UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Aleksandra Surdućan

Aktuarsko vrednovanje polisa osiguranja zasnovano na stohastičkim modelima rizika širenja epidemije

- Master rad -

Mentor:

prof. dr Dora Seleši

Novi Sad, 2022

Sadržaj

Predgovor

Tema ovog rada je aktuarsko vrednovanje polisa osiguranja zasnovano na stohastičkim modelima rizika širenja epidemije.

U radu će biti opisan deterministički model epidemije koji se potom uopštava na dva stohastička modela. Deterministički model je alternativa za SIR[1] model i on objašnjava evoluciju prvog talasa COVID-19 (*eng. COVID-19*[2]). U ovom radu, biće prikazana empirijska ilustracija četiri vremenska intervala za Srbiju, Rumuniju, Mađarsku i Bosnu i Hercegovinu. Takođe, videćemo i kolika je premija zdravstvenog osiguranja pri posmatranju ovakvog modela. Drugi model je proširenje prvog, s tim što vremenski trenutak postaje stohastička promenljiva. Ovakav pristup omogućava da se vreme vrhunca epidemije posmatra kao slučajna varijabla. U trećem modelu, evolucija zarazne bolesti je praćena Braunovom difuzijom i procesom skoka. Procena vrednosti osiguranja povezanog sa epidemijom zahteva izračunavanje jednog od integrala veličine zaražene i osetljive populacije i stoga je računski zahtevna. Sva tri modela opisana u ovom radu pate od ovog problema i imaju visok nivo analitičke popravljivosti za aktuarske primene. Štaviše, procena njihovih parametara ne predstavlja nikakav problem, a njihova empirijska moć objašnjenja je uporediva sa pristupom osetljivim-inficiranim-oporavljenim (SIR).

***

Zahvalila bih se mentorki, prof. dr Dori Seleši na strpljenju, podršci i datim sugestijama pri izradi master rada kao i na prenetom znanju tokom studija. Takođe bih se zahvalila svim profesorima i kolegama koji su mi na bilo koji način pomogli tokom studiranja.

Najveću zahvalnost dugujem roditeljima, Dimitriju i Mariji, bratu Stefanu, vereniku Mihaelu i prijateljicama Nikolini i Karolini. Hvala vam što ste verovali u mene, što ste mi bili najveća podrška i hvala vam na neizmernoj ljubavi.

***

Novi Sad, 2022

Aleksandra Surdućan

[1] SIR je akronim za susceptible-infected-recovered or removed.
Model su osmislili Vilijam Kermak (*eng. William Kermack*) i Anderson Mekendrik (*eng. Anderson McKendrick*), a objavljen je u radu „A Contribution to the Mathematical Theory in Epidemic“, 1927. godine.

[2] COVID-19 – Coronavirus disease.

1. Uvod

1.1. Osiguranje

Osiguranje je jedan oblik upravljanja rizikom, prvenstveno usmeren na smanjenje finansijskih gubitaka. Ono predstavlja prenos rizika sa osiguranika na osiguravajuće društvo (kompaniju), uz plaćanje premije osiguranja. Kada osiguranik kupi polisu[3] osiguranja, osiguravajuća kompanija tada preuzima rizik koji bi osiguranik kao individua sam snosio i samim tim on mora da plati naknadu - premiju, za tu vrstu usluge. Kada osiguravajuće društvo preuzme rizik od pojedinca, ono ga ne preuzima samo od jednog pojedinca, već od više njih, čime se stvara čitav portfolio klijenata. Time što osiguravajuće kompanije imaju sve te rizike, time rizik postaje predvidiv i lakše ga je kontrolisati.

Međutim, mnogo je rizika čijim bi ostvarenjem nastale štete koje ne bi mogle da nadoknade ni velika osiguravajuća društva u svetu. Kako bi se obezbedile od velikih gubitaka, osiguravajuće kompanije nalaze rešenje putem sopstvenog osiguranja od velikih i skupih šteta. To, tzv. osiguranje osiguranja, naziva se reosiguranje.

Jedan od zadataka aktuara u svakoj osiguravajućoj kompaniji jeste da odrede takozvanu fer premiju. Ukoliko se desi da je premija previše mala, ljudi koji inače ne bi uzeli osiguranje će u ovom slučaju to uraditi. U tom slučaju kompanija preuzima rizik jer postoji veća verovatnoća da će bankrotirati. S druge strane, ako su premije prevelike, osiguranici neće hteti da se osiguraju u toj kompaniji, već odlaze u nekoj drugoj. Zbog toga je veoma bitno odrediti fer premiju.

1.2. COVID-19

Epidemija je brzo širenje bolesti na veliki broj ljudi u datoj populaciji u kratkom vremenskom periodu. Epidemije zaraznih bolesti su generalno uzrokovane raznim faktorima uključujući promenu u ekologiji populacije domaćina (npr. povećan stres ili povećanje gustine vektorske[4] vrste), genetsku promenu u rezervoaru patogena[5] ili uvođenje novog patogena u populaciju domaćina (premeštanjem patogena ili domaćina). Generalno, do epidemije dolazi kada se imunitet domaćina na utvrđeni patogen ili novonastali patogen iznenada smanji ispod onog koji se nalazi u endemskoj ravnoteži i pređe prag transmisije. Epidemija može biti ograničena na jednu lokaciju; međutim, ako se proširi na druge zemlje ili kontinente i utiče na značajan broj ljudi, može se nazvati pandemijom, kao što je to slučaj sa COVID-19.

COVID-19 je zarazna bolest uzrokovana virusom SARS-CoV-2[6], koji se može širiti iz usta ili nosa zaražene osobe u malim tečnim česticama kada ta osoba kašlje, kija, govori, peva ili diše. Ove čestice se kreću od većih respiratornih kapljica do manjih aerosola. Virus je prvi put detektovan u Kini, u gradu Vuhan, krajem decembra 2019. godine. Većina ljudi koji su zaraženi

[3] Polisa predstavlja ispravu o zaključenom ugovoru o osiguranju koju izdaje osiguravač.
[4] Vektor je živi organizam koji prenosi infektivni agens sa zaražene životinje na čoveka ili drugu životinju.
[5] U biologiji, patogen u najstarijem i najširem smislu je svaki organizam koji može proizvesti bolest. Patogen se takođe može nazvati infektivnim agensom ili jednostavno klicom.
[6] Teški akutni respiratorni sindrom koronavirus 2 (eng. Severe acute respiratory syndrome coronavirus 2).

virusom doživljavaju blagu do umerenu respiratornu bolest i mogu se oporaviti bez potrebe za posebnim tretmanima. Međutim, neki ljudi se ozbiljno razboljevaju i njima je potrebna lekarska pomoć. Stariji ljudi i oni sa oboljenjima kao što su kardiovaskularne bolesti, dijabetes, hronične respiratorne bolesti ili rak imaju veću verovatnoću da razviju teži oblik bolesti. Svako može da se zarazi virusom i ozbiljno razboli ili umre u bilo kom uzrastu.

Svetska Zdravstvena Organizacija je u martu 2020. godine okarakterisala širenje COVID-19 kao pandemiju. Broj zaraženih i umrlih osoba, kao i broj država koje su podlegle pandemijom se vremenom brzo povećavao. Od početka pandemije do 31. decembra 2021. godine, ukupan broj zaraženih ljudi bio je 286.583.555, a broj umrlih 5.430.758. Veruje se da su ove brojke potcenjene iz više razloga: testiranje nije počelo u početnim fazama izbijanja pandemije, mnogi ljudi zaraženi virusom nemaju simptome ili imaju samo blage simptome i možda nisu testirani, smrtni slučajevi se ponekad prepisuju drugim stanjima itd.

1.3. Matematički modeli

Matematički modeli[7] igraju važnu ulogu u krizama kao sto je pandemija COVID-19. Modeliranje zaraznih bolesti je alat koji se koristi za proučavanje mehanizma širenja bolesti, za predviđanje budućeg toka izbijanja i za procenu strategija za kontrolu epidemije. Modeli koriste osnovne pretpostavke ili prikupljene statističke podatke i uz pomoć matematike pronalaze parametre za različite zarazne bolesti. Zatim te parametre koriste za izračunavanje efekata različitih intervencija, poput masovne vakcinacije. Važno je napomenuti da su modeli dobri onoliko koliko su dobre pretpostavke na kojima se zasnivaju. Ako model daje predviđanja koja nisu u skladu sa posmatranim rezultatima, a matematika je tačna, početne pretpostavke se moraju promeniti da bi model bio koristan. Takođe, našom reakcijom na predviđanja modela, tj. uvođenjem mera kao što su nošenje maske, održavanja distnace, boravka u karantinu, održavanja nastave na daljinu itd, činimo model pogrešnim (neažurnim) čime dolazi do neslaganja brojki.

Postoje dva tipa modela: deterministički i stohastički. Kada se radi o velikim populacijama, kao u slučaju tuberkuloze, često se koristi deterministički model. U determinističkom modelu, pojedinci u populaciji su raspoređeni u različite podgrupe ili odeljke, od kojih svaka predstavlja specifičnu fazu epidemije. Stope prelaza iz jedne klase u drugu su matematički izražene kao derivati, pa je model formulisan korišćenjem diferencijalnih jednačina. Prilikom izgradnje ovakvih modela, mora se pretpostaviti da je veličina populacije u odeljku diferencibilna po vremenskoj promenljivoj i da je epidemijski proces deterministički. Drugim rečima, promene u populaciji jednog odeljka mogu se izračunati koristeći samo istoriju koja je korišćena za razvoj modela. „Stohastički" znači postojanje ili uticaj slučajne promenljive. Stohastički model je alat za procenu raspodele verovatnoće potencijalnih ishoda dozvoljavajući nasumične varijacije u jednom ili više inputa tokom vremena. Stohastički modeli zavise od slučajnih varijacija u riziku od izloženosti, bolesti i druga dinamika bolesti.

[7] Matematički model je apstraktan, pojednostavljen, matematički koncept koji uspostavlja relaciju sa stvarnošću, a kreira se za određenu namenu.

2. Pojmovi, definicije, teoreme i tabela oznaka

U radu će se pojavljivati razni izrazi i formulacije iz predmeta Aktuarska matematika i Stohastička analiza. Stoga, prvo ćemo se podsetiti značajnih pojmova, definicija i teorema, a nakon toga će biti data tabela bitnih oznaka korišćenih u radu.

2.1. Slučajni (stohastički) procesi

Neka se u svakom trenutku t nekog vremenskog intervala I posmatra karakteristika X fizičkog sistema i neka je ona slučajnog karaktera. Dakle, $X(t)$ (piše se još X_t) je neka slučajna promenljiva za svako $t \in I$. Tada se na skup svih slučajnih promenljivih $X_t, t \in I$, može gledati kao na slučajnu veličinu koja se menja u vremenu, tj. može se smatrati da je $X_t, t \in I$ jedna slučajna funkcija vremena. U tom slučaju, kaže se da je $X_t, t \in I$ jedan slučajan (stohastički) proces.

Definicija 1. Realni slučajni (stohastički) proces $\{X_t, t \in I\}$ je familija realnih slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Skup I se zove parametarski skup ili skup parametara (indeksirani skup), a realni prostor ($\mathbb{R}^d$) skup stanja procesa.

Definicija 2: Niz σ – algebri $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, ... na Ω takvih da

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \cdots \subset \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$$

naziva se filtracija.

Intuitivno, $\mathcal{F}_n$ predstavlja naše znanje u trenutku $n, n \in \mathbb{N}$. Tačnije, $\mathcal{F}_n$ sadrži sve događaje A takve da u trenutku n znamo da li se A desio ili ne. Kako n raste, biće sve više takvih događaja A, to jest, familija $\mathcal{F}_n$, koja predstavlja naše znanje, biće sve veća.

Ako je $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ stohastički proces, tada:

- $X_t(\cdot)$ je, za svako fiksirano $t \in [t_0, T]$ jedna realna slučajna promenljiva;
- $X.(\omega)$ je, za svako fiksirano $\omega \in \Omega$ jedna realna funkcija definisana na $[t_0, T]$. Ta funkcija se naziva trajektorija (staza, realizacija) stohastičkog procesa $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$. Prostor $(\mathbb{R}^d)^{[t_0, T]}$ je prostor trajektorija ili prostor realizacija stohastičkog procesa.

Definicija 3. Stohastički proces $\{X_t, t \geq 0\}$ se zove proces prebrajanja ako X_t predstavlja ukupan broj događaja koji se pojavljuju do vremenskog trenutka t, uključujući i t.
Procesi prebrajanja zadovoljavaju sledeće uslove:

- $X_t \geq 0, \forall t$;
- X_t ima vrednost u $\mathbb{Z}$;
- Ako $s < t$, onda $X_s \leq X_t$;
- Ako je $s < t$, onda $X_t - X_s$ predstavlja broj događaja koji se dese u intervalu $(s, t]$.

Definicija 4. Stohastički proces $\{X_t, t \geq 0\}$ se zove Levijev proces[8] ako važi:

- $X_0 = 0$ skoro sigurno;
- Proces ima nezavisne priraštaje;
- Proces ima stacionarne priraštaje;
- Za svako $\varepsilon > 0$ i $t > 0$ važi: $\lim_{h \to 0} P(|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon) = 0$.

Najpoznatiji primeri Levijevog procesa su Poasonov proces, Vinerov proces (Braunovo kretanje), Gama proces itd. Pre nego što definišemo spomenute procese, objasnićemo Levi-Hinčinovu (eng. Lévy–Khintchine) reprezentaciju.

Distribuciju Levijevog procesa karakteriše karakteristična funkcija koja je data Levi-Hinčinovu formulom:

Ako je $\{X_t, t \geq 0\}$ Levijev proces, onda je njegova karakteristična funkcija $\varphi_X(\theta)$ data sa

$$\varphi_X(\theta)(t) := \mathbb{E}\left[e^{i\theta X(t)}\right] = \exp\left(t\left(ai\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta \mathbf{1}_{|x|<1}\right)\Pi\,(dx)\right)\right),$$

gde je $\mathbf{1}$ indikator funkcija[9], $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$, a Π je σ-konačna mera i zove se Levijeva mera X koja zadovoljava:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \min(1, x^2)\,\Pi(dx) < \infty.$$

Pošto karakteristične funkcije jedinstveno određuju osnovne raspodele verovatnoće, onda je svaki Levijev proces jedinstveno određen „Levi-Hinčinovom trojkom" (a, σ^2, Π). Termini ove trojke sugerišu da se Levijev proces može posmatrati kao zbir tri nezavisne komponente: linearnog drifta, Braunovog kretanja i Levijevog procesa skoka. Iz ovoga sledi da je jedini (nedeterministički) kontinuirani Levijev proces Braunovo kretanje sa driftom; slično, svaki Levijev proces je semimartingal.

Definicija 5. Stohastički proces X definisan na prostoru verovatnoće $(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, P)$, zove se semimartingal ako se može predstaviti na sledeći način:

$$X_t = M_t + A_t$$

gde je M lokalni martingal, a A je RCLL[10] prilagođen proces lokalno ograničene varijacije.

---

[8] Levijev proces je nazvan po francuskom matematičaru Paul Leviju (Paul Pierre Lévy).

[9] Indikatorska funkcija podskupa A skupa X je funkcija $\mathbf{1}_A\colon X \to \{0,1\}$ definisana kao $\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, ako\ x \in A \\ 0, ako\ x \notin A \end{cases}$.

[10] RCLL (right continuous with left limits) funkcija je funkcija definisana na skupu realnih brojeva, ili podskupu realnih brojeva, koja je sa desne strane neprekidna a sa leve strane je ograničena.

Definicija 6. Proces prebrajanja $\{X_t, t \geq 0\}$ se zove Poasonov proces sa stopom rasta $\lambda, \lambda > 0$, ako važi:

- $X_0 = 0$,
- Proces ima nezavisne priraštaje,
- Broj događaja u proizvoljnom intervalu dužine t ima Poasonovu raspodelu

$$P\{X_{t+s} - X_s\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 0,1,2 \dots, \forall t > 0, \forall s \geq 0 \, .$$

Definicija ***6*** je ekvivalentna sa sledećom definicijom.

Definicija 7. Proces prebrajanja $\{X_t, t \geq 0\}$ se zove Poasonov proces sa stopom rasta $\lambda, \lambda > 0$, ako važi:

- $X_0 = 0$,
- Proces ima nezavisne priraštaje,
- $P\{X_{t+h} - X_t = 1\} = \lambda h + o(h), h \to 0$,
- $P\{X_{t+h} - X_t \geq 2\} = o(h), h \to 0$.

Definicija 8. Stohastički proces $\{X_t, t \geq 0\}$ se zove složeni ili zbirni Poasonov proces ako može biti predstavljen kao $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, gde je $\{N_t, t \geq 0\}$ Poasonov proces, a $Y_i, i = 1,2, \dots$ su nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom.

Definicija 9. Stohastički proces $\{W_t, t \geq 0\}$ se zove Braunovo kretanje (Vinerov proces) ako važi:

- $W_0 = 0$,
- Proces ima nezavisne priraštaje,
- $W_t - W_s : \mathcal{N}(0, t - s), t > s \geq 0$.

Specijalno, za $s = 0$, dobija se $W_t : \mathcal{N}(0, t)$, pa sledi $\mathbb{E}(W_t) = 0, \mathbb{V}(W_t) = t$.

U matematici i teoriji verovatnoće, Gama proces, takođe poznat kao *(Moran-)Gamma subordinator*, je slučajni proces sa nezavisnim priraštajima koji imaju gama raspodelu. Gama proces, $\Gamma(t; \gamma, \lambda)$, je rastući Levijev proces isključivo sa skokovima (*eng. pure-jump Levy process*) sa merom intenziteta $v(x) = \gamma x^{-1} e^{-\lambda x}$, za pozitivno x. Tako se procesi čija veličina skokova leži u intervalu $[x, x + dx)$ javljaju kao Poasonov procesi sa intenzitetom $v(x)dx$. Parametar γ kontroliše stopu vremena dolaska skoka, a parametar skaliranja λ obrnuto kontroliše veličinu skoka.

Itova teorema. Neka je $u = u(t, x_1, x_2, \dots, x_d)$ neprekidna funkcija definisana na intervalu $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ sa neprekidnim parcijalnim izvodima $u_t, u_x, u_{x_i x_j}$ za $i, j = 1,2, \dots, d$. Neka je d jednodimenzijalnih stohastičkih procesa $X_i(t)$ definisano na intervalu $[t_0, T]$ stohastičkim diferencijalima $dX_i(t) = f_i(t)dt + G_i(t)dW_t$, $i = 1,2, \dots, d$ u odnosu na isto Braunovo kretanje W_t. Tada stohastički proces $Y_t = u(t, X_1, X_2, \dots, X_d)$ ima stohastički diferencijal na intervalu $[t_0, T]$ dat sa

$$dY_t = u_t dt + \sum_{i=1}^{d} u_{x_i} dx_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} u_{x_i x_j} dx_i dx_j.$$

Koristeći simboličku tablicu:

$*$	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

dobija se ekvivalentan oblik gornje formule:

$$dY_t = \left(u_t + \sum_{i=1}^{d} u_{x_i} f(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} u_{x_i x_j} G_i(t) G_j(t)\right) dt + \sum_{i=1}^{d} u_{x_i} G_i(t) dW_t.$$

2.2. Funkcije koje jedinstveno određuju slučajne promenljive

Neka je X slučajna promenljiva.

Funkcije koje jedinstveno određuju slučajne promenljive su:

1) Funkcije raspodele, funkcije gustine,
2) Karakteristične funkcije: $f_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi_X(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi_X(x)\right)(t);\, t \in \mathbb{R}$
   $\mathcal{F}^{-1}\left(\varphi_X(x)\right)(t)$ - inverzna Furijeova transformacija[11], dobro je definisana jer je funkcija gustine lokalno integrabilna (njen integral je jednak jedinici),
3) Funkcija generatrisa verovatnoće: $P_X(z) = \mathbb{E}(z^X),\ z \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(z^X) < \infty$,
4) Funkcija generatrisa momenata: $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}),\ t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$.

Za funkciju generatrise verovatnoće i funkciju generatrise momenata, važi:

- $M_X(t) = P_X(e^t)$,
- $P_X(z) = M_X(\ln(z))$,
- Ako su $X_1, X_2, \dots, X_n, n \in \mathbb{N}$ međusobno nezavisne slučajne promenljive, onda
  - $M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$, za one $t \in \mathbb{R}$ za koje postoje sve pojedinačne generatrise momenata $M_{X_i}(t)$,
  - $P_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(z) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z)$.

---

[11]Za funkciju $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definišemo Furijeovu transformaciju od f sa: $\hat{f}(y) \coloneqq \mathcal{F}(f)(y) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(x)dx$, gde je $L^1(\mathbb{R}^n) = \left\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx < \infty\right\}$.

Da bismo objasnili zašto se funkcija generatrise verovatnoće baš tako zove, posmatraćemo je na sledeći način:

$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P\{x = k\}$ ← matematičko očekivanje

$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_x^{(k)}(0)}{k!} z^k$ ← napisano preko Tejlorovog razvoja

Izjednačavanjem desnih strana dobijamo:

$$P\{x = k\} = \frac{P_x^{(k)}(0)}{k!}.$$

Na ovaj način vidimo da generatrisa generiše ove verovatnoće, tj. generiše sve verovatnoće koje slučajna promenljiva može da primi.

Analogno, ako posmatramo prvi i drugi izvod po t generatrise momenata $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ imamo

$M_X{}'(t) = \mathbb{E}\left(\frac{d}{dt}(e^{tX})\right) = \mathbb{E}(Xe^{tX}) \xrightarrow{t=0} M_X{}'(0) = \mathbb{E}(X)$ ← prvi momenat

$M_X{}''(t) = \mathbb{E}\left(X\frac{d}{dt}(e^{tX})\right) = \mathbb{E}(X^2e^{tX}) \xrightarrow{t=0} M_X{}''(0) = \mathbb{E}(X^2)$ ← drugi momenat

$\Rightarrow M_X{}^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n), n \in \mathbb{N}$

N-ti izvod generatrise momenata u 0 generiše n-ti momenat slučajne promenljive X, ukoliko postoji izvod.

2.3. Složena Poasonova raspodela

Posmatramo slučajne promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_N$, pri čemu je N diskretna slučajna promenljiva i ona predstavlja broj zahteva ili broj osiguranika.

$$N: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n & \cdots \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

Označimo sa $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ ukupne štete. Pretpostavimo da su $X_i, i = 1,2, \ldots, N$ međusobno nezavisne slučajne promenljive koje imaju istu raspodelu i funkciju generatrise verovatnoće $P_X(z)$. Dalje, neka je N nezavisna od svih slučajnih promenljivih $X_i, i = 1,2, \ldots, N$ koja ima svoju raspodelu i njena funkcija generatrise verovatnoće je $P_N(z)$. Tada važi:

1) $P_S(z) = P_N\big(P_X(z)\big) = (P_N \circ P_X)(z)$,
2) $M_S(t) = P_N\big(M_X(t)\big)$,
3) $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$,
4) $Var(S) = \mathbb{E}(N)Var(X) + Var(N)\big(\mathbb{E}(X)\big)^2$.

Jedna od najvažnijih raspodela u aktuarskoj profesiji je složena Poasonova raspodela.

Definicija 10. Slučajna promenljiva S ima složenu Poasonovu raspodelu ako je ona složenog tipa, tj. ako se njena generatrisa verovatnoće može prikazati kao kompozicija primarne i sekundarne raspodele, pri čemu je primarna raspodela obavezno Poasonova slučajna promenljiva:

$$P_S(z) = P_N(P_X(z)), N: \mathcal{P}(\lambda).$$

Napomena: Ne mora uvek biti kompozicija dve rapodele. Može se desiti da imamo i više raspodela, ali bitno je da primarna raspodela bude Poasonova.

Teorema. Ako su slučajne promenljive S_i, $i = 1,2, \dots, n$ međusobno nezavisne i sve imaju složenu Poasonovu raspodelu, gde je parametar primarne (Poasonove) raspodele λ_i, $i = 1,2, \dots, n$, a sekundarna raspodela je diskretna raspodala data verovatnoćama $q_k(i)$, pri čemu $k = 0,1,2, \dots$, tada i slučajna promenljiva $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ ima složenu Poasonovu raspodelu čiji je primarni parametar $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, a sekundarna raspodela je data verovatnoćama q_k, $k = 0,1,2, \dots$, gde je $q_k = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} q_k(i) \lambda_i$.

2.4. Tabela oznaka

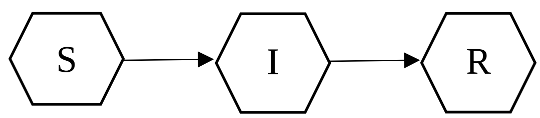
$\boldsymbol{S_0}$ - veličina populacije pogođena epidemijom	$\boldsymbol{p}$ - premija
$\boldsymbol{I_t}$ - broj zaraženih osoba u trenutku $t \geq 0$	$\boldsymbol{b}$ - beneficija
$\boldsymbol{\alpha}$ - stopa oporavka od bolesti	$\boldsymbol{c}$ - jednoktratna beneficija
$\boldsymbol{\mu}$ - stopa smrtnosti zaraženih osoba	$\boldsymbol{r}$ - bezrizična kamatna stopa
$\boldsymbol{\beta}$ - stopa prenosivosti	$\boldsymbol{\tau_t}$ – stohastički sat
$\frac{\gamma}{t}$ – stopa zaražavanja	$\boldsymbol{f_{\tau_t}(x)}$ – funkcija gustine verovatnoće za τ_t
$\boldsymbol{S_t}$ - broj osoba osetljivih na virus u trenutku $t \geq 0$	$\mathbb{E}(\boldsymbol{I_t} \vert \boldsymbol{\mathcal{F}_0})$ – očekivani broj inficiranih
$\boldsymbol{R_0}$ - osnovni broj reprodukcije	$\mathbb{E}(\boldsymbol{D_t} \vert \boldsymbol{\mathcal{F}_0})$ – očekivani broj umrlih
$\boldsymbol{t_{max}}$ - vremenski trenutak u kome epidemija dostiže vrhunac	$\mathbb{E}(\boldsymbol{S_t} \vert \boldsymbol{\mathcal{F}_0})$ – očekivana veličina populacije
$\boldsymbol{I_{t_{max}}}$- veličina populacije u trenutku t_{max}	$\boldsymbol{K}$ - prag
$\boldsymbol{D_t}$ - ukupan broj umrlih do vremenskog trenutka t	$\boldsymbol{C}$ – beneficija u reosiguranju

3. Deterministički model epidemije

3.1. SIR model i značajnost parametra R_0

Postoji veliki broj modela koji se odnose na SIR klasu modela. SIR model je deterministički model, što znači da ne postoje nikakvi slučajni događaji unutar populacije. Kod ovakvog modela, populacija obima N je podeljena u tri grupe. Svaki član populacije pripada jednoj grupi u zavisnosti od toga da li je on osetljiv, inficiran ili oporavljen/preminuo od virusa. Prva grupa se obeležava slovom S od engleske reči „suscetible“ što znači „osetljiv“ i njoj pripadaju oni koji nemaju razvijen imunitet protiv određenog virusa. Drugu grupu čine oni koji su zaraženi virusom i ta grupa se obeležava slovom I od engleske reči „infected“, sto znači „inficirani“. Treću grupu čine oni koji su preležali bolest i ona se obeležava slovom R od engleske reči „recovered“/„removed“ što znači „oporavljen“/„uklonjen“.

Svaka individua u populaciji može tokom vremena da menja grupu u kojoj se nalazi. Osetljiva osoba koja biva zaražena prelazi u grupu inficiranih, a nakon toga u grupu oporavljenih, što je šematski prikazano na Ilustraciji 1.



Ilustracija 1

Obzirom da se broj članova svake grupe menja vremenom, uvode se promenljive $S(t), I(t)$ i $R(t)$ koje predstavljaju broj osoba koj su osetljive, inficirane ili oporavljene od bolesti u vremenskom trenutku t, respektivno.

Pretpostavke modela su:

1. Prosečan član populacije ostvaruje βN kontakata sa drugim članovima populacije u jedinici vremena, gde je β stopa prenosivosti virusa;
2. $\alpha I(t)$ osoba prelazi iz grupe I u grupu R u jedinici vremena, tj. toliki broj ljudi se oporavi od bolesti u jedinici vremena, pri čemu je α stopa oporavka od bolesti koju virus izaziva;
3. Bolest je kratkotrajna i zbog toga natalitet i mortalitet nemaju uticaj na model, pa je $N = const$;
4. Odmah nakon kontakta sa zaraženom osobom kod osetljive osobe se ispoljavaju simptomi bolesti i ta osoba može da prenese virus ostalim članovima populacije, a bolest izazvana tim virusom nije smrtonosna.

Posmatrajmo grupu ljudi koji su inficirani u istom trenutku. Neka je $u(s)$ broj osoba koji su još uvek inficirani s jedinica vremena nakon što su zaraženi. Ako je α deo njih koji izlaze iz te grupe u jedinici vremena, onda je

$$u'(s) = -\alpha u(s).$$

To je jedna obična diferencijalna jednačina čije je rešenje

$$u(s) = u(0)e^{-\alpha s}.$$

Dakle, deo inficiranih s jedinica vremena nakon inficiranja je $e^{-\alpha s}$, što znači da dužina infektivnog perioda, tj. vreme trajanja bolesti ima ekponencijalnu raspodelu sa srednjom vrednošću

$$\int_0^\infty e^{-\alpha s} ds = \frac{1}{\alpha}.$$

Ovaj podatak ćemo koristiti kasnije u radu.

Dalje, neka je $s(t) = \frac{S(t)}{N}$, $i(t) = \frac{I(t)}{N}$ i $r(t) = \frac{R(t)}{N}$. Tada, $s(t) + i(t) + r(t) = 1$. SIR model je opisan sledećim sistemom običnih diferencijalih jednačina (ODJ):

$$\frac{ds}{dt} = \beta si$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \alpha i$$

$$\frac{dr}{dt} = \alpha i$$

gde je α stopa oporavka od bolesti koju virus izaziva, a β stopa prenosivosti virusa.

Ključni parametar u modelu je osnovni reproduktivni broj, dat sa $R_0 = \frac{\beta}{\alpha}$, koji pokazuje da li se i kojom brzinom epidemija može razviti. Preciznije rečeno, R_0 predstavlja prosečan broj sekundarnih zaraženih slučajeva koji su zaraženi od određenog primarnog slučaja. Na primer, osoba A koja je primarni slučaj, može da zarazi sve osobe B koje su došle u kontak sa njom. R_0 predstavlja prosečan broj tih osoba B. Ova količina određuje da li će se infekcija eksponencijalno širiti, izumreti ili ostati konstantna: ako je $R_0 > 1$ onda svaka osoba u proseku inficira više od jedne osobe tako da će se bolest proširiti; ako je $R_0 < 1$, onda svaka osoba u proseku inficira manje od jedne osobe tako da će bolest izumreti; a ako je $R_0 = 1$, onda će svaka osoba u proseku zaraziti tačno jednu osobu, tako da će bolest postati endemska: širiće se kroz populaciju, ali se neće povećavati ili smanjivati. Što je R_0 veće, to je teže kontrolisati epidemiju.

Postoje različiti sojevi COVID-19, među kojima su Alfa, Delta i Omikron soj. Vrednost reproduktivnog broja se razlikuje za različite sojeve virusa.

Epidemiolozi mogu izračunati R_0 koristeći podatke za praćenje kontakata (*eng. contact-tracing data*). Najčešća metoda jeste korišćenje kumulativnih podataka o incidenciji (*eng. cumulative incidence data*).

Za prvi soj virusa koji se pojavio u Kini, R_0 u Hong Kongu je procenjen sa 2,7, a u Singapuru ta ocena iznosi između 2,2 i 3,6. Kada se koriste matematički modeli, vrednosti R_0 se aproksimiraju pomoću ODJ. Svetska zdravstvena organizacija je 30. januara 2020. godine objavila da R_0 iznosi između 1,4 i 2,4.

U reviziji koju su radili Liu i saradnici [8], izračunato je da R_0 varira između 1,5 i 6,68. Oni su otkrili da konačna srednja vrednost i medijana iznose 3,28 i 2,79, respektivno, sa interkvartilom od 1,16. Razlog za nizak nivo usklađenosti između studija pripisani su razlici u posmatranim varijablama, metodama modeliranja i postupcima procene. Prema Liu-ovim pronalascima, studija koja koriste matematičke modele daju procene koje su veće od stohastičkih i statističkih modela u određivanju R_0 za COVID-19. R_0 je proporcionalan stopi kontakata i variraće u zavisnosti od lokalne situacije.

Rai i saradnici [10] su sproveli istraživanje u kojem su koristili model eksponencijalnog rasta primenjen na izračunavanje budućih slučajeva na osnovu kumulativnih potvrđenih slučajeva, oporavljenih slučajeva i stopi smrtnosti u proteklih 21 dana. Njihov zaključak bio je da R_0 u Indiji iznosi 2,56 i da populacija ima imunitet krda od 61%.

Vrednost R_0 na kruzeru „Diamond Princess“ početkom februara iznosio je 2,28. Procenjeno je da ukoliko uvođenjem strogih mera za upravljanje i kontrolu širenja infekcije R_0 ne spadne za 25-50%, ukupan broj zaraženih biće veliki u narednom periodu. U slučaju da vrednost R_0 opadne za 50%, broj slučajeva inficiranih virusom bi spao za pola i ako bi $R_0 < 1$, virus bi vremenom izumreo.

Još dva značajna soja COVID-19 su Delta i Omikron soj.

Vrednost osnovnog reproduktivnog broja originalnog soja COVID-19 je polovinom prošle godine procenjena sa 3. Pošto je Delta soj virusa zaraznije od originalnog soja COVID-19, njegova vrednost osnovnog reproduktivnog broja je veća od vrednosti R_0 originalnog soja. U avgustu 2021. godine, R_0 za Delta soj, po Centrima za kontrolu i prevenciju bolesti Sjedinjenih Američkih Država[12] (U.S. CDC.) iznosio je između 5 i 9. Kasnije U.S. CDC. su ažurirali aproksimaciju i dobili su da je R_0 Delta soja 8,5. Mnoge druge procene daju da je R_0 Delta soja virusa između 6 i 8, dok nekoliko naučnika smatra da je srednja vrednost osnovnog reproduktivnog broja 7. Ovo predstavlja značajno povećanje sposobnosti virusa da se širi među ljudima i zarazi ih. Konkretnija procena evolucionog biologa i biostatističara profesor Tom Wenseler i biologa Karthik Gangavarapu je da R_0 Delta soja varira između 6 i 7. Vensler je prvi naučnik koji je koristio matematički računarski model da bi procenio koliko se brzo Delta soj širi u Indiji. On je primenio podatke delta soja da bi kreirao „Venselerlove krive“ koje procenjuju kako varijanta može uticati na populaciju.

Omikron soj COVID-19 je rasprostranjen širom sveta. Početkom decembra 2021. godine, ukupno 758 slučajeva ovog soja je potvrđeno u Danskoj. Koristeći nukleotidne sekvence Delta i Omikron soja registrovane iz Danske u bazi podataka GISAID[13], otkriveno je da je efektivni (trenutni) broj Omikron soja 3,19 puta veći od Delta soja, pod istim epidemiološkim merama.
(95% interval poverenja 2,82-3,61). [7]

Može se zaključiti da se osnovni reproduktivni broj zasniva na epidemiološkim faktorima kao što su karakteristike osetljive populacije, stopa prenosivosti bolesti i usvojene mere kontrole. R_0 pomaže vladama širom sveta da procene budući broj slučajeva, da u skladu s tim naprave

[12] United States Centers for Disease Control and Prevention (U.S. CDC).
[13] GISAID - Global Initiative on Sharing Avian Influenza Data.

strategiju za postizanje ciljeva zadržavanja u određenom vremenskom periodu kako bi se izbeglo bilo kakvo nepovoljno stanje.

3.2. Formulacija determinističkog modela epidemije

Neka je veličina populacije pogođena epidemijom u trenutku $t = 0$ data sa S_0. Broj zaraženih osoba u trenutku $t \geq 0$, I_t, dat je sledećom jednačinom

$$I_t = S_0 e^{-(\alpha+\mu)t} (\beta t)^\gamma, t \geq t_0, \qquad (\mathbf{1})$$

gde $\alpha, \beta, \mu, \gamma \in \mathbb{R}^+$. Funkcija $e^{-(\alpha+\mu)t}$ je opadajuća eksponencionalna funkcija, dok je $(\beta t)^\gamma$ rastuća funkcija. Broj zaraženih osoba eksponencijalno opada sa stopom $(\alpha + \mu)$. Parametar α predstavlja stopu oporavka od bolesti, a μ je stopa smrtnosti zaraženih osoba. Prosečno vreme oporavka je $1/\alpha$. Za $t = 0$, inicijalni broj zaraženih osoba je jednak $I_0 = 0$. Za razumevanje značenje parametra β, diferencira se jednačina $(\mathbf{1})$.

$$dI_t = -(\alpha + \mu) I_t dt + S_0 e^{-(\alpha+\mu)t} \beta^\gamma (\gamma t^{\gamma-1}) dt = -(\alpha + \mu) I_t dt + I_t \frac{\gamma}{t} dt \qquad (\mathbf{2})$$

Diferencijalna jednačina $(\mathbf{2})$ govori da je inicijalna stopa zaraze po glavi stanovnika $\frac{\gamma}{t}$. Funkcija opada prema 0 kada $t \to \infty$.

Dati model se malo razlikuje od SIR modela. U SIR modelu, evolucija epidemije je opisana sledećom ODJ:

$$\begin{aligned} dI_t^{SIR} &= -(\alpha_{SIR} + \mu_{SIR}) I_t^{SIR} dt + \frac{\beta_{SIR} S_t^{SIR}}{S_0} I_t^{SIR} dt \\ dS_t^{SIR} &= -\frac{\beta_{SIR} S_t^{SIR}}{S_0} I_t^{SIR} dt \end{aligned} \qquad (\mathbf{3})$$

gde je $\beta_{SIR} \in \mathbb{R}^+$, a S_t^{SIR} predstavlja broj osoba koje su osetljive na virus u trenutku t. Kao i u našem modelu, α_{SIR} i μ_{SIR} su stopa oporavka i smrtnosti, respektivno. Stopa zaraze po glavi stanovnika u SIR modelu je proporcionalna populaciji ljudi osetljivih na infekciju, $\frac{\beta_{SIR} S_t^{SIR}}{S_0}$, dok je u našem modelu to funkcija vremena $\frac{\gamma}{t}$. Data pretpostavka omogućuje da se posmatra zatvorena forma jednačine $(\mathbf{2})$ za inficiranu populaciju. Ovo je najveća beneficija ovog modela u poređenju sa SIR modelom $(\mathbf{3})$ koji nema analitička rešenja u zatvorenoj formi. U aktuarskoj primeni razvijenoj u poglavlju *Aktuarsko vrednovanje polisa osiguranja determinističkog modela epidemije*, moraćemo da integralimo I_t. Imajući analitičku formulu može se izbeći numerička integracija numeričkog rešenja ODJ i propagacija numeričkih grešaka. Štaviše, model $(\mathbf{2})$ se lako proširuje na stohastičke okvire, kao što je detaljno opisano u glavama *Model sa vremenskom slučajnom promenljivom* i *Model difuzije skoka*.

Neka je osnovni reproduktivni broj, R_0, dat kao u poglavlju *SIR model i značajnost parametra* $\boldsymbol{R_0}$. Pod pretpostavkom da je broj osoba osetljivih na infekciju veliki, važi da je

$\frac{S_t^{SIR}}{S_0} \approx 1$, a osnovni reproduktivni broj za SIR model je $R_0 = \frac{\beta}{\alpha+\mu}$. U našem modelu, osnovni reproduktivni broj je funkcija vremena, $R_0(t) = \frac{\gamma}{t(\alpha+\mu)}$. Vremenska promenljiva R_0 omogućuje uzimanje u obzir uticaj preventivnih mera za suzbijanje epidemije, kao što su zatvaranje ili nošenje maski. Vrhunac epidemije je poznat i dostiže se u

$$t_{max} = \frac{\gamma}{\alpha + \mu}. \tag{4}$$

Kombinacijom jednačina $(\mathbf{1})$ i $(\mathbf{4})$ dobija se da je veličina populacije zaražena virusom u trenutku kada epidemija dostiže svoj vrhunac jednaka:

$$I_{t_{max}} = S_0 e^{-\gamma} \left(\frac{\gamma}{\alpha + \mu}\right)^{\gamma} \beta^{\gamma}. \tag{5}$$

Populacija zaraženih osoba ne može da premaši S_0, pa je neophodno da važi $\beta^{\gamma} \leq \frac{e^{\gamma}}{(t_{max})^{\gamma}}$. Obzirom da je stopa mortaliteta μ, ukupan broj umrlih do vremenskog trenutka t je funkcija D_t, koja je rešenje ODJ

$$dD_t = \mu I_t dt. \tag{6}$$

Pod pretpostavkom da osoba koja preleži virus nema imunitet i da nema ulaska i izlaska iz populacije, veličina populacije koja je osetljiva na virus, S_t, je rešenje sledeće ODJ

$$dS_t = \alpha I_t dt - I_t \frac{\gamma}{t} dt, t > t_0. \tag{7}$$

Po konstrukciji, populacija osetljivih se povećava ukoliko zaražena osoba ozdravi, a smanjuje se kada osoba postane inficirana. Pošto je pretpostavka bila da nema ulaska u populaciju, zbir broja osetljivih, inficiranih i preminulih mora ostati jednak S_0, odnosno važi:

$$S_t + I_t + D_t = S_0, t \geq 0. \tag{8}$$

3.3. Aktuarsko vrednovanje polisa osiguranja determinističkog modela epidemije

Razmatra se polisa osiguranja za zarazne bolesti koja naplaćuje godišnju premiju osetljivih članova populacije sve dok su oni zdravi. Neka je premija, p, konstanta. Prikupljene premije pokrivaju medicinske troškove svakog osiguranika koji je zaražen virusom. Beneficija je data sa b, a polisa osiguranja prestaje da važi čim osiguranik ozdravi ili premine od bolesti. U slučaju smrti, jednoktratna beneficija, c, biva isplaćena članovima porodice. Bezrizična kamatna stopa je konstanta data sa r.

Ukoliko polisa osiguranja pokriva celu populaciju, premija, beneficije i jednokratna beneficija moraju zadovoljavati uslov finansijskog ekvilibrijuma polise. Pod pretpostavkom da se posmatraju polise osiguranja u vremenskom intervalu $(0,T)$, diskontovane premije moraju da pokrivaju diskontovane beneficije, pa treba da važi:

$$p\int_0^T e^{-rs}S_s\,ds = b\int_0^T e^{-rs}I_s\,ds + c\int_0^T e^{-rs}\,dD_s. \qquad (\mathbf{9})$$

Objašnjenje formule je sledeće: Veličina populacije u svakom trenutku intervala $(0,T)$, se diskontuje, uzima se „suma“, tj. integral svih tih trenutaka i množi se sa premijom. Na taj način se dobija desna strana jednačine $(\mathbf{9})$ koja predstavlja diskontovane premije u intervalu $(0,T)$. Sa leve strane, broj zaraženih osoba u vremenskom intervalu $(0,T)$ se diskontuje, uzima se suma svih trenutaka iz datog intervala i ona se množi sa s beneficijom. Potom se sve to sabira sa ukupnim brojem preminulih osoba u vremenskim trenucima $t\in(0,T)$, koji se diskontuju, uzima se njihova suma koja se potom množi sa jednokratnom beneficijom.

Teorema 1. Za $r\geq 0$, važi:

$$\int_0^T e^{-rs}I_s ds = \frac{S_0\beta^\gamma}{\theta^{\gamma+1}}\Gamma_l(\gamma+1,T\theta), \qquad (\mathbf{10})$$

gde je $\theta=r+\alpha+\mu$ i $\Gamma_l(\gamma+1,x)=\int_0^x u^\gamma e^{-u}du$ je donja nepotpuna gama funkcija.

Dokaz. Koristeći jednačinu $(\mathbf{1})$, dobija se da je

$$\int_0^T e^{-rs}I_s ds = S_0\beta^\gamma\int_0^T e^{-(r+\alpha+\mu)s}s^\gamma ds.$$

Uvodeći smenu $u=\theta s$, dati integral dobija oblik

$$\int_0^T e^{-rs}I_s ds = S_0\beta^\gamma\theta^{-\gamma-1}\int_0^{\theta T} e^{-u}u^\gamma du.$$

Potom se direktno iz definicije donje nepotpune gama funkcije dobija jednakost. ■

Na osnovu Teoreme 1, važi sledeća posledica.

Posledica 1. Ukupan broj preminulih od posledice epidemije u vremenskom trenutku $t\geq 0$ jednak je

$$D_t = \mu S_0\beta^\gamma(\alpha+\mu)^{-\gamma-1}\Gamma_l\big(\gamma+1,t(\alpha+\mu)\big). \qquad (\mathbf{11})$$

Ako je $\theta=r+\alpha+\mu$, drugi sabirak desne strane jednakosti ($\mathbf{9}$) postaje:

$$\int_0^T e^{-rs}\,dD_s = \mu S_0\beta^\gamma\theta^{-\gamma-1}\Gamma_l(\gamma+1,T\theta). \qquad (\mathbf{12})$$

Veličina populacije osetljivih na virus u trenutku $t\geq 0$, dobija se iz relacije $S_t+I_t+D_t=S_0$:

$$S_t = S_0 - S_0e^{-(\alpha+\mu)t}(\beta t)^\gamma - \mu S_0\beta^\gamma(\alpha+\mu)^{-\gamma-1}\Gamma_l\big(\gamma+1,t(\alpha+\mu)\big). \qquad (\mathbf{13})$$

Naredna teorema daje izraz zatvorenog oblika za premiju koja je rešenje jednačine (**9**).

Teorema 2. Za beneficije (b, c), fer premija koja obezbeđuje aktuarski ekvilibrijum polise osiguranja, data je sa:

$$p = \frac{(b + c\mu)S_0\beta^\gamma\theta^{-\gamma-1}\Gamma_l(\gamma + 1, T\theta)}{\int_0^T e^{-rs}S_s ds}, \tag{\textbf{14}}$$

gde je imenilac dat na sledeći način

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-rs}S_s ds = \frac{S_0}{r}(1 - e^{-rT}) - \frac{S_0\beta^\gamma}{\theta^{\gamma+1}}\Gamma_l(\gamma + 1, T\theta)\left(1 + \frac{\mu}{r}\right) \\ + \frac{\mu S_0\beta^\gamma}{r(\alpha + \mu)^{\gamma+1}}e^{-rT}\Gamma_l\big(\gamma + 1, T(\alpha + \mu)\big).\end{aligned} \tag{\textbf{15}}$$

Dokaz. Iz jednačine (**8**) se dobija :

$$\int_0^T e^{-rs}S_s ds = S_0\int_0^T e^{-rs}ds - \int_0^T e^{-rs}I_s ds - \int_0^T e^{-rs}D_s ds. \tag{\textbf{15}$'$}$$

Prvi integral sa desne strane se može izračunati uvodeći smenu $a = -rs$.

$$S_0\int_0^T e^{-rs}ds = -\frac{S_o}{r}\int_0^{-rT} e^a da = \frac{S_o}{r}\int_{-rT}^0 e^a da = \frac{S_o}{r}(e^0 - e^{-rT}) = \frac{S_o}{r}(1 - e^{-rT})$$

Zatim, na osnovu Teoreme 1 imamo da je drugi integral jednačine $(\mathbf{15}')$ jednak:

$$\int_0^T e^{-rs}I_s ds = \frac{S_0\beta^\gamma}{\theta^{\gamma+1}}\Gamma_l(\gamma + 1, \theta T)$$

Preostaje još da se izračuna treći integral jednačine $(\mathbf{15}')$. Koristeći jednakost (**11**) dobija se:

$$\int_0^T e^{-rs}D_s ds = \frac{\mu S_0\beta^\gamma}{(\alpha + \mu)^{\gamma+1}}\int_0^T e^{-rs}\Gamma_l\big(\gamma + 1, s(\alpha + \mu)\big)ds.$$

Uz pomoć parcijalne integracije gde je smena data sa

$$u = \Gamma_l\big(\gamma + 1, s(\alpha + \mu)\big)\ ,\ dv = \frac{e^{-rs}}{(\alpha+\mu)^{\gamma+1}}ds$$

i donje nepotpune gama funkcije:

$$\Gamma_l\big(\gamma + 1, s(\alpha + \mu)\big) = \int_0^{s(\alpha+\mu)} e^{-v}v^\gamma\, dv = \int_0^s e^{-v(\alpha+\mu)}v^\gamma(\alpha + \mu)^{\gamma+1}\, dv$$

dobija se:

$$\int_0^T \frac{e^{-rs}}{(\alpha+\mu)^{\gamma+1}}\Gamma_l\big(\gamma+1, s(\alpha+\mu)\big)ds$$
$$= \left[-\frac{e^{-rs}}{r(\alpha+\mu)^{\gamma+1}}\Gamma_l(\gamma+1, s(\alpha+\mu))\right]_{s=0}^{s=T}$$
$$+\int_0^T \frac{e^{-rs}}{r(\alpha+\mu)^{\gamma+1}}\frac{d}{ds}\left(\int_0^s e^{-v(\alpha+\mu)}v^\gamma(\alpha+\mu)^{\gamma+1}\,dv\right)ds$$
$$= -\frac{e^{-rT}}{r(\alpha+\mu)^{\gamma+1}}\Gamma_l\big(\gamma+1, T(\alpha+\mu)\big) + \int_0^T \frac{e^{-rs}}{r}\frac{d}{ds}\left(\int_0^s e^{-v(\alpha+\mu)}v^\gamma\,dv\right)ds.$$

Dalje, integral sa desne strane se može raspisati na sledeći način:

$$\int_0^T \frac{e^{-rs}}{r}\frac{d}{ds}\left(\int_0^s e^{-v(\alpha+\mu)}v^\gamma\,dv\right)ds = \frac{1}{r}\int_0^T e^{-(r+\alpha+\mu)s}s^\gamma ds = \frac{1}{r\theta^{\gamma+1}}\Gamma_l(\gamma+1, T\theta).$$

gde se za $\frac{d}{ds}\left(\int_0^s e^{-v(\alpha+\mu)}v^\gamma\,dv\right)$ koristi formula:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} g(t)\,dt\right) = g\big(b(x)\big)b'(x) - g\big(a(x)\big)a'(x).$$

Treći integral jednačine ($\mathbf{15'}$) ima oblik

$$\int_0^T e^{-rs}D_s ds = -\frac{\mu S_0\beta^\gamma e^{-rT}}{r(\alpha+\mu)^{\gamma+1}}\Gamma_l\big(\gamma+1, T(\alpha+\mu)\big) + \frac{\mu S_0\beta^\gamma}{r\theta^{\gamma+1}}\Gamma_l(\gamma+1, T\theta)$$

Ubacivanjem dobijenih rezultata u ($\mathbf{15'}$) dobija se formula ($\mathbf{15}$). Fer premija se računa iz jednačine aktuarskog ekvilibrijuma, tj. iz formule (**9**).

$$p = \frac{b\int_0^T e^{-rs}I_s\,ds + c\int_0^T e^{-rs}\,dD_s}{\int_0^T e^{-rs}S_s\,ds} = \frac{b\frac{S_0\beta^\gamma}{\theta^{\gamma+1}}\Gamma_l(\gamma+1,\theta T) + c\int_0^T e^{-rs}\,\mu I_s ds}{\int_0^T e^{-rs}S_s\,ds}$$
$$= \frac{b\frac{S_0\beta^\gamma}{\theta^{\gamma+1}}\Gamma_l(\gamma+1,\theta T) + c\mu\frac{S_0\beta^\gamma}{\theta^{\gamma+1}}\Gamma_l(\gamma+1,\theta T)}{\int_0^T e^{-rs}S_s\,ds}$$
$$= \frac{(b+c\mu)S_0\beta^\gamma\theta^{-\gamma-1}\Gamma_l(\gamma+1,\theta T)}{\int_0^T e^{-rs}S_s\,ds}.$$

■

3.4. Empirijska ilustracija

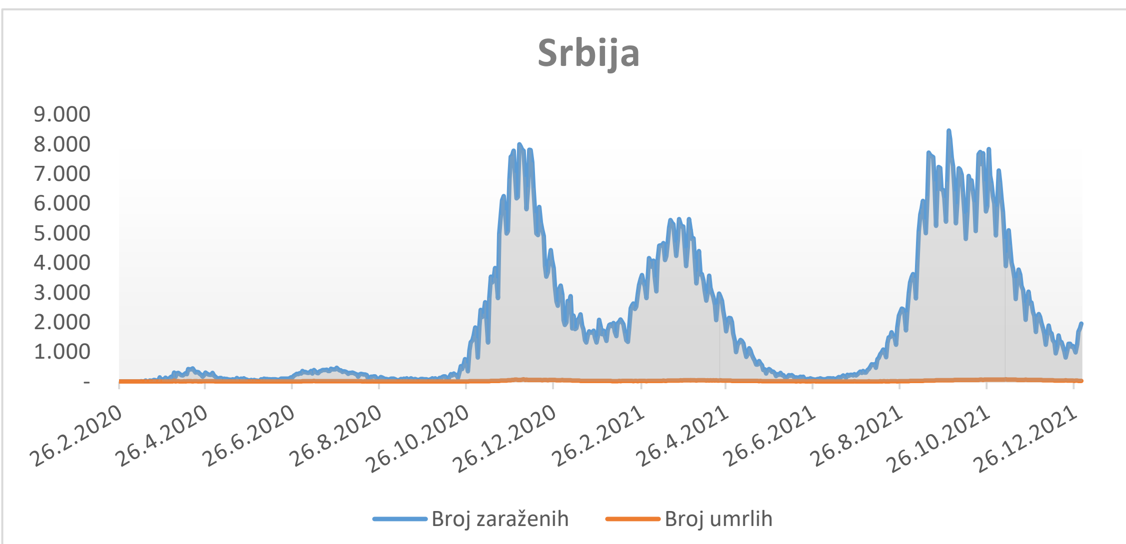
U radu [5], podaci su fitovani za izbijanje pandemije COVID-19 u Belgiji, Nemačkoj, Italiji i Španiji. Prve tri države su izabrane zato što je u njima prijavljeno najveći broj smrtnih slučajeva u Evropi tokom prvog talasa COVID-19.

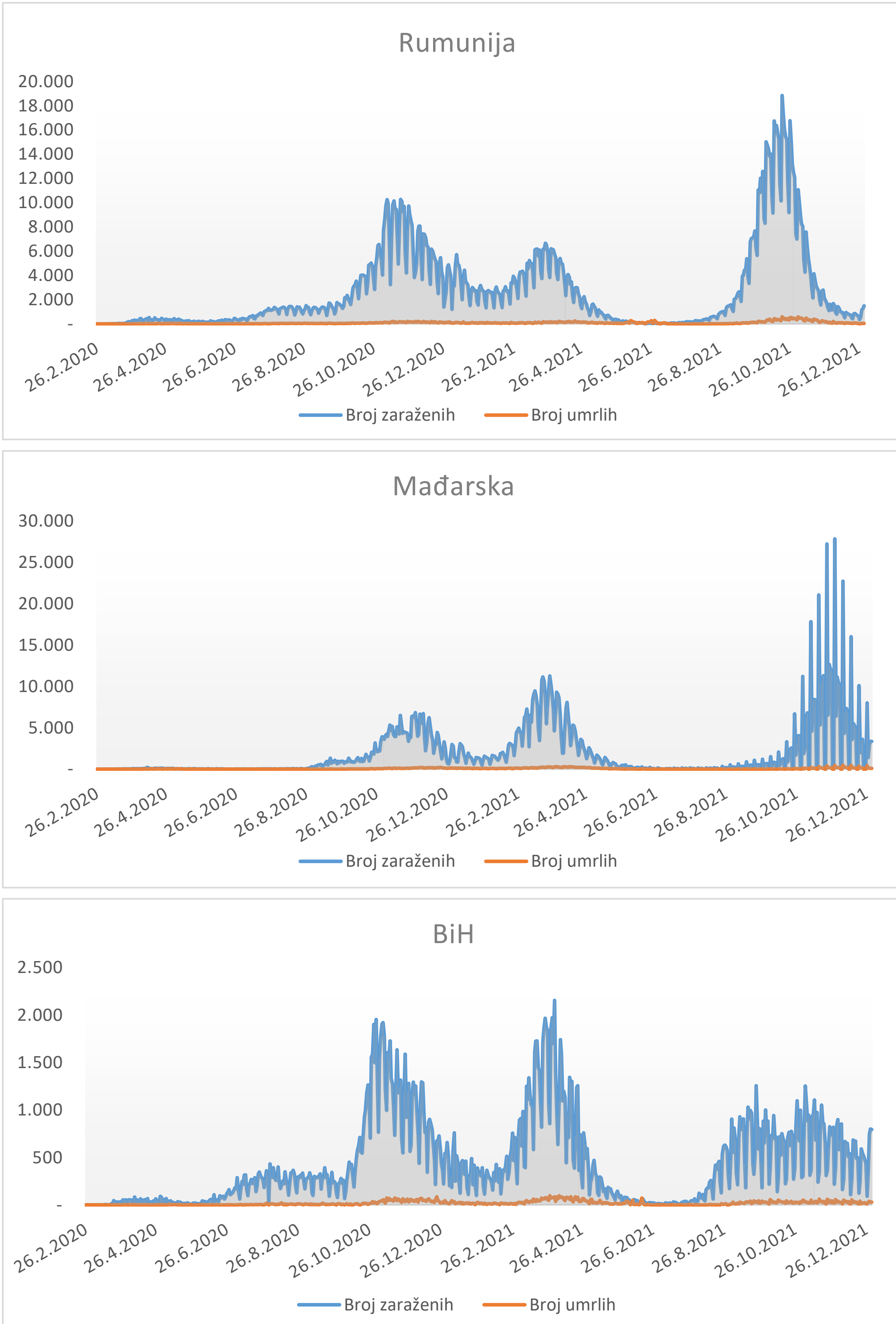
U ovom radu, podaci će biti fitovani za Srbiju, Rumuniju, Mađarsku i Bosnu i Hercegovinu. U Srbiji, prvi slučaj COVID-19 otkriven je dana 06.03.2020, u Rumuniji 26.02.2020, a u Mađarskoj i Bosni i Hercegovini 05.03.2020. Obzirom na datume otkrivanja virusa u spomenutim državama, kao početan datum za model uzima se datum prvih slučajeva u datoj zemlji, a krajnji 31.12.2021. Podaci kao što su dnevni broj zaraženih osoba, umrlih itd. uzeti su sa sajta Svetske zdravstvene organizacije, s tim što je dnevni broj zaraženih ljudi u svakoj državi objavljen dan kasnije nego što je zapravo nastao. Primera radi, na sajtu Svetske zdravstvene organizacije je 24.11.2021. objavljeno da se toga dana inficiralo 3033 osoba, dok je zapravo 23.11.2021. prijavljeno toliko zaraženih.

Obzirom da je model dizajniran da radi na jednom talasu, vremenski interval ćemo podeliti na četiri manja intervala (podintervala) na sledeći način:

1. 06.03.2020 - 23.06.2020.
2. 24.06.2020 - 31.01.2020.
3. 01.02.2021 - 20.06.2021.
4. 21.06.2021 - 31.12.2021.

Podelu na četiri intervala radimo ne samo na osnovu empirijskih podataka nego i prema početku vakcinacije i pojave mutiranih sojeva, tj. prirodno je da se menjaju parametri u modelu.





Ilustracija 2

Grafici na Ilustraciji 2 predstavljajaju broj zaraženih korona virusom kao i broj umrlih od posledice virusa u periodu od početka pandemije do 31.12.2021. u Srbiji, Rumuniji, Mađarskoj i Bosni i Hercegovini.

U Tabeli 1, prikazana je statistika o vremenskim serijama smrtnih i potvrđenih slučajeva COVID-19 za date intervale.

Zemlja	**Intervali**	**Broj dana po intervalima**	**Broj zaraženih osoba u datom intervalu**	**Broj umrlih osoba u datom intervalu**	**Veličina populacije[14] S_0**
Srbija	I	110	12.990	263	8.737.371
	II	222	380.937	3.738	
	III	140	321.796	2.997	
	IV	194	581.381	5.691	
Rumunija	I	119	24.300	1.523	19.237.691
	II	222	702.628	16.741	
	III	140	353.335	14.044	
	IV	194	727.010	26.406	
Mađarska	I	111	4.107	573	9.660.351
	II	222	363.488	11.951	
	III	140	439.884	17.427	
	IV	194	448.987	9.235	
Bosna i Hercegovina	I	111	3.498	171	3.280.819
	II	222	118.366	4.525	
	III	140	82.951	4.920	
	IV	194	85.765	3.812	

Tabela 1. Statistika o vremenskim serijama broja umrlih i zaraženih od COVID-19 (po intervalima)

Oba modela, SIR i dati model u ovom poglavlju, imaju za cilj da opišu evoluciju broja zaraženih I_t. Ako je $\left(I_t^{obs}\right)_{t=1,\ldots,n_{obs}}$ vremenska serija posmatranja i n_{obs} je broj dana, onda se parametri dobijaju minimizacijom težinske srednjekvadratne greške

$$\left(\widehat{\alpha+\mu}, \hat{\gamma}, \hat{\beta}\right) = \arg min \frac{\sum_{k=1}^{n_{obs}} \omega_k \left(I_k - I_k^{obs}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n_{obs}} \omega_k}, \qquad \mathbf{(17)}$$

gde je I_k vrednost I_t u vremenskom trenutku t_k, a $\omega_k, k = 1, \ldots, n_{obs}$ su težinski koeficijenti.

Obzirom da je uticaj α i μ na I_t isti, prvo se procenjuje njihova suma. Godišnja stopa mortaliteta procenjuje se kao odnos ukupnog broja umrlih prema kumulativnom broju inficiranih po modelu, pomnoženo sve sa 365. Testiranje na COVID-19 počelo je tek u martu, pa je vrlo

[14] Podaci su preuzeti sa sajta [Population > Europe - Worldometer]

verovatno da je broj zaraženih bio veći nego što je prijavljeno. Da bi se ovo uzelo u obzir u postupku procene, veći značaj se daje najnovijim dnevnim zapažanjima i to na sledeći način:

$$\begin{cases} \omega_k = 0.05 & k \in \{1,2,\dots,332\} \\ \omega_k = 0.5 & k \in \{333,\dots,472\}, \\ \omega_k = 1.5 & k \geq 473 \end{cases}$$

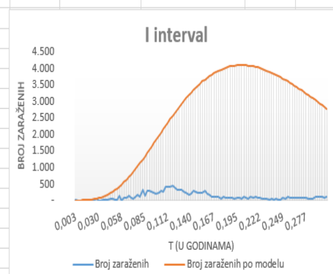
U nastavku ćemo objasniti postupak dobijanja parametara $\widehat{\alpha+\mu}, \hat{\gamma}$ i $\hat{\beta}$. Najpre napišimo formulu ($\mathbf{17}$) na sledeći način:

$$\arg min \frac{\sum_{k=1}^{n_{obs}} \omega_k \left(I_k - I_k^{obs}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n_{obs}} \omega_k} = \arg min \frac{\sum_{k=1}^{n_{obs}} \omega_k \left(S_0 e^{-(\alpha+\mu)t_k} (\beta t_k)^{\gamma} - I_k^{obs}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n_{obs}} \omega_k}$$

Potom podatke kao što su datumi, težinski koeficijenti, veličina populacije, vreme i broj zaraženih, unosimo u Excel glavnu tabelu. U ostalim poljima glavne tabele ćemo izračunati I_k po modelu, $I_k - I_k^{obs}$, $\left(I_k - I_k^{obs}\right)^2$ i $\omega_k\left(I_k - I_k^{obs}\right)^2$. Pored tabele zapisujemo ocenjivače, ispod kojih smo za početak stavili da imaju proizvoljne vrednosti, npr. 20, 2, 4. Ispod tabele, ubacujemo SSE i grafik na kome je predstavljen broj zaraženih kao i broj zaraženih dobijen pomoću modela. Deo glavne tabele, tabele sa ocenjivačima, vrednost SSE i grafikon je dat na Slici *1*.

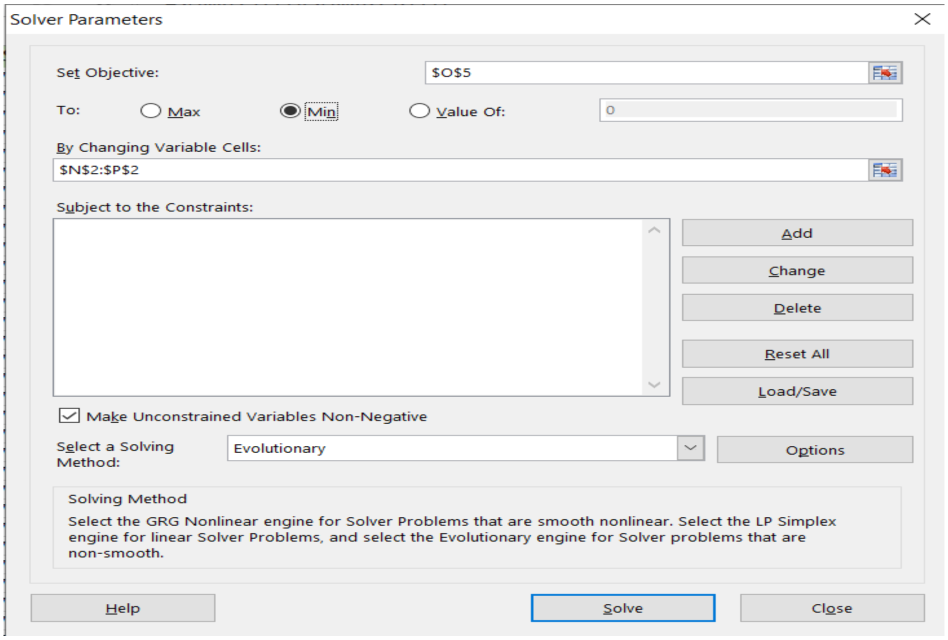
date	ω_k	S_0	t_k	I_k^{obs}	$I_k = S_0 e^{-(\alpha+\mu)t_k}(\beta t_k)^{\gamma}$	$I_k - I_k^{obs}$	$\left(I_k - I_k^{obs}\right)^2$	$\omega_k\left(I_k - I_k^{obs}\right)^2$
6.3.2020	0,05	8.737.371	0,003	1	0	- 1	1	0
7.3.2020	0,05	8.737.371	0,005	-	0	0	0	0
8.3.2020	0,05	8.737.371	0,008	-	1	1	0	0
9.3.2020	0,05	8.737.371	0,011	-	2	2	3	0
10.3.2020	0,05	8.737.371	0,014	1	4	3	8	0
11.3.2020	0,05	8.737.371	0,016	2	7	5	29	1
12.3.2020	0,05	8.737.371	0,019	8	13	5	24	1
13.3.2020	0,05	8.737.371	0,022	-	21	21	433	22
14.3.2020	0,05	8.737.371	0,025	2	32	30	874	44
15.3.2020	0,05	8.737.371	0,027	32	46	14	183	9
16.3.2020	0,05	8.737.371	0,030	-	63	63	3.984	199
17.3.2020	0,05	8.737.371	0,033	-	85	85	7.161	358
18.3.2020	0,05	8.737.371	0,036	26	110	84	7.114	356
19.3.2020	0,05	8.737.371	0,038	22	141	119	14.043	702
20.3.2020	0,05	8.737.371	0,041	29	175	146	21.399	1.070
21.3.2020	0,05	8.737.371	0,044	50	215	165	27.163	1.358
22.3.2020	0,05	8.737.371	0,047	46	259	213	45.439	2.272
23.3.2020	0,05	8.737.371	0,049	3	308	305	93.252	4.663
24.3.2020	0,05	8.737.371	0,052	27	362	335	112.501	5.625

$\widehat{\alpha+\mu}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
20,00	2,00	4,00
SSE	7.882.786	



Slika 1

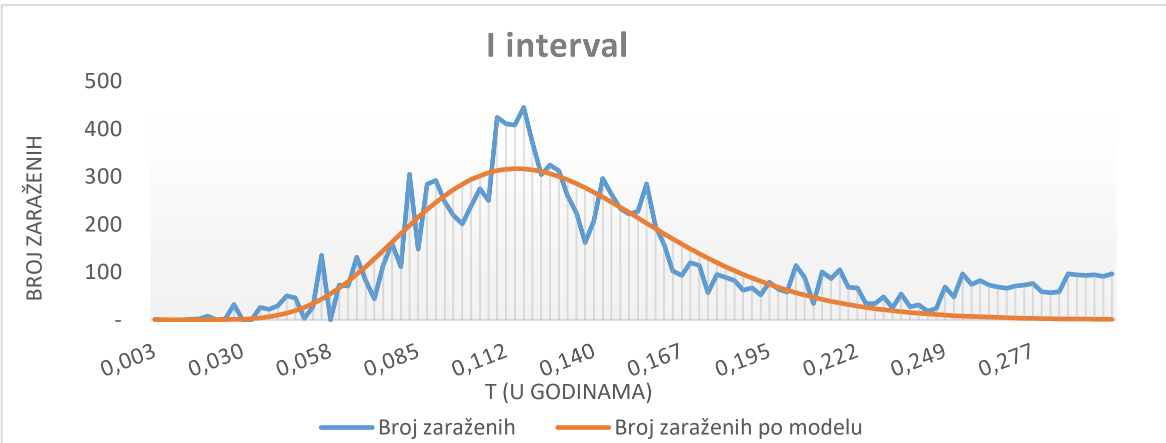
Obzirom da model ne fituje dobro krivu, pomoću **Solver analize** radimo minimizaciju težinske srednjekvadratne greške i to na sledeći opisani način. Pritiskanjem na **Data**, zatim na **Solver**, otvara nam se prozor kao na Slici *2*.

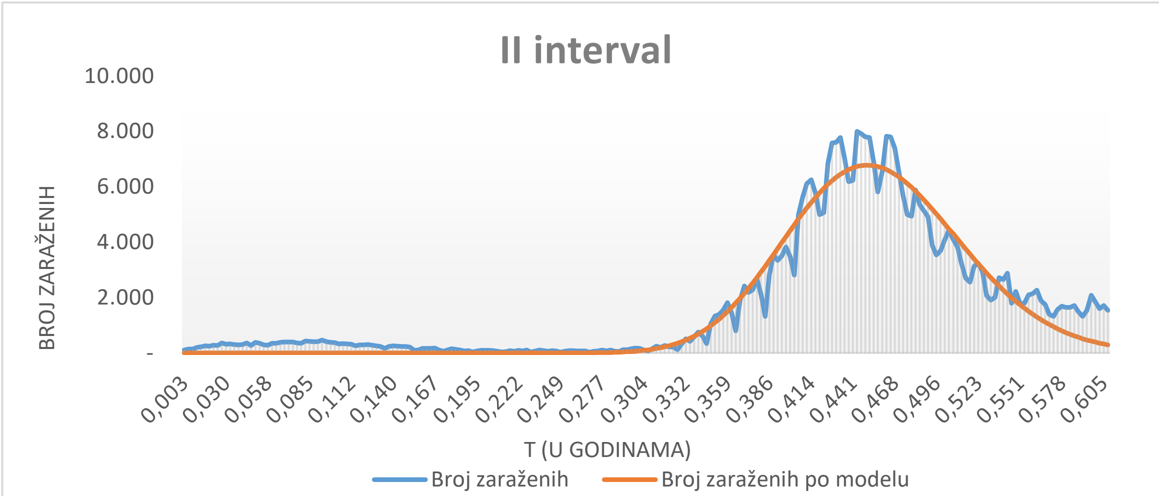


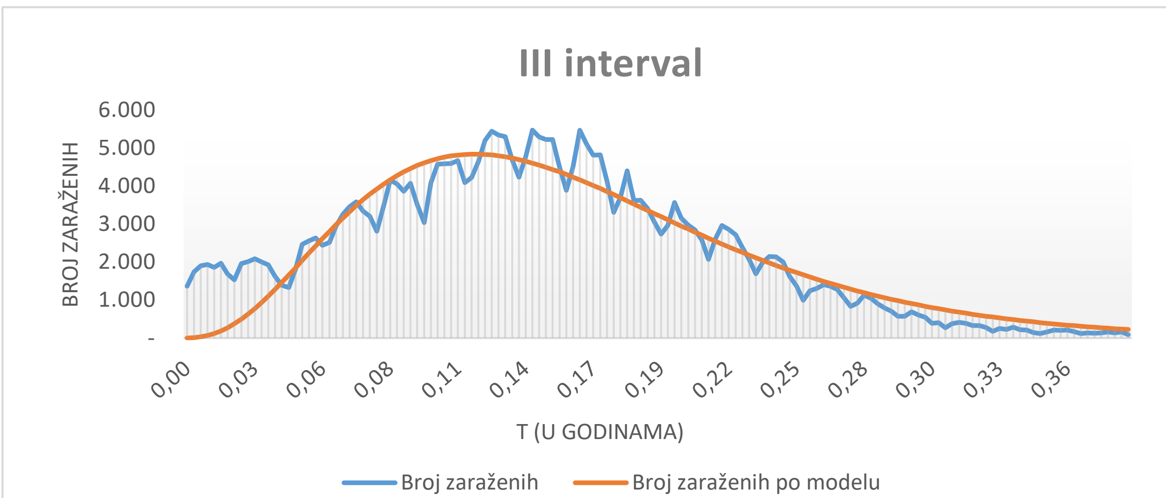
Slika 2

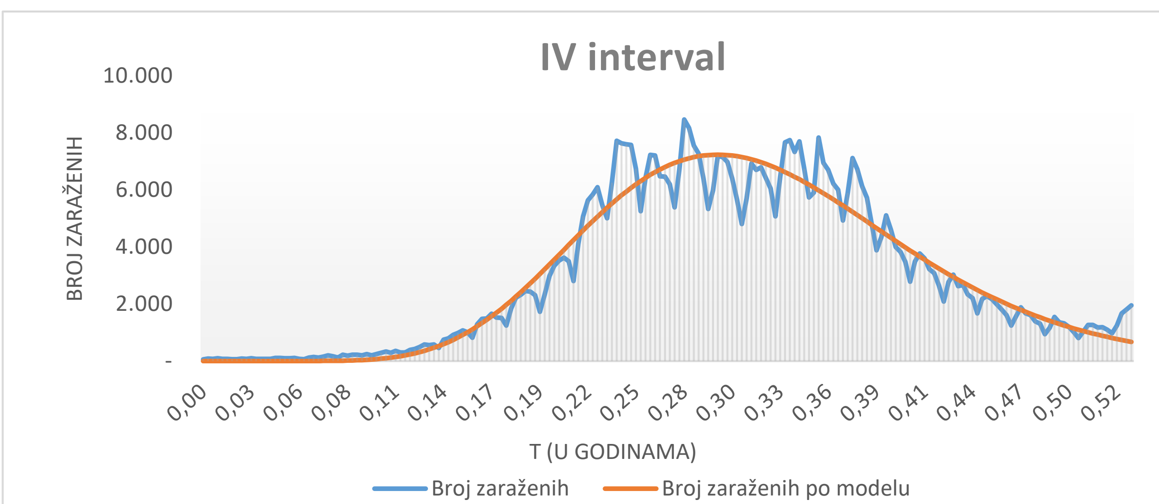
Za **Set Objective** biramo ćeliju u kojoj nam se nalazi vrednost SSE, dok za korak **To**: biramo **Min**, pošto govorimo o postupku minimizacije. Dalje, kako govorimo o oceni parametara $\alpha + \mu, \gamma, \beta$, za korak **By Changing Variable Cells** biramo ćelije navedenih ocenjivača. Pritiskanjem dugmeta **Add**, za svaki parametar, aproksimativno dodajemo gornju granicu, a za donju stavljamo 0. Nakon pritiskanja na **Solve** dobijamo ocenjene parametre. Za svaki interval, kao i za ostale države, ponavljamo postupak.

Na Ilustraciji *3*. prikazana je stvarna vrednost I_t kao i vrednost I_t predviđena datim modelom za Srbiju. Rezultati postupka kalibracije prikazani su u Tabeli 2.









Ilustracija 3. Upoređivanje fitovane vrednosti I_t sa stvarnim brojem zaraženih u Srbiji

Zemlja	Intervali	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\mu}$	t_{max} (u danima)	$I_{t_{max}}$	SSE
Srbija	I	77,72	9,00	7,54	0,0202	42	317	2.747
	II	136,06	61,30	5,37	0,0098	164	6.777	317.331
	III	24,49	2,92	1,75	0,0093	43	4.841	372.067
	IV	38,06	11,26	4,89	0,0098	108	7.234	434.229
Rumunija	I	0,01	0,01	15,82	0,0627	47	523	0,048
	II	43,91	18,10	4,27	0,0238	150	7.406	1.650.292
	III	28,03	3,52	2,13	0,0397	46	5.401	978.373
	IV	125,28	40,43	7,06	0,0363	118	14.828	1.618.414
Mađarska	I	43,83	5,13	2,41	0,1395	43	85	375
	II	73,97	0,03	5,08	0,0329	153	5.025	490.816
	III	42,33	5,45	5,78	0,0396	47	8.260	1.790.527
	IV	66,02	27,30	5,10	0,0206	151	9.355	14.975.125
Bosna i Hercegovina	I	8,13	1,31	0,003	0,0489	58	40	526
	II	63,29	24,99	5,04	0,0382	144	1.354	69.684
	III	46,49	6,79	6,01	0,0593	53	1.509	73.990
	IV	12,39	4,12	1,07	0,0444	121	733	48.941

Tabela 2. Ocenjeni parametri ***po intervalima*** *za model koji prati zakonitost jednačine* (**1**) *(jedinica za vreme t : godina). SSE je vrednost optimalnog kriterijuma u jednačini (***17***)*

U radu [5], pokušano je modelovanje evolucije inficiranih osoba SIR modelom, koji je fitovan minimizacijom srednjekvadratne greške. Numerički eksperiment pokazao je da SIR model ne uspeva da replicira krivu I_t. Jedini način da se model fituje jeste da se S_0 smatra parametrom. Procena parametara nudi, odlično fitovanje, ali s obzirom na to da je S_0 podesiv, teško je opravdati. Prilagođeni S_0 su znatno manji od stvarne veličine razmatranih populacija. Ovo potvrđuje da je dati pristup pouzdana alternativa u poređenju sa SIR modelom.

Kako bismo ocenili fer premiju polise osiguranja u **Srbiji**, koristićemo procenjene parametre koje ćemo ubaciti u jednačinu $(\mathbf{14})$. $\Gamma_l(\gamma + 1, T\theta)$ računamo u programu **Wolfram Mathematica**, koristeći ugrađenu funkciju ***Gamma [a, z]***.

Posmatramo paket „Moj oporavak“ OTP banke, na osnovu koga je osoba osigurana i u slučaju oboljenja od COVID-19. Za više informacija pogledati [11]. Analizirajmo dva slučaja.

U prvom slučaju, naplaćene premije isključivo pokrivaju medicinske troškove. Za vreme lečenja isplaćuje se naknada od 2000 dinara dnevno ($b = 730.000$ dinara na godišnjem nivou). Mesečna premija za osiguranike starosti:

- 18 - 49 godina je 256 dinara;
- 50 - 64 godina je 442 dinara;
- 65 - 75 godina je 751 dinar.

U drugom slučaju, polisa pokriva isključivo rizik od smrti: jednokratna beneficija od 100.000 dinara isplaćuje se u slučaju inficiranog osiguranika. Trajanje ugovora je godinu dana**,** a bezrizična kamatna stopa je, npr. 2%. Tabela 3 prikazuje fer premiju u Srbiji, kao i osetljivost stopa na varijacije parametara.

	b	c	Fer p	$\beta + 1\%$	$\beta - 1\%$	$\alpha + 1\%$	$\alpha - 1\%$	$\gamma + 1\%$	$\gamma - 1\%$
I	730.000	0	$1{,}57*10^{-5}$	$1{,}59*10^{-5}$	$1{,}56*10^{-5}$	$1{,}57*10^{-5}$	$1{,}58*10^{-5}$	$1{,}*5410^{-5}$	$1{,}61*10^{-5}$
	0	100.000	$4{,}36*10^{-8}$	$4{,}42*10^{-8}$	$4{,}31*10^{-8}$	$4{,}36*10^{-8}$	$4{,}37*10^{-8}$	$4{,}26*10^{-8}$	$4{,}47*10^{-8}$
II	730.000	0	$6{,}72*10^{-3}$	$7{,}54*10^{-3}$	$6{,}00*10^{-3}$	$6{,}69*10^{-3}$	$6{,}75*10^{-3}$	$6{,}1*10^{-3}$	$6{,}94*10^{-3}$
	0	100.000	$9{,}04*10^{-6}$	$1{,}01*10^{-5}$	$8{,}06*10^{-6}$	$9{,}00*10^{-6}$	$9{,}08*10^{-6}$	$8{,}75*10^{-6}$	$9{,}33*10^{-6}$
III	730.000	0	$1{,}06*10^{-2}$	$1{,}08*10^{-2}$	$1{,}04*10^{-2}$	$1{,}06*10^{-2}$	$1{,}06*10^{-2}$	$1{,}03*10^{-2}$	$1{,}09*10^{-2}$
	0	100.000	$1{,}35*10^{-5}$	$1{,}37*10^{-5}$	$1{,}33*10^{-5}$	$1{,}35*10^{-5}$	$1{,}35*10^{-5}$	$1{,}31*10^{-5}$	$1{,}39*10^{-5}$
IV	730.000	0	$1{,}36*10^{-1}$	$1{,}40 * 10^{-1}$	$1{,}33 * 10^{-3}$	$1{,}36 * 10^{-3}$	$1{,}37 * 10^{-3}$	$1{,}34 * 10^{-3}$	$1{,}39 * 10^{-3}$
	0	100.000	$1{,}83*10^{-4}$	$1{,}87*10^{-4}$	$1{,}79*10^{-9}$	$1{,}82 * 10^{-6}$	$1{,}84*10^{-6}$	$1{,}79*10^{-6}$	$1{,}87*10^{-6}$

Tabela 3. Fer premija prema modelu $(\mathbf{1})$ *za Srbiju.*
Vremena za date intervale su $T_I = 0{,}30, T_{II} = 0{,}61, T_{III} = 0{,}38, T_{IV} = 0{,}53$ *godina i* $r = 2\%$.

Ako bismo uporedili stopu smrtnosti dobijenu za Srbiju u datim intervalima, i onu dobijenu za npr. Italiju u radu [5], videli bismo da se značajno razlikuju. Stopa smrtnosti za Srbiju u prvom intervalu iznosi 0,0202, dok je za Italiju ta stopa 3,931. Zbog velike razlike u stopi smrtnosti sledi i razlika u premijama: $1{,}57*10^{-5}$(Srbija) nasuprot 107,02 (Italija).

4. Model sa vremenskom slučajnom promenljivom

Model u glavi Deterministički model epidemije je potpuno deterministički. U praksi mi posmatramo slučajno kretanje broja zaraženih osoba. U ovoj glavi, vreme, t, koje je do sada bilo fiksirano, postaje stohastički sat koji se zove *subordinator*.

4.1. Formulacija modela

Stohastički sat je pozitivan rastući proces dat sa $(\tau_t)_{t\geq 0}$, definisan na prostoru verovatnoća Ω, snabdeven merom verovatnoća P i njegovom prirodnom filtracijom $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Neka je τ_t gama proces, tj. τ_t je gama raspodela sa očekivanjem i varijansom λt. Funkcija gustine verovatnoće za τ_t data je sa

$$f_{\tau_t}(x) = \mathbf{1}_{x>0}\frac{x^{\lambda t-1}e^{-x}}{\Gamma(\lambda t)}, \tag{18}$$

gde je $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ standardna gama funkcija takva da je $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ za $a > 0$, a $\mathbf{1}_{x>0}$ je indikator funkcija.

Karakteristična funkcija za gama proces je

$$\mathbb{E}\left(e^{iu\tau_t}\right) = (1-iu)^{-\lambda t} = e^{-t\psi(u)},$$

gde je $\psi(u) = \lambda\ln(1-iu)$ karakteristični eksponent i $u \in \mathbb{R}$. Na osnovu Levi-Hinčinove reprezentacije karakteristične funkcije sledi da je τ_t takođe Levijev proces. Zaista, $\psi(u)$ se može zapisati kao sledeći integral:

$$\psi(u) = \int_0^\infty \lambda x^{-1}e^{-x}\left(1-e^{iux}\right)dx,$$

odakle zaključujemo da je Levijeva mera za τ_t $\nu(dx) = \lambda x^{-1}e^{-x}1_{(x\geq 0)}dx$. Levi-Hinčinova reprezentacija karakteristične funkcije daje da je τ_t proces sa konačnim varijacijama. Stoga, za bilo koju funkciju vremena i subordinator, $f(t,\tau_t)$, Itova lema za semimartingale glasi

$$df(t,\tau_t) = \frac{\partial f(t,\tau_t)}{\partial t}dt + f\left(t,\tau_{t\_}+\Delta\tau_t\right) - f(\tau_{t\_}).$$

Očekivanje infinitezimalne varijacije u odnosu na $\mathcal{F}_t$ je dato sa:

$$\mathbb{E}(df(t,\tau_t)|\mathcal{F}_t) = \frac{\partial f(t,\tau_t)}{\partial t}dt + \int_0^\infty \left(f\left(t,\tau_{t\_}+x\right) - f\left(\tau_{t\_}\right)\right)\lambda x^{-1}e^{-x}\,dxdt.$$

Model sa vremenskom promenljivom se dobija tako što se u determinstičkom modelu t zamenjuje sa τ_t. Tada je dinamika populacije zaraženih osoba data sa:

$$I_t = S_0 e^{-(\alpha+\mu)\tau_t}(\beta\tau_t)^\gamma, t \geq 0, \tag{19}$$

gde $\alpha, \beta, \mu, \gamma \in \mathbb{R}^+$. Koristeći Itovu lemu i Tejlorov razvoj prvog reda, dobija se:

$$\begin{aligned} dI_t &= \mathrm{S}_0 \mathrm{e}^{-(\alpha+\mu)(\tau_{t-}+\Delta\tau_t)}(\beta(\tau_{t-}+\Delta\tau_t))^\gamma - \mathrm{S}_0\mathrm{e}^{-(\alpha+\mu)\tau_{t-}}(\beta\tau_{t-})^\gamma = \\ & I_{t-}\left(-(\alpha+\mu)\Delta\tau_t + \frac{\gamma}{\tau_{t-}}\Delta\tau_t\right) + \mathcal{O}((\Delta\tau_t)^2). \end{aligned} \tag{20}$$

Ova aproksimacija prvog reda naglašava jaku vezu između determinističkog modela i modela sa vremenskom promenljivom. Parametri α i μ se i dalje mogu tumačiti kao stopa oporavka i smrti, ali na slučajnom intervalu dužine Δt. Stopa zaraze po glavi stanovnika u trenutku t je jednaka $\frac{\gamma}{\tau_{t-}}$ za period Δt. Sledeća teorema daje očekivanje i varijansu za $(I_t)_{t\geq 0}$.

Teorema 3. Očekivani broj inficiranih osoba u trenutku t jednak je:

$$\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_0) = \frac{S_0\beta^\gamma\Gamma(\gamma+\lambda t)}{(\alpha+\mu+1)^{\gamma+\lambda t}\Gamma(\lambda t)}, \tag{21}$$

gde je varijansa data sledećom jednačinom:

$$\mathbb{V}(I_t|\mathcal{F}_0) = S_0^2\beta^{2\gamma}\left(\frac{\Gamma(2\gamma+\lambda t)}{(2\alpha+2\mu+1)^{2\gamma+\lambda t}\Gamma(\lambda t)} - \left(\frac{\Gamma(\gamma+\lambda t)}{(\alpha+\mu+1)^{\gamma+\lambda t}\Gamma(\lambda t)}\right)^2\right). \tag{22}$$

Dokaz. Koristeći (**18**) i (**19**), dobija se:

$$\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_0) = S_0\int_0^\infty \frac{u^{\lambda t-1}e^{-u}}{\Gamma(\lambda t)}e^{-(\alpha+\mu)u}(\beta u)^\gamma du = \frac{S_0\beta^\gamma}{\Gamma(\lambda t)}\int_0^\infty u^{\gamma+\lambda t-1}e^{-(\alpha+\mu+1)u}du.$$

Zatim, uvodi se smena $v = (\alpha+\mu+1)u$, nakon koje $\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_0)$ dobija sledeći oblik:

$$\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_0) = \frac{S_0\beta^\gamma}{\Gamma(\lambda t)}\int_0^\infty \frac{v^{\gamma+\lambda t-1}}{(\alpha+\mu+1)^{\gamma+\lambda t}}e^{-v}dv = \frac{S_0\beta^\gamma}{\Gamma(\lambda t)(\alpha+\mu+1)^{\gamma+\lambda t}}\int_0^\infty v^{\gamma+\lambda t-1}e^{-v}dv.$$

Na osnovu definicije standardne gama funkcije sledi : $\int_0^\infty v^{\gamma+\lambda t-1}e^{-v}dv = \Gamma(\gamma+\lambda t)$, čime se dobija da je

$$\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_0) = \frac{S_0\beta^\gamma\Gamma(\gamma+\lambda t)}{(\alpha+\mu+1)^{\gamma+\lambda t}\Gamma(\lambda t)}.$$

Varijansa se računa kao razlika drugog momenta i kvadrata prvog momenta, tj.

$$\mathbb{V}(I_t|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}\left({I_t}^2\middle|\mathcal{F}_0\right) - (\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_0))^2.$$

Drugi momenat se na sličan način računa kao prvi:

$$\mathbb{E}\left(I_t{}^2\middle|\mathcal{F}_0\right) = S_0^2\int_0^\infty \frac{u^{\lambda t-1}e^{-u}}{\Gamma(\lambda t)}e^{-2(\alpha+\mu)u}(\beta u)^{2\gamma}du = \frac{S_0^2\beta^{2\gamma}}{\Gamma(\lambda t)}\int_0^\infty u^{2\gamma+\lambda t-1}e^{-(2\alpha+2\mu+1)u}du$$
$$= \frac{S_0^2\beta^{2\gamma}\Gamma(2\gamma+\lambda t)}{(2\alpha+2\mu+1)^{2\gamma+\lambda t}\Gamma(\lambda t)}.$$

Konačno,

$$\mathbb{V}(I_t|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}\left(I_t{}^2\middle|\mathcal{F}_0\right) - \left(\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_0)\right)^2$$
$$= S_0^2\beta^{2\gamma}\left(\frac{\Gamma(2\gamma+\lambda t)}{(2\alpha+2\mu+1)^{2\gamma+\lambda t}\Gamma(\lambda t)} - \left(\frac{\Gamma(\gamma+\lambda t)}{(\alpha+\mu+1)^{\gamma+\lambda t}\Gamma(\lambda t)}\right)^2\right).$$

■

Maksimum epidemije je dostignut u t_{max} sa $\tau_{t_{max}} = \frac{\gamma}{\alpha+\mu}$. Kumulativni broj umrlih od virusa u modelu sa vremenskom promenljivom je:

$$D_t = \mu S_0\beta^\gamma(\alpha+\mu)^{-\gamma-1}\Gamma_l\left(\gamma+1, \tau_t(\alpha+\mu)\right) = \mu S_0\beta^\gamma(\alpha+\mu)^{-\gamma-1}\int_0^{\tau_t(\alpha+\mu)} u^\gamma e^{-u}\,du.$$

Uvođenjem smene $v = \frac{u}{(\alpha+\mu)}$ se dobija

$$D_t = \mu S_0\beta^\gamma(\alpha+\mu)^{-\gamma-1}\int_0^{\tau_t} v^\gamma(\alpha+\mu)^{\gamma+1}e^{-v(\alpha+\mu)}\,dv = \mu S_0\beta^\gamma\int_0^{\tau_t} v^\gamma e^{-v(\alpha+\mu)}\,dv. \quad (\mathbf{23})$$

Koristeći Itovu lemu i Tejlorov razvoj prvog reda proverava se da li je dinamika za D_t u skladu sa onom za I_t:

$$dD_t = \mu S_0\beta^\gamma\int_{\tau_{t-}}^{\tau_{t-}+\Delta\tau_t} v^\gamma e^{-v(\alpha+\mu)}\,dv \approx \mu S_0(\beta\tau_{t-})^\gamma e^{-\tau_{t-}(\alpha+\mu)}\Delta\tau_t + \mathcal{O}((\Delta\tau_t)^2) \qquad (\mathbf{24})$$

gde je $S_0(\beta\tau_{t-})^\gamma e^{-\tau_{t-}(\alpha+\mu)} = I_{t-}$. Zaključujemo da je jednačina $(\mathbf{24})$ stohastički ekvivalentna sa jednačinom $(\mathbf{6})$. Ova jednačina govori da je beskonačno mala varijacija D_t razlomak $\mu\Delta\tau_t$ zaražene populacije.

Nažalost, očekivanje i varijansa broja umrlih ima samo poluzatvoreni izraz i njihovo izračunavanje zahteva numeričku integraciju:

$$\mathbb{E}(D_t|\mathcal{F}_0) = \mu S_0\beta^\gamma\int_0^\infty \frac{x^{\lambda t-1}e^{-x}}{\Gamma(\lambda t)}\int_0^x v^\gamma e^{-v(\alpha+\mu)}\,dvdx.$$

Smenom $u = v(\alpha+\mu)$ dobija se:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D_t|\mathcal{F}_0) &= \mu S_0\beta^\gamma \int_0^\infty \frac{x^{\lambda t-1}e^{-x}}{\Gamma(\lambda t)} \int_0^{x(\alpha+\mu)} \frac{u^\gamma}{(\alpha+\mu)^{\gamma+1}} e^{-u}\, dudx \\ &= \frac{\mu S_0\beta^\gamma}{\Gamma(\lambda t)(\alpha+\mu)^{\gamma+1}} \int_0^\infty x^{\lambda t-1}e^{-x} \int_0^{x(\alpha+\mu)} u^\gamma\, e^{-u} dudx \\ &= \frac{\mu S_0\beta^\gamma}{\Gamma(\lambda t)(\alpha+\mu)^{\gamma+1}} \int_0^\infty x^{\lambda t-1}e^{-x}\Gamma_l(\gamma+1, x(\alpha+\mu))\, dx. \qquad (\mathbf{25})\end{aligned}$$

Drugi momenat se slično dobija:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left({D_t}^2\middle|\mathcal{F}_0\right) &= (\mu S_0\beta^\gamma)^2 \int_0^\infty \frac{x^{\lambda t-1}e^{-x}}{\Gamma(\lambda t)} \left(\int_0^x v^\gamma e^{-v(\alpha+\mu)}\, dv\right)^2 dx \\ &= \frac{(\mu S_0\beta^\gamma)^2}{\Gamma(\lambda t)(\alpha+\mu)^{2\gamma+2}} \int_0^\infty x^{\lambda t-1}e^{-x} \left(\int_0^{x(\alpha+\mu)} u^\gamma\, e^{-u} du\right)^2 dx \\ &= \frac{(\mu S_0\beta^\gamma)^2}{\Gamma(\lambda t)(\alpha+\mu)^{2\gamma+2}} \int_0^\infty x^{\lambda t-1}e^{-x} \left(\Gamma_l\big(\gamma+1, x(\alpha+\mu)\big)\right)^2 dx. \qquad (\mathbf{26})\end{aligned}$$

Tada, varijansa kumulativnog broja umrlih do vremenskog trenutka t je:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(D_t|\mathcal{F}_0) &= \mathbb{E}\left({D_t}^2\middle|\mathcal{F}_0\right) - \left(\mathbb{E}(D_t|\mathcal{F}_0)\right)^2 \\ &= \frac{(\mu S_0\beta^\gamma)^2}{\Gamma(\lambda t)(\alpha+\mu)^{2\gamma+2}} \left[\int_0^\infty x^{\lambda t-1}e^{-x} \left(\Gamma_l\big(\gamma+1, x(\alpha+\mu)\big)\right)^2 dx \right. \\ &\left. - \left(\int_0^\infty x^{\lambda t-1}e^{-x}\Gamma_l\big(\gamma+1, x(\alpha+\mu)\big)\right)^2 dx\right]. \qquad (\mathbf{27})\end{aligned}$$

Veličina populacije osetljive na virus u vremenskom trenutku $t \geq 0$ se dobija iz relacije $S_t + I_t + D_t = S_0$ i data je na sledeći način:

$$S_t = S_0 - S_0 e^{-\tau_t(\alpha+\mu)}(\beta\tau_t)^\gamma - \mu S_0\beta^\gamma(\alpha+\mu)^{-\gamma-1}\Gamma_l\big(\gamma+1, \tau_t(\alpha+\mu)\big).$$

Očekivana veličina populacije osetljive na virus se jednostavno dobija iz jednačine

$$\mathbb{E}(S_t|\mathcal{F}_0) = S_0 - \mathbb{E}(D_t|\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_0),$$

gde su $\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_0)$ i $\mathbb{E}(D_t|\mathcal{F}_0)$ izračunati u $(\mathbf{21})$ i $(\mathbf{25})$.

Ako se uzme u obzir polisa osiguranja definisana u poglavlju *Aktuarsko vrednovanje polisa osiguranja determinističkog modela epidemije*, onda je fer premija očekivane beneficije:

$$p = \frac{b\int_0^T e^{-rs}\, \mathbb{E}(I_s|\mathcal{F}_0)\, ds + c\int_0^T e^{-rs}\ \mathbb{E}(dD_s|\mathcal{F}_0)}{\int_0^T e^{-rs}\, \mathbb{E}(S_s|\mathcal{F}_0)\, ds}. \qquad (\mathbf{28})$$

Za razliku od determinističkog modela, integrali u poslednjem izrazu se ne mogu izračunati u zatvorenom obliku, ali se mogu lako aproksimirati preko particije na intervalu $[0, T]$. Posmatrajmo particiju $\{s_0 = 0, \dots, s_m = T\}$ jednako udaljenih vremenskih trenutaka i neka je Δ_m dužina svakog intervala. Tada se integrali iz $(\mathbf{28})$ mogu zapisati na sledeći način:

$$\int_0^T e^{-rs}\,\mathbb{E}(S_s|\mathcal{F}_0)\,ds \approx \sum_{i=1}^{m} e^{-rs_i}\,\mathbb{E}\big(S_{s_i}\big|\mathcal{F}_0\big)\,\Delta_m,$$

$$\int_0^T e^{-rs}\,\mathbb{E}(dD_s|\mathcal{F}_0) \approx \sum_{i=1}^{m} e^{-rs_i}\,\Big(\mathbb{E}\big(D_{s_i}\big|\mathcal{F}_0\big) - \mathbb{E}\big(D_{s_{i-1}}\big|\mathcal{F}_0\big)\Big)\,\Delta_m,$$

$$\int_0^T e^{-rs}\,\mathbb{E}(I_s|\mathcal{F}_0)\,ds \approx \sum_{i=1}^{m} e^{-rs_i}\,\mathbb{E}\big(I_{s_i}\big|\mathcal{F}_0\big)\,\Delta_m.$$

U sledećem poglavlju biće predstavljeno drugačije stohastičko proširenje determinističkog modela koje dovodi do analitičkih izraza ovih integrala.

4.2. Reosiguranje u modelu sa vremenskom promenljivom

Uvođenje stohastike u dinamici epidemije omogućava određivanje cene različitih pokrića reosiguranja. Razmatra se ugovor o prekoračenju dozvoljenog praga (*eng. excess-of-loss contract*) koji obezbeđuju nadoknadu ukoliko broj zaraženih ili broj umrlih pređe određeni prag.

Naredna teorema daje analitički izraz za ugovor o reosiguranju, koji u vremenskom trenutku t isplaćuje iznos od $C(I_t - K)$, ako $I_t > K$. K predstavlja prag, a C beneficija i $C, K \in \mathbb{R}^+$. Ugovor je sličan finansijskoj opciji čija je podloga veličina inficirane populacije. Bezrizična kamatna stopa je data sa r, dok se za parametre modela I_t i τ_t pretpostavlja da su jednaki.

Teorema 4. Vrednost reosiguranja prekoračenja dozvoljenog praga koji pokriva prekomeran broj inficiranih ljudi od virusa, jednaka je:

$$Ce^{-rt}\mathbb{E}((I_t - K)_+|\mathcal{F}_0) = Ce^{-rt}\left(\frac{S_0\beta^\gamma\Gamma_u(\lambda t+\gamma,(\alpha+\mu+1)u_K)}{\Gamma(\lambda t)(\alpha+\mu+1)^{\lambda t+\gamma}} - K\,\frac{\Gamma_u(\lambda t, u_K)}{\Gamma(\lambda t)}\right), \qquad (\mathbf{29})$$

gde je u_K pozitivno rešenje jednačine:

$$\ln S_0 - (\alpha + \mu)u + \gamma\ln\beta + \gamma\ln u = \ln K, \qquad (\mathbf{30})$$

i $\Gamma_u(\gamma + 1, x) = \int_x^\infty u^\gamma e^{-u} du$ je gornja nepotpuna gama funkcija.

Dokaz. Neka je I_t definisano kao u $(\mathbf{19})$. Tada

$$Ce^{-rt}\mathbb{E}((I_t - K)_+|\mathcal{F}_0) = Ce^{-rt}\int_0^\infty \frac{u^{\lambda t-1}e^{-u}}{\Gamma(\lambda t)}\,(S_0e^{-(\alpha+\mu)u}(\beta u)^\gamma - K)_+du.$$

Podintegralna funkcija je pozitivna ako i samo ako je u veće od u_K. Iz tog razloga, dobijeni integral možemo zapisati na sledeći način:

$$\int_0^\infty \frac{u^{\lambda t-1}e^{-u}}{\Gamma(\lambda t)}(S_0e^{-(\alpha+\mu)u}(\beta u)^\gamma - K)_+du$$
$$= \frac{S_0\beta^\gamma}{\Gamma(\lambda t)}\int_{u_K}^\infty u^{\lambda t+\gamma-1}e^{-(\alpha+\mu+1)u}du - K\int_{u_K}^\infty \frac{u^{\lambda t-1}e^{-u}}{\Gamma(\lambda t)}du$$
$$= \frac{S_0\beta^\gamma}{\Gamma(\lambda t)}\int_{u_K}^\infty u^{\lambda t+\gamma-1}e^{-(\alpha+\mu+1)u}du - \frac{K\Gamma_u(\lambda t, u_K)}{\Gamma(\lambda t)}.$$

Uvođenjem smene $v = (\alpha+\mu+1)u$ dobija se:

$$\int_{u_K}^\infty u^{\lambda t+\gamma-1}e^{-(\alpha+\mu+1)u}\,du = \int_{u_K(\alpha+\mu+1)}^\infty \frac{v^{\lambda t+\gamma-1}}{(\alpha+\mu+1)^{\lambda t+\gamma-1}}e^{-v}\,dv$$

$$= \frac{1}{(\alpha+\mu+1)^{\lambda t+\gamma-1}}\int_{u_K(\alpha+\mu+1)}^\infty v^{\lambda t+\gamma-1}e^{-v}dv$$

$$= \frac{\Gamma_u(\lambda t+\gamma, (\alpha+\mu+1)u_K)}{(\alpha+\mu+1)^{\lambda t+\gamma-1}}.$$

Konačno,

$$Ce^{-rt}\mathbb{E}((I_t-K)_+|\mathcal{F}_0) = Ce^{-rt}\left(\frac{S_0\beta^\gamma\Gamma_u(\lambda t+\gamma,(\alpha+\mu+1)u_K)}{\Gamma(\lambda t)(\alpha+\mu+1)^{\lambda t+\gamma-1}} - K\frac{\Gamma_u(\lambda t,u_K)}{\Gamma(\lambda t)}\right).$$

■

U praksi, reosiguravač će naplatiti reosiguranje sa grupom parametara koji su konzervativniji od onih koji su fitovani podacima, kako bi uključio sigurnosno opterećenje. Model sa vremenskom promenljivom se može koristiti za procenu ugovora koji pokriva višak mortaliteta izazvanog epidemijom. Na primer, posmatra se ugovor koji planira isplatu u iznosu $C(D_t - K)$ u trenutku t, gde $C, K \in \mathbb{R}^+$, ako $D_t > K$. Vrednost ovog ugovora je sličan opciji čija je podloga D_t. Ako je r bezrizična kamatna stopa i ako je u_K pozitivno rešenje jednačine:

$$\Gamma_l\big(\gamma+1, u(\alpha+\mu)\big) = \frac{K}{\mu S_0\beta^\gamma(\alpha+\mu)^{-\gamma-1}},$$

onda je vrednost ugovora o reosiguranju:

$$Ce^{-rt}\mathbb{E}((D_t-K)_+|\mathcal{F}_0)$$
$$= Ce^{-rt}\left(\frac{\mu S_0\beta^\gamma}{(\alpha+\mu)^{\gamma+1}}\int_{u_K}^\infty \frac{u^{\lambda t-1}e^{-u}}{\Gamma(\lambda t)}\Gamma_l(\gamma+1,u(\alpha+\mu))du - K\frac{\Gamma_u(\lambda t,u_K)}{\Gamma(\lambda t)}\right).$$

Nažalost, integral u poslednjem zapisu se mora numerički rešiti.

4.3. Procena i ilustracija

Kako bismo ilustrovali koliko dobro model sa vremenskom promenljivom može da objasni evoluciju pandemije, fitujemo podatke za COVID-19 za Srbiju. Kao u poglavlju *Empirijska ilustracija*, parametri su dobijeni minimizacijom težinske srednjekvadratne greške između očekivanih i stvarnih veličina inficirane populacije:

$$\left(\widehat{\alpha+\mu}, \hat{\gamma}, \hat{\beta}\right) = \arg min \frac{\sum_{k=1}^{n_{obs}} \omega_k \left(\mathbb{E}(I_k|\mathcal{F}_0) - I_k^{obs}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n_{obs}} \omega_k}.$$

Koristimo iste težinske koeficijente kao u jednačini (**17**).

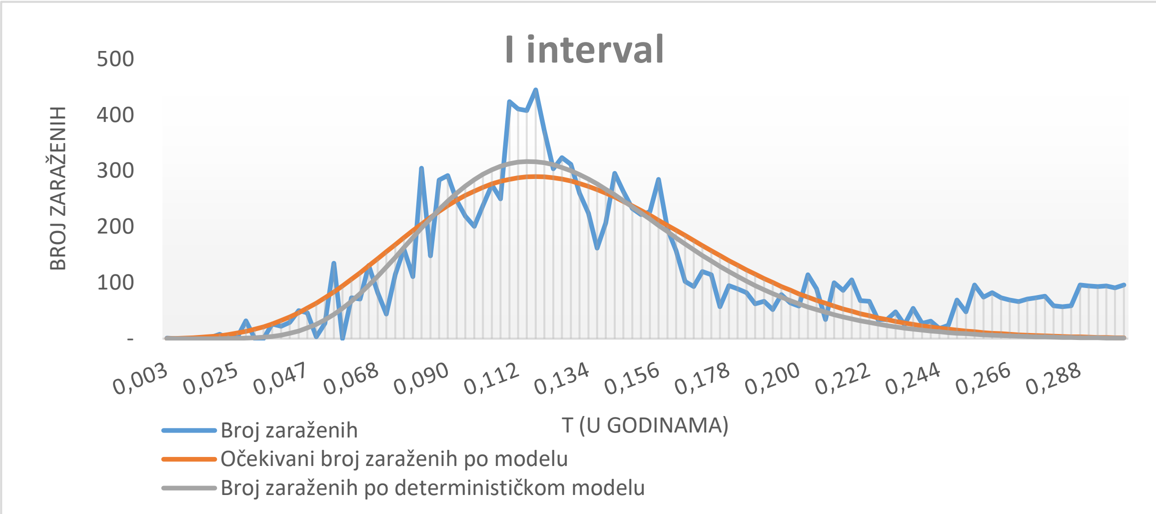
S obzirom na to da je uticaj stope remisije i stope mortaliteta na I_t isti, prvo procenjujemo njihov zbir. Snaga mortaliteta se zatim utvrđuje uzimanjem u obzir odnosa umrlih prema broju zaraženih osoba prilagođenih vremenskim koeficijentom. Tačnije, pošto τ_t ima priraštaje koji su gama-distribuisani, onda je $\mathbb{E}(\Delta\tau_t) = \lambda dt$. Iz jednačine (**24**), imamo da je $\mathbb{E}(dD_t|\mathcal{F}_0) \approx \mu\mathbb{E}(I_{t-}|\mathcal{F}_0)\lambda dt$. Dalje, dobijamo da je stopa mortaliteta data na sledeći način:

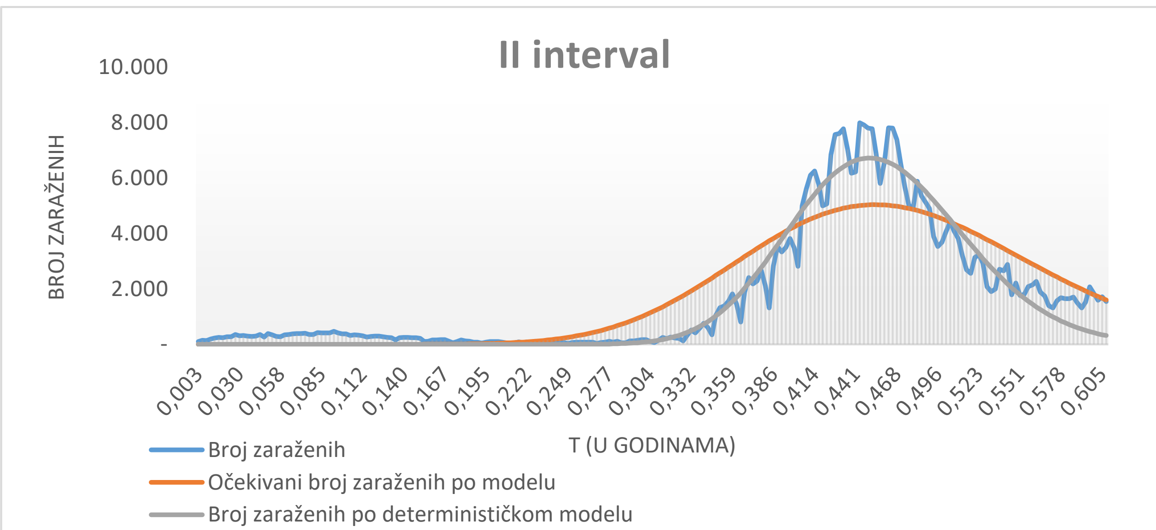
$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{k=1}^{n_{obs}} dD_k^{obs}}{\hat{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{n_{obs}} I_k\right)dt}.$$

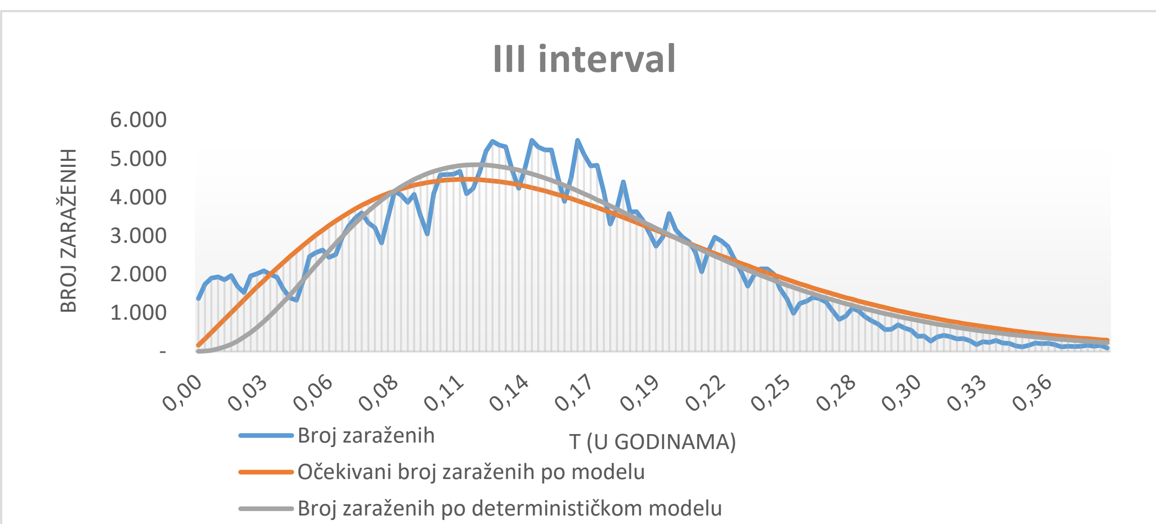
Procenjeni paramteri su dati u Tabeli 4. dok se na Ilustraciji 4. upoređuju očekivani broj inficiranih dobijen modelom sa vremenskom promenljivom i njegov deterministički pandan za Srbiju. Globalno, ne primećuje se nikakva sličnost između parametara dobijenih modelom sa vremenskom promenljivom i determinističkim modelom. Kvalitet fitovanja, meren sa SSE, je lošiji u verziji modela sa vremensku promenljivom, nego u determinističkom modelu.

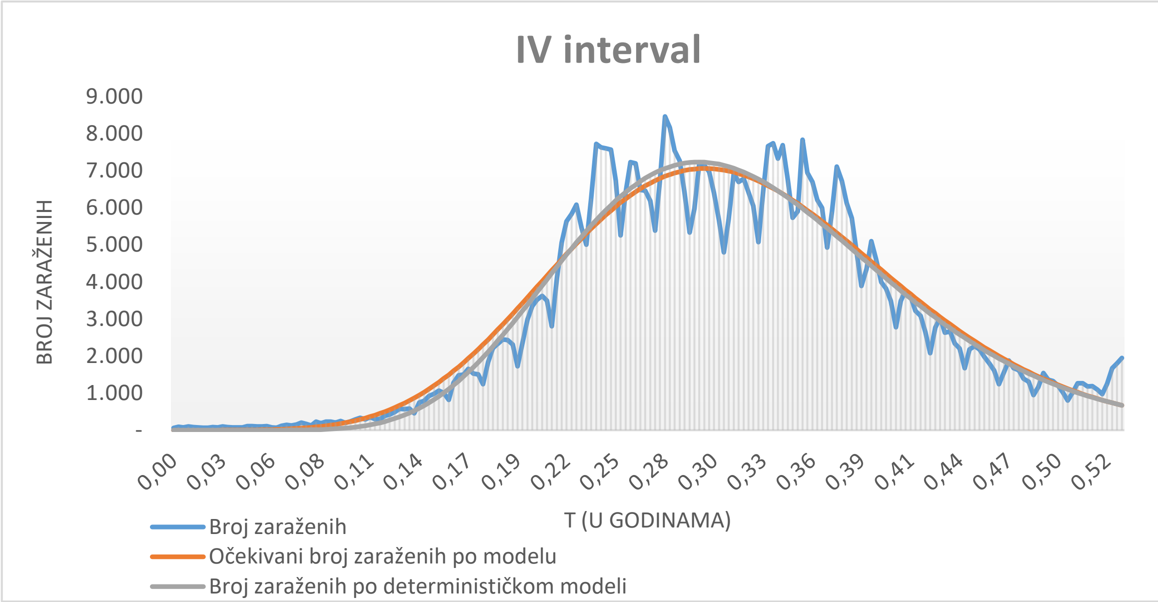
Zemlja	Intervali	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\lambda}$	SSE
Srbija	I	6,95	45,65	0,34	0,00034	60	3.089
	II	1,74	61,25	0,07	0,00013	78,41	1.010.194
	III	36,83	31,02	2,68	0,00063	11,33	350.405
	IV	2,07	29,94	0,15	0,00020	50	307.188

*Tabela 4. Procenjeni parametri za model koji prate zakonitost jednačine (**19**) (jedinica za vreme t: godina). SSE je vrednost optimalnog kriterijuma u jednačini* (**1**).


I interval
500
400
300
200
100
-
BROJ ZARAŽENIH
0,003
0,025
0,047
0,068
0,090
0,112
0,134
0,156
0,178
0,200
0,222
0,244
0,266
0,288
T (U GODINAMA)
Broj zaraženih
Očekivani broj zaraženih po modelu
Broj zaraženih po determinističkom modelu


II interval
10.000
8.000
6.000
4.000
2.000
-
BROJ ZARAŽENIH
0,003
0,030
0,058
0,085
0,112
0,140
0,167
0,195
0,222
0,249
0,277
0,304
0,332
0,359
0,386
0,414
0,441
0,468
0,496
0,523
0,551
0,578
0,605
T (U GODINAMA)
Broj zaraženih
Očekivani broj zaraženih po modelu
Broj zaraženih po determinističkom modelu


III interval
6.000
5.000
4.000
3.000
2.000
1.000
-
BROJ ZARAŽENIH
0,00
0,03
0,06
0,08
0,11
0,14
0,17
0,19
0,22
0,25
0,28
0,30
0,33
0,36
T (U GODINAMA)
Broj zaraženih
Očekivani broj zaraženih po modelu
Broj zaraženih po determinističkom modelu



Ilustracija 4. Upoređivanje $\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_0)$ sa stvarnim vrednostima i onih dobijenih determinističkim modelom

Tabela 5 prikazje fer premiju, izračunatu u programu *Wolfram Mathematica*, za zdravstveno osiguranje i osiguranje od smrti. S obzirom na to da model sa vremenskom promenljivom predviđa u proseku veću zdravstvenu beneficiju tokom faze širenja zaraze, zdravstveno osiguranje je skuplje od onog dobijenog determinističkim modelom. Kao i u prethodnoj glavi, ponovo dobijamo malu premiju koja je posledica veoma niske stope smrtnosti.

	b	c	**Fer p**	**Fer p po determinističkom modelu**	$\lambda + 1\%$	$\lambda - 1\%$
I	730.000	0	$1{,}824*10^{-1}$	$1{,}57*10^{-5}$	$1{,}820*10^{-1}$	$1{,}828*10^{-1}$
	0	100.000	$6{,}469*10^{-6}$	$4{,}36*10^{-8}$	$6{,}452*10^{-6}$	$6{,}483*10^{-6}$
II	730.000	0	$2{,}946*10^{2}$	$6{,}72*10^{-3}$	$2{,}943*10^{2}$	$2{,}950*10^{2}$
	0	100.000	$2{,}127*10^{-2}$	$9{,}04*10^{-6}$	$2{,}124*10^{-2}$	$2{,}130*10^{-2}$
III	730.000	0	$2{,}523*10^{1}$	$1{,}06*10^{-2}$	$2{,}509*10^{1}$	$2{,}537*10^{1}$
	0	100.000	$5{,}678*10^{-4}$	$1{,}35*10^{-5}$	$5{,}642*10^{-4}$	$5{,}714*10^{-4}$
IV	730.000	0	$4{,}600*10^{1}$	$1{,}36*10^{-1}$	$4{,}591*10^{1}$	$4{,}609*10^{1}$
	0	100.000	$2{,}561*10^{-3}$	$1{,}83*10^{-4}$	$2{,}556*10^{-3}$	$2{,}567*10^{-3}$

*Tabela 5. Fer premija **p** za Srbiju prema modelu sa vremenskom promenljivom.*
Vremena za date intervale su $T_I = 0{,}30, T_{II} = 0{,}61, T_{III} = 0{,}38, T_{IV} = 0{,}53$ godina i $r = 2\%$.

5. Model difuzije skoka

Model difuzije skoka predstavlja alternativni stohastički model za dinamiku inficirane populacije koji obuhvata slučajan šum i ponovno lokalno izbijanje epidemije. Model se analitički lako izračunava pomoću POT-metode (*eng. peak over threshold method*). POT metoda je jedan od načina za modeliranje ekstremnih vrednosti. Glavni koncept metode jeste da se koristi prag kako bi se izdvojile vrednosti koje se smatraju ektremnim od ostalih podataka. Nakon toga se kreira model za te ekstremne vrednosti tako što se modeluje rep svih vrednosti koje prelaze ovaj prag.

5.1. Formulacija modela

Posmatra se prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ na kome je definisano Braunovo kretanje $(W_t)_{t\geq 0}$ i složen proces skoka $(L_t)_{t\geq 0}$. Neka je $(N_t)_{t\geq 0}$ Poasonov proces sa parametrom $\lambda \in \mathbb{R}^+$ i neka su $(J_k)_{k\in\mathbb{N}} \sim J$ nezavisne i identično raspoređene slučajne promenljive definisane na $\mathbb{R}^+$ sa funkcijom gustine verovatnoće $f_J(\cdot)$.

Očekivanje i varijansa skoka dati su sa $\mathbb{E}(J) = \mu_J$ i $\mathbb{V}(J) = \sigma_J^2$, respektivno. Složeni Poasonov proces $(L_t)_{t\geq 0}$ je definisan kao suma skokova J_k do vremenskog trenutka t:

$$L_t = \sum_{k=1}^{N_t} J_k. \tag{32}$$

Pretpostavlja se da dinamika populacije zaraženih osoba prati zakonitost geometrijske difuzije skoka:

$$dI_t = -(\alpha + \mu) I_t dt + I_t \frac{\gamma}{t} dt + \sigma I_t dW_t + I_t dL_t, \tag{33}$$

gde su $\alpha, \mu, \frac{\gamma}{t}$ stopa oporavka, stopa mortaliteta i stopa zaražavanja, respektivno. Sa $\sigma I_t dW_t$ označava se Gausov šum, pri čemu je $\sigma \in \mathbb{R}^+$, dok $I_t dL_t$ označava nasumične diskontinuitete uzrokovane otkrivanjem grupa infekcija. Stopa kojom klasteri šire infekciju predstavljena je sa dL_t, N_t je broj takvih klastera u trenutku t, a J_k broj ljudi u k-tom klasteru. Npr. ako u trenutku t imamo organizovano: utakmicu, svadbu, kongres, onda je $N_t = 3$, a J_1 broj ljudi na utakmici, J_2 broj ljudi na svadbi i J_3 broj ljudi na kongresu.

Sledeća jednakost predstavlja rešenje $(\mathbf{32})$. Pod pretpostavkom da I_t zadovoljava jednačinu $(\mathbf{32})$, veličina zaražene populacije jednaka je:

$$I_t = S_0 e^{-\left(\alpha + \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} (\beta t)^{\gamma} \prod_{k=1}^{N_t} (1 + J_k). \tag{34}$$

Ovaj rezultat je direktna posledica Itove leme za difuziju skoka. Za procenu polise osiguranja, neophodno je pretpostaviti dinamiku kumulativnog broja umrlih, D_t. Kao i u prethodnim modelima, trenutni broj smrtnih slučajeva u trenutku t jeste proporcionalan (sa faktorom μ) sa brojem trenutno inficiranih slučajeva. Diferencijalna jednačina za S_t, populacije osetljivih na virus, garantuje da ukupan broj populacije ostaje jednak S_0:

$$dD_t = \mu I_t dt$$
$$dS_t = I_t\left(\alpha - \frac{\gamma}{t}\right)dt - \sigma I_t dW_t - I_{t-}dL_t$$

Broj umrlih osoba je $D_t = \mu \int_0^t I_s ds$, gde je $S_t = S_0 - I_t - D_t$.

Naredna teorema daje prva dva momenta za I_t.

Teorema 5. Očekivanje i varijansa broja zaraženih osoba u trenutku t dati su sa:

$$\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_0) = S_0 e^{(\lambda\mu_J-(\alpha+\mu))t}(\beta t)^\gamma, \qquad \mathbf{(35)}$$

$$\mathbb{V}(I_t|\mathcal{F}_0) = S_0^2 e^{-2(\alpha+\mu)t}(\beta t)^{2\gamma} e^{2\lambda\mu_J t}\left(e^{(\sigma^2+\lambda\mathbb{E}(J^2))t} - 1\right). \qquad \mathbf{(36)}$$

Dokaz. Obzirom da je W_t nezavisno od N_t, očekivanje od I_t jednako je proizvodu očekivanja:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_0) &= \mathbb{E}\left(S_0 e^{-\left(\alpha+\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}(\beta t)^\gamma \prod_{k=1}^{N_t}(1+J_k)\,|\mathcal{F}_0\right)\\ &= \mathbb{E}\left(S_0 e^{-\left(\alpha+\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}(\beta t)^\gamma|\mathcal{F}_0\right)\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{N_t}(1+J_k)\,|\mathcal{F}_0\right)\\ &= S_0 e^{-(\alpha+\mu)t}(\beta t)^\gamma\,\mathbb{E}\left(e^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W_t}|\mathcal{F}_0\right)\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{N_t}(1+J_k)\,|\mathcal{F}_0\right).\end{aligned}$$

W_t je Braunovo kretanje, što znači da σW_t ima normalnu raspodelu sa očekivanjem 0 i disperzijom $\sigma^2 t$, tj. $\sigma W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$ i važi: $\mathbb{E}\left(e^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W_t}|\mathcal{F}_0\right) = 1$.

Funkcija generatrisa momenata za slučajnu promenljivu X sa Poasonovom raspodelom sa parametrom λ je $\mathbb{E}(e^{tX}) = e^{\lambda(e^t-1)}$. Zbog toga je funkcija generatrise momenata za N_t data sa $\mathbb{E}(e^{\omega N_t}) = e^{\lambda t(e^\omega - 1)}$ i N_t je nezavisno od $(J_k)_{k=1,\dots,N_t}$. Očekivanje proizvoda skokova je:

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{N_t}(1+J_k)\,|\mathcal{F}_0\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{N_t}\left(1+\mu_J\right)|\mathcal{F}_0\right) = \mathbb{E}\left(e^{\ln\left(\prod_{k=1}^{N_t}(1+\mu_J)\right)}|\mathcal{F}_0\right).$$

$\prod_{k=1}^{N_t}\left(1+\mu_J\right) = N_t(1+\mu_J)$ jer svaki član proizvoda ima isto očekivanje i varijansu, a ukupan broj članova je N_t.

$$\mathbb{E}\left(e^{\ln\left(\prod_{k=1}^{N_t}(1+\mu_J)\right)}|\mathcal{F}_0\right) = \mathbb{E}\left(e^{N_t\ln(1+\mu_J)}|\mathcal{F}_0\right) = e^{\lambda t\left(e^{\ln\left(1+\mu_J\right)}-1\right)} = e^{\lambda t(1+\mu_J-1)} = e^{\lambda t\mu_J}.$$

Konačno,

$$\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_0) = S_0 e^{-(\alpha+\mu)t}(\beta t)^\gamma e^{\lambda t\mu_J} = S_0 e^{(\lambda\mu_J-(\alpha+\mu))t}(\beta t)^\gamma.$$

Drugi momenat za I_t se slično dobija.

$$\mathbb{E}(I_t^2|\mathcal{F}_0) = S_0^2 e^{-2(\alpha+\mu)t}(\beta t)^{2\gamma}\mathbb{E}\left(e^{-\sigma^2 t+2\sigma W_t}|\mathcal{F}_0\right)\mathbb{E}\left(\left(\prod_{k=1}^{N_t}(1+J_k)\right)^2 |\mathcal{F}_0\right).$$

Obzirom da $e^{2\sigma W_t}$ ima log-normalnu raspodelu, važi:

$$\mathbb{E}(e^{2\sigma W_t}|\mathcal{F}_0) = e^{2\sigma^2 t} \text{ i } \mathbb{E}\left(e^{-\sigma^2 t+2\sigma W_t}|\mathcal{F}_0\right) = e^{\sigma^2 t}$$

Dalje, zbog nezavisnosti $(J_k)_{k=1,\dots,N_t}$ i N_t važi:

$$\mathbb{E}\left(\left(\prod_{k=1}^{N_t}(1+J_k)\right)^2 |\mathcal{F}_0\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{N_t}\mathbb{E}((1+J_k)^2)|\mathcal{F}_0\right) = \mathbb{E}\left(e^{N_t \ln(1+2\mu_J+\mathbb{E}(J^2))}|\mathcal{F}_0\right)$$

$$= e^{\lambda t(e^{\ln\left(1+2\mu_J+\mathbb{E}(J^2)\right)}-1)} = e^{\lambda t(1+2\mu_J+\mathbb{E}(J^2)-1)} = e^{\lambda t\left(2\mu_J+\mathbb{E}(J^2)\right)}.$$

Stoga je drugi momenat:

$$\mathbb{E}(I_t^2|\mathcal{F}_0) = S_0^2 e^{-2(\alpha+\mu)t}(\beta t)^{2\gamma} e^{\sigma^2 t} e^{\lambda t\left(2\mu_J+\mathbb{E}(J^2)\right)} = S_0^2(\beta t)^{2\gamma} e^{\left(\lambda 2\mu_J+\lambda\mathbb{E}(J^2)+\sigma^2-2(\alpha+\mu)\right)t}$$

Varijansa za I_t je

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(I_t|\mathcal{F}_0) &= \mathbb{E}(I_t^2|\mathcal{F}_0) - \left(\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_0)\right)^2 \\ &= S_0^2(\beta t)^{2\gamma} e^{\left(\lambda 2\mu_J+\lambda\mathbb{E}(J^2)+\sigma^2-2(\alpha+\mu)\right)t} - S_0^2 e^{2\left(\lambda\mu_J-(\alpha+\mu)\right)t}(\beta t)^{2\gamma} \\ &= S_0^2(\beta t)^{2\gamma} e^{2t\left(\lambda\mu_J-(\alpha+\mu)\right)}\left(e^{(\lambda\mathbb{E}(J^2)+\sigma^2)t} - 1\right).\end{aligned}$$

■

Sledeća teorema predstavlja analitičku formulu za procenu očekivanih beneficija zdravstvenog osiguranja plaćenih do trenutka t. Rezultat je sličan rezultatu kod determinističkog modela, samo što se u ovom slučaju uzima u obzir učestalost i prosečna veličina skokova.

Teorema 6. Neka je $r \in \mathbb{R}^+$ diskontovana kamatna stopa. Integral diskontovanog očekivanog broja zaraženih je:

$$\int_0^t e^{-rs}\,\mathbb{E}(I_s|\mathcal{F}_0)ds = \frac{S_0\beta^\gamma}{\theta_J^{\gamma+1}}\Gamma_l\left(\gamma+1,\theta_J t\right), \qquad (\mathbf{37})$$

gde je $\Gamma_l(\gamma+1,x)$ donja nepotpuna gama funkcija i $\theta_J t = r+\alpha+\mu-\lambda\mu_J$.

Dokaz teoreme je sličan dokazu Teoreme 1. Ubacivanjem izraza $(\mathbf{34})$ u $\mathbb{E}(I_s|\mathcal{F}_0)$, pa potom u integral, dobija se jednačina $(\mathbf{37})$. Za razliku od modela sa vremenskom promenljivom, očekivani broj smrtnih slučajeva i njegov diskontovani integral, mogu da se izračunaju u zatvorenom obliku i rešenje se dobija preko donje nepotpune gama funkcije.

Posledica 2. Očekivani kumulativni broj umrlih od epidemije u trenutku $t \geq 0$ jednak je

$$\mathbb{E}(D_t|\mathcal{F}_0) = \frac{\mu S_0 \beta^\gamma}{(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)^{\gamma+1}} \Gamma_l\big(\gamma+1, t(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)\big). \qquad (\mathbf{38})$$

Ako $\theta_J = (r+\alpha+\mu) - \lambda\mu_J$, očekivanje integrala diskontovane varijacije D_t jednako je:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-rs} dD_s |\, \mathcal{F}_0\right) = \frac{\mu S_0 \beta^\gamma}{\theta_J^{\gamma+1}} \Gamma_l\big(\gamma+1, \theta_J t\big). \qquad (\mathbf{39})$$

Neka je polisa osiguranja data kao u poglavlju *Aktuarsko vrednovanje polisa osiguranja determinističkog modela epidemije* sa rokom dospeća T. Premija je označena kao i do sada sa p, zdravstvena beneficija sa b, a jednokratna beneficija koja se isplaćuje u slučaju smrti osiguranika je c. Naredna teorema daje fer premiju koja obezbeđuje finansijski ekvilibrijum polise pod pretpostavkom da su mere vrednovanja cena i realne mere identične.

Teorema 7. Za beneficije (b,c), fer premija koja obezbeđuje aktuarski ekvilibrijum polise osiguranja, data je sa:

$$p = \frac{(b+c\mu) S_0 \beta^\gamma \theta_J^{-\gamma-1} \Gamma_l(\gamma+1, \theta_J T)}{\int_0^T e^{-rs} \mathbb{E}(S_s|\mathcal{F}_0) ds}, \qquad (\mathbf{40})$$

gde je imenilac jednak

$$\int_0^T e^{-rs} \mathbb{E}(S_s|\mathcal{F}_0) ds = \frac{S_0}{r}(1-e^{-rT}) - \frac{S_0\beta^\gamma}{\theta_J^{\gamma+1}} \Gamma_l\big(\gamma+1, \theta_J T\big)\left(1+\frac{\mu}{r}\right) + \frac{\mu S_0 \beta^\gamma e^{-rT} \Gamma_l\left(\gamma+1, T\big(\alpha+\mu-\lambda\mu_J\big)\right)}{r\big(\alpha+\mu-\lambda\mu_J\big)^{\gamma+1}}. \qquad (\mathbf{41})$$

Dokaz. Fer premija je u stohastickom modelu data jednačinom $(\mathbf{28})$.

Integral $\int_0^T e^{-rs} \mathbb{E}(I_s|\mathcal{F}_0) ds$ je dat jednačinom $(\mathbf{37})$. Kako je $S_t = S_0 - I_t - D_t$, onda je

$$\int_0^T e^{-rs} \mathbb{E}(S_s|\mathcal{F}_0) ds = \frac{S_0}{r}(1-e^{-rT}) - \frac{S_0\beta^\gamma}{\theta_J^{\gamma+1}} \Gamma_l\big(\gamma+1, \theta_J T\big) - \int_0^T e^{-rs} \mathbb{E}\,(D_s|\mathcal{F}_0) ds, \quad (\mathbf{42})$$

gde je $\int_0^T e^{-rs} \mathbb{E}\,(D_s|\mathcal{F}_0) ds$ dato sledećom jednačinom:

$$\int_0^T e^{-rs} \mathbb{E}(D_s|\mathcal{F}_0) ds = \mu \int_0^T e^{-rs} \int_0^s \mathbb{E}(I_u|\mathcal{F}_0) du\, ds = \mu \int_0^T e^{-rs} \int_0^s S_0 e^{(\lambda\mu_J-(\alpha+\mu))u} (\beta u)^\gamma du\, ds$$
$$= \mu S_0 \beta^\gamma \int_0^T e^{-rs} \int_0^s e^{(\lambda\mu_J-(\alpha+\mu))u} u^\gamma du\, ds.$$

Dalje, pošto je $\int_0^s e^{(\lambda\mu_J-(\alpha+\mu))u} u^\gamma du = \frac{\Gamma_l\left(\gamma+1, s(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)\right)}{(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)^{\gamma+1}}$ sledi

$$\int_0^T e^{-rs}\mathbb{E}\,(D_s|\mathcal{F}_0)ds = \mu S_0\beta^\gamma \int_0^T e^{-rs}\frac{\Gamma_l\left(\gamma+1, s(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)\right)}{(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)^{\gamma+1}}ds.$$

Koristeći parcijalnu integraciju sa smenom:

$$u = \Gamma_l\left(\gamma+1, s(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)\right) \text{ i } dv = \frac{e^{-rs}}{(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)^{\gamma+1}}ds$$

dobija se:

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-rs}\frac{\Gamma_l\left(\gamma+1, s(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)\right)}{(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)^{\gamma+1}}ds \\ &= \left[-\frac{1}{r}\frac{e^{-rs}\Gamma_l\left(\gamma+1, s(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)\right)}{(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)^{\gamma+1}}\right]_{s=0}^{s=T} + \frac{1}{r}\int_0^T e^{(\lambda\mu_J-(r+\alpha+\mu))s}s^\gamma ds \\ &= -\frac{e^{-rT}\Gamma_l\left(\gamma+1, T(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)\right)}{r(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)^{\gamma+1}} + \frac{\Gamma_l(\gamma+1, \theta_J T)}{r\theta_J^{\gamma+1}}.\end{aligned}$$

Stoga, integral diskontovanog očekivanog broja smrtnih slučajeva je:

$$\int_0^T e^{-rs}\mathbb{E}\,(D_s|\mathcal{F}_0)ds = -\frac{\mu S_0\beta^\gamma e^{-rT}\Gamma_l\left(\gamma+1, T(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)\right)}{r(\alpha+\mu-\lambda\mu_J)^{\gamma+1}} + \frac{\mu S_0\beta^\gamma\Gamma_l(\gamma+1, \theta_J T)}{r\theta_J^{\gamma+1}}. \quad (\mathbf{43})$$

Kombinovanjem $(\mathbf{42})$ i $(\mathbf{43})$ dobija se $(\mathbf{41})$

■

5.2. Reosiguranje u modelu difuzije skoka

Kao i u modelu sa vremenskom promenljivom, i u ovom poglavlju se mogu proceniti različita pokrića reosiguranja pomoću Monte Karlo (*eng. Monte Carlo*) simulacija. Kada su skokovi konstantni i jednaki $J = \kappa \in \mathbb{R}^+$, ugovori o reosiguranju sa isplatom koja zavisi od I_t se mogu vrednovati izrazom zatvorenog oblika. U ovom slučaju, uslovno po $N_t = n$ skokova, I_t ima log-normalnu raspodelu, pa važi:

$$(I_t | N_t = n) = S_0(\beta t)^\gamma e^{X_t^{(n)}},$$

gde $X_t^{(n)} \sim \mathcal{N}(\mu_X(t,n); \sigma_X^2(t,n))$. Srednja vrednost i varijansa za $X_t^{(n)}$ respektivno iznose:

$$\mu_X(t,n) = n\ln(1+\kappa) - \left(\alpha + \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t,$$

$$\sigma_X^2(t,n) = \sigma^2 t.$$

Naredna teorema daje analitički izraz za ugovor o reosiguranju koji daje isplatu u iznosu od $C(I_t - K)$ u vremenskom trenutku t, ako $I_t > K$, gde $C, K \in \mathbb{R}^+$. Parametri modela su isti po ceni i realnim merama.

Teorema 8. Neka su

$$d_2(t,n) = \frac{1}{\sigma_X(t,n)}\left(\ln\left(\frac{K}{S_0(\beta t)^\gamma}\right) - \mu_X(t,n)\right), \tag{44}$$

$$d_1(t,n) = d_2(t,n) - \sigma_X(t,n). \tag{45}$$

Vrednost reosiguranja prekoračenja dozvoljenog praga broja inficiranih osoba jednak je:

$$Ce^{-rt}\mathbb{E}((I_t - K)_+ | \mathcal{F}_0) \\ = Ce^{-rt}\sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n)\left(S_0(\beta t)^\gamma e^{\mu_X + \frac{\sigma_X^2}{2}} \mathbf{\Phi}\big(-d_1(t,n)\big) - K\mathbf{\Phi}\big(-d_2(t,n)\big)\right) \tag{46}$$

gde $P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ i $\mathbf{\Phi}(\cdot)$ je kumulativna raspodela verovatnoća standardizovane normalne slučajne promenljive.

Dokaz. Cena ugovora se može zapisati kao zbir uslovnih očekivanja u odnosu na N_t:

$$Ce^{-rt}\mathbb{E}((I_t - K)_+ | \mathcal{F}_0) = Ce^{-rt}\sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n)\mathbb{E}\left((S_0(\beta t)^\gamma e^{X_t^{(n)}} - K)_+ | \mathcal{F}_0\right).$$

Uslovno očekivanje se može zapisati kao razlika dva integrala na sledeći način:

$$\mathbb{E}\left((S_0(\beta t)^\gamma e^{X_t^{(n)}}-K)_+|\mathcal{F}_0\right)$$
$$=S_0(\beta t)^\gamma\int_{e^{\mu_X+\sigma_X u}\geq\frac{K}{S_0(\beta t)^\gamma}}^{\infty}e^{\mu_X+\sigma_X u}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du-K\int_{e^{\mu_X+\sigma_X u}\geq\frac{K}{S_0(\beta t)^\gamma}}^{\infty}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du. \quad (\mathbf{47})$$

Drugi činilac, nakon promene varijable, jednak je:

$$K\int_{e^{\mu_X+\sigma_X u}\geq\frac{K}{S_0(\beta t)^\gamma}}^{\infty}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du=K\int_{u\geq\frac{1}{\sigma_X}\left(\ln\left(\frac{K}{S_0(\beta t)^\gamma}\right)-\mu_X\right)}^{\infty}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du=K\mathbf{\Phi}\big(-d_2(t,n)\big),$$

gde je $d_2(t,n)=\frac{1}{\sigma_X(t,n)}\left(\ln\left(\frac{K}{S_0(\beta t)^\gamma}\right)-\mu_X(t,n)\right)$. Na isti način, prvi činilac jednačine (**47**) postaje:

$$S_0(\beta t)^\gamma\int_{e^{\mu_X+\sigma_X u}\geq\frac{K}{S_0(\beta t)^\gamma}}^{\infty}e^{\mu_X+\sigma_X u}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du$$
$$=S_0(\beta t)^\gamma e^{\mu_X+\frac{\sigma_X^2}{2}}\int_{u\geq\frac{1}{\sigma_X}\left(\ln\left(\frac{K}{S_0(\beta t)^\gamma}\right)-\mu_X\right)}^{\infty}\frac{e^{-\frac{u^2-2\sigma_X u+\sigma_X^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du$$
$$=S_0(\beta t)^\gamma e^{\mu_X+\frac{\sigma_X^2}{2}}\int_{u\geq\frac{1}{\sigma_X}\left(\ln\left(\frac{K}{S_0(\beta t)^\gamma}\right)-\mu_X\right)}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(u-\sigma_X)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du$$

Potom, uvodi se smena $s=(u-\sigma_X)^2$ i dobija se:

$$S_0(\beta t)^\gamma\int_{e^{\mu_X+\sigma_X u}\geq\frac{K}{S_0(\beta t)^\gamma}}^{\infty}e^{\mu_X+\sigma_X u}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du$$
$$=S_0(\beta t)^\gamma e^{\mu_X+\frac{\sigma_X^2}{2}}\int_{s\geq\frac{1}{\sigma_X}\left(\ln\left(\frac{K}{S_0(\beta t)^\gamma}\right)-\mu_X\right)-\sigma_X}^{\infty}\frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}ds$$
$$=S_0(\beta t)^\gamma e^{\mu_X+\frac{\sigma_X^2}{2}}\mathbf{\Phi}\big(-d_1(t,n)\big).$$

Konačno,

$$Ce^{-rt}\mathbb{E}((I_t-K)_+|\mathcal{F}_0)$$
$$=Ce^{-rt}\sum_{n=0}^{\infty}P(N_t=n)\left(S_0(\beta t)^\gamma e^{\mu_X+\frac{\sigma_X^2}{2}}\mathbf{\Phi}\big(-d_1(t,n)\big)-K\mathbf{\Phi}\big(-d_2(t,n)\big)\right).$$

■

Po konstrukciji, kumulativni broj umrlih osoba od virusa do trenutka t je proporcionalan integralu od I_t. Nažalost, statistička raspodela D_t je nepoznata, pa ugovori o reosiguranju koji pokrivaju višak mortaliteta moraju biti vrednovani simulacijama.

5.3. Procena modela difuzije skoka

Model difuzije skoka je fitovan u dva koraka. Neka je $\mathbb{E}(I_k|\mathcal{F}_0) = S_0 e^{\eta t_k}(\beta t_k)$ gde je $\eta = \lambda\mu_J - (\alpha+\mu)$ i t_k su vremena posmatranja za $k = 1, \dots, n_{obs}$.

Prvi korak se sastoji u ocenjivanju parametara β, γ i η minimizacijom težinske srednjekvadratne greške između očekivanog i stvarnog broja inficiranih ljudi:

$$\left(\hat{\eta}, \hat{\gamma}, \hat{\beta}\right) = argmin \frac{\sum_{k=1}^{n_{obs}} \omega_k \left(\mathbb{E}(I_k|\mathcal{F}_0) - I_k{}^{obs}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n_{obs}} \omega_k}. \qquad (\mathbf{48})$$

Obzirom da se očekivanje I_t u pristupu difuzije skoka poklapa sa determinističkim modelom, dobijamo iste procene za $\hat{\gamma}, \hat{\beta}$ kao u Tabeli 2.

Drugi korak podrazumeva fitovanje procesa skoka metodom POT. Na osnovu jednačina $(\mathbf{33})$ i $(\mathbf{35})$ definišemo Y_t kao odnos procesa I_t prema njegovom očekivanju:

$$Y_t := \frac{I_t}{\mathbb{E}(I_t|\mathcal{F}_0)} = e^{\left(-\lambda\mu_J - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} \prod_{k=1}^{N_t} (1 + J_k).$$

Koristeći Itovu lemu, dobijamo da je Y_t praćen sledećom infinitezimalnom dinamikom:

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \sigma W_t + dL_t - \lambda\mu_J dt \qquad (\mathbf{49})$$

Vrednost Y_t u trenutku t_k je Y_k i definišimo sa $Z_k = \frac{Y_k - Y_{k-1}}{Y_k}$ diskretnu aproksimaciju za $\frac{dY_t}{Y_t}$. Ako je vremensko kašnjenje od jednog dana između dva uzastopna posmatranja Δ, onda na osnovu jednačine $(\mathbf{49})$, Z_k možemo aproksimirati na sledeći način:

$$Z_k \approx \epsilon_k + \Delta L_k - \lambda\mu_J\Delta, \qquad (\mathbf{50})$$

gde je $\epsilon_k \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma\sqrt{\Delta}\right)$ i $\Delta L_k = L_{t_k} - L_{t_{k-1}}$. Veruje se da do skoka dolazi kada je Z_k iznad praga, g(q), gde je q nivo poverenja. Da bismo definisali prag, fitujemo čist Gausov proces sa vremenskim serijama $Z_k \sim \mu_z\Delta + \sigma_z W_\Delta$. Nepristrasne procene za μ_z i σ_z su:

$$\hat{\mu}_z = \frac{1}{n_{obs}\Delta}\sum_{j=1}^{n_{obs}} Z_j \qquad \hat{\sigma}_z{}^2 = \frac{1}{(n_{obs}-1)\Delta}\sum_{j=1}^{n_{obs}} \left(Z_j - \hat{\mu}_z\right)^2.$$

Ako $\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$ označava kumulativnu funkciju distribucije standardne normale, $\mathrm{g}(q)$ se postavlja na q percentil Gausovog procesa: $\mathrm{g}(q) = \hat{\mu}_z \Delta + \hat{\sigma}_z \sqrt{\Delta} \boldsymbol{\Phi}^{-\mathbf{1}}(q)$. Vreme s_k k-tog skoka je:

$$s_k = \min\left\{t_j \in \{t_1, \dots, t_n\} \mid z_j \geq \mathrm{g}(q), j \geq k\right\}$$

i uzoračka putanja $(N_t)_{t\geq 0}$ se približava sledećim vremenskim serijama:

$$N(t_k) = \max\left\{j \in \mathbb{N} | s_j \leq t_k\right\}.$$

Pod pretpostavkom da je difuzija zanemarljiva u odnosu na skokove, asimiliramo $z_k - \mu_z \Delta$ sa J_k kada se skok detektuje u vremenskom trenutku t_k.

Zaključak

Ono što možemo zaključiti jeste da pandemija COVID-19 nije uticala samo na globalni zdravstveni sistem, nego i na ostale sfere, a svakako je imala bitan uticaj i na osiguravajuće kompanije. Bitnu ulogu u osiguravajućim društvima imaju aktuari, koji pomoću matematičkih modela procenjuju fer premiju.

U ovom radu smo se upoznali sa jednim determinističkim i dva stohastička modela. Prvo smo formulisali determinsitički model gde smo videli čemu je jednak broj zaraženih osoba, kao i broj umrlih usled epidemije. Dalje, dali smo jednačinu fer premije koja osim parametara kao što su stope smrtnosti, oporavka, zaražavanja i prenosivosti virusa, zavisi još i od beneficije i jednokratne beneficije. U narednom koraku, pomoću minimizacije težinske srednjekvadratne greške dobili smo procenjene parametre pomoću kojih smo došli do fer premije u Srbiji. Zaključili smo da je mala stopa smrtnosti dovela do male premije u spomenutoj državi.

Obzirom da u praksi posmatramo slučajno kretanje broja zaraženih osoba, u ovom radu smo pričali i o modelu sa vremenskom slučajnom promenljivom. Kroz teoreme smo pokazali čemu je jednak očekivani broj zaraženih kao i umrlih, nakon čega smo objasnili i fer premiju. Odredili smo vrednost reosiguranja prekoračenja dozvoljenog praga koji pokriva prekomeran broj inficiranih ljudi. Kao i u determinističkom modelu, pomoću minimizacije težinske srednjekvadratne greške, došli smo do ocenjenih parametara nakon čega smo izračunali i fer premiju. Na ilustracijama smo videli da model sa vremenskom promenljivom lošije fituje krivu koja predstavlja stvaran broj zaraženih u odnosu na determinsitički model. Razlog za to je što smo uveli stohastiku i što u stvari posmatramo očekivanje. Takođe, fer premija je nešto veća od prethodno spomenutog modela.

Na kraju, videli smo i drugo stohastičko proširenje determinističkog modela koje je zasnovano na procesu difuzije skoka. Dokazali smo čemu je jednako očekivanje i varijansa broja zaraženih u datom trenutku, kao i čemu je jednaka fer premija. Razmatrali smo ugovor o prekoračenju dozvoljenog praga (*eng. excess-of-loss contracts*) koji obezbeđuju nadoknadu ukoliko broj zaraženih ili broj umrlih pređe određeni prag. Videli smo i da je model difuzije skoka fitovan u dva koraka koji podrazumevaju minimizaciju težinske srednjejvadratne greške i POT metod.

Literatura

[1] Achim Klenke, *Probability Theory*, Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[2] Aniruddha Adiga, Devdatt Dubhashi, Bryan Lewis, Madhav Marathe, Srinivasan Venkatramanan, Anil Vullikanti, *Mathematical Models for COVID-19 Pandemic: A Comparative Analysis*, Journal of the Indian Institute of Science, 2020. (794)

[3] David C. M. Dickson, *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge University Press, 2005.

[4] D. J. Daley, J. Gan. *Epidemic Modelling: An Introduction*, Cambridge University Press, 1999

[5] Donatien Hainaut, *An Actuarial Approach for Modeling Pandemic Risk*, Risks, 2021. (3-26)

[6] Đurica Acin, Đorđe Cvejić, *Priručnik za praksu u osiguranju i reosiguranju*, Financing centar, 1996.

[7] Ito Kimihito, Piantham Chayada, Nishiura Hiroshi, *Relative instantaneous reproduction number of OmicronSARS-CoV-2 variant with respect to the Delta variant in Denmark,* Journal of Medical Virology , 2021. (2265-2267)

[8] Liu Y, Gayle AA, Wilder Smith A, Rocklov J, *The reproductive number of COVID-19 is higher compared to SARS coronavirus*, Journal of Travel Medicine, 2020. (4)

[9] Nithya C Achaiah, Sindhu B Subbarajasetty, Rajesh M Shetty, *R_0 and R_e of COVID-19: Can We Predict When the Pandemic Outbreak will be Contained?*, Indian J Crit Care Med, 2020. (1126)

[10] Rai Balram, Shukla Anandi, Dwivedi K Laxmi, *COVID-19 in India: Predictions, Reproduction Number and Public Health Preparedness*, medRxiv, 2020. (8)

[11] Sheldon M. Ross, *Introduction to Probability Models Eleventh Edition*, Elsevier Inc, 2014.

[12] https://www.who.int/health-topics/coronavirus#tab=tab_1

[13] https://www.otposiguranje.rs/dopunsko-zdravstveno-osiguranje/

[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Epidemic

[15] https://www.npr.org/sections/goatsandsoda/2021/08/11/1026190062/covid-delta-variant-transmission-cdc-chickenpox

Biografija

Aleksandra Surdućan je rođena 4. avgusta 1996. godine u Novom Sadu. Završila je Osnovnu školu „Prva vojvođanska brigada“, a potom i Gimnaziju „Svetozar Marković“.

Oduvek je volela matematiku, te 2015. godine upisuje osnovne akademske studije na Prirodno – matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Matematika finansija.

Zvanje Matematičar dobija 2019. godine i iste godine upisuje master studije.

Sve ispite je položila do jula 2021. godine, sa prosečnom ocenom 8,62 i time je stekla uslov za odbranu master rada.

Od decembra 2021. godine radi na poziciji Analitičar za planiranje u osiguravajućoj kompaniji DDOR Novi Sad.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Aleksandra Surdućan
AU

Mentor: prof. dr Dora Seleši
ME

Naslov rada: Aktuarsko vrednovanje polisa osiguranja zasnovano na stohastičkim modelima rizika širenja epidemije
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2022.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5/53/15/6/2/13) (broj poglavlja/broj strana/broj referenci/broj tabela/broj slika/broj grafika)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Aktuarska matematika
ND

Ključne reči: Deterministički modeli, stohastički modeli, epidemija, COVID-19, osiguranje, premija, beneficija
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom master radu opisan je deterministički model epidemije koji se potom uopštava na dva stohastička modela. Prikazana je empirijska ilustracija četiri vremenska intervala za Srbiju, Rumuniju, Mađarsku i Bosnu i Hercegovinu. Dati modeli omogućavaju da se dođe do jednačine fer premije osiguranja koja osim parametara kao što su stope smrtnosti, oporavka, zaražavanja i prenosivosti virusa, zavisi još i od beneficije i jednokratne beneficije. Pomoću minimizacije težinske srednjekvadratne greške dobili smo ocenjivače datih parametara pomoću kojih smo došli do fer premije.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.05.2022.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Danijela Rajter - Ćirić, redovni profesor Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Dora Seleši, redovni profesor Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Ivana Vojnović, docent Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Aleksandra Surdućan
AU

Mentor: prof. dr Dora Seleši
MN

Title: Actuarial valuation of insurance policies based on stochastic models of epidemic outbreak risks
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2022
PY

Publisher: Author's reprint

PU
Publication place: Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (5/53/15/6/2/13) (chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Actuarial mathematics
SD

Subject/Key words: Deterministic models, stochastic models, epidemic, COVID-19, insurance, the fair premium rate, the benefit rate
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: In this master's thesis, a deterministic model for pandemic risk and two stochastic extensions is proposed. An empirical illustration of four time intervals for Serbia, Romania, Hungary and Bosnia and Herzegovina is presented. The given models brought us to the equation of a fair premium rate, which, in addition to parameters such as mortality rates, recovery, infection and transmissibility of the virus, also depends on the benefit rate and lump sum benefit. Using the weighted least-square minimization, we obtained the estimators of the given parameters which led us to the fair premium rate.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 5th of May, 2022
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Danijela Rajter – Ćirić, Full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Mentor: dr Dora Seleši, Full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: dr Ivana Vojnović, Assistant Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad