UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Stefani Marjanović

Procjena rizika i vjerovatnoće propasti pod uticajem stohastičkih investicija

- Master rad -

Mentor:
dr Dora Seleši

Novi Sad, 2022.

Predgovor

Pregled rada

Teorija propasti je oblast aktuarske matematike koja uz pomoć stohastičkih procesa modelira višak osiguravajuće kompanije. Način na koji se višak modelira zavisi od prirode poslovanja kompanije. Osiguravajuća kompanija neživotnog osiguranja zarađuje premije, ali isplaćuje slučajne štete koje su pokrivene polisom. Vjerovatnoća propasti je koncept koji se koristi da bi se opisao rizik sa kojim se suočava osiguravajuća kompanija. Rizik se javlja kao mogućnost da rezerve kompanije i zarada od premija neće biti dovoljne da pokriju potencijalne ukupne štete osiguranika. Vjerovatnoća propasti, kao najznačajnija mjera rizika u osiguranju, predstavlja važnu stavku za izračunavanje. S obzirom da se eksplicitna formula za vjerovatnoću propasti može naći samo za mali broj specijalnih slučajeva, vrlo često se posmatraju razne aproksimacije vjerovatnoće propasti, koje su značajan pokazatelj, bez obzira na to što daju samo grube informacije o propasti. Inspiracija za posmatranje uticaja rizičnih investicija na solventnost osiguravajuće kompanije dolazi iz finansijske matematike.

Master rad je posvećen asimptotskoj analizi vjerovatnoće propasti u klasičnom modelu rizika, kao i u proširenom modelu u kojem se višak osiguravajuće kompanije investira u rizičnu aktivu čija se cijena modelira geometrijskim Brownovim kretanjem. Rad je podijeljen na četiri glave.

U prvoj glavi rada *Uvodni pojmovi* se navode relevantni pojmovi teorije vjerovatnoće i stohastičkih procesa. Definisana je Laplaceova transformacija i Stieltjes integrali neophodni za analize u radu. Izloženi su i rezultati teorije regularne varijacije i Frobeniusov metod rješavanja diferencijalnih jednačina koji se koriste u nastavku.

Druga glava pod naslovom *Cramér-Lundbergov model rizika* je posvećena klasičnom modelu rizika koji se bazira na složenom Poissonovom procesu i predstavlja temelj teorije rizika. Na samom početku se navode osnovni pojmovi teorije propasti i vrši se integrodiferencijalna reprezentacija vjerovatnoće propasti. S obzirom da rezultati zavise od vrste raspodjele kojom se modeliraju iznosi šteta, izvršena je njihova klasifikacija na raspodjele sa lakim repom i raspodjele sa teškim repom. Osnovni rezultati ove oblasti su Cramér-Lundbergova aproksimacija i aproksimacija vjerovatnoće propasti u slučaju raspodjela sa teškim repom.

U trećoj glavi rada *Cramér-Lundbergov model rizika pod uticajem stohastičkih investicija* je analiziran model rizika u kojem se višak osiguravajuće kompanije investira u rizičnu aktivu. Pomoću infinitezimalnog generatora procesa rizika je formirana integrodiferencijalna jednačina vjerovatnoće propasti. Laplaceovim transformacijama i teoremama regularne varijacije je omogućen jedinstven pristup asimptotskoj analizi, te su rezultati primjenljivi i na štete koje prate raspodjelu sa lakim repom, ali i na one sa teškim repom. Najprije se vrši analiza Laplaceove transformacije rješenja posmatrane integrodiferencijalne jednačine u okolini singulariteta, pa se primjenom Karamata-Tauberove teoreme, teoreme o monotonoj gustini i Heavisideovog operacionog principa dolazi do zaključaka o asimptotskom ponašanju vjerovatnoće propasti. Kroz nekoliko grafika je ilustrovan uticaj parametara difuzije na aproksimaciju vjerovatnoće propasti. Takođe se razmatraju i mogući scenariji kod raspodjela sa lakim i raspodjela sa teškim repom, kao i razlike između rezultata klasičnog Cramér-Lundbergovog modela i modela sa stohastičkim investicijama.

Na samom kraju rada u glavi *Zaključak* su navedeni dobijeni rezultati i zaključci, te su date ideje za dalje istraživanje.

Zahvalnica

Izuzetnu zahvalnost, u prvom redu, dugujem svom mentoru, dr Dori Seleši, na sugestijama, savjetima, strpljenju i pomoći prilikom izrade ovog master rada, kao i na zanimljivim predavanjima tokom studiranja koja su bila jedan od razloga da se opredijelim za temu iz ove oblasti.

Zahvaljujem se i dr Danijeli Rajter-Ćirić i dr Ivani Vojnović, članovima komisije za odbranu ovog rada.

Željela bih da se zahvalim porodici, prijateljima, profesorima i kolegama, kao i svima koji su mi na bilo koji način pružili pomoć i podršku tokom studiranja i prilikom izrade ovog rada.

Najveću zahvalnost želim da izrazim svojim najbližima, majci Jagodi i ocu Milovanu, kao i Goranu, koji su mi uvijek bili bezrezervna podrška.

Novi Sad, jul 2022. Stefani Marjanović

Sadržaj

Spisak slika

Spisak tabela

Spisak učestalih oznaka

Vjerovatnoća i stohastička analiza

P vjerovatnoća

E očekivanje

D disperzija

$F_X(x)$ funkcija raspodjele slučajne promjenljive X

$\varphi_X(x)$ funkcija gustine slučajne promjenljive X

$M_X(s)$ funkcija generatrisa momenata slučajne promjenljive X

$\overline{F}_X(x)$ (desni) rep raspodjele sa funkcijom raspodjele $F_X(x)$

$F_I(x)$ integral repa raspodjele sa funkcijom raspodjele $F_X(x)$

$\mathcal{P}(\lambda)$ Poissonova raspodjela sa stopom rasta λ

$\mathcal{E}(\beta)$ eksponencijalna raspodjela sa parametrom β

$\mathcal{N}(\eta, \sigma^2)$ normalna raspodjela sa očekivanjem η i varijansom σ^2

W_t standardno Brownovo kretanje

$\mathcal{G}amma(\alpha, \beta)$ Gamma raspodjela sa parametrom oblika α i parametrom razmjere β

$\Gamma(\alpha)$ gamma funkcija

$\mathcal{W}eibull(\delta, \tau)$ Weibull raspodjela sa parametrom razmjere δ i parametrom oblika τ

$\mathcal{P}areto(\nu, \gamma)$ Pareto raspodjela sa parametrom oblika ν i parametrom razmjere γ

$\mathcal{L}og\mathcal{N}(m, s^2)$ lognormalna raspodjela sa parametrima m i s^2

$\xrightarrow{\text{s.s.}}$ skoro sigurna konvergencija

Teorija propasti

$\tau(u)$ trenutak propasti

$\psi(u)$ vjerovatnoća propasti

$\phi(u)$ vjerovatnoća preživljavanja

u početne rezerve

c stopa premije

U_t proces viška

N_t Poissonov proces, broj pristiglih šteta

X_i iznos i-te štete

S_t u glavi 2 - složen Poissonov proces koji opisuje ukupan iznos šteta
u glavi 3 - geometrijsko Brownovo kretanje koje opisuje rizičnu aktivu u koju se investira

λ stopa rasta Poissonovog procesa

μ očekivanje iznosa šteta $\mu = E(X)$

θ koeficijent opterećenja premije

L_t proces ukupnog gubitka

T_i trenutak isplate i-te štete

V_i vrijeme čekanja između $(i-1)$-ve i i-te štete

F_X funkcija raspodjele individualnih šteta

$l(s)$ Lundbergova funkcija

κ Lundbergov koeficijent ili koeficijent prilagođavanja

η drift geometrijskog Brownovog kretanja S_t

σ volatilnost geometrijskog Brownovog kretanja S_t

R_t proces viška sa stohastičkim investicijama

$\rho := \frac{2\eta}{\sigma^2} - 1$

Drugo

$\widehat{g}(s)$ Laplaceova transformacija funkcije $g(x)$

$\widetilde{g}(s)$ Laplace-Stieltjesova transformacija funkcije $g(x)$

$F * G$ Stieltjes konvolucija funkcije F u odnosu na funkciju G

F^{*n} n-ti konvolucioni stepen funkcije F

$Ag(u)$ infinitezimalni generator procesa

$W(s)$ determinanta Wronskog ili Wronskijan

$f(x) \sim g(x), \text{ ako } \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

1 Uvodni pojmovi

U ovoj glavi su izloženi osnovni pojmovi i neki rezultati teorije vjerovatnoće i stohastičkih procesa koji će se primjenjivati u radu i neophodni su za njegovo razumijevanje. Posebna pažnja je posvećena Poissonovom procesu i procesima difuzije. Definisana je Laplaceova transformacija, koja predstavlja značajan alat za rad sa integrodiferencijalnim jednačinama vjerovatnoće propasti, i date su njene osnovne osobine. Integrali Stieltjes tipa, koji se uvode u nastavku, omogućavaju jedinstven zapis za diskretne i apsolutno neprekidne slučajne promjenljive, kao i definisanje Laplace-Stieltjesove transformacije. U četvrtom poglavlju su navedene osnovne teoreme teorije regularne varijacije, koje su neophodne za asimptotsku analizu ponašanja vjerovatnoće propasti pod uticajem difuzije. Specifičan oblik diferencijalne jednačine, koja se javlja u pretposlednjoj glavi zahtijeva Frobeniusov metod rješavanja, te se i on ukratko opisuje.

1.1 Relevantni pojmovi teorije vjerovatnoće

Skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta označava se sa Ω, a elementi skupa se nazivaju elementarnim događajima i označavaju sa ω.

DEFINICIJA 1.1 **(Aksioma σ-polja)** *Podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ je σ-polje (σ-algebra) nad Ω ako važe uslovi:*

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) *ako* $A \in \mathcal{F}$, *onda* $\overline{A} \in \mathcal{F}$,

(iii) *ako* $\{A_i, i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$, *onda* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

U nastavku se navodi aksiomatska definicija vjerovatnoće.

DEFINICIJA 1.2 **(Aksioma vjerovatnoće)** *Neka je Ω skup elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ-polje nad Ω. Funkcija $P : \mathcal{F} \mapsto [0,1]$ se zove vjerovatnoća na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako zadovoljava uslove*

(i) $P(\Omega) = 1$,

(ii) *Ako* $\{A_i, i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$, *onda*

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Prostor vjerovatnoća je uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je Ω skup svih elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ je σ-polje nad Ω, a P je vjerovatnoća na $(\Omega, \mathcal{F})$. U nastavku se uvodi pojam slučajne promjenljive, što omogućava prebacivanje izučavanja apstraktnog prostora vjerovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ na realnu pravu $\mathbb{R}$ sa bogatom matematičkom strukturom.

DEFINICIJA 1.3 *Preslikavanje $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je slučajna promjenljiva nad prostorom vjerovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ za svako $S \in \mathcal{B}$, gdje je $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelovo σ-polje. Ekvivalentno, kaže se da je X $\mathcal{F}$-mjerljivo.*

Kako je vjerovatnoća na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definisana za svaki skup iz $\mathcal{F}$ i kako

$X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ za svako $S \in \mathcal{B}$, to znači da je za svako $S \in \mathcal{B}$ definisana funkcija

$$P_X(S) = P\{X^{-1}(S)\} = P\{X \in S\}.$$

Ako je skup slika od X konačan skup riječ je o prostoj slučajnoj promjenljivoj. Slučajna promjenljiva X je diskretna ako je njen skup slika najviše prebrojiv skup.

DEFINICIJA 1.4 *Funkcija* $F_X(x) : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$ *definisana sa*

$$F_X(x) = P\{X \in (-\infty, x]\} = P\{X \leq x\},$$

naziva se funkcija raspodjele slučajne promjenljive X.

Funkcija raspodjele ima sledeće osobine

- $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0.$
- $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1.$
- Funkcija raspodjele je neopadajuća funkcija, tj. ako je $x_1 < x_2$, onda $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.
- Funkcija raspodjele je neprekidna sa desne strane, tj.

$$\lim_{x\to b^+} F_X(x) = F_X(b).$$

- $P\{a < X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a)$, za sve $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$.

DEFINICIJA 1.5 *Slučajna promjenljiva X je apsolutno neprekidnog tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija* $\varphi_X(x)$, $-\infty < x < \infty$, *takva da je, za svaki skup* $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P\{X \in S\} = \int_S \varphi_X(x)dx.$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ *zove se gustina raspodjele slučajne promjenljive X.*

Važi

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)dt, \text{ za svako } x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Odnosno, u svakoj tački neprekidnosti gustine φ_X važi

$$F'_X(x) = \varphi_X(x). \tag{1.2}$$

Može se pokazati da je za apsolutno neprekidnu slučajnu promjenljivu X sa gustinom $\varphi_X(x)$ očekivanje dato sa

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_X(x)dx.$$

Ukoliko je X nenegativna slučajna promjenljiva njeno očekivanje je

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} x\varphi_X(x)dx.$$

TEOREMA 1.1 *Neka je X nenegativna slučajna promjenljiva sa funkcijom raspodjele F_X i očekivanjem $E(X) < \infty$. Tada važi*

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(x))dx.$$

DOKAZ:
Ukoliko se iskoristi da je $\int_{x}^{\infty} dF_X(y) = 1 - F_X(x)$ traženo se lako pokazuje.

$$\int_{0}^{\infty} (1-F_X(x))dx = \int_{0}^{\infty}\int_{x}^{\infty} dF_X(y)dx = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{y} dxdF_X(y) = \int_{0}^{\infty} ydF_X(y) = E(X).$$

S obzirom da su u ovom poglavlju navedeni samo osnovni pojmovi i zaključci teorije vjerovatnoće koji se koriste u radu, čitalac se za više detalja upućuje na [15].

1.2 Relevantni pojmovi stohastičke analize

Neka se u svakom momentu t nekog vremenskog intervala $I \subset \mathbb{R}$ posmatra neka karakteristika X sistema i neka je ona slučajnog karaktera. Tada je $X_t(\omega)$ slučajna promjenljiva za svako $t \in I$. Skup svih slučajnih promjenljivih $\{X_t(\omega), t \in I\}$ se može tretirati kao slučajna veličina koja se mijenja u vremenu, odnosno to je jedna slučajna funkcija vremena. Familija $\{X_t(\omega), t \in I\}$ je stohastički proces[1].

[1] Iz [16].

DEFINICIJA 1.6 *Stohastički (slučajan) proces* $\{X_t(\omega), t \in I\}$ *je familija slučajnih promjenljivih definisanih na istom prostoru vjerovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Skup* I *se naziva indeksni ili parametarski skup, a realni prostor* $\mathbb{R}^d$ *skup stanja procesa.*

Za fiksirano $t_0 \in I$, $X_{t_0}(\omega)$ je slučajna promjenljiva, koja se zove zasjek ili sječenje procesa u trenutku t_0. Sa druge strane, ako se fiksira $\omega_0 \in \Omega$ dobija se realna funkcija definisana na I, $X_t(\omega_0) : I \mapsto \mathbb{R}^d$, koja se naziva trajektorija (realizacija) slučajnog procesa. U nastavku se oznaka ω (koja se podrazumijeva) izostavlja i piše se samo X_t.

1.2.1 Poissonov proces

DEFINICIJA 1.7 *Stohastički proces* $\{N_t, t \geq 0\}$ *je proces brojanja događaja ili proces prebrajanja ako* N_t *predstavlja broj događaja koji se dese u intervalu* $[0, t]$.

Jedan od najznačajnih procesa prebrajanja je Poissonov proces koji ima izuzetno široku primjenu, posebno u aktuarskoj matematici.

DEFINICIJA 1.8 *(Homogeni) Poissonov proces sa stopom rasta* $\lambda, \lambda > 0$ *je proces prebrajanja* $\{N_t, t \geq 0\}$ *za koji važi:*

(i) $N_0 = 0$ *skoro sigurno;*

(ii) Proces N_t *ima nezavisne priraštaje, tj. za svaki izbor* $0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n < \ldots$ *priraštaji* $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \ldots$ *su nezavisne slučajne promjenljive;*

(iii) Broj događaja u proizvoljnom vremenskom intervalu dužine t *ima Poissonovu raspodjelu sa parametrom* λt, *tj.*

$$P\{N_{s+t} - N_s = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad \textit{za svako } t \geq 0 \textit{ i } n \in \mathbb{N}_0.$$

Iz uslova (iii) slijedi da Poissonov proces ima stacionarne priraštaje, odnosno da raspodjela broja događaja koji se pojavljuju u bilo kom intervalu zavisi samo od dužine tog intervala, a ne zavisi od njegovog položaja na vremenskoj osi. Specijalno, za $s = 0$ važi sledeće

$$P\{N_t = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad tj.\ N_t : \mathcal{P}(\lambda t).$$

Pošto slučajna promjenljiva N_t ima Poissonovu raspodjelu sa parametrom $\lambda t,\ t \geq 0$ mogu se odrediti očekivanje i disperzija ovog procesa

$$E(N_t) = \lambda t,$$
$$D(N_t) = \lambda t.$$

Ako se sa V_i označi vrijeme koje protekne od pojave $(i-1)$-og do i-tog događaja, $i = 1, 2, \ldots$, niz vremena $V_1, V_2, \ldots$ se naziva nizom vremena zadržavanja u datom stanju. S obzirom da Poissonov proces ima nezavisne i stacionarne priraštaje dolazi se do zaključka da sve $V_i,\ i = 1, 2, \ldots$ imaju istu raspodjelu i međusobno su nezavisne, jer sa aspekta vjerovatnoće, proces može da počne iznova u bilo kom vremenskom trenutku. Važi da je

$$P\{V_1 > t\} = P\{N_t = 0\} = e^{-\lambda t},$$

odakle slijedi da je

$$F_{V_1}(t) = P\{V_1 \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \text{odnosno} \quad \varphi_{V_1}(t) = \frac{d}{dt}(1 - e^{-\lambda t}) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

To znači da $V_1 : \mathcal{E}(\lambda)$, pa se može definisati sledeće tvrđenje.

TEOREMA 1.2 *Neka je $\{N_t, t \geq 0\}$ Poissonov proces sa stopom rasta λ, a V_i vrijeme zadržavanja u datom stanju $i = 1, 2, \ldots$. Slučajne promjenljive V_i su nezavisne, jednako raspodijeljene slučajne promjenljive sa eksponencijalnom raspodjelom sa parametrom λ.*

Vrijeme pojavljivanja n-tog događaja T_n može se predstaviti kao

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} V_i, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

jer je $\{N_t, t \geq 0\}$ neprekidan stohastički proces. Dalje se može primijetiti da su sledeći događaji ekvivalentni

$$\{N_t = n\} \iff \{T_n \leq t\},$$

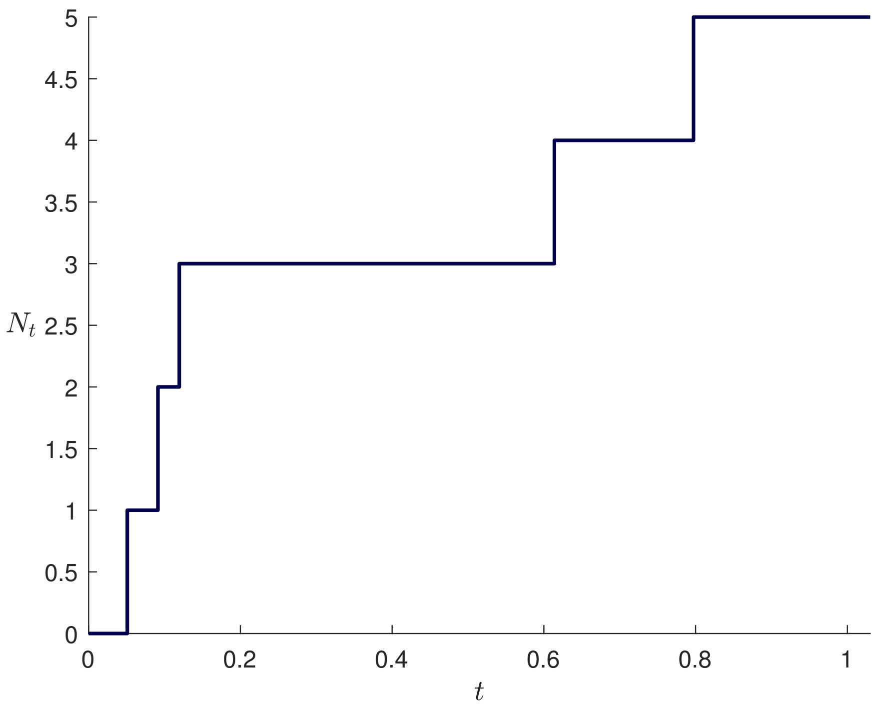
što omogućava alternativnu definiciju Poissonovog procesa.

TEOREMA 1.3 *Neka su $V_i : \mathcal{E}(\lambda),\ i = 1, 2, \ldots$ nezavisne slučajne promjenljive i neka je $T_0 := 0$ i*

$$T_n := \sum_{i=1}^{n} V_i, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ako se definiše $N_t = max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}$, onda je $\{N_t, t \geq 0\}$ Poissonov proces sa parametrom λ.

Na slici 1.1 je prikazana jedna realizacija Poissonovog procesa sa stopom rasta $\lambda = 5$.



Slika 1.1. Trajektorija Poissonovog procesa N_t sa intenzitetom $\lambda = 5$

Očekivano vrijeme zadržavanja u datom stanju je $\frac{1}{\lambda} = 0.2$, dok je visina skokova uvijek jednaka jedan.

Najčešće se u modelima koristi sledeće uopštenje Poissonovog procesa.

DEFINICIJA 1.9 *Neka je* $\{N_t, t \geq 0\}$ *Poissonov proces sa stopom rasta* λ, *a* $X_1, X_2, \ldots$ *nezavisne i jednako raspodijeljene slučajne promjenljive, koje su nezavisne od procesa* $\{N_t, t \geq 0\}$. *Stohastički proces* $\{S_t, t \geq 0\}$ *definisan kao*

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k, \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

gdje važi da je $S_t = 0$ *ako je* $N_t = 0$, *zove se složen Poissonov proces.*

Ovo je jedan od načina uopštavanja Poissonovog procesa, jer ukoliko bi važilo da su sve slučajne promjenljive X_k konstante i jednake 1, procesi N_t i S_t bi bili identični, tj. i S_t bi bio homogen Poissonov proces. Preostaje da se odredi očekivanje i disperzija slučajne promjenljive S_t.

TEOREMA 1.4 *Očekivanje i disperzija slučajne promjenljive* S_t *date sa* (1.3) *su oblika:*

$$E(S_t) = E(N_t)E(X) = \lambda t E(X) \tag{1.4}$$

$$D(S_t) = E(N_t)D(X) + D(N_t)E^2(X) = \lambda t E(X^2) \tag{1.5}$$

Pošto su slučajne promjenljive X_k nezavisne i imaju istu raspodjelu, svejedno je da li u gore navedenim formulama piše X_1 ili X_{10}, te se indeks izostavlja i sa X označava njihov predstavnik.

DOKAZ:
Za pokazivanje prve jednakosti se polazi od formule za uslovno očekivanje

$$E(S_t) = E\left(\sum_{k=1}^{N_t} X_k\right) = E\left(E\left(\sum_{k=1}^{N_t} X_k | N_t\right)\right)$$

Dalje se koristi nezavisnost N_t od X_k-ova, što se zapisuje na sledeći način

$$E\left(\sum_{k=1}^{N_t} X_k | N_t = n\right) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = nE(X),$$

i dolazi do jednakosti

$$E\left(\sum_{k=1}^{N_t} X_k | N_t\right) = N_t E(X).$$

Slijedi da je

$$E(S_t) = E\left(E\left(\sum_{k=1}^{N_t} X_k | N_t\right)\right) = E(N_t E(X)) = E(N_t)E(X) = \lambda t E(X).$$

Jednakost za disperziju se dokazuje na sličan način, ali je sada neophodno iskoristiti i činjenicu da su slučajne promjeljive X_k nezavisne. Polazeći od dekompozicije varijanse

$$D(X) = E(D(X|Y)) + D(E(X|Y))$$

dobija se

$$D(S_t) = D\left(\sum_{k=1}^{N_t} X_k\right) = E\left(D\left(\sum_{k=1}^{N_t} X_k | N_t\right)\right) + D\left(E\left(\sum_{k=1}^{N_t} X_k | N_t\right)\right).$$

Slično

$$D\left(\sum_{k=1}^{N_t} X_k | N_t = n\right) = D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \overset{\text{nez}}{=} nD(X),$$

što implicira

$$D\left(\sum_{k=1}^{N_t} X_k | N_t\right) = N_t D(X).$$

Uvrštavanjem se dobija

$$\begin{aligned} D(S_t) &= E(N_t D(X)) + D(N_t E(X)) \\ &= E(N_t)D(X) + D(N_t)E^2(X) \\ &= \lambda t(D(X) + E^2(X)) \\ &= \lambda t E(X^2). \end{aligned}$$

Lako se može odrediti funkcija generatrisa momenata slučajne promjenljive S_t. Neka je funkcija generatrisa momenata slučajne promjenljive X data sa

$$M_X(s) = E(e^{sX}).$$

Koristeći činjenicu da su X_k nezavisne od N_t i međusobno nezavisne i jednako raspodijeljene slijedi

$$\begin{aligned} M_{S_t}(s) &= E\left(e^{sS_t}\right) = E\left(e^{s(X_1+\dots X_{N_t})}\right) \\ &= E\left(E\left(e^{s(X_1+\dots X_{N_t})}|N_t\right)\right) \\ &= E\left(\prod_{k=1}^{N_t} E(e^{sX_k})\right) = E\left((M_X(s))^{N_t}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}(M_X(s))^n \\ &= e^{-\lambda t}e^{M_X(s)\lambda t} \\ &= e^{\lambda t(M_X(s)-1)}. \end{aligned}$$

Dakle, funkcija generatrisa momenata složene Poissonove slučajne promjenljive je data formulom

$$M_{S_t}(s) = e^{\lambda t(M_X(s)-1)}. \tag{1.6}$$

1.2.2 Proces difuzije

Procesi difuzije se koriste za opis stohastičkih osobina cijena akcija ili kamatnih stopa.

DEFINICIJA 1.10 *Slučajan proces* $\{X_t, t \geq 0\}$ *je Brownovo kretanje sa driftom* η *i volatilnošću* $\sigma > 0$ *ako važi*

(i) $X_0 = 0$ *skoro sigurno;*

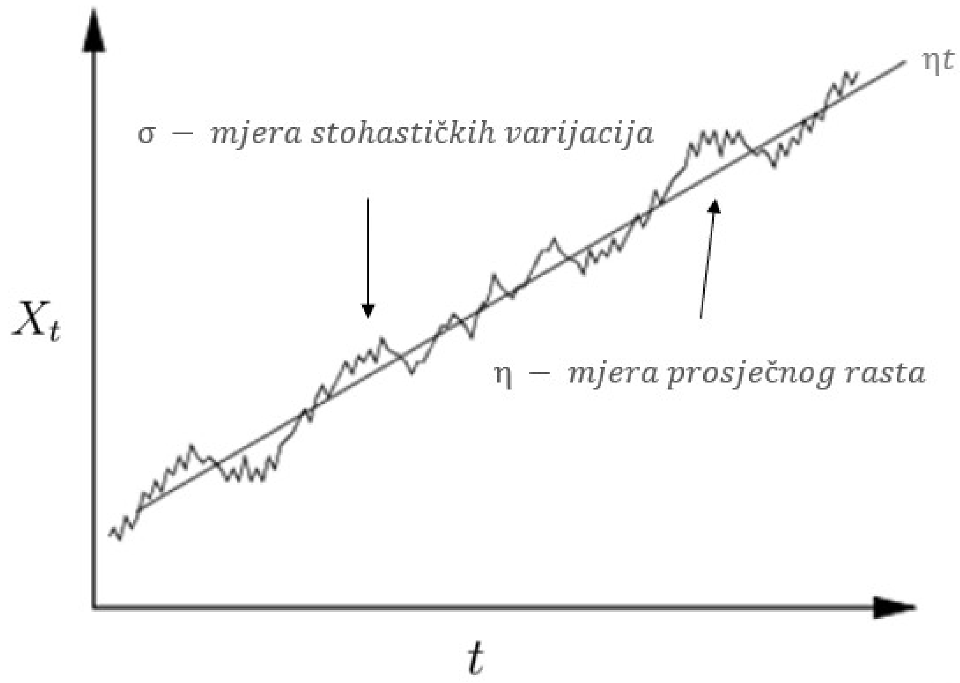
(ii) Proces X_t *ima nezavisne i stacionarne priraštaje;*

(iii) $X_t : \mathcal{N}(\eta t, \sigma^2 t), \quad t \geq 0.$

Parametar σ^2 se naziva i koeficijent difuzije. Specijalno, za $\eta = 0$ i $\sigma = 1$ se dobija standardno Brownovo kretanje W_t. Brownovo kretanje sa driftom se može zapisati pomoću standardnog Brownovog kretanja kao

$$X_t = \eta t + \sigma W_t.$$

Slika 1.2 ilustruje parametre Brownovog kretanja.



Slika 1.2. Parametri Brownovog kretanja sa driftom

DEFINICIJA 1.11 *Geometrijsko Brownovo kretanje* $\{S_t, t \geq 0\}$ *sa driftom* η *i volatilnošću* $\sigma > 0$ *se definiše kao*

$$S_t = e^{\left(\eta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t},$$

gdje je W_t *standardno Brownovo kretanje.*

Geometrijsko Brownovo kretanje S_t zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$dS_t = \eta S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{1.7}$$

Promjena proizvoljnog procesa difuzije tokom vremena se modelira stohastičkom diferencijalnom jednačinom sledećeg oblika

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t.$$

TEOREMA 1.5 **(Itôva lema)** *Neka je $f(t,x)$ dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija na $[0,\infty)\times\mathbb{R}$, tj. $f(t,x)\in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R})$. Neka je stohastički proces X_t dat svojim stohastičkim diferencijalom $dX_t = a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dW_t$. Tada je stohastički proces $Y_t = f(t,X_t)$ takođe proces difuzije i njegov stohastički diferencijal je dat sa*

$$dY_t = \left(f_t(t,X_t) + f_x(t,X_t)a(t,X_t) + \frac{f_{xx}(t,X_t)b^2(t,X_t)}{2}\right)dt + f_x(t,X_t)b(t,X_t)dW_t.$$

Ukoliko se Itôva teorema primijeni na geometrijsko Brownovo kretanje ($a(t,S_t) = \eta S_t$, $b(t,S_t) = \sigma S_t$) i funkciju $f(t,x) = lnx$ dobija se

$$d(lnS_t) = \left(\eta - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t.$$

Kada se prethodna formula integrali na $[0,t]$, geometrijsko Brownovo kretanje se može zapisati kao

$$S_t = S_0 e^{\left(\eta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}.$$

U definiciji 1.11 važi da je $S_0 = 1$, te proces kreće od jedinice. Stoga se dodaje početna vrijednost S_0, kako bi proces kretao iz te vrijednosti.

Za određivanje očekivanja i varijanse procesa S_t koristi se da $W_t : \mathcal{N}(0,t)$ i dobija

$$E(S_t) = S_0 e^{\eta t}, \qquad D(S_t) = S_0^2 e^{2\eta t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right).$$

1.3 Laplaceova transformacija i Stieltjes integrali

Laplaceova transformacija predstavlja jako koristan alat za analizu vjerovatnoće propasti.

DEFINICIJA 1.12 **(Laplaceova transformacija)** *Neka je funkcija $g(x)$ definisana za sve $x \geq 0$. Laplaceova transformacija $\widehat{g}$ funkcije g se definiše kao*

$$\widehat{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} g(x)dx,$$

za one $s > 0$, za koje integral konvergira.

Ako je funkcija $g(x)$ dio po dio neprekidna na $[0, \infty)$ i eksponencijalno ograničena (postoje konstante $M > 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ da za neko $x_0 \geq 0$ važi $|g(x)| \leq Me^{\alpha x}$, $x \geq x_0$) tada Laplaceova transformacija $\widehat{g}(s)$ postoji za $Re(s) > \alpha$. U nastavku se navodi nekoliko osobina Laplaceove transformacije koje će biti korišćene u radu.[2]

LEMA 1.1 **(Osobine Laplaceove transformacije)** *Osobine se izvode pod pretpostavkom da odgovarajuće Laplaceove transformacije postoje.*

(i) ***(Linearnost)*** *Neka su α i β konstante, te f_1 i f_2 funkcije, tada*

$$\widehat{\alpha f_1 + \beta f_2}(s) = \alpha \widehat{f_1}(s) + \beta \widehat{f_2}(s).$$

(ii)

$$\widehat{f^{(n)}}(s) = s^n \widehat{f}(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(i-1)}(0).$$

(iii)

$$\widehat{x^n f(x)}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \widehat{f}(s) = (-1)^n \widehat{f}^{(n)}(s).$$

Značajan pojam predstavljaju i funkcije ograničene varijacije.

DEFINICIJA 1.13 **(Funkcija ograničene varijacije)** *Neka je $f : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ kompleksna funkcija definisana na $[a, b]$. Za datu podjelu $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ razmatra se veličina*

$$V(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Supremum svih takvih veličina, uzet po svim podjelama $\mathcal{P}$ intervala $[a, b]$ zove se varijacija funkcije f na intervalu $[a, b]$ i označava sa $V(f)$. Dakle,

$$V(f) = \sup_{\mathcal{P}} V(f, \mathcal{P})$$

i važi $0 \leq V(f) \leq \infty$. Ukoliko je $V(f) < \infty$ za funkciju f se kaže da je ograničene varijacije na intervalu $[a, b]$.

Svaka realna monotona funkcija na intervalu $[a, b]$ je funkcija ograničene varijacije na $[a, b]$ $(V(f) = |f(b) - f(a)|)$.

[2]Više o Laplaceovoj transformaciji i dokazi osobina se mogu pronaći u [18].

Da bi se na jedinstven način mogao prikazati račun za diskretne i apsolutno neprekidne slučajne promjenljive, umjesto da se razmatraju odvojeni slučajevi, uvodi se pojam Riemann-Stieltjesovog integrala[3].

DEFINICIJA 1.14 **(Riemann-Stieltjesov integral)** *Neka je realna funkcija g ograničena na $[a,b]$ i funkcija F funkcija raspodjele na $[a,b]$ (realna, neopadajuća i ograničena na $[a,b]$). Neka je $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ podjela intervala $[a,b]$, c_i proizvoljno izabrane tačke intervala $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ i $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$. Neka je $\delta_\mathcal{P}$ maksimalna dužina intervala podjele, tj.*

$$\delta_\mathcal{P} = \max\{x_k - x_{k-1} : k = 1, \ldots, n\}.$$

Suma

$$S(g, F, \mathcal{P}, \mathcal{C}) = \sum_{k=1}^{n} g(c_k)\left(F(x_k) - F(x_k - 1)\right)$$

se naziva Riemannova suma funkcije g u odnosu na funkciju F.

Ako postoji granična vrijednost Riemannove sume kada $\delta_\mathcal{P} \to 0$ ($\lim\limits_{\delta_\mathcal{P} \to 0} S(g, F, \mathcal{P}, \mathcal{C}) = I$), odnosno ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svaku podjelu $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ intervala $[a,b]$ za koju je $\delta_\mathcal{P} < \delta$ i svaki izbor tačaka $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$ važi da je

$$\Big| S(g, F, \mathcal{P}, \mathcal{C}) - I \Big| < \varepsilon,$$

onda se kaže da je funkcija g Riemann-Stieltjes integrabilna u odnosu na F na intervalu $[a,b]$.

Broj I se naziva Riemann-Stieltjesov integral funkcije g u odnosu na F i označava sa

$$\int_a^b g(x) dF(x).$$

Poznato je da ukoliko je funkcija g neprekidna i funkcija F ograničene varijacije na intervalu $[a,b]$ tada Riemann-Stieltjesov integral $\int_a^b g(x)dF(x)$ postoji. Specijalno, za $F(x) = x$ dobija se Riemannov integral i jasno je da je Riemann-Stieltjesov integral uopštenje Riemannovog intregala. Ukoliko funkcija F ima neprekidan izvod na $[a,b]$

[3]Za više detalja o funkcijama ograničene varijacije i Riemann-Stieltjesovim integralima pogledati [4] i [11].

važi

$$\int_a^b g(x)dF(x) = \int_a^b g(x)F'(x)dx.$$

Primjena Riemann-Stieltjesovog integrala u teoriji vjerovatnoće može se objasniti na sledeći način. Diskretna slučajna promjenljiva X prima najviše prebrojivo mnogo vrijednosti $x_1, x_2, \ldots$. Ako je $p_i = P\{X = x_i\}$ onda se funkcija raspodjele može zapisati na sledeći način

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$

U apsolutno neprekidnom slučaju se funkcija raspodjele dobija kao

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)dt.$$

Očekivanje slučajne promjenljive je dato sa

$$E(X) = \sum_i x_i p_i \qquad\qquad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_X(x)dx,$$

za diskretan i apsolutno neprekidan slučaj, respektivno. Korišćenjem Riemann-Stieltjesovog integrala se očekivanje može zapisati kao

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xdF_X(x),$$

čim su oba slučaja obuhvaćena. Slično se može zapisati i očekivanje transformacije slučajne promjenljive $g(X)$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_X(x).$$

Integral koji se definiše u nastavku je usko vezan za Riemann-Stieltjesov integral i Laplaceovu transformaciju.

DEFINICIJA 1.15 **(Laplace-Stieltjesov integral)** *Integral*

$$I(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}dG(x) = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-sx}dG(x),$$

gdje je funkcija $G(x)$ ograničene varijacije na $0 \leq x \leq R$, za sve pozitivne R, se naziva Laplace-Stieltjesov integral.

S obzirom da je funkcija $g_s(x) = e^{-sx}$ neprekidna za svaki kompleksan broj s, navedeni integral je dobro definisan. Ukoliko integral $I(s)$ konvergira za neki kompleksan broj s_0, onda konvergira za sve s takve da je $Re(s) > Re(s_0)$ i funkcija $I(s)$ je Laplace-Stieltjesova transformacija funkcije G.

DEFINICIJA 1.16 **(Laplace-Stieltjesova transformacija)** *Neka je funkcija $G(x)$ definisana za $x \geq 0$ ograničene varijacije i neprekidna sa desne strane. Laplace-Stieltjesova transformacija $\widetilde{G}$ funkcije G se definiše kao*

$$\widetilde{G}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x),$$

za one $s > 0$, za koje integral konvergira.

Neka su X i Y nezavisne slučajne promjenljive sa funkcijama raspodjele F_X i F_Y. Funkcija raspodjele zbira $X+Y$, F_{X+Y} se može zapisati kao

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(z) = P\{X+Y \leq z\} &= \iint\limits_{x+y\leq z} dF_{(X,Y)}(x,y) \\ &\overset{\text{nez}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{z-y} dF_X(x)}_{(1.1)} dF_Y(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y) dF_Y(y). \end{aligned}$$

DEFINICIJA 1.17 **(Stieltjes konvolucija)** *Stieltjes konvolucija funkcije F na $\mathbb{R}$ u odnosu na funkciju G na $[0,\infty)$ se definiše kao*

$$(F * G)(z) = \int_0^\infty F(z-y) dG(y).$$

Dakle, Stieltjes konvolucija predstavlja funkciju raspodjele zbira nezavisnih slučajnih promjenljivih, čije su funkcije raspodjele F i G. Ukoliko se traži funkcija raspodjele zbira n nezavisnih, jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih sa funkcijom raspodjele F riječ je o n-tom konvolucionom stepenu

$$P\{\sum_{i=1}^n X_i \leq x\} = F^{*n}(x) := (F^{*(n-1)} * F)(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je $F^{*1}(x) = F(x)$ i $F^{*0} = 1$ za $x \geq 0$.

Ako su X i Y nezavisne, nenegativne slučajne promjenljive sa funkcijama raspodjele F i G, konvolucija ima sledeći oblik

$$(F * G)(z) = \int_0^z F(z-y)dG(y).$$

Važna osobina Laplaceove transformacije je da konvoluciju prevodi u proizvod. Promjenom redoslijeda integracije i uvođenjem smjene $t = u - x$ lako se pokazuje

$$\begin{aligned}
\widehat{(f * G)}(s) &= \int_0^\infty e^{-su}(f * G)(u)du = \int_0^\infty e^{-su} \int_0^u f(u-x)dG(x)du \\
&= \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-s(u-x)} f(u-x)due^{-sx}dG(x) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(t)dte^{-sx}dG(x) \\
&= \widehat{f}(s) \int_0^\infty e^{-sx}dG(x) = \widehat{f}(s)\widetilde{G}(s).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

1.4 Teorija regularne varijacije

U ovom poglavlju se navode neke osnovne teoreme teorije regularne varijacije koje su nephodne za asimptotsku analizu vjerovatnoće propasti pod uticajem difuzije.

TEOREMA 1.6 **(Karamata-Tauberova teorema)** *Neka je G neopadajuća funkcija, neprekidna sa desne strane i definisana na $[0, \infty)$. Ako je $L(u)$ sporo varirajuća funkcija, tj. $L(\alpha u) \sim L(u)$, $u \to \infty$, za sve $\alpha > 0$ i $c \geq 0$, $p \geq 0$, onda su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(i) $G(u) \sim \dfrac{cL(u)}{\Gamma(p+1)} u^p, \quad u \to \infty,$

(ii) $\widetilde{G}(s) \sim cL\left(\dfrac{1}{s}\right) s^{-p}, \quad s \to 0,$

gdje je $\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x} dx$ i $\widetilde{G}$ Laplace-Stieltjesova transformacija funkcije G.

TEOREMA 1.7 **(Teorema o monotonoj gustini)** *Neka je* $G(x) = \int_0^x g(t)dt$, *gdje je* g *monotona na* (y, ∞) *za neko* $y > 0$. *Ako*

$$G(u) \sim cL(u)u^p, \quad u \to \infty,$$

pri čemu je $c \geq 0,\ p \geq 0$ *i* L *sporo varirajuća funkcija, onda*

$$g(u) \sim cpL(u)u^{p-1}, \quad u \to \infty.$$

O asimptotskom osobinama Laplaceove transformacije funkcije govori Heavisideov operacioni princip.[4]

TEOREMA 1.8 **(Heavisideov operacioni princip)** *Neka funkcija* $g(u)$ *ima Laplaceovu transformaciju* $\widehat{g}(s)$ *sa krajnjim desnim singularitetom* $-s^*$ *i asimptotskom ekspanzijom*

$$\widehat{g}(s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(s+s^*)^k + \widehat{f}(s), \quad s \to -s^*,$$

gdje je $\widehat{f}(s)$ *Laplaceova transformacija funkcije* $f(u)$. *Tada* $g(u) \sim f(u),\ u \to \infty$.

U opštem slučaju, singularna tačka funkcije je tačka u kojoj funkcija nije definisana (ili nije neprekidna ili diferencijabilna). Singularitet ili singularna tačka kompleksne funkcije je tačka u kojoj funkcija nije analitička. Ako je $-s^* = -\infty$ funkcija $\widehat{g}(s)$ je analitička svuda. Ideja navedenog principa je da prvi član asimptotske ekspanzije, pošto je analitička funkcija, ne doprinosi asimptotici u realnom domenu.

1.5 Frobeniusov metod

Posmatra se linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa nekonstantnim koeficijentima

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0. \tag{1.9}$$

Kada su koeficijenti jednačine (1.9) polinomi, $x = x_0$ je regularno-singularna tačka ukoliko $a(x_0) = 0$ i

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\frac{b(x)}{a(x)}, \quad \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \frac{c(x)}{a(x)}$$

[4] Iz [1].

su konačne vrijednosti. Frobeniusov metod se primjenjuje za rješavanje diferencijalne jednačine u okolini regularno-singularne tačke. Ukoliko je $x = x_0$ regularno-singularna tačka jednačine (1.9) ista se može zapisati kao

$$(x-x_0)^2\widetilde{a}(x)y''(x) + (x-x_0)\widetilde{b}(x)y'(x) + \widetilde{c}(x)y(x) = 0,$$

gdje su $\widetilde{a}(x)$, $\widetilde{b}(x)$, $\widetilde{c}(x)$ polinomi i $\widetilde{a}(x_0) \neq 0$. Često se koristi i sledeći zapis

$$(x-x_0)^2y''(x) + (x-x_0)p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,$$

pri čemu je $p(x) = \frac{\widetilde{b}(x)}{\widetilde{a}(x)}$ i $q(x) = \frac{\widetilde{c}(x)}{\widetilde{a}(x)}$. Rješenje jednačine se traži u obliku

$$y(x) = (x-x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k (x-x_0)^k, \quad \delta_0 \neq 0,\ x > x_0, \tag{1.10}$$

gdje je r rješenje takozvane indeksne jednačine

$$r^2 + (p(x_0) - 1)r + q(x_0) = 0.$$

Diferenciranjem (1.10) se dobija

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)\delta_k(x-x_0)^{k+r-1} \\ y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)\delta_k(x-x_0)^{k+r-2}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u jednačinu (1.9) se dolazi do indeksne jednačine i rekurentne veze za koeficijente δ_k (mogu se izraziti preko δ_0). U zavisnosti od rješenja indeksne jednačine, r_1 i r_2 razlikuje se nekoliko slučajeva:
Neka $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ i $r_1 \geq r_2$.

- $(r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}_0)$ Rješenja su

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (x-x_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{1,k}(x-x_0)^k, \\ y_2(x) &= (x-x_0)^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{2,k}(x-x_0)^k. \end{aligned}$$

- $(r_1 - r_2 \in \mathbb{N}_0)$ Rješenja su

$$y_1(x) = (x - x_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{1,k}(x - x_0)^k,$$
$$y_2(x) = (x - x_0)^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{2,k}(x - x_0)^k + cy_1(x)ln(x).$$

Ako $r_1 = \overline{r}_2 \in \mathbb{C}$, rješenja su

$$y(x) = (x - x_0)^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k(x - x_0)^k$$
$$y_1(x) = Re(y(x))$$
$$y_2(x) = Im(y(x)).$$

Više o Frobeniusovom metodu za rješavanje diferencijalnih jednačina, kao i odgovarajući primjeri se može naći u [19].

2

Cramér-Lundbergov model rizika

Teorija propasti ili teorija rizika ima značajnu primjenu u neživotnom osiguranju, gdje koristeći matematičke modele opisuje tok kapitala osiguravajuće kompanije, kao i njenu sposobnost da izbjegne propast. Počeci teorije propasti se vezuju za švedskog aktuara Filipa Lundberga, koji je 1903. godine uveo model rizika koji se bazira na složenom Poissonovom procesu, i Haralda Craméra, koji je usavršio njegove ideje 1930-ih godina.

Da bi se mogao konstruisati adekvatan model, neophodno je poznavati osnove poslovanja osiguravajuće kompanije. Na slici 2.1 je dat uprošćen prikaz poslovanja, te su predstavljeni i osnovni tokovi kapitala.

Slika 2.1. Ilustracija poslovanja osiguravajuće kompanije

Osiguravajuće društvo, koje polazi sa određenom količinom početnih rezervi, eliminiše sve vrste rizika sa kojim se njegovi klijenti suočavaju tako što pokriva njihove gubitke, ukoliko nastanu. Klijenti zauzvrat plaćaju određenu kompenzaciju, premiju. Da bi osiguravajuća kompanija opstala neophodno je da prosječni gubici na osnovu zahtjeva budu manji od prosječnih dobitaka od premija.

Modeli rizika objašnjavaju odnose između početnih rezervi, premija i zahtjeva, kao i višak koji nastaje tokom poslovanja kompanije, a zatim daju i načine za izračunavanje rizika, potrebnih premija i rezervi. Rizik se odnosi na mogućnost da kapital osiguravajuće kompanije postane negativan, što se karakteriše kao propast. Mjera rizika je vjerovatnoća propasti, koja je glavni predmet analize u modelima rizika. Ona se koristi za donošenje odluka, za proračunavanje premija ili određivanje nivoa rizika koji je kompanija spremna da preuzme, te kao takva predstavlja neizostavnu stavku aktuarske analize. Vjerovatnoća propasti se posmatra kao funkcija početnih rezervi osiguravajuće kompanije. Minimalan iznos početnog kapitala osiguravajućeg društva je propisan Zakonom o osiguranju, u Republici Srbiji za neživotno osiguranje je 3.2 miliona evra[1], a u Republici Srpskoj milion evra[2].

Klasičan model, koji su uveli Lundberg i Cramér 1900-ih godina, bez obzira što je nedovoljno realističan i dalje daje uvid u mnoge fenomene procesa rizika. Nametanjem specifičnih uslova na raspodjelu iznosa šteta Cramér dolazi do zaključka da vjerovatnoća propasti eksponencijalno opada kako rastu početne rezerve. Kada su narušeni ti uslovi ponašanje vjerovatnoće propasti se drastično mijenja, posebno u prisustvu velikih šteta. O slučaju subeksponencijalnih iznosa šteta u svojim radovima govore Embrechts i Mikosch 1980-ih godina. Dolaze do zaključka da ovako modelirani iznosi šteta predstavljaju mnogo veću opasnost za poslovanje osiguravajuće kompanije i da nekoliko izrazito velikih zahtjeva dovodi do propasti. Uopštavanjem klasičnog modela se dolazi do Sparre Andersenovog modela rizika, gdje je Poissonov proces zamijenjen procesom obnavljanja. Kraj 20. vijeka su obilježili radovi u kojima se razmatraju razne perturbacije klasičnog modela, posebno komponentama difuzije.

U ovoj glavi se čitalac upoznaje sa osnovnom notacijom teorije propasti i izlaže se njen glavni zadatak: izračunavanje ili aproksimacija vjerovatnoće propasti. Predstavljen je standardni model rizika, klasičan Cramér-Lundbergov model koji složenim Poissonovim procesom modelira ukupne zahtjeve za odštetu na bilo kom vremenskom

[1]Zakon o osiguranju, član 27, tačka 3, ,,Službeni glasnik RS" br. 139/2014 i 44/2021
[2]Zakon o društvima za osiguranje, član 49, tačka b, ,,Službeni glasnik RS" br. 17/05

intervalu, dok za premije pretpostavlja da pristižu linearno sa vremenom. To je jedan od najjednostavnijih, ali ujedno i najkorisnijih modela u matematici neživotnog osiguranja. Uvodi se proces viška $\{U_t, t \geq 0\}$, koji sadrži potrebne informacije za procjenu sposobnosti preživljavanja osiguravajuće kompanije. U zavisnosti od raspodjele iznosa šteta moguće je doći do različitih aproksimacija vjerovatnoće propasti, te se odvojeno posmatraju slučajevi kada raspodjele iznosa šteta imaju lak rep (mali iznosi šteta) i težak rep (veliki iznosi šteta). Pod pretpostavkom malih iznosa šteta vjerovatnoća propasti se ponaša kao opadajuća eksponencijalna funkcija, te se uz velike početne rezerve rizik od propasti znatno smanjuje. To nije slučaj kada je riječ o velikim iznosima šteta, gdje se vjerovatnoća propasti ponaša kao rep integrala repa raspodjele iznosa zahtjeva.

2.1 Osnovni pojmovi i pretpostavke modela

Klasičan model rizika opisuje stanje osiguravajuće kompanije pomoću stohastičkog procesa $\{U_t, t \geq 0\}$, pri čemu je U_t višak (količina novca) kojim kompanija raspolaže u trenutku t. Finansijsko stanje osiguravajućeg društva, najjednostavnije gledano, zavisi od početnih rezervi, naplaćenih premija i isplaćenih zahtjeva za odštetu. Pretpostavlja se da kompanija u trenutku $t = 0$ raspolaže početnim kapitalom $u \geq 0$, odnosno $U_0 = u$. Radi jednostavnosti, prihod od premija obično se smatra determinističkim i pretpostavlja se da se premije naplaćuju po konstantnoj stopi $c > 0$, tako da je u intervalu $[0, t]$ na ime premija naplaćeno ukupno ct.

Neka je $\{N_t, t \geq 0\}$ proces prebrajanja takav da N_t modelira broj pristiglih zahtjeva za odštetu do trenutka t. Iznosi pojedinačnih zahtjeva su modelirani kao niz nenegativnih, nezavisnih slučajnih promjenljivih sa istom raspodjelom, gdje X_i predstavlja iznos i-te štete. Ukupan iznos šteta u intervalu $[0, t]$ se može zapisati kao

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

uz $S_t = 0$ kada je $N_t = 0$.

Proces viška $\{U_t, t \geq 0\}$ se definiše kao

$$U_t = u + ct - S_t, \quad t \geq 0. \tag{2.1}$$

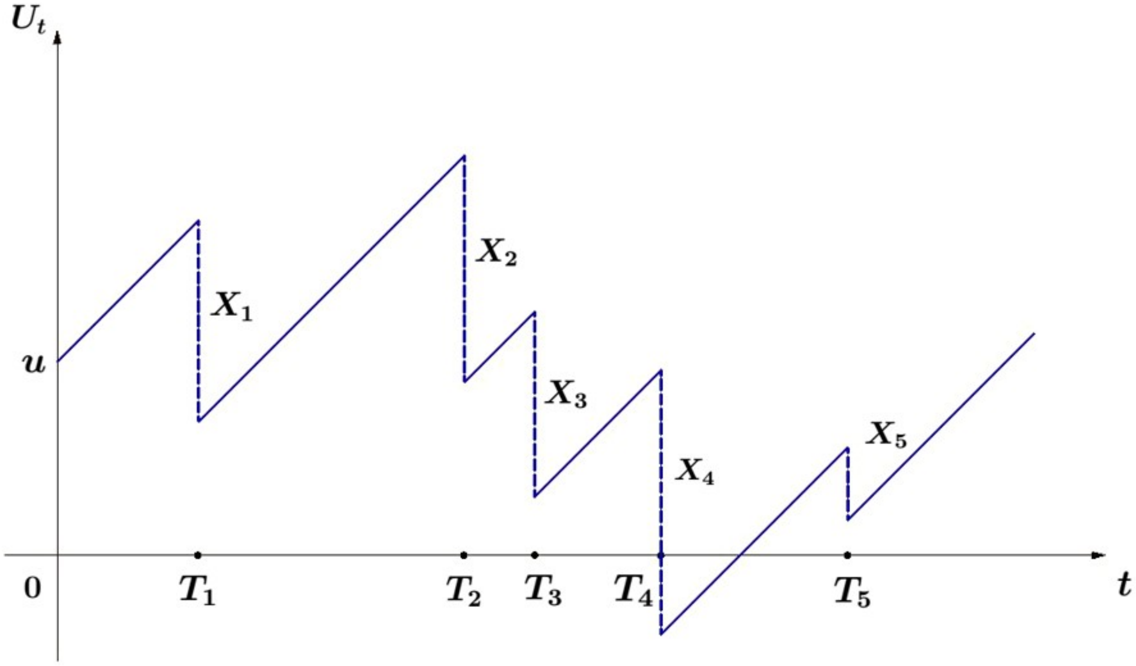
U Cramér-Lundbergovom modelu rizika se pretpostavlja da je $\{N_t, t \geq 0\}$ Poissonov proces sa stopom rasta $\lambda > 0$. Zahtjevi pristižu u trenucima T_i, koji se nazivaju trenucima isplate (trenucima dospijeća zahtjeva) i za koje važi $0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_{N_t}$. Ako se sa $V_i = T_i - T_{i-1}$ označi vrijeme čekanja između $(i-1)$-e i i-te isplate, $i = 1, 2, \ldots$, niz $V_1, V_2, \ldots$ predstavlja niz vremena zadržavanja u datom stanju. Poznato je da tada slučajne promjenljive V_i imaju eksponencijalnu raspodjelu sa parametrom λ.

Sledeća pretpostavka je da je niz pojedinačnih iznosa šteta X_i, $i = 1, 2, \ldots$ nezavisan od procesa N_t. Funkcija raspodjele individualnih šteta označava se sa F_X, a odgovarajuća funkcija gustine sa φ_X. Sa μ_j se označava j-ti momenat individualnih zahtjeva, $\mu_j = E(X_i^j)$. Radi jednostavnosti se uzima $\mu = \mu_1$, te se pretpostavlja da je $\mu < \infty$, jer u suprotnom nijedna osiguravajuća kuća ne bi prihvatila takav rizik, s obzirom da bi očekivani iznos individualnih šteta bio beskonačan.

Iz pretpostavki o procesu N_t i slučajnim promjenljivim X_i i iz definicije S_t izvodi se zaključak da je proces ukupnih iznosa zahtjeva za odštetu $\{S_t, t \geq 0\}$ složen Poissonov proces i važi da je očekivani iznos ukupnih isplata do trenutka t

$$E(S_t) = E(N_t)E(X) = \lambda t \mu.$$

Na slici 2.2 prikazana je jedna trajektorija (realizacija) procesa viška U_t. U trenutku $t = 0$ višak je jednak početnim rezervama u, zatim se linearno povećava sa stopom c do trenutka $t = T_1$ kada pristiže prvi zahtjev i kapital se umanjuje za iznos X_1. U trenutku T_4 su ukupni zahtjevi za odštetu veći od početnih rezervi uvećanih za premije, $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 > u + cT_4$, pa trajektorija procesa viška pada ispod nule što se definiše kao bankrot.

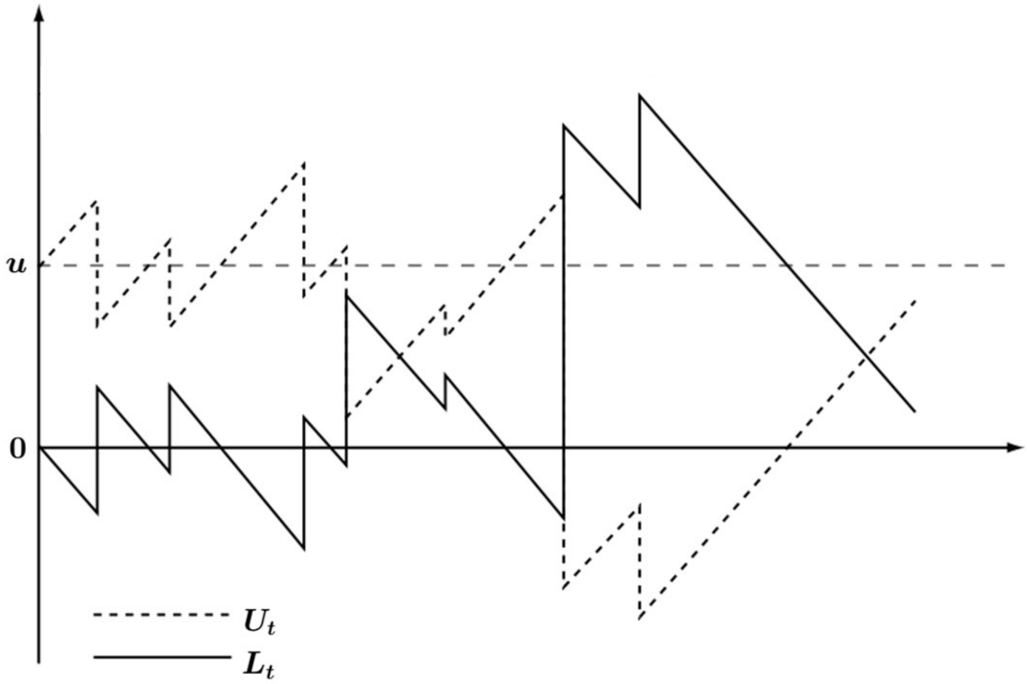


Slika 2.2. Primjer trajektorije procesa viška U_t

Sa matematičkog aspekta često je zgodnije raditi sa ukupnim procesom gubitka $\{L_t, t \geq 0\}$ koji se definiše kao

$$L_t = u - U_t = St - ct, \quad t \geq 0. \tag{2.2}$$

Dakle, ukupan gubitak u trenutku t, L_t, je iznos za koji ukupni zahtjevi prevazilaze premije sakupljene do tog trenutka. Slika 2.3 prikazuje trajektorije procesa viška $\{U_t, t \geq 0\}$ i procesa ukupnog gubitka $\{L_t, t \geq 0\}$, kao i vezu između ova dva procesa.



Slika 2.3. Trajektorija procesa viška U_t i procesa ukupnog gubitka L_t

Ukoliko u nekom trenutku do tada naplaćene premije zajedno sa početnim rezervama nisu dovoljne za pokriće svih dotadašnjih šteta, riječ je o propasti osiguravajuće kompanije. Jasno, propast se javlja u momentu kada $U_t < 0$, odnosno kada $L_t > u$ i stoga se trenutak propasti definiše kao najraniji trenutak u kome proces rizika U_t postiže negativnu vrijednost

$$\begin{aligned}\tau(u) &= \inf\{t \geq 0 : U_t < 0 | U_0 = u\} \\ &= \inf\{t \geq 0 : L_t > u\}\end{aligned}$$

uz $\inf \emptyset = \infty$, tj. $\tau(u) = \infty$ ako je $U_t \geq 0$ ($L_t \leq u$) $\forall t$. Trenutak propasti je defektna slučajna promjenljiva (funkcija raspodjele ne teži 1), jer je $P\{\tau(u) = \infty\} > 0$.

Glavni zadatak modela jeste pronalaženje vjerovatnoće propasti na beskonačnom vremenskom horizontu, koja se definiše kao

$$\begin{aligned}\psi(u) &= P\{U_t < 0, \exists t \in [0, \infty) | U_0 = u\} \\ &= P\{\sup_{t \geq 0} L_t > u\} \\ &= P\{\tau(u) < \infty\}.\end{aligned}$$

Nasuprot vjerovatnoći propasti se definiše vjerovatnoća preživljavanja $\phi(u)$ kao vjerovatnoća da se propast ne desi uz početni kapital u, odnosno

$$\begin{aligned}\phi(u) &= 1 - \psi(u)\\ &= P\{U_t \geq 0, \forall t \in [0, \infty) | U_0 = u\}.\end{aligned}$$

Sa stanovišta osiguravajuće kompanije poželjno je da vjerovatnoća propasti bude što niža, ili bar ispod neke određene granice. Uprkos jednostavnosti Cramér-Lundbergovog modela, vjerovatnoća propasti se najčešće teško izračunava. Samo za određene oblike raspodjela iznosa šteta su poznati eksplicitni izrazi, dok se inače mogu dobiti najviše aproksimacije ili asimptotske ocjene vjerovatnoće propasti.

Prvi cilj osiguravajućeg društva je svakako izbjeći slučaj kada propast nastupa sa vjerovatnoćom 1, bez obzira na vrijednost početnih rezervi. Može se pokazati da je propast neizbježna, bez obzira kolike su početne rezerve, ako je $c - \lambda\mu \leq 0$. Dakle, najmanje što je potrebno da važi, da bi preuzimanje rizika uopšte imalo smisla, jeste da kompanija u prosjeku zarađuje više od premija nego što isplaćuje zahtjeva, što je takozvani uslov neto profita

$$c > \lambda\mu. \tag{2.3}$$

Stopa premije c je jedina veličina u (2.3) na koju osiguravajuća kuća može uticati, te se mora definisati tako da gore navedeni uslov bude zadovoljen. To se postiže opterećenjem premije na sledeći način

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu, \tag{2.4}$$

gdje je $\theta > 0$ faktor opterećenja premije.

2.2 Integrodiferencijalna reprezentacija vjerovatnoće propasti

Uzimajući u obzir vrijeme T_1 i iznos X prve štete vjerovatnoća preživljavanja $\phi(u)$ se može zapisati kao

$$\phi(u) = P\{X \leq u + cT\}\phi(u + cT - X).$$

Drugim riječima, da kompanija preživi na beskonačnom vremenskom horizontu uz početne rezerve u, pri čemu se prvi zahtjev desio u trenutku T, potrebno je da preživi prvu isplatu, tj. da $X \leq u + cT$ i da nadalje preživi uz početne rezerve $u + cT - X$. Koristeći činjenicu da je T_1 vrijeme čekanja do prve štete pa ima $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodjelu i da je funkcija raspodjele iznosa štete data sa $F_X(x)$ i uvođenjem smjene $s = u + ct$ dobija se

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi(u + ct - x) dF_X(x) dt \\ &= \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c} u} \int_u^\infty e^{-\frac{\lambda}{c} s} \int_0^s \phi(s - x) dF_X(x) ds.\end{aligned}$$

Funkcija $\phi(u)$ je neprekidna i rastuća (što su početne rezerve veće, veća je i vjerovatnoća preživljavanja) pa je njen integral diferencijabilna funkcija i opravdano je diferenciranje gore navedenog izraza, nakon čega se dolazi do integrodiferencijalne jednačine za vjerovatnoću preživljavanja

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u - x) dF_X(x). \tag{2.5}$$

Integracijom jednačine (2.5) od 0 do u, smjenom $s = u - x$ u prvom integralu, parcijalnom integracijom $(u = \phi(x - y),\ dv = dF_X(y))$ pa promjenom redoslijeda integracije i smjenom $s = x - y$ u drugom integralu se dobija

$$\begin{aligned}
\phi(u)-\phi(0) &= \frac{\lambda}{c}\Big(\int_0^u \phi(x)dx - \int_0^u\int_0^x \phi(x-y)dF_X(y)dx\Big)\\
&= \frac{\lambda}{c}\Big(\int_0^u \phi(u-s)ds - \int_0^u \Big(\phi(x-y)F_X(y)\Big|_0^x + \int_0^x \phi'(x-y)F_X(y)dy\Big)\, dx\Big)\\
&= \frac{\lambda}{c}\Big(\int_0^u \phi(u-s)ds - \int_0^u \phi(0)F_X(x)dx - \int_0^u F_X(y)\int_y^u \phi'(x-y)dxdy\Big)\\
&= \frac{\lambda}{c}\Big(\int_0^u \phi(u-s)ds - \int_0^u \phi(0)F_X(x)dx - \int_0^u F_X(y)\left[\phi(u-y)-\phi(0)\right]dy\Big)\\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-y)(1-F_X(y)dy.
\end{aligned}$$

Konačno se vjerovatnoća preživljavanja može zapisati u obliku

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-y)(1-F_X(y)dy. \tag{2.6}$$

Neophodno je još odrediti početne uslove za integrodiferencijalnu jednačinu vjerovatnoće preživljavanja[3]. Važno je primijetiti da se samo konačno mnogo šteta može desiti do trenutka $t < \infty$, pa je $\sup_{0\le t<\infty} L_t < \infty$. Primjenom jakog zakona velikih brojeva se pokazuje da $L_t/t \xrightarrow{\text{s.s.}} \lambda\mu - c,\ t\to\infty$,[4] što je opet konačno, te se može zaključiti da $\sup_{t\ge 0} L_t < \infty$. Slijedi da

$$\lim_{u\to\infty}\phi(u) = \lim_{u\to\infty} P\{\sup_{t\ge 0} L_t \le u\} = 1. \tag{2.7}$$

Primjenom teoreme o monotonoj konvergenciji dobija se

$$\begin{aligned}
1 = \lim_{u\to\infty}\phi(u) &= \phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \underbrace{\lim_{u\to\infty}\phi(u-y)}_{=1}(1-F_X(y))dy\\
&= \phi(0) + \frac{\lambda\mu}{c},
\end{aligned}$$

odakle slijedi da je

$$\phi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{\theta}{1+\theta}. \tag{2.8}$$

Ukoliko se pređe na zapis u terminima vjerovatnoće propasti, odnosno ako se u jednakostima (2.5), (2.7), (2.8) iskoristi da je $\psi(u) = 1-\phi(u)$ dobija se integrodiferencijalna

[3]Napomena 4.2.8 na 163. strani u [12]

[4]Propozicija 1.2 na 73. strani u [3]

jednačina vjerovatnoće propasti sa odgovarajućim početnim uslovima

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)dF_X(x) - \frac{\lambda}{c}\left(1 - F_X(u)\right),$$
$$\lim_{u\to\infty}\psi(u) = 0,$$
$$\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1 - F_X(y))dy = \frac{1}{1+\theta}.$$

Iz poslednje jednakosti se zaključuje da je vjerovatnoća propasti u slučaju kada su rezerve jednake nuli obrnuto proporcionalna koeficijentu opterećenja premije θ i da ne zavisi od stope pojavljivanja zahtjeva λ, kao ni od raspodjele iznosa zahtjeva.

Vjerovatnoća propasti se može zapisati u obliku defektne jednačine obnavljanja

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \psi(0) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u (1 - F_X(y))dy + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-y)(1 - F_X(y))dy \\ &= \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty (1 - F_X(y))dy + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-y)(1 - F_X(y))dy. \qquad (2.9)\end{aligned}$$

2.3 Klasifikacija raspodjela iznosa šteta

Cramér-Lundbergov model ostavlja slobodu izbora raspodjele kojom se modeliraju iznosi pristiglih šteta. Prilikom izbora prikladne raspodjele šteta, bitno je da ona može modelirati i najveće zabilježene iznose, s obzirom da se često dešava da samo jedan zahtjev ili njih nekoliko najvećih nadmaši sve ostale zajedno. Zbog toga je od izuzetne važnosti pravilno procijeniti vjerovatnoću pojavljivanja takvih ekstremnih događaja. U praksi neživotnog osiguranja su zabilježeni podaci o iznosima šteta koje je pogodno modelirati raspodjelama za koje je karakteristično da se jako velike vrijednosti realizuju sa malim vjerovatnoćama, odnosno raspodjelama sa lakim repovima. Nasuprot tome, iznosi nekih šteta su ekstremno veliki, pa ih je pogodno modelirati pesimističnijim raspodjelama za koje je karakteristično da se velike vrijednosti realizuju sa velikim vjerovatnoćama. Pomenute raspodjele se nazivaju raspodjele sa teškim repom. Vjerovatnoća pojavljivanja ekstremnih događaja opisana je desnim repom raspodjele, odnosno funkcijom $\overline{F}_X$.

DEFINICIJA 2.1 **(Rep raspodjele)** *Neka je F_X funkcija raspodjele neke nenegativne slučajne promjenljive X. Funkcija*

$$\overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x), \quad x \geq 0,$$

predstavlja (desni) rep raspodjele i daje vjerovatnoću $P\{X > x\}$.

Rep raspodjele iznosa šteta je jako značajan u teoriji propasti, jer u zavisnosti od toga kojom brzinom rep opada u nulu se može zaključiti koliko su štete opasne i u skladu sa tim koliko brzo opada vjerovatnoća propasti kao funkcija početnih rezervi u. Potpuno različiti rezultati se dobijaju u zavisnosti od toga da li se radi o eksponencijalno ograničenim ili teškim repovima. U Cramér-Lundbergovom modelu eksponencijalno ograničen rep raspodjele iznosa zahtjeva implicira eksponencijalno ograničenu vjerovatnoću propasti. U suprotnom, eksponencijalna granica ne postoji i do vjerovatnoće propasti se znatno teže dolazi. U tom slučaju važnu ulogu ima integral repa raspodjele F_I.

DEFINICIJA 2.2 **(Integral repa raspodjele)** *Neka nenegativna slučajna promjenljiva X ima funkciju raspodjele F_X i konačno očekivanje $E(X) = \mu < \infty$. Integral repa raspodjele se definiše kao*

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F}_X(y)dy, \quad x > 0.$$

Na osnovu teoreme 1.1 se može zaključiti da je $\overline{F}_X(x)/\mu$ funkcija gustine, te je $F_I(x)$ funkcija raspodjele neke slučajne promjenljive.

Kao što je već pomenuto raspodjele kojima se modeliraju iznosi šteta u osiguranju se grubo dijele u dvije grupe, takozvane raspodjele sa lakim repom i raspodjele sa teškim repom. Postoji veći broj kriterijuma klasifikacije, a jedan od njih se zasniva na postojanju konačne funkcije generatrise momenata. Naime, u slučaju raspodjela sa lakim repom $M_X(s)$ je konačna za neko $s > 0$, dok se u suprotnom, kada je $M_X(s) = \infty$ za sve $s > 0$, raspodjela smatra raspodjelom sa teškim repom. U nastavku se daju definicije pomenutih raspodjela i navode njihovi najznačajniji predstavnici.

DEFINICIJA 2.3 *Raspodjela sa funkcijom raspodjele F_X ima lak rep ako postoji $s_0 > 0$ takvo da je funkcija generatrisa momenata konačna, odnosno*

$$M_X(s_0) = \int_0^\infty e^{s_0 x} dF_X(x) < \infty, \text{ za neko } s_0 > 0.$$

Ukoliko raspodjela ima lak rep važi da je on eksponencijalno ograničen. Primjenom nejednakosti Markova[5] se dobija

$$\overline{F}_X(x) = P\{X > x\} = P\{e^{sX} > e^{sx}\} \leq \frac{E\left(e^{sX}\right)}{e^{sx}}.$$

Odnosno, važi

$$\overline{F}_X(x) \leq ae^{-bx}, \quad x > 0,$$

što znači da je vjerovatnoća da se dese velike štete izrazito mala (eksponencijalno mala). Rep raspodjele sa lakim repom teži brže ka nuli od eksponencijalne funkcije.

Osnovni razlog popularnosti raspodjela sa lakim repom u modeliranju iznosa zahtjeva ogleda se u tome što su to standardne raspodjele vjerovatnoće i zgodno je raditi sa njima. Najjednostavnija raspodjela ove klase je eksponencijalna. U modelima rizika se često koriste i Gamma i Weibull raspodjela sa lakim repom.

Ukoliko slučajna promjenljiva X ima Gamma raspodjelu sa parametrima $\alpha > 0$ (parametar oblika) i $\beta > 0$ (parametar razmjere), $X : \mathcal{G}amma(\alpha, \beta)$ njena gustina je data sa

$$\varphi_X(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0$$

gdje je $\Gamma(\alpha)$ gamma funkcija data sa

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Funkcija raspodjele se može zapisati kao

$$F_X(x) = \int_0^x \varphi_X(t) dt = \frac{\gamma(\alpha, \frac{x}{\beta})}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0$$

[5](Nejednakost Markova) Neka je X nenegativna slučajna promjenljiva. Ako $E(X) < \infty$ postoji, onda za $\varepsilon > 0$ važi $P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$.

pri čemu je

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

nepotpuna gamma funkcija. Očekivanje Gamma raspodijeljene slučajne promjenljive je

$$E(X) = \alpha\beta,$$

a funkcija generatrisa momenata

$$M_X(s) = (1 - \beta s)^{-\alpha}, \quad s < \frac{1}{\beta}.$$

Eksponencijalno raspodijeljena slučajna promjenljiva X sa parametrom $\beta > 0$, $X : \mathcal{E}(\beta)$, ima funkciju gustine

$$\varphi_X(x) = \beta e^{-\beta x}, \quad x \geq 0 \tag{2.10}$$

i funkciju raspodjele

$$F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}, \quad x \geq 0.$$

Očekivanje je dato sa

$$E(X) = \frac{1}{\beta},$$

dok se funkcija generatrisa momenata može zapisati kao

$$M_X(s) = \frac{\beta}{\beta - s} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\beta}s}, \quad s < \beta.$$

Za modeliranje iznosa šteta često se koristi i Weibull raspodjela. Funkcija gustine slučajne promjenljive X koja ima Weibull raspodjelu sa parametrima $\delta > 0$ (parametar razmjere) i $\tau > 0$ (parametar oblika), $X : \mathcal{W}eibull(\delta, \tau)$, je

$$\varphi_X(x) = \frac{\tau}{\delta} \left(\frac{x}{\delta}\right)^{\tau-1} e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\tau}}, \quad x \geq 0.$$

Funkcija raspodjele je data sa

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\tau}}, \quad x \geq 0.$$

Očekivanje posmatrane raspodjele iznosi

$$E(X) = \delta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}\right).$$

Ukoliko se iskoristi osobina gamma funkcije, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, dobija se

$$E(X) = \frac{\delta}{\tau}\Gamma\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

Weibull raspodjela ima lak rep kada je $\tau \geq 1$.

Važno je napomenuti da raspodjele iznosa šteta nemaju nužno lak rep. Osiguravajuće kuće su često suočene sa propasti ili su blizu nje zbog veoma malog broja izuzetno velikih zahtjeva. Pored uobičajenih šteta kao što je krađa automobila, kompanije se suočavaju i sa ozbiljnim izazovima poput terorizma, zemljotresa, pandemija koji se rijetko javljaju, ali donose ogromne štete. Kako iznosi ovakvih šteta dostižu velike vrijednosti, oni se ne mogu modelirati do sada navedenim raspodjelama, nego se za to najčešće koriste sledeće raspodjele.

DEFINICIJA 2.4 *Raspodjela sa funkcijom raspodjele F_X ima težak rep ako za sve $s > 0$ ne postoji konačna funkcija generatrisa momenata, odnosno*

$$M_X(s) = \int_0^\infty e^{sx} dF_X(x) = \infty, \ \text{za sve } s > 0.$$

Standardne raspodjele sa teškim repom koje se koriste za modeliranje iznosa šteta u osiguranju su Pareto, lognormalna i Weibull raspodjela sa teškim repom.

Pareto raspodjela (Pareto tip II ili Lomax) je jedna od raspodjela sa najtežim repom među raspodjelama iznosa šteta koje su u praktičnoj upotrebi i neizostavna je za modeliranje ekstremnih gubitaka. Slučajna promjenljiva X sa Pareto raspodjelom sa parametrima $\nu > 0$ (parametar oblika) i $\gamma > 0$ (parametar razmjere), $X : \mathcal{P}areto(\nu, \gamma)$, ima funkciju gustine

$$\varphi_X(x) = \frac{\nu\gamma^\nu}{(x+\gamma)^{\nu+1}}, \quad x \geq 0$$

i funkciju raspodjele

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}\right)^\nu, \quad x \geq 0.$$

Očekivanje je dato sa

$$E(X) = \frac{\gamma}{\nu - 1}, \text{ za } \nu > 1.$$

Neka je X_I slučajna promjenljiva čija je funkcija raspodjele $F_I(x)$. Ispostavlja se da ukoliko $X : \mathcal{P}areto(\nu, \gamma)$ onda $X_I : \mathcal{P}areto(\nu - 1, \gamma)$. Odnosno, važi da je integral repa Pareto raspodjele sa parametrom oblika ν opet Pareto raspodjela sa parametrom oblika $\nu - 1$. Primjenom smjene $t = y + \gamma$ se dobija

$$\begin{aligned}
F_I(x) &= \frac{1}{E(X)} \int_0^x \overline{F}_X(y) dy \\
&= \frac{\nu - 1}{\gamma} \int_0^x \gamma^{\nu} (y + \gamma)^{-\nu} dy \\
&= (\nu - 1)\gamma^{\nu - 1} \int_{\gamma}^{x+\gamma} s^{-\nu} ds \\
&= 1 - \left(\frac{\gamma}{x + \gamma} \right)^{\nu - 1}.
\end{aligned}$$

Lognormalna raspodjela sa parametrima m i s^2 se definiše kao raspodjela slučajne promjenljive e^Y, pri čemu $Y : \mathcal{N}(m, s^2)$. Ukoliko X ima lognormalnu raspodjelu, $X : \mathcal{L}og\mathcal{N}(m, s^2)$, funkcija gustine je oblika

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{xs\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2s^2}}, \quad x > 0.$$

Funkcija raspodjele se može zapisati kao

$$F_X(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} e^{-\frac{(\ln t - m)^2}{2s^2}} dt, \quad x > 0.$$

Očekivanje lognormalne raspodjele je

$$E(X) = e^{m + \frac{s^2}{2}}.$$

U raspodjele sa teškim repom spada i Weibull raspodjela za $\tau < 1$.

Navedenim raspodjelama će se modelirati iznosi šteta u nastavku rada. Da bi rezultati bili uporedivi neophodno je da sve raspodjele imaju jednako očekivanje i da ono iznosi μ. U tabeli 2.1 su date raspodjele u pogodnom obliku u kojem će se posmatrati kroz rad.

Tabela 2.1. Raspodjele iznosa šteta sa parametrima koji daju očekivanje μ

Raspodjela iznosa šteta	Parametri
$\mathcal{E}(\beta)$	$\beta = \frac{1}{\mu}$
$\mathcal{G}amma(\alpha, \beta)$	$\alpha,\ \beta = \frac{\mu}{\alpha}$
$\mathcal{W}eibull(\delta, \tau)$	$\delta = \frac{\tau}{\Gamma(\frac{1}{\tau})}\mu,\ \tau$
$\mathcal{P}areto(\nu, \gamma)$	$\nu,\ \gamma = (\nu - 1)\mu$
$\mathcal{L}og\mathcal{N}(m, s^2)$	$m = \ln \mu - \frac{s^2}{2},\ s^2$

Weibull raspodjela će biti korišćena u dva oblika:

- sa lakim repom, kada je $\tau \geq 1$ i tada će parametri biti označeni sa τ_l i δ_l, a raspodjela sa $Weibull_l$
- sa teškim repom, kada je $\tau < 1$ i parametri će se označavati sa τ_t i δ_t, a raspodjela sa $Weibull_t$

U primjerima i na graficima vrijeme t je u godinama.

U tabeli 2.2 su navedene vrijednosti parametara, koje se koriste u primjerima u nastavku rada.

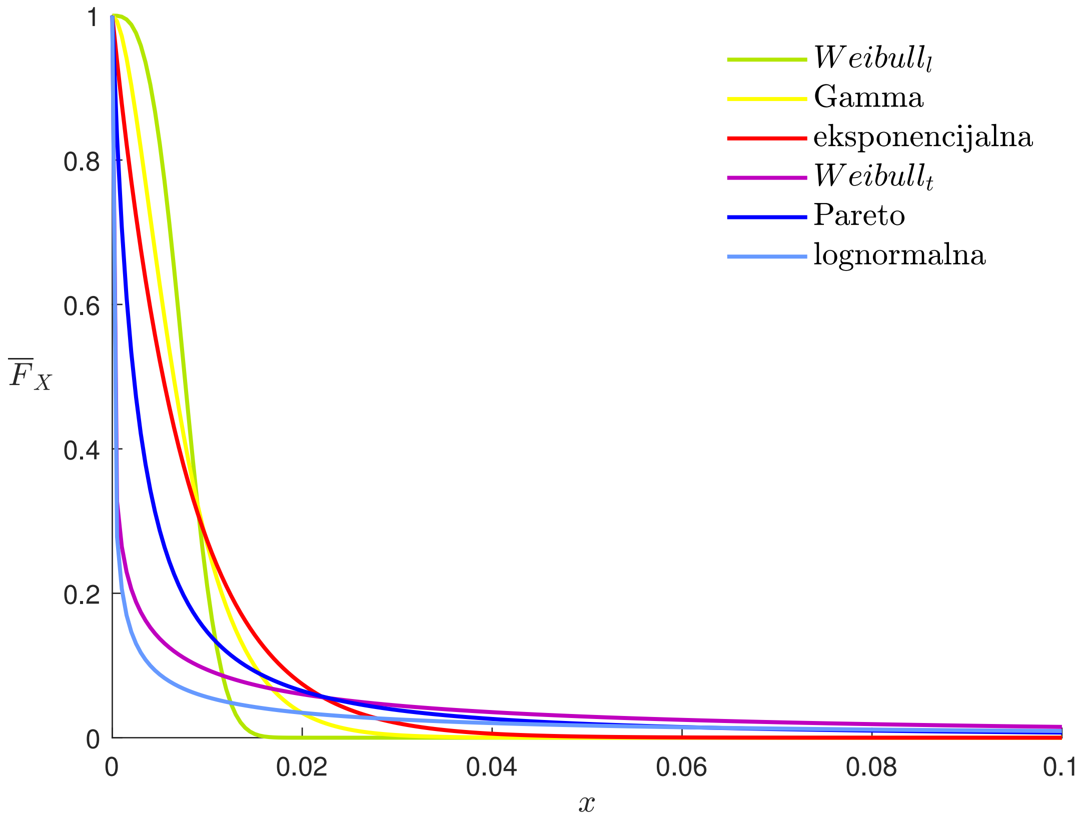
Tabela 2.2. Vrijednosti parametara

Opis parametra	Vrijednost
stopa premije	$c = 1$
intenzitet Poissonovog procesa	$\lambda = 100$
očekivani iznos pojedinačnih šteta	$\mu = \frac{1}{130} = 0.0077$
parametar eksponencijalne raspodjele, $\mathcal{E}(\frac{1}{\mu})$	$\beta = 130$
parametri Gamma raspodjele, $\mathcal{G}amma(\alpha, \frac{\mu}{\alpha})$	$\alpha = 2$
parametri Weibull raspodjele sa lakim repom, $\mathcal{W}eibull_l(\frac{\tau_l}{\Gamma(\frac{1}{\tau_l})}\mu, \tau_l)$	$\tau_l = 3$
parametri Pareto raspodjele, $\mathcal{P}areto(\nu, (\nu - 1)\mu)$	$\nu = 1.5$
parametri Weibull raspodjele sa teškim repom, $\mathcal{W}eibull_t(\frac{\tau_t}{\Gamma(\frac{1}{\tau_t})}\mu, \tau_t)$	$\tau_t = 0.25$
parametri lognormalne raspodjele, $\mathcal{L}og\mathcal{N}(\ln \mu - \frac{s^2}{2}, s^2)$	$s = 3$

Na osnovu datih vrijednosti može se odrediti i koeficijent opterećenja premije

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 = 0.3$$

Na slici 2.4 su predstavljene funkcije repa raspodjela koje se posmatraju. Jasno se uočava da Gamma raspodjela i Weiubll$_l$ imaju lakši rep od eksponencijalne raspodjele odnosno brže odlaze u nulu. Sa druge strane, repovi Pareto raspodjele, Weibull$_t$ i lognormalne raspodjele su znatno teži, odnosno sporije teže ka nuli.



Slika 2.4. Repovi posmatranih raspodjela

Posmatrane raspodjele imaju isto očekivanje, $\mu = \frac{1}{130}$. Vjerovatnoća da slučajna promjenljiva X bude deset puta veća od svoje očekivane vrijednosti je

$$P\left\{X_{Weibull_l} > \frac{1}{13}\right\} = 0$$
$$P\left\{X_{Gamma} > \frac{1}{13}\right\} = 4.3284 \cdot 10^{-8}$$
$$P\left\{X_{Exp} > \frac{1}{13}\right\} = 4.54 \cdot 10^{-5}$$
$$P\left\{X_{Pareto} > \frac{1}{13}\right\} = 0.0104$$

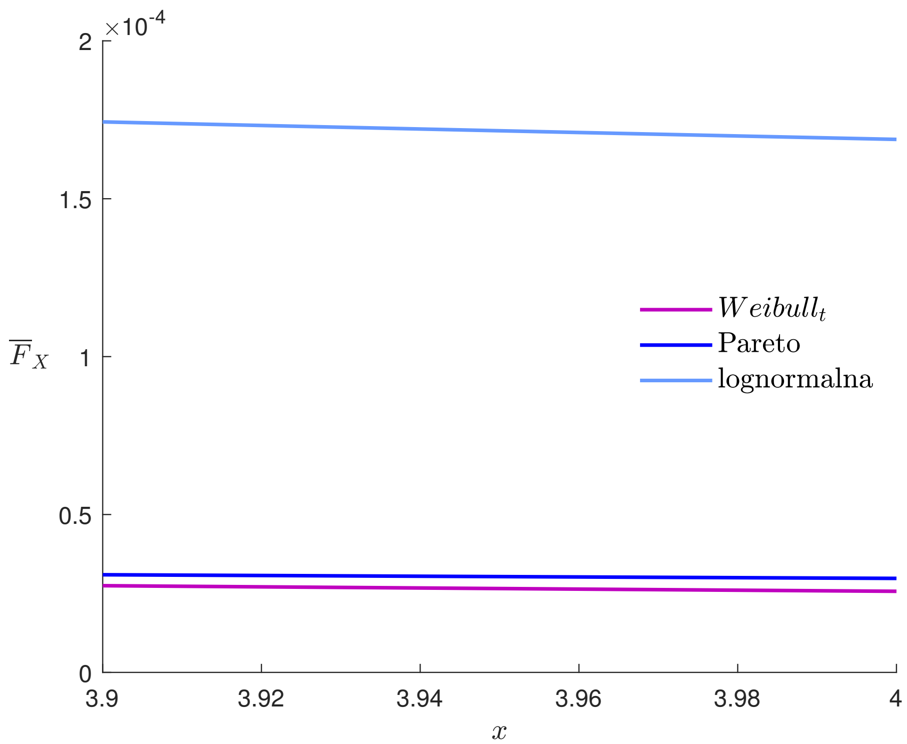
$$P\left\{X_{Weibull_t} > \frac{1}{13}\right\} = 0.0195$$
$$P\left\{X_{Logn} > \frac{1}{13}\right\} = 0.0117.$$

Odnosno, 429 puta je vjerovatnije da će X biti deset puta veće od $E(X)$ u slučaju Weibull$_t$ raspodjele, nego u slučaju eksponencijalne raspodjele. Dakle rep Weibull$_t$ raspodjele je mnogo teži od repa eksponencijalne.

Ukoliko se posmatraju samo raspodjele sa teškim repom i potraži vjerovatnoća da slučajna promjenljiva X bude 507 puta veća od svoje očekivane vrijednosti dobija se sledeće

$$P\{X_{Weibull_t} > 3.9\} = 2.7460 \cdot 10^{-5}$$
$$P\{X_{Pareto} > 3.9\} = 3.0924 \cdot 10^{-5}$$
$$P\{X_{Logn} > 3.9\} = 1.7433 \cdot 10^{-4}.$$

Dakle, najteži rep ima lognormalna raspodjela, što će se kasnije i manifestovati u primjerima. Slika 2.5 prikazuje odnos repova teških raspodjela.



Slika 2.5. Odnos raspodjela sa teškim repom

2.4 Pollaczek-Khinchineova formula

Pollaczek-Khinchineova formula predstavlja opšti izraz za vjerovatnoću propasti. Za izračunavanje vjerovatnoće propasti je suviše komplikovana, jer sadrži beskonačnu sumu konvolucija, ali je od izuzetne važnosti za mnoga teorijska razmatranja i zaključke.

TEOREMA 2.1 **(Pollaczek-Khinchineova formula)** *U Cramér-Lundbergovom modelu važi*

$$\psi(u) = \frac{\theta}{1+\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \overline{F_I^{*n}}(u), \quad u \geq 0. \tag{2.11}$$

DOKAZ: (Uz određene dodatke, dokaz je sličan dokazu propozicije 2.6 na 23. strani u [14].)
Uvrštavanjem izraza za $\phi(0)$ u jednakost (2.6) i korišćenjem

$$dF_I(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}_X(y)dy\right) = \frac{1}{\mu}\overline{F}_X(x),$$

navedena jednakost se može zapisati u obliku

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{1}{1+\theta}\int_0^u \phi(u-x)dF_I(x)\\ &= \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{1}{1+\theta}(\phi * F_I)(u).\end{aligned}$$

Nakon uvrštavanja izraza za $\phi(u)$ n puta vjerovatnoća preživljavanja se može predstaviti kao

$$\phi(u) = \frac{\theta}{1+\theta}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k F_I^{*k}(u) + \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n (\phi * F_I^{*n})(u).$$

F_I^{*n} je funkcija raspodjele zbira nezavisnih i jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih sa funkcijom raspodjele F_I, pa mora da važi $0 \leq F_I^{*n} \leq 1$. Pošto je vjerovatnoća preživljavanja $\phi(u) \leq 1$, važi da je $\int_0^u \phi(u-y)dF_I^{*n}(y) \leq F_I^{*n}(u)$. Stoga slijedi

$$\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n (\phi * F_I^{*n})(u) \leq \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n F_I^{*n}(u) \leq \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n.$$

Pošto je $1/(1+\theta) < 1$ važi

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n (\phi * F_I^{*n})(u) = 0,$$

te se puštanjem da $n \to \infty$ dobija

$$\phi(u) = \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k F_I^{*k}(u).$$

Korišćenjem prethodnog zaključka i jednakosti $1 = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k, \ |q| < 1$ dolazi se do

$$\begin{aligned}\psi(u) = 1 - \phi(u) &= \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k - \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k F_I^{*k}(u) \\ &= \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \overline{F_I^{*k}}(u).\end{aligned}$$

2.5 Vjerovatnoća propasti u slučaju malih iznosa šteta

Kada se iznosi šteta modeliraju raspodjelama sa lakim repom, postojanje funkcije generatrise momenata znatno olakšava postupak iznalaženja elegantnih aproksimacija vjerovatnoće propasti.

Očekivanje i druge momente procesa ukupnih gubitaka L_t moguće je računati pomoću funkcije generatrise momentata $M_{L_t}(s)$ koristeći

$$E({L_t}^n) = M_{L_t}^{(n)}(0). \tag{2.12}$$

TEOREMA 2.2 *Ukoliko je $M_X(s) < \infty$, funkcija generatrisa momenata procesa ukupnog gubitka L_t je*

$$M_{L_t}(s) = e^{\lambda t(M_X(s)-1)-cts}. \tag{2.13}$$

Dokaz:
Primjenom osnovnih osobina očekivanja i formule (1.6) za funkciju generatrisu momenata složene Poissonove raspodjele lako se pokazuje traženo.

$$\begin{aligned} M_{L_t}(s) := E(e^{sL_t}) &= E(e^{sS_t - sct}) \\ &= e^{-cts} M_{S_t}(s) \\ &= e^{-cts} e^{\lambda t (M_X(s)-1)} \end{aligned}$$

Primjenom (2.12) i (2.13) se dolazi do očekivanja i varijanse procesa L_t:

$$\begin{aligned} E(L_t) &= M'_{L_t}(0) = \lambda t \mu - ct, \\ D(L_t) &= M''_{L_t}(0) - E^2(L_t) = \lambda t \mu_2. \end{aligned}$$

Definiciji jedne od ključnih nejednakosti vjerovatnoće propasti, koju je dao Lundberg, prethodi uvođenje koeficijenta prilagođavanja κ. Prema teoremi 2.2 generatrisa momenata procesa L_t se može zapisati kao

$$M_{L_t}(s) = e^{l(s)t},$$

gdje je $l(s) := \lambda(M_X(s) - 1) - cs$ Lundbergova funkcija. Koeficijent prilagođavanja ili Lundbergov koeficijent κ igra važnu ulogu u procjeni vjerovatnoće propasti. Definiše se kao jedinstveno pozitivno rješenje jednačine $l(s) = 0$:

$$\lambda(M_X(s) - 1) - cs = 0, \tag{2.14}$$

ili ako se iskoristi da je $c = (1 + \theta)\lambda\mu$:

$$1 + (1 + \theta)\mu s = M_X(s), \tag{2.15}$$

odakle je jasno da je κ nezavisan od Poissonovog parametra λ.

LEMA 2.1 *Ako postoji* $s_\infty \leq \infty$ *takvo da je* $M_X(s) < \infty$ *za sve* $s < s_\infty$ *i važi* $\lim_{s \to s_\infty^-} M_X(s) = \infty$, *onda postoji jedinstveno rješenje* κ *jednačine* $l(s) = 0$, *koje se zove Lundbergov koeficijent ili koeficijent prilagođavanja.*

DOKAZ: (slično dokazu iz [6])
Posmatra se Lundbergova funkcija $l(s) = \lambda(M_X(s) - 1) - cs$ i prvo se uočava da je $l(0) = 0$, te

$$l'(s) = \lambda M_X'(s) - c,$$

pa je zbog uslova neto profita

$$l'(0) = \lambda\mu - c < 0,$$

što znači da fukncija $l(s)$ opada u nuli. Dalje je

$$l''(s) = \lambda M_X''(s) = \lambda E(X^2 e^{sX}) \geq 0,$$

odakle slijedi da je $l(s)$ konveksna funkcija. Preostaje još da se pokaže da

$$\lim_{s \to s_\infty^-} l(s) = \infty$$

čime je tvrđenje dokazano. Za to se odvojeno posmatraju slučajevi $s_\infty < \infty$ i $s_\infty = \infty$. U prvom slučaju je jasno da važi, dok se u drugom slučaju koristi činjenica da su štete pozitivne pa postoje $\varepsilon > 0$ i vjerovatnoća p tako da $P\{X > \varepsilon\} = p > 0$, te

$$M_X(s) = \int_0^\infty e^{sx} dF_X(x) \geq \int_\varepsilon^\infty e^{sx} dF_X(x) \geq e^{s\varepsilon} p.$$

Konačno se dolazi do

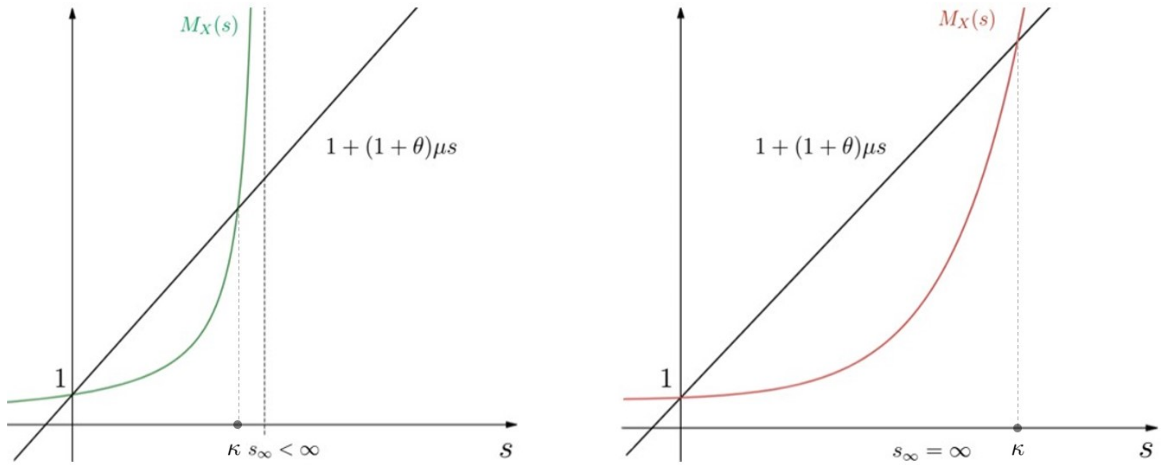
$$\lim_{s \to \infty} l(s) \geq \lim_{s \to \infty} (\lambda(e^{s\varepsilon} p - 1) - cs) = \infty.$$

Dakle funkcija l opada u nuli, konveksna je i teži beskonačnosti kada $s \to s_\infty$, stoga siječe realnu osu jednom, odnosno postoji jedinstveno rješenje $l(s) = 0$.

Slično se rezonuje kada se koeficijent κ traži kao rješenje jednačine (2.15)[6].

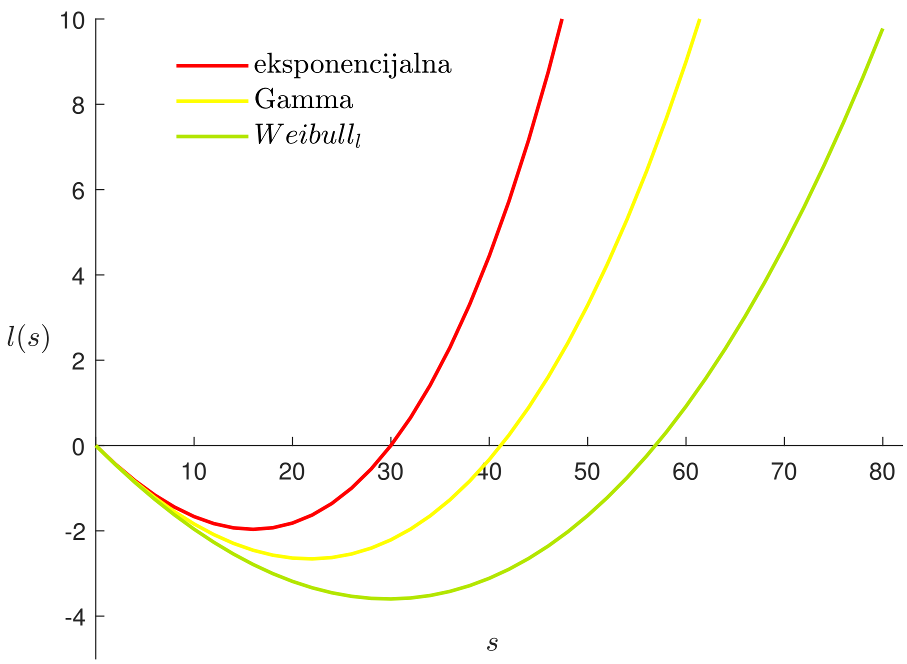
[6]Razmatrano u [17].

Slika 2.6 ilustruje navedeni slučaj.



Slika 2.6. Lundbergov koeficijent u slučajevima kada je $s_\infty < \infty$ i $s_\infty = \infty$

Na slici 2.7 su prikazane Lundbergove funkcije $l(s)$, a ujedno i vrijednosti koeficijenta prilagođavanja κ za raspodjele sa lakim repom.



Slika 2.7. Lundbergove funkcije za raspodjele sa lakim repom

Prikazane funkcije opadaju u nuli, konveksne su i teže beskonačnosti, što potvrđuje gornje zaključke. Može se primijetiti da je koeficijent prilagođavanja najmanji u slučaju eksponencijalne raspodjele, koja ima najteži rep od posmatranih lakih raspodjela.

Koeficijent prilagođavanja zadovoljava takozvani Cramérov uslov

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty} e^{\kappa y}\left(1-F_X(y)\right)dy = 1. \tag{2.16}$$

U nastavku se, pod pretpostavkom da iznosi šteta imaju lak rep, tj. da Lundbergov koeficijent postoji, daje gornja granica vjerovatnoće propasti.

TEOREMA 2.3 **(Lundbergova nejednakost)** *Ako koeficijent prilagođavanja κ postoji, tada*

$$\psi(u) \le e^{-\kappa u}, \ \textit{za sve } u \ge 0.$$

DOKAZ: (uz određene modifikacije, dokaz je uzet iz [6], poglavlje 7.6)
Nejednakost se pokazuje indukcijom. Neka je $\psi_n(u),\ n \in \mathbb{N}_0$ vjerovatnoća propasti prije ili prilikom isplate n-te štete. Tada važi

$$\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(u), \ u \ge 0,$$

te je za dokazivanje tvrđenja dovoljno pokazati da je

$$\psi_n(u) \le e^{-\kappa u}, \ n = 0, 1, \ldots$$

Polazi se od baze indukcije, odnosno, pokazuje se da nejednakost važi za $n = 0$. Vjerovatnoća da dođe do propasti pri isplati nulte štete je jednaka nuli, pa se jednostavno zaključuje

$$\psi_0(u) = 0 \le e^{-\kappa u}.$$

Indukcijska hipoteza je da nejednakost važi za proizvoljno n, tj. $\psi_n(u) \le e^{-\kappa u},\ n \ge 0$. Preostaje još da se pokaže za vjerovatnoću propasti pri isplati $(n+1)$-e štete. Uzimajući u obzir vrijeme i iznos prve štete izvodi se izraz za $\psi_{n+1}(u)$. Prva šteta se dogodila u trenutku $t > 0$ i njen iznos je X. Ako se propast dogodila prije ili prilikom isplate $(n+1)$-e štete, važi jedan od sledeća dva slučaja:

(i) propast se dogodila u trenutku prve isplate, što znači da je $X > u + ct$,

(ii) propast se nije dogodila u trenutku prve isplate, te je $u + ct - X \geq 0$ i propast se dogodila uz ove rezerve pri isplati neke od budućih n šteta.

Dakle, vjerovatnoća propasti pri isplati $(n+1)$-e štete se razlaže na dva dijela: prvi, koji predstavlja vjerovatnoću propasti pri isplati prve štete i drugi, koji predstavlja vjerovatnoću da propast nije nastala pri isplati prve štete, ali jeste pri nekoj od sledećih n šteta. Proces viška je stacionaran, pa priraštaji imaju istu raspodjelu i može se reći da on ,,počinje ispočetka" nakon isplate prve štete, odnosno vjerovatnoća propasti u narednih n isplata će biti $\psi_n(u + ct - X)$. Navedeno rezonovanje može se zapisati na sledeći način

$$\psi_{n+1}(u) = P\{X > u + ct\} + P\{X \leq u + ct\}\psi_n(u + ct - X).$$

Trenutak prvog zahtjeva je ujedno i vrijeme čekanja do prvog zahtjeva pa ima $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodjelu. Funkcija raspodjele iznosa štete je data sa $F_X(x)$. Integracijom po svim vremenima i iznosima prvog zahtjeva se dobija

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty dF_X(x)dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \psi_n(u + ct - x)dF_X(x)dt.$$

Korišćenjem indukcijske pretpostavke $\psi_n(u + ct - x) \leq e^{-\kappa(u+ct-x)}$ i činjenice da za $x \geq u + ct$ važi $1 \leq e^{-\kappa(u+ct-x)}$, dolazi se do

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty e^{-\kappa(u+ct-x)}dF_X(x)dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} e^{-\kappa(u+ct-x)}dF_X(x)dt \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-\kappa(u+ct-x)}dF_X(x)dt \\
&= e^{-\kappa u} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+c\kappa)t} \int_0^\infty e^{\kappa x}dF_X(x)dt \\
&= e^{-\kappa u} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+c\kappa)t} M_X(\kappa)dt.
\end{aligned}$$

Budući da se iz (2.14) zaključuje da je $\lambda + c\kappa = \lambda M_X(\kappa)$, važi

$$\psi_{n+1}(u) \leq e^{-\kappa u} \int_0^\infty \lambda M_X(\kappa)e^{-\lambda M_X(\kappa)t}dt,$$

integral je jednak 1 i dobija se

$$\psi_{n+1}(u) \leq e^{-\kappa u}.$$

Lundbergovom nejednakošću je određena gornja granica vjerovatnoće propasti u obliku eksponencijalne funkcije. I upravo ta opadajuća eksponencijalna granica osigurava da je vjerovatnoća propasti jako mala ako kompanija krene sa velikim početnim rezervama u. Štaviše, ako se uzme u obzir nejednakost iz teoreme 2.3 i da je $\psi(u) \geq 0$ važi

$$\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0.$$

Jasno, granica zavisi i od koeficijenta prilagođavanja, što je κ manje to je portfolio rizičniji, odnosno vjerovatnoća propasti veća. U slučaju malih zahtjeva, ako se počne sa velikim rezervama u principu nema opasnosti od propasti. Kasnije će se ispostaviti da ovo tvrđenje ne važi u slučaju velikih iznosa šteta.

U nastavku se razmatra granični slučaj vjerovatnoće propasti kada početni kapital u neograničeno raste. Za dokaz asimptotske aproksimacije je neophodna sledeća veoma poznata lema [7].

LEMA 2.2 **(Ključna teorema obnavljanja)** *Neka se funkcija $R(u)$ može zapisati u obliku jednačine obnavljanja*

$$R(u) = r(u) + \int_0^u R(u-x)dF(x),$$

gdje je $R(u),\ u \in [0, \infty)$ nepoznata funkcija, $r(u)$ je poznata funkcija i $F(x)$ poznata funkcija raspodjele neke pozitivne slučajne promjenljive X. Ako je

(i) F diskretna raspodjela koja nije mreža (non-lattice), tj. ne postoji $d \geq 0$ tako da je $\sum_{k=1}^{\infty} P\{X = kd\} = 1$ i

(ii) r direktno Riemann integrabilna,

onda postoji granična vrijednost

$$\lim_{u \to \infty} R(u) = \frac{\int_0^\infty r(x)dx}{\int_0^\infty xdF(x)}.$$

Važno je razlikovati pojam direktne Riemann integrabilnosti od Riemann integrabilnosti. Posmatra se pariticija $\{I_n(h), n \in \mathbb{N}\}$ pozitivne realne ose $\mathbb{R}^+$, pri čemu je $I_n(h) = [(n-1)h, nh)$ i $h > 0$ proizvoljan skalar. Neka su infimum i supremum funkcije

[7] Vidjeti na 518. strani u [3]

$r : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ na intervalu $I_n(h)$ dati sa

$$m_n = \inf\{r(t) : t \in I_n(h)\}, \qquad M_n = \sup\{r(t) : t \in I_n(h)\},$$

pri čemu m_n i M_n zavise od h. Donja i gornja Riemannova suma za datu dužinu intervala h se definišu kao

$$s_h = h \sum_{n \in \mathbb{N}} m_n, \qquad S_h = h \sum_{n \in \mathbb{N}} M_n.$$

Funkcija r je direktno Riemann integrabilna ako su donja i gornja Riemannova suma konačne i teže istoj granici kada $h \to 0$. Definicija direktne Riemann integrabilnosti ne pravi razliku između konačnih i beskonačnih intervala. Funckija r je direktno Riemann integrabilna na intervalu $[0, \infty)$, ako je direktno Riemann integrabilna na svim konačnim intervalima $[0, a]$ i ako je $S_h < \infty$ za neko $h > 0$ (a tada i za sve $h > 0$). Riemann integrabilnost funkcije se definiše na konačnom intervalu $[0, a]$ i važi da je $h = a/n$. Ukoliko s_h i S_h teže ka istoj graničnoj vrijednosti kada $h \to 0$, odnosno ako $S_h - s_h \to 0$ funkcija r je Riemann integrabilna. Za integrabilnost na intervalu $[0, \infty)$ se posmatra limes integrala na konačnom intervalu $[0, a]$.

Značaj teorije obnavljanja u teoriji propasti ogleda se u tome što vjerovatnoća propasti zadovoljava jednačinu obnavljanja, te se primjenom alata teorije obnavljanja može doći do važnih zaključaka, poput teoreme u nastavku.

TEOREMA 2.4 **(Cramér-Lundbergova aproksimacija)** *Ako koeficijent prilagođavanja κ postoji, tada*

$$\psi(u) \sim Ce^{-\kappa u}, \quad u \to \infty,$$

gdje je $C = \frac{\mu\theta}{M'_X(\kappa) - \mu(1+\theta)}$.

DOKAZ:
Jednakost (2.9) se naziva defektna jednačina obnavljanja, jer veličina u odnosu na koju se integrali $\dfrac{\lambda}{c}\displaystyle\int_0^x (1 - F_X(y))dy$ nije mjera vjerovatnoće (granična vrijednost kada $x \to \infty$ je manja od 1). Zaista, zbog uslova neto profita (2.3) važi

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\lambda}{c} \int_0^x (1 - F_X(y))dy \right) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (1 - F_X(y))dy = \frac{\lambda}{c}\mu < 1.$$

Nakon što se pomnoži faktorom $e^{\kappa u}$ gore navedena jednačina se može zapisati kao

$$\psi(u)e^{\kappa u} = \frac{\lambda}{c}e^{\kappa u}\int_u^\infty (1 - F_X(y)dy + \frac{\lambda}{c}\int_0^u e^{\kappa(u-y)}\psi(u-y)(1-F_X(y))e^{\kappa y}dy. \quad (2.17)$$

Cramérov uslov (2.16) osigurava da je $\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{\kappa y}(1-F_X(y))dy$ funkcija raspodjele, s obzirom da je neopadajuća i ograničena jedinicom, a shodno tome i jednakost (2.17) valjana jednačina obnavljanja. Primjenom leme 2.2, pri čemu je

$$R(u) = \psi(u)e^{\kappa u}, \quad r(u) = \frac{\lambda}{c}e^{\kappa u}\int_u^\infty (1-F_X(y))dy, \quad dF(y) = \frac{\lambda}{c}e^{\kappa y}(1-F_X(y))dy$$

dobija se

$$C = \lim_{u\to\infty}\psi(u)e^{\kappa u} = \frac{\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{\kappa z}\int_z^\infty (1-F_X(y))dydz}{\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty ze^{\kappa z}(1-F_X(z))dz}. \quad (2.18)$$

Brojilac se nakon promjene redoslijeda integracije, primjene Cramérovog uslova i teoreme 1.1 svodi na

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{\kappa z}\int_z^\infty (1-F_X(y))dydz &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1-F_X(y))\int_0^y e^{\kappa z}dzdy \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1-F_X(y))\frac{1}{\kappa}\left(e^{\kappa y}-1\right)dy \\
&= \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{\kappa y}(1-F_X(y))dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1-F_X(y))dy\right) \\
&= \frac{1}{\kappa}\left(1-\frac{\lambda}{c}\mu\right) \\
&= \frac{\theta\lambda\mu}{\kappa c}.
\end{aligned}$$

Kod imenioca je potrebno primijetiti da

$$\begin{aligned}
&\int_z^\infty dF_X(y) = 1 - F_X(z) \\
&M_X'(\kappa) = \left(E(e^{\kappa X})\right)' = E(Xe^{\kappa X}) = \int_0^\infty ye^{\kappa y}dF_X(y) \\
&M_X(\kappa) - 1 = (1+\theta)\mu\kappa,
\end{aligned}$$

nakon čega se promjenom redoslijeda integracije, parcijalnom integracijom $(u = z,\ dv = (e^{\kappa z})'\,dz)$ i primjenom navedenih jednakosti dolazi do

$$
\begin{aligned}
\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty ze^{\kappa z}(1-F_X(z))dz &= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty ze^{\kappa z}\int_z^\infty dF_X(y)dz \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\int_0^y z\frac{(e^{\kappa z})'}{\kappa}dzdF_X(y) \\
&= \frac{\lambda}{c\kappa}\int_0^\infty\left(ze^{\kappa z}\Big|_0^y - \int_0^y e^{\kappa z}dz\right)dF_X(y) \\
&= \frac{\lambda}{c\kappa}\int_0^\infty\left(ye^{\kappa y} - \frac{1}{\kappa}\left(e^{\kappa y}-1\right)\right)dF_X(y) \\
&= \frac{\lambda}{c\kappa}\left(M_X'(\kappa) - \frac{1}{\kappa}\left(M_X(\kappa)-1\right)\right) \\
&= \frac{\lambda}{c\kappa}\left(M_X'(\kappa) - (1+\theta)\mu\right).
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem dobijenih vrijednosti u (2.18) se dobija traženo.

Eksponencijalna raspodjela je jedna od najjednostavnijih i najelegantnijih u teoriji propasti. Ukoliko iznosi zahtjeva prate eksponencijalnu raspodjelu vjerovatnoća propasti se može tačno izračunati.

TEOREMA 2.5 *Ako iznosi šteta prate eksponencijalnu raspodjelu sa parametrom* $1/\mu$, *tj.* $X : \mathcal{E}(1/\mu)$, *onda*

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\theta}{\mu(1+\theta)}u}, \quad u \geq 0.$$

Kada se iznosi šteta modeliraju eksponencijalnom raspodjelom, tj. kada $X : \mathcal{E}(1/\mu)$, funkcija generatrisa momenata je data sa

$$M_X(s) = \frac{1}{1-\mu s}, \quad s < \frac{1}{\mu}.$$

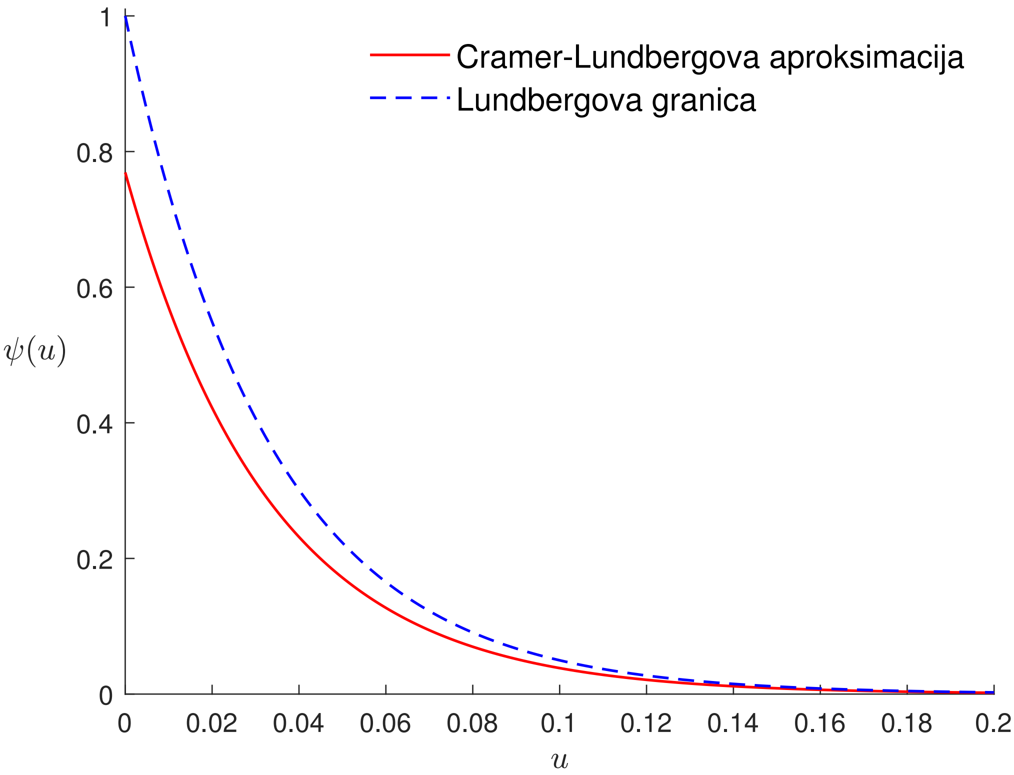
Može se pokazati da je Lundbergov koeficijent $\kappa = \frac{\theta}{\mu(1+\theta)}$, te Lundbergova nejednakost dobija sledeći oblik

$$\psi(u) \leq e^{-\frac{\theta}{\mu(1+\theta)}u}, \quad u \geq 0.$$

U ovom slučaju je $C = \frac{1}{1+\theta}$, te je Cramér-Lundbergova aproksimacija vjerovatnoće propasti

$$\psi(u) \sim \frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\theta}{\mu(1+\theta)}u}, \quad u \to \infty.$$

Dakle, u slučaju kada iznosi zahtjeva prate eksponencijalnu raspodjelu Cramér-Lundbergova aproksimacija daje tačnu vjerovatnoću propasti, čak i za male vrijednosti početnih rezervi. Slika 2.8 ilustruje navedeno.



Slika 2.8. Lundbergova granica i Cramér-Lundbergova aproksimacija vjerovatnoće propasti kada se iznosi šteta modeliraju eksponencijalnom raspodjelom

2.6 Vjerovatnoća propasti u slučaju velikih iznosa šteta

S obzirom da funkcija generatrisa momenata ne postoji za raspodjele sa teškim repom, kada god se iznosi šteta modeliraju ovakvim raspodjelama koeficijent prilagođavanja κ ne postoji. U skladu sa tim ocjene i aproksimacije vjerovatnoće propasti koje su određene uz pomoć Lundbergovog koeficijenta, kao što su Lundbergova nejednakost i Cramér-Lundbergova aproksimacija ne važe u slučaju ovakvih šteta.

Sama definicija raspodjela sa teškim repom preko generatrise momenata je suviše opšta da bi se došlo do nekih netrivijalnih opštih zaključaka po pitanju vjerovatnoće propasti, pa se iz tog razloga prelazi na klasu subeksponencijalnih raspodjela. Subeksponencijalne raspodjele predstavljaju potklasu raspodjela sa teškim repovima, ali se u matematici neživotnog osiguranja ovi pojmovi tretiraju kao sinonimi. Jedan od razloga za takvo rezonovanje jeste da većina raspodjela sa teškim repom koje se koriste u praksi spadaju u klasu subeksponencijalnih raspodjela.

DEFINICIJA 2.5 *Funkcija raspodjele F_X je subeksponencijalna, ako za sve $n \geq 2$ važi*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F_X^{*n}}(x)}{\overline{F}_X(x)} = n.$$

Važna osobina subeksponencijalnih raspodjela je da zadovoljavaju takozvani *principle of a single big jump.* Neka su X_i nezavisne, jednako raspodijeljene subeksponencijalne slučajne promjenljive. Tada za $n \geq 2$ važi

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i > x\right\} \sim P\left\{max(X_1, \ldots, X_n) > x\right\}, \quad x \to \infty. \tag{2.19}$$

Funkcija raspodjele parcijalne sume nezavisnih, jednako raspodijeljenih slučajnih promjenljivih je n-ti konvolucioni stepen funkcije raspodjele F_X

$$F_X^{*n}(x) = P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right\}.$$

Vjerovatnoća da parcijalna suma bude veća od x je jednaka repu $\overline{F_X^{*n}}(x)$. Vjerovatnoća za maksimalni element se može zapisati i aproksimirati na sledeći način

$$
\begin{aligned}
P\left\{max(X_1,\ldots,X_n) > x\right\} &= 1 - P\left\{max(X_1,\ldots,X_n) \leq x\right\} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \leq x\} \\
&= 1 - F_X^n(x) \qquad (\pm F_X \pm F_X^2 \pm \ldots \pm F_X^{n-1}) \\
&= \overline{F}_X(x) \sum_{k=0}^{n-1} F_X^k(x) \\
&\sim n\overline{F}_X(x), \qquad x \to \infty.
\end{aligned}
$$

Sada se uz pomoć definicije subeksponencijalne raspodjele dolazi do formule (2.19), koja zapravo govori o tome da rep maksimalne štete određuje rep ukupne štete. Dakle, ukupne štete će biti veće od nekog iznosa x, ako je maksimalna šteta veća od tog iznosa. Ovaj princip zapravo govori o tome, da je pod pretpostavkom subeksponencijalnosti glavni uzrok propasti jedna velika šteta.[8]

U nastavku se navode osnovne osobine subeksponencijalnih raspodjela koje opisuju vezu sa raspodjelama sa teškim repom i omogućavaju izvođenje aproksimacije vjerovatnoće propasti.

LEMA 2.3 **(Neke osobine subeksponencijalnih raspodjela)**

(i) ***(Chistyakov)*** *Neka je F_X subeksponencijalna raspodjela, tada za fiksirano y važi*

$$
\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_X(x-y)}{\overline{F}_X(x)} = 1. \tag{2.20}
$$

(ii) Ako važi (2.20), *onda za svako $\varepsilon > 0$*

$$
\lim_{x\to\infty} e^{\varepsilon x}\overline{F}_X(x) = \infty.
$$

(iii) ***(Kesten)*** *Neka je funkcija raspodjele F_X subeksponencijalna. Tada za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji konstanta $0 < K_\varepsilon < \infty$ takva da za $n \geq 2$ važi*

$$
\frac{\overline{F_X^{*n}}(x)}{\overline{F}_X(x)} \leq K_\varepsilon(1+\varepsilon)^n, \quad x \geq 0.
$$

[8] Više o The single big jump u glavi 8 u [10].

Na osnovu (ii) iz leme 2.3 se zaključuje da rep subeksponencijalne raspodjele $\overline{F}_X(x)$ sporije opada ka nuli od proizvoljne eksponencijalne funkcije $e^{-\varepsilon x}$, $\varepsilon > 0$. Štaviše, slijedi da funkcija generatrisa momenata $M_X(s)$ ne postoji (nije konačna) za proizvoljno $s > 0$. Neka $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\varepsilon x}\overline{F}_X(x) = \infty$, za sve $\varepsilon > 0$ i neka $x > 0$ i $s > 0$, tada

$$M_X(s) = \int_0^\infty e^{sy} dF_X(y) \geq \int_x^\infty e^{sy} dF_X(y) \geq e^{sx} \int_x^\infty dF_X(y) = e^{sx}\overline{F}_X(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty.$$

Klasa subeksponencijalnih raspodjela omogućava aproksimaciju vjerovatnoće propasti pomoću teoreme u nastavku.

TEOREMA 2.6 *Ako je funkcija raspodjele F_I subeksponencijalna, onda*

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\theta}\overline{F_I}(u), \quad u \to \infty.$$

DOKAZ:(dokaz teoreme 1.3.6 na 43. strani iz [7])
Primjenom Pollaczek-Khinchineove formule dobija se

$$\frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} = \frac{\theta}{1+\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \frac{\overline{F_I^{*n}}(u)}{\overline{F_I}(u)}.$$

Pošto je funkcija raspodjele F_I subeksponencijalna važi da je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F_I^{*n}}(x)}{\overline{F_I}(x)} = n.$$

Stoga bi se, pod pretpostavkom da granični procesi mogu da se razmijene, koristeći da je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$, *za* $|q| < 1$ dobilo sledeće

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F_I}(u)} &= \lim_{u\to\infty} \frac{\theta}{1+\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \frac{\overline{F_I^{*n}}(u)}{\overline{F_I}(u)} \\
&\overset{(?)}{=} \frac{\theta}{1+\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F_I^{*n}}(u)}{\overline{F_I}(u)} \\
&= \frac{\theta}{1+\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n n \\
&= \frac{\theta}{1+\theta}\frac{1+\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta},
\end{aligned}$$

čime bi dokaz bio završen. Preostaje još da se opravda korak (?).
Pošto je $\dfrac{1}{(1+\theta)} < 1$, postoji $\varepsilon > 0$ tako da $\dfrac{1}{1+\theta}(1+\varepsilon) < 1$.
Na osnovu teoreme Kestena (lema 2.3 pod (iii)) za takvo ε postoji konstanta K_ε tako da za $n \geq 2$ važi

$$\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \frac{\overline{F_I^{*n}}(u)}{\overline{F_I}(u)} \leq \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n K_\varepsilon (1+\varepsilon)^n < K_\varepsilon < \infty,$$

te se može primijeniti teorema o dominantnoj konvergenciji, odnosno opravdana je razmjena limesa i sume u koraku (?).

Na osnovu teoreme 2.6 se zaključuje da je vjerovatnoća propasti istog reda kao i $\overline{F_I}$, pri čemu se veličina $\overline{F_I}$ ne može zanemariti čak ni u slučaju kada je vrijednost početnih rezervi velika. Može se zaključiti da najveći iznosi šteta imaju značajan uticaj na ponašanje cjelokupnog portfolija osiguranja u dugom vremenskom periodu. Dakle, slučaj velikih šteta je daleko opasniji od slučaja malih šteta, gdje je pokazano da vjerovatnoća propasti eksponencijalno opada kada se vrijednosti početnih rezervi povećavaju.

Iako u opštem slučaju ne važi da je integral repa subeksponencijalne raspodjele subeksponencijalna raspodjela (F_X subeksponencijalna $\Longrightarrow$ F_I subeksponencijalna)[9], za većinu raspodjela koje se koriste u praksi je to slučaj, pa je teorema 2.6 pogodna za aproksimaciju vjerovatnoće propasti u slučaju kada raspodjela iznosa šteta F_X ima težak rep. Važi i sledeća teorema.

TEOREMA 2.7 *Ako je funkcija raspodjele F_X subeksponencijalna, onda*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F_I}(x)}{\overline{F}_X(x)} = \infty.$$

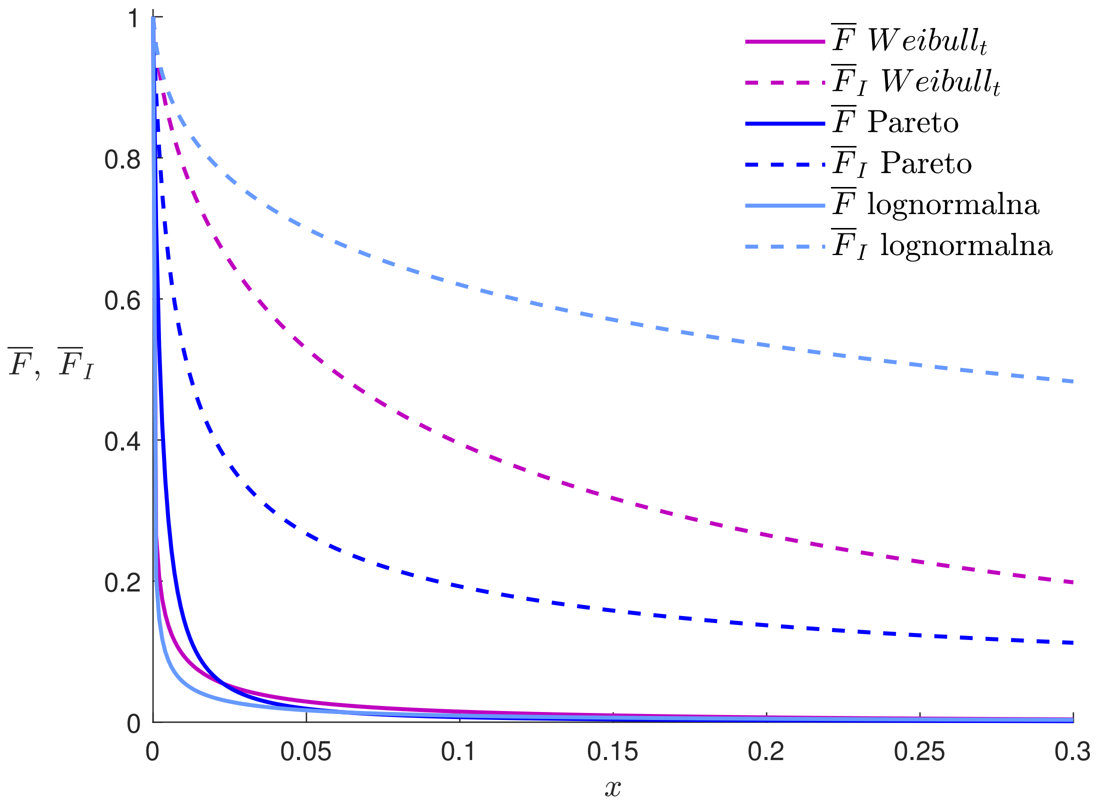
DOKAZ:(dokaz propozicije 2.3 na 303. strani iz [3])
Prema teoremi Chistyakova (lema 2.3 pod (i)) važi $\overline{F}_X(x+y) \sim \overline{F}_X(x)$ za $y > 0$, te

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F_I}(x)}{\overline{F}_X(x)} = \liminf_{x\to\infty} \frac{\int_x^\infty \overline{F}_X(z)dz}{\mu \overline{F}_X(x)} \geq \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_X(x+y)\int_x^{x+y} dz}{\mu \overline{F}_X(x)} = \frac{y}{\mu} \xrightarrow{y\to\infty} \infty.$$

[9]Kontraprimjer se može naći na 60. strani u [8].

Na osnovu teoreme 2.7 se može zaključiti da je rep integrala repa subeksponencijalne raspodjele teži od repa izvorne raspodjele. Odnosno, funkcija $\overline{F_I}$ sporije teži ka nuli od odgovarajuće funkcije $\overline{F}_X$.

Na slici 2.9 su prikazani repovi raspodjela sa teškim repom i odgovarajućih integrala repa raspodjele.



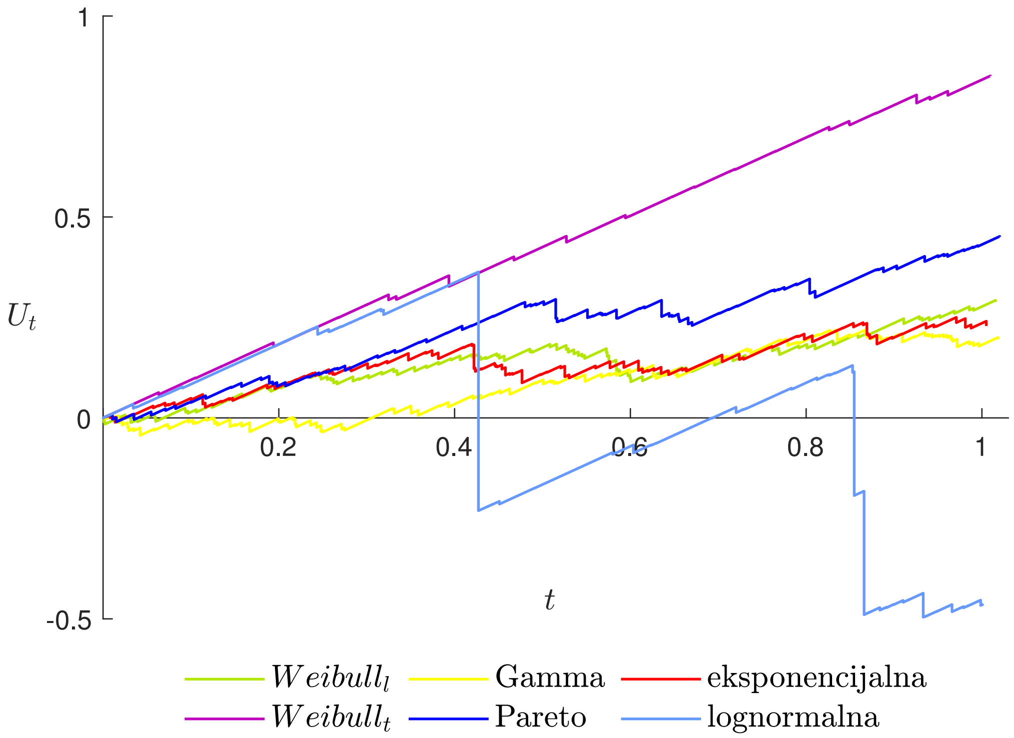
Slika 2.9. Repovi raspodjela sa teškim repom (Pareto, Weibull$_t$ i lognormalna) i odgovarajućih integrala repa raspodjele

U svim slučajevima raspodjela F_I ima teži rep od raspodjele F_X i teorema 2.6 se može primijeniti.

2.7 Grafički prikaz rezultata

Na kraju glave posvećene klasičnom Cramér-Lundbergovom modelu rizika se navedeni rezultati i aproksimacije vjerovatnoće propasti koriste za razne grafike.

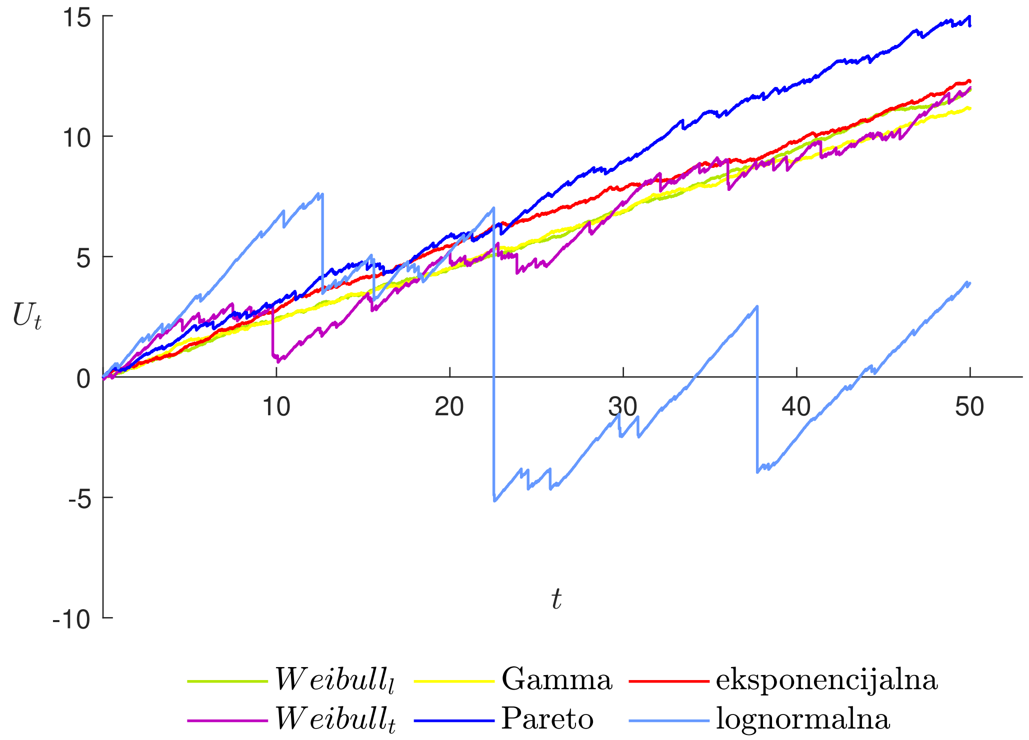
Najprije je izvršena simulacija procesa viška posmatranih raspodjela za vremenski period od jedne godine (slika 2.10) i 50 godina (slika 2.11).



Slika 2.10. Trajektorije procesa viška za vremenski period od jedne godine

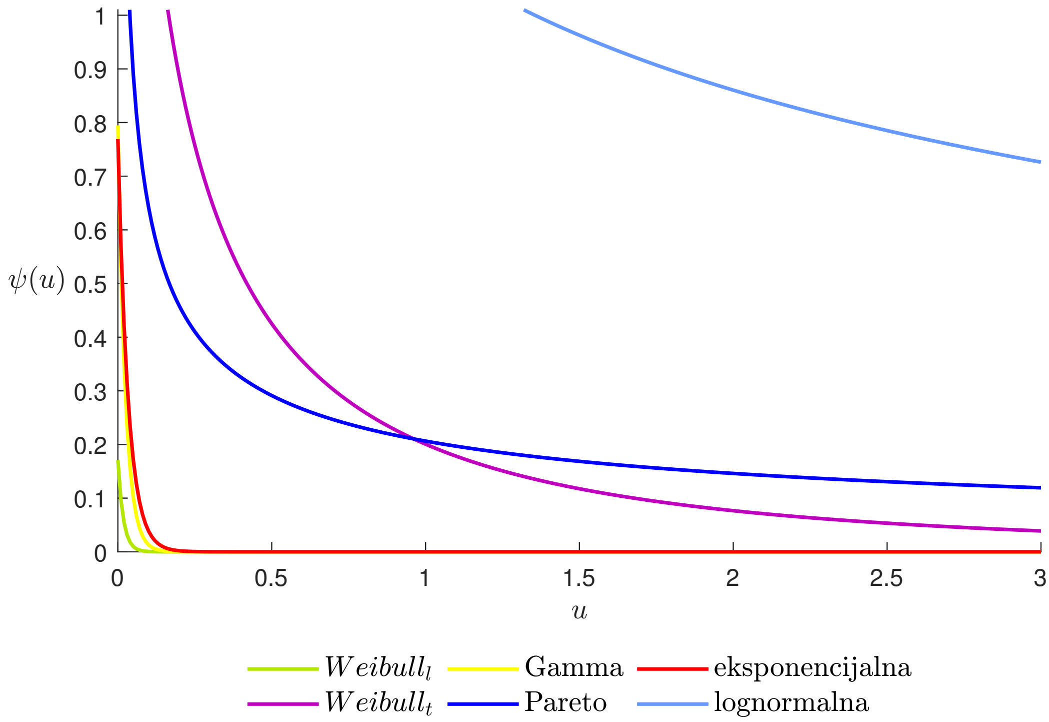
Na prikazu za jednu godinu posebno se izdvaja trajektorija procesa sa lognormalnim iznosima šteta, što se moglo i pretpostaviti s obzirom da lognormalna raspodjela ima najteži rep.

Na vremenskom horizontu od 50 godina se mogu uočiti neke pravilnosti. Trajektorije procesa gdje su štete modelirane raspodjelama sa lakim repom se jako slično ponašaju. Iako odstupaju od trajektorija raspodjela sa lakim repom, uočavaju se sličnosti u ponašanju trajektorija Weibull$_t$ i Pareto raspodjele. Međutim, čak i na duži vremenski period lognormalna raspodjela odstupa od ostalih i odlikuje se velikim oscilacijama. Može se pretpostaviti da će lognormalni iznosi šteta predstavljati najveću opasnost za osiguravajuću kompaniju.



Slika 2.11. Trajektorije procesa viška za vremenski period od 50 godina

Slika 2.12 ilustruje aproksimirane vjerovatnoće propasti kao funkcije početnih rezervi za različite raspodjele iznosa šteta. Za Gamma i Weibull$_l$ zahtjeve je korišćena Cramér-Lundbergova aproksimacija iz teoreme 2.4. Tačna vjerovatnoća propasti kada iznosi šteta prate eksponencijalnu raspodjelu je data teoremom 2.5. U slučaju kada iznosi zahtjeva prate Pareto, Weibull$_t$ i lognormalnu raspodjelu vjerovatnoća propasti je aproksimirana pomoću aproksimacije za teške repove, teorema 2.6.



Slika 2.12. Vjerovatnoće propasti, kao funkcije početnih rezervi, za različite raspodjele iznosa šteta

Kada je riječ o raspodjelama sa lakim repom, već za male vrijednosti početnog kapitala se vjerovatnoća propasti značajno smanjuje. Sa druge strane, da bi se postiglo zadovoljavajuće smanjenje vjerovatnoće propasti u slučaju teških repova, neophodne su velike vrijednosti početnih rezervi, posebno kada su u pitanju lognormalno raspodijeljeni iznosi šteta. Velike vrijednosti rezervi nose sa sobom i rizik za osiguravajuću kompaniju, te bi ih trebalo izbjegavati.

Neka je $u_{0.1}$ vrijednost početnih rezervi za koju je vjerovatnoća propasti jednaka 0.1. U tabeli 2.3 su navedene vrijednosti $u_{0.1}$ za različite raspodjele.

Tabela 2.3. Početne rezerve koje daju vjerovatnoću propasti 0.1

Raspodjela	$u_{0.1}$
eksponencijalna	0.068
Gamma	0.0502
Weibull$_l$	0.0093
Pareto	4.2696
Weibull$_t$	1.67
lognormalna	90.68

Najsigurniji za osiguravajuću kompaniju su Weibull$_l$ zahtjevi, dok se kao izrazito opasni izdvajaju lognormalni zahtjevi. Jasno je da iznosi šteta koji prate raspodjelu sa teškim repom znatno komplikuju stvari i povećavaju rizik osiguravajuće kompanije. Treba imati na umu da su u pitanju asimptotske aproksimacije vjerovatnoće propasti, koje za male vrijednosti početnih rezervi nisu u potpunosti precizne, ali se na osnovu njih može dosta zaključiti o odnosima posmatranih raspodjela.

3

Cramér-Lundbergov model rizika pod uticajem stohastičkih investicija

Cramér-Lundbergov model ima ulogu standarda u klasičnoj teoriji rizika, ali su pretpostavke na kojima počiva dosta restriktivne, zbog čega nisu uvijek realne. Zbog toga su česte njegove modifikacije koje se odlikuju većim stepenom prilagođenosti stvarnoj dinamici funkcionisanja osiguravajućeg portfolija, ali istovremeno i većim stepenom matematičke kompleksnosti. Autori poput Frolove, Paulsena i Constantinescu početkom 21. vijeka razmatraju perturbacije klasičnog modela rizika geometrijskim Brownovim kretanjem, na šta se može gledati kao na investiranje viška iz Cramér-Lundbergovog modela u rizičnu aktivu.

U klasičnom modelu rizika jedini priliv novca u osiguravajuću kompaniju potiče od premija. Međutim, poznato je da na prosperitet osiguravajuće kompanije ne utiče samo rezultat iz njenog osnovnog poslovanja, već je od velikog značaja i inteligentno investiranje novca kojim raspolaže.

Modeli u kojima osiguravajuća kompanija ulaže višak kapitala (ili jedan njegov dio) u rizičnu aktivu, su sve popularniji poslednjih godina, a inspiracija za njihovo razmatranje dolazi iz finansijske matematike. U njima se javljaju dvije različite vrste rizika, finansijski, koji potiče od rizične aktive, i rizik osiguranja, koji se vezuje za slučajne iznose šteta. Osnovno pitanje je kako se ponaša vjerovatnoća propasti kada početne rezerve rastu, kao i koliko i na koji način ove dvije vrste rizika utiču na njeno asimptotsko ponašanje. Ispostavlja se da rizične investicije mogu narušiti solventnost osiguravajuće kompanije jednako kao i veliki zahtjevi, jer se gubi osobina eksponencijalnog opadanja vjerovatnoće propasti sa porastom početnih rezervi.

Shodno tome, ova glava je posvećena problemu propasti pod uticajem difuzije, tačnije slučaju kada se višak osiguravajuće kompanije ulaže u aktivu koja prati geometrijsko Brownovo kretanje. Nakon navođenja osnovnih pretpostavki novog modela, primjenom infinitezimalnog generatora formira se integrodiferencijalna jednačina vjerovatnoće propasti. Po uzoru na [2] i [5], primjenom Laplaceove transformacije i teorije regularne varijacije se analizira asimptotsko ponašanje vjerovatnoće propasti u slučaju raspodjela iznosa šteta sa lakim i teškim repom. Za razliku od klasičnog modela gdje se, uz određene uslove, vjerovatnoća propasti ponaša kao opadajuća eksponencijalna funkcija, u Cramér-Lundbergovom modelu sa stohastičkim investicijama postoji nekoliko mogućnosti, vjerovatnoća propasti se ponaša kao stepena funkcija ili kao rep raspodjele iznosa šteta, ili je jednaka jedan.

3.1 Usložnjavanje modela dodavanjem difuzije

Klasičan model rizika se proširuje tako što se pretpostavlja da osiguravajuća kompanija investira u rizičnu aktivu čija cijena prati geometrijsko Brownovo kretanje

$$S_t = e^{\left(\eta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t},$$

pri čemu je η drift, $\sigma > 0$ volatilnost i W_t standardno Brownovo kretanje nezavisno od procesa $\{N_t, t \geq 0\}$ i individualnih šteta X_i. Proces S_t je proces difuzije i zadovoljava sledeću stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$dS_t = \eta S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 = 1.$$

Neka osiguravajuća kuća neprekidno ulaže dio rezervi $\delta R_t,\ \delta \in [0,1]$ u rizičnu aktivu. Tada se rezultujući proces viška može zapisati kao

$$R_t = u + \delta\eta \int_0^t R_s ds + \delta\sigma \int_0^t R_s dW_s + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t \geq 0,$$

ili u diferencijalnom obliku

$$\begin{aligned} dR_t &= \delta\eta R_t dt + \delta\sigma R_t dW_t + dU_t, \quad t \geq 0 \\ R_0 &= u. \end{aligned}$$

Ulaganje konstantnog dijela δ je ekvivalentno (u raspodjeli) ulaganju cijelog viška u aktivu čija cijena prati geometrijsko Brownovo kretanje sa driftom $\delta\eta$ i volatilnošću $\delta\sigma$, te parametar δ ne utiče značajno i bez uticaja na opštost se uzima da je $\delta = 1$, odnosno da se sav višak investira. Dakle, posmatra se proces

$$R_t = u + \eta \int_0^t R_s ds + \sigma \int_0^t R_s dW_s + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

koji opisuje kretanje kapitala osiguravajuće kompanije koji se neprekidno investira u aktivu čija cijena prati geometrijsko Brownovo kretanje.

Slično kao u klasičnom modelu, prvi trenutak u kojem proces viška R_t padne ispod nule je trenutak propasti

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0 : R_t < 0 | R_0 = u\},$$

pri čemu je $\tau(u) = \infty$, ako je $R_t \geq 0, \ \forall t \geq 0$. Vjerovatnoća propasti na beskonačnom horizontu se definiše kao

$$\psi(u) = P\{\tau(u) < \infty\}.$$

3.2 Integrodiferencijalna jednačina vjerovatnoće propasti

Značajne informacije o procesu daje njegov infinitezimalni generator. Pojam generatora se vezuje za neprekidne procese Markova.

DEFINICIJA 3.1 *Neka je $\{X_t, t \geq 0\}$ stohastički proces sa neprekidnim vremenom i skupom stanja S. Proces ima tzv. Markovsko svojstvo ako važi*

$$P\{X_{s+t} = x_j | X_s = x_i, X_r = x_r, 0 \leq r < s\} = P\{X_{s+t} = x_j | X_s = x_i\}$$

za svako $s, t \geq 0$ i svako $x_r \in S$.

Dakle, vjerovatnoća da se proces nađe u stanju x_j u trenutku $s + t$, zavisi samo od stanja u trenutku s, a ne od stanja u prošlim trenucima $r \geq 0$.

DEFINICIJA 3.2 *Infinitezimalni generator procesa Markova $\{X_t, t \geq 0\}$ je linearni operator A, koji se definiše kao*

$$Ag(x) = \lim_{h \to 0} \frac{E(g(X_h)|X_0 = x) - g(x)}{h}$$

za sve realne, ograničene, mjerljive funkcije g za koje gornji limes postoji.

Infinitezimalni generator procesa

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

se može zapisati kao

$$Ag(u) = cg'(u) + \lambda \int_0^\infty (g(u-y) - g(u))\, dF_X(y), \tag{3.2}$$

gdje je g ograničena, realna diferencijabilna funkcija. Ukoliko je dat proces difuzije

$$dS_t = a(t, S_t)dt + b(t, S_t)dW_t,$$

njegov infinitezimalni generator za dva puta neprekidno diferencijabilnu funkciju g je

$$Ag(u) = a(t, u)g'(u) + \frac{b^2(t, u)}{2} g''(u). \tag{3.3}$$

U slučaju da je $a(t, S_t) = \eta S_t$ i $b(t, S_t) = \sigma S_t$ izraz (3.3) postaje

$$Ag(u) = \eta u g'(u) + \frac{\sigma^2}{2} u^2 g''(u). \tag{3.4}$$

R_t je zbir procesa sa skokovima i procesa difuzije pa se njegov infinitezimalni generator dobija sabiranjem (3.2) i (3.4), i ima sledeći oblik

$$A\psi(u) = \frac{\sigma^2}{2} u^2 \psi''(u) + (\eta u + c)\psi'(u) + \lambda \int_0^\infty (\psi(u-y) - \psi(u)) dF_X(y)$$

Ako se iskoristi da je F_X funkcija raspodjele pa važi $\int_0^\infty dF_X(y) = 1$ i da je $\psi(u-y) = 1$

za $u < y$, infinitezimalni generator se može zapisati kao

$$\begin{aligned} A\psi(u) &= \frac{\sigma^2}{2}u^2\psi''(u) + (\eta u + c)\psi'(u) + \lambda\int_0^\infty \psi(u-y)dF_X(y) - \lambda\psi(u) \\ &= \frac{\sigma^2}{2}u^2\psi''(u) + (\eta u + c)\psi'(u) + \lambda\int_0^u \psi(u-y)dF_X(y) + \lambda\overline{F}_X(u) - \lambda\psi(u). \end{aligned}$$

Značajan rezultat teorije propasti je sledeća teorema iz [13] koja omogućava analizu vjerovatnoće propasti pomoću infinitezimalnog generatora.

TEOREMA 3.1 *Neka je $\psi(u)$ ograničena i dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija definisana za $u \geq 0$. Ako je $\psi(u)$ rješenje jednačine $A\psi(u) = 0$, $u > 0$ zajedno sa graničnim uslovima*

$$\begin{aligned} \psi(u) &= 1, \quad u < 0 \\ \lim_{u\to\infty} \psi(u) &= 0, \end{aligned}$$

onda je to vjerovatnoća propasti, odnosno $\psi(u) = P\{\tau(u) < \infty\}$.

Dakle, funkcija za koju je infinitezimalni generator procesa rizika jednak nuli i koja zadovoljava određene granične uslove je zapravo vjerovatnoća propasti. Navedena teorema omogućava formiranje integrodiferencijalne jednačine vjerovatnoće propasti za dati model.

Jednačina $A\psi(u) = 0$ ima oblik

$$\frac{\sigma^2}{2}u^2\psi''(u) + (\eta u + c)\psi'(u) - \lambda\psi(u) + \lambda\int_0^u \psi(u-y)dF_X(y) + \lambda\overline{F}_X(u) = 0. \quad (3.5)$$

Na ovaj način se problem nalaženja vjerovatnoće propasti pod uticajem stohastičkih investicija svodi na čisto analitički problem rješavanja integrodiferencijalne jednačine.

3.3 Vjerovatnoća propasti pod uticajem difuzije

Dalje se pretpostavlja da je $\sigma > 0$ (za $\sigma = 0$ je riječ o nerizičnoj aktivi) i u zavisnosti od vrijednosti parametra $\rho := \dfrac{2\eta}{\sigma^2} - 1$ razlikuju se dva slučaja prilikom analize vjerovatnoće propasti:

- slučaj velike volatilnosti, $\rho \leq 0$ tj. $\dfrac{2\eta}{\sigma^2} \leq 1$;
- slučaj male volatilnosti, $\rho > 0$, odnosno $\dfrac{2\eta}{\sigma^2} > 1$.

Prilikom investiranja u aktivu sa velikom volatilnošću, odnosno kada je $\frac{2\eta}{\sigma^2} \leq 1$, propast je neizbježna, bez obzira kolike su početne rezerve u.

TEOREMA 3.2 *Neka je Cramér-Lundbergov model rizika pod uticajem stohastičkih investicija dat sa* (3.1) *i neka je* $\sigma > 0$. *Ako važi* $\rho \leq 0$, *onda*

$$\psi(u) = 1, \quad u > 0.$$

Dokaz se može pronaći u [9].

U slučaju aktive sa malom volatilnošću, analiza se znatno komplikuje, nije moguće doći do eksplicitnog izraza za vjerovatnoću propasti i potrebno je obratiti pažnju na raspodjelu iznosa zahtjeva, koja u gornjem slučaju ne igra ulogu. U opštem slučaju je skoro nemoguće doći do eksplicitnog rješenja integrodiferencijalne jednačine (3.5), te se pribjegava asimptotskoj analizi u okviru koje je moguće doći do vjerovatnoće propasti za velike vrijednosti početnih rezervi ($u \to \infty$).

Struktura integrodiferencijalne jednakosti (3.5), tačnije konvolucija koja se u njoj javlja, poziva na korišćenje Laplaceove transformacije, koja konvoluciju transformiše u proizvod. Prema [2], najprije je potrebno izvršiti analizu Laplaceove transformacije rješenja jednačine (3.5) u okolini singulariteta, a zatim se primjenom Karamata-Tauberove teoreme i Heavisideovog operacionog principa dolazi do zaključaka o asimptotskom ponašanju vjerovatnoće propasti. U nastavku se određuje Laplaceova transformacija jednačine $A\psi(u) = 0$.

$$\frac{\sigma^2}{2}\widehat{u^2\psi''(u)}(s) + \eta\,\widehat{u\psi'(u)}(s) + c\,\widehat{\psi'(u)}(s) - \lambda\widehat{\psi}(s) + \lambda\widehat{(\psi * F_X)}(s) + \lambda\widehat{\overline{F}}_X(s) = 0 \quad (3.6)$$

Primjenom osobina iz leme 1.1 se dobija:

- $$\begin{aligned} \widehat{u^2\psi''(u)}(s) &= (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\widehat{\psi''}(s) \\ &= \frac{d^2}{ds^2}(s^2\widehat{\psi}(s) - s\psi(0) - \psi'(0)) \\ &= s^2\widehat{\psi}''(s) + 4s\widehat{\psi}'(s) + 2\widehat{\psi}(s); \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \widehat{u\psi'(u)}(s) &= (-1)\frac{d}{ds}\widehat{\psi'}(s) \\ &= -\frac{d}{ds}(s\widehat{\psi}(s) - \psi(0)) \\ &= -\widehat{\psi}(s) - s\widehat{\psi}'(s); \end{aligned}$$

- $$\widehat{\psi'(u)}(s) = s\widehat{\psi}(s) - \psi(0).$$

Jednačina (3.6) se nakon uvrštavanja gore dobijenih izraza i primjene (1.8) može zapisati kao

$$\frac{\sigma^2}{2}s^2\widehat{\psi}''(s) + \left(2\sigma^2 - \eta\right)s\widehat{\psi}'(s) + \left(\sigma^2 - \eta + cs + \lambda\widetilde{F}_X(s) - \lambda\right)\widehat{\psi}(s) = c\psi(0) - \lambda\widehat{\widetilde{F}}_X(s).$$

Nakon množenja faktorom $\dfrac{2}{\sigma^2}$ dobija se

$$s^2\widehat{\psi}''(s) + p(s)s\widehat{\psi}'(s) + q(s)\widehat{\psi}(s) = f(s), \tag{3.7}$$

gdje je

$$\begin{aligned} p(s) &= 2\left(2 - \frac{\eta}{\sigma^2}\right), \\ q(s) &= \frac{2}{\sigma^2}\left(\sigma^2 - \eta + cs + \lambda\widetilde{F}_X(s) - \lambda\right), \\ f(s) &= \frac{2c}{\sigma^2}\psi(0) - \frac{2\lambda}{\sigma^2}\widehat{\widetilde{F}}_X(s). \end{aligned}$$

Dakle, funkcija $\widehat{\psi}(s)$ zadovoljava nehomogenu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa nekonstantnim koeficijentima i njeno rješenje se može zapisati u obliku

$$\widehat{\psi}(s) = \widehat{\psi}_h(s) + \widehat{\psi}_p(s), \tag{3.8}$$

gdje je $\widehat{\psi}_h(s)$ homogeno, a $\widehat{\psi}_p(s)$ partikularno rješenje.

Najprije se traži homogeno rješenje $\widehat{\psi}_h(s)$ tako što se posmatra homogena jednačina

$$s^2\widehat{\psi}''(s) + p(s)s\widehat{\psi}'(s) + q(s)\widehat{\psi}(s) = 0. \tag{3.9}$$

Tačka $s = 0$ je regularno-singularna tačka navedene jednačine, te se za rješavanje primjenjuje Frobeniusov metod. Indeksna jednačina za (3.9) je

$$r^2 + (p(0) - 1)r + q(0) = 0.$$

Uvrštavanjem

$$\begin{aligned} p(0) &= 4 - \frac{2\eta}{\sigma^2}, \\ q(0) &= \frac{2}{\sigma^2}\left(\sigma^2 - \eta + c\cdot 0 + \lambda \underbrace{\int_0^\infty e^{-0\cdot x} dF_X(x)}_{=1} - \lambda\right) = 2 - \frac{2\eta}{\sigma^2}, \end{aligned}$$

dobija se jednačina

$$r^2 + \left(3 - \frac{2\eta}{\sigma^2}\right) r + 2 - \frac{2\eta}{\sigma^2} = 0,$$

koja za $2\sigma^2 \neq \eta$ ima dva različita rješenja $r_1 = -1$ i $r_2 = \frac{2\eta}{\sigma^2} - 2 = \rho - 1$. Za $1 < \frac{2\eta}{\sigma^2} < 2$ važi $r_2 - r_1 \notin \mathbb{N}_0$, te su $\widehat{\psi}_1(s)$ i $\widehat{\psi}_2(s)$ dva linearno nezavisna rješenja homogene jednačine

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_1(s) &= s^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{1,k}s^k = s^{-1}\gamma_1(s), \\ \widehat{\psi}_2(s) &= s^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{2,k}s^k = s^{\frac{2\eta}{\sigma^2}-2}\gamma_2(s), \end{aligned}$$

pri čemu su funkcije $\gamma_1(s)$ i $\gamma_2(s)$ holomorfne[1] u 0 i $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 1$, $\delta_{1,0} = \delta_{2,0} = 1$, pa su istovremeno i sporo varirajuće funkcije. Konačno se homogeno rješenje može zapisati kao

$$\widehat{\psi}_h(s) = c_1\widehat{\psi}_1(s) + c_2\widehat{\psi}_2(s) = c_1 s^{-1}\gamma_1(s) + c_2 s^{\frac{2\eta}{\sigma^2}-2}\gamma_2(s). \tag{3.10}$$

[1]Holomorfna funkcija u nekoj tački je kompleksna funkcija koja u toj tački ima izvod i on je različit od nule. Svaka holomorfna funkcija je beskonačno puta diferencijabilna i jednaka svom Taylorovom razvoju, pa je istovremeno i analitička funkcija.

Za određivanje partikularnog rješenja diferencijalne jednačine (3.7) koristi se metod varijacije konstanti. Partikularno rješenje se može zapisati kao

$$\widehat{\psi}_p(s) = c_1(s)\widehat{\psi}_1(s) + c_2(s)\widehat{\psi}_2(s),$$

gdje su $\widehat{\psi}_1(s)$ i $\widehat{\psi}_2(s)$ rješenja pridružene homogene jednačine, a $c_1(s)$ i $c_2(s)$ nepoznate koje se određuju iz sistema:

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}_1(s)c_1'(s) + \widehat{\psi}_2(s)c_2'(s) &= 0\\ \widehat{\psi}_1'(s)c_1'(s) + \widehat{\psi}_2'(s)c_2'(s) &= \frac{f(s)}{s^2}.\end{aligned}$$

Primjenom Cramerovog pravila se dolazi do sledećeg izraza za nepoznate

$$c_i(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{W_i(t)}{t^2 W(t)} dt, \quad i = 1, 2, \tag{3.11}$$

gdje je s_0 mala pozitivna konstanta, $W(s)$ ($\neq 0$) determinanta Wronskog ili Wronskijan data sa

$$W(s) = \begin{vmatrix} \widehat{\psi}_1(s) & \widehat{\psi}_2(s) \\ \widehat{\psi}_1'(s) & \widehat{\psi}_2'(s) \end{vmatrix},$$

a $W_i(s)$ su determinante dobijene zamjenjenom i-te kolone determinante $W(s)$ vektorom $(0, f(s))^T$

$$W_1(s) = \begin{vmatrix} 0 & \widehat{\psi}_2(s) \\ f(s) & \widehat{\psi}_2'(s) \end{vmatrix}, \qquad W_2(s) = \begin{vmatrix} \widehat{\psi}_1(s) & 0 \\ \widehat{\psi}_1'(s) & f(s) \end{vmatrix}.$$

Važno je pomenuti da $W(s) \neq 0$ implicira da su rješenja $\widehat{\psi}_1(s)$ i $\widehat{\psi}_2(s)$ linearno nezavisna. Izraz (3.11) se može zapisati kao

$$c_i(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{f(t)\widetilde{W}_i(t)}{t^2 W(t)} dt, \quad i = 1, 2, \tag{3.12}$$

pri čemu su determinante $\widetilde{W}_i(s)$ dobijene zamjenom i-te kolone determinante Wronskog $W(s)$ vektorom $(0, 1)^T$. Može se pokazati da postoje holomorfne funkcije $\xi(s)$ i $\xi_i(s)$, $\xi(0) \neq 0 \neq \xi_i(0),\ i = 1, 2$ (linearne kombinacije funkcija $\gamma_i(s)$ i njihovih izvoda) takve da važi

$$\frac{\widetilde{W}_i(s)}{s^2 W(s)} = s^{-r_i - 1}\frac{\xi_i(s)}{\xi(s)},$$

te (3.12) postaje

$$c_i(s) = \int_{s_0}^{s} f(t) t^{-r_i-1} \frac{\xi_i(t)}{\xi(t)} dt, \quad i = 1, 2.$$

Ukoliko se iskoristi da je

$$f(s) = \frac{2c}{\sigma^2}\psi(0) - \frac{2\lambda}{\sigma^2}\widehat{\overline{F}}_X(s)$$

partikularno rješenje diferencijalne jednačine (3.7) se može zapisati kao

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}_p(s) &= \sum_{i=1}^{2} \widehat{\psi}_i(s) c_i(s) \\
&= \sum_{i=1}^{2} s^{r_i}\gamma_i(s) \int_{s_0}^{s} f(t) t^{-r_i-1} \frac{\xi_i(t)}{\xi(t)} dt \\
&= \frac{2c}{\sigma^2}\psi(0) \sum_{i=1}^{2} s^{r_i}\gamma_i(s) \int_{s_0}^{s} t^{-r_i-1} \frac{\xi_i(t)}{\xi(t)} dt - \frac{2\lambda}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{2} s^{r_i}\gamma_i(s) \int_{s_0}^{s} \widehat{\overline{F}}_X(t) t^{-r_i-1} \frac{\xi_i(t)}{\xi(t)} dt.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Ovim je u potpunosti određeno opšte rješenje jednačine (3.7) (formule (3.8), (3.10) i (3.13)). Sledeći korak je analiza asimptotskog ponašanja rješenja, koja se vrši odvojeno za homogeno i partikularno rješenje, primjenom Karamata-Tauberove teoreme i teoreme o monotonoj gustini, i primjenom Heavisideovog operacionog principa, respektivno.

Pošto se Karamata-Tauberova teorema odnosi na Laplace-Stieltjesovu transformaciju funkcije uvodi se pomoćna funkcija

$$\Psi_h(u) = \begin{cases} 0, & \text{ako } u < 0 \\ \displaystyle\int_0^u \psi_h(x)dx, & \text{ako } u \geq 0. \end{cases}$$

Laplace-Stieltjesova transformacija funkcije Ψ_h je jednaka Laplaceovoj transformaciji funkcije ψ_h, tj.

$$\widetilde{\Psi}_h(s) = \int_0^\infty e^{-su} d\Psi_h(u) = \int_0^\infty e^{-su}\psi_h(u)du = \widehat{\psi}_h(s).$$

Asimptotsko ponašanje homogenog rješenja $\widetilde{\Psi}_h(s)$ kada $s \to 0$ određuje asimptotsko ponašanje funkcije $\Psi_h(u)$ kada $u \to \infty$, koje zatim utiče na ponašanje funkcije $\psi_h(u)$ kada $u \to \infty$.

Ponašanje homogenog rješenja kada $s \to 0$ diktira najsporije opadajući stepen linearne kombinacije

$$\widetilde{\Psi}_h(s) = \widehat{\psi}_h(s) = c_1 s^{-1}\gamma_1(s) + c_2 s^{\frac{2\eta}{\sigma^2}-2}\gamma_2(s). \tag{3.14}$$

Ukoliko se pretpostavi da je to $r_1 = -1$, važi

$$\widetilde{\Psi}_h(s) \sim c_1\gamma_1(s)s^{-1}, \quad s \to 0.$$

Pomoćna funkcija $\Psi_h(u)$ zadovoljava uslove Karamata-Tauberove teoreme 1.6, te se njenom primjenom dobija

$$\Psi_h(u) \sim \frac{c_1\gamma_1(1/u)}{\Gamma(2)}u, \quad u \to \infty.$$

Teorema o monotonoj gustini 1.7 daje

$$\psi_h(u) \sim \frac{c_1\gamma_1(1/u)}{\Gamma(2)}, \quad u \to \infty$$

što je u suprotnosti sa graničnim uslovima teoreme 3.1, te slijedi da je $c_1 = 0$.

Druga mogućnost je da je $s^{\frac{2\eta}{\sigma^2}-2}$ vodeći član u (3.14), te je asimptotsko ponašanje funkcije $\widetilde{\Psi}_h(s)$ u okolini nule dato sa

$$\widetilde{\Psi}_h(s) \sim c_2\gamma_2(s)s^{\frac{2\eta}{\sigma^2}-2}, \quad s \to 0.$$

Kao i u prethodnom slučaju, primjenom teoreme 1.6 se dobija

$$\Psi_h(u) \sim \frac{c_2\gamma_2(1/u)}{\Gamma(3-\frac{2\eta}{\sigma^2})}u^{2-\frac{2\eta}{\sigma^2}}, \quad u \to \infty,$$

a zatim na osnovu teoreme 1.7 slijedi

$$\psi_h(u) \sim \frac{c_2\left(2-\frac{2\eta}{\sigma^2}\right)\gamma_2(1/u)}{\Gamma(3-\frac{2\eta}{\sigma^2})}u^{1-\frac{2\eta}{\sigma^2}}, \quad u \to \infty.$$

Važno je primijetiti da, pošto važi uslov male volatilnosti $1 - \frac{2\eta}{\sigma^2} < 0$, $\psi_h(u)$ opada ka nuli kada u teži ka beskonačnosti, čime je zadovoljen granični uslov iz teoreme 3.1.

Pošto je $\gamma_2(0) = 1$ asimptotsko ponašanje homogenog dijela vjerovatnoće propasti se može zapisati kao

$$\psi_h(u) \sim C u^{1-\frac{2\eta}{\sigma^2}}, \quad u \to \infty, \tag{3.15}$$

pri čemu je $C = \dfrac{c_2\left(2 - \frac{2\eta}{\sigma^2}\right)}{\Gamma(3 - \frac{2\eta}{\sigma^2})}$.

Nakon što je završena analiza asimptotskog ponašanja homogenog rješenja, preostaje još da se izvrši analiza partikularnog rješenja jednačine (3.7). Važno je primijetiti da partikularno rješenje dato formulom (3.13) zavisi od Laplaceove transformacije repa raspodjele $\widehat{\overline{F}}_X(s)$, te je neophodno utvrditi kakav je uticaj raspodjele iznosa šteta na partikularno rješenje.

Primjenom parcijalne integracije ($u = \overline{F}_X(x),\ dv = e^{-sx}dx$) dobija se

$$\begin{aligned}
\widehat{\overline{F}}_X(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\overline{F}_X(x)dx \\
&= -\frac{1}{s}(1 - F_X(x))e^{-sx}\Big|_0^\infty - \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}dF_X(x) \\
&= -\frac{1}{s}\left(F_X(0) - 1 + M_X(-s)\right),
\end{aligned}$$

odnosno

$$\widehat{\overline{F}}_X(-s) = \frac{1}{s}\left(M_X(s) - 1\right), \quad \text{za } s \neq 0. \tag{3.16}$$

Ako raspodjela iznosa šteta ima lak rep, onda postoji $s_0 > 0$ takvo da je $M_X(s_0) < \infty$. Neka je domen funkcije $M_X(s)$ interval $[0, s^*)$, gdje je $s^* > s_0$. Korišćenjem činjenice da je domen funkcije $1/s$ interval $(0, \infty)$ i jednakosti (3.16) zaključuje se da je domen funkcije $\widehat{\overline{F}}_X(-s)$ interval $(0, s^*)$. Slijedi i da je $\widehat{\overline{F}}_X(-s) < \infty$ za $s \in (0, s^*)$. Ukoliko je $s^* = \infty$, funkcija $M_X(s)$ je svuda definisana, pa je i $\widehat{\overline{F}}_X$ svuda analitička. Ako je $s^* < \infty$, $M_X(s)$ ima vertikalnu asimptotu, pa će krajnji desni singularitet funkcije $\widehat{\overline{F}}_X(s)$ biti u $-s^*$.

S druge strane, ako je rep raspodjele težak onda je za sve $s > 0$ $M_X(s) = \infty$. Na osnovu jednakosti (3.16) važi da je tada i $\widehat{\overline{F}}_X(-s) = \infty$ za sve $s > 0$. Krajnji desni singularitet funkcije $\widehat{\overline{F}}_X(s)$ je u $s^* = 0$.

Shodno prethodno navedenom potrebno je posmatrati dva odvojena slučaja:

- Iznosi šteta imaju lak rep, odnosno rep raspodjele je eksponencijalno ograničen. Neka $\widehat{\overline{F}}_X(s)$ ima krajnji desni singularitet u $-s^* < 0$ i $\widehat{\overline{F}}_X(-s^*) = \infty$.
- Iznosi šteta imaju težak rep, važi $\widehat{\overline{F}}_X(-s) = \infty$ za sve $s > 0$. Jasno, u ovom slučaju je $s^* = 0$ krajnji desni singularitet funkcije $\widehat{\overline{F}}_X(s)$.

Raspodjela iznosa šteta ima lak rep.
Primjenom Lopitalovog pravila se pokazuje

$$\begin{aligned}\lim_{s\to -s^*}\frac{\displaystyle\int_{s_0}^{s} t^{-r_i-1}\widehat{\overline{F}}_X(t)dt}{s^{-r_i}\widehat{\overline{F}}_X(s)} &= \lim_{s\to -s^*}\frac{s^{-r_i-1}\widehat{\overline{F}}_X(s)}{-r_i s^{-r_i-1}\widehat{\overline{F}}_X(s) + s^{-r_i}\frac{d}{ds}\widehat{\overline{F}}_X(s)}\\ &= \frac{1}{-r_i + \lim\limits_{s\to -s^*}\dfrac{s\frac{d}{ds}\widehat{\overline{F}}_X(s)}{\widehat{\overline{F}}_X(s)}} = \frac{1}{-r_i}.\end{aligned}$$

Odnosno, važi

$$\int_{s_0}^{s} t^{-r_i-1}\widehat{\overline{F}}_X(t)dt \sim \frac{1}{-r_i}s^{-r_i}\widehat{\overline{F}}_X(s), \quad s\to -s^*.$$

Važi i

$$\int_{s_0}^{s} t^{-r_i-1}dt \sim \frac{1}{-r_i}s^{-r_i}, \quad s\to -s^*$$

Sada se na osnovu izraza (3.13) dobija

$$\widehat{\psi}_p(s) \sim \frac{2c}{\sigma^2}\psi(0)\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{-r_i}\right)\gamma_i(-s^*)\frac{\xi_i(-s^*)}{\xi(-s^*)} - \frac{2\lambda}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{-r_i}\right)\gamma_i(-s^*)\frac{\xi_i(-s^*)}{\xi(-s^*)}\widehat{\overline{F}}_X(s), \quad s\to -s^*.$$

Moguće je još izvršiti normalizovanje, tako da je $\gamma_i(-s^*)\frac{\xi_i(-s^*)}{\xi(-s^*)} = 1,\ i = 1,2$. Pošto je $-s^*$ krajnji desni singularitet funkcije $\widehat{\psi_p}(s)$ i prvi član asimptotske ekspanzije je analitički u $-s^*$ (može se zapisati kao $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(s+s^*)^k$), primjenom Heavisideovog operacionog principa (teorema 1.8) se zaključuje

$$\psi_p(u) \sim \frac{2\lambda}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{r_i}\overline{F}_X(u), \quad u\to\infty. \tag{3.17}$$

Raspodjela iznosa šteta ima težak rep.
Slično kao u prethodnom slučaju se primjenom Lopitalovog pravila pokazuje

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\frac{\int_{s_0}^{s} t^{-r_i-1}\widehat{\overline{F}}_X(t)dt}{s^{-r_i}\widehat{\overline{F}}_X(s)} &= \lim_{s\to 0}\frac{s^{-r_i-1}\widehat{\overline{F}}_X(s)}{-r_i s^{-r_i-1}\widehat{\overline{F}}_X(s)+s^{-r_i}\frac{d}{ds}\widehat{\overline{F}}_X(s)}\\ &= \frac{1}{-r_i+\lim\limits_{s\to 0}\frac{s\frac{d}{ds}\widehat{\overline{F}}_X(s)}{\widehat{\overline{F}}_X(s)}} = \frac{1}{-r_i}.\end{aligned}$$

Stoga

$$\int_{s_0}^{s} t^{-r_i-1}\widehat{\overline{F}}_X(t)dt \sim \frac{1}{-r_i}s^{-r_i}\widehat{\overline{F}}_X(s), \quad s\to 0.$$

Ponovo se izraz sa holomorfnim funkcijama može normalizovati da važi $\gamma_i(0)\frac{\xi_i(0)}{\xi(0)}=1$, $i=1,2$, te je

$$\gamma_i(s)\int_{s_0}^{s} t^{-r_i-1}\frac{\xi_i(t)}{\xi(t)}dt \sim \int_{s_0}^{s} t^{-r_i-1}dt, \quad s\to 0.$$

Sada za Laplaceovu transformaciju $\widehat{\psi_p}(s)$ važi

$$\widehat{\psi}_p(s) \sim \frac{2c}{\sigma^2}\psi(0)\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{-r_i}\right) - \frac{2\lambda}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{-r_i}\right)\widehat{\overline{F}}_X(s), \quad s\to 0.$$

U ovom slučaju je $s=0$ krajnji desni singularitet funkcije $\widehat{\psi_p}(s)$. Prvi član asimptotske ekspanzije je analitički u nuli, pa se ponovo primjenom teoreme 1.8 dolazi do

$$\psi_p(u) \sim \frac{2\lambda}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{r_i}\overline{F}_X(u), \quad u\to\infty. \tag{3.18}$$

Nakon što su redom izvršene analize homogenog i partikularnog rješenja jednačine (3.7), a pomoću njih i analize odgovarajućih komponenti vjerovatnoće propasti, konačno se može predstaviti asimptotski rezultat za opšte rješenje, odnosno ponašanje vjerovatnoće propasti $\psi(u)$ pod uticajem stohastičkih investicija za velike vrijednosti početnih rezervi. Kombinovanjem (3.8), (3.15), (3.17) i (3.18) se dobija

$$\psi(u) \sim Cu^{1-\frac{2\eta}{\sigma^2}} + \frac{2\lambda}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{r_i}\overline{F}_X(u) \quad u\to\infty.$$

Uzimajući u obzir sve gore navedene zaključke, može se formulisati sledeća teorema.

TEOREMA 3.3 *Posmatra se Cramér-Lundbergov model, pri čemu se višak kapitala investira u aktivu koja prati geometrijsko Brownovo kretanje sa driftom $\eta > 0$ i volatilnošću $\sigma > 0$. Ukoliko važi $1 < \frac{2\eta}{\sigma^2} < 2$, asimptotsko ponašanje vjerovatnoće propasti je dato sa*

$$\psi(u) \sim Cu^{1-\frac{2\eta}{\sigma^2}} + K\overline{F}_X(u), \quad u \to \infty,$$

gdje je $C = \dfrac{c_2\left(2 - \frac{2\eta}{\sigma^2}\right)}{\Gamma(3 - \frac{2\eta}{\sigma^2})} > 0$ *i* $K = \dfrac{\lambda}{\sigma^2 - \eta} + \dfrac{2\lambda}{\sigma^2}$.

Dakle, vjerovatnoća propasti ψ se asimptotski ponaša ili kao $u^{-\rho}$ ili $\overline{F}_X(u)$ u zavisnosti od toga koje sporije opada kada $u \to \infty$. U slučaju da raspodjela iznosa šteta ima lak rep, on je eksponencijalno ograničen, odnosno važi

$$\overline{F}_X(x) \leq ae^{-bx}, \quad x \geq 0, \ a, b > 0.$$

S obzirom da za proizvoljne pozitivne konstante a, b, β važi

$$\lim_{u \to \infty} \frac{ae^{-bu}}{u^{-\beta}} = 0,$$

kada raspodjela iznosa zahtjeva ima lak rep partikularno rješenje ne doprinosi značajno asimptotskoj aproksimaciji vjerovatnoće propasti. Dakle, kada iznosi šteta prate raspodjelu sa lakim repom vjerovatnoća propasti u Cramér-Lundbergovom modelu sa investicijama se asimptotski ponaša kao opadajuća stepena funkcija. Iznenađujuće je što stepen date funkcije zavisi samo od parametara difuzije, što upućuje na to da rizik osiguranja dugoročno ne utiče na ukupan rizik.

Sa druge strane, ako raspodjela iznosa šteta ima težak rep, potrebno je uporediti stepenu funkciju $u^{-\rho}$ i rep $\overline{F}_X(u)$, te utvrditi koja od njih sporije opada. Štaviše, ukoliko je rep raspodjele regularno varirajući sa indeksom $\alpha > 0$, tj.

$$\overline{F}_X(x) \sim L(x)x^{-\alpha}, \quad x \to \infty,$$

gdje je $L(x)$ sporo varirajuća funkcija, onda sporije opada stepena funkcija sa većim stepenom.

TEOREMA 3.4 *Ako je rep raspodjele iznosa zahtjeva regularno varirajuća funkcija sa indeksom $\alpha > 0$ onda se asimptotsko ponašanje vjerovatnoće propasti može zapisati kao*

$$\psi(u) \sim Bu^{-\min\{\alpha,\rho\}}, \quad u \to \infty,$$

za neku konstantu $B > 0$.

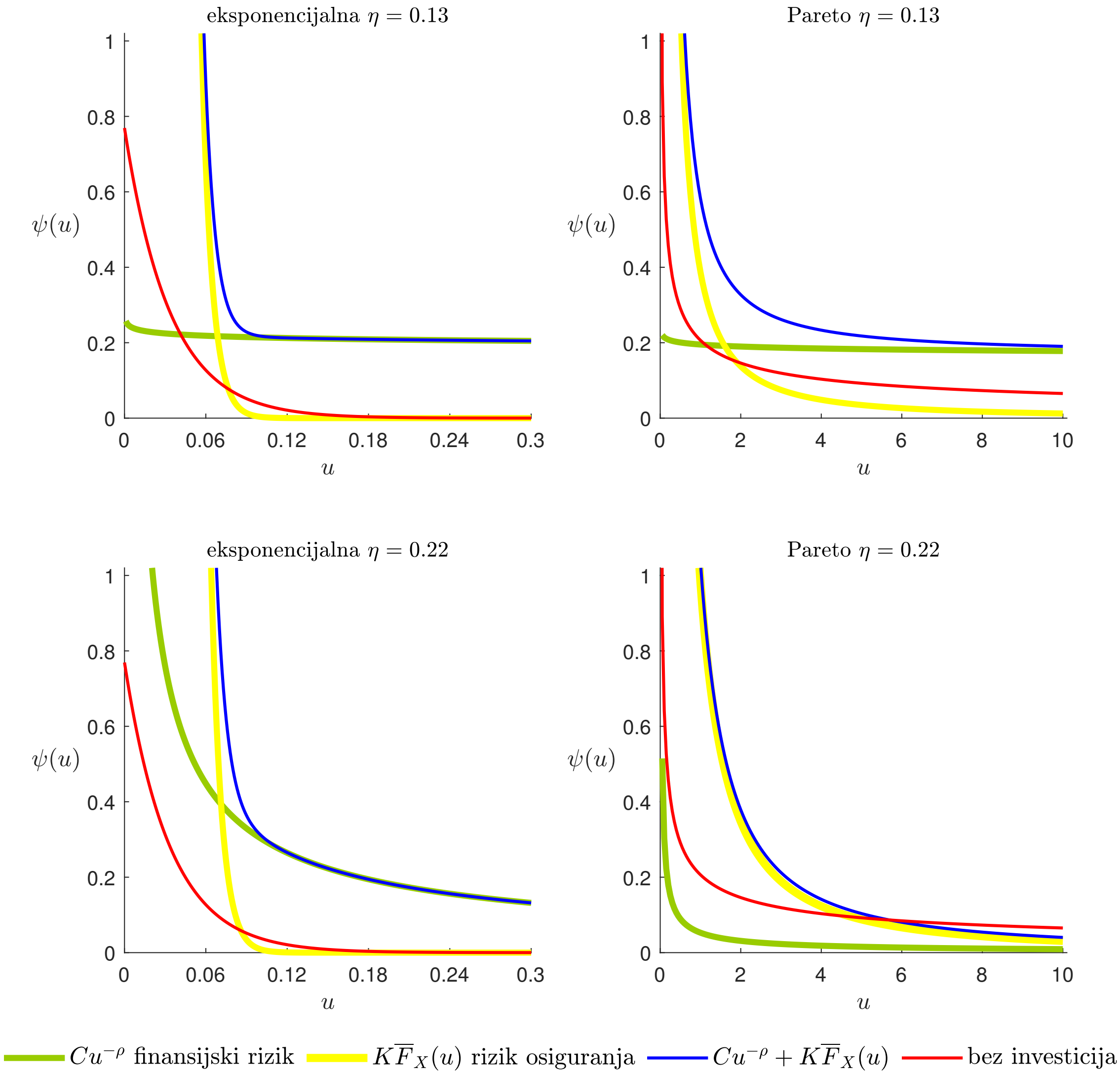
Ukoliko je rep raspodjele dovoljno težak, moguće je da rizik osiguranja ($u^{-\alpha}$) nadjača finansijski rizik ($u^{-\rho}$), dok je u slučaju lakih repova finansijski rizik uvijek dominantan.

U nastavku je dat grafički prikaz dobijenih rezultata. Da bi se prikazao slučaj kada se iznosi šteta modeliraju raspodjelom sa lakim repom uzeta je eksponencijalna raspodjela, dok se za slučaj teških raspodjela koristi Pareto raspodjela. Parametri navedenih raspodjela su iz tabele 2.2. Plavom bojom je predstavljena asimptotska aproksimacija vjerovatnoće propasti iz teoreme 3.3, dok crvena kriva predstavlja odgovarajuću aproksimaciju za slučaj bez investicija. Prikazani su i rizici koji se javljaju u modelu sa stohastičkim investicijama, finansijski zelenom i rizik osiguranja žutom bojom.

Za određivanje konstante C iz teoreme 3.3 neophodno je odrediti vrijednost konstante c_2, što je zahtjevno koliko i pronalaženje tačne vjerovatnoće propasti. Fokus rada je da se ilustruje jednostavnost korišćenog metoda za asimptotsku analizu, te se za c_2 uzima vrijednost 0.2 i prelazi na razmatranje grafika.

Da bi se prikazao uticaj parametara rizičnih investicija posmatraju se dva slučaja

- fiksirano $\sigma = 0.5$ i η raste, slika 3.1,
- fiksirano $\eta = 0.3$ i σ raste, slika 3.2.



Slika 3.1. Asimptotsko ponašanje vjerovatnoće propasti u slučaju eksponencijalnih zahtjeva (laki rep) i slučaju Pareto zahtjeva (teški rep) za fiksirano $\sigma = 0.5$ i η koje se povećava

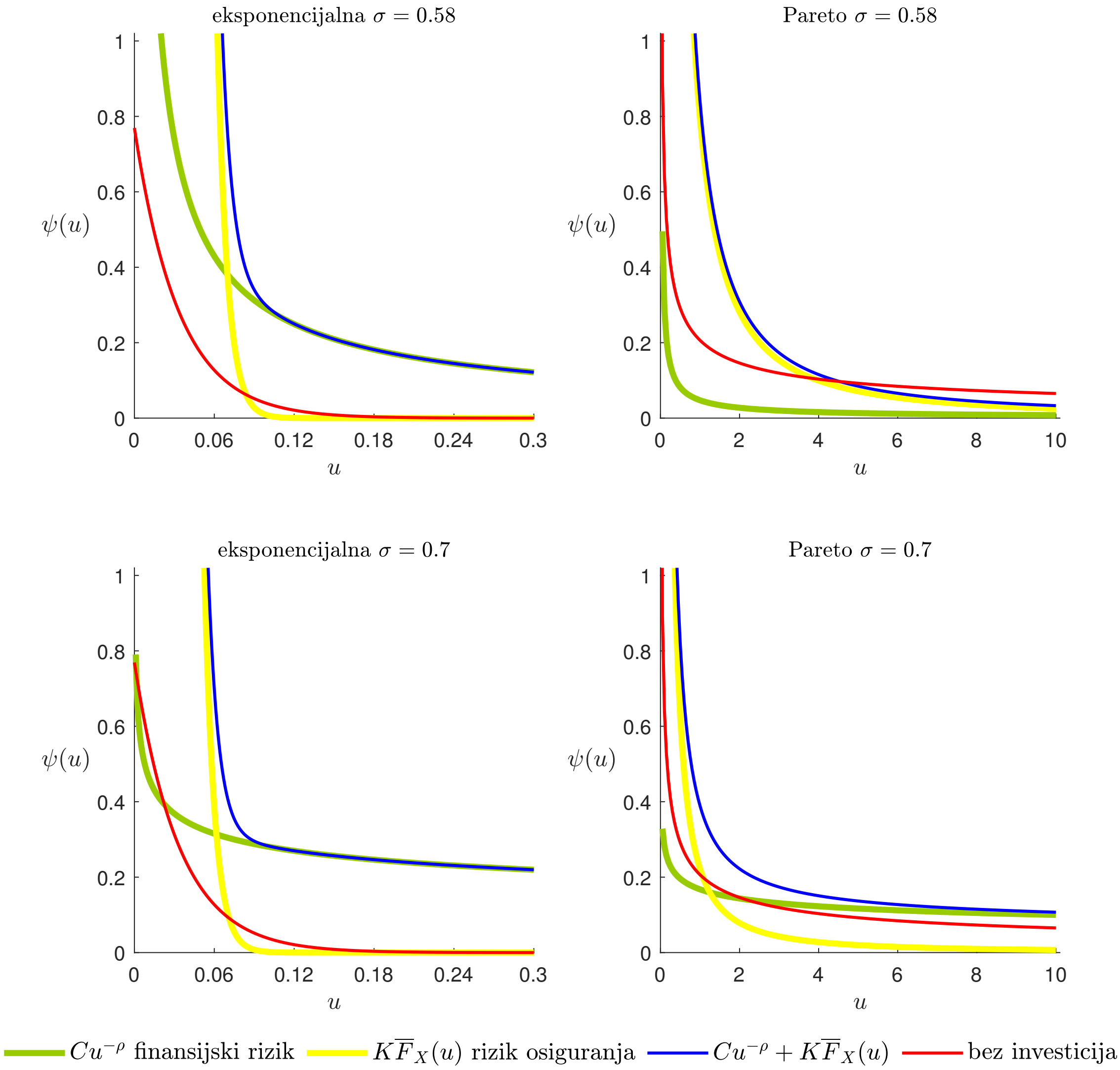
Neka je volatilnost σ geometrijskog Brownovog kretanja fiksirana, dok se drift η povećava. Ukoliko se posmatra eksponencijalna raspodjela može se zaključiti da se vjerovatnoća propasti asimptotski ponaša kao opadajuća stepena funkcija, odnosno da je finansijski rizik dominantniji od rizika osiguranja. Povećanje drifta geometrijskog Brownovog kretanja ne mijenja odnos finansijskog rizika i rizika osiguranja, rizik osiguranja uvijek brže odlazi u nulu. Kada je riječ o iznosima šteta koji se modeliraju raspodjelom sa lakim repom poznato je da se u Cramér-Lundbergovom modelu bez investicija vjerovatnoća propasti asimptotski ponaša kao opadajuća eksponencijalna funkcija. To znači da u ovom slučaju investiranje u rizičnu aktivu povećava vjerovatnoću propasti, a samim tim predstavlja opasnost za osiguravajuću kompaniju.

Kod raspodjela sa teškim repom, poput Pareto raspodjele, je situacija nešto složenija. Kada je vrijednost drifta 0.13 finansijski rizik nadjača rizik osiguranja, te se vjerovatnoća propasti asimptotski ponaša kao $u^{-\rho}$. Vjerovatnoća propasti u odgovarajućem modelu bez investiicija je znatno manja, nego kada se investira u rizičnu aktivu sa datim driftom i volatilnošću. Kada se vrijednost drifta poveća na $\eta = 0.22$ rizik osiguranja postaje dominantniji te se i vjerovatnoća propasti asimptotski ponaša kao rep Pareto raspodjele. Međutim, sada je vjerovatnoća propasti bez investicija veća.

Zaključak je sledeći. Ako se iznosi šteta modeliraju raspodjelom sa lakim repom finansijski rizik je uvijek dominantan i vjerovatnoća propasti se povećava investiranjem u rizičnu aktivu. Rizične investicije u slučaju iznosa šteta sa teškim repom ne znače nužno da se vjerovatnoća propasti povećava. Sa porastom drifta geometrijskog Brownovog kretanja se smanjuje finansijski rizik.

Slika 3.2 ilustruje obrnut slučaj, kada je drift η fiksirana vrijednost, a volatilnost geometrijskog Brownovog kretanja σ se povećava. Kod eksponencijalne raspodjele ne dolazi do značajne promjene, vjerovatnoća propasti se asimptotski ponaša kao $u^{-\rho}$. Finansijski rizik je uvijek dominantan u odnosu na rizik osiguranja i porast volatilnosti ne mijenja dati odnos. Vjerovatnoća propasti u slučaju bez investicija je manja, te se rizik osiguravajuće kompanije sa iznosima šteta sa lakim repom povećava dodavanjem rizičnih investicija u model.

Raspodjele sa teškim repom su ponovo nešto komplikovanije. Volatilnost $\sigma = 0.58$ dovodi do toga da rizik osiguranja nadjača finansijski rizik, te se vjerovatnoća propasti Pareto raspodjele ponaša kao rep navedene raspodjele. U ovom slučaju se investiranjem u rizičnu aktivu smanjuje rizik osiguravajuće kompanije, odnosno vjerovatnoća propasti bez investicija je nešto veća. Povećanjem volatilnosti na 0.7 finansijski rizik postaje dominantan, te se vjerovatnoća propasti sada ponaša kao opadajuća stepena funkcija. Slučaj bez investicija je povoljniji, jer je vjerovatnoća propasti kada se višak osiguravajuće kompanije investira u aktivu sa datim driftom i volatilnošću veća.



Slika 3.2. Asimptotsko ponašanje vjerovatnoće propasti u slučaju eksponencijalnih zahtjeva (laki rep) i slučaju Pareto zahtjeva (teški rep) za fiksirano $\eta = 0.3$ i σ koje se povećava

Dakle, kod raspodjela sa lakim repom je finansijski rizik uvijek dominantan i povećanje volatilnosti to ne mijenja. Investiranjem u aktivu sa odgovarajućim driftom i volatilnošću se vjerovatnoća propasti može smanjiti kada je riječ o raspodjelama sa teškim repom. Povećanje volatilnosti σ povećava finansijski rizik u posmatranom modelu.

4

Zaključak

U radu je analiziran jedan od klasičnih problema aktuarske matematike, asimptotsko ponašanje vjerovatnoće propasti u modelima rizika. Predstavljena je aproksimacija vjerovatnoće propasti, prvo u klasičnom Cramér-Lundbergovom modelu rizika, a zatim i u modelu sa stohastičkim investicijama. U modelu sa investicijama je razmatrana strategija investiranja cijelog viška kapitala u rizičnu aktivu. Upotrebom Laplaceove transformacije i rezultata teorije regularne varijacije je dat jedinstven analitički metod za analizu vjerovatnoće propasti u modelima sa lakim ali i teškim repovima. Na taj način je dobijen rezultat koji je primjenljiv i na male iznose šteta, ali i na velike iznose.

Vjerovatnoća propasti u Cramér-Lundbergovom modelu rizika se asimptotski ponaša kao opadajuća eksponencijalna funkcija početnih rezervi kada Lundbergov koeficijent κ postoji. Navedeni rezultat se dobija kada iznosi šteta prate raspodjelu sa lakim repom, poput eksponencijalne ili Gamma raspodjele. Kada je riječ o raspodjelama sa teškim repom, poput Pareto ili lognormalne raspodjele, ponašanje vjerovatnoće propasti za velike vrijednosti početnih rezervi u je određeno funkcijom $\overline{F_I}(u)$.

Ukoliko osiguravajuća kompanija investira višak u rizičnu aktivu čija cijena prati geometrijsko Brownovo kretanje vjerovatnoća propasti se asimptotski ponaša kao opadajuća stepena funkcija sa stepenom $-\rho = 1 - \frac{2\eta}{\sigma^2}$ (finansijski rizik) ili kao rep raspodjele iznosa šteta $\overline{F}_X(u)$ (rizik osiguranja). Ukoliko je volatilnost rizične aktive mnogo veća u odnosu na drift propast je neizbježna, tj. vjerovatnoća propasti je jednaka jedan bez obzira na iznos početnih rezervi. U slučaju raspodjela sa lakim repom finansijski rizik uvijek dominira nezavisno od parametara difuzije, te se investiranjem u rizičnu aktivu vjerovatnoća propasti povećava. Prema [9] to se objašanjava time što šteta može da nastane u momentu kada je cijena rizične aktive na tržištu jako niska te se njenom prodajom ne mogu pokriti gubici. Dakle, sa aspekta osiguravajuće kompanije je bolje uopšte ne investirati nego uložiti sav višak u rizičnu aktivu kada štete prate raspodjelu sa lakim repom. Kada je riječ o raspodjelama sa teškim repom postoji mogućnost da se investiranjem u rizičnu aktivu postigne smanjenje vjerovatnoće propasti, odnosno rizika. U zavisnosti od parametara difuzije moguće je da prevlada rizik osiguranja te se tada vjerovatnoća propasti ponaša kao rep subeksponencijalne raspodjele $\overline{F}_X$, koji, prema teoremi 2.7, brže opada ka nuli u odnosu na $\overline{F_I}$ koji karakteriše vjerovatnoću propasti u modelu bez investicija.

Tokom izrade rada javlja se nekoliko zanimljivih pitanja kao i ideja za dalje istraživanje.

S obzirom da se vjerovatnoća propasti koristi kao mjera rizika u neživotnom osiguranju i poželjno je njeno minimiziranje, trebalo bi odrediti optimalnu strategiju investiranja u rizičnu aktivu koja bi smanjila šanse da dođe do propasti.

Moguće je kreirati kodove za simulaciju procesa viška u nekom od programskih paketa. Preporuka za dalje istraživanje je da se izvrše simulacije procesa n puta, te da se svaki put registruje da li je došlo do propasti (da li trajektorija procesa pada ispod nule) ili ne. Na taj način se dobijaju empirijske vrijednosti vjerovatnoće propasti, koje se onda mogu uporediti sa dobijenim teorijskim vrijednostima.

Literatura

[1] J. Abate and W. Whitt. Asymptotics for m/g/1 low-priority waiting-time tail probabilities. *Queueing Systems*, 25(1):173–233, 1997.

[2] H. Albrecher, C. Constantinescu, and E. Thomann. Asymptotic results for renewal risk models with risky investments. *Stochastic Processes and their Applications*, 122(11):3767–3789, 2012.

[3] S. Asmussen and H. Albrecher. *Ruin probabilities*, volume 14. World scientific, 2010.

[4] R. Bradley. The Riemann-Stieltjes Integral. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 6(1):20–28, 1994.

[5] C. D. Constantinescu. Ruin theory under uncertain investments. 2003.

[6] D. C. Dickson. *Insurance risk and ruin.* Cambridge University Press, 2016. ISBN 978-1-107-15460-5.

[7] P. Embrechts, C. Kluppelberg, and T. Mikosch. Modelling extremal events. *British actuarial journal*, 5(2):465–465, 1999.

[8] S. Foss, D. Korshunov, S. Zachary, et al. *An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions*, volume 6. Springer, 2011.

[9] A. Frolova, Y. Kabanov, and S. Pergamenshchikov. In the insurance business risky investments are dangerous. *Finance and stochastics*, 6(2):227–235, 2002.

[10] D. G. Konstantinides. *Risk Theory: A Heavy Tail Approach.* 2017.

[11] K. Leffler. The Riemann-Stieltjes integral: and some applications in complex ana-

lysis and probability theory, 2014.

[12] T. Mikosch. Non-life insurance mathematics. second. universitext, 2009.

[13] J. Paulsen and H. K. Gjessing. Ruin theory with stochastic return on investments. *Advances in Applied Probability*, 29(4):965–985, 1997.

[14] V. Pekkanen. Ruin theoretical comparisons. Master's thesis, Aalto University School of Science, 2016.

[15] D. Rajter-Ćirić. Verovatnoća. *Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet*, 2009.

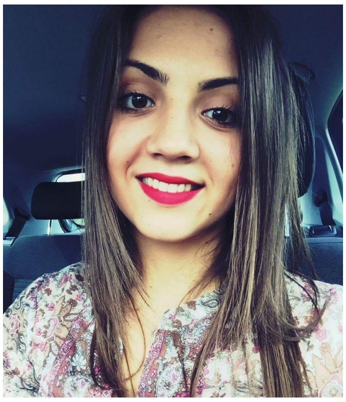
[16] D. Rajter-Ćirić. Predavanja, stohastička analiza. *Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet*, 2020.

[17] D. Seleši. Predavanja, aktuarska matematika. *Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet*, 2021.

[18] M. R. Spiegel. *Laplace transforms.* McGraw-Hill New York, 1965.

[19] A. Torabi and M. A. Rohani. Frobenius method for solving second-order ordinary differential equations. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 8(7):1269–1277, 2020.

Biografija



Stefani Marjanović je rođena 6. decembra 1997. godine u Salzburgu u Austriji. Osnovnu školu ,,Nikola Tesla” i gimnaziju ,,Mihajlo Pupin” je završila u Derventi, Bosna i Hercegovina, kao nosilac Vukove diplome i đak generacije. Po završetku gimnazije, 2016. godine, upisala je osnovne studije Primijenjene matematike, modul - matematika finansija na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. U septembru 2019. godine je završila osnovne studije sa prosječnom ocjenom 9,81 i upisala master studije na istom programu. Sve ispite predviđene nastavnim planom i programom položila je zaključno sa junskim rokom 2021. godine sa prosječnom ocjenom 10,00 i time stekla uslov za odbranu master rada.

Tokom master studija je stipendirana od strane Ministarstva za naučnotehnološki razvoj, visoko obrazovanje i informaciono društvo Republike Srpske.

Novi Sad, jul 2022. Stefani Marjanović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Stefani Marjanović
AU

Mentor: dr Dora Seleši
ME

Naslov rada: Procjena rizika i vjerovatnoće propasti pod uticajem stohastičkih investicija
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2022.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 4/104/19/3/16/0/0
(broj poglavlja/strana/literarnih citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Aktuarska matematika
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: vjerovatnoća propasti, proces viška, Cramér-Lundbergov model rizika, raspodjela sa lakim repom, raspodjela sa teškim repom, investicije, geometrijsko Brownovo kretanje, infinitezimalni generator, Laplaceova transformacija, regularna varijacija
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Rad se bavi analizom asimptotskog ponašanja vjerovatnoće propasti, prvo u klasičnom Cramér-Lundbergovom modelu rizika, a zatim i u modelu sa stohastičkim investicijama. Rezultati se razlikuju u zavisnosti od toga da li iznosi šteta prate raspodjelu sa lakim repom ili sa teškim repom. Ako u klasičnom modelu rizika raspodjela iznosa šteta ima lak rep, vjerovatnoća propasti osiguravajuće kompanije opada eksponencijalno kako se početne rezerve u povećavaju. U prisustvu teških repova je asimptotsko ponašanje vjerovatnoće propasti određeno repom subeksponencijalne raspodjele. U modelu sa stohastičkim investicijama se asimptotska analiza vrši pomoću infinitezimalnog generatora, Laplaceove transformacije i teorije regularne varijacije. Ukoliko osiguravajuća kompanija investira višak u aktivu čija cijena prati geometrijsko Brownovo kretanje, vjerovatnoća propasti opada kao stepena funkcija ili je jednaka jedan u slučaju raspodjela sa lakim repom. Kod raspodjela sa teškim repom vjerovatnoća propasti opada ili kao stepena funkcija, u zavisnosti od parametara difuzije, ili se ponaša kao rep raspodjele iznosa šteta. Drugim riječima, pod određenim uslovima je moguće profitirati od investiranja u rizičnu aktivu.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 7.6.2022.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	**dr Danijela Rajter-Ćirić**, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Mentor:	**dr Dora Seleši**, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	**dr Ivana Vojnović**, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Stefani Marjanović
AU

Mentor: Professor Dora Seleši, PhD
MN

Title: Estimation of risk and ruin probability under stochastic investments
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2022
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 4/104/19/3/16/0/0
(number of chapters/pages/references/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Actuarial mathematics
SD

Subject/Key words: ruin probability, surplus process, Cramér-Lundberg risk model, light-tailed distribution, heavy-tailed distribution, investment, geometric Brownian motion, infinitesimal generator, Laplace transform, regular variation
SKW
UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: This thesis is about the analysis of the asymptotic behavior of the ruin probabilities, first for the classical Cramér-Lundberg risk model and then for a model with risky investments. Results depend on whether the claim sizes follow a light-tailed probability distribution or a heavy one. If claim sizes are light-tailed in the classical risk model, the probability of ruin of an insurance company decays exponentially fast as the initial capital $u \to \infty$. The tail of a subexponential distribution characterizes the asymptotic behavior of the ruin probability in presence of heavy tails. For the model with stochastic investments the asymptotic behavior of the probability of ruin is derived by means of infinitesimal generators, Laplace transforms and regular variation theory. If the insurance company invests its capital in a risky asset with a price which follows a geometric Brownian motion it is shown that the probability of ruin decreases asymptotically as a power function or equals one in the case of light-tailed claims. For heavy-tailed distributions the probability of ruin decays either like a power function, depending on the parameters of the investment, or behaves asymptotically like the tail of the claim size distribution. In other words, under certain circumstances the insurer benefits from investing in a risky asset.
AB

Accepted by the Scientific Board on: June 7, 2022
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	**Danijela Rajter-Ćirić, PhD**, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Mentor:	**Dora Seleši, PhD**, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
Member:	**Ivana Vojnović, PhD**, Assistant Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad