

$$\text{w(x) := (\{ g} \in \text{G} \mid \tilde{f}\text{(g)} \leq \text{x \}, \{ m} \in \text{M} \mid \text{x} \leq \tilde{h}\text{(m)\}) za x} \in \text{S.}$$

Neka je j $\in$ {g $\in$ G | $\tilde{f}$(g) $\leq$ x}, što je isto kao da smo rekli $\tilde{f}$ (j) $\leq$ x, što je dalje ekvivalentno sa $\tilde{f}$ (j) $\leq$ $\tilde{h}$ (n) za sve n $\in$ { m $\in$ M | x $\leq$ $\tilde{h}$(m)}, što važi akko jIn za sve n $\in$ { m $\in$ M | x $\leq$ $\tilde{h}$(m) } i konačno akko j $\in$ { m $\in$ M | x $\leq \tilde{h}$(m) }$'$. (Drugi uslov sledi analogno.) Ovim smo pokazali da je w(x) koncept od (G, M, I).

Definisali smo preslikavanje w : S $\rightarrow \underline{\mathcal{L}}$ (G, M, I), pa direktno iz definicije sledi da je w izotona funkcija.

Sada pokazujemo da je k = w^{-1}. S obzirom da je $\tilde{f}$ (G) supremum-gust u S imamo k(w(x)) = $\bigvee${ $\tilde{f}$(g) | g $\in$ G, $\tilde{f}$(g) $\leq$ x } = x. Slično, kako je $\tilde{h}$(M) infimum-gust u S imamo k (A, B) = $\bigwedge$ { $\tilde{h}$(m) | m $\in$ B }.
Na osnovu toga dobijamo

$$
\begin{aligned}
w(k(A, B)) &= w \left(\bigwedge \{ \tilde{h}(m) \mid m \in B \} \right) \\
&= (\{ g \in G \mid \tilde{f}(g) \leq \bigwedge \{ \tilde{h}(m) \mid m \in B \} \}, \{...\}') \\
&= (\{ g \in G \mid \tilde{f}(g) \leq \tilde{h}(m) \text{ za sve } m \in B \}, \{...\}') \\
&= (\{ g \in G \mid gIm \text{ za sve } m \in B \}, \{...\}') \\
&= (B', B'') = (A, B).
\end{aligned}
$$

Ako za kompletnu mrežu S izaberemo da je G := S, M := S i I := $\leq$ gde su $\tilde{f}$ i $\tilde{h}$ identična preslikavanja na S, dobijamo S $\cong \underline{\mathcal{L}}$ (G, M, I).

Princip dualnosti mreže koncepta:
Zamenom uloga objekta i atributa dobijamo dualnu mrežu koncepta, tj. $\underline{\mathcal{L}}$ (M, G, I^{-1}) $\cong \underline{\mathcal{L}}(G, M, I)^d$ i (B, A) $\rightarrow$ (A, B) je izomorfizam.
(Kada je (G, M, I) kontekst, onda i (M, G, I^{-1}) mora biti kontekst).

Definicija 2.10. : Za objekat g $\in$ G umesto $\{g\}'$ pišemo g' kada je reč o **intentu objekta** (eng. object intent) { m $\in$ M | gIm }. Slično, pišemo m' kada je reč o **ekstentu atributa** (eng. attribute extent) { g $\in$ G | gIm }.
Koristeći simbole OSNOVNE TEOREME, **koncept objekta** (g'', g') obeležavamo sa f(g), a **koncept atributa** (m', m'') sa h(m).

2.2 Mreže koncepta i konteksta

Definicija 2.11. : Koncept u kome je skup svih objekata ekstent najvećeg koncepta, tj. (Ø $'$, Ø $''$) = (G, G$'$) ; skup svih atributa intent najmanjeg koncepta, odnosno (Ø$''$, Ø$'$) = (M', M) i relacija I takva da I = $\bigcup$ { A $\times$ B | (A, B) $\in$ BB (G, M, I) } naziva se **granični koncept** (eng. boundary concept).

Kontekst možemo odrediti na osnovu sistema svih njegovih koncepata (tu su G i M proširenje i smanjenje trivijalnog graničnog koncepta), ali isto tako i na osnovu mreže koncepta (kao što smo videli u OSNOVNOJ TEOREMI).

Definicija 2.12. : Kontekst u kome važi $g' = h' \Rightarrow g = h$, za sve g, h $\in$ G i $m' = n' \Rightarrow m = n$, za sve m, n $\in$ M, naziva se **klarifikovan**.

Napomena 2.13. : Atributi koji se mogu predstaviti kao bilo koja kombinacija drugih atributa za koju važi da postoji skup X takav da je m'=X' i m$\notin$X, ne utiču na strukturu koncepta.

Dopuna 2.14. : <u>*Razlaganje konteksta*</u> vrši se uklanjanjem atributa sa **i-razloživim** konceptima atributa i objekata sa **ili-razloživim** konceptima objekata.
Skup svih i-razloživih elemenata obeležavaćemo sa Ω_i(S), dok ćemo skup svih ili-razloživih elemenata obeležavati sa Ω_{ili}(S) (gde je S kompletna mreža).

Definicija 2.15. : Kada je svaki koncept objekta ili-nerazloživ, za klarifikovan kontekst kažemo da je **razloživ po redu** (eng. row reduced);
dok kada je svaki koncept atributa i-nerazloživ, kažemo da je **razloživ po koloni** (eng. column reduced).
Za kontekst koji je razloživ i po redu i po koloni kažemo da je **razloživ**.

Kada imamo četiri objekta, broj razloživih konteksta je 126, dok kada su u pitanju pet objekta imamo 13 596 razloživih konteksta. Za šest i više objekata, tačan broj razloživih konteksta nije poznat. [5]

Iako OSNOVNA TEOREMA važi i za beskonačan slučaj, u ovom radu bavićemo se samo konačnim slučajem kod problema razlaganja koncepta zbog mogućnosti crtanja i primene.

Tvrđenje 2.16. : Postoji redukovan kontekst K(V) takav da je V $\cong \underline{\mathcal{L}}$ (K(V)) koji je jedinstven *'do na izomorfizam '* za neku konačnu mrežu V i važi K (V) := (Ω_i(V), Ω_{ili}(V), $\leq$). (Uslov je ispunjen za svaku konačnu mrežu.)

Kontekst iz ovog tvrđenja naziva se i **standardni kontekst** mreže

V, dok je jedna od posledica datog tvrđenja da se svaki konačan kontekst može razložiti bez promene strukture mreže koncepta. To činimo tako što najpre spojimo objekte sa istim intentima i atribute sa istim ekstentima, a zatim izbrišemo one objekte čiji se intent može predstaviti kao presek intenta ostalih objekata, kao i atribute čiji se ekstent može predstaviti kao presek ekstenta ostalih atributa.

Kada imamo evidenciju procesa razlaganja, iz razloživog konteksta možemo naći koncepte početnog konteksta. Razloživ kontekst je oblika (G_{irr}[11], M_{irr}, I $\cap$ ($G_{irr} \times M_{irr}$)), a njemu odgovarajući koncept je (A $\cap$ G_{irr}, B $\cap$ G_{irr}). Početni kontekst je konačan klarifikovan kontekst (G, M, I), čiji je koncept (A, B) i G_{irr} je skup nerazloživih objekata a M_{irr} je skup nerazloživih atributa. Za svako g $\in$ G i svaki ekstent A imamo g $\in$ A $\Leftrightarrow$ $g'' \cap G_{irr} \subseteq$ A $\cap$ G_{irr}, dualno važi i za atribute. Zapisivanjem skupova $g'' \cap G_{irr}$, $m'' \cap M_{irr}$, za sve razložive objekte i atribute, dobijamo koncepte početnog konteksta.

Razlaganje klarifikovanog konteksta možemo ostvariti i uz pomoć **strelica relacija** (koje upoznajemo u narednoj definiciji). S obzirom da se one odnose samo na parove objekata i atributa koji nisu u relaciji I, pogodne su za unošenje u x-tabele.

Definicija 2.17. : Neka je (G, M, I) kontekst, g $\in$ G objekat i m $\in$ M atribut.

$$\mathrm{g} \swarrow \mathrm{m} : \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \neg(\mathrm{g}I\mathrm{m}) \text{ i} \\ \text{ako } g' \subseteq h' \; g' \neq h', \text{ onda h}I\text{m}, \end{cases}$$

$$\mathrm{g} \nearrow \mathrm{m} : \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \neg(\mathrm{g}I\mathrm{m}) \text{ i} \\ \text{ako } m' \subseteq n' \; m' \neq n', \text{ onda g}I\text{n}, \end{cases}$$

$$\mathrm{g} \updownarrow \mathrm{m} : \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{g} \swarrow \mathrm{m} \text{ i } \mathrm{g} \nearrow \mathrm{m}.$$

Značaj *strelica relacija* za redukciju konteksta vidimo u sledećem tvrđenju.

Tvrđenje 2.18. : Za svaki kontekst važi:
a) Postoji m $\in$ M takvo da g $\swarrow$ m $\Longleftrightarrow$ f (g) je $\bigvee$-razloživa.
b) Postoji g $\in$ G takvo da g $\nearrow$ m $\Longleftrightarrow$ h (m) je $\bigwedge$-razloživa.
Specijalno, za svaki konačan kontekst važi:
c) Postoji m $\in$ M takvo da g $\updownarrow$ m $\Longleftrightarrow$ f (g) je $\bigvee$-razloživa.

[11]irr potiče od irreducible (nerazloživ)

d) Postoji g $\in$ G takvo da g $\updownarrow$ m $\iff$ h (m) je $\bigwedge$-razloživa.

Nakon unosa strelica relacija u x-tabelu, izbrišemo redove i kolone bez $\updownarrow$ strelice kako bi smanjili konačan klarifikovan kontekst.

Definicija 2.19. : Ako za svaki objekat g $\in$ G i svaki atribut m $\in$ M takve da $\neg$ (gIm), postoje objekat h $\in$ G i atribut n $\in$ M takvi da je

$$\text{g} \nearrow \text{n i } m' \subseteq n', \text{ kao i h} \swarrow \text{m i } g' \subseteq h',$$

tada za kontekst (G, M, I) kažemo da je **dvostruko utemeljen** (eng. doubly founded) .
Ako za bilo koja dva elementa x, y $\in$ V, takva da x $<$ y postoje elementi s, t $\in$ V takvi da je s minimalan element koji zadovoljava s $\leq$ y, $\neg$(s $\leq$ x), i t maksimalan takav da je t $\geq$ x, $\neg$(t $\geq$ y), onda kompletnu mrežu (V, $\leq$) nazivamo **dvostruko utemeljenom** .

Atributi i elementi mreže iz ove definicije moraju biti nerazloživi (znamo na osnovu prethodnog tvrđenja). Drugim rečima, osobina dvostruke utemeljenosti implicira postojanje nerazloživih elemenata.

Tvrđenje 2.20. : a) Svaki konačan kontekst je dvostruko utemeljen.
b) Kontekst je dvostruko utemeljen ako ne sadrži beskonačan lanac objekata g_1, g_2, g_3, ... takvih da je $g_1' \subset g_2' \subset g_3' \subset$ ... , kao ni beskonačan lanac atributa m_1, m_2, m_3, ... takvih da je m_1', $\subset m_2' \subset m_3' \subset$ ... .
c) Mreže koncepta dvostruko utemeljenih konteksta zadovoljavaju uslov tvrđenja 2.16. jer je svaki koncept dvostruko utemeljenog konteksta supremum ili-nerazloživih koncepata kao i infimum i-nerazloživih koncepata.
d) Neka je (G, M, I) dvostruko utemeljen, g $\in$ G i m $\in$ M. Tada važi:
ako je g $\swarrow$ m, onda postoji atribut n takav da je g $\updownarrow$ n,
a ako je g $\nearrow$ m, onda postoji objekat h takav da je h $\updownarrow$ m.
Delovi c) i d) tvrđenja 2.18. važe i za dvostruko utemeljene kontekste.

Tvrđenje 2.21. : (G, M, I) je dvostruko utemeljen kad god je $\underline{\mathfrak{L}}$ (G, M, I) dvostruko utemeljena kao mreža. Slično, kontekst (V, V, $\leq$) nije dvostruko utemeljen kad god kompletna mreža V nije dvostruko utemeljena.

Lako uočavamo da je kompletna mreža V dvostruko utemeljena akko je svaki kontekst sa osobinom da je V $\cong \underline{\mathfrak{L}}$ (G, M, I), dvostruko utemeljen.

Primedba 2.22. : Mreža koncepta dvostruko utemeljenog konteksta ne mora biti dvostruko utemeljena.

Napomena 2.23. : Neretko se dešava da neko tvrđenje važi za sve konačne mreže, ali ne i za sve kompletne.

2.3 Višeznačni konteksti

Reč "*atribut*" se u standardnom jeziku ne koristi samo za osobine koje objekat može imati, te tako postoje **višeznačni atributi**, kao i oni **jednoznačni** koje smo do sada proučavali. Višeznačni atributi su atributi koji mogu imati više od jedne vrednosti, na primer "*visina*", "*tekstura*", "*količina*" itd.

Definicija 2.24. : Neka su elementi skupa G objekti, elementi skupa M *višeznačni atributi*, elementi skupa W **vrednosti atributa** (eng. attribute values) i I relacija između G, M i W takva da važi

$$((\mathrm{g, m, w}) \in I \wedge (\mathrm{g, m, v}) \in I\ ) \Rightarrow w = v.$$

Tada je (G, M, W, I) **višeznačni kontekst** (eng. many-valued context). ((g, m, w) $\in$ I označava da atribut m ima vrednost w za objekat g; pišemo i m (g) = w). Kada W ima n elemenata, (G, M, W, I) nazivamo **n(-to)-značni kontekst** (eng. n-valued context). **Domen** atributa m je skup svih objekata g takvih da je (g, m, w) $\in$ I za neko w $\in$ W, i označavamo kao dom(m). Ako je dom(m) = G, atribut m je **kompletan**. Kada su svi atributi kompletni i višeznačni kontekst je **kompletan**.

I višeznačni konteksti se mogu predstavljati tabelama, s tim što *vrednost atributa* unosimo u kolonu m i red g, a ostavljamo prazno kada atribut nema vrednost, tj. kada neki objekat uopšte nema taj atribut.

Dodeljivanje koncepata višeznačnom kontekstu vrši se uz pomoć transformacije tog višeznačnog konteksta u jednoznačni kontekst. Zatim se koncepti tog jednoznačnog konteksta tumače kao koncepti prvobitnog višeznačnog konteksta. Ta interpretacija je zapravo **konceptualno skaliranje**.

Ovaj postupak nije jedinstven i često se primenjuje u analizi podataka. Koncepti višeznačnog konteksta zavise, naravno, od samog skaliranja. Najpre sve atribute višeznačnog konteksta interpretiramo uz pomoć konteksta, i takav kontekst nazivamo **konceptualna skala** (eng. conceptual scale).

Definicija 2.25. : Jednoznačni kontekst Q_m := (G_m, M_m, I_m) takav da je m(G) $\subseteq G_m$ naziva se **skala** atributa m višeznačnog konteksta. **Vrednosti skale** su njeni objekti, dok su **atributi skale** njeni atributi.

Iako se pristupi skali razlikuju, odabrana je baš reč skala kako bi se naglasila povezanost sa teorijom merenja (eng. theory of measurement).

Formalno gledano ne postoji razlika između konteksta i skale jer se svaki kontekst može koristiti kao skala, a razlog za to je jer skale funkcionišu po principu "da/ne", a tako i unosimo x-eve kod konteksta.

Naredni korak u procesu skaliranja je spajanje skala u svrhu dobijanja jednoznačnog konteksta. Najjednostavniji način da to uradimo je spajanje pojedinačnih skala (bez da ih međusobno povežemo), što se naziva **osnovno skaliranje** (eng. plain scaling). Kod ovog skaliranja objekti ostaju nepromenjeni, dok svaki višeznačni atribut zamenjujemo odgovarajućim atributom skale. Ako višeznačni kontekst posmatramo kao tabelu, osnovno skaliranje dobijamo kad svaku vrednost atributa (tj. m (g)) zamenimo redom skale konteksta Q_m.

Skup atributa dobijenog konteksta je zapravo disjunktna unija skupova atributa korišćenih skala.

Da bismo se osigurali da imamo disjunktne skupove, umesto skupa atributa skale Q_m koristićemo $\dot{M}_m$:= { m } $\times$ M_m.

Definicija 2.26. : Neka su Q_m, m $\in$ M, kontekst skale[12] i (G, M, W, I) višeznačni kontekst. Tada je *kontekst (G, N, J) dobijen preko osnovnog skaliranja*, gde su N := $\bigcup \dot{M}_m, m\in$ M i gJ(m,n) $\Leftrightarrow$ m(g) = w i w I_m n.

Zapažanje : Relacije bilo kog domena možemo zameniti kontekstima i proučavati njihove mreže koncepta.

Za narednu definiciju koristićemo sledeće skraćenice:

[12]Izrazi *skala konteksta, kontekst skale* i *skala* korišćeni su kao sinonimi u svrhu lakšeg izražavanja.

$$\dot{G}_j := \{ \text{ j } \} \times G_j$$
$$\dot{M}_j := \{ \text{ j } \} \times M_j \text{ i}$$
$$\dot{I}_j := \{ \text{ ((j, g), (j, m)) } \mid \text{ (g, m) } \in I_j \} \text{ za j} \in \{ 1, 2 \}$$

Definicija 2.27. : Neka su K := (G, M, I), $K_1 := (G_1, M_1, I_1)$ i $K_2 := (G_2, M_2, I_2)$ konteksti. Tada:

- K^c := (G, M, (G × M) \ I) je **komplementaran kontekst** (kontekstu K)
- $K^d := (M, G, I^{-1})$ je **dualan kontekst** (kontekstu K)
- kada je G = $G_1 = G_2$, važi da je $K_1 \mid K_2 := (G, \dot{M}_1 \cup \dot{M}_2, \dot{I}_1 \cup \dot{I}_2)$ **nadpozicija** (eng. apposition) od K_1 i K_2
- kada je M = $M_1 = M_2$ važi da je $\frac{K_1}{K_2} := (\dot{G}_1 \cup \dot{G}_2, M, \dot{I}_1 \cup \dot{I}_2)$ **podpozicija** (eng. subposition) od K_1 i K_2
- $K_1 \dot{\cup} K_2 := (\dot{G}_1 \cup \dot{G}_2, \dot{M}_1 \cup \dot{M}_2, \dot{I}_1 \cup \dot{I}_2)$ je **disjunktna unija** od K_1 i K_2
- K^{cd} je **suprotan kontekst** (eng. contrary context) (kontekstu K).

Napomena 2.28. : Zanemarićemo činjenicu da nadpozicija i podpozicija nisu asocijativne, te ćemo poistovećivati kontekste

$$(K_1 \mid K_2) \mid K_3 \quad \text{i} \quad K_1 \mid (K_2 \mid K_3) \; ;$$

kao i

$$\frac{K_1|K_2}{K_3|K_4} \qquad \text{i} \qquad \frac{K_1}{K_3}\left|\frac{K_2}{K_4}\right. .$$

Kada je očigledno šta su nam skupovi G i M koristićemo oznake:

$$\times\times := (\text{ G, M, G} \times \text{M })$$
$$\mathbf{\emptyset} := (\text{ G, M, } \emptyset \text{ }) .$$

Kao što smo već videli, vrednosti višeznačnog atributa moraju biti objekti skale. U standardizovanim skalama, najčešće se kao skup objekata koristi **n** := {1, 2, ... , n }.

Definicija (Osnovne skale) 2.29. :

- <u>*Nominalne skale*</u> $\mathbb{N}_n$:= (n, n, =) .

Ove skale se sastoje od atributa koji nisu uporedivi medjusobno, poput muško/žensko ili na primer boje.

- *Jednodimenzionalne ordinalne skale* $\mathbb{O}_n$:= (n, n, $\leq$) .

Ove skale se koriste kod višeznačnih atributa čije su vrednosti uporedive međusobno i date su po nekom redosledu, tako da svaka vrednost implicira 'slabiju', poput jak/ekstremno jak (tj. ekstremno jak $\Rightarrow$ jak).

- *Jednodimenzionalne interordinalne skale* $\mathbb{I}_n$:= (n, n, $\leq$) | (n, n, $\geq$).

Ove skale se koriste kada atributi imaju bipolaran poredak vrednosti, tj. kada pored suprotnih vrednosti možemo izabrati i one u sredini, s tim što se ovaj tip skale najčešće koristi u anketama.

- *Biordinalne skale* $\mathbb{M}_{n,m}$:= (n, n, $\leq$) $\dot\cup$ (m, m, $\geq$)

Ove skale se koriste kada skup vrednosti atributa sadrži suprotne osobine koje imaju gradaciju, poput veoma sporo/sporo/brzo/veoma brzo .

- *Dihotomne skale* $\mathbb{D}$:= ({ 0, 1 }, {0, 1 }, =).

Ove skale se koriste uglavnom kada je vrednost atributa da/ne.

Skale koje se najčešće koriste su upravo navedene *osnovne skale*.

Kada sve višeznačne atribute interpretiramo pomoću iste skale (ili familije skala), reč je o specijalnom slučaju osnovnog skaliranja. Na primer, ako su nam podaci takvi da koristimo nominalnu skalu, onda višeznačni kontekst nazivamo *nominalnim*, i govorimo o *nominalno skaliranom kontekstu*.

2.4 Formiranje konteksta i standardne skale

Definicija 2.30. : Neka su dati konteksti (G_1, M_1, I_1) i (G_2, M_2, I_2). Tada se njihov **direktan zbir** definiše kao

$K_1 + K_2 := (\dot{G}_1 \cup \dot{G}_2, \dot{M}_1 \cup \dot{M}_2, \dot{I}_1 \cup \dot{I}_2 \cup (\dot{G}_1 \times \dot{M}_2) \cup (\dot{G}_2 \times \dot{M}_1))$.

Kada imamo više od dva konteksta, samo "dodamo" G_i, M_i i I_i na odgovarajuća mesta.

U slučaju dva konteksta, izomorfizam $\underline{\mathcal{L}}(K_1 + K_2) \cong \underline{\mathcal{L}}(K_1) \times \underline{\mathcal{L}}(K_2)$ je dat sa (A, B) $\rightarrow$ ((A $\cap \dot{G}_1$, B $\cap \dot{M}_1$), (A $\cap \dot{G}_2$, B $\cap \dot{M}_2$)) jer je (A, B) koncept od $K_1 + K_2$ akko je (A $\cap \dot{G}_i$, B $\cap \dot{M}_i$) koncept od $K_i := (\dot{G}_I$, $\dot{M}_i$, $\dot{I}_i$), za $i \in \{1, 2\}$.

Definicija 2.31. : **Poluproizvod** (eng. semiproduct) se definiše kao

$$K_1 * K_2 := (\ G_1 \times G_2, \dot{M}_1 \cup \dot{M}_2, \nabla\ )$$

gde je $(g_1, g_2)\nabla$(j, m) $\Leftrightarrow g_j I_j$m za $j \in \{1, 2\}$.

Kako je A_j ekstent od K_j, ekstenti poluproizvoda su oblika $A_1 \times A_2 \times ... \times A_i$.

Slično kao kod direktne sume, mreža koncepta ($\underline{\mathcal{L}}$($K_1 * K_2$)) je proizvod mreža koncepta faktora konteksta, s tim što ako je ekstent nekog koncepta prazan obrišemo nulti element iz svih ekstenta, zatim nađemo njihov proizvod pa dodamo novi nulti element da bi dobili mrežu koncepta.

Ovako dobijena mreža izomorfna je mreži koncepta poluproizvoda.

Definicija 2.32. : **Direktan proizvod** se definiše kao

$$K_1 \times K_2 := (\ G_1 \times G_2, M_1 \times M_2, \nabla\ )$$

gde je $(g_1, g_2)\nabla(m_1, m_2) \Leftrightarrow g_1 I_1 m_1$ ili $g_2 I_2 m_2$.

Tenzor proizvod (eng. tensor product) mreža koncepta (od svih) faktor konteksta je mreža koncepta direktnog proizvoda.

Zamenom praznih polja tabele od K_1 kopijama od K_2 i svakog x-a kvadratom ispunjenim x-evima (kvadrat je veličine K_2) dobijamo x-tabelu direktnog proizvoda.

Ubacivanjem jednog konteksta u drugi dobijamo **sumu zamene** (eng. substitution sum).

Kada je u pitanju disjunktna unija može doći do pojavljivanja razloživih objekata i atributa sa praznim intentima i ekstentima. Poluproizvodi razloživih konteksta su razloživi kada su im faktori <u>*atomarni*</u> (tj. kada važi $g' \subseteq h' \Rightarrow$ g=h), s tim da za najviše jedan od ovih faktora uslov ne mora da važi.

Tvrđenje 2.33. : Za kontekste K_1, K_2 i K_3 važi:

$$(K_1 + K_2) \times K_3 = (K_1 \times K_3) + (K_2 \times K_3)\ .$$

Mnoge kontekst familije su korisne i kao skale. Navešćemo neke od njih:

(1) **Kontranominalna skala** (eng. contranominal scale)

Za proizvoljan skup S kontranominalna skala je $\mathbb{N}_S^c$:= (S, S, $\neq$) i ona je razloživa. Za A_i $\subseteq$ S koncepti ovog konteksta su (A_i, S$\backslash A_i$). Mreža koncepta ima $2^{|S|}$ elemenata jer je izomorfna mreži partitivnog skupa od S. Kada S ima n elemenata, možemo pisati i $\mathbb{N}_n^c$.

(2) **Opšta ordinalna skala** (eng. general ordinal scale)

Za proizvoljan uređeni skup **P** := (P, $\leq$) opšta ordinalna skala je $\mathbb{O}_{\mathbf{P}}$:= $(P, P, \leq)$. Za X_i, Y_i $\subseteq$ P koncepti ovog konteksta su (X_i, Y_i), gde je X_i skup donjih ograničenja od Y_i i Y_i skup gornjih ograničenja od X_i. Ova mreža koncepta je Dedekind-Meknil mreža.

(3) **Kontraordinalna skala** (eng. contraordinal scale)

Za proizvoljan uređen skup **P** kontraordinalna skala je $\mathbb{O}_{\mathbf{P}}^{cd}$:= (P, P, $\ngeq$).
Koncepti su (X_i, Y_i) i za njih važi:
- $X_i \cup Y_i$ = P i $X_i \cap Y_i = \emptyset$
- X_i je polu-ideal u **P**
- Y_i je polu-filter u **P**
(Ovaj uslov je ekvivalentan prethodnom uslovu zbog prvog uslova) .
Kako za svako x,y $\in$ P važi x $\swarrow$ y $\Leftrightarrow$ x $\nearrow$ y $\Leftrightarrow$ x=y, kontekst (P, P, $\ngeq$) je dvostruko utemeljen. Dakle, kada x i y nisu u relaciji, tj. kada važi x $\geq$ y, gde je x objekat, a y atribut, onda dobijamo da za *atribut x* važi x $\nearrow$ x i x' = P $\setminus$ [x) $\supset$ P $\setminus$ [y) = y'. Mreža koncepta izomorfna je mreži ideala poretka (od **P**). Svi koncepti ove skale su ujedno i koncepti skale (1).

3 Određivanje i prikazivanje mreže koncepta nekog konteksta

Postoji više načina za određivanje mreže koncepta nekog konteksta. Kod malih konteksta krećemo od crtanja svih koncepata, kao što smo radili u prethodnom poglavlju.

U ovom poglavlju razmotrićemo generisanje linijskih dijagrama, bilo to ručno ili pomoću računara. Situacija se zakomplikuje već kod mreža koncepta koje imaju preko 20 elemenata, a i sam pregled liste od par desetina koncepata može biti komplikovan. Za prikaz malo većih mreža koncepta koristi se posebna vrsta dijagrama (nested line diagrams). Već kod nekoliko stotina elemenata potpun grafički prikaz više nije moguć, pa se tada koristi tehnika za podelu mreža.

Još jedan od mogućih problema je kada nam kontekst nije dostupan u trenutku kada nam je potreban. Ovo se rešava pomoću implikacija među atributima, što se donekle može preneti i na višekontekstne atribute, ali time se nećemo baviti u ovom radu.

3.1 Svi koncepti konteksta

Tvrđenje 3.1. : Neka je (G, M, I) kontekst. Svaki njegov koncept je oblika (X'', X') i (Y', Y''), gde su $X \subseteq G$ i $Y \subseteq M$. Važi i obrnuto, tj. svi takvi parovi su koncepti. Svaki intent je presek intenta objekata, dok je svaki ekstent presek ekstenta atributa.

Ovo tvrđenje je korisno samo kod malih konteksta jer jedino tu ima smisla ispisivati sve koncepte preko podskupova od G, dok nam drugi deo tvrđenja omogućava da izračunamo tačan broj koncepata preko ekstenta i to činimo na sledeći način.

Na listu najpre unesemo ekstent G, a onda za svaki atribut m iz M formiramo skup A[13] $\cap\, m'$ i dodajemo ga na listu ako se već ne nalazi tamo. Tako će na kraju ova lista sadržati tačno one skupove koji su preseci ekstenta atributa, a to su upravo ekstenti koncepta. Sada uz pomoć konteksta pronalazimo intente koncepta te tako konačno dobijamo listu svih koncepata (A, A') početnog konteksta.

[13] A je skup unešen na listu u jednom od prethodnih koraka

Upravo opisani algoritam nije najpogodniji za veće koncepte stoga ćemo opisati i algoritam koji brže generiše ekstente, a uz to ga je lako i isprogramirati. On koristi dati operator zatvaranja kako bi generisao sva zatvorenja.

Najpre pretpostavimo da je P(G) u *leksikografskom poretku*, a zbog jednostavnosti pretpostavićemo i da je G = { 1, 2, 3, ... , n }.

Definicija 3.2. : Za $A \subseteq G$ kažemo da je **leksikografski manji** (eng. lectically smaller) od nekog njemu različitog podskupa B ako i samo ako $\exists\ (i \in B \backslash A)$ takvo da je $A \cap \{1, 2, 3, ..., i - 1\} = B \cap \{1, 2, 3, ..., i - 1\}$, i označavamo sa $A < B$.

Na primer, neka je A={1, 2, 3, 9} i B={1, 2, 3, 8, 10}. Tada je A<B i i=8.

Očigledno, uvek važi ili A<B ili B<A.

Leksikografski najmanji ekstent je $\emptyset''$.

Sada prateći leksikografski poredak, za proizvoljan podskup A iz G nalazimo najmanji ekstent nakon A.

Najpre uvodimo oznake:

$A <_i B :\Leftrightarrow i \in B \backslash A$ i $A \cap \{1, 2, 3, ..., i - 1\} = B \cap \{1, 2, 3, ..., i - 1\}$

$A \oplus i := ((A \cap \{1, 2, 3, ..., i - 1\}) \cup \{i\})''$.

Tvrđenje 3.3. : Neka su $A, B \subseteq G$ i $i \in G$. Važi:

(1) $A < B \Leftrightarrow A <_i B$ za jedno $i \in G$

(2) $A <_i B$ i $A <_j C$, gde je $i<j \Rightarrow C <_i B$

(3) $i \notin A \Rightarrow A < A \oplus i$

(4) $A <_i B$ i B ekstent $\Rightarrow A \oplus i \subseteq B$, važi i $A \oplus i \leq B$

(5) $A <_i B$ i B ekstent $\Rightarrow A <_i A \oplus i$.

Teorema 3.4. : Najmanji ekstent koncepta veći od datog skupa $A \subset G$, takav da je ispoštovan leksikografski poredak je $A \oplus i$, gde je i najveći elemenat G za koji je $A <_i A \oplus i$.

Za svaki sledeći ekstent uzimamo onaj koji je leksikografski najbliži ekstentu kog smo zadnjeg našli, i tako sve dok ne dođemo do najvećeg ekstenta G.

Zbog dualnosti objekata i atributa, ovaj algoritam možemo koristiti i za intente, samo zamenimo G sa M.

Preduslovi ovog algoritma mogu se delimično oslabiti, stoga je dopuštena generalizacija.

Teorema 3.5. : Neka je $\mathcal{F}$ familija ekstenta konteksta (G, M, I) takva da važi

$$(\mathrm{A} \in \mathcal{F} \text{ i } i \in \mathrm{G}) \Rightarrow (\mathrm{A} \cap \{ 1, 2, ..., i - 1 \})'' \in \mathcal{F} .$$

Tada za proizvoljan podskup A iz G dobijamo skup A^+ kao $A^+ = \mathrm{A} \oplus i$, koji je leksikografski sledeći u $\mathcal{F}$, pod pretpostavkom da postoji, gde je i najveći element iz G takav da je A $<_i$ A $\oplus$ i, A $\oplus$ $i \in F$.

Procenjeni broj koncepata za |I| > 2 je $|\underline{\mathcal{L}}(\mathrm{G}, \mathrm{M}, \mathrm{I})| \leq \frac{3}{2}\, 2^{\sqrt{|I|+1}} - 1$. [5]

3.2 Dijagrami

Mreže koncepta se najbolje prikazuju pomoću Haseovih dijagrama[14]. Zbog nepogodnosti ručnog crtanja preferira se računarsko generisanje. Kriterijumi za dobar dijagram nisu jasno definisani. Takav dijagram treba da olakša interpretaciju prikazanih podataka i mora biti lak za čitanje, ali kako se to postiže zavisi pretežno od cilja interpretacije i strukture mreže.

Automatski generisani dijagrami se najčešće koriste kao polazna tačka za ručno crtanje. Zbog toga sada prvo navodimo jednostavne metode za generisanje i manipulaciju linijskih dijagrama uz pomoć računara.

Jedna od efikasnih metoda za generisanje linijskih dijagrama je **geometrijska metoda**. Ona se zasniva na razumevanju geometrijskog prikaza mreže koncepta i pronalaženju najboljeg mogućeg rasporeda za linijski dijagram. Da bismo ovo postigli crtamo pomoćnu sliku, ručno ili preko računara, koja predstavlja jedan od središnjih koraka, i kasnije je koristimo da bi zapravo nacrtali linijski dijagram. Ova slika je zapravo

[14] Često se nazivaju samo linijski dijagrami

geometrijski dijagram. Intuitivno gledano, ovaj dijagram možemo zamisliti kao mrežu koja je prikazana uz pomoć trodimenzionalnog linijskog dijagrama, a mi je posmatramo sa najviše tačke (jedinični element) .

Posmatrano odozgo prvo vidimo elemente pokrivene jediničnim elementom, koji se kod geometrijskog dijagrama predstavljaju kao krugovi u kojima se upisuju imena odgovarajućih elemenata. Nastavljamo crtanje dijagrama poštujući sledeća pravila:
1) Element pokriven tačno jednim elementom predstavlja se krugom koji je delimično pokriven elementom koji ga pokriva.
2) Element pokriven sa tačno dva elementa predstavlja se linijom koja spaja ta dva elementa, dok se naš *početni element* upisuje u krug koji je delimično pokriven linijom koja spaja elemente koji ga pokrivaju.
3) Element pokriven sa tačno tri elementa predstavlja se trouglom koji spaja ta tri elementa, dok se naš *početni element* upisuje u trougao.
Elementi koji imaju više od tri elemenata koji ih pokrivaju predstavljaju se analogno preko trouglova iz odgovarajuće dimenzije (n-simplex), dok se najmanji i najveći element izostavljaju.

Geometrijske dijagrame treba crtati koristeći listu sledbenika čije smo nastajanje prethodno opisali . Međutim, ovi dijagrami se mogu koristiti i kao uputsto za crtanje dobrih linijskih dijagrama. Ponekad, crtanje dijagrama kreće od dna ka vrhu i tada se gleda lista prethodnika.

Sada ćemo opisati metodu u kojoj računar pored generisanja dijagrama nudi i ideje za njegovo poboljšanje. Kako sami detalji programiranja ovde nisu od značaja, njih izostavljamo i navodimo samo **pravilo pozicioniranja** (eng. positioning rule). Ovo pravilo elemente uređenog skupa **P** prikazuje kao tačke u ravni tako što kada je a < b, gde su a i b iz P, tačka koja predstavlja a mora biti ispod tačke koja predstavlja b, što zapravo znači da mora imati manju y koordinatu. Da bi dobili ispravan linijski dijagram, pozicioniranje mora biti injektivno, što se proverava po potrebi, dok se provera neželjenih slučajnosti ostavlja programiranju.

Definicija 3.6. : Neka je **P** uređen skup. Njegov **prikaz skupa** (eng. set representation) je preslikavanje

$$\text{pri: P} \to \text{P(X)}$$

sa osobinom

$$\text{x} \leq \text{y} \Leftrightarrow \text{rep } x \subseteq \text{rep } y.$$

Sada prelazimo na **aditivni linijski dijagram** (eng. additive line diagram) uređenog skupa **P**. Za ovaj dijagram potrebni su nam prikaz skupa i **projekcija rešetke** (eng. grid projection)

$$\text{vek: X} \to \mathbb{R},$$

koja svakom elementu iz X dodeljuje realni vektor sa pozitivnom y koordinatom. Pozicioniranje elemenata iz P u ravni vršimo pomoću

$$\text{poz(p)} := \text{n} + \sum_{x \in pri(p)}^{n} vek(x),$$

gde je n proizvoljan vektor. Korišćenjem samo pozitivnih y koordinata osigurali smo se da nijedan element p neće biti ispod elementa q kada je q<p.

Svaki konačan linijski dijagram se može prikazati kao aditivni sa odgovarajućim prikazom skupa. Kod mreža koncepta najčešće se koristi prikaz sa nerazloživim objektima i / ili atributima. Ovako dobijeni dijagrami su čitljiviji i lakši za manipulaciju.

Ako promenimo projekciju rešetke za elemenat x iz X, sve slike polufiltera $\{ \text{p} \in \text{P} \mid \text{x} \in \text{pri(p)} \}$ pomeriće se za istu dužinu, dok će preostale slike ostati gde su i bile. Kod prikaza sa nerazloživim elementima, polufilteri su baš glavni filteri ili komplementi glavnih ideala. Dakle, samim pomeranjem glavnih filtera ili glavnih ideala (bez pomeranja ostalih elemenata) možemo manipulisati dijagramom.

Koliko god dobro nacrtali dijagram, kad dosegne određeni broj elemenata postaje skoro nečitljiv i taj broj je otprilike 50.

Sledeća vrsta dijagrama su gore pomenuti **nested line diagrams**, koji osim što se koriste kod većih mreža koncepta omogućavaju i vizualizaciju njihovih promena (kada dodajemo atribute).

Ovaj dijagram se sastoji od delova običnog dijagrama i zamenjuje "skupove" paralelnih linija između tih delova jednom linijom, te tako ovaj dijagram sadrži "kutije" u kojima se nalaze delovi običnog dijagrama i koje mogu biti međusobno povezane.

Kada su dve kutije povezane jednom linijom one su podudarne. Ovo je najjednostavniji slučaj i u njemu važi da kada se jedna kutija nalazi iznad druge linija označava da su krugovi koji su podudarni povezani u običnom dijagramu. Kada su dve kutije povezane sa dve linije to znači da je svaki element gornje kutije veći od svakog elementa donje kutije.

U prvom slučaju dozvoljeno je da umesto podudarnih kutija u svakoj od njih postoji deo sa dve podudarne figure.

Sledeća teorema je osnova podele skupa atributa, a odatle i potiče ovaj tip dijagrama.

Teorema 3.7. : Neka je $M = M_1 \cup M_2$ i (G, M, I) kontekst. Tada je preslikavanje

$$(A, B) \to (((B \cap M_1)', B \cap M_1), ((B \cap M_2)', B \cap M_2))$$

$\vee$-*homomorfizam izotonog potapanja* od BB(G, M, I) u direktan proizvod $\underline{\mathcal{L}}(G, M_1, I \cap G \times M_1)$ i $\underline{\mathcal{L}}(G, M_2, I \cap G \times M_2)$, dok su komponentna preslikavanja

$$(A, B) \to (((B \cap M_i)', B \cap M_i)$$

sirjektivna na $\underline{\mathcal{L}}(G, M_i, I \cap G \times M_i)$.

Kako bi skicirali ovaj tip dijagrama najpre podelimo skup atributa na ne nužno disjunktne skupove $M = M_1 \cup M_2$. Zatim crtamo linijske dijagrame podkonteksta $K_i := (G, M_i, I \cap G \times M_i)$ za $i \in \{1, 2\}$. Zatim skiciramo pomoćnu strukturu, tj. ovaj dijagram ali za proizvod mreža koncepta $\underline{\mathcal{L}}(K_i)$. Za nju nam treba i veća kopija dijagrama $\underline{\mathcal{L}}(K_1)$ u kojoj elementi nisu predstavljeni kružićima već podudarnim kutijama tako da svaka od njih sadrži dijagram od $\underline{\mathcal{L}}(K_2)$.

Kada nam je lista elemenata mreže $\underline{\mathcal{L}}(G, M, I)$ dostupna, unosimo ih u proizvod prema njihovim intentima; a kada nije, unosimo koncepte objekta čije intente možemo pročitati direktno iz konteksta.

Ova metoda se koristi kada nam je potrebno da brzo nacrtamo dijagram.

3.3 Implikacije među atributima

Problem koji se ovde javlja često srećemo i u realnom svetu, a to je kada imamo više objekata koje možemo kombinovati na razne, ali tačno određene načine, s tim što su objekti iz realnog sveta naši atributi, a naši objekti su moguće kombinacije. U slučaju da lista kombinacija nije dostupna, moramo je nacrtati, a to možemo uraditi jer posedujemo znanje o mogućim kombinacijama.

Ovde nemamo jasno definisan kontekst već ga utvrđujemo na osnovu pravila kombinovanja atributa (attribute logic). Na isti način dolazimo i do koncepata.

Ovu metodu koristimo i kada imamo veliki broj objekata i relativno malo atributa, pa je skoro nemoguće ispisati ceo kontekst. Kod ovakvih problema, mreže koncepta nalazimo pomoću *implikacija između atributa*, što su zapravo izjave oblika ”Svaki objekat sa osobinama a,b,c, ... poseduje i osobine x, y, z, ...”. Kada na oba mesta imamo više osobina, pišemo A $\rightarrow$ B, dok kada na primer samo na prvom mestu imamo skup osobina, a na drugom je tačno jedna, onda pišemo A $\rightarrow$ x.

U ovom poglavlju bavićemo se implikacijama atributa koje u sebi sadrže koncept. Na osnovu toga što iz tih implikacija možemo formirati mrežu koncepta, znamo da one sadrže dovoljno informacija. Često se dešava da sistemi svih implikacija između atributa koji sadrže kontekst imaju i veliki broj trivijalnih implikacija, pa je zbog toga zgodno naći podsisteme koji su dovoljni za adekvatno opisivanje mreže koncepta.

Definicija 3.8. : Za podskup T$\subseteq$M kažemo da **poštuje** (eng. respects) implikaciju A$\rightarrow$B kada A$\not\subseteq$T ili B$\subseteq$T, a **poštuje skup** implikacija Υ kada T poštuje svaku implikaciju u Υ.
Za implikaciju A $\rightarrow$ B kažemo da **sadrži** (eng. holds) skup podskupova $\{$ T_1, T_2, ... $\}$ kada svaki podskup T_i poštuje tu implikaciju, a **sadrži kontekst** (G, M, I) kada sadrži sistem intenta objekta. Tada implikaciju A$\rightarrow$B nazivamo **implikacijom konteksta** (G, M, I) tj. A je **premisa** od B, unutar konteksta (G, M, I).

Napomena 3.9. : Implikacija A $\rightarrow$ B sadrži kontekst samo kada svaki objekat koji ima sve atribute iz A, ima i sve atribute iz B.

Tvrđenje 3.10. : Implikacija A $\rightarrow$ B sadrži (G, M, I) ako i samo ako B $\subseteq$ A”. Samim tim sadrži i skup svih intenta koncepta.

Sada ćemo opisati kako ”pročitati” implikaciju sa mreže koncepta. Kako je A $\rightarrow$ B isto što i A $\rightarrow$ m za svako m$\in$B, dovoljno je opisati postupak samo za A $\rightarrow$ m. Implikacija A $\rightarrow$ m važi akko (m', m”) $\geq$ (A', A”), tj. proverimo na mreži koncepta da li je koncept označen sa m iznad infimuma svih koncepata označenih sa n, gde je n iz A
(formalno : h(m) $\geq \bigwedge$ $\{$ h(n) $|$ n $\in$ A $\}$) .

Dešava se da komplementaran kontekst (G, M, (G$\times$M)$\backslash$I) konteksta (G, M, I) ima značajno manje koncepata od originalnog konteksta. Zbog toga se u takvim situacijama za određivanje implikacija ponekad koristi komplementaran kontekst. Za m$\in$M i A$\subseteq$M važi m $\in$ A$''$ $\Leftrightarrow$ $\{$m$\}$ $\subseteq$ A$''$ $\Leftrightarrow$ A$'$ $\subseteq$ m$'$ $\Leftrightarrow$ $\cap\{$n$'$ $|$ n $\in$ A$\}$ $\subseteq$ m$'$ $\Leftrightarrow$ G$\backslash$m$'$ $\subseteq$ $\cup\{$G$\backslash$n$'$ $|$ n $\in$ A$\}$. Dakle, A $\rightarrow$ m sadrži kontekst (G, M, I) ako i samo ako u komplementarnom kontekstu svaki objekat sa atributom m sadrži bar jedan atribut n iz A.

Tvrđenje 3.11. : Neka je Υ skup implikacija u M. Tada je

$$\zeta(\Upsilon) := \{ \text{ X} \subseteq \text{M} \mid \text{X poštuje } \Upsilon\}$$

sistem zatvaranja od M. Ako je Υ skup implikacija konteksta, onda je $\zeta(\Upsilon)$ sistem svih intenta.

Za svaki skup implikacija Υ možemo odrediti kontekst preko sistema zatvaranja $\zeta(\Upsilon)$.

Definicija 3.12. : Implikacija A $\rightarrow$ B **semantički sledi** (eng. semantically follows) iz skupa Υ implikacija između atributa ako svaki podskup od M koji poštuje Υ poštuje i A $\rightarrow$ B.
Familija implikacija Υ je **zatvorena** (eng. closed) ako se svaka implikacija koja sledi iz Υ već nalazi u Υ.
Kada svaka implikacija konteksta sledi iz Υ, skup implikacija tog konteksta nazivamo **kompletnim** (eng. complete).

Tvrđenje 3.13. : Skup Υ implikacija na M je zatvoren akko za sve X, Y, Z, W $\subseteq$ M važi:
1) X $\rightarrow$ X $\in \Upsilon$
2) (X $\rightarrow$ Y $\in \Upsilon$) $\Rightarrow$ (X $\cup$ Z $\rightarrow$ Y $\in \Upsilon$)
3) (X $\rightarrow$ Y $\in \Upsilon$ i Y $\cup$ Z $\rightarrow$ W $\in \Upsilon$) $\Rightarrow$ (X $\cup$ Z $\rightarrow$ W $\in \Upsilon$)

Pokazujemo da je skup Υ implikacija konteksta kompletan tako što pokažemo da je svaki podskup T $\subseteq$ M koji poštuje Υ intent.

Najpre izostavimo implikacije koje trivijalno slede iz ostalih ili one koje sadrže neki kontekst.

Definicija 3.14. : Neka je A $\subseteq$ M skup atributa konteksta (G, M, I). Tada je

$$\dot{A} := A'' \setminus (\text{ A} \cup \bigcup_{n \in A} (\text{ A} \setminus \{n\})'')$$

skup atributa koji se nalaze u A" ali ne i u A (ili u zatvorenju odgovarajućeg podskupa od A). Kada $\dot{A} \neq \emptyset$ (tj. $A'' \neq \text{A} \cup \bigcup_{n \in A} (\text{ A} \setminus \{n\})''$), A je **odgovarajuća premisa** (eng. proper premise). Kada je $\emptyset'' \neq \emptyset$, tada je $\emptyset$ odgovarajuća premisa.

Tvrđenje 3.15. : Neka je T konačan podskup od M. Tada važi

T" = T $\cup \bigcup$ { $\mathring{A}$ | A je odgovarajuća premisa takva da je A $\subseteq$ T }.
Skup svih implikacija konteksta sa konačnim skupom atributa oblika
A $\rightarrow$ $\mathring{A}$ je kompletan.

Spajanjem implikacija sa istom premisom pojednostavljujemo familiju implikacija. Ako se svaka premisa javlja najviše jednom u familiji implikacija, onda takvu familiju nazivamo **kontrahovanom** (eng. contracted). Svaka kontrahovana familija implikacija koja zadovoljava

T" = T $\cup \bigcup$ { B | A $\rightarrow$ B $\in \Upsilon$, A $\subseteq$ T }, za sve T$\subseteq$M,

sadrži implikaciju E $\rightarrow$ F takvu da je $\dot{E}$ $\subseteq$ F za svaku odgovarajuću premisu E.

Strelica relaciju $\swarrow$ koristimo za utvrđivanje odgovarajućih premisa dvostruko utemeljenog konteksta. Kada je skup atributa P odgovarajuća premisa i kada atribut m $\in$ $\dot{P}$ sadrži, P je odgovarajuća premisa od m.

Tvrđenje 3.16. : P je premisa od m ako i samo ako (M\g') $\cap$ P $\neq$ Ø sadrži za sve g $\in$ G takve da g $\swarrow$ m. P je odgovarajuća premisa za m ako i samo ako m $\notin$ P i P je minimalno takvo da (M\g') $\cap$ P $\neq$ Ø sadrži za sve g$\in$G takve da g $\swarrow$ m.

Definicija 3.17. : Skup implikacija konteksta za koji važi da nijedna od implikacija ne sledi iz preostalih naziva se **potreban** (eng. nonredundant).

Pretpostavićemo da je skup atributa koji se javlja u narednim definicijama konačan.

Definicija 3.18.: Podskup P $\subseteq$ M nazivamo **pseudo-intent** ako i samo P $\neq$ P" i Q" $\subseteq$ P *važi* za sve pseudo-intente Q $\subseteq$ P, Q $\neq$ P.

Teorema 3.19.: Skup implikacija oblika P $\rightarrow$ P", gde je P pseudo-intent, je potreban i kompletan.

Pored P $\rightarrow$ P", koristi se i zapis P $\rightarrow$ (P" \ P). Ovaj skup implikacija naziva se **DG baza**[15].

Tvrđenje 3.20. : Kada su P i Q koncepti ili pseudo-intenti takvi da P $\nsubseteq$ Q i Q $\nsubseteq$ P, onda je P $\cap$ Q intent.

[15] eng. Duquenne-Guigues-Basis

Posledica 3.21. : Skup svih podskupova od M koji su intenti ili pseudo-intenti konteksta je sistem zatvaranja.

Modifikacijom operatora Υ dobijamo operator zatvaranja upravo pomenutog sistema zatvaranja. Počevši od skupa X sukcesivno formiramo skupove

$$X^{\Upsilon^*} := \mathrm{X} \cup \bigcup \{ \mathrm{B} \mid \mathrm{A} \to \mathrm{B} \in \Upsilon, \mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}, \mathrm{A} \neq \mathrm{X} \}$$

$$X^{\Upsilon^*\Upsilon^*} := X^{\Upsilon^*} \cup \bigcup \{ \mathrm{B} \mid \mathrm{A} \to \mathrm{B} \in \Upsilon, \mathrm{A} \subseteq X^{\Upsilon^*}, \mathrm{A} \neq X^{\Upsilon^*} \}$$

$$...$$

sve dok ne dođemo do skupa $\Upsilon^*(\mathrm{X}) = \Upsilon^*(\mathrm{X})^{\Upsilon^*}$, koji je baš pseudo-intent ili intent koji smo tražili.

Sledeće tvrđenje pokazuje, između ostalog, i da ne postoji kompletan skup sa manjim brojem implikacija u odnosu na pseudo-intent.

Tvrđenje 3.22. : Svaki kompletan skup implikacija sadrži implikaciju $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ takvu da je $A" = P"$ za svaki pseudo-intent P.

Algoritam za generisanje svih intenta i pseudo-intenta u leksikografskom poretku:

Neka je M = { 1, 2, 3, ..., n }.

Leksikografski najmanji koncept (ili pseudo-intent) je Ø. Neka je skup B dat. Za njega nađemo sledeći koncept u leksikografskom smislu (ili pseudo-intent) tako što proverimo svaki element i iz M. Polazimo od najvećeg elementa i završavamo kad dobijemo $\mathrm{B} <_i \Upsilon^*((\mathrm{B} \cap \{1, 2, ..., i\text{-}1\}) \cup \{\mathrm{i}\})$, gde je $\Upsilon^*((\mathrm{B} \cap \{1, 2, ..., i\text{-}1\}) \cup \{\mathrm{i}\})$ baš koncept (ili pseudo-intent) koji smo tražili.

Kao što smo do sada videli, za određivanje intenta koncepta dovoljan je manji broj implikacija (tj. ne moramo ih sve iskoristiti). Isto tako, do sada smo radili sa poznatim konceptima, a sada prelazimo na one delimično poznate ili čak skroz nepoznate.

Nova metoda o kojoj ćemo sada govoriti naziva se **istraživanje atributa** (eng. attribute exploration). To je proces generisanja skupova *potrebnih* implikacija. Ovo generisanje vrše računari, a usput pronalaze i informacije koje nedostaju, te se tako implikacije određuju u saradnji sa korisnikom (tj. interaktivno). Daljim razvijanjem ove metode dobijaju se metode istraživanja koncepata (koriste se koncepti umesto atributa) i istraživanja pravila (koriste se Hornove klauzule[16] iz predikatske logike umesto implikacija), koje nećemo detaljnije opisivati u ovom radu.

Kod algoritma za određivanje pseudo-intenta dozvoljeno je modifikovanje konteksta dodavanjem novih objekata, čak i za vreme generisanja liste implikacija (Υ). Ako intenti ovih objekata *poštuju* sve implikacije određene do sada, možemo nastaviti sa određivanjem novog konteksta na osnovu informacija do sada utvrđenih. U vezi sa ovim je i sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 3.23. : Neka je K kontekst i neka su P_1, P_2, ..., P_n prvih n pseudo-intenta tog konteksta takvih da poštuju leksikografski poredak. Ako proširimo K objektom g čiji intent g' poštuje implikacije $P_i \to P_i''$ za i $\in$ {1, 2, ..., n}, onda su P_1, P_2, ..., P_n leksikografski gledano prvih n pseudo-intenta proširenog konteksta.

Dokaz 3.23. : Indukcijom po n.

Prilikom pronalaska novog pseudo-intenta P možemo zaustaviti algoritam da bi proverili da li implikaciju P $\to$ P" treba dodati listi. Tu korisnik ili odgovara potvrdno ili daje primer koji ne sme biti kontradiktoran već postojećim implikacijama. U ekstremnim slučajevima, proceduru započinjemo kontekstom kome je skup objekata prazan, te tu korisnik unosi sve primere čime kreira sistem koncepata.

3.4 Međuzavisnost atributa

U ovom poglavlju bavimo se primenom teorije implikacija na višeznačne kontekste. Osnovni pristup se javlja kod osnovnog skaliranja kada opisujemo implikacije između pojedinačnih vrednosti atributa.

Kada govorimo o zavisnosti višeznačnih atributa mislimo na istovremenu zavisnost vrednosti atributa (nekad čak i postepenu), kao u sledećoj rečenici: "Posećenost predavanja zavisi od veličine sale u kojoj se

[16] *Hornova klauzula* je klauzula sa najviše jednim pozitivnim literalom.
Literal je atomična formula ili negacija atomične formule. [6]
Atomična formula je formula oblika P(t_1, t_2, ..., t_n), gde je P predikat, a t_i su termi.

održava kao i od načina prezentovanja"(u smislu "što je zanimljivije, to je posećenije").

Jedna od vrsta *ordinalne zavisnosti* je **funkcionalna zavisnost** (eng. functional dependency) koju ćemo sada opisati.

Definicija 3.24. : Neka su X, Y $\subseteq$ M skupovi atributa višeznačnog konteksta (G, M, I, W). Ako za svako g, h $\in$ G važi

$$(\ \forall_{m\in X}\ \mathrm{m(g) = m(h)}) \Rightarrow (\forall_{n\in Y}\ \mathrm{n(g) = n(h)}),$$

onda za Y kažemo da **funkcionalno zavisi** od X.

Definicija 3.25. : Neka je (G, M, W, I) kompletan višeznačni kontekst, $\leq_m$ relacija poretka na skupu m(G) i X, Y $\subseteq$ M skupovi atributa. Ako za svako g, h $\in$ G važi

$$(\ \forall_{m\in X}\ \mathrm{m(g)} \leq_m \mathrm{m(h)}) \Rightarrow (\forall_{n\in Y}\ \mathrm{n(g)} \leq_n \mathrm{n(h)}),$$

onda za Y kažemo da **ordinalno zavisi** od X.

Funkcionalna zavisnost uvek sledi iz ordinalne zavisnosti jer m(g)=m(h) $\Leftrightarrow$ m(g) $\leq_m$ m(h) i m(h) $\leq_m$ m(g). Zbog ovog uslova očekuje se da je ordinalna zavisnost izotona funkcija funkcionalne zavisnosti, što nije uvek tačno jer se ne može svako preslikavanje ove vrste proširiti do izotone funkcije iz W^X u W^Y.

Ordinalne zavisnosti višeznačnih konteksta mogu se izraziti preko implikacija odgovarajućih jednoznačnih uz pomoć pravila:
(g, h) $I_O\ m$:$\Leftrightarrow$ m(g) $\leq_m$ m(h). Tako dobijemo jednoznačni kontekst K_O := ($G\times$ G, M, I_O). Kod funkcionalne zavisnosti možemo pojednostaviti kontekst zbog simetričnosti relacije jednakosti: {g,h} $I_{\mathbb{N}}\ m$:$\Leftrightarrow$ m(g) = m(h). Te tako dobijamo kontekst $K_{\mathbb{N}}$:= ($P_2(G)$, M, $I_{\mathbb{N}}$), gde je $\mathrm{P}_2(G) := \{\{g,h\}|$ g,h $\in$ G, g$\neq$h}.

Tvrđenje 3.26. : Skup atributa Y u (G, M, W, I) funkcionalno zavisi od X akko implikacija X $\rightarrow$ Y sadrži kontekst $K_{\mathbb{N}}$.
Skup atributa Y u (G, M, W, I) ordinalno zavisi od X akko implikacija X $\rightarrow$ Y sadrži kontekst K_O.

Za formiranje baza funkcionalne i ordinalne zavisnosti možemo iskoristiti algoritam iz prethodnog poglavlja, čak i u slučaju kada višeznačni kontekst nije kompletan.

Definicija 3.27. : Neka je (G, M, W, I) višeznačni kontekst sa relacijom poretka $\leq_m$ na skupu m(G), X $\subseteq$ M skup atributa i n $\in$ M atribut. Ako $\forall_{m \in X}$ dom(n) $\subseteq$ dom(m) i (n(g) $\not\leq$ n(h)) $\Rightarrow$ ($\exists_{m \in X}$ m(g) $\not\leq$ m(h)), kažemo da n ordinalno zavisi od X.

Kako bi generalizovali prethodno tvrđenje moramo najpre modifikovati definicije $K_{\mathbb{N}}$ i K_O. Sa $\hat{m}$ označimo kopiju svakog nekompletnog atributa m iz M. Ove kopije ne smeju pripadati M i moraju se međusobno razlikovati. Skupu atributa jednoznačnog konteksta dodajemo skup $\hat{M}$:= { $\hat{m}$ | dom(m) $\neq$ G }. Kod kompletnog konteksta je $\hat{M}$:= $\emptyset$. Sada kako je

$$\{\text{g,h}\}\ I_{\mathbb{N}}\ \hat{m} :\Leftrightarrow (\text{g, h})\ I_O\ \hat{m} :\Leftrightarrow \text{g} \in \text{dom(m) i h} \in \text{dom(m)}$$

$$\text{i} \quad \{\text{g,h}\}\ I_O\ m :\Leftrightarrow \text{m(g)} \leq_m \text{m(h)},\ \{\text{g,h}\}\ I_{\mathbb{N}}\ m :\Leftrightarrow \text{m(g)} = \text{m(h)},$$

konačno dobijamo

$$K_{\mathbb{N}} := (P_2(G),\ M \dot{\cup} \hat{M},\ I_{\mathbb{N}}) \quad \text{i} \quad K_O := (\text{G}\times\text{G},\ M \dot{\cup} \hat{M},\ I_O).$$

Tvrđenje 3.28. : Atribut n funkcionalno (ordinalno) zavisi od X akko implikacije { $\hat{n}$ } $\cup$ X $\rightarrow$ n i $\hat{n} \rightarrow \hat{X}$ sadrže kontekst $K_{\mathbb{N}}$ (K_O).

Ne postoji tačno preciziran odgovor na pitanja kao što su "da li se upravo prikazan pristup može primeniti i na druge vrste zavisnosti" i "kada je moguće zavisnosti višeznačnog konteksta prikazati preko odgovarajućih jednoznačnih", stoga uvodimo pojam **nejasnoće**. Jedna vrsta generalizacije može se uspostaviti kada dozvolimo određeni **stepen nejasnoće** Q_m. Neka je (G, M, W, I) kompletan višeznačni kontekst sa relacijom Q_m na W za svaki atribut m iz M. Uvodimo oznaku QQ := (Q_m | m $\in$ M) i za skup Y kažemo da je **QQ-zavisan** od X$\subseteq$M kada važi ($\forall_{m \in X}$ m(g) QQ m(h)) $\Rightarrow$ ($\forall_{n \in Y}$ n(g) QQ n(h)) i tada QQ-zavisnost predstavlja *nejasnu funkcionalnu zavisnost.*

Na primer, primenom tvrđenja 3.26. dobijamo da su QQ-zavisnosti od (G, M, W, I) baš implikacije konteksta K_{QQ} := (G×G, M, I_{QQ}), gde je (g, h) I_{QQ} m : $\Leftrightarrow$ m(g) $\text{QQ}_m m(h)$.

3.5 Ekstenzije formalne analize koncepata

U narednom delu navodimo proširenja (ekstenzije) formalne analize koncepata od kojih su neke (kao fazi analiza koncepata) veoma razvijene poslednjih godina i dosta se primenjuju u praksi.

Ekstenzije formalne analize koncepata su:
(1) nejasna (rasplinuta, fazi) formalna analiza koncepata (eng. fuzzy formal concept analyses),
(2) analiza koncepata primenom grube teorije skupova (eng. rough set theory),
(3) trijadna analiza koncepata (eng. triadic concept analyses),
(4) temporalna analiza koncepata (eng. temporal concept analyses),
(5) familije moćnih koncepata (eng. power context families),
(6) strukture obrazaca (eng. pattern structure) ,
(7) logična analiza koncepata (eng. logical concept analyses),
(8) relaciona analiza koncepata (eng. relational concept analyses).

Ekstenzije (1) i (2) nastale su kako bi bilo moguće raditi sa nepouzdanim podacima. Zbog analize trodimenzionalnih koncepata nastala je ekstenzija (3)[17], a zbog analize proizvoljnih veza između objekata nastale su ekstenzije (5)[18], (7)[19] i (8)[20]; dok su (6)[21] i (4)[22] nastale kako bi se analizirali podaci koji se ne mogu direktno opisati x-tabelama i za istraživanje privremenih relacija kod podataka, redom.

Najpoznatije među njima su strukture obrazaca i temporalna analiza koncepata. *Strukture obrazaca* sadrže objekte sa opisima, takozvanim obrascima, koje omogućavaju da se na njima izvode operacije polumreža[23]. Strukture obrazaca mogu se razložiti na (formalne) kontekste. *Temporalna analiza koncepata* konceptualno opisuje privremene fenomene. Ona nam omogućava razumevanje promena kod konkretnih ili apstraktnih objekata i primenjuje konceptualno skaliranje na privremene baze podataka.

[17] Lehmann & Wille, 1995.
[18] Wille, 1997.
[19] Ferré & Ridoux, 2000.
[20] Huchard, 2002.
[21] Ganter & Kuznetsov, 2001.
[22] Wolff, 2000.
[23] Polumreža je parcijalno uređeni skup koji ima ili infimum ili supremum za svaki neprazan, konačan podskup.

3.6 Softveri za formalnu analizu koncepata i primer iz elektronske muzike

Mnogobrojni su softveri koji se mogu koristiti za formalnu analizu koncepata. Najpoznatiji je verovatno dodatak *Cultivate* koji se koristi za analizu koda u Java softveru **Eclipse IDE**. Cultivate se bazira na dodatku *JTransformer* kod programskog jezika Prolog. Kod **Excel**-a se koristi dodatak *Lattice Navigator* koji pretežno služi za crtanje mreža koncepata.

Postoje i online demo softveri koji se mogu koristiti za analizu koncepata. Jedan od njih je **FCA Demo** koji koristi softver *Graphviz* i prikazuje koncept mreže x tabela do veličine 4x4.

Softver korišćen za primere konteksta i njihovih mreža koncepata u ovom radu je **ConceptExplorer**, koji je razvijen u okviru master rada na nacionalnom tehničkom univerzitetu u Ukrajini, 2000. godine.

Još neki od softvera su *Galicia, Camelis, Galactic, Coron System*(softver za rudarenje podataka), *Csx2tikz, Lattice Miner* (koristi se za Galoa mreže[24]), *RCAExplore*(koristi se kod relacione analize koncepata).

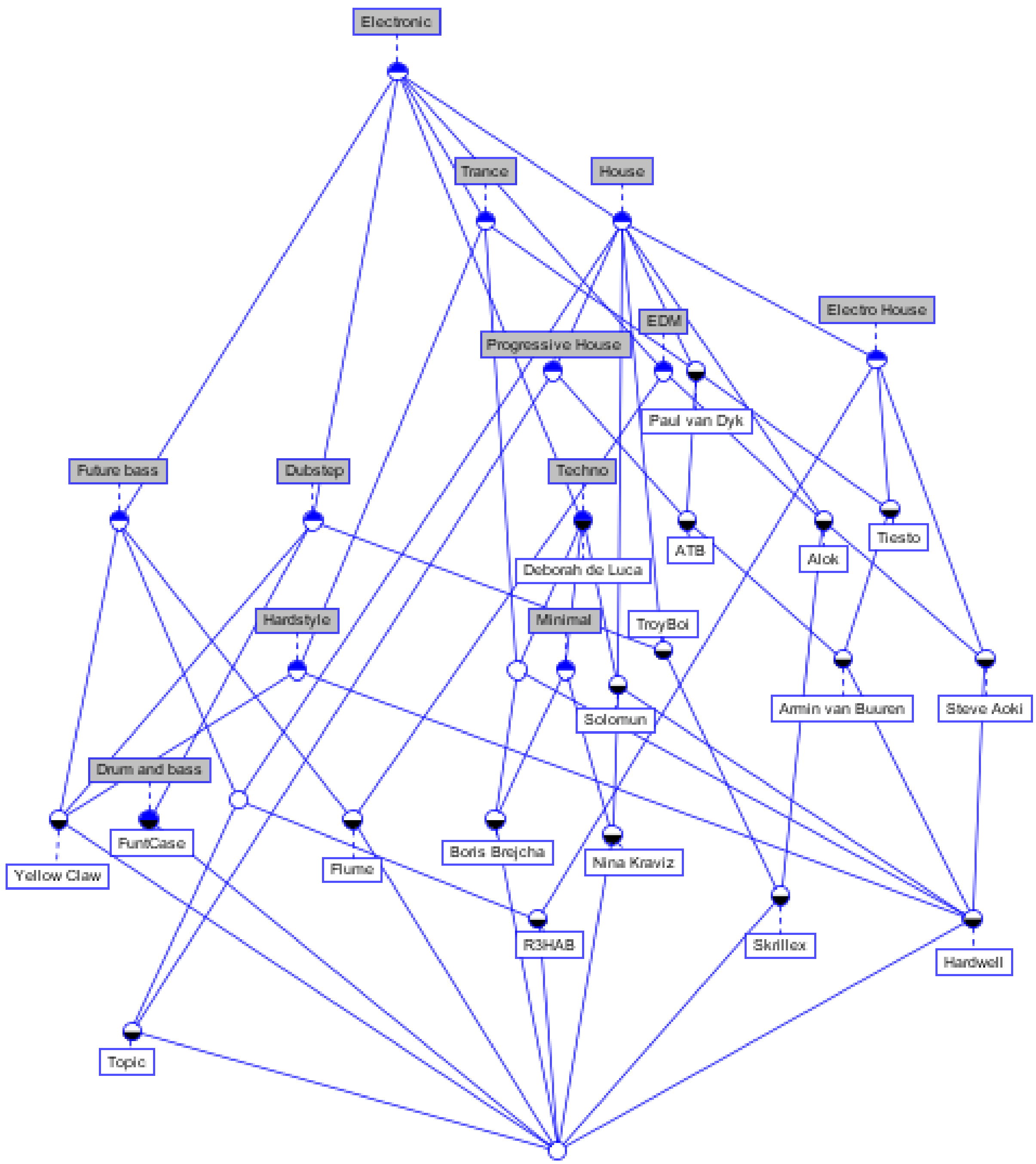
Primer 3.29. : U tabeli 2 prikazan je kontekst u kome su objekti izvođači elektronske muzike, a atributi podžanrovi elektronske muzike. Objekti su *FuntCase, Boris Brejcha, TroyBoi, Skrillex, Tiësto,Flume, Alok, Deborah de Luca, Solomun, R3HAB, Nina Kraviz, Steve Aoki, ATB, Topic, Yellow Claw, Armin van Buuren, Hardwell, Paul van Dyk*; a atributi su *dubstep, trance, EDM, house, techno, drum and bass, future bass, electronic, minimal, electro house, progressive house, hardstyle.*

[24]To su mreže koje se koriste za predstavljanje međusobno povezanih kolekcija činjenica ili znanja o određenoj temi.

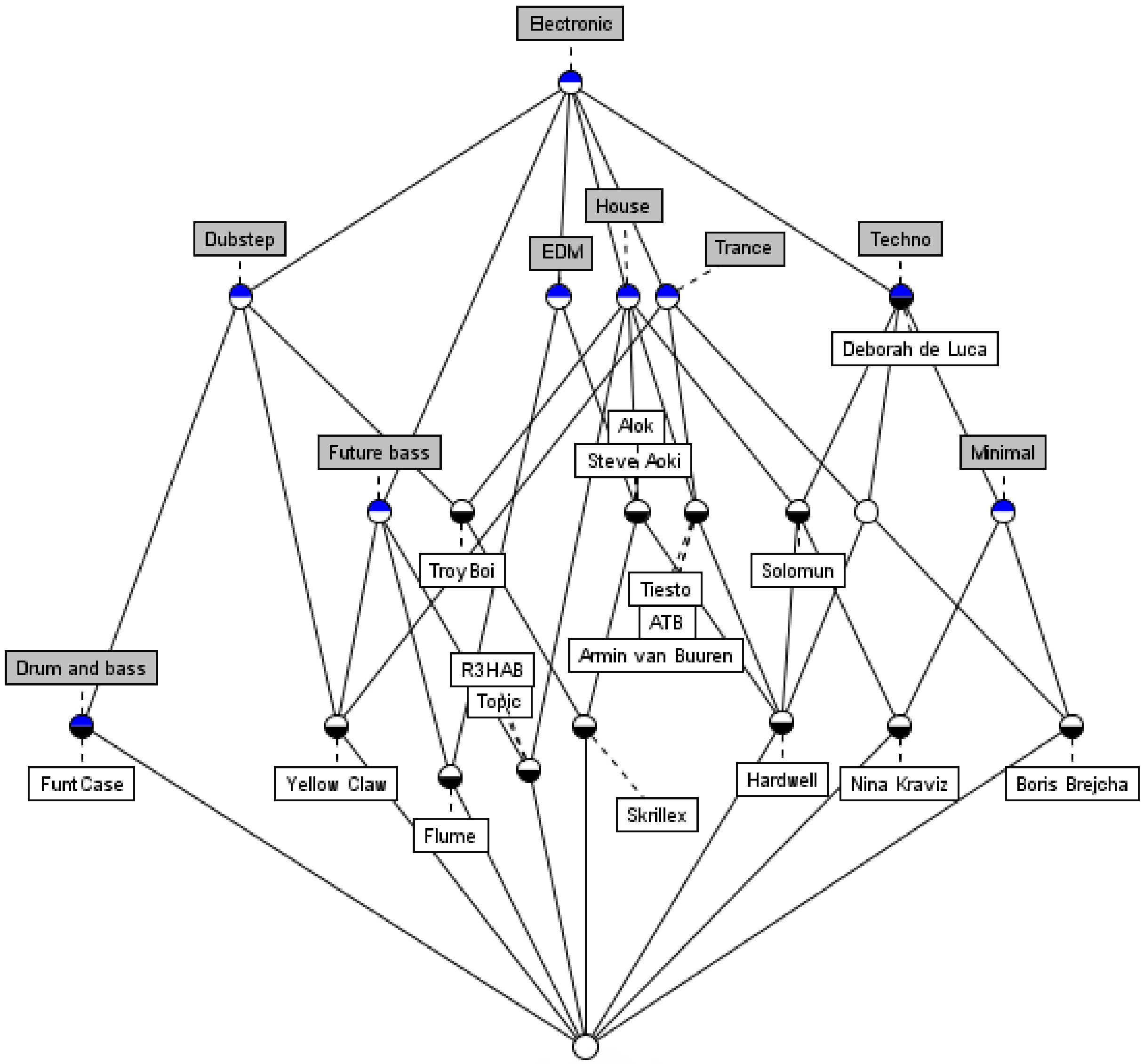
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	Dubstep	Trance	EDM	House	Techno	Drum and ...	Future bass	Electronic	Minimal	Electro Ho...	Progressiv...	Hardstyle
FuntCase	X					X		X				
Boris Brejc...		X			X			X	X			
TroyBoi	X			X				X				
Skrillex	X		X	X				X				
Tiesto		X		X				X		X		
Flume			X				X	X				
Alok			X	X				X				
Deborah d...					X			X				
Solomun				X	X			X				
R3HAB				X			X	X		X		
Nina Kraviz				X	X			X	X			
Steve Aoki			X	X				X		X		
ATB		X		X				X			X	
Topic				X			X	X			X	
Yellow Claw	X	X					X	X				X
Armin van ...		X		X				X		X	X	
Hardwell		X	X	X	X			X		X	X	X
Paul van Dyk		X		X				X				

Tabela 2

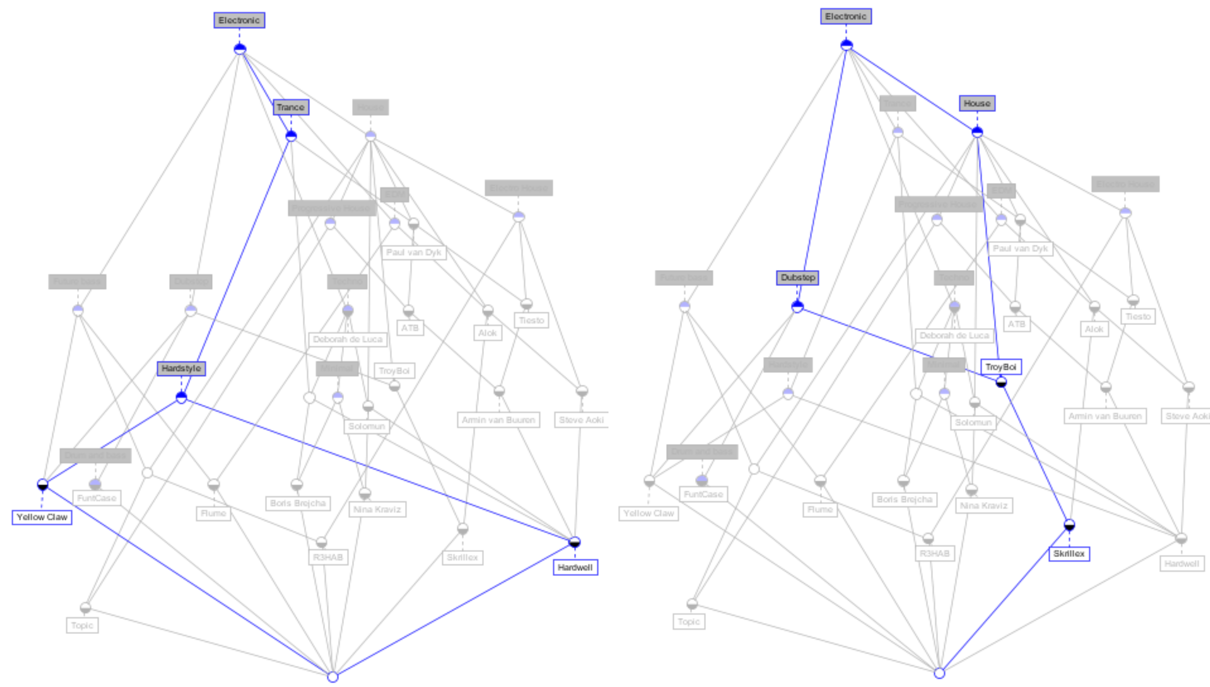
Na slici 5 prikazana je mreža koncepta ovog konteksta. Broj koncepata je 31. Ono što važi za sve objekte jeste da imaju atribut iz kolone I, tj. svi izvođači su izvođači elektronske muzike. S obzirom da je ovo malo veća mreža, jednostavnije je ako znamo koji nam podaci trebaju kako bi znali na šta da se fokusiramo posmatrajući sliku mreže. Na primer, ako nas zanimaju samo glavni podžanrovi (a to su dubstep, trance, EDM, house, techno, drum and bass i future bass), možemo u programu za crtanje mreža isključiti ostale podžanrove i posmatrati jednostavniju mrežu datu na slici 6. Ako nas zanima nešto konkretnije, npr. koji izvođači pripadaju žanru hardstyle ili da li je hardstyle podžanr nekom drugog žanra (osim electronic, jer su svi žanrovi njegov podžanr), klikom na čvor koji je "imenovan" hardstyle na mreži konteksta ističemo sve informacije vezane za taj podžanr, kao na slici 7 a). Slično, možemo odlučiti da se fokusiramo na podatke o tačno određenom izvođaču, npr. TroyBoi, kao na slici 7 b). Slika 8 stavlja fokus na čvor *house*. Posmatranjem slike zaključujemo da je house podžanr žanra electronic, a da su progressive house i electro house njegovi podžanrovi.


Electronic
Trance
House
Electro House
EDM
Progressive House
Paul van Dyk
Future bass
Dubstep
Techno
ATB
Tiesto
Alok
Deborah de Luca
Hardstyle
Minimal
TroyBoi
Solomun
Armin van Buuren
Steve Aoki
Drum and bass
FuntCase
Yellow Claw
Flume
Boris Brejcha
Nina Kraviz
R3HAB
Skrillex
Hardwell
Topic

Slika 5

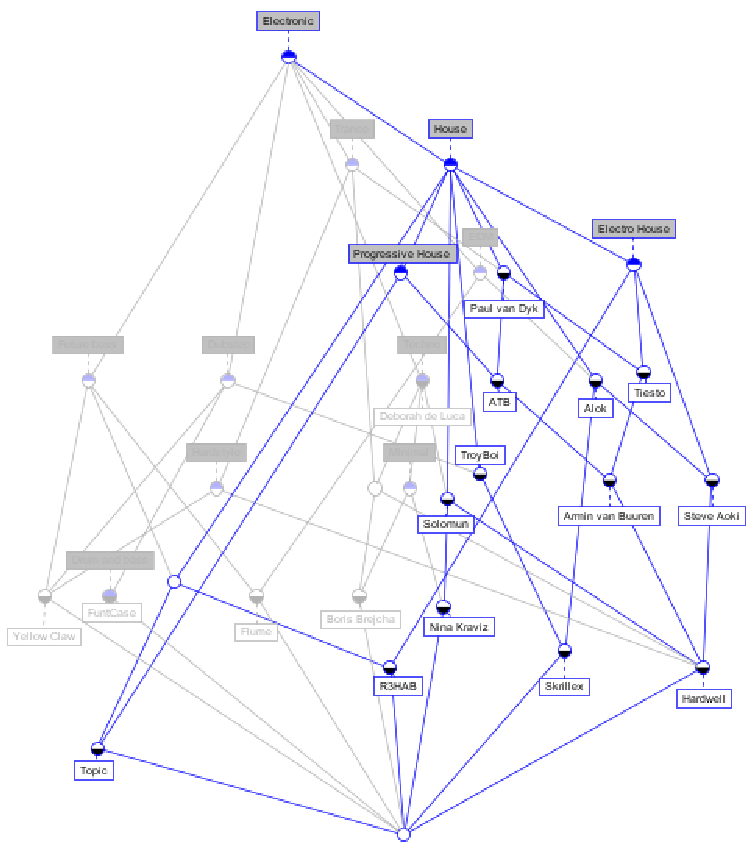

Electronic
Dubstep
EDM
House
Trance
Techno
Deborah de Luca
Future bass
Alok
Steve Aoki
Minimal
Troy Boi
Tiesto
ATB
Solomun
Armin van Buuren
R3HAB
Topic
Drum and bass
Funt Case
Yellow Claw
Flume
Skrillex
Hardwell
Nina Kraviz
Boris Brejcha

Slika 6



a) b)

Slika 7



Slika 8

Zaključak

U ovom radu prikazane su osnove i primena formalne analize koncepata, koja je metoda bazirana na teoriji mreža koja se najčešće koristi u realnim problemima u praksi u različitim oblastima a posebno i u društvenim naukama.

U uvodnom delu dat je kraći osvrt na nastanak i primenu teorije mreža, kao i kratak pregled bitnih pojmova i tvrđenja iz teorije mreža koji su potrebni za dalji rad, kao npr. i-razloživi i ili-razloživi elementi, infimum-gusti i supremum-gusti skupovi, atomarne i kompletne mreže, Galoa veza, Dedekind-Meknil mreža, Dedekindova teorema itd.

U drugom delu se najpre pominje istorijski nastanak formalne analize koncepta, a onda se uvode osnovni pojmovi ove teorije i dokazuje osnovna teorema mreže koncepata. Zatim se govori i o osnovnim skalama i objašnjava skaliranje.

U završnom delu fokus je na prikazivanju mreža koncepta nekog konteksta, kao i o dijagramima i o ekstenzijama formalne analize koncepata.

Do sada je razvijen i implementiran veliki broj aplikacija i softvera za praktični rad na ovoj teoriji. U ovom radu su pored prikaza teorije, prikazane i mogućnosti primene, a praktični značaj ove teorije ilustrovan je na originalnom primeru iz elektronske muzike i konkretnoj primeni softvera Concept Explorer. Za ovaj primer napravljena je koncept mreža i izvedeni su odgovarajući zaključci i veze između odgovarajućih koncepata.

Literatura :

[1] https://math.hawaii.edu/∼jb/lat1-6.pdf *pristupljeno 18.11.2022.*

[2] Teorija mreža - Branimir Šešelja ; 2006., Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku u Novom Sadu

[3] Introduction to Lattice Theory with Computer Science Applications – Vijay K.Garg; 1st edition, kindle edition, 2015., Wiley

[4] Introduction to Lattice Algebra With Applications in AI, Pattern Recognition, Image Analysis, and Biomimetic Neural Networks – Gerhard X. Ritter, Gonzalo Urcid; 2021., Chapman & Hall

[5] Formal Concept Analysis - Bernhard Ganter, Rudolf Wille; 1999., Springer

[6] Matematička logika - Rozália Madarász Szilágyi ; 2012., Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku u Novom Sadu

[7] Begriffdesken: Von der griechischen Philosophie bis zur Künstlichen Intelligenz heute - Rudolf Wille ; 1995., Dilthey-Kastanie, Ludwig-Georgs-Gymnasium Darmstadt

[8] Restructuring Lattice Theory: An Approach Based on Hierarchies of Concepts - Rudolf Wille; 1982., In: Rival, I. (eds) Ordered Sets. NATO Advanced Study Institutes Series, vol 83. Springer, Dordrecht.
https://doi.org/10.1007/978-94-009-7798-3_15

[9] https://typeset.io/pdf/review-formal-concept-analysis-in-knowledge-processing-a-1x09dowab2.pdf *pristupljeno 20.1.2023.*

[10] Pattern Structures and Their Projections - Ganter, B., Kuznetsov, S. O.; 2001.; In: Delugach, H.S., Stumme, G. (eds) Conceptual Structures: Broadening the Base. ICCS 2001. Lecture Notes in Computer Science(), vol 2120. Springer, Berlin, Heidelberg.
https://doi.org/10.1007/3-540-44583-8_10

[11] https://www.scitepress.org/papers/2012/41754/41754.pdf *pristupljeno 20.1.2023.*

[12] https://kipdf.com/applied-lattice-theory-formal-concept-analysis-group-in-darmstadt-germany-begun-_5ac840c51723dd80d52830af.html *pristupljeno 21.1.2023.*

[13] A mathematical model for conceptual knowledge systems - Peter Luksch and Rudolf Wille; 1991., Springer, Berlin, Heidelberg

[14] Preconcepts and set representation of contexts - Jürgen Stahl and Rudolf Wille; 1985., Techn. Hochsch., Fachbereich Mathematik

[15] https://www.upriss.org.uk/papers/arist.pdf *pristupljeno 29.01.2023.*

Biografija

Anđela Stojilković rođena je 1. septembra 1996. godine u Vranju. Osnovnu školu završava 2011. godine kao nosilac Vukove diplome. Nakon završetka osnovne škole upisuje Gimnaziju “Bora Stanković” u Vranju, prirodno-matematički smer, koju završava 2015. godine sa odličnim uspehom. Iste godine upisuje osnovne akademske studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike (M4). Od druge polovine četvrte godine (2019. godina) studije nastavlja na novom smeru na integrisanim akademskim studijama, smer Master profesor matematike (M5) na istom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene planom i programom i time stekla pravo na odbranu master rada.

Novi Sad, februar 2023. **Anđela Stojilković**

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj (IBR):

Identifikacioni broj (IBR):

Tip dokumentacije (TD): Monografska dokumentacija

Tip zapisa (TZ): Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada (VR): Master rad

Autor (AU): Anđela Stojilković

Mentor (MN): Prof. Dr. Andreja Tepavčević

Naslov rada (NR) : Mreže, formalna analiza koncepta i primer iz elektronske muzike

Jezik publikacije (JP): srpski (latinica)

Jezik izvoda (JI): srpski i engleski

Zemlja publikovanja (ZP): Republika Srbija

Uže geografsko područje (UGP): Vojvodina

Godina (GO): 2023.

Izdavač (IZ): Autorski reprint

Mesto i adresa (MA): Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 3

Fizički opis rada (FO): 3 poglavlja/ 45 strana/ 15 referenci/ 2 tabele, 8 slika

Naučna oblast (NO): Matematika

Naučna disciplina (ND): Algebra

Predmetna odrednica/ključne reči (PO): Mreža, Galoa veza, formalni kontekst, formalni koncept, intent, ekstent, mreža koncepta, osnovna teorema mreža koncepata, razlaganje konteksta, strelica relacija, višeznačni atributi, skala, softver ConceptExplorer.

UDK:
Čuva se (ČU): Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku

Važna napomena (VN):

Izvod(IZ): Ovaj master rad se na samom početku bavi mrežama i to u onoj meri koja je neophodna za razumevanje formalne analize koncepta. Centralni deo posvećen je formalnoj analizi koncepta, gde se najviše govori o mrežama koncepta i konteksta, a onda i o osnovnim te i onim drugim skalama. Na kraju se detaljno objašnjava određivanje i prikazivanje mreže koncepta nekog konteksta uz dijagrame i primer iz elektronske muzike u softveru ConceptExplorer.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća (DP): 30.01.2023.

Datum odbrane (DO):

Članovi komisije (KO):
Predsednik: Dr. Petar Đapić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: Dr. Andreja Tepavčević, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr. Nebojša Mudrinski, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number (ANO):

Identification number (INO):

Document type (DT): Monograph type

Type of record (TR): Printed text

Contents Code (CC): Master's thesis

Author (AU): Anđela Stojilković

Mentor (MN): Andreja Tepavčević, PhD

Title (TI): Laticces, formal concept analysis and example from elec– tronic music

Language of text (LT): Serbian (Latin)

Language of abstract (LA): Serbian and English

Country of publication (CP): Republic of Serbia

Locality of publication (LP): Vojvodina

Publication year (PY): 2023.

Publisher (PU): Author's reprint

Publication place (PP): Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Do– siteja Obradovića 3

Physical description (PD): 3 chapters/ 45 pages/ 15 references/ 2 tables, 8 pictures

Scientific field (SF): Mathematics

Scientific discipline (DP): Algebra

Subject/Key words (SKW): Lattice, Galois connection, formal context, formal concept, intent, extent, concept lattice, The Basic Theorem on Concept Lattices, reducing the context, arrow relations, many-valued contexts, scale, softver ConceptExplorer.

UC:
Holding data (HD): The Library of the Department of Mathema– tics and Informatics

Note (N):

Abstract (AB): At the beginning, this master thesis studies lattices to the extent necessary for understanding formal concept analysis. Central part is dedicated to formal concept analysis, where are the context and concept lattices the most mentioned, and after them elementary and other scales. Last part describe in detail, determinati– on and representation of concept lattices of some context, then dia– grams and example from electronic music done in softver ConceptEx– plorer.

Accepted by the Scientific Board on (ASB): 30. 01. 2023.

Defended (DE):

Thesis defend board (DB):

<u>President:</u> Petar Đapić, PhD, associate professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

<u>Mentor:</u> Andreja Tepavčević, PhD, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

<u>Member:</u> Nebojša Mudrinski, PhD, associate professor, Faculty of Science, University of Novi Sad