



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU



Srđan Jakovljević

Metode konačnih zapremina za rešavanje zakona održanja

- master rad -

Novi Sad, 2022.

Predgovor

Ovaj master rad je napisan na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, na Departmanu za matematiku i informatiku 2022. godine.

Teme koje će biti ovde izložene će se ticati metoda konačnih zapremina za zakone održanja, kao što je već nagašeno u naslovu. Ova materija povezuje teme iz matematike, konkretno numeričkog rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina, sa mnogim drugim naučnim granama i njihovim primenama u inžinjerskim delatnostima. Upravo ova švestranost” materije me je i opredelila da pišem o njoj, te sam joj ukazao tu čast, označivši je kao temu mog master rada.

Pre nego što krenem sa zahvalnicama, napomenuo bih da sam dugo razmišljao da li i kome, da posvetim ovaj master rad. Odlučio sam se da ovaj rad posvetim mojim roditeljima, Dragana i Marici, koji su oboje preminuli, za mene lično poprilično izazovne i nemile, 2019. godine. Kaže se da smo često najsuroviji prema osobama koje najviše volimo. Činjenica je da su moji roditelji umeli često da me obasipaju velikom količinom ljubavi i pažnje, a nekad, istu količinu ljubavi i pažnje, da izraze na pomalo nekonvencionalan način, što ja, kao njihovo jedino dete, nekada nisam

umeo da razumem. Jedno je sigurno, a to je da su i oni mene neizmerno i iskreno voleli, a i ja njih, što smatram dovoljno dobrim razlogom da im posvetim ovaj master rad.

Prvo bih voleo svoju zahvalnost da izrazim dr Ivani Vojnović, mojoj mentorki, koja me je vodila kroz pisanje ovog master rada i pružila mi neizmernu podršku. Ovde bih voleo da se zahvalim i dr Marku Nedeljkovu i dr Nataši Krklec Jerinkić na korisnim savetima koje su mi uputili prilikom pisanja ovog rada. Mogu reći da su se sve troje pokazali ne samo kao izvrsni predavači i poznavaoči svojih oblasti istraživanja, već i kao plemenite osobe.

Zahvalio bih se i mojim predivnim kolegama, koje ovde neću sve nabrajati, ali koji će se svakako prepoznati, koji su mi bili podrška u nekim od najtežih trenutaka mog života. Posebno bih se zahvalio kolegi Nikoli Sarajliji na ukazanoj pomoći prilikom kucanja ovog rada u LaTeX programu, s obzirom da nisam vičan u upotrebi ovog programa, i korisnim savetima. Priznajem, da mi je čast biti deo tako plemenitog kolektiva.

Ovde bih voleo da se zahvalim dr Ljiljani Nikolić i gospodji Gordani Georgievski, zaposlenima u bolnici u mom rodnom Novom Kneževcu, koje su mi pomogle da prevaziđem ove teške godine i izadjem iz njih kao pobednik.

Zahvaljujem se i mom ujaku Radovanu i njegovoј porodiци, koji su me prihvatili kao svoje treće dete.

Poslednja osoba kojoj ću se zahvaliti neka ostane ano-

nimna za većinu čitalaca. Neka se ovo N.N. lice zove Fada Blanca. Ona je bila i so i melem koji sam sipao na rane. Poletela je negde daleko u svet, prateći svoje snove, i nisam siguran hoću li ponovo videti njen topao pogled. Jednom prilikom sam joj obećao da će završiti ovaj master rad, a to sam i uradio.

Završavam parafrazirajući slavnog persijskog pesnika Ferdosija: "Neka ovo delo sačuva moje ime i moj glas od zaborava.".

Novi Sad, 2022.

Srđan Jakovljević

Sadržaj

| | |
|--|-----------|
| Predgovor | 2 |
| Uvod | 8 |
| 1 Metode konačnih zapremina za zakone održanja u jednoj dimenziji | 13 |
| 1.0.1 Godunovljev metod | 16 |
| 1.0.2 Murman-Roova metoda | 18 |
| 1.0.3 Centralna metoda | 20 |
| 1.0.4 Laks-Fridriksov metod | 21 |
| 1.0.5 Rusanovljev metod | 21 |
| 1.0.6 Engkvist-Ošerov metod | 22 |
| 1.0.7 Poređenja metoda po različitim kri- terijumima | 23 |
| 1.0.8 Konzistentni, konzervativni i mono- toni metodi | 24 |
| 1.0.9 Konzervativni metodi | 24 |
| 1.0.10 Konzistentni metodi | 25 |
| 1.0.11 Monotoni metodi | 25 |
| 1.0.12 Osobine stabilnosti monotonih metoda | 26 |
| 1.0.13 L^∞ veze | 27 |
| 1.0.14 Entropijske nejednakosti i L^p veze . | 27 |
| 1.0.15 TV veze | 28 |
| 1.0.16 Vremenska neprekidnost | 30 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1.0.17 | Konvergencija monotonih metoda | 30 |
| 1.0.18 | Granični uslovi | 32 |
| 2 | Metode konačnih zapremina drugog reda (visoke rezolucije) | 34 |
| 2.0.1 | Red tačnosti konvergencije | 34 |
| 2.0.2 | Laks-Vendrofov metod | 36 |
| 2.0.3 | Numerički eksperimenti | 38 |
| 2.0.4 | REA algoritam | 39 |
| 2.0.5 | Rekonstrukcije drugog reda | 40 |
| 2.0.6 | Ograničenja - nagibi | 40 |
| 2.0.7 | Izvor oscilacija | 40 |
| 2.0.8 | Minmod ograničenja | 41 |
| 2.0.9 | Numerički eksperimenti | 42 |
| 2.0.10 | Druga ograničenja | 42 |
| 2.0.11 | Metodi drugog reda u obliku fluksa | 43 |
| 2.0.12 | Fluks-ograničenja i TVD osobina . | 45 |
| 2.0.13 | Metodi visokih rezolucija za nelinearne probleme | 46 |
| 2.0.14 | Polu-diskretna formulacija | 47 |
| 2.0.15 | Polu-diskretni metodi drugog reda . | 48 |
| 2.0.16 | Numerički fluks | 49 |
| 2.0.17 | Vremensko koračanje | 49 |
| 2.0.18 | Standardni Runge-Kuta metod . . . | 50 |
| 2.0.19 | Algoritam visokih rezolucija | 51 |
| 2.0.20 | Numerički eksperimenti | 52 |
| 3 | Metodi konačnih zapremina veoma visokog reda za skalarne zakone održanja | 53 |
| 3.0.1 | Po delovima polinomne rekonstrukcije visokog reda | 54 |

| | | |
|-------------------|---|-----------|
| 3.0.2 | Procedura rekonstrukcije ENO | 55 |
| 3.0.3 | ENO algoritam | 57 |
| 3.0.4 | Osobine ENO-rekonstrukcije | 59 |
| 3.0.5 | Problemi sa ENO-aproksimacijom | 60 |
| 3.0.6 | WENO-rekonstrukcija | 60 |
| 3.0.7 | WENO-algoritam | 63 |
| 3.0.8 | Računanje numeričkog fluksa | 64 |
| 3.0.9 | Vremensko stepenovanje | 64 |
| 3.0.10 | Numerički eksperimenti | 64 |
| 4 | Neka uopštenja | 66 |
| 4.0.1 | Ćelijski centriran metod konačnih zapaščina | 67 |
| 4.0.2 | Čvorno centralni metod konačnih zapaščina | 67 |
| 4.0.3 | Petrov-Galerkinova formulacija | 68 |
| 4.0.4 | Ispitivanja prilikom ocena | 69 |
| 5 | Primena | 70 |
| Zaključak | | 73 |
| Pogovor | | 75 |
| Literatura | | 76 |

Uvod

Parcijalne diferencijalne jednačine (skraćeno PDJ) reda k su jednačine obilka $F(x, u, Du, D^2u, \dots, D^k u) = 0$, gde važi da je $F : U \times R \times R^n \times R^{n^2} \times \dots \times R^{n^k} \rightarrow R$ tako definisana funkcija, $x \in U \subset R^n$ otvoren skup, a $u : R^n \rightarrow R$ nepoznata funkcija. Dragi čitaoci, pitate se, čemu će nama PDJ, kad već imamo nepregledan dijapazon matematičkih teorema i izuzetnih rezultata? Da li je ovo još neko znanje koje će na trebati "kada na vrbi rodi grožđe"? Kaže se, da je čovek koji je pomerio planinu krenuo pomerajući kamenje. Tako ćemo i mi krenuti od "kamenja", pa ćemo u poglavljiju o primeni dobijenih rezultata videti "planinu". Tada će nam biti jasno, zašto izučavamo ovu oblast. Rezultati teorije PDJ imaju veliki značaj ne samo za čisto teorijsku, već i za primjenu matematiku, u kojoj dolaze do izražaja praktične strane naše naučne discipline. Jedna od tih praktičnih strana jeste opisivanje zakona održanja, bez kojih su nauke kao fizika, hemija i biologija nezamislive. Ovi zakoni služe za opisivanje mnogih pojava koje ove naučne discipline proučavaju. Zakon održanja, izražen preko PDJ, ima sledeći oblik:

$$\rho_t + q_x = 0,$$

gde je ρ oznaka za "gustinu", a q oznaka za "fluks", koji možemo shvatiti i kao tok ili protok. Još jedna veličina koju bih rado pomenuo jeste "brzina" koja povezuje gore pomenute

nute, jer se da predstaviti kao količnik "fluksa" i "gustine", a koja se često obeležava sa u . Običnim jezikom rečeno, opšti zakon održanja bi glasio ovako:

Merljiva osobina izolovanog fizičkog sistema se ne može promeniti promenom tog sistema.

Osnovni primeri za zakone održanja dolaze iz fižicke teorije dinamike fluida, odakle potiče i gore pomenuta terminologija. Kako zakoni održanja opisuju mnoge pojave koje se javljaju u svetu, koji je objekat izučavanja fizike, termini kao što su "gustina", "fluks" i "brzina" će se često koristiti u njihovom uopštenom značenju. Iz tog razloga će znaci navođenja biti izostavljeni prilikom pisanja tih pojmove u nastavku. Od svih ovih veličina, mislim da je najneophodnije pojasniti pojam fluksa. U elektromagnetizmu, električni fluks ili električni tok je skalarna fizička veličina koja predstavlja broj linija sile električnog polja koje prolaze kroz određenu površ. Mi ćemo izaći iz okvira teorije elektromagnetizma i posmatrati uopštenja gore pomenutih fizičkih veličina.

Prvo pitanje koje ćemo postaviti jeste, kako dolazimo do opšteg oblika PDJ zakona održanja?

Posmatraćemo prostorno vremenski interval $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$. Zakon održanja mase nam govori da se masa zatvorenog sistema ne menja tokom vremena.

$$M(t_2) - M(t_1) := \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t_1) dx$$

Posmatraćemo ovde i promenu fluksa, koja takođe mora biti konstantna zbog zatvorenosti posmatranog sistema.

$$Q(x_2) - Q(x_1) := \int_{t_1}^{t_2} q(x_2, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} q(x_1, t) dt$$

Na osnovu prethodno pomenutog, dobijamo sledeću jednakost.

$$\Delta M([t_1, t_2]) = \Delta Q([x_1, x_2])$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t_2) - \rho(x, t_1) dx = \int_{t_1}^{t_2} q(x_2, t) - q(x_1, t) dt$$

Sada čitav izraz pomnožimo sa $\frac{1}{t_2 - t_1}$ i pustimo da $t_1, t_2 \rightarrow t$.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dx = q(x_1, t) - q(x_2, t)$$

Sada čitav izraz podelimo sa $x_2 - x_1$ i pustimo da $x_2 - x_1 \rightarrow 0$.

Krajnji rezultat je zakon održanja zapisan preko PDJ.

$$\rho_t + q_x = 0$$

Gornju jednakost ču često pominjati u nastavku rada, nagašavajući da je iz uvodne sekcije. Ovo navodim kako ne bi bilo zabune u daljem čitanju teksta, jer je to najčešća jednačina na koju ču se pozivati iz uvodne sekcije. To je, kao što je gore već rečeno, zakon održanja izražen preko PDJ. Ukoliko bude potrebe da se pozovem na neku drugu jednačinu, eksplicitno ču je navesti. Kako se mnoge PDJ ne mogu eksplicitno rešiti, neophodno je primeniti neke metode numeričke analize kako bi se odredila približna, ali dovoljno do-

bra”rešenja posmatranih jednačina. Pod rečima đovoljno dobra”podrzumevam da dobijeno približno rešenje može poslužiti kao odgovor na konkretan problem koji opisuje data PDJ.

Napomenuo bih da sam u izvesnim delovima master rada navodio ”linearne” probleme, metode, koje bi trebalo da su nam poznate iz ranijih glava. Pod tim pojmom sam mislio na skalarne metode, koje su prevaziđene što se tiče rešavanja, ovde izloženih, složenijih problema. Taj izraz sam koristio i zbog specifičnog načina kojim se postupa prilikom rešavanja gore pomenutih ”linearnih” problema.

U narednim glavama ću se pozivati na neke od tih rezultata. To se, uglavnom, odnosi na najjednostavniju jednačinu, tj. transportnu jednačinu, koju ćemo malim izmenama svesti na oblik Burgesove jednačine, koja predstavlja glavni primer za probleme koji se rešavaju metodima konačnih površina, a koji bi trebalo da su nam poznati od ranije, što ću navesti u nastavku:

$$U_t + a(x, t)U_x = 0$$

Uzmemmo li sledeće:

$$a(x, t) = U(x, t)$$

Te dobijamo:

$$U_t + U(x, t)U_x = 0$$

To je suštinski još jedan oblik transportne jednačine, koja je skalarna ili ”linearna”, tako da spada u neke prethodno poznate rezultate na koje ćemo se pozivati. Oblik Burgersove jednačine koji će nam biti od koristi i koji je osnova za

dalje slične izraze je sledeći:

$$U_t + \left(\frac{U^2}{2}\right)_x = 0$$

Ova jednačina se naziva neviskozna Burgersova jednačina i iz nje možemo dobiti sledeći uopšteni oblik, na koji ćemo se često pozivati:

$$U_t + f(U)_x = 0$$

Ovde je U nepoznata, a f funkcija fluksa.

Ukoliko se budem pozivao na neke druge činjenice, to ću eksplicitno pomenuti.

Ovim bih završio uvodni deo ovog master rada. U nastavku će biti izložene neke od numeričkih metoda koje se koriste prilikom numeričkog rešavanja PDJ, kako njihove prednosti, tako i mane, kao i praktični značaj ove teme u nauci generalno.

Glava 1

Metode konačnih zapremina za zakone održanja u jednoj dimenziji

Na kraju uvodnog dela sam spomenuo da će u ovom master radu biti izložena jedna od numeričkih metoda koja se koristi prilikom numeričkog rešavanja PDJ. Metoda koju ćemo ovde obraditi jeste metoda konačnih zapremina.

Pomenimo ponovo opšti oblik zakona održanja, u obliku PDJ.

$$\rho_t + q_x = 0 \quad (1.1)$$

Radi primene numeričkih metoda, ćemo koristiti PDJ koja će biti prikazana u sledećem redu.

$$U_t + f(U)_x = 0 \quad (1.2)$$

Naime, nepoznata funkcija je funkcija U , kod koje posmatramo promenu u odnosu na vremenski parametar, a $f(U)$, čiju promenu posmatramo u odnosu na prostorni parametar, je neki izraz koji zavisi od U po zakonitosti f .

Prvi korak prilikom primene numeričkih metoda radi rešavanja PDJ jeste diskretizacija domena.

Ovde ću prvo izložiti metod konačnih razlika, koji se koristi za rešavanje nekih problema, ali u našem slučaju nije

pogodan.

Naime, posmatrajmo domen na kome bi tražena funkcija trebalo da je definisana. Cilj nam je da izvršimo diskretnizaciju domena, tako što ćemo odrediti tačke, takozvane čvorove, i posmatrati poznate vrednosti tražene funkcije u tim tačkama. Često se koristi ekvidistantna podela, tj. da intervali na koje je izdeljen domen budu jednakih dužina. Podsetimo se, radi se o funkcijama čiji su domeni delovi realne prave. Na osnovu dostupnih i proverenih podataka se koristi neki od numeričkih metoda kojim se dobija aproksimacija funkcije na tom domenu.

Praksa je pokazala da taj metod nije pogodan za rešavanje problema koji će biti izloženi u ovom master radu. Prvi problem koji se javio tiče se nepoznatih funkcija za koje se zna da nisu linearne, jer se za njih ne može odrediti apriori ocena rešenja. Drugi problem se tiče osobina vezanih za neprekidnost rešenja PDJ koje opisuju zakone održanja. Naime, ne zna se ništa o neprekidnosti tih rešenja, što nam onemogućava da koristimo Tejlorov razvoj funkcije, glavni metod koji se koristi u metodama konačnih razlika.

Dakle, videli smo zašto metod konačnih razlika, sa kojim se studenti upoznaju na osnovnim kursevima vezanim za numeričku analizu, ne “deluje” u ovom slučaju.

Sada ću izloziti metod konačnih zapremina, koji je i centralna tema ovog master rada. Naime, prvi korak prilikom primene ovog metoda je pravljenje mreže, tj. već gore ponenuuto deljenje intervala i biranje čvornih tačaka. I u ovom slučaju će se posmatrati uniforma podela domena $[x_L, x_R]$. Čvorne tačke će izgledati ovako:

$$x_j = x_L + \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta x,$$

gde je $j = 0, \dots, N$, a $\Delta x = \frac{x_R - x_L}{N+1}$. U ovoj metodi definišemo i srednje vrednosti tačaka:

$$x_{j-\frac{1}{2}} = x_j - \frac{\Delta x}{2} = x_L + j\Delta x,$$

gde je $j = 0, \dots, N+1$. Pomoću ovih vrednosti se definišu kontrolne zapremine

$$C_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}).$$

Ove kontrolne zapremine će igrati ulogu koju su igrale čvorne tačke u metodama konačnih razlika. Kako se i ovde posmatra prostorno-vremenski interval, uzećemo da je vremenski interval ekvidistantno podeljen, tj. da je razdaljina između čvorova Δt . Pri tome važi da je $t^n = n\Delta t$. Posmatrajmo sada aproksimacije koje se dobijaju za različite iteracije U pomoću podele domena na gore pomenute intervale C_j .

$$U_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U(x, t^n) dx$$

Suštinski je naš cilj da nađemo dovoljno dobru aproksimaciju za nepoznatu funkciju U u nekoj iteraciji n , polazeći od neke početne funkcije U_0 .

$$U_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U_0(x) dx$$

Da vidimo, kako možemo stići do tog postupka iteracije. Naime, integraleći polaznu PDJ po x i t za intervale C_j i $[t^n, t^{n+1}]$ dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U(x, t^{n+1}) dx - \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U(x, t^n) dx \\ &= - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(U(x_{j+\frac{1}{2}})) dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(U(x_{j-\frac{1}{2}})) dt. \end{aligned}$$

Definišimo aproksimaciju fluksa na sledeći način:

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(U(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (1.3)$$

Nakon što obe strane podelimo sa Δx dobijamo:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n) \quad (1.4)$$

Ovde smo videli da je glavni problem naći adekvatnu aproksimaciju za fluks. Tu se javlja više različitih načina za rešavanje ovog problema. Ovde ću izloziti četiri često korišćenje aproksimacije, kao i njihove prednosti i mane, sa matematičke tačke gledišta. Ova matematička tačka gledišta je bitna, jer od nje često zavisi i način na koji će se dobijeni rezultati implementirati za rešavanje praktičnih problema drugih naučnih disciplina.

1.0.1 Godunovljev metod

Osnovna ideja ovog metoda jeste, da svedemo početnu PDJ na Rimanov problem. Naime, vidimo da je vrednost U_j^n konstantna za sve C_j , za $t^n, n \in \mathbb{N}$. Ova, krajnje obična, opaska nam daje mogućnost da početni izraz prikažemo na sledeći način:

$$U_t + f(U)_x = 0 \quad (1.5)$$

$U(x, t^n) = U_j^n$, ako je $x \leq x_{j+\frac{1}{2}}$ i $x \neq x_{j+\frac{1}{2}}$, a $U(x, t^n) = U_{j+1}^n$, ako je $x \geq x_{j+\frac{1}{2}}$ i $x \neq x_{j+\frac{1}{2}}$.

Rešenje ovog izraza se sastoji od talasa ("shock", "rare", "compound"). Rešenja ovog problema su samoslična.

Iz teorije o talasima zaključujemo da moramo postaviti određena ograničenja što se tiče talasnih brzina, kako bi rešenja uopšte postojala. Mi ćemo uzeti sledeći uslov:

$$\begin{aligned} & \max_j |f'(U_j^n)| \\ & \max_j |f'(U_j^n)| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nakon određenih analiza ponašanja talasa i fluksa, koji, kao različiti parametri, utiču na razne ishode i oblike rešenja jednačine, dobijamo sledeći oblik:

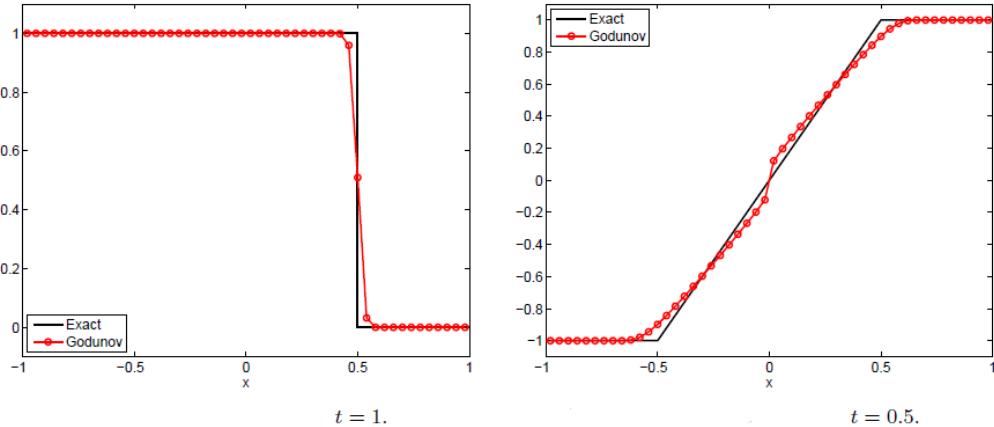
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n),$$

što predstavlja standardni oblik metode konačnih zapremina za zakone održanja, kao što smo ranije i videli.

Na osnovu do sada izloženog, vidimo da možemo eksplicitno izraziti flukseve. Krajnji rezultat izgleda ovako:

$$\begin{aligned} F_{j+\frac{1}{2}}^n &= F(U_j^n, U_{j+1}^n) = \min_{U_j^n \leq \theta \leq U_{j+1}^n} f(\theta), \text{ ako je } U_j^n \leq \\ & U_{j+1}^n, \text{ a } F_{j+\frac{1}{2}}^n = F(U_j^n, U_{j+1}^n) = \\ & \max_{U_{j+1}^n \leq \theta \leq U_j^n} f(\theta), \text{ inače.} \end{aligned}$$

Ova metoda se može primeniti i na jednačine fluksa koje nisu konveksne. Ona daje dosta dobre rezultate u praksi što se može videti na osnovu numeričkih eksperimenata, koji se vrše pomoću računara.



Ovde ćemo malo skrenuti sa glavne teme. Želeo bih da napomenem da je ovaj grafikon, kao i svi ostali grafikoni i tabele, preuzet iz dela "Numerički metodi za zakone održanja i povezane jednačine", koji su napisali Sidharta Mišra, Ulrik Skre Fjordholm i Remi Abraj, koji su se koristili knjigama navedenih u Literaturi pod rednim brojem [23]-[40]. To važi za ovu glavu i naredne dve glave, te se neću ponavljati.

Videli smo da ova metoda daje izuzetno lepe rezultate, ali i ona ima neke mane. Naime, ona se oslanja na eksplisitnu rešivost posmatranog Rimanog problema, koja važi samo u jednostavnijim slučajevima koji se bave skalarnim zakonima održanja. Još jedna značajna mana predstavlja vremenska efikasnost metoda. Naime, mi rešavamo čitav Rimanov problem kako bismo dobili Godunovljev fluks, koji, u čitavoj plejadi funkcija flukseva, predstavlja samo jedan od jednostavnijih oblika takvih funkcija.

1.0.2 Murman-Roova metoda

Druga ideja koja se javlja prilikom rešavanja ovih problema, jeste primena takozvanih "Aproksimativnih Rimanovih rešitelja". Kao i Godunovljeva ideja, i ova je proistekla iz

dosta očiglednih, ali ništa manje vrednih, opažanja. Naime, ideja je da se ekplicitno rešenje Rimanovog problema zameni približnim rešenjem, tj. takozvanim "rešiteljem". Ovo nas dovodi do linearizovanih (ili Roovih) rešitelja. Kao što i samo ime kaže, linearizovaćemo izraz i dobiti traženu aproksimaciju.

$$(f(U))_x = f'(U)U_x \approx A_{j+\frac{1}{2}}U_x \quad (1.6)$$

Ovde je $A \approx f'$ konstantno stanje oko kog se nelinearna funkcija fluksa linearizuje. Postavlja se pitanje odabira tog konstantnog stanja oko kog će se izvršiti linearizacija. Jedno stanje koje se dosta prirodno nameće je sledeće:

$$A_{j+\frac{1}{2}} = f'\left(\frac{U_j^n + U_{j+1}^n}{2}\right) \quad (1.7)$$

U daljim razmatranjima se koristi nešto složenija aproksimacija, takozvana Roova linearna aproksimacija:

$$A_{j+\frac{1}{2}} = f'(U_j^n), U_{j+1}^n = U_j^n \quad (1.8)$$

$$A_{j+\frac{1}{2}} = \frac{f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)}{U_{j+1}^n - U_j^n}, \text{ inače} \quad (1.9)$$

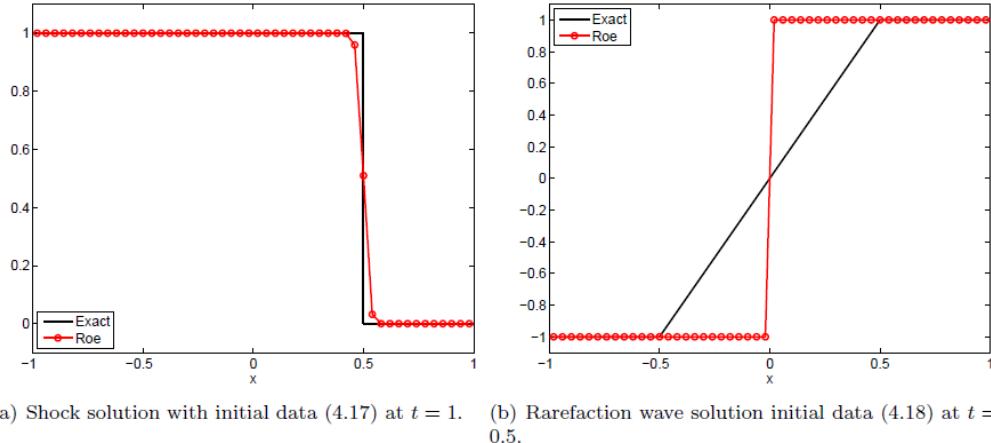
Implementacijom ove aproksimacije rešenja Rimanovog problema, dobija se sledeće:

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = F^{Roe}(U_j^n, U_{j+1}^n) = f(U_j^n), A_{j+\frac{1}{2}} \geq 0 \quad (1.10)$$

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = F^{Roe}(U_j^n, U_{j+1}^n) = f(U_{j+1}^n), \text{ inače} \quad (1.11)$$

Ubacivanjem ove aproksimacije fluksa u izraz kojim se računa $(n + 1)$ – va iteracija rešenja se dobija Murman-Roova metoda. Ova metoda je lakša za implementaciju u

računarski sistem, ali daje nešto slabije rezultate od Godunovljeve metode.



1.0.3 Centralna metoda

Glavni problem prethodno pomenute Murman-Roove metode, jeste činjenica da se kao rešenje dobija talas koji se kreće samo u jednom smeru. Kako smo ranije utvrdili da funkcija fluksa može imati ponašanje različitih vrsta talasa ili njihovih kombinacija, moramo nastaviti potragu za metodom koja daje rezultate koji su u velikoj meri u skladu sa realnom situacijom koja se razmatra.

Naime, kod centralne metode se javlja ideja da se rešenje polaznog Rimanovog problema aproksimira pomoću dva talasa. Jedan bi putovao nalevo brzinom s_{j+1}^l , dok bi drugi putovao nadesno brzinom s_{j+1}^r . Rešenje aproksimiramo na sledeći način:

$$U(x, t) = U_j^n, x < s_{j+\frac{1}{2}}^l t \quad (1.12)$$

$$U(x, t) = U_{j+\frac{1}{2}}^*, s_{j+\frac{1}{2}}^l t < x < s_{j+\frac{1}{2}}^r t \quad (1.13)$$

$$U(x, t) = U_{j+1}^n, x > s_{j+\frac{1}{2}}^r t \quad (1.14)$$

Primenom metoda rešavanja koje su prosečnom studentu poznate iz uvodnih kurseva koji se tiču teorija parcijalnih diferencijalnih jednačina i jednačina matematičke fizike, dobijamo sledeći rezultat:

$$f_{j+\frac{1}{2}}^* = \frac{s_{j+\frac{1}{2}}^r f(U_j^n) - s_{j+\frac{1}{2}}^l f(U_{j+1}^n) + s_{j+\frac{1}{2}}^r s_{j+\frac{1}{2}}^l}{s_{j+\frac{1}{2}}^r - s_{j+\frac{1}{2}}^l}$$

$$F_{j+1}^n = F(U_j^n, U_{j+1}^n) = f_{j+\frac{1}{2}}^*$$

Napomenimo da ovde još nije određena brzina prostiranja talasa, spomenuta u drugom pasusu ovog poglavlja. Odabir brzine umnogome utiče na odabir metode konačnih zapremina koje će se koristiti u nastavku. U narednim poglavljiima ću izložiti tri podmetode centralne metode, a to su Laks-Fridriksova, Rusanovljeva i Enkvist-Ošerova metoda.

1.0.4 Laks-Fridriksov metod

Maksimalna brzina talasa kod ove metode je $s_{j+1}^l = -\frac{\Delta x}{\Delta t}$, odnosno $s_{j+1}^r = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Uvođenjem ovih ograničenja dobijamo Laks-Fridriksov fluks:

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = F^{LxF}(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{f(U_j^n) + f(U_{j+1}^n)}{2}.$$

Ovaj metod se nešto lakše implementira, ali daje slabije rezultate nego Godunovljev metod.

1.0.5 Rusanovljev metod

Laks-Fridriksov metod je posmatrao maksimalne brzine talasa ne obraćajući pažnju na lokalni karakter problema.

Naime, pod tim se mislim da se posmatra ponašanje rešenja u okolini i u odnosu na neke specijalne krive. Rusanov je "lokalizovao" Laks-Fridriksov metod i odredio lokalne maksimume za brzine. Odatle sledi:

$$\begin{aligned}s_{j+\frac{1}{2}}^r &= s_{j+\frac{1}{2}} \\s_{j+\frac{1}{2}}^l &= -s_{j+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

gde je

$$s_{j+\frac{1}{2}} = \max(|f'(U_j^n)|, |f'(U_{j+1}^n)|)$$

iz čega sledi

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{f(U_j^n) + f(U_{j+1}^n)}{2} - \frac{\max(|f'(U_j^n)|, |f'(U_{j+1}^n)|)}{2} \cdot (U_{j+1}^n - U_j^n).$$

Iz ovoga se da videti, da "Lokalni Laks-Fridriksov metod" (ili Rusanovljev metod) daje znatno bolje rezultate od "običnog" Laks-Fridriksovog metoda.

1.0.6 Engkvist-Ošerov metod

Ovde je razlika samo u fluksu, u odnosu na prethodni metod.

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{f(U_j^n) + f(U_{j+1}^n)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int_{U_j^n}^{U_{j+1}^n} |f'(\theta)| d\theta$$

Ovaj metod ima pojedine sličnosti sa metodom Rimanovih rešitelja. U slučaju da data funkcija ima jedinstveni minimum, a nema lokalnih maksimuma (što je slučaj sa

većinom konveksnih funkcija), fluks se može odrediti i sledećim direktnim metodom (prepostavimo da je tačka ω takva tačka):

$$F(U_j^n, U_{j+1}^n) = f(\max(U_j^n, \omega)) + f(\min(U_{j+1}^n, \omega)) - f(\omega)$$

Prvi sabirak sa desne strane jednakosti je pozitivni (rastući, f^+), a drugi negativni (opadajući, f^-) deo funkcije f . Kako se posmatra samo razlika flukseva, možemo zanemariti konstantu $f(\omega)$ i posmatrati samo zbir opadajućeg i rastućeg dela funkcije.

1.0.7 Poređenja metoda po različitim kriterijumima

Posmatra se prvo mreža sa 50 čvorova (samo što se posmatraju odgovarajuće zapremine za ekvidistantnu podelu vremenskog intervala). U ovom slučaju se mora istaći da svi metodi daju slične rezultate, iako se uviđaju pojedine razlike u brzini konvergiranja i greški ocene.

Ovde zaključujemo da Godunovljev metod daje najbolje rezultate, dok druga dva metoda brže konvergiraju. U svakom slučaju, sva tri metoda konvergiraju sa finijom podelom mreže. Grublja podela mreže daje bolje rezultate što se tiče konvergencije, ali na račun vremena konvergencije.

Dakle, kao rezultate istraživanja, dobijamo da Laks-Fridriksov metod najbrže konvergira, ali daje rezultate sa najvećom greškom. U zavisnosti od podele mreže, dobijamo različite rezultate što se tiče konvergencije i greške koja nastaje. Tu Godunovljev i Engkvist-Ošerov metod daju različite rezultate u zavisnosti od slučaja do slučaja.

S toga, kao konačan zaključak, možemo izvući, da je odbir "odgovarajućeg" metoda nešto što zavisi od prirode pro-

blema koji rešavamo, odnosno, potreba koje treba da zadovoljimo.

1.0.8 Konzistentni, konzervativni i monotonii metodi

U zavisnosti od odabira aproksimacije fluksa, mogu se dobiti jednačine kod kojih se konvergencija fluksa, a samim tim i rešenja, stavlja pod znakom pitanja. Drugačije rečeno, može se desiti da entropijsko rešenje ne postoji. Entropija nekog sistema(npr. jednačine) je mera za energiju zatvorenog sistema koja se više ne može pretvoriti u rad. Kažemo i da je ta energija "vezanaža sistem.

1.0.9 Konzervativni metodi

Posmatranu prvobitnu aproksimaciju fluksa možemo napisati na sledeći način:

$$U_j^{n+1} = H(U_{j-p}^n, \dots, U_{j+p}^n) \quad (1.15)$$

Ova vrsta zapisa se naziva generički zapis.

Formula zapisana u generičkom zapisu je konzervativna ako zadovoljava sledeći uslov: $\sum_j U_j^{n+1} = \sum_j U_j^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Konzervativnost je neophodan uslov za rešavanje početnog problema sa početka rada, odnosno problema (1.2). Zato uvodimo sledeću teoremu:

Prepostavimo da je $H(0, \dots, 0) = 0$. Tada je $U_j^{n+1} = H(U_{j-p}^n, \dots, U_{j+p}^n)$ konzervativno akko postoji funkcija $F_{j+\frac{1}{2}}^n = F(U_{j-p+1}^n, \dots, U_{j+p}^n)$ takva da $U_j^{n+1} = H(U_{j-p}^n, \dots, U_{j+p}^n)$ možemo napisati u obliku $U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n)$.

1.0.10 Konzistentni metodi

Neka je šema data sa numeričkim fluksom $F_{j+\frac{1}{2}}^n = F(U_{j-p+1}^n, \dots, U_{j+p}^n)$

Sada ćemo navesti kako glasi konzistentni metod:

Šema konačnih zapremina $U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n)$ sa gore navedenim numeričkim fluksom je konzistentna ako važi $F(U, \dots, U) = f(U)$ za sve $U \in \mathbb{R}$.

Konzervacija i konzistencija su prisutni kod svih metoda za aproksimaciju fluksa koji su do sada razmatrani. Iako su oni prisutni, ne garantuju stabilnost rešenja, niti konvergenciju.

1.0.11 Monotoni metodi

Iz prethodnih teorema možemo zaključiti da zakon održanja izražen u uvodnoj sekciji čuva monotonost, što znači, da ako su U i V entropijska rešenja te jednačine, sa početnim uslovima U_0 i V_0 onda važi sledeće

$$U_0(x) \leq V_0(x) \text{ za sve } x \Rightarrow U(x, t) \leq V(x, t) \text{ za sve } x \text{ i } t. \quad (1.16)$$

Poželjno je da metodi imaju tu osobinu.

Numerički metod $U_j^{n+1} = H(U_{j-p}^n, \dots, U_{j+p}^n)$ je monotron ako je funkcija H neopadajuća u svakom od njenih argumenta.

Posmatrajmo šemu konačnih zapremina (1. 18) sa fluksom $F = F(a, b)$ koja je lokalno Lipšic neprekidna. Tada je pomenuti metod monotron ako i samo ako važi sledeće

$$\begin{aligned} a \mapsto F(a, b) &\text{ je neopadajuća za fiksirano } b, \\ b \mapsto F(a, b) &\text{ je neopadajuća za fiksirano } a, \end{aligned}$$

i važi sledeće ograničenje

$$\left| \frac{\partial F}{\partial a}(v, w) \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial b}(u, v) \right| \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}, \forall u, v, w.$$

1.0.12 Osobine stabilnosti monotonih metoda

Numerički eksperimenti pokazuju da su monotone metode stabilne i da konvergiraju entropijskom rešenju. Za razliku od toga, nemonotone metode mogu biti nestabilne ili mogu konvergirati ka pogrešnom rešenju. Jedan od glavnih koraka ka obezbeđivanju konvergencije jeste odabir dobrih procena stabilnosti na približnim rešenjima. U ovom poglavljiju ćemo posmatrati neke probleme koji se rade na kursevima iz oblasti matematičke fizike.

Na osnovu prethodnog, entropijska rešenja neprekidnog problema sa početka rada, zadovoljavaju sledeće procene stabilnosti:

- L^∞ procenjuje ranije probleme kao posledice principa maksimuma

- L^p procenjuje prethodne probleme za $1 \leq p \geq \infty, p \geq \infty$ kao posledicu entropijskih nejednakosti.

-TV procenjuju ranije probleme pokazujući da su rešenja TVD

-Vremenska neprekidnodnost takođe procenjuje neke od prethodnih problema.

Glavni zadatak numeričke analize je osmišljavanje numeričkih metoda koje očuvavaju osobine stabilnosti posmatranih neprekidnih problema. Stoga je prirodno ispitati, da li metode konačnih zapremina zadovoljavaju diskretne verzije

gore pomenutih procena stabilnosti?

1.0.13 L^∞ veze

Metod (1.4) se može zapisati kao

$$U_j^{n+1} = H(U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n) \quad (1.17)$$

Što uz konzistentnosti fluksa F koju smo utvrdili ranije, daje sledeći rezultat:

$$H(U, U, U) = U. \quad (1.18)$$

Ove metode zadovoljavaju sledeći princip diskretnog maksimuma:

Neka su U_j^n aproksimativna rešenja problema, možemo reći i metode, (1.21). Tada ta rešenja zadovoljavaju sledeći uslov:

$$\min(U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n) \leq U_j^n \leq \max(U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n), \forall n, j. \quad (1.19)$$

Specijalan slučaj je

$$\min_i U_i^0 \leq U_j^n \leq \max_i U_i^0, \forall n, j. \quad (1.20)$$

1.0.14 Entropijske nejednakosti i L^p veze

U ovom poglavlju cilj će nam biti da odredimo diskretan oblik entropijske nejednakosti linearnih metoda. To ćemo uraditi na sledeći način:

Za konstantu $k \in \mathbb{R}$ definišemo Krendal-Majda numerički entropijski fluks na sledeći način:

$$Q_{j+\frac{1}{2}}^n = Q(U_j^n, U_{j+1}^n) = F(U_j^n \vee k, U_{j+1}^n \vee k) - F(U_j^n \wedge k, U_{j+1}^n \wedge k), \quad (1.21)$$

gde smo koristili sledeću notaciju:

$$a \vee b = \max(a, b), a \wedge b = \min(a, b) \quad (1.22)$$

Sada ćemo navesti Krendal - Majda teoremu:

Neka je U_j^n jedno aproksimativno rešenje dobijeno pomoću konzistentne, konzervativne i monotonotone metode (1.21).

Tada U zadovoljava diskretnu entropijsku nejednakost

$$|U_j^{n+1} - k| - |U_j^n - k| + \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{j+\frac{1}{2}}^n - Q_{j-\frac{1}{2}}^n) \leq 0, \forall n, j.$$

Specijalno, ako $U_0 \in L^1(\mathbb{R})$ onda

$$\Sigma_j |U_j^n| \Delta x \leq \|U_0\|_{L^1(\mathbb{R})}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.23)$$

1.0.15 TV veze

U ovom poglavlju ćemo pokušati da dobijemo diskretnu verziju ove totalne varijacije (TV). Totalna varijacija po delovima neprekidne funkcije za vreme t^n je data sledećom jednačinom

$$\|U^n\|_{TV(\mathbb{R})} = \Sigma_j |U_{j+1}^n - U_j^n|.$$

Prvi korak ka obezbeđivanju TV veze jeste zapisivanje metoda konačnih zapremina u "postepenoj" (nadalje ću izostavljati navodnike; u originalu incremental) formi

$$U_j^{n+1} = U_j^n + C_{j+\frac{1}{2}}^n (U_{j+1}^n - U_j^n) - D_{j-\frac{1}{2}}^n (U_j^n - U_{j-1}^n) \quad (1.24)$$

sa postepenim koeficijentima

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{f(U_j^n) - F_{j+\frac{1}{2}}^n}{U_{j+1}^n - U_j^n}, \quad (1.25)$$

$$D_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{f(U_{j+1}^n) - F_{j+\frac{1}{2}}^n}{U_{j+1}^n - U_j^n} \quad (1.26)$$

Prednosti postepene forme su izložene u sledećoj teoremi (ili lemi; kako je kome volja)

Sada ćemo navesti Hartenovu lemu:

Posmatrajmo jednačinu (1. 30) .

-Ako koeficijenti zadovoljavaju sledeće uslove

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n, D_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0, C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1, \forall n, j \quad (1.27)$$

Tada rešenja dobijena pomoću (1.27) zadovoljavaju sledeće:

$$\sum_j |U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}| \leq \sum_j |U_{j+1}^n - U_j^n|, \forall n \quad (1.28)$$

-Ako koeficijenti zadovoljavaju sledeće:

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n, D_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0, C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j-\frac{1}{2}}^n \leq 1, \forall n, j \quad (1.29)$$

Tada $\|U^{n+1}\|_{L^\infty} \leq \|U^n\|_{L^\infty}, \forall n$.

Ovim ocenama smo pokazali da se totalne varijacije entrojskih rešenja početnog problema iz uvodne sekcije ne povećavaju tokom vremena. Hartenova lema nam omogućava da to pokažemo.

1.0.16 Vremenska neprekidnost

Ovu temu smo pomalo dotakli i u prethodnom poglavlju. Naime, važi, da entropijsko rešenje početnog problema iz uvodne sekcije zadovoljava uslov vremenske neprekidnosti

$$\|U(t) - U(s)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq |t - s| \|f\|_{Lip} \|U_0\|_{TV(\mathbb{R})},$$

gde je $\|f\|_{Lip}$ Lipšicova konstanta nad U .

Posmatrajmo U_j^n za početni problem iz uvodne sekcije koji je konzistentan i konzervativan i Lipšic neprekidni fluks $F = F(a, b)$. Tada U_j^n zadovoljava uslov vremenske neprekidnosti

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |U_j^n - U_j^m| \Delta x \leq |t^n - t^m| C_F \|U_0\|_{TV(\mathbb{R})}, \quad (1.30)$$

gde je C_F Lipšicova konstanta za F .

1.0.17 Konvergencija monotonih metoda

Na osnovu prethodnih diskusija o ocenama stabilnosti metoda, možemo pokazati da, aproksimativna rešenja dobijena pomoću nekog monotonog, konzervativnog i konzistentnog metoda konvergiraju ka entropijskom rešenju početnog problema iz uvodne sekcije.

Sledeća poznata teorema nam pokazuje da, ako aproksimativna rešenja U_j^n dobijena pomoću konzistentnog i konzervativnog metoda konvergiraju, tada je granična vrednost slabo rešenje konzervativnog zakona.

Koristićemo sledeću notaciju

$$U^{\Delta x}(x, t) = U_j^n, \text{ za } (x, t) \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}) \times [t^n, t^{n+1}). \quad (1.31)$$

Sada ćemo navesti teoremu Laks-Vendrofa:

Neka su U_j^n aproksimativna rešenja za početni problem iz uvodne sekcije dobijena pomoću konzervativnog i konzistentnog metoda konačnih zapremina sa diferencijabilnim (ili Lipšic) numeričkom funkcijom fluksa F , gde je U_j^0 dato sa $U_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} U_0(x) dx$.

Prepostavimo da $U_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ i da su aproksimirajuće funkcije $U^{\Delta x}$:

-uniformno ograničene:

$$\|U^{\Delta x}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)} \leq C, \forall \Delta x \geq 0, \Delta x \neq 0$$

za neku konstantu $C \geq 0, C \neq 0$;

-konvergentne u $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ kada $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ ka nekoj funkciji U .

Tada je U slabo rešenje početnog problema iz uvodne sekcije, sa početnim uslovom U_0 .

Slično se dokazuje i sledeća teorema.

Prepostavimo da važe uslovi prethodne teoreme i da važi gornja entropijska nejednakost. Tada je $U = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} U^{\Delta x}$ entropijsko rešenje linearног problema.

Da bismo dokazali glavnu teoremu o konvergenciji metoda za skalarne zakone održanja (koja je ujedno i glavna teorema ovog poglavlja), treba prvo da uočimo sledeće činjenice:

Uniforme L^1 i TV veze, zajedno sa vremenskom neprekidnosti metoda, su dovoljne da obezbede postojanje konvergentnog podniza $U^{\Delta x'} \rightarrow U$. Jedinstvenost entropijskog rešenja U tada pokazuje da niz $U^{\Delta x}$ konvergira.

Za dokazivanje glavne teoreme ovog poglavlja su nam neophodne i dve poznate teoreme. To su Askolijeva i Hejlijeva teorema, koje ovde neću navoditi, a koje se obrađuju na kursevima iz običnih diferencijalnih jednačina.

Posmatrajmo skalarni zakon održanja iz uvodne sekcije sa $f \in C^1(\mathbb{R})$ i $U_0 \in BV(\mathbb{R})$. Posmatrajmo konzistentan, konzervativan i monoton metod konačnih zapremina (1.4) sa lokalnim Lipšic neprekidnim fluksom F . Prepostavimo, uz uslov koji se javlja kod leme u poglavlju o monotonim šemama, da postoji konstanta $c \geq 0$, $c \neq 0$ takva da važi

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \geq c. \quad (1.32)$$

Definišimo po delovima linearnu funkciju

$$U^{\Delta x}(x, t) = \frac{t^{n+1} - t}{\Delta t} U_j^n + \frac{t - t^n}{\Delta t} U_j^{n+1}, \quad x \in C_j, t \in [t^n, t^{n+1}]. \quad (1.33)$$

Tada $U^{\Delta x} \rightarrow U$ u $L^1(\mathbb{R} \times [0, T])$ kada $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ za sve $T > 0$, gde je U entropijsko rešenje ranije pomenutog linearног метода.

1.0.18 Granični uslovi

Do sada nismo razmatrali granične uslove. Ipak, postoje dva značajna razloga zbog kojih bi vredelo razmatrati tu problematiku:

-Možda početni problem ima unapred zadate granične uslove koje ne smemo da zanemarimo;

-Ako je početni problem definisan na realnoj pravoj (koja je beskonačna), nemoguće je posmatrati celu pravu i "ubaciti" problem u komjuter (kako se to radi sa numerički aproksimiranim problemima); Zbog toga se mora posmatrati samo deo realne prave i, samim tim, zadati početni uslovi.

Sad ćemo dati neke od graničnih uslova kao primer:

-Dirihleovi granični uslovi:

$$U(x_L, t) = g_L(t), U(x_R, t) = g_R(t) \quad (1.34)$$

$$U_0^n = g_L(t^n), U_{N+1}^n = g_R(t^n) \quad (1.35)$$

-Periodični granični uslovi:

$$U_0^n = U_N^n, U_{N+1}^n = U_1^n \quad (1.36)$$

-Veštački granični uslovi:

$$U_0^n = U_1^n, U_{N+1}^n = U_N^n \quad (1.37)$$

Glava 2

Metode konačnih zapremina drugog reda (visoke rezolucije)

U prethodnom poglavlju smo posmatrali različite aproksimacije fluksa i opažali u kojoj meri "adekvatno" aproksimiraju rešenje, tj. kolike greške nastaju. Moguće rešenje za prevazilaženje ovog problema, tj. smanjivanja greške ocene, jeste povećavanje stepena konvergencije. Ovo poglavlje je posvećeno uvođenju pojma skraćivanja greške prilikom ocene i reda tačnosti metoda. Još jedna stavka koju ćemo posmatrati, jeste konstrukcija metoda konačnih zapremina drugog reda za (1.4) kojim aproksimiramo skalarne zakone održanja.

2.0.1 Red tačnosti konvergencije

Koncept reda konvergencije numeričkih metoda je veoma koristan koncept u teoriji numeričke analize. Prepostavimo da se metod konačnih zapremina za aproksimiranje početnog problema iz uvodne sekcije može napisati u generičkom obliku (1.18) koji ima $(2p+1)$ čvor i da je $\frac{\Delta t}{\Delta x} \equiv \lambda$, za neku konstantu $\lambda > 0$. Tada se greška prilikom skraćivanja greške metoda definiše na sledeći način

$$T_j^n = U(x_j, t^{n+1}) - H(U(x_{j-p}, t^n), \dots, U(x_{j+p}, t^n)), \quad (2.1)$$

gde je U tačno rešenje. Šema je q -toga reda tačnosti ako je $q \in \mathbb{N}$ najveći prirodan broj za koji važi

$$T_j^n = O(\Delta t^{q+1}), \forall n, j, \Delta t \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Prepostavimo da je tačno rešenje skalarnog zakona održanja $U(x, t)$ C^2 i da jedan konzervativni i konzistentni metod konačnih zapremina koji ima tri čvora, ima C^2 funkciju H . Tada metod ima red tačnosti bar jedan.

Ukažimo na neke zaključke koje možemo izvući iz prethodne teoreme. Naime, Laks-Fridriksov i Enkvist-Ošerov metod zadovoljavaju uslove prethodne teoreme. Za Godunovljev metod je sasvim drugačija priča, jer Godunovljev fluks nije C^2 . Radosna vest je ta, što se može pokazati da je Godunovljev fluks formalno tačnosti reda jedan.

Na osnovu prethodnog možemo izvesti sledeću nejednakost

$$\|U^{\Delta x} - U\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C \Delta x.$$

Ova ocena greške ima jednu suštinsku manu, a to je da važi samo za glatke funkcije u nelinearnom slučaju. Rezultati dobijeni pomoću eksperimenata, tj. putem računara primenom tehnika numeričke analize, da funkcija u većini slučajeva ima stepen konvergencije manji od jedan. Ipak, time ćemo se baviti u nastavku.

2.0.2 Laks-Vendrofov metod

Da bi se dobila bolja rezolucija aproksimativnog rešenja početnog problema iz uvodne sekcije, moramo konstruisati numeričke teme koje su reda tačnosti većeg od jedan. Najlakši način jeste da pretpostavimo da je rešenje početne jednačine glatko. To nam omogućava da koristimo Tejlorov razvoj funkcije.

$$U_t = -f(U)_x \quad (2.3)$$

$$U_{tt} = -(f(U)_x)_t = -(f(U)_t)_x = -(f'(U)U_t)_x = (f'(U)f(U)_x)_x. \quad (2.4)$$

Raspisivanjem tačnog rešenja u Tejlorov red, oslanjajući se na prethodne jednačine, dobijamo sledeće:

$$U(x_j, t^{n+1}) = \dots = U(x_j, t^n) - \Delta t f(U(x_j, t^n)_x \quad (2.5)$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2} (f'(U(x_j, t^n)) f(U(x_j, t_n))_x)_x + O(\Delta t^3). \quad (2.6)$$

Sledeće izraze koji opisuju prostornu promenljivu (onu koja zavisi od x) ćemo aproksimirati na sledeći način:

$$f(U)_x \approx \frac{f(U_{j+1}^n)}{2\Delta x} \quad (2.7)$$

$$(f'(U)f(U)_x)_x \approx \frac{1}{\Delta x} (a_{j+\frac{1}{2}}^n (\frac{f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)}{\Delta x}) \quad (2.8)$$

$$- a_{j-\frac{1}{2}}^n (\frac{f(U_j^n) - f(U_{j-1}^n)}{\Delta x})) \quad (2.9)$$

Tada dobijamo Laks-Vendorfov metod

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)) \quad (2.10)$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (a_{j+\frac{1}{2}}^n (f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)) \quad (2.11)$$

$$- a_{j-\frac{1}{2}}^n (f(U_j^n) - f(U_{j-1}^n))), \quad (2.12)$$

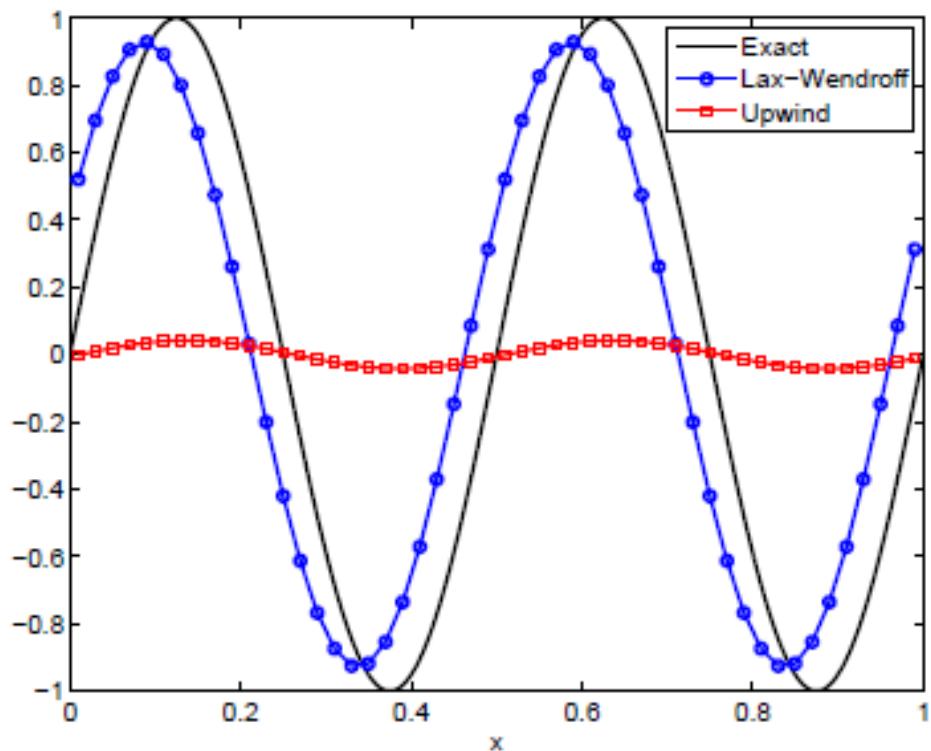
gde je

$$a_{j+\frac{1}{2}}^n = f' \left(\frac{U_j^n + U_{j+1}^n}{2} \right), \quad (2.13)$$

$$a_{j-\frac{1}{2}}^n = f' \left(\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{2} \right). \quad (2.14)$$

Laks-Vendorfov fluks se može zapisati na sledeći način

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = F(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{f(U_j^n) - f(U_{j+1}^n)}{2} - \frac{a_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta t}{2\Delta x} (f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)). \quad (2.15)$$



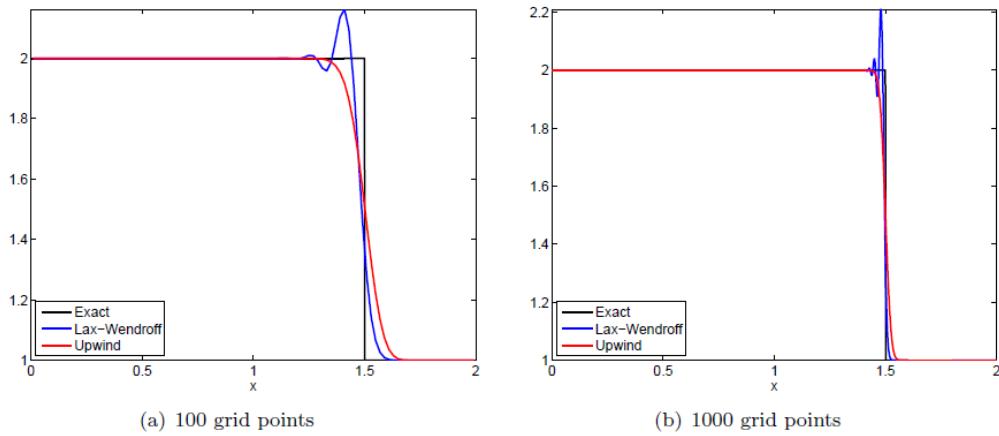
Na gornjem grafikonu su upoređeni Laks-Vendrofov i gornji metod sa egzaktnim rešenjem.

Ovde je izloženo poređenje tačnog rešenja (1.2), sa početnim uslovom $U(x, 0) = \sin(4\pi x)$, i aproksimativna rešenja dobijena pomoću Laks-Vendorfovog i Godunovljevog (u originalu "Upwind", a negde ćemo se i služiti terminom Upwind, jer je Godunovljev metod glavni predstavnik ove klase metoda) metoda. Vidimo da Laks-Vendorfov metod daje aproksimaciju koja nalikuje translaciji egzaktnog problema, dok drugi metod ne daje toliko zadovoljavajuće rezultate. Napominjemo, da je u ovom slučaju $t = 10$ i da posmatramo slučaj sa 50 čvorova.

2.0.3 Numerički eksperimenti

Izvršili smo par eksperimenata sa jednačinom transportnom jednačinom oblika $U_t + aU_x = 0$, gde je a u ovom slučaju konstanta, sa početnim uslovom $U(x, 0) = \sin(4\pi x)$. Neke rezultate vezane za tu temu smo već dobili u prethodnom poglavlju. Naime, ovde ćemo posmatrati istu jednačinu i iste početne uslove, samo ćemo posmatrati mreže sa više čvorova i Burgersovu jednačinu $U_t + (\frac{U^2}{2})_x = 0$. Možemo utvrditi da Laks-Vendorfov i Godunovljev metod daju slične rezultate za mreže koje se sastoje od 100 i 1000 tačaka. U oba slučaja se javljaju oscilacije, zbog kojih numerički rezultati odskaču od tačnog rešenja. Rezultati još pokazuju da posmatrani metodi nisu u stanju da daju "adekvatnu" aproksimaciju u slučaju rešenja koja nisu neprekidna.

U nastavku su prikazani grafikoni za Laks-Fridriksov i Godunovljev metod.



2.0.4 REA algoritam

Zbog prethodnih neuspeha prilikom aproksimiranja rešenja, moramo uvesti neke nove pristupe rešavanju glavnih problema ove oblasti. Naime, možemo uočiti, posmatrajući Godunovljev metod, da se on može sumirati na tri koraka:

-Rekonstrukcija: Pretpostavimo da za svako t^n znamo tačnu vrednost U_j^n . Tada važi sledeće:

$$U(x, t^n) = U_j^n, x_{j-\frac{1}{2}} < x < x_{j+\frac{1}{2}}; \quad (2.16)$$

-Evolucija: Rekonstruisana funkcija $U(x, t^n)$ je određena po vremenu. Ima samo x kao promenljivu;

-Usrednjavanje(u originalu "Averaging"): Usrednjujemo vrednost kada posmatramo slučaj za t^{n+1} , za svaku kontrolnu zapreminu.

Ova tri koraka čine REA algoritam, koji se može prilagoditi drugim metodama konačnih zapremina ako se uvedu izmene u koraku Evolucije.

2.0.5 Rekonstrukcije drugog reda

Ovo je najjednostavniji metod višeg reda (Ovde mislimo na red veći ili jednak sa 2), koji se koristi za aproksimaciju funkcija koje su po delovima neprekidne. Posmatrajući jednačinu (1.1), kao i U_j^n i t^n , postoji nekoliko načina da se rekonstruiše linearna funkcija u svakoj od kontrolnih zapremina. Jedan od uslova da se dobije stabilna i konvergentna aproksimacija zakona održanja, jeste da je metod konzervativan.

2.0.6 Ograničenja - nagibi

Razmatraćemo tri vrste nagiba, koji vuku ideju iz teorije numeričke analize.

$$\text{-Centar} : \sigma_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.17)$$

$$\text{-Nazad} : \sigma_j^n = \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (2.18)$$

$$\text{-Napred} : \sigma_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} \quad (2.19)$$

2.0.7 Izvor oscilacija

Ako se posmatraju jednačine koje imaju neoscilatorne početne uslove, onda će i rešenja tih jednačina imati to svojstvo. Od stabilnih numeričkih metoda aproksimacije se očekuje da zadovoljavaju taj uslov. Posmatrajmo sledeću jednačinu

koja direktno pokazuje da operator prosečnosti ima osobinu TVD.

$$TV(u_\Delta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\Delta x} \left| \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{3}{2}}} u(y) dy \right| \quad (2.20)$$

$$= \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(y) dy \leq \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \|u(\cdot + s)\|_{TV(\mathbb{R})} ds = TV(u). \quad (2.21)$$

Laks-Vendrofov metod ne zadovolja uslov TVD, što je posledica menjanja koraka rekonstrukcije u REA algoritmu.

$$\|p\|_{BV} \leq \|U^{\Delta x}\|_{BV}$$

Gde je p po delovima linearna funkcija $p(x) = p_j(x)$ za $x \in (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$ i $U^{\Delta x}$ po delovima konstantna funkcija $U(x, t^n) = u_j^n$ za $x \in (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}})$.

2.0.8 Minmod ograničenja

Prethodno navedena tri ograničenja ne zadovoljavaju uslov TVD. Problem se zasniva na činjenici da je narušen uslov neprekidnosti. Iz tog razloga uvodimo sledeće ograničenje, odnosno nagib.

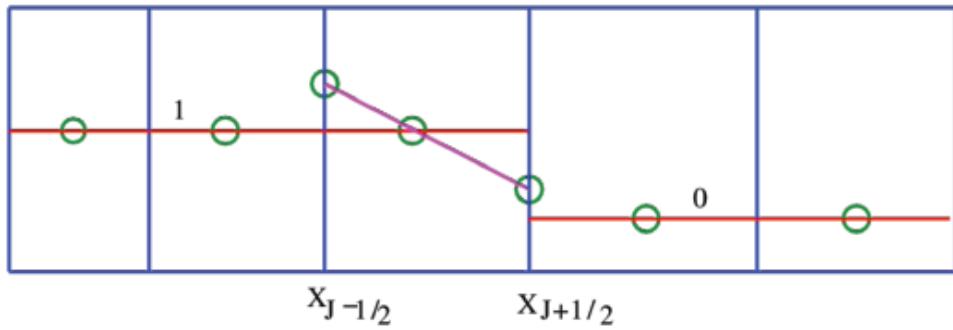
$$\sigma_j^n = \min \text{mod} \left(\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x}, \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \quad (2.22)$$

Minmod funkcija je definisana na sledeći način

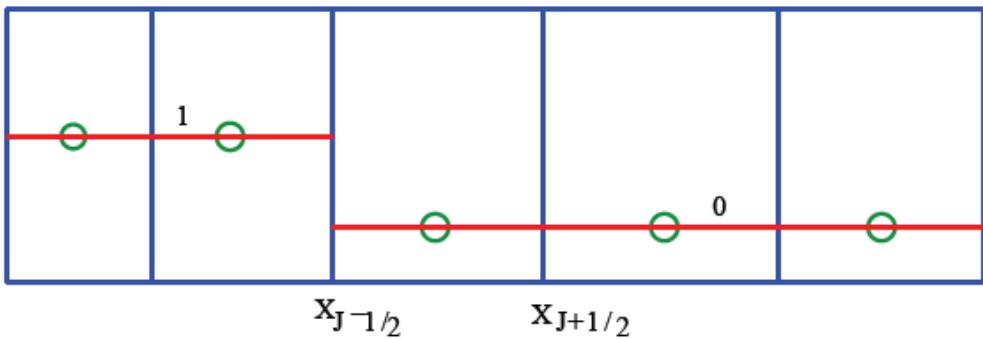
$$\minmod(a_1, \dots, a_n) = \text{sign}(a_j) \min_{1 \leq k \leq n} (|a_k|), \quad (2.23)$$

$$\text{sign}(a_1) = \dots = \text{sign}(a_n) \quad (2.24)$$

$$\minmod(a_1, \dots, a_n) = 0, \text{ inače} \quad (2.25)$$



Na gornjem grafikonu je prikazana Laks-Vendrofova rekonstrukcija za Hevisajdovu funkciju opisanu sa U_j^n .



Na gornjem grafikonu je prikazana minmod rekonstrukcija za Hevisajdovu funkciju opisanu sa U_j^n .

2.0.9 Numerički eksperimenti

Ovde će dati jedan mali komentar. Naime, uvođenjem minmod nagiba (ograničenja) se izbegavaju oscilacije i poboljšava se konvergencija. Naravno i ovi eksperimenti su izvedeni na linearnim funkcijama.

2.0.10 Druga ograničenja

U nekoj od prethodnih glava smo obradili minmod ograničenje i utvrdili da ono poboljšava ocenu rešenja. U ovoj

glavi ćemo posmatrati još neka ograničenja (nagibe). U nastavku će biti izloženo takozvano „superbi ograničenje”.

$$\sigma_j^n = \maxmod(\sigma_j^L, \sigma_j^R) \quad (2.26)$$

gde je

$$\begin{aligned} \sigma_j^L &= \minmod\left(2 \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x}, \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x}\right) \\ \sigma_j^R &= \minmod\left(\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x}, 2 \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x}\right) \end{aligned}$$

Upoređujući superbi ograničenje sa minmod ograničenjem, vidimo da superbi ograničenje ima veće nagibe, ali da zadržava svojstvo TVD. Takođe, superbi ograničenje daje tačnije i ne-oscilujuće aproksimacije.

Još jedno „popularno” ograničenje, jeste MC (monotonocentralno) ograničenje od Van-Lira,

$$\sigma_j^n = \minmod\left(2 \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x}, \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x}, 2 \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x}\right) \quad (2.27)$$

Numerički rezultati pokazuju da je MC ograničenje precizno kao i superbi ograničenje. Još jedno ograničenje je Lirovo ograničenje

$$\sigma_j^n = \frac{r + |r|}{1 + |r|}, \text{ gde je } r = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{U_j^n - U_{j-1}^n}. \quad (2.28)$$

2.0.11 Metodi drugog reda u obliku fluksa

Kao što i sam naslov kaže, možemo metode konačnih zapremina drugog reda posmatrati i u obliku fluksa, o čemu

je bilo reči u nekoj od glava sa početka rada. Pretpostavimo za trenutak da je brzina advekcije neka konstanta $a > 0$. Advekcija je pomeranje toplote ili materije putem fluida. Posmatrajmo sledeću jednačinu:

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(U(x_{j+\frac{1}{2}}, t) dt = \dots = aU_j^n + \frac{a}{2}(\Delta x - a\Delta t)\sigma_j^n. \quad (2.29)$$

Dakle, dobijamo sledeći rezultat

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = aU_j^n + \frac{a}{2}(\Delta x - a\Delta t)\sigma_j^n. \quad (2.30)$$

Sličan se izraz može dobiti i u slučaju da je $a < 0$. Definišimo $\delta_{j+\frac{1}{2}}^n = \Delta x \sigma_j^n$. Tada se prethodni izraz može zapisati na sledeći način

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = aU_j^n + \frac{a}{2}(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x})\delta_{j+\frac{1}{2}}^n. \quad (2.31)$$

Primetimo da rešenje ima skok u čvoru $x_{j+\frac{1}{2}}$ u obliku

$$[[U^n]]_{j+\frac{1}{2}} = U_{j+1}^n - U_j^n$$

i definišimo sledeće

$$\theta_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{[[U^n]]_{j-\frac{1}{2}}}{[[U^n]]_{j+\frac{1}{2}}}. \quad (2.32)$$

Parametar δ je pokazatelj promene u U u okolini $x_{j+\frac{1}{2}}$. Tada izraz možemo zapisati na sledeći način

$$\delta_{j+\frac{1}{2}}^n = \varphi(\theta_{j+\frac{1}{2}}^n) [[U^n]]_{j+\frac{1}{2}} \quad (2.33)$$

za neku funkciju $\varphi(\theta)$. Ovakav zapis ima određene prednosti. Naime, ako je $\varphi \equiv 1$, tada se posmatrani fluks svodi

na Laks-Vendrofov fluks, za linearu advekcionu jednačinu. Tada se i metod drugog reda može posmatrati kao Laks-Vendrofov metod, sa ograničenjem φ .

2.0.12 Fluks-ograničenja i TVD osobina

Sledeća tabela prikazuje neka od ograničenja, pomoću granica opisanih u prethodnom poglavlju.

Dakle, da ponovim, ovde ćemo posmatrati Fluks-ograničenja, kao i, vrlo korisnu, TVD osobinu.

Suštinski se treba fokusirati na λ , δ i θ funkcije i njihov značaj za ovakva istraživanja. Često njihov oblik može da nam posluži u daljim istraživanjima.

| Metod | Funkcija graničnika fluksa $\varphi(\theta)$ |
|--------------|---|
| Upwind | 0 |
| Laks-Vendorf | 1 |
| Bim-Varming | θ |
| Minmod | $\text{minmod}(1, \theta)$ |
| Superbi | $\max(0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta))$ |
| MC | $\max(0, \min(\frac{1+\theta}{2}, 2, 2\theta))$ |
| van Lir | $\frac{\theta+ \theta }{1+ \theta }$ |

Najpopularniji graničnici fluksa

U grafikonu je naveden i Bim-Varmingov metod(u originalu, "Beam-Warming") koji predstavlja implicitni metod koji se koristi za rešavanje nelinearnih hiperboličnih jednačina. Nije nam od velikog značaja, ali ga vredi pomenuti, jer se javlja u tabeli metoda i ima svoju funkciju predstavnika graničnika. Ne pojavljuje se često, ali nam, ipak, daje još jedan zanimljivi rezultat kojim možemo da se pozabavimo.

Metode drugog reda možemo zapisati na sledeći način

$$U_j^{n+1} = U_j^n + C_{j+\frac{1}{2}}^n [[U^n]]_{j+\frac{1}{2}} - D_{j-\frac{1}{2}}^n [[U^n]]_{j-\frac{1}{2}} \quad (2.34)$$

sa koeficijentima

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n = -\frac{a}{2}\lambda(1-a\lambda)\varphi(\theta_{j+\frac{1}{2}}^n),$$

$$D_{j-\frac{1}{2}}^n = a\lambda - \frac{a}{2}\lambda(1-a\lambda)\varphi(\theta_{j-\frac{1}{2}}^n),$$

gde je $\lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$.

Ovo je samo jedan od načina da se metoda drugog reda izrazi putem fluksa. Uzimanjem drugih vrednosti za parametre λ, φ i θ možemo dobiti najrazličitije ocene, koje će biti prikazane u sledećim grafikonima

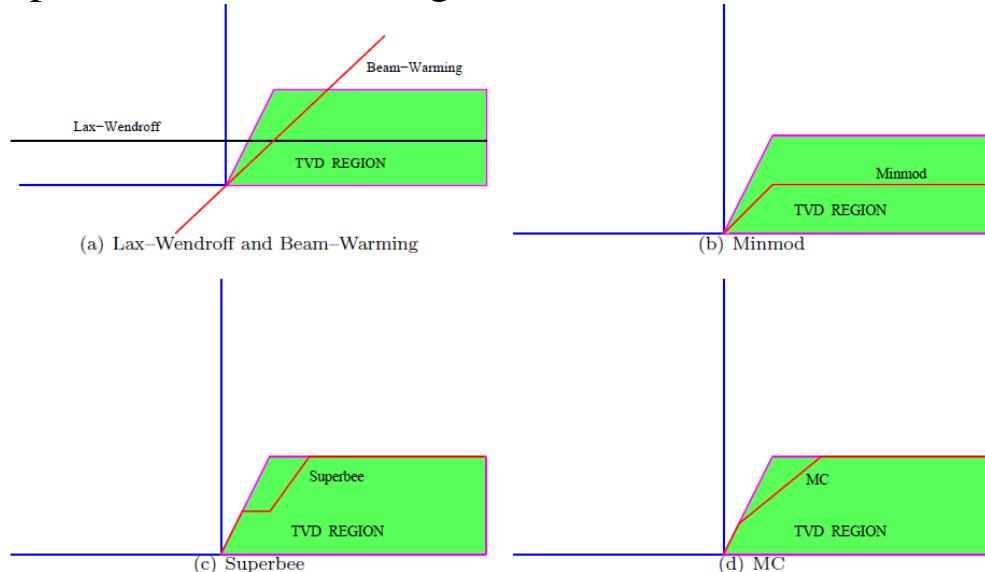


FIGURE 5.16. Sweby diagrams for different limiters.

2.0.13 Metodi visokih rezolucija za nelinearne probleme

Gore opisani metodi koji su bazirani na ograničenjima, se mogu direktno aproksimirati u nelinearnom slučaju. Jedan

primer je jednačina (1.1), što je opisano REA algoritmom u prethodnim poglavljima. Ipak, mnogi nelinearni problemi se ne mogu rešiti na taj način. U tu svrhu, ćemo posmatrati problem iz malo drugačijeg ugla, kako bismo dobili metode visokih rezolucija za nelinearne jednačine.

2.0.14 Polu-diskretna formulacija

Za početak ćemo kao i kod REA algoritma posmatrati proceduru rekonstrukcije. Ovde ćemo posmatrati srednju vrednost nad ćelijom C_j i to na sledeći način

$$U_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} U(x, t) dx.$$

Integracijom zakona održanja (2.1) dobijamo izraz

$$\frac{d}{dt} U_j(t) + \frac{1}{\Delta x} (f(U(x_{j+\frac{1}{2}}^-, t)) - f(U(x_{j-\frac{1}{2}}^+, t))) = 0.$$

Posmatrajmo i sledeće aproksimacije fluksa:

$$F_{j+\frac{1}{2}}^-(t) \approx f(U(x_{j+\frac{1}{2}}^-, t)), \quad (2.35)$$

$$F_{j-\frac{1}{2}}^+(t) \approx f(U(x_{j-\frac{1}{2}}^+, t)). \quad (2.36)$$

Tada dobijamo sledeći izraz:

$$\frac{d}{dt} U_j(t) + \frac{1}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2}}^-(t) - F_{j-\frac{1}{2}}^+(t)) = 0. \quad (2.37)$$

Preko prethodno dobijenog metoda dobijamo konačan niz običnih diferencijalnih jednačina, koje se moraju integraliti po vremenu. U tu svrhu izjednačujemo flukseve sa izrazom

$F(U_j, U_{j+1})$, radi lakšeg računa. Izraz se može još uprostiti, ali bi nas to dovelo do problema prvog reda, koje smo već obilno obradili.

2.0.15 Polu-diskretni metodi drugog reda

Prednosti kod polu-diskretnih metoda, kao što je metod predstavljen prethodnom jednačinom, jeste da možemo odvojeno da povećavamo red prostorne i vremenske tačnosti. Na osnovu prethodnih diskusija znamo, da je jedna mogućnost povećavanja reda prostorne tačnosti, korišćenje rekonstrukcija višeg reda umesto konstantnih čelijskih proseka

$$U(x, t) = U_j(t), x_{j-\frac{1}{2}} \leq x < x_{j+\frac{1}{2}}. \quad (2.38)$$

Uzimajući konstantno t , iz istih razloga kao i u prethodnoj glavi, uz posmatrano U_j , dobijamo sledeću jednačinu

$$p_j(x) = U_j + \sigma_j(x - x_j). \quad (2.39)$$

Ove linearne funkcije su ukombinovane u funkciju koja je linearna po delovima

$$p(x, t) = p_j(x) \forall x_{j-\frac{1}{2}} \leq x < x_{j+\frac{1}{2}}. \quad (2.40)$$

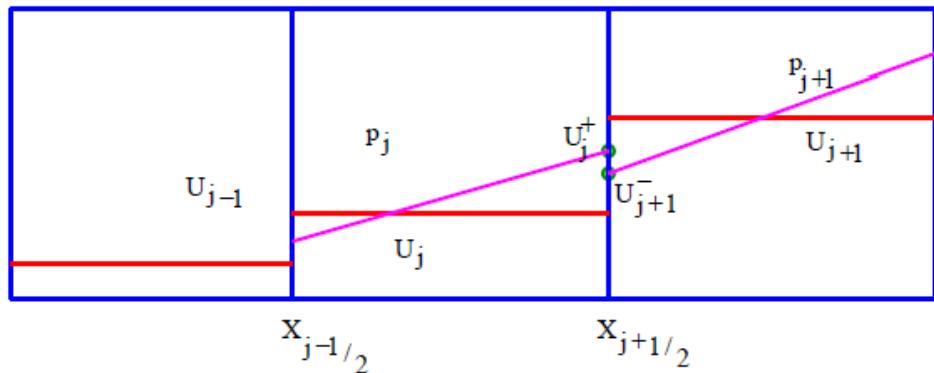
Da bismo osigurali da je jednačina TVD, uzimamo sledeće

$$\|p\|_{BV} \leq \|U^{\Delta x}\|_{BV} \forall t$$

Za nagib (gore naveden kao σ), možemo uzeti minmod ili superbi granice.

2.0.16 Numerički fluks

Numerički fluks u jednačini (2.37) je aproksimacija tačnog fluksa. Ako se podaci predstave kao po delovima konstantne celije proseka, tada je dvotačkasti fluks iz jednačine $F_{j+\frac{1}{2}}^+ = F_{j+\frac{1}{2}}^- = F(U_j, U_{j+1})$ dovoljan da definiše numerički fluks. Ako se sve to izvrši, onda moramo zameniti celije proseka sa odgovarajućim graničnim uslovima.



2.0.17 Vremensko koračanje

Posmatrajmo $U(t)$ kao vektor $U(t) = [\dots, U_{j-1}(t), U_j(t), U_{j+1}(t), \dots]$. Metod konačnih zapremina se može zapisati na sledeći način

$$\frac{d}{dt}U(t) = L(U(t)). \quad (2.41)$$

Ovde operator L deluje tačkasto na U na sledeći način

$$L(U(t))_j := -\frac{1}{\Delta x}(F_{j+\frac{1}{2}}(t) - F_{j-\frac{1}{2}}(t)). \quad (2.42)$$

Tako je gornja jednačina (3.35) sistem običnih diferencijalnih jednačina, koji se mora integraliti po vremenu. Najjednostavniji način jeste direktna Ojlerova vremenska integracija,

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t L(U^n), \quad (2.43)$$

gde je $U^n = U(t^n)$. Odabirom odgovarajuće TVD rekonstrukcije i monotone funkcije fluksa, možemo osigurati da važi sledeće:

$$TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n), \forall n. \quad (2.44)$$

Ipak, moramo primetiti, da direktna Ojlerova vremenska integracija daje samo rezultate koji su tačnosti prvog reda.

2.0.18 Standardni Runge-Kuta metod

Ovaj metod podrazumeva da se konstruiše standardan sistem običnih linearnih jednačina višeg reda. Ustaljeni oblik ovog metoda ima sledeći izgled

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t L\left(U^n + \frac{\Delta t}{2} L(U^n)\right). \quad (2.45)$$

Ovaj metod je tačnosti drugog reda. Ipak, ne zadovoljava TVD uslov, što dovodi do oscilatornih rešenja. Runge-Kuta metodi koji zadovoljavaju uslov TVD su Runge-Kuta metodi očuvanja stroge stabilnosti. Jedan takav metod drugog reda izgleda ovako

$$U^* = U^n + \Delta t L(U^n), \quad (2.46)$$

$$U^{**} = U^* + \Delta t L(U^*), \quad (2.47)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{2}(U^n + U^{**}). \quad (2.48)$$

Sledeća lema nam služi da pojasni malo stvari vezane za prethodnu metodu.

Ukoliko je diskretni diferencijalni operator L takav da direktni Ojlerov metod, koji smo videli ranije, zadovoljava uslov TVD, tada i Runge-Kuta metod takođe zadovoljava uslov TVD.

2.0.19 Algoritam visokih rezolucija

Prepostavimo da su zadovoljeni uslovi da je metod drugog reda. Neka je U_j^n čelijski prosek u vremenskom trenutku t^n , tada moramo izvršiti sledeće korake:

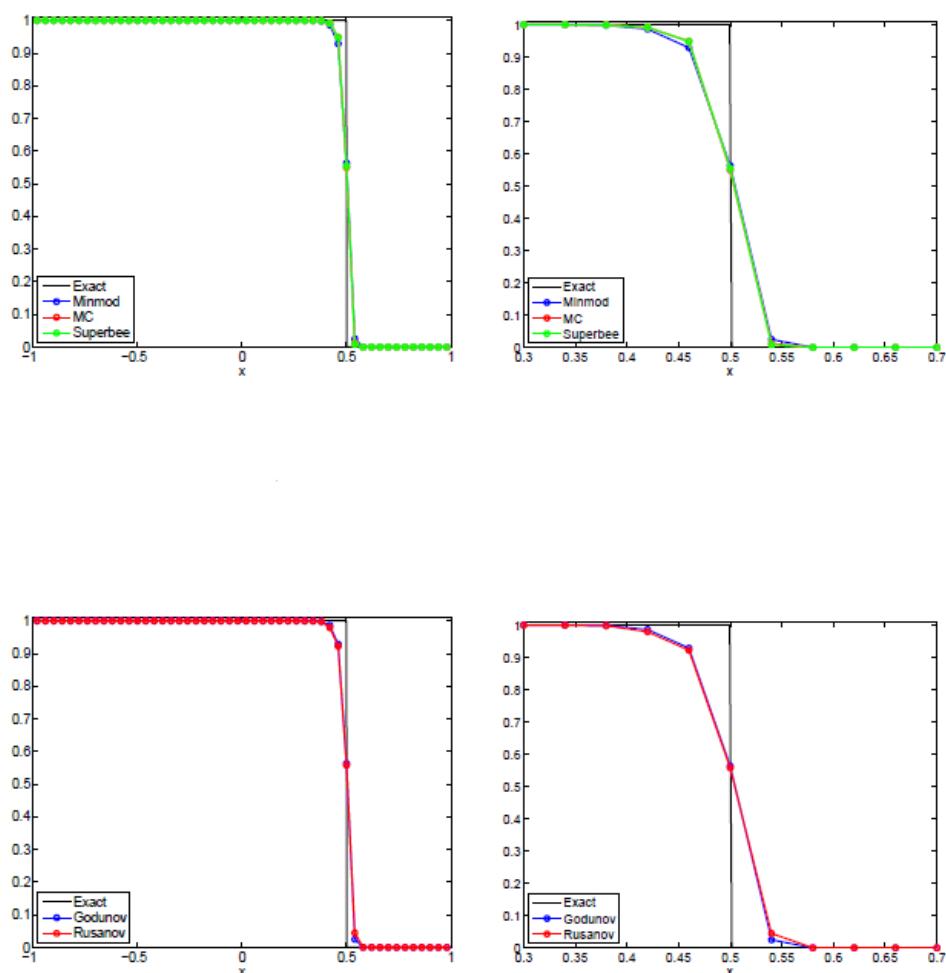
-Prvi korak(Rekonstrukcija): Uz dato U_j trebamo da izdvojimo granične vrednosti čelija i uvedemo neko od ranije poznatih ograničenja.

-Drugi korak(Evaluacija fluksa): Kako su nam poznate granične vrednosti čelija, dovoljno je "ubaciti" te vrednosti u numerički fluks koji smo ranije izveli.

-Treći korak(Vremensko koračanje): Za metode drugog reda koristimo Runge-Kuta metod očuvanja stroge stabilnosti.

Osnova metoda drugog reda se sastoji od pet koraka, dok se osnova metoda prvog reda sastoji samo od tri koraka. Ovde gore su navedena tri koraka, ali se uzimaju u obzir prethodni uslovi koji su morali biti zadovoljeni, da bi metod bio drugog reda. Ti prethodni uslovi su opisani ranije u ovom poglavlju.

2.0.20 Numerički eksperimenti



Na prva dva grafikona je prikazan Godunovljev metod sa različitim ograničenjima nagiba. Na druga dva grafikona su prikazani Godunovljev i Rusanovljev metod sa minmod graničnikom. U oba slučaja, prvi grafikon je posmatran za $t = 1$, a drugi aproksimacijom izbliza. Ovo su bila posmatranja za Burgersovu jednačinu. U svim slučajevima su utvrđeni veoma slični rezultati, što se da videti iz samih grafikona.

Glava 3

Metodi konačnih zapremina veoma visokog reda za skalarne zakone održanja

U prethodnom poglavlju smo posmatrali sledeću jednačinu i diskutovali o njenim osobinama

$$\frac{d}{dt} U_j(t) + \frac{1}{\Delta x} (F_{j+\frac{1}{2}}(t) - F_{j-\frac{1}{2}}(t)) = 0. \quad (3.1)$$

Utvrđili smo da neki od metoda mogu da reše posmatrane probleme iz prethodnih glava na "zadovoljavajući" način. Ipak, neki problemi, pogotovo oni koji se posmatraju u trodimenzionalnom prostoru, se ne mogu rešiti već izloženim metodama. U tom slučaju posmatramo takozvane metode veoma visokog reda. Pod tim se podrazumeva, da je red veći od dva i u vremenu i u prostoru.

U ovom poglavlju ćemo se baviti baš takvim problemima. Prvo ćemo se baviti polu-diskretnim formama metoda konačne zapremine, kako bi povećali prostornu tačnost. Onda ćemo izvršiti integraciju po vremenskoj promenljivoj sa Runge-Kuta metodama očuvanja stroge stabilnosti.

Izvršićemo podelu prostornog domena $[x_l, x_r]$ na jednake delove. Podela je istovetna kao ona na početku master rada, te neću dalje objašnjavati stvari vezane za mrežu, ćelije

i ostalo. Samo će napomenuti da rasprava o fiksiranju vremenske konstante, koja je izložena u prethodnoj glavi, može dovesti do povećanja reda tačnosti u prostornom smislu.

3.0.1 Po delovima polinomne rekonstrukcije visokog reda

Prepostavimo da je funkcija $V(x)$ glatka i da su nam dati ćelijski proseci:

$$V_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} V(x) dx, \forall j. \quad (3.2)$$

Naš cilj je da odredimo aproksimaciju za posmatranu funkciju, pri čemu je ta aproksimacija (rekonstrukcija) po delovima polinomna i stepena većeg od 2. Da bismo to uradili, moramo da posmatramo vrednosti susednih ćelija. Ta procedura se naziva "posmatranje matrice susednih ćelija". Neka su r i s nenegativni celi brojevi takvi da važi $r + s + 1 = k$, gde je k red aproksimacije. Tada matrica za konstrukciju aproksimirajućih polinoma $(k - 1)$ -og reda, čine ćelije

$$S_{r,j} = C_{j-r}, \dots, C_j, \dots, C_{j+s} \quad (3.3)$$

Dakle, postoji k mogućih matrica za rekonstrukciju ovog tipa. Treba još pomenuti, da su aproksimativni polinomi, koji se javljaju u ćelijama $(k - 1)$ -og reda i da su pomenute ćelije one sa početka rada, sa kojima počinje priča o metodama konačnij zapremina za skalarne zakone održanja. Pređimo sada na konkretne zapažanja prilikom primene gore opisanog metoda. To bi bila zapažanja vezana za konzervaciju i tačnost. Aproksimativni polinom p_j^r je konzervativan za sve $j - s \leq i \leq j + s$, što bi dalo sledeće:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} p_j^r(x) dx = V_i \quad (3.4)$$

Napomenimo, da ova aproksimacija očuvava ćelijske proseke. Pređimo sada na tačnost aproksimacije. Pretpostavimo da su polinomi oblika p_j^r dati. Tada treba odrediti granične vrednosti. To ćemo uraditi na sledeći način:

$$V_{j+\frac{1}{2}}^r = p_j^r(x_{j+\frac{1}{2}}), V_{j-\frac{1}{2}}^r = p_j^r(x_{j-\frac{1}{2}}). \quad (3.5)$$

Te aproksimacije su nam neophodne za definisanje numeričkih flukseva, koji se javljaju na početku ovog poglavlja. Napomenuo bih samo, da se uslovi u graničnim tačkama ćelija mogu obezbediti i kao linearna kombinacija susednih ćelija. Može se, naravno, dublje zaći u proučavanju tog načina, ali mi ćemo se ovde držati najjednostavnijeg postupka. Suštinski težimo sledećem rezultatu:

$$V_{j+\frac{1}{2}}^r - V(x_{j+\frac{1}{2}}) = O(\Delta x^k) \quad (3.6)$$

Ovo nas dovodi do zaključka, da egzaktna ćelijska zapremina (V) mora biti reda k , a aproksimativni polinom $(k-1)-og$ reda. Time smo utvrdili, da je za određivanje "dovoljno dobre" aproksimacije ćelija pomoću polinoma, dovoljno poznavati granične uslove i ispunjavati uslove konzervativnosti i tačnosti.

3.0.2 Procedura rekonstrukcije ENO

Glavna motivacija ka uvođenju procedure rekonstrukcije ENO (ENO stoji za esencialno-neoscilatorne) jeste da se pronađe odgovarajuća aproksimacija za entropijsko rešenje

osnovnog zakona održanja. To rešenje ima šokove i nije neprekidno, te nema smisla aproksimirati to rešenje sa po delovima polinomnim funkcijama. To bi bilo adekvatno za glatke funkcije. U svakom slučaju, ćemo i ovde posmatrati ćelijske zapremine. Namena je da se konstruiše matrica od ćelija zapremine, tako da se dobije matrica koja je glatka, tj. pokušavamo da izbegnemo prekide. Ukoliko takva matrica postoji, tada imamo "dovoljno lepo" rešenje. Ukoliko postoji više takvih matrica, pitanje je, kako odabratи onu sa "najadekvatnijim" svojstvima? Pre nego što pređemo na izučavanje ovakvih matrica, napomenimo samo, da u slučaju da ne postoji glatka matrica, moramo pribegnuti nekim drugim metodama. Vratimo se našim "lepmim" matricama. Efikasan način za pronalaženje "najbolje" matrice jeste metod podeljenih razlika. Za početak pogledajmo podeljene razlike prvog reda

$$V^p[x_{j-\frac{1}{2}}] = V^p_{j-\frac{1}{2}}, \quad (3.7)$$

gde je V^p primitivna funkcija funkcije V . Metod podeljenih razlika za $l - ti$ stepen izgleda ovako

$$V^p[x_{j-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+l-\frac{1}{2}}] = \frac{V^p[x_{j+\frac{1}{2}}, \dots, x_{j+l-\frac{1}{2}}] - V^p[x_{j-\frac{1}{2}}, \dots, x_{j+l-\frac{3}{2}}]}{x_{i+l-\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}}. \quad (3.8)$$

Kako je V^p primitivna funkcija funkcije V , možemo doći do sledećeg zaključka

$$V^p[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] = \frac{V^p_{j+\frac{1}{2}} - V^p_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = V_j. \quad (3.9)$$

Dakle, možemo izračunati podeljene razlike za V^p , za ćelijske proseke funkcije V . Ideja za uvođenje podeljenih

razlika dolazi iz činjenice da se mogu koristiti u Njutnovoj interpolaciji polinoma. To nas dovodi ponovo do priče o glatkim funkcijama, jer su polinomi sami glatki. Standardna teorija o aproksimacijama navodi, da za glatku funkciju W važi sledeće

$$W[x_{j-\frac{1}{2}}, \dots, x_{j+i-\frac{1}{2}}] = \frac{d^i W(x)}{dx^i}(\xi), \quad (3.10)$$

za neko ξ koje se nalazi u matrici. Još napomenimo, da ako W ima prekid, onda važi

$$W[x_{j-\frac{1}{2}}, \dots, x_{j+i-\frac{1}{2}}] = O\left(\frac{1}{\Delta x^i}\right). \quad (3.11)$$

Ovde smo pokazali kako se gradi matrica u slučaju da imamo glatke funkcije. Pošto to uglavnom nije slučaj, uvešćemo ENO-algoritam, koji će nam omogućiti da vršimo konstrukciju interpolacije fluksa za sve slučajeve.

3.0.3 ENO algoritam

Na kraju prethodnog poglavlja sam napomenuo, da ovde prelazimo sa idealnog slučaja, gde posmatramo glatke funkcije, na slučajeve gde se javljaju proizvoljne funkcije. Da bismo pokazali osnovnu ideju ENO-algoritma, iskoristićemo aproksimaciju primitivne funkcije V^\circledR do trećeg reda. Tada će funkcija V biti drugog reda. Naravno, treba odrediti ćelije zapremine, a to ćemo postići tako što ćemo koristiti dvoelementnu matricu

$$S_j^2 = x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}. \quad (3.12)$$

To je dovoljno za aproksimaciju primitivne funkcije V^\circledR Njutnovom formom, kojom dobijamo po delovima linearu

funkciju. Nakon ovog primera, ono što će izložiti jesu koraci za uvođenje ENO-algoritma:

-Prvi korak: Uz date ćelijske proseke posmatrane funkcije V i stepen tražene interpolacije k , računamo podeljene razlike primitivne funkcije $V^@$ koristeći proseke V_j ;

-Drugi korak: Za ćeliju C_j definišemo dvotačkastu matriku

$$S_j^2 = x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}. \quad (3.13)$$

Za sve $m = 2, 3, \dots, k$, pretpostavimo da je $m - ta$ matrica poznata i da ima sledeći oblik

$$S_j^m = x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+m-\frac{1}{2}}, \quad (3.14)$$

za neko i . Tada, ako

$$|V^@[x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+m+\frac{1}{2}}]|,$$

dodajemo $x_{i-\frac{3}{2}}$ postojećoj matrici kako bismo dobili novu matricu

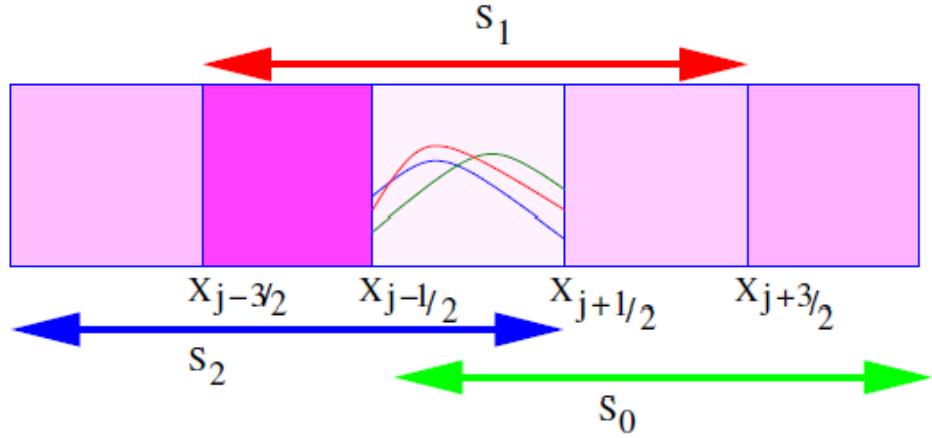
$$S_j^{m+1} = x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+m-\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

inače, dodajemo matrici $x_{i+m+\frac{1}{2}}$ kako bismo dobili novu matricu;

-Treći korak: Gornja procedura jedinstveno određuje matricu. Primetimo da matrice oblika $S_{r,j}$ koriste formule $V_{j+\frac{1}{2}}^n = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri} V_{j-r+1}$ i $V_{j-\frac{1}{2}}^n = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri}^@ V_{j-r+1}$, gde su c_{ri} - $c_{ri}^@$ odgovarajuće konstante, da bi odredile granične uslove $V_{j+\frac{1}{2}}^r$ i $V_{j-\frac{1}{2}}^r$.

Gornji algoritam se lako kodira i kao rezultat daje neosclatornu rekonstrukciju funkcije V , pomoću njenih ćelijskih

proseka. Primetimo da se primitivna funkcija ne mora računati ni u kom koraku, jer učestvuju samo njene podeljene razlike, koje se izračunavaju pomoću njenih ćelijskih proseka.



3.0.4 Osobine ENO-rekonstrukcije

Osobine ENO-rekonstrukcije:

-Prva osobina: Pretpostavimo da je $P_j(x)$ interpolacioni polinom $k - tog$ stepena primitivne funkcije $V^@$. Tada važi sledeće:

$$P_j(x) - V^@ = O(\Delta x^{k+1}), \quad (3.16)$$

za sve j takve da je funkcija V dovoljno glatka u svim ćelijskim prosecima C_j ;

-Druga osobina: Ako funkcija V nije neprekidna u ćelijskom proseku C_j , tada je polinom $P_j(x)$ monoton u toj ćeliji;

-Treća osobina: Rekonstrukcija je totalno varijaciono povezana (u originalu, Total Variation Bounded; te ćemo koristiti skraćenicu TVB), jer postoji funkcija W takva da važi sledeće

$$W(x) - P_j(x) = O(\Delta x^{k+1}), \quad (3.17)$$

takva da

$$||W||_{TV} \leq ||V^@||_{TV}.$$

3.0.5 Problemi sa ENO-aproksimacijom

Iako je ENO-algoritam veoma efikasan i dovodi nas do stabilnih i neoscilatornih rešenja, ipak i on ima određene mane

-Prva mana: ENO-algoritam može dovesti do grešaka prilikom prelaza preko čvorova mreže. Suštinski, dovodi do promena u glatkosti kod različitih ćelijskih proseka. To automatski dovodi do gubitka svojstva glatkosti kod funkcije fluksa;

-Druga mana: Kako bismo obezbedili ENO-aproksimaciju $k - tog$ reda, neophodno je posmatrati sve moguće matrice $k - tog$ reda kako bi se obezbedila ona sa najpovoljnijim svojstvima. Standardna teorija aproksimacije kaže, da se takva matrica može konstruisati pomoću $(2k - 1) - e$ interpolacione tačke. Ovde ćemo zanemariti dalje činjenice vezane za to, jer to i nije cilj ovog rada. Samo ćemo napomenuti da nam ove mane otvaraju put ka realizaciji novog WENO-algoritma(u originalu, Weighted essential nonoscillatory framework; te otuda skraćenica).

3.0.6 WENO-rekonstrukcija

Posmatrajmo funkciju V i njene ćelijske proseke V_j . Neka je $k \geq 2$ red aproksimacije i $0 \leq r \leq k - 1$. Definišimo $s = k - 1 - r$ i matricu $S_{r,j}$ kao i u ranijim slučajevima. Za proizvoljno odabranu r i matricu $S_{r,j}$, možemo pomoću primitivne funkcije dobiti tačnu i konzervativnu aproksimaciju

funkcije V $k - tog$ reda. Ovakav pristup nam omogućava da se rešimo problema graničnih tačaka celija.

Gore, u poglavljima o ENO-algoritmu, je opisano kako se biraju "najoptimalniji" kandidati za matricu. Sada ćemo opisati kako to radi WENO-algoritam. Naime, on koristi jedan rezultat teorije aproksimacija. Taj rezultat nam kaže, *da ako je V glatko u svim matricama kandidatima, tada postoje konstante d_r takve da važi:*

$$V_{j+\frac{1}{2}}^* = \sum_{r=0}^{k-1} d_r V_{j+\frac{1}{2}}^r = V(x_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^{2k-1}). \quad (3.18)$$

Tako, matrica $k - kandidat$ bazirana na $(2k-1) - ih$ interpolacionih tačaka, nas dovodi do $(2k+1) - og$ reda tačnosti interpolacije.

WENO-algoritam se bazira na "merene" vrednosti u tačkama,

$$V_{j+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r V_{j+\frac{1}{2}}^r, \quad (3.19)$$

pri čemu treba da važi $\omega_r \geq 0$ i $\sum_{r=0}^{k-1} \omega_r = 1$.

Ukoliko je V glatka funkcija, tada "težine" $\omega - a$ moraju da budu odabrane tako da odgovaraju aproksimaciji u gore pomenutim jednačinama, tako da dobijeni stepen aproksimacije iznosi $(2k+1)$. Ukoliko je to zadovoljeno, tada važi:

$$\omega = d_r + O(\Delta x^{k-1}) \quad (3.20)$$

Tada,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \omega_r V_{j+\frac{1}{2}}^r - \sum_{r=0}^{k-1} d_r V_{j+\frac{1}{2}}^r = O(\Delta x^{2k-1}). \quad (3.21)$$

Tada, na osnovu prethodnih rezultata, dobijamo sledeće:

$$V_{j+\frac{1}{2}} - V(x_{j+\frac{1}{2}}) = O(\Delta x^{2k-1}) \quad (3.22)$$

Težine ω_r treba da odražavaju glatkost odgovarajućih matrica, tj. onih označenih sa r . Pametan odabir ovih eksponenata bi bio sledeći

$$\omega = \frac{\alpha_r}{\sum_{m=0}^{k-1} \alpha_m}, \quad (3.23)$$

gde je

$$\alpha_r = \frac{d_r}{(\beta_r + \varepsilon)^2}, \quad (3.24)$$

pri čemu je ε veoma malo i obezbeđuje da delilac nikada nije jednak nuli. On označava toleranciju koju moramo imati prilikom aproksimacije. Glavna ideja je da se β_r odabere tako da su zadovoljeni uslovi glatkosti posmatrane funkcije. To se postiže na sledeći način, odabirom parametra na sledeći način:

$$\beta_r = O(\Delta x^2)$$

Sličan proces se preduzima i u drugim slučajevima te vrste. Sam proces traganja za parametrima β je krajnje ne-trivijalan. Ovde ću izložiti jedan metod prihvatljive težine. Naime, posmatrajmo matricu $S_{r,j}$ i odredimo interpolacioni polinom $(k-1)-og$ $p_r(x)$ za funkciju V . Tada su koeficijenti β_r dati sledećom formulom

$$\beta_r = \sum_{m=1}^{k-1} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Delta x^{2m-1} \left(\frac{d^m p_r(x)}{dx^m} \right)^2 dx \quad (3.25)$$

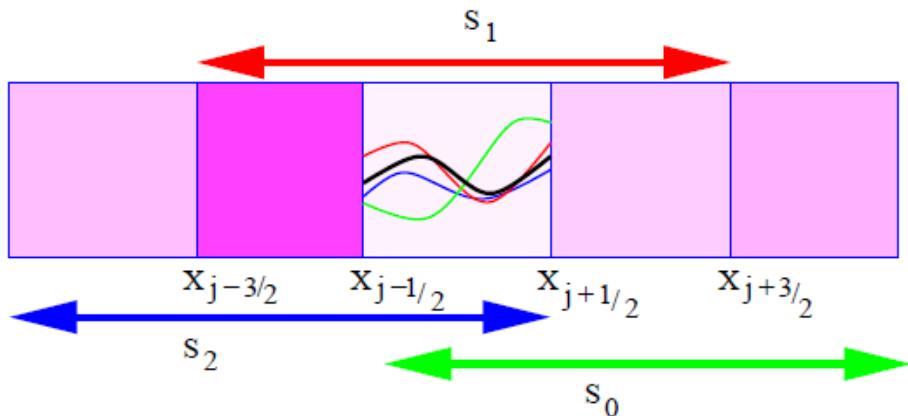
Gornjim izrazom obezbeđujemo rezultujući derivati ne zavise od Δx . Taj izraz je kvadrat norme L^2 , norme svih polinoma sve do $k - 1$.

3.0.7 WENO-algoritam

- Prvi korak: Uz date ćelijske proseke funkcije V , traženog stepena aproksimacije k , uzimajući $0 \leq r \leq k - 1$ i korespondirajuće matrice $S_{r,j}$. Tada se određe vrednosti u tačkama;
- Drugi korak: Izračunati koeficijente d_r i d_r^* ;
- Treći korak: Izračunati indikatore glatkosti β_r ;
- Četvrti korak: Odrediti $\omega, \omega^*, \alpha, \alpha^*$. Ove sa tildama se određuju analogno kao i ove bez njih;
- Peti korak: Izračunati granične tačke $(2k + 1) - og$ reda

$$V_j^+ = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r V_{j+\frac{1}{2}}^r \quad (3.26)$$

$$V_j^- = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r^* V_{j-\frac{1}{2}}^r. \quad (3.27)$$



Ovde ću navesti još dve napomene. Prva se tiče brzine implementacije WENO-algoritma. Naime, za njegovu implementaciju je neophodno manje ulaznih podataka, a i vremenski je efikasniji od ENO-algoritma. Druga napomena se tiče reda interpolacije. Naime, ukoliko želimo WENO-aproksimaciju k -toga reda, onda ćemo dobiti stepen tačnosti aproksimacije reda $(2k - 1)$.

3.0.8 Računanje numeričkog fluksa

Oba izložena algoritma daju dobre rezultate prilikom aproksimacije funkcije fluksa. Ovde stanimo i vratimo se na skalarni zakon održanja izložen na početku ovog rada. Oba algoritma daju neosциlatorna rešenja, kao i odgovarajuće rezultate u čvornim tačkama. U suštini, samu funkciju fluksa možemo posmatrati kao zakon održanja, tj. neko njegovo uopštenje, te se ovo poglavlje svodi pretežno na sumiranje rezultata.

3.0.9 Vremensko stepenovanje

O ovome je bilo reči i u prethodnim poglavljima. Ovde će napomenuti da se operator L može izložiti na sličan način kao i u prethodnom poglavlju, uz male izmene pomoću ENO- i WENO- algoritama. Izložićemo Runge-Kuta metod $k - tog$ stepena

$$U^{(m)} = \sum_{l=0}^{m-1} (\alpha_{ml} U^{(l)} + \Delta t \beta_{ml} L(U^{(l)})), \quad 1 \leq m \leq k \quad (3.28)$$

$$U^{(0)} = U^n, \quad U^{(k)} = U^{n+1} \quad (3.29)$$

Pomoću ovog sistema diferencijalnih jednačina se mogu odrediti koeficijenti α_{ml} i β_{ml} , pri čemu treba uzeti u obzir da su oni nenegativni.

3.0.10 Numerički eksperimenti

Ovde bih samo napomenuo, da nam neku predstavu o numeričkim rezultatima daju analize ENO- i WENO- algoritama, odnosno stepena tačnosti do kojih želimo da stignemo

prilikom primena tih metoda. Napomenuću još, da treba posebno obratiti pažnju na stepene interpolacionih polinoma i njihove odnose sa stepenom tačnosti funkcija flukseva (zakona održanja) koje aproksimiramo.

Glava 4

Neka uopštenja

Metod konačnih zapremina je diskretizacija tehnike vezane za parcijalne diferencijalne jednačine, pogotovo one koje opisuju zakone fizike. To se posebno odnosi na diskretizaciju zakona vezanih za fluide.

Posmatrajmo sada ovde probleme gde je čvorna tačka na mreži centrirana.

$$-\nabla \cdot (K \nabla u) = f, \quad (4.1)$$

u Ω , gde je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, gde je $K(x)$ koeficijent difuzije, a u fluid. Ovde će napomenuti da posmatramo matricu dimenzija $d \times d$, koja je simetrična i uniformno pozitivna na Ω , a $f \in L^2(\Omega)$. Sada će izložiti jednačinu ravnoteže za zakon održanja

$$\int_{\partial b} q \cdot n dS = \int_b f dx, \quad (4.2)$$

za proizvoljan domen $b \subset \Omega$, gde q odražava gustinu flulta, a n jedinično normalno polje od ∂b . Sad će navesti tako-zvanu konstitutivnu jednačinu

$$q = -K \nabla u. \quad (4.3)$$

Suštinski se sve temelji na toj jednačini i na osnovnoj

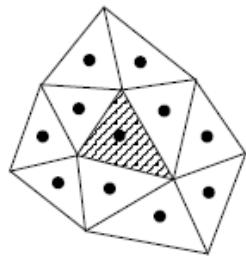
jednačini održanja navedenoj na početku rada. U ovom poglavlju ću navesti još neke metode, koje su u suštini samo uopštenja nama već poznatih metoda.

4.0.1 Čelijski centriran metod konačnih zapremina

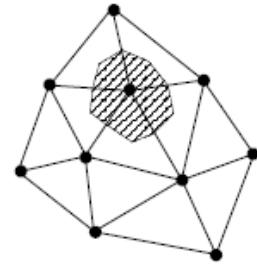
Neka je T trouglasta ili kartezijanska mreža Ω . Na dijagramu ću izložiti tu podelu domena. Ovde ću navesti kako bih izgledao dvodimenzionalni ili trodimenzionalni slučaj radi jednostavnosti.

$$\nabla_h u_h \cdot n_e := \frac{u_h|_{\tau_2} - u_h|_{\tau_1}}{c_{\tau_2} - c_{\tau_1}}, \quad (4.4)$$

gde je n_e jedinični normalni vektor od e u τ_1 , tj. usmeren od τ_1 ka τ_2 , a konstante $c_{\tau_i} \in \tau_i$ su tačke takve da su povezane i da je vektor e normalan na vezu.



(a) Control volumes of the cell-centered FVM



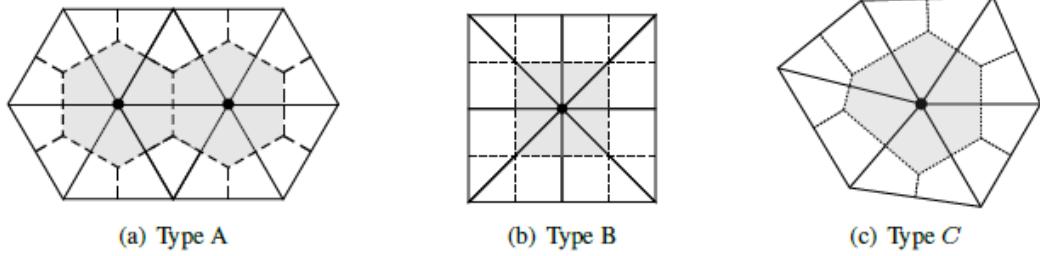
(b) Control volumes of the vertex-centered FVM

Ovde ću dati sličan komentar kao i ranije, a koji je vezan za izvor iz kog su uzeti grafikoni. Naime, koristio sam se radom "Metode konačnih zapremina", koji je napisao Long Čen. On se koristio izvorima koji su u Literaturi navedeni pod rednim brojem [8]-[22].

4.0.2 Čvorno centralni metod konačnih zapremina

Napomenimo na početku, da je notacija slična kao i u prethodnom poglavlju. Ovde biramo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ da bude po-

ligon, a T da je trougaona mreža na Ω . Posmatrajući triangulaciju prostora, mogu se odabrati granične tačke na relativno lak i logičan način. Tačke biramo tako da se nalaze u čvornim tačkama mreže. To nam olakšava kasniju implementaciju u računarski sistem.



4.0.3 Petrov-Galerkinova formulacija

U ovom poglavlju će, radi jednosti, navesti samo ideju postupka. Naime, posmatrani prostor iz prethodnog poglavlja se prekriva dvema mrežama (u tekstu takozvanom dualnom mrežom B). Odredimo prostor po delovima konstantnih funkcija

$$V_B = v \in L^2(\Omega) : v|_{b_i} = \text{const.}, \forall b_i \in B. \quad (4.5)$$

Ovaj skup bi trebalo da je u unutrašnjosti skupa B , a to označavamo sa $\varepsilon(B)$. Za svako $e \in \varepsilon(B)$ ćemo fiksirati jedinični normalni vektor n_e . Suštinski se odrede vektori tako da se ne podudaraju dva vektora u čvorovima i konstruiše se funkcija koja kao ulaznu veličinu, ima dva vektora (svaki od jedne mreže). Funkcija dosta podseća na funkcije iz prethodnog poglavlja, ali je mnogo uopštenija verzija njih).

4.0.4 Ispitivanja prilikom ocena

Načini za ispitivanje grešaka, konvergencije, stabilnosti, monotonosti i raznih drugih osobina se ne razlikuju mnogo od onih koje smo videli u prethodnim glavama. Jedina razlika jeste upotreba različitih normi, jer smo, ipak, slučajeve digli na više dimenzije. Što se tiče računarskih procedura, mora se primetiti da su one vremenski produžene i time zakomplikovane. Na svu sreću, ovi metodi nemaju praktičnu, već samo teorijsku primenu, te numeričke procedure ne predstavljaju prioritet ovde.

Glava 5

Primena

Problemi vezani za kretanje fluida se mogu opisati pomoću PDJ. Ipak, takav opis nije pogodan za dalji rad sa takvim jednačinama, te se mora izvršiti diskretizacija i opisanje problema u nekom programskom jeziku. Nakon diskretizacije se često dobiju sistemi sa velikim brojem jednačina. Metode koje se primenju za rešavanje takvih problema su opisane u gornjim glavama, pa ih neću navoditi ponovo. Ovde ću navesti neke od problema koji se rešavaju primenom prethodno navedenih metoda.

Kretanjem fluida se mogu opisati mnoge pojave. Kretanje fluida jeste kretanje npr. vazduha, vode ili neke druge tečnosti. Možemo opisati kretanje fluida u organizmu, interakciju materija, ponašanje velikih vazdušnih i vodenih masa, kao i niz drugih značajnih problema. Navešću još samo neke od njih. Tu spadaju i meteorološki fenomeni, ekološke nepogode, kao što je ispitivanje zagađenja vode i vazduha, rad automobilskih motora i drugih mašina gde se koristi teorija o pritisku, itd. da ne bih dalje nabrajao, jer je broj fenomena stvarno neverovatan.

Naravno, tokom programiranja problema (ili, kako bih ja to formulisao, "ubacivanja u računar"), treba obratiti pažnju na neke stvari. Jedna od njih su greške koje nastaju prilikom

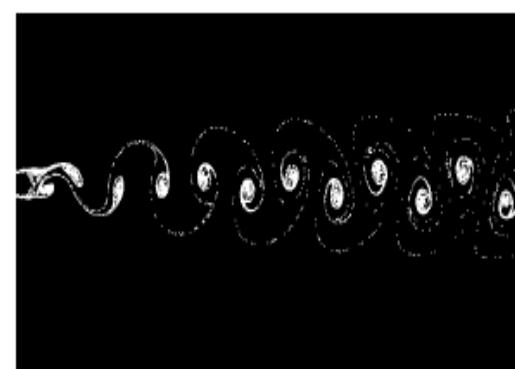
diskretizacije problema. Pojedine greške možemo zanemariti, jer ne utiču na rešenje problema oblika $Ax = b$, gde je A matrica velikog stepena. Nekada, doduše, nam prisustvo ili izostanak grešaka pravi veliku razliku što se tiče vrednosti rešenja problema. Stoga je bitno analizirati postupak aproksimacije i njegov uticaj na vrednost grešaka.

Još jedna bitna stavka jeste upoređivanje eksperimentalnih rezultata i onih dobijenih metodom konačnih zapremina. Uopšteno, postoji i pitanje, da li je moguće to izvesti? Problem se, naime, javlja kod eksperimenta, jer njihovo izvođenje može biti veoma skupo, praktičnim sretstvima neizvodljivo ili predugo za praćenje i izračunavanje.

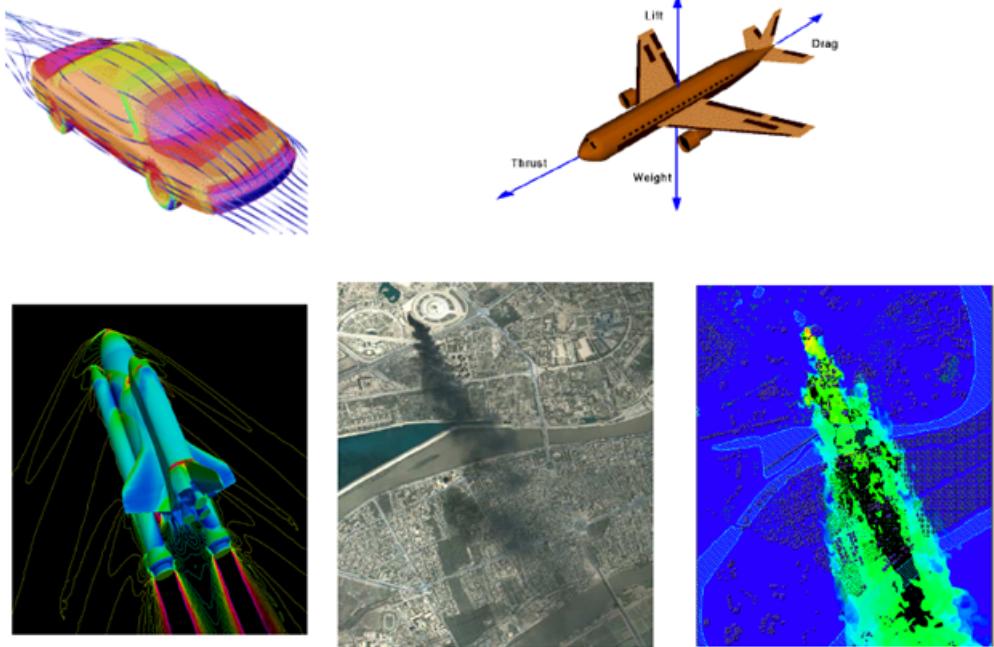
Za kraj ću postaviti sledeće pitanje. Šta će nama sve ovo? Naveo sam neke pojave koje se proučavaju na ovaj način, a sad ću navesti i čemu nam to može to poslužiti. Naime, rezultati ove teorije se koriste za konstrukciju bezbednijih građevina, vozila, hemikalija, medicinskih alatki, meteoroloških instrumenata, kao i u konstrukciji raketa i aviona.



real experiment



CFD simulation



Sve slike su preuzete iz rada "Uvod u kompjutacionalnu dinamiku fluida", koji je napisao Dmitri Kuzmin, a koji se koristio izvorima navedenim u literaturi pod rednim brojem [1]-[7].

Zaključak

Uvodni deo ne treba komentarisati, jer nam on, kao i svaki drugi uvod, otvara vrata ka nekoj novoj priči. U prvom poglavlju smo obradili metode konačnih zapremina za skalarne zakone održanja. Tu su pomenute razne metode, kao što su Godunovljeva, Roe-Murmanova, Centralna itd. Zašto su one nama zanimljive? Naime, one spadaju u klasu metoda za određivanje približnog rešenja, kao što nam je već pozнато, uglavnom eksplicitno nerešivih PDJ od velikog značaja za nauku. Najfascinantnije je, da se ove metode zasnivaju na dosta očiglednim, tako jednostavnim i lako razumljivim, a, ipak, veoma korisnim idejama. Neka osnovna posmatranja i razmišljanja o praktičnim problemima fluksa i relativno jednostavni i lako pojmljivi metodi numeričke analize nas dovode do niza različitih približnih rešenja problema. Naravno, neke metode su pogodnije od drugih, ali tu dosta veliku igra i cilj rešavanja postavljenog problema. Neka sad izvinu velika imena matematike, na čijim ramenima stojimo, pošto ih nisam sve pomenuo. Samo ću reći da su ona to zaslužila. U drugom poglavlju smo obradili metode konačnih zapremina drugog i viših redova. Ovde neću mnogo dodati. Ona su prirodni produžetak na priču. U trećem poglavlju smo obradili metode konačnih zapremina veoma visokih redova za skalarne zakone održanja. Ovde ću dati isti komentar kao i za prethodno poglavlje. U četvrtom poglavlju sam obradio

uopštenja posmatranih metoda i neke, po mom mišljenju, dosta originalne pristupe problemu o kom govorimo. Dosta apstraktnom i, u neku ruku, teško pojmljivom problemu, se prišlo na vešt i, što je više moguće, jednostavniji način. Oni, na žalost, nemaju praktičnu primenu, ali su zanimljivi za istraživače. Peto i poslednje poglavlje sam posvetio primeni nekih rezultata u praksi, što i jeste jedan od razloga zašto sam se odlučio za ovu temu, o čemu će biti koja reč u pogovoru. Na nama još jedino ostaje da nastavimo da se penjemo na ramena velikana, ubiramo plodove sa viših grana nedoglednog i razgranatog drveta matematike i delimo ih sa ostatkom sveta.

Pogovor

Potrudio sam se da u ovom radu izdvojim teorijske zaključke i samo plemenite primene, one koje će pomoći čovečanstvu. Ove druge primene, koje odišu nečoveštvo, sam ostavio po strani, jer nam nisu ni potrebne u krajnju ruku i ne kajem se zbog tog postupka. Eto, slavni Abulkasim Ferdosi, koga sam pomenuo u predgovoru, je svoje remek delo "Knjigu kraljeva" pisao preko trideset godina, i koja predstavlja najduži ep koji je napisao jedan čovek. Moj master rad ne može da se svrsta u epove velikana, niti u ravni sa velikim naučnim dostignućima, ali, kao što sam napomenuo na početku dela, voleo bih da mi očuva ime i glas koji su me pratili do sada. Mislim da je to skromna i plemenita želja. Ovim rečima bih završio ovaj rad.

Literatura

Bibliografija

- [1] J. H. Ferziger and M. Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, 1996.
- [2] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows Vol. I and II*, John Wiley and Sons, Chichester, 1990.
- [3] P. Wesseling, *Principles of Computational Fluid Dynamics*, Springer, 2001.
- [4] C. Cuvelier, A. Segal and A. A. van Steenhoven, *Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations*, Kluwer, 1986.
- [5] S. Turek, *Efficient Solvers for Incompressible Flow Problems: An Algorithmic and Computational Approach*, LNCSE 6, Springer, 1999.
- [6] R. Lohner, *Applied CFD Techniques: An Introduction Based on Finite Element Methods*, John Wiley Sons, 2001.
- [7] J. Donea and A. Huerta, *Finite Element Methods for Flow Problems*, John Wiley Sons, 2003.
- [8] R. E. Bank and D. J. Rose, *Some error estimates for the box method*, SIAM J. Numer. Anal. , 24: 777 - 787, 1987.

- [9] Z. Cai, *On the finite element method*, Numer. Math. , 58(1): 713 - 735, 1990.
- [10] Z. Cai, J. Mandel and S. E. McCormick, *The finite volume element method for diffusion equations on general triangulations*, SIAM J. Numer. Anal. , 28: 392 - 402, 1991.
- [11] P. Chatzipantelidis, *Finite volume methods for elliptic PDE's: a new approach*, M2AM Math. Model. Numer. Anal. , 36(2): 307 - 324, 2002.
- [12] L. Chen, *A new class of high order finitevolume methods for second order elliptic equations*, SIAM J. Numer. Anal. , 47(6): 4021 - 4043, 2010.
- [13] S. H. Chou and Q. Li, *Error estimates in L^2 , H^1 and L^∞ in covolume methods for elliptic and parabolic problems: a unified approach*, Math. Comp. , 69(229): 103 - 120, 2000.
- [14] R. E. Ewing, T. Lin and Y. Lin, *On the accuracy of the finite volume element method on piecewise linear polynomials*, SIAM J. Numer. Anal. , 39(6): 1865 - 1888, 2002.
- [15] R. Eymard, T. Gallouet and R. Herbin, *Finite volume methods. In Handbook of numerical analysis, Vol. VII*, Handh. Numer. Anal. , VII, pages 713 - 1020. North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [16] W. Hackbusch, *On first and second order box schemes*, Computing, 41(4): 277 - 296, 1989.

- [17] J. Huang and S. Xi, *On the finite volume element method for general self-adjoint elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal. , 35(5): 1762 - 1774, 1998.
- [18] R. Li, Z. Chen and W. Wu, *Generalized difference methods for differential equations, volume 226 of Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics*, Marcel Dekker Inc. , New York, 2000. Numerical analysis of finite volume methods
- [19] R. H. Li, *On the generalized difference method for elliptic and parabolic differential equations*, In Proc of the Symposium on the Finite Element Method between China and France, Beijing, China, 1982.
- [20] T. Russell and M. Wheeler, *Finite element and finite difference method for continuous flows in porous media*, Frontiers in Applied Mathematics, 1:35, 1983.
- [21] E. Süli, *Convergence of finite volume schemes for Poisson's equation on nonuniform meshes*, SIAM J. Numer. Anal. , 28(5): 1419 - 1430, 1991.
- [22] J. Xu and Q. Zou, *Analysis of linear and quadratic simplicial finite volume methods for equations*, Numer. Math. , 111(3): 469 - 492, 2009.
- [23] M. G. Crandall and A. Majda, *Monotone difference approximations for scalar conservation laws*, Math. Comp. , 34:121, 1980.
- [24] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators. Part I* Wiley Classics Library. John Wiley Sons Inc. , New York, 1988.

- [25] E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, volume 80 of *Monographs in Mathematics*, Birkhäuser Basel, 1984.
- [26] S. K. Godunov, *A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations*, Math. Sbornik, 47:271306, 1959.
- [27] E. Godlowski and P. A. Raviart, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Ellipses, 1991.
- [28] S. Gottlieb, C.-W. Shu, and E. Tadmor, *Strong Stability-Preserving High-Order Time Discretization Methods*, SIAM Review, 43(1):89112, 2001.
- [29] A. Harten, *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws*, Journal of Computational Physics, 49(3):357393, 1983.
- [30] E. Hairer, S.P. Norsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations*, 1987.
- [31] A. Harten, S. Osher, B. Engquist, and S. R. Chakravarty, *Some results on uniformly high order accurate essentially nonoscillatory schemes*, Appl. Numer. Math., 2(3 - 5):34378, 1986.
- [32] E. Hopf, *On the right weak solution of the Cauchy problem for quasilinear equations of first order*, Journal of Mathematics and Mechanics, 19:483487, 1969.
- [33] H. Holden and N. H. Risebro, *Front Tracking for Hyperbolic Conservation Laws*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, second edition edition, 2015.

- [34] S. N. Kruzkov, *First order quasilinear equations in several independent variables*, Mathematics of the USSR-Sbornik, 10(2):217243, 1970.
- [35] P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 10(4):537566, 1957.
- [36] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Fluid Mechanics*, Butterworth-Heinemann, 1987.
- [37] X. D. Liu, S. Osher, and T. Chan, *Weighted essentially non-oscillatory schemes*, J. Comput. Phys. , 115(1):200212, 1994.
- [38] O. A. Oleinik, *Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation*, Uspekhi Mat. Nauk, 14(2(86)):165170, 1959. English translation, Amer. Math. Soc. Trans., ser. 2, no. 33, pp. 285-290.
- [39] C. W. Shu, *Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*, Technical report, 1997.
- [40] A. Tveito and R. Winther, *Introduction to Partial Differential Equations; A Computational Approach, volume 29.*, Springer-Verlag, second edition, 2009.

Biografija



Srđan Jakovljević je rođen 02. 10. 1995. godine u Novom Kneževcu. Osnovnu školu "Jovan Jovanović Zmaj" i Gimnaziju je završio u svom rodnom mestu. Smer Diplomirani profesor matematike(M4) upisuje 2014. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, a završava 2018. godine. Te godine upisuje smer Master profesor matematike(M5) na istom fakultetu. Položio je sve ispite predviđene planom i programom.

Novi Sad, 2022.

Srđan Jakovljević

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Srđan Jakovljević

AU

Mentor: dr Ivana Vojnović

MN

Naslov rada: Metode konačnih zapremina za rešavanje zakona održanja

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2022

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: //

(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina:

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči:

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Marko Nedeljkov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Ivana Vojnović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Nataša Krklec Jerinkić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Srđan Jakovljević

AU

Mentor: Ivana Vojnović, Ph.D.

MN

Title: Finite volume methods for solving conservation laws

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: English/Serbian (latin)

LA

Country of publication: Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2022.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: /////

(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline:

SD

Subject/Key words:

SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences,
University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract:

AB

Accepted by the Scientific Board on:

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Dr. Marko Nedeljkov, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr. Ivana Vojnović, assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,

Member: Dr. Nataša Krklec Jerinkić, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,