



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - МАТЕМАТИЧКИ
FAKULTET
DEPARTMAN ZA МАТЕМАТИКУ I
INFORMATIKU



Nikolina Jukić

Aktuarski aspekti i математички модели за osiguravajuće pokriće епидемијских и пандемијских rizika

- Master rad -

Mentor:

prof. dr Dora Seleši

Novi Sad, 2022

Sadržaj

Uvod	6
Tema rada	6
Struktura rada	8
1 Kompartmentalni modeli	12
1.1 Deterministički modeli	12
1.1.1 SIR model	13
1.1.1.1 Determinističke funkcije	19
1.1.2 SIS model	21
1.1.3 SEIRD model	23
1.1.3.1 Osnovni reproduktivni broj	26
1.2 Stohastički modeli	28
2 Aktuarska analiza	31
2.1 Rezerve	31
2.1.1 Runge-Kuta metod i njegova aktuarska primjena	32
2.1.1.1 SIR model	33
2.1.2 SIS model	57
2.2 Optimalna premijska stopa u povezanom SEIR modelu	59
2.2.1 Deterministički SEIR model sa povezanim centrima	62
2.2.1.1 Povezani SEIR model	62
2.2.1.2 Vrijeme infektivnosti	65
2.2.1.3 Vrijeme osjetljivosti	66
2.2.1.4 Određivanje optimalne premijske stope π	67
2.2.1.5 Optimalna strategija alokacije vakcina - deterministički model	70
2.2.2 Stohastički SEIR model sa povezanim centrima	73
2.2.2.1 Lanac Markova u slučaju jednog centra	74
2.2.2.2 Lanac Markova u slučaju više centara	78
2.2.2.3 Optimalna strategija alokacije vakcina - stohastički model	79
2.2.3 Određivanje broja R_0 pomoću „next-generation“ matrične metode	82
Zaključak	93
Prilog	95
Literatura	99

Popis tabela

Tabela 1	Procijenjena srednja vrijednost broja R_0	19
Tabela 2	Različiti oblici $V(t)$ u zavisnosti od vrijednosti stope π	40
Tabela 3	Broj osjetljivih, inficiranih i oporavljenih pripadnika populacije Republike Srbije	47
Tabela 4	Tabelarni prikaz dobijenih rezultata	53
Tabela 5	Tabelarni prikaz odstupanja od tačnog broja osjetljivih	53
Tabela 6	Tabelarni prikaz odstupanja od tačnog broja inficiranih	53
Tabela 7	Stope prelaza LMNV u slučaju jednog centra	75
Tabela 8	Stope prelaza LMNV u slučaju više centara	78

Popis slika

Slika 1	Klase osnovnog SIR modela	13
Slika 2	Dijagram transmisije infekcije pri čemu je $R_0 = 4$	18
Slika 3	Klase SIS modela	21
Slika 4	Klase SEIRD modela	24
Slika 5	Grafik funkcije benefičijske rezerve $V(t)$ za $\pi = 0.10$	36
Slika 6	Grafici funkcije benefičijske rezerve $V(t)$ u zavisnosti od π	41
Slika 7	Grafik funkcije benefičijske rezerve $V(t)$ u obliku zvona	42
Slika 8	Promjena broja novih slučajeva zaraze koronavirusom	45
Slika 9	Promjena broja novih smrtnih ishoda uslijed zaraze koronavirusom	45
Slika 10	Broj smrtnih ishoda na nivou regiona	46
Slika 11	Broj osjetljivih pripadnika populacije Republike Srbije	48
Slika 12	Broj inficiranih pripadnika populacije Republike Srbije	48
Slika 13	Procenat osjetljivih pripadnika populacije Republike Srbije	50
Slika 14	Procenat inficiranih pripadnika populacije Republike Srbije	51
Slika 15	Procenat osjetljivih pripadnika populacije Republike Srbije (RK metod)	51
Slika 16	Procenat inficiranih pripadnika populacije Republike Srbije (RK metod)	52
Slika 17	$V(t)$ za $\pi = 0.03$	55
Slika 18	$V(t)$ za $\pi = 0.05$	55
Slika 19	$V(t)$ za $\pi = 0.09$	55
Slika 20	Klase SEIR modela	60

Uvod

Tema rada

Zahvaljujući aktuelnom trendu rasta naseljenosti, sveprisutnoj internaciona- lizaciji i neobuzdanoj urbanizaciji, u 21. vijeku su stvoreni idealni uslovi za umnožavanje i širenje novih zaraznih bolesti.

Prvi kvartal 2020. godine obuhvata početak nove ere u kojoj se čovječanstvo susreće sa najvećom prijetnjom modernog doba. U samo neko- liko sedmica, koronavirus je pokrenuo globalnu revoluciju koja je ugrozila egzistenciju svih pripadnika svjetske populacije. Kao rezultat nekontrolisanog širenja virusa, *Svjetska zdravstvena organizacija*¹ SZO je 11. marta 2020. godine proglašila *pandemiju*².

Od svog izbijanja, pandemija uzrokovana koronavirusom je destabi- lizovala kako društveni, tako i ekonomski segment života na planeti Zemlji. Štaviše, sektor osiguranja predstavlja jedan od krucijalnih grana industrije koje su se našle na udaru tokom ranih faza escaliranja zarazne bolesti.

Uslijed nagle promjene uslova na tržištu poslovanja (rastuća digita- lizacija osiguranja, nestabilna tržišta kapitala, poremećaj u lancu snabdije- vanja, itd), dolazi do izmjene u pristupu rješavanja novonastalih problema, koji iziskuje razmišljanje izvan granica aktuarskog okvira.

¹eng. *World Health Organization* ili WHO je agencija formirana od strane Ujedinjenih nacija 1948. godine, sa ciljem uspostavljanja najvišeg nivoa zdravlja u svijetu. Agencija ulaže velike napore u proširenje univerzalne zdravstvene raspoloživosti.

²Pandemija označava izbijanje bolesti koja se širi kroz populaciju, uzimajući u obzir široko rasprostranjene oblasti kao što su kontinetni ili cijeli svijet. Za razliku od pandemije, epidemija razmatra scenarije u kojima je zastupljen manji broj oboljelih i umrlih članova populacije.

Naime, aktuarsko modeliranje datira još od 14. vijeka, kada je epidemija pod nazivom *Crna smrt*, uzrokovana srednjovjekovnom kugom, odnijela živote 30 – 50% stanovništva Evrope. Tada je po prvi put, grad London počeo da vodi evidenciju o broju umrlih i sprovodi redovnu statistiku mortaliteta s ciljem prepoznavanja obrazaca i korišćenja dobijenih podataka za predviđanje budućnosti.

Od tog momenta, pa sve do danas, razvijene su različite teorije u cilju ostvarivanja uspješne predikcije budućih kretanja epidemije ili pandemije, bazirane na iskustvenim i nedvosmislenim faktima. Međutim, obedinjavajuće znanja i dostignuća iz oblasti epidemiologije³ i aktuarstva, predstavlja prekretnicu u razumijevanju i modeliranju dinamike širenja infektivnih bolesti. Dato integrisanje je rezultovalo osmišljavanjem *kompartmenatalnih modela*, kod kojih je populacija podijeljena u nekoliko kompartmenata ili klasa.

Koristeći ustanovljene kompartmentalne modele, aktuarska analiza određuje *optimalnu premijsku stopu* koja garantuje pozitivnu novčanu vrijednost, neophodnu za ostvarivanje pozitivnog rezultata poslovanja osiguravajuće kompanije tokom perioda pandemije.

³*Epidemiologija* je naučna disciplina koja se bavi ispitivanjem učestalosti, distribucije i determinanti stanja ili događaja povezanih sa zdravljem svakog pojedinca posmatrane populacije. Rezultati dobijeni na osnovu ovih istraživanja se dalje koriste u svrhu unaprjeđenja kontrole zdravstvene zaštite.

Struktura rada

U prvom poglavlju rada, pod nazivom **Kompartmentalni modeli**, biće izložene kako determinističke, tako i stohastičke varijacije pomenutih epidemioloških modela. Na početku poglavlja će biti predstavljeni deterministički modeli koji ne uzimaju u obzir postojanje slučajnih događaja unutar posmatrane populacije. Defakto, razmotrićemo slučaj osnovnog SIR modela, koji je zasnovan na orginalnom radu Kermaka i Mekendrika iz 1927. godine, a podrazumijeva postojanje tri klase: klasu *Osjetljivih*, klasu *Inficiranih* i klasu *Oporavljenih* članova populacije. Koristeći osnovne parametre ovog modela, kao što su stopa infekcije i stopa oporavka od bolesti, definisaćemo ključni pokazatelj koji nam pruža informaciju o tome da li će se epidemija proširiti nakon njenog izbjivanja, u literaturi poznat pod nazivom *Efektivni reproduktivni broj*. Specijalno, definisaćemo i *Osnovni reproduktivni broj*, koji nam ukazuje na to da li će se bolest proširiti nakon rane faze njenog izbjivanja. Potom ćemo pažnju usmjeriti na SIS model, koji predstavlja pojednostavljenu verziju SIR modela. U nastavku, analiziraćemo SEIRD model, koji u odnosu na prethodne modele uzima u obzir period inkubacije (latentni period) i različite kliničke slike svakog pacijenta. Na poslednjim stranicama ovog poglavlja, akcenat ćemo staviti na stohastički SIR model sa Markovskim svojstvom, koji se nametnuo kao prirodna potreba za proširenjem njegove preteče - determinističkog SIR modela.

Drugo poglavlje biće podijeljeno na dva dijela – **Rezerve i Optimalna premijska stopa u povezanom SEIR modelu**. U okviru potpoglavlja Rezerve, koristeći Runge-Kuta metod za rješavanje sistema diferencijalnih jednačina, formulisaćemo *funkciju benefičijske rezerve*, koja odražava svojevrsnu vezu između epidemioloških i aktuarskih veličina. Sprovedena analiza, rezultovaće algoritmom koji izračunava stopu premije π , neophodnu za ostvarivanje polise sa pozitivnim gotovinskim vrijednostima koje garantuju osiguravajućim kompanijama opstanak na tržištu osiguranja. U poslednjem dijelu rada, proučavaće povezani deterministički i stohastički SEIR model, u cilju određivanja optimalne premijske stope. Za njeno izračunavanje, ključne komponente će biti *vrijeme osjetljivosti* i *vrijeme infektivnosti*. Štaviše, uz pomoć algoritma odredićemo optimalnu strategiju alokacije vакcina u odnosu na zastupljene migracione tokove u okviru posmatrane populacije. Dodatno, pomoću „*next generation*“ matrične metode definisaćemo osnovni reproduktivni broj u slučaju SEIR modela sa dva povezana centra i konstantnim migracionim tokovima.

U prilogu koji će se naći na krajnjim stranicama master rada, biće izloženi kodovi korišćeni za ilustrovanje primjera.

Na samom kraju master rada, autor će iznijeti nepristrasne i argumentovane zaključke, čime će se osvrnuti na cjelokupan sadržaj rada.

Novi Sad, 2022

Nikolina Jukić

Zahvalnica

Ovaj rad je urađen na Departmanu za matematiku i informatiku Univerziteta u Novom Sadu.

Zahvaljujem se svima koji su bezrezervno pomogli izradu ovog master rada, a posebno svom mentoru prof. dr Dori Seleši za pažljivo odabranu temu, neizmjerno strpljenje, korisne sugestije i savjete tokom izrade i pisanja rada.

Posebnu zahvalnost dugujem svojoj porodici i prijateljima za bezgraničnu podršku tokom studiranja.

Nikolina Jukić

Popis skraćenica

Skraćenica	Srpski	Engleski
KM	Kompartmentalni modeli	Compartmental models
SDJ	Sistem diferencijalnih jednačina	System of differential equations
LMNV	Lanac Markova sa neprekidnim vremenom	Continuous time Markov chain
SZO	Svjetska zdravstvena organizacija	World Health Organization
OPE	Osnovni princip ekvivalencije	The basic equivalence principle
DFE	Tačka ravnoteže bez bolesti	The disease-free equilibrium point

1 Kompartmentalni modeli

Napori našeg društva u borbi sa globalnom pandemijom mahom se oslanjaju na sposobnost svakog matematičara da prvenstveno razumije, a potom modelira i predvidi dinamiku širenja virusa i prenošenja zaraznih bolesti. Najzastupljeniji matematički modeli koji predstavljaju okosnicu u ispunjavanju prethodno navedenih ciljeva su zasigurno kompartmentalni modeli⁴ (KM). Kod ovih modela populacija je podijeljena u različite klase u zavisnosti od faze bolesti u kojoj se svaki pripadnik populacije nalazi u momentu posmatranja. Dalja analiza svodi se na formiranje i rješavanje sistema diferencijalnih jednačina (SDJ).

1.1 Deterministički modeli

Deterministički modeli su zapravo oni KM koji ne uzimaju u obzir postojanje slučajnih događaja unutar cijelokupne populacije (tj. unutar svih posmatranih klasa). U nastavku rada će prvo biti razmatran osnovni SIR⁵ model, a potom ćemo se osvrnuti na nešto složenije determinističke modele.

⁴eng. *Compartmental models* u prevodu označava modele koji podrazumijevaju postojanje određenih grupa ili klasa posmatrane populacije.

⁵SIR predstavlja akronim riječi *Susceptible*, *Infected*, *Removed*.

1.1.1 SIR model

Ideja o klasifikaciji čitave populacije je ilustrovana na primjeru SIR modela. Baziran na orginalnom radu Kermaka i Mekendrika⁶ iz 1927. godine izložen u [1], osnovni **SIR** model posmatra tri klase (ilustrovano na slici 1):

1. ***Susceptible ili Osjetljivi***

Pod osjetljivima se podrazumijevaju oni koji nisu imuni na posmatranu infekciju i podložni su zarazi.

2. ***Infected ili Inficirani***

Inficirani su oni članovi populacije kod kojih postoje određeni simptomi bolesti prouzrokovani virusnom infekcijom i ubrajaju se u potencijalne prenosioce virusa.

3. ***Removed ili Oporavljeni***

Oporavljeni predstavljaju dio populacije koji se uspješno izborio sa bolesti i stekao imunitet.



Slika 1. Klase osnovnog SIR modela

⁶Osnovni SIR model ili *Kermak-Mekendrikov model* (eng.*Kermack-McKendrick model*) prezentovan je u radu „*A Contribution to the Mathematical Theory in Epidemic*“ koji je objavljen 1927. godine.

Prepostavke pod kojima analiziramo osnovni SIR model su sledeće:

- A. Označimo sa $N(t)$ veličinu populacije u zavisnosti od vremena t . Za početak, prepostavimo da u populaciji nema rađanja ni imigracije, te da je bolest kratkotrajnog karaktera i nema smrtonosni ishod, što dalje implicira da je $N(t) = N$, $N = \text{const}$.
- B. Zatim označimo sa $S(t)$ i $I(t)$ broj osjetljivih i zaraženih pojedinaca u trenutku t , respektivno. Razumljivo, broj oporavljenih pojedinaca u trenutku t je onda definisan na sledeći način:

$$R(t) = N - S(t) - I(t). \quad (1)$$

Napomena 1.1. $S(t)$, $I(t)$ i $R(t)$ su funkcije u zavisnosti od vremena t .

- C. Dalje prepostavimo da se pripadnici populacije *homogeno* miješaju što znači da svaki pripadnik ima jednaku vjerovatnoću⁷ da dođe u kontakt sa bilo kojim drugim pripadnikom posmatrane populacije.
- D. Dinamika transmisije ili prenošenja bolesti zasniva se na *zakonu masovne akcije*⁸ navedenom u [2], što znači da stopa sekundarne infekcije⁹ zavisi od veličine osjetljive i inficirane klase.

⁷Vjerovatnoću u okviru ove prepostavke možemo tumačiti samo intuitivno, jer se zapravo radi o determinističkom modelu.

⁸Zakon masovne akcije (eng. *The Law of Mass Action*) kaže da je brzina c kojom se infekcija širi u populaciji proporcionalna proizvodu broja inficiranih \mathbf{I} i osjetljivih \mathbf{S} , odnosno, matematičkim simbolima zapisano $c = pIS$, gdje je $p = \text{const}$. *A priori* zakon možemo interpretirati kao uniformno miješanje inficiranih sa osjetljivim članovima populacije.

⁹Primarna infekcija odnosni se na *nultog pacijenta* za kog se smatra da se u grupi povezanih slučajeva prvi inficirao i od kog kreće dalje širenje virusa, dok se sekundarna infekcija odnosi na novonastale zaražene kojima je prvozaraženi nulti pacijent prenio virus.

- E. Označimo sa β stopu infekcije (eng. *the infection rate*), tačnije stopu koja predstavlja broj kontakata kojima pojedinac može da prenese bolest u jedinici vremena. Štaviše, $\beta I(t)$ možemo tumačiti kao stopu zaraznih kontakata (eng. *the rate of contagious contacts*). Pošto se bolest prenosi samo između osjetljivih i zaraženih osoba, stvarna stopa prenosa (eng. *the actual rate of transmission*) je $\frac{\beta I(t)S(t)}{N}$.
- F. α označava stopu oporavka od bolesti (eng. *the recovery rate*) koju virus izaziva. Drugim riječima, predstavlja udio klase *Inficiranih* koji je izlječen i stoga pripada klasi *Oporavljenih*, što dalje implicira da je $\alpha I(t)$ stopa smanjenja u klasi *Inficiranih* (eng. *the rate of decrease in the Infected class*).
- G. Bitno je naglasiti da ovaj model ne razlikuje uzroke mogućeg ozdravljenja, što može značiti oporavak, sticanje imuniteta ili smrt. Kada se jednom oporave, pripadnici klase *Oporavljenih* se više ne mogu vratiti u klasu *Osjetljivih* ili *Inficiranih*.

Istaknute pretpostavke dovode do formiranja sledećeg SDJ (opširnije u radu [3]):

$$S'(t) = -\beta I(t) \frac{S(t)}{N} \quad (2)$$

$$I'(t) = \beta I(t) \frac{S(t)}{N} - \alpha I(t) \quad (3)$$

Kao što možemo primjetiti, **SIR** model je predstavljen u formi izvoda broja pripadnika svake posmatrane klase u trenutku t . Dobra definisanost proizilazi iz činjenica da svaka klasa ima dovoljno veliki broj članova i da je broj osoba u svakoj klasi diferencijabilan u odnosu na vrijeme.

Naime, izvjesno je da SDJ prikazuje brzinu promjene broja članova unutar svake klase tokom vremena (brzinu promjene broja članova klase *Oporavljениh* je moguće izraziti pomoću (1)). Takođe, poželjno je uočiti da se na osnovu (3) može donijeti zaključak o širenju bolesti na sledeći način:

- i. Bolest se širi, tj. $I'(t) \geq 0$ ukoliko važi:

$$\beta \frac{S(t)}{N} - \alpha > 0;$$

- ii. Bolest će izumrijeti, tj. $I'(t) \leq 0$ ukoliko važi:

$$\beta \frac{S(t)}{N} - \alpha < 0.$$

Napomena 1.2. Nejednakost $I'(t) \leq 0$ ($I'(t) \geq 0$) potvrđuje činjenicu da će se broj inficiranih vremenom ili smanjivati (povećavati) ili eventualno biti konstantan.

Ključni pokazatelj koji nam daje informaciju da li će se epidemija proširiti nakon njenog izbijanja jeste ***Efektivni (opšti) reproduktivni broj*** (eng. *the effective (general) reproductive number*) definisan kao:

$$R_t = \frac{\beta}{\alpha} \frac{S(t)}{N} \tag{4}$$

Ovaj broj označava *prosječan broj sekundarnih infekcija uzrokovanih jednim zaraženim pojedincom u trenutku t*. Kako bismo što bolje razumijeli (4), potrebno je da pojasnimo sledeće veličine:

- $\frac{1}{\beta}$ je prosječno vrijeme tokom kog zaražena osoba prenese virus;
- $\frac{1}{\alpha}$ je prosječno vrijeme tokom kog se zaraženi oporavi;

- $\frac{\beta}{\alpha}$ je prosječan broj kontakata sa kojima zaražena osoba dolazi u dodir prije njenog oporavka.

Specijalno, ukoliko je $t = 0$ definišemo ***Osnovni reproduktivni broj*** (eng. *the basic reproduction number*) koji nam ukazuje na to da li će se bolest proširiti tokom rane faze njenog izbijanja, odnosno, koliko prosječno članova populacije može da zarazi novoprdošla zaražena osoba. Razlikujemo tri slučaja:

$R_0 = 1 \Rightarrow$ jedna zaražena osoba može da zarazi u prosjeku samo jednu osjetljivu osobu, stoga bolest postaje *endemska*¹⁰;

$R_0 < 1 \Rightarrow$ jedan zaraženi pojedinac može da zarazi u prosjeku manje od jedne osjetljive osobe, te u tom slučaju dolazi do izumiranja bolesti;

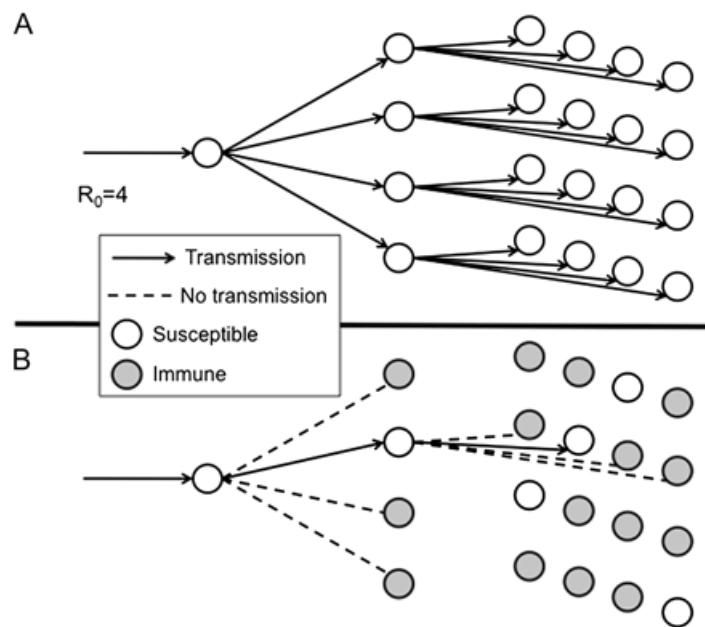
$R_0 > 1 \Rightarrow$ jedan zaraženi može da zarazi u prosjeku više od jedne osjetljive osobe i zbog toga dolazi do epidemije uslijed pojave velikog broja novozaraženih.

Potrebno je naglasiti da izraz $1 - \frac{1}{R_0}$ ima posebno značenje i naziva se **prag imuniteta stada**¹¹. Na primjeru 1.3, ilustrovaćemo širenje infekcije pomoću dijagrama (slika 2) sa *osnovnim reproduktivnim brojem* R_0 (za više informacija pogledati rad [4]).

¹⁰Endemska bolest je patologija koja je trajno prisutna na određenom području u okviru jedne populacije. Njena prisutnost se ogleda u relativno malom broju postojanih slučajeva zaraze.

¹¹Imunitet stada (eng. *Herd immunity threshold*) podrazumijeva imunizaciju određene kritične mase u cilju stvaranja antitijela. Većina naučnika smatra da je najmanje 70% stanovništva potrebno vakcinisati kako bi se spriječilo dalje širenje zaraznih bolesti.

Primjer 1.3. ([4]) Posmatrajmo slučaj kada je $R_0 = 4$, pri čemu se populacija sastoji od 3 generacije. Razlikovaćemo osjetljive od imunih članova populacije i s tim u vezi analizirati dvije situacije: **situaciju A** i **situaciju B**.



Slika 2. Dijagram transmisije infekcije pri čemu je $R_0 = 4$

situacija A: Na slici 2 je prikazano širenje bolesti među osjetljivim pripadnicima populacije koju čine 3 generacije. Kako je $R_0 = 4$, to znači da bi 1 slučaj zaraze uzrokovao 4 nova slučaja, potom tih 4 bi uzrokovali narednih 16 slučajeva i tako redom.

situacija B: Pošto smo ustanovili da je osnovni reproduktivni broj $R_0 = 4$, dobijamo da je $\frac{R_0-1}{R_0} = 1 - \frac{1}{R_0} = \frac{3}{4} = 0.75$, što dalje implicira da je 75% populacije imuno. Drugim riječima, pod ovim okolnostima 1 slučaj zaraze dovodi do samo 1 uspješnog prenosa infekcije. Slijedstveno tome, izraz $1 - \frac{1}{R_0}$ definisemo kao **prag imuniteta stada**.

U tabeli 1 navodimo nekoliko procjena osnovnog reproduktivnog broja R_0 za različite bolesti preuzetih iz [5]:

Mjesto i vrijeme izbijanja bolesti	R_0
velike beginje u Indijskom potkontinentu (1968-1973)	4.5
poliomijelitis u Evropi (1955-1960)	6
male beginje u Gani (1960-1968)	14.5
SARS epidemija (2002-2003)	3.5
Španski grip u Ženevi (1918)	
prvi talas	1.5
drugi talas	3.8
pandemija H2N2 gripe u SAD (2009)	1.68
H1N1 grip u Južnoj Africi (2009)	1.33
ebola u Gvineji (2014)	1.51
Zika virus u Južnoj Americi (2015-2016)	2.06

Tabela 1. Procijenjena srednja vrijednost broja R_0

Neophodno je istaći da je Zhao u [6] dao preliminarnu procjenu broja R_0 za pandemiju koronavirusa u Kini (od 10. do 24. januara 2020. godine), koja iznosi između 2.24 i 3.58.

1.1.1.1 Determinističke funkcije

Analiza mortaliteta se u većini slučajeva zasniva na količniku dva broja umjesto na apsolutnom broju, stoga se javila potreba da KM modelle interpretiramo pomoću determinističkih funkcija¹² $s(t)$, $i(t)$ i $r(t)$ koje označavaju udio populacije u svakoj od klase S , I i R respektivno.

¹²Determinističke funkcije $s(t)$, $i(t)$ i $r(t)$ možemo tumačiti kao vjerovatnoće da će pojedinac biti osjetljiv, inficiran ili oporavljen, respektivno, u trenutku t . S druge strane, znamo da kretanje između klasa zavisi od njihovih relativnih veličina (zakon masovne akcije), stoga kažemo da navedene vjerovatnoće odgovaraju međusobno zavisnim rizicima u SIR modelu.

$$\begin{aligned}s(t) &= \frac{S(t)}{N} \\ i(t) &= \frac{I(t)}{N} \\ r(t) &= \frac{R(t)}{N}\end{aligned}$$

Dijeljenjem SDJ (1)-(3) sa konstantnom veličinom populacije N, dobijamo sledeći SDJ:

$$s'(t) = -\beta i(t)s(t), \quad t \geq 0 \quad (5)$$

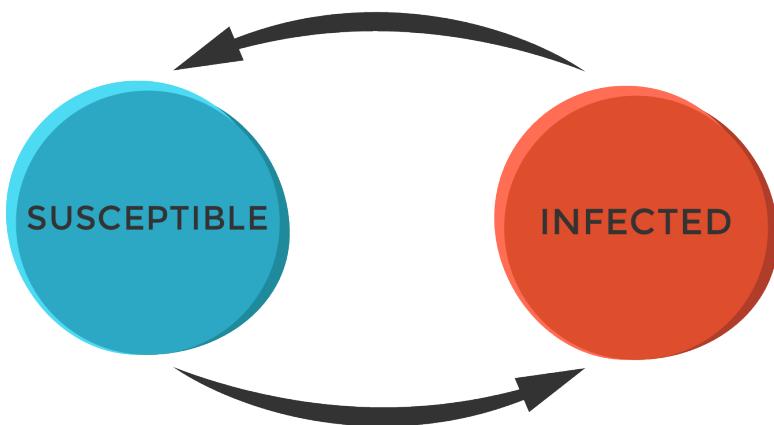
$$i'(t) = \beta i(t)s(t) - \alpha i(t), \quad t \geq 0 \quad (6)$$

$$r(t) = 1 - s(t) - i(t), \quad t \geq 0 \quad (7)$$

gdje je $s(0) + i(0) = 1$, pri čemu je $s(0) = s_0$ i $i(0) = i_0$. Da bismo pojednostavili dalju notaciju, promjenljivu t nećemo posebno naglašavati sem u slučajevima kada je to zaista neophodno. Takođe, koristićemo konvenciju da velika slova, S , I i R , označavaju broj pripadnika klase, dok mala slova, s , i i r , označavaju udio populacije u svakoj od njih.

1.1.2 SIS model

Još jedan uobičajen model, koji se pored SIR modela koristi u modeliranju razvijanja bolesti, jeste **SIS** model. Za razliku od SIR modela koji uzima u obzir klasu *Oporavljenih R*, SIS model sadrži samo dvije klase: klasu *Osjetljivih S* i klasu *Inficiranih I* (ilustrovano na slici 3). Neizlječive bolesti (kao što je AIDS¹³) ili bolesti kod kojih inficirani nakon oporavka ne stiče imunitet protiv ponovnog inficiranja, čine motive za kreiranje ovog modela.



Slika 3. Klase SIS modela

Kao i kod SIR modela, posmatraćemo okolnosti u kojima istovremeno nema rađanja ni imigracije i bolest nema smrtonosni ishod. Drugim riječima, veličina ukupne populacije N ostaje konstantna, tj. $S(t) + I(t) = N$.

¹³AIDS predstavlja skraćenicu od *Acquired Immune Deficiency Syndrome*, što znači sindrom stečenog gubitka imuniteta.

Označavajući stopu infekcije sa β i stopu oporavka od bolesti sa α , slično kao kod SIR modela, dobijamo sledeći SDJ koji odgovara ovom modelu (detaljnije u radu [3]):

$$s' = -\beta si + \alpha i \quad (8)$$

$$i' = \beta si - \alpha i \quad (9)$$

Pošto važi da je $s + i = 1$ za svako t , SDJ (8)-(9) se svodi na logističku diferencijalnu jednačinu:

$$i' = (\beta(1 - i) - \alpha)i$$

Napomena 1.4. Navedena jednakost je definisana za svako t , jer znamo da važi $S(t) + I(t) = N$ i potom dijeljenjem sa N dobijamo upravo $s + i = 1$.

Za razliku od SIR modela, SIS model zadat sa SDJ (8)-(9) ima eksplicitno analitičko rješenje, dato u sledećoj formi:

$$s(t) = \frac{\left(\frac{1 - \frac{\alpha}{\beta}}{i(0)} - 1\right) e^{-(\beta-\alpha)t} + \frac{\alpha}{\beta}}{1 + \left(\frac{1 - \frac{\alpha}{\beta}}{i(0)} - 1\right) e^{-(\beta-\alpha)t}}$$

$$i(t) = \frac{1 - \frac{\alpha}{\beta}}{1 + \left(\frac{1 - \frac{\alpha}{\beta}}{i(0)} - 1\right) e^{-(\beta-\alpha)t}}$$

1.1.3 SEIRD model

Izuzetno je bitno uspostaviti sistem praćenja individualnih kliničkih ishoda infekcije, jer se u suštini oni razlikuju po nivou zdravstvenih resursa potrebnih za hospitalizovanje pacijenta. U tu svrhu razvijen je složeniji model, tzv. **SEIRD** model. U odnosu na prethodne modele, ovaj model uzima u obzir *period inkubacije* i različite *kliničke slike* svakog posmatranog pacijenta (blaga infekcija, teška infekcija i kritična faza). Period inkubacije je vrijeme od trenutka kada se osoba inficira nekim mikroorganizmom ili patogenom (virusi, bakterije, gljivice, paraziti i prioni) do trenutka kada se pojave prvi simptomi bolesti. Kasnije će biti više riječi o modelu koji posmatra samo period inkubacije kao zaseban slučaj (SEIR model).

Klasu *Osjetljivih S*, potpuno analogno kao kod SIR i SIS modela, čine oni koji su podložni zarazi. Oni pripadnici klase *S* koji su se u međuvremenu inficirali prelaze u klasu *Izloženih E* (eng. *Exposed*). Za sada ćemo smatrati da su članovi klase *E* asimptomatski slučajevi koji još uvijek ne mogu da prenesu infekciju. Ukoliko pojedinac ispolji simptome i postane zarazan po ostatak populacije biće premješten u klasu *Inficiranih I*. U okviru klase *I* razlikovaćemo tri kliničke slike: klasu *Blago inficiranih I₁* koji imaju blagu infekciju, klasu *Inficiranih sa hospitalizacijom I₂* kojoj pripadaju oni sa teškom kliničkom slikom i klasu *Inficiranih na intenzivnoj njezi I₃* čiji su članovi pacijenti u kritičnoj fazi. Preostale klase su klasa *Oporavljenih R* i klasa *Preminulih D* (eng. *Deceased* ili *Dead*). Vizuelni prikaz prethodno definisanih klasa prezentovan je na slici 4.

U nastavku navodimo SDJ koji karakteriše SEIRD model i opisuje dinamiku populacije unutar gore pomenutih klasa (za više informacija pogledati rad [3]):

$$S' = -(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3)S \quad (10)$$

$$E' = (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 + \beta_3 I_3)S - \gamma E \quad (11)$$

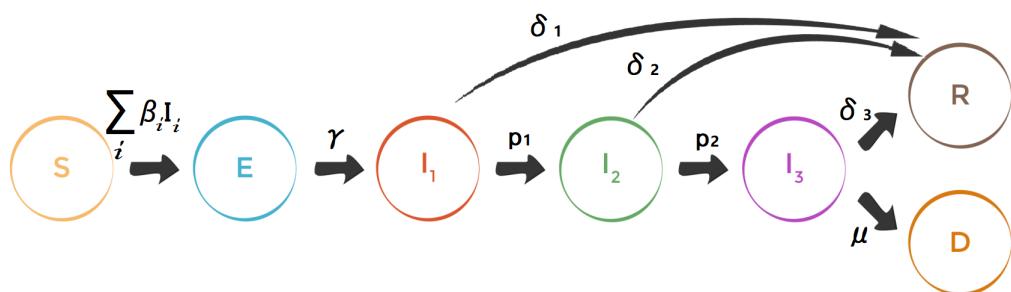
$$I'_1 = \gamma E - (\delta_1 + p_1)I_1 \quad (12)$$

$$I'_2 = p_1 I_1 - (\delta_2 + p_2)I_2 \quad (13)$$

$$I'_3 = p_2 I_2 - (\delta_3 + \mu)I_3 \quad (14)$$

$$R' = \delta_1 I_1 + \delta_2 I_2 + \delta_3 I_3 \quad (15)$$

$$D' = \mu I_3 \quad (16)$$



Slika 4. Klase SEIRD modela

Svaki od parametara u SDJ (10)-(16) ima svoju kliničku interpretaciju (slika 4):

β_i , $i = 1, 2, 3$, jeste *stopa transmisije*¹⁴ ili *stopa prenosa* po kojoj zaražene osobe iz klase I_i , $i = 1, 2, 3$ prenose bolest pripadnicima klase S ;

γ je *stopa napredovanja* iz izloženog (za vrijeme perioda inkubacije) u inficirano stanje;

$\frac{1}{\gamma}$ je *prosječni period inkubacije*;

δ_i , $i = 1, 2, 3$, jeste *stopa oporavka* kojom se zaražene osobe u klasi I_i , $i = 1, 2, 3$ oporavljaju od bolesti i postaju imune;

$\frac{1}{\delta_i}$, $i = 1, 2, 3$, jeste *prosječna dužina trajanja infekcije* u klasi I_i prije oporavka zaraženog i njegovog prelaska u klasu R ;

p_i , $i = 1, 2$, predstavlja *stopu po kojoj se klinička slika pogoršava*, shodno tome se zaražene osobe iz klase I_i prebacuju u klasu I_{i+1} ;

μ je *stopa prelaska najtežih slučajeva* iz klase I_3 u klasu D .

Analogno kao i u prethodnim modelima, veličina ukupne populacije N ostaje konstantna, tj. važi $S + E + I_1 + I_2 + I_3 + R + D = N$.

¹⁴Prirodno je prepostaviti da važi $\beta_1 \gg \beta_2, \beta_3$ jer je pojedinac najviše zarazan tokom stadijuma blage infekcije kada se još uvijek nalazi u zajednici i sposoban je da komunicira sa drugim pripadnicima populacije. S druge strane, oni zaraženi koji se nalaze u stadijumu teške infekcije ili kritične faze bolesti su izolovani u bolnicama, stoga su onemogućeni da višestruko prenose bolest.

Napomena 1.5. Značajno je primijetiti da SDJ (10)-(16) možemo okarakterisati kao *dekompoziciju*¹⁵ globalne promjene u populaciji na pojedinačne promjene unutar svake definisane klase. Na primjer, jednačina (10) povezuje trenutnu stopu smanjenja¹⁶ broja članova klase *Osjetljivih*, $-S'$, sa zbirom stopa sekundarne infekcije koja je posljedica stupanja u kontakt sa zaraženim pripadnicima svake posmatrane klase, tj. $\beta_1 I_1 S + \beta_2 I_2 S + \beta_3 I_3 S$. Preciznije, $\beta_1 I_1 S$ „osjetljivih“ prelazi u grupu „blago zaraženih“. Zaista, ako pažljivije pogledamo, $\beta_1 I_1 S$ možemo zapisati kao $(\beta_1 N) I_1 (\frac{S}{N})$, gdje $\beta_1 N$ označava broj „odgovarajućih kontakata“ kojima svaki blago inficirani pojedinac može da prenese bolest pomnožen sa brojem blago inficiranih I_1 i naposljetku pomnoženo sa procentom osjetljivih unutar cjelokupne populacije. Preostale *obične diferencijalne jednačine* možemo objasniti na potpuno analogan način.

1.1.3.1 Osnovni reproduktivni broj

Kao što je prethodno pojašnjeno, **osnovni reproduktivni broj** R_0 predstavlja prosječan broj članova populacije koje jedna novoprdošla inficirana osoba može da zarazi.

U kontekstu preciziranja broja R_0 posmatranog SEIRD modela, posebnu pažnju posvetićemo obrazloženju svakog pojedinačnog sabirka (detaljnije izloženo u radu [7]):

$$R_0 = \frac{N\beta_1}{p_1 + \delta_1} + \frac{p_1}{p_1 + \delta_1} \cdot \frac{N\beta_2}{p_2 + \delta_2} + \frac{p_1}{p_1 + \delta_1} \cdot \frac{p_2}{p_2 + \delta_2} \cdot \frac{N\beta_3}{\mu + \delta_3}$$

- i. Prvi sabirak označava prosječan broj sekundarnih infekcija prouzrokovanih jednim pripadnikom klase I_1 . Štaviše, $\frac{1}{p_1 + \delta_1}$ prikazuje prosječno

¹⁵Raščlanjivanje cjeline na njene gradivne dijelove.

¹⁶Brzina promjene (u smislu smanjenja) broja članova unutar klase *Osjetljivih* S tokom vremena.

- trajanje prve faze bolesti tokom koje oboljeli ispoljava blage simptome;
- ii. Drugi sabirak obuhvata vjerovatnoću¹⁷ da oboljeli pređe iz klase I_1 u klasu I_2 uslijed pogoršanja bolesti pomnoženu sa prosječnim brojem sekundarnih infekcija prouzrokovanih jednim pripadnikom klase I_2 . Takođe, slično kao u prvom sabirku, $\frac{1}{p_2 + \delta_2}$ predstavlja prosječno trajanje druge faze bolesti koju karakteriše period od prijema u bolnicu do oporavka oboljelih koji nisu napredovali u kritični stadijum;
 - iii. Kao što se već može naslutiti, treći sabirak tumačimo kao vjerovatnoću da oboljeli pređe iz klase I_2 u klasu I_3 pod dejstvom ozbiljnijih komplikacija pomnoženu sa prosječnim brojem sekundarnih infekcija prouzrokovanih jednim pripadnikom klase I_3 . Za razliku od prethodna dva sabirka, $\frac{1}{\mu + \delta_3}$ označava prosječno trajanje kritične faze bolesti tokom koje se oboljeli liječi na intenzivnoj njezi (uz pomoć mehaničke ventilacije) sve do njegovog potpunog oporavka ili smrti.

¹⁷U slučaju determinističkih modela, koristimo pragmatični pristup u smislu intuitivnog tumačenja vjerovatnoće.

1.2 Stohastički modeli

Stohastički KM čine još jedan popularan pristup u proučavanju dinamike širenja virusa i prenošenja zaraznih bolesti. Razvoj stohastičkih modela nametnuo se kao prirodna potreba za proširenjem determinističkih modela. Defakto, realnije je epidemiju posmatrati kroz postojanje vjerovatnoće u prenosu bolesti sa jednog na drugog pojedinca, nego iracionalno pretpostaviti (sa određenom dozom sigurnosti) da jeste ili nije došlo do pomenu-tog prenosa. U ovom poglavlju akcenat ćemo staviti na **stohastički SIR model** sa *Markovskim svojstvom*.

Definicija 1.1. ([8]) *Niz slučajnih promjenljivih sa istim skupom stanja $\{x_1, x_2, \dots\}$ se zove LANAC MARKOVA ako za proizvoljno $r \in \mathbb{N}$, $n \geq k_1 > k_2 > \dots > k_r$ važi tzv. Markovsko svojstvo:*

$$P\{X_n = x_n | X_{k_1} = x_{k_1}, X_{k_2} = x_{k_2}, \dots, X_{k_r} = x_{k_r}\} = P\{X_n = x_n | X_{k_1} = x_{k_1}\},$$

tj. vjerovatnoća da se proces nađe u stanju x_n u trenutku n zavisi samo od stanja u sadašnjem trenutku k_1 , a ne od stanja u prethodnim trenucima k_2, \dots, k_r .

Definicija 1.2. ([8]) *Vjerovatnoća prelaza iz i -tog u j -to stanje (ili iz stanja i u stanje j) u jednom koraku je*

$$p_{(i,j)}^{n,n+1} = P\{X_{n+1} = x_j | X_n = x_i\}$$

Napomena 1.6. Navedene definicije važe u slučaju lanaca Markova sa diskretnim vremenom, dok će u nastavku biti riječi o daleko primjenjivijim lancima Markova sa neprekidnim vremenom (LMNV).

Dakle, analiziraćemo stohastički SIR model u vidu LMNV (detaljnije obrazloženo u [9]). U tom kontekstu definisaćemo broj osjetljivih $S(t)$, broj inficiranih $I(t)$ i broj oporavljenih $R(t)$ kao *diskretne slučajne promjenljive* sa skupom stanja $\{0, 1, \dots, N\}$, gdje $t \in [0, \infty)$. Potrebno je naglasiti da je ovaj proces *bivarijantan*, što znači da sadrži dvije nezavisne slučajne promjenljive $S(t)$ i $I(t)$, dok je $R(t) = N - S(t) - I(t)$. Drugim riječima, stohastički SIR model možemo zapisati kao $\{(S(t), I(t))\}_{t=0}^{\infty}$ gdje je zajednička funkcija vjerovatnoće data sa $p_{(s,i)}(t) = P\{(S(t), I(t)) = (s, i)\}$. Istovremeno, bitno je skrenuti pažnju na definicije 1.1 i 1.2, koje u ovom neprekidnom slučaju interpretiramo na sledeći način:

Markovsko svojstvo za $t \in [\mathbf{0}, \infty)$:

$$P\{S(t+\Delta t) = i_n | S(0) = i_{k_1}, S(\Delta t) = i_{k_2}, \dots, S(t) = i_{k_r}\} = P\{S(t+\Delta t) = i_n | S(t) = i_{k_1}\},$$

$$P\{I(t+\Delta t) = i_n | I(0) = i_{k_1}, I(\Delta t) = i_{k_2}, \dots, I(t) = i_{k_r}\} = P\{I(t+\Delta t) = i_n | I(t) = i_{k_1}\},$$

pri čemu je $n \geq k_1 > k_2 > \dots > k_r$, za $r \in \mathbb{N}$.

Vjerovatnoće prelaza iz i -tog u j -to stanje za korak Δt , gdje $t \in [\mathbf{0}, \infty)$:

$$p_{(i,j)}(t + \Delta t, t) = P\{S(t + \Delta t) = j | S(t) = i\}$$

$$p_{(i,j)}(t + \Delta t, t) = P\{I(t + \Delta t) = j | I(t) = i\}$$

Na osnovu definicija 1.1 i 1.2 i činjenice da se radi o bivarijantnom stohastičkom procesu, za proizvoljan vremenski interval $[t, t + \Delta t]$ dobijamo sledeću *vjerovatnoću infekcije* i *vjerovatnoću oporavka*:

$$P\{S(t+\Delta t) = s-1, I(t+\Delta t) = i+1 | S(t) = s, I(t) = i\} = \frac{\beta}{N} S(t) I(t) \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{S(t + \Delta t) = s, I(t + \Delta t) = i-1 | S(t) = s, I(t) = i\} = \alpha I(t) \Delta t + o(\Delta t).$$

Napomena 1.7. Naznačene vjerovatnoće tranzicije (definicija 1.2) se smatraju za beskonačno male prelazne vjerovatnoće jer su definisane za dovoljno malo Δt . Stoga je pojam $o(\Delta t)$ sadržan u gore navedenim jednakostima. Ujedno, to je i objašnjenje zašto imamo samo tri moguće promjene u stanjima:

$$s \rightarrow s, \quad s \rightarrow s + 1, \quad s \rightarrow s - 1$$

$$i \rightarrow i, \quad i \rightarrow i + 1, \quad i \rightarrow i - 1$$

Pored navedenih slučajnih promjenljivih, postoji još jedna koja će nam biti vrlo korisna u nastavku rada, definisana kao:

$$T = \inf\{t > 0 : I(t) = 0\}$$

Odnosno, slučajna promjenljiva T označava *prvi trenutak* u kom više nema inficiranih pojedinaca u populaciji, tj. trenutak kada epidemija ili pandemija biva okončana.

2 Aktuarska analiza

Povod za uvođenje pouzdanog osiguravajućeg pokrića uslijed uticaja zaraznih bolesti, kada je zbog epidemije ili pandemije neophodno da klijent bude hospitalizovan, ekvivalentan je potrebi za osiguranjem od bilo koje druge nepredviđene situacije (neočekivana smrt ili uništenje imovine). Ono što, sa aktuarskog stanovišta, možemo okarakterisati kao moguću razlicitost jeste spontano variranje referentnih grupa¹⁸ u broju članova tokom određenog vremena.

U daljem toku rada, ilustrovaćemo ove razlike posmatrajući kretanje nivoa rezervi osiguravajuće kuće pod uticajem epidemije. Posebnu pažnju posvetićemo primjeni aktuarskih metoda na gore pomenute determinističke funkcije.

2.1 Rezerve

Rezerve čine sredstva kojima osiguravajuća kuća raspolaže u cilju izmirenja budućih obaveza po osnovu ugovora o osiguranju. Moguće ih je odrediti u svakom trenutku t , kao akumuliranu vrijednost budućih premija umanjenu za buduće beneficije. Ukoliko se rezerva precizno obrazuje i obračunava, sva dospjela potraživanja će biti na vrijeme isplaćena. U klasičnom životnom osiguranju, rezerva se formira od početka trajanja polise tokom koje osiguravajuća kuća prikuplja premije, pa sve do njenog isteka kada osiguranik prihoduje prethodno ugovorene beneficije. Koristeći ustanovljene KM modelle, prikazaćemo različite oblike *funkcije rezerve* pod uticajem epidemioloških faktora.

¹⁸Na primjer, jedna od posmatranih referentnih grupa može biti ona čiji članovi su osiguranici koji imaju pravo na kompenzaciju, dok drugu grupu čine osiguranici koji plaćaju premije.

Neophodno je istaći da analizu sprovodimo pod pretpostavkom da je plan osiguranja od epidemije ili pandemije takav da osiguranici kontinuirano plaćaju premije sve dok su zdravi (pripadaju klasi *Osjetljivih*), pri čemu osiguravajuća kompanija isplaćuje pokriće za medicinske troškove za svakog inficiranog korisnika osiguranja (pripadnika klase *Inficiranih*) tokom čitavog perioda liječenja.

2.1.1 Runge-Kuta metod i njegova aktuarska primjena

Jedan od najpopularnijih numeričkih metoda za rješavanje SDJ je *Runge-Kuta metod*¹⁹. Ono što ga izdvaja od drugih metoda jeste prednost u prilagođavanju bilo kog reda tačnosti. Za primjenu u osiguranju koristi se Runge-Kuta metod 4. reda (RK-4), dat sledećim rekurzivnim formulama:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} (k_{1i} + 2k_{2i} + 3k_{3i} + k_{4i}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ k_{1i} &= hf(t_i, y_i), \\ k_{2i} &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_{1i}\right), \\ k_{3i} &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_{2i}\right), \\ k_{4i} &= hf(t_i + h, y_i + k_{3i}), \end{aligned}$$

gdje je y_i dato sa SDJ:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

pri čemu je $h = t_i - t_{i-1}$ posmatrani vremenski skok za $i = 1, 2, \dots, n$.

¹⁹Runge-Kuta metod (eng. *the Runge-Kutta method*) su razvili njemački matematičari Karl Runge i Martin Vilhelm Kuta oko 1900. godine. Ovaj metod se koristi se numeričko rješavanje početnih problema.

2.1.1.1 SIR model

Ono što osobito intresuje aktuare jesu *ukupne diskontovane beneficije*, *ukupne diskontovane premije* i *premijske rezerve*. Kako bismo primijenili Runge-Kuta metod, navedene veličine ćemo transformisati u SDJ. Označimo sa $P(t)$ akumuliranu vrijednost premija prikupljenih do trenutka t , $B(t)$ odgovarajuću akumuliranu vrijednost nadoknada isplaćenih do trenutka t , respektivno. Posebnu pažnju usmjerićemo na funkciju beneficijskih rezerva $V(t)$ koja predstavlja akumulirane beneficijске rezerve u trenutku t^{20} .

U cilju sveobuhvatnijeg modeliranja situacije iz realnog života, razmotrićemo okolnosti u kojima osjetljive osobe plaćaju premije po *konstantnoj stopi* π , pri čemu se osiguravajuća kuća obavezuje da će inficiranom osiguraniku isplatiti naknade za hospitalizaciju sa *konstantnom stopom 1*. Dakle, vezu između aktuarskih i epidemioloških veličina moguće je uspostaviti sledećim SDJ:

$$P'(t) = \pi s(t) + \delta P(t), \quad t > 0, \quad (17)$$

$$B'(t) = i(t) + \delta B(t), \quad t > 0, \quad (18)$$

$$V(t) = P(t) - B(t), \quad t > 0, \quad (19)$$

gdje je $P(0) = \pi s_0$, $B(0) = i_0$ i π je *testirana stopa premije*. Determinističke funkcije $s(t)$ i $i(t)$ su date sa $s(t) = \frac{S(t)}{N}$ i $i(t) = \frac{I(t)}{N}$ kao što je naznačeno u odjeljku 1.1.1.1.

²⁰Drugim riječima, $V(t)$ predstavlja razliku između akumulirane vrijednosti premija i akumulirane vrijednosti potraživanja (nadoknada).

SDJ (17)-(19) možemo iskazati riječima na sledeći način:

- (17) Trenutna promjena akumulirane vrijednosti ukupnih premija, $P'(t)$, predstavlja zbir trenutne stope prihoda od premije (eng. *the instantaneous rate of premium income*) $\pi s(t)$ i trenutne stope prinosa kamate na trenutne ukupne premije (eng. *the instantaneous rate of interest return on the current total premiums*) $\delta P(t)$.
- (18) Trenutna promjena akumulirane vrijednosti ukupnih nadoknada, $B'(t)$, predstavlja zbir trenutne stope nadoknada (eng. *the instantaneous rate of claims*) $i(t)$ i trenutne stope prinosa kamate na trenutne ukupne nadoknade (eng. *the instantaneous rate of interest return on the current total claims*) $\delta B(t)$.

Postoje mnogi programske jezice koji su opšteprihvaćeni u rješavanju SDJ (17)-(19), kao što su *MATLAB* i *Maple*. Međutim, mi ćemo kao polaznu tačku za testiranje ponašanja funkcije benefičske rezerve $V(t)$ koristiti (detaljnije obrazloženo u radu [10]):

$$\pi = \bar{P}(a_\infty^{-i}).$$

Lema 2.1. ([10]) *U slučaju SIR modela (5)-(6) važi da je $s(t)$ monotono opadajuća i $r(t)$ je monotono rastuća funkcija u tački t . Međutim, ako važi da je:*

- (1) $s_0 \leq \frac{\alpha}{\beta}$, onda je $i(t)$ monotono opadajuća;
- (2) $s_0 > \frac{\alpha}{\beta}$, onda $i(t)$ raste do trenutka t^* , u kom je $s(t^*) = \frac{\alpha}{\beta}$, a nakon tačke t^* počinje da opada.

Dokaz. ([10]) Pošto znamo da su $s(t)$ i $i(t)$ nenegativne funkcije, iz SDJ (5)-(6) možemo zaključiti da važi:

$$s'(t) = -\beta i(t)s(t) < 0, \forall t > 0$$

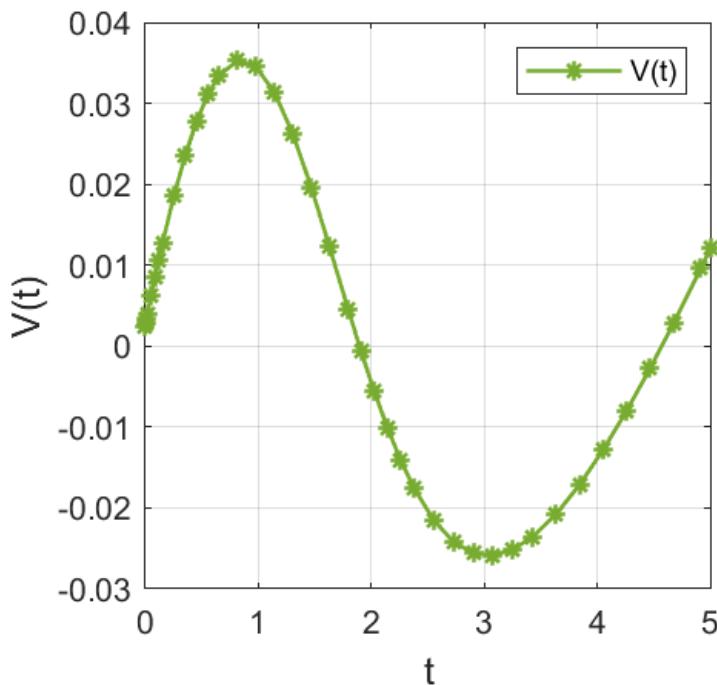
$$r'(t) = -s'(t) - i'(t) = \beta i(t)s(t) - \beta i(t)s(t) + \alpha i(t) = \alpha i(t) > 0, \forall t > 0$$

Dakle, $s(t)$ je monotono opadajuća, dok je $r(t)$ monotono rastuća funkcija.

- (1) Ako važi da je $s_0 \leq \frac{\alpha}{\beta}$, onda je $i'(t) = i(t)[\beta s(t) - \alpha] < 0$, što znači da je $i(t)$ monotono opadajuća;
- (2) Ako važi da je $s_0 > \frac{\alpha}{\beta}$, onda zbog tvrđenja da je $s(t)$ monotono opadajuća funkcija važiće i $i'(t) = i(t)[\beta s(t) - \alpha] > 0$, sve dok je $s(t) > \frac{\alpha}{\beta}$. U trenutku t^* , $i(t)$ dostiže svoj lokalni maksimum, gdje je $s(t^*) = \frac{\alpha}{\beta}$. Dakle, $s(t)$ počinje da opada nakon što dostigne $\frac{\alpha}{\beta}$, što dalje implicira da je $i'(t) < 0$, odnosno $i(t)$ postaje monotono opadajuća funkcija.

□

U aktuarskoj matematici zastupljen je trend rasta stopa smrtnosti tokom godina. Primijenjeno na epidemiološku tematiku, ako su premije konstantne tokom određenog perioda, buduće obaveze osiguravajuće kuće premašiće buduće prihode od premija. Kako bi se izbjegla ova situacija, aktuari formiraju rezerve iz kojih će se isplaćivati dospjele beneficije. Za razliku od "U" oblika krive mortaliteta, epidemija ima jedinstvenu osobinu da se infekcija brzo širi na početku dok ne dostigne svoj vrhunac, a potom se bilježi značajan pad broja zaraženih pripadnika populacije (kao što je dokazano u lemi 2.1).

Slika 5. Grafik funkcije benefičijske rezerve $V(t)$ za $\pi = 0.10$

Slika 5 ilustruje tipičan oblik funkcije benefičijske rezerve $V(t)$ zasnovan na SDJ (17)-(19), gdje je premija određena na osnovu $\pi = \bar{P}(a_{\infty}^{-i})$. Kao što možemo zapaziti, nivo benefičijske rezerve ostvaruje nagli porast na početku epidemije (uslijed porasta potražnje za osiguranjem), a zatim u jednom trenutku dostiže vrijednost nula (kada epidemija postigne svoj vrhunac) i pada ispod pozitivne granice. Stoga su postojane negativne benefičijske rezerve, kao posljedica većih obaveza u odnosu na prikupljene premije (u periodu kada osiguravajuća kompanija isplaćuje nadoknade za medicinske troškove oboljelim osiguranicima). U završnoj fazi epidemije dolazi do preokreta uslijed pada nadoknada ispod nivoa akumuliranih premija. S druge strane, osiguranici imaju mogućnost povlačenja polise nakon vrhunca epidemije, što bi značilo da osiguravajuća kuća neće moći da prikupi dovoljno premija. Kako bi se izbjegao ovaj scenario, određuje se optimalna stopa premije π koja

garantuje pozitivnu novčanu vrijednost, o čemu će više biti riječi u lemama koje slijede.

U nastavku rada analiziraćemo uticaj stope premije π na oblik funkcije benefičijske rezerve $V(t)$. Na osnovu SDJ (17)-(19) slijedi da je:

$$V'(t) = \pi s(t) - i(t) + \delta V(t), \quad t \geq 0.$$

Napomena 2.2. Zbog jednostavnosti, razmatraćemo slučaj u kom je $\delta = 0$.

Budući da predznak funkcije $V'(t)$ zavisi od determinističkih funkcija $\pi s(t)$ i $i(t)$, koje su monotono opadajuće i monotono opadajuće ili monotno rastuće pa opadajuće, respektivno, postoje četiri moguća oblika funkcije benefičijske rezerve $V(t)$.

Lema 2.3. ([10]) (Konveksnost i konkavnost)

Primjenjujući SDJ (17)-(19), pod pretpostavkom da važi $\delta = 0$, dobijamo da oblik funkcije benefičijske rezerve $V(t)$ zavisi od stope premije π na sledeći način:

(1) $V(t)$ je **konkavna**, ako

$$\pi \geq \frac{\alpha}{\beta s_\infty} - 1, \quad (20)$$

gdje je $s_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$.

(2) $V(t)$ se mijenja iz **konkavne** u **konveksnu**, ako

$$\frac{\alpha}{\beta s_0} - 1 < \pi < \frac{\alpha}{\beta s_\infty} - 1 \quad (21)$$

Tačka prevoja t_j ja data sa:

$$s(t_j) = \frac{\alpha}{(1 + \pi)\beta}. \quad (22)$$

(3) $V(t)$ je **konveksna**, ako

$$\pi \leq \frac{\alpha}{\beta s_0} - 1. \quad (23)$$

Dokaz. ([10]) Da bismo odredili konveksnost i konkavnost funkcije $V(t)$, ispitaćemo znak njenog drugog izvoda $V''(t)$:

$$V''(t) = \pi s'(t) - i'(t) = -\beta\pi s(t)i(t) - \beta s(t)i(t) + \alpha i(t) = i(t)[\alpha - \beta(\pi + 1)s(t)]$$

Ukoliko je $\pi > \frac{\alpha}{\beta s(t)} - 1$, $\forall t > 0$, važi da je $V''(t) < 0$, odnosno funkcija $V(t)$ je **konkavna**. Štaviše, ustanovili smo da je funkcija $s(t)$ monotono opadajuća, što znači da je uslov (20) zadovoljen.

Analogno se pokazuje da su uslovi (21) i (23) zadovoljeni, na osnovu analize znaka drugog izvoda funkcije $V(t)$. Preostaje nam još da pokažemo kako izgleda tačka prevoja t_j u kojoj funkcija $V(t)$ prelazi iz **konkavne** u **konveksnu funkciju**. Tačku prevoja odredićemo na osnovu jednakosti $V''(t_j) = 0$. Dakle, iz $V''(t_j) = i(t_j)[\alpha - \beta(\pi + 1)s(t_j)] = 0$ slijedi da je $s(t_j) = \frac{\alpha}{(1 + \pi)\beta}$ što je trebalo pokazati.

□

Lema 2.4. ([10]) (Monotonost)

Primjenjujući SDJ (17)-(19), pod pretpostavkom da važi $\delta = 0$, dobijamo da je funkcija benefičiske rezerve $V(t)$ **strogo rastuća**, ako

$$\pi > \frac{\alpha}{\beta} \exp \left\{ \frac{\beta c}{\alpha} - 1 \right\} - 1 \quad (24)$$

gdje je $c = 1 - \alpha \frac{\ln(s_0)}{\beta}$ konstanta.

Dokaz. ([10]) Kako bismo dokazali da je $V'(t) > 0$, $\forall t > 0$, odnosno da je $V(t)$ **strogo rastuća funkcija**, potrebno je da pokažemo da važi sledeća nejednakost:

$$\pi > \frac{i(t)}{s(t)}, \quad \forall t > 0, \quad (25)$$

koja je dalje ekvivalentna sa

$$\ln(\pi) > \ln i(t) - \ln s(t).$$

Neka je $f(t) = \ln i(t) - \ln s(t)$, odakle slijedi da je prvi izvod funkcije $f(t)$ zadat sa:

$$f'(t) = \frac{i'(t)}{i(t)} - \frac{s'(t)}{s(t)} = \beta s(t) - \alpha + \beta i(t) = \beta[s(t) + i(t)] - \alpha.$$

Na osnovu (7) i leme 2.1 znamo da je $s(t) + i(t) = 1 - r(t)$ monotono opadajuća funkcija, što dalje implicira da $f'(t)$ mijenja znak iz pozitivnog u negativan u trenutku t_m , tj. $f'(t_m) = 0$:

$$s(t_m) + i(t_m) = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (26)$$

Drugim riječima, $f(t)$ dostiže svoj maksimum u tački t_m . Kako nejednakost (25) mora da važi za svako t , onda važi i za t_m . Dakle, imaćemo:

$$\pi > \frac{i(t_m)}{s(t_m)}. \quad (27)$$

U nastavku dokaza posmatraćemo sledeći izraz:

$$\frac{i'(t)}{s'(t)} = \frac{[\beta s(t) - \alpha]i(t)}{-\beta i(t)s(t)} = -1 + \frac{\alpha}{\beta s(t)}.$$

Integracijom obe strane navedenog izraza dobijamo opšte rješenje u obliku:

$$i(t) + s(t) - \frac{\alpha}{\beta} \ln s(t) = c, \quad (28)$$

gdje je c konstanta integracije, čiju vrijednost dobijamo na osnovu početnih uslova, tj. $c = i(t_0) + s(t_0) - \frac{\alpha}{\beta} \ln s(t_0) = 1 - \frac{\alpha}{\beta} \ln s(t_0)$.

Kombinujući (26) i (28), jednostavno se dolazi do rješenje za $s(t_m)$ i $i(t_m)$:

$$s(t_m) = \exp \left\{ 1 - \frac{\beta c}{\alpha} \right\}, \quad (29)$$

$$i(t_m) = \frac{\alpha}{\beta} - \exp \left\{ 1 - \frac{\beta c}{\alpha} \right\}. \quad (30)$$

Ukoliko ubacimo (29) i (30) u izrazu (27) dobijamo traženi uslov (24), na sledeći način:

$$\pi > \frac{\frac{\alpha}{\beta} - \exp \left\{ 1 - \frac{\beta c}{\alpha} \right\}}{\exp \left\{ 1 - \frac{\beta c}{\alpha} \right\}} = \frac{\alpha}{\beta} \exp \left\{ \frac{\beta c}{\alpha} - 1 \right\} - 1$$

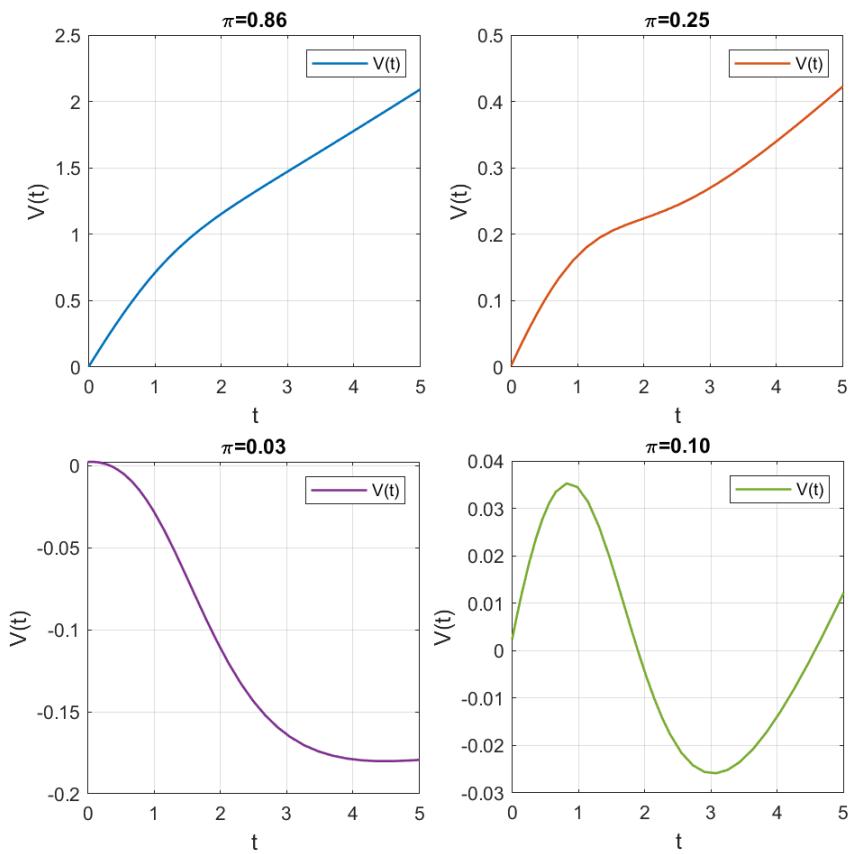
□

Tabelarni prikaz prethodno dokazanih lema:

oblik $V(t)$	Interval kom pripada π
rastuća konkavnost	$\left[\frac{\alpha}{\beta s_\infty} - 1, \infty \right)$
rastuća konkavnost pa konveksnost	$\left[\frac{\alpha}{\beta} \exp \left\{ \frac{\beta c}{\alpha} - 1 \right\} - 1, \frac{\alpha}{\beta s_\infty} - 1 \right)$
nemonotona konkavnost pa konveksnost	$\left[\frac{\alpha}{\beta s_0} - 1, \frac{\alpha}{\beta} \exp \left\{ \frac{\beta c}{\alpha} - 1 \right\} - 1 \right)$
nemonotona konveksnost	$\left[0, \frac{\alpha}{\beta s_0} - 1 \right)$

Tabela 2. Različiti oblici $V(t)$ u zavisnosti od vrijednosti stope π

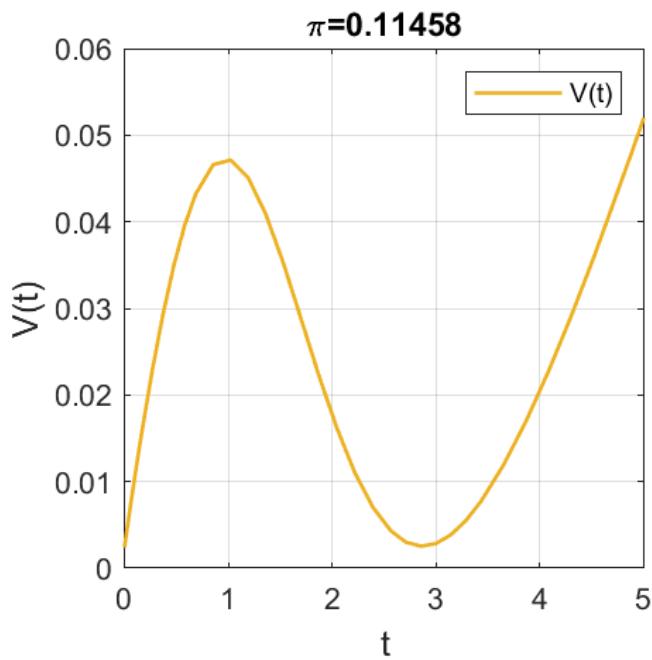
Kao što smo već nagovijestili, prethodno dokazane leme ukazuju na zavisnost oblika funkcije benefičijske rezerve $V(t)$ od intervala kom pripada stopa premije π . Na slici 6 su ilustrovana sva četiri moguća oblika grafika funkcije $V(t)$: *strogo rastuća konkavna, strogo rastuća konkavna pa konveksna, nemonotonono konveksna i nemonotonono konkavna pa konveksna.*



Slika 6. Grafici funkcije benefičijske rezerve $V(t)$ u zavisnosti od π

U slučaju kada su premijske stope veoma niske, tj. kada je $\pi = 0.10$ (zelena linija) i $\pi = 0.03$ (ljubičasta linija) prisutne su negativne vrijednosti funkcije benefičijske rezerve tokom trajanja polise. Međutim, osiguravajuća kompanija neće uzimati u obzir ni slučaj kada je $\pi = 0.25$ (crvena linija), jer se time potkrepljuje pesimističko rasuđivanje. Drugim riječima, zdravi

osiguranici će kupovati polise osiguranja sa nižim premijama, dok se obojeli odlučuju da zadrže svoju polisu, što će rezultovati povećanjem troškova osiguranja. Kao posljedica, javila se potreba za implementiranjem funkcije benefičijske rezerve koja ima *oblik zvona*, odnosno, funkcije koja poprima prvo konkavan, a zatim konveksan oblik (prikazano na slici 7). Kako bi se zadržao ciljni oblik, neophodno je da stopa premije π bude takva da funkcija $V(t)$ u početku trajanja polise bude u konkavnoj fazi, pri čemu se u jednom trenutku približi vrijednosti nula, a potom ulazi u konveksnu fazu koja omogućava stvaranje pozitivne konačne novčane vrijednosti iz koje se na kraju posmatranog perioda isplaćuju ugovorom određene beneficije.



Slika 7. Grafik funkcije benefičijske rezerve $V(t)$ u obliku zvona

Na primjeru *Great Plague in Eyam* u radu [10] je ilustrovano na koji način se dolazi do optimalne premije koja omogućava da vrijednost benefičijske rezerve nikad ne bude negativna.

Sledeći algoritam izračunava stopu premije π za t -godišnju polisu sa nenegativnim gotovinskim vrijednostima (vrijednostima funkcije benefičijske rezerve $V(t)$) tokom cijelog perioda trajanja posmatrane polise:

Algoritam 1: Izračunavanje stope premije π

Korak 1: Postavimo inicijalno $n := 1$ i $\pi^{(1)}$ relativno malo tako da važi

$$\frac{\alpha}{\beta s_0} - 1 < \pi^{(1)} < \frac{\alpha}{\beta s_\infty} - 1.$$

Korak 2: Ako je $\pi^{(n)} < \frac{\beta i(t)s(t) + \delta i(t) - \alpha i(t) - \delta^2 V(t)}{\delta s(t) - \beta i(t)s(t)}$, onda prelazimo na korak 3, u suprotnom idemo na korak 4.

Korak 3: 3.1 Ako je $V(t) < 0$ onda je $\pi^{(n+1)} := \pi^{(n)} + 0.01$ i $n := n + 1$, prelazimo na korak 2.

3.2 Ako je $V(t) > 0$ onda je $\pi^{(n+1)} := \pi^{(n)} - 0.01$ i $n := n + 1$, prelazimo na korak 2.

*3.3 Ako je $V(t) \approx 0$ onda se zaustavljamo i dobijeno $\pi^{(n)}$ je **stopa premije sa kojom se ostvaruje nula konačna novčana vrijednost.***

Korak 4: Ako je $V(t) \geq 0$ testiramo da li je $V(s) \geq 0$, $\forall s$, $0 \leq s \leq t$.

4.1 Ukoliko je test neuspješan onda je $\pi^{(n+1)} := \pi^{(n)} + 0.01$ i $n := n + 1$, vraćamo se na početak koraka.

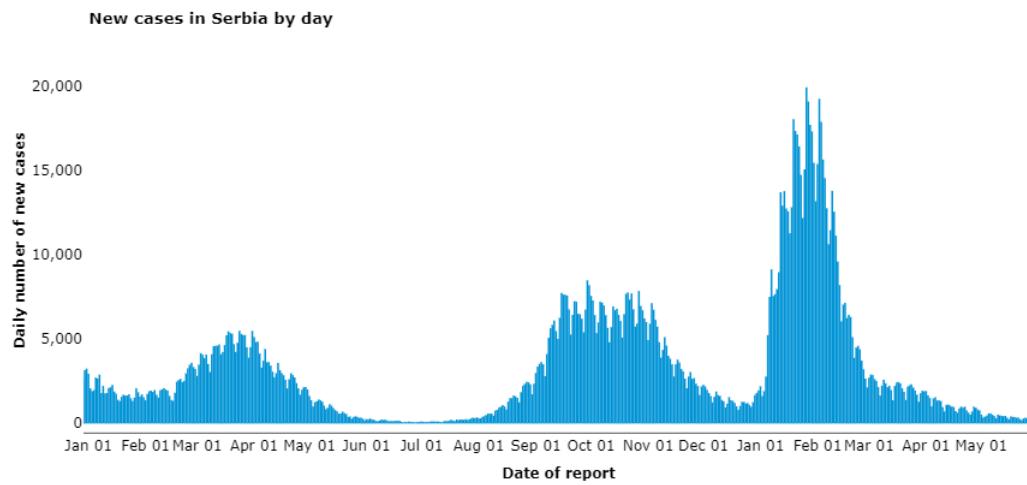
*4.2 Ukoliko je test uspješan onda se zaustavljamo i dobijeno $\pi^{(n)}$ je **stopa premije sa kojom se ostvaruje pozitivna konačna novčana vrijednost.***

Naime, *Korak 1* počinje sa stopom premije $\pi^{(1)}$ koja obezbjeđuje da funkcija $V(t)$ ima prvo konkavan, a potom konveksan grafik (lema 2.3). *Korak 2* je dio petlje koja se kasnije u algoritmu koristi da bi se utvrdilo da li je $V(t)$ u konkavnoj fazi primjenjujući novodobijenu stopu premije. U *Koraku 3* se stopa premije prilagođava znaku funkcije $V(t)$, gdje ukoliko važi da je $V(t) \approx 0$, dobijena stopa premije je ona za koju se ostvaruje nula konačna novčana vrijednost. Na kraju, u *Koraku 4* se provjerava da li je dobijena stopa premije ona sa kojom se ostvaruje pozitivna konačna novčana vrijednost ($V(t)$ se nalazi u konveksnoj fazi).

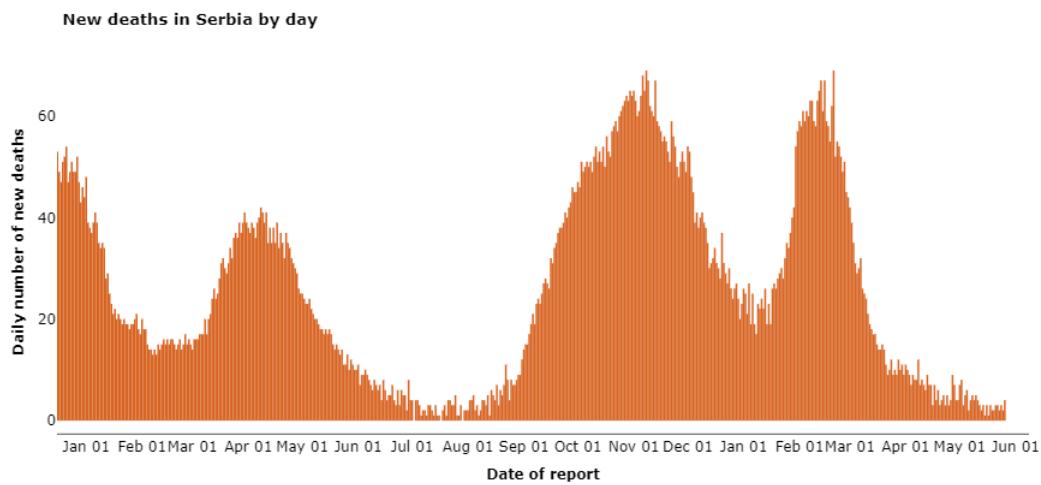
Sledećim primjerom ćemo demonstrirati primjenu SIR modela u slučaju pandemije uzrokovane koronavirusom. Podaci koji će biti korišćeni u samom primjeru, preuzeti su iz [11]. U tom kontekstu, na osnovu dobijenih rezultata, odredićemo optimalnu premijsku stopu π , neophodnu za ostvarivanje pozitivne novčane vrijednosti.

Primjer 2.5. *Prvi slučaj koronavirusa u svijetu je prijavljen krajem 2019. godine u Kini, a njegov put do Srbije je trajao nešto više od četiri mjeseca. Naime, 6. marta 2020. godine registrovan je prvi slučaj zaraze koronavirusom u našoj zemlji. Konsekventno, predsednik Aleksandar Vučić je proglašio vanredno stanje, 15. marta 2020. godine, koje je momentalno stupilo na snagu. Borba u suzbijanju širenja infekcije koronavirusa je i dalje zastupljena, kako u svijetu, tako i u našoj zemlji. Statistički izvještaji se svakodnevno ažuriraju podacima o hiljadama novih infekcija i stotinama smrtnih slučajeva. Kako bi istrajale u ovoj borbi, mnoge zemlje su preduzele određene mјere i primijenili različite strategije u cilju potpunog istrebljenja koronavirusa.*

Na narednim graficima, ilustrovaćemo dinamiku širenja infekcije koronavirusom u Srbiji, pri čemu ćemo prezentovati podatke koji odražavaju promjenu broja novih slučajeva zaraze (slika 8) i promjenu broja konstantovanih smrtnih ishoda (slika 9), na dnevnom nivou. Observacija je izvršena za posmatrani period od 1. januara 2021. godine do 30. maja 2022. godine.



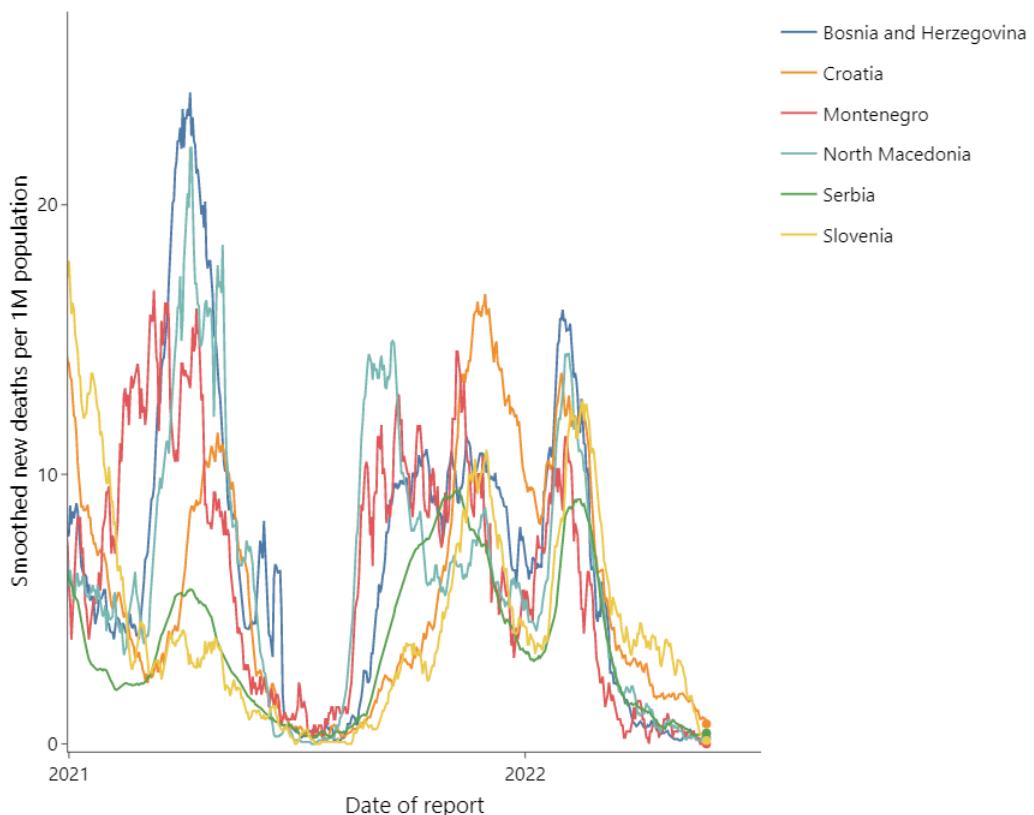
Slika 8. Promjena broja novih slučajeva zaraze koronavirusom



Slika 9. Promjena broja novih smrtnih ishoda uslijed zaraze koronavirusom

Na osnovu slika 8 i 9 se jasno može zaključiti da se koronavirus pojavljivao u nekoliko navrata u posmatranom periodu, pri čemu je u prvom navratu pandemija bila prisutna u nešto blažem obliku, u odnosu na drugi, kada se u januaru 2022. godine dogodio znatno snažniji talas koji je 20. februara zabilježio maksimalnih 69 smrtnih slučajeva, dok je istog dana registrovano 5103 novih slučajeva zaraze.

Da bismo formirali širu sliku, prikazaćemo podatke koji karakterišu broj smrtnih ishoda uzrokovanih koronavirusom, na nivou regionala (Bosna i Hercegovina, Hrvatska, Crna Gora, Sjeverna Makedonija, Srbija, Slovenija).



Slika 10. Broj smrtnih ishoda na nivou regionala

Na slici 10 možemo primijetiti sličan trend rasta broja smrtnih slučajeva (početkom avgusta 2021. godine), a potom pada istog broja (tokom januara 2022. godine). Analogno, posmatrajući period od januara do maja 2022. godine, uviđamo da je broj smrtnih slučajeva dostigao svoj maksimum sredinom februara, nakon čega bilježi nagli pad. Na osnovu iznesenih činjenica, zaključujemo da se sličan scenario odigrao kako u našoj, tako i u zemljama regiona.

Kao što smo već rekli, epidemija ima jedinstvenu osobinu koja kaže da se infekcija brže širi na samom početku njenog izbijanja, sve dok ne dostigne vrhunac, a potom slijedi značajan pad broja zaraženih pripadnika populacije (dokazano u lemi 2.1). Dakle, za fitovanje podataka pomoći SIR modela razmotrićemo samo period od početka januara, do kraja maja 2022. godine²¹.

Dakle, posmatran je period od 1. januara do 30. maja 2022. godine (ukupno 5 mjeseci). Na osnovu preuzetih podataka iz [11], [12] i [13], formiramo sledeću tabelu²²:

Vrijeme u mjesecima (t)	S(t)	I(t)	R(t)
januar 2022. godine	6434601	363107	0
februar 2022. godine	5826737	230474	377390
mart 2022. godine	5648211	63677	114849
april 2022. godine	5573111	29265	45835
maj 2022. godine	5544159	10568	18384

Tabela 3. Broj osjetljivih, inficiranih i oporavljenih pripadnika populacije Republike Srbije

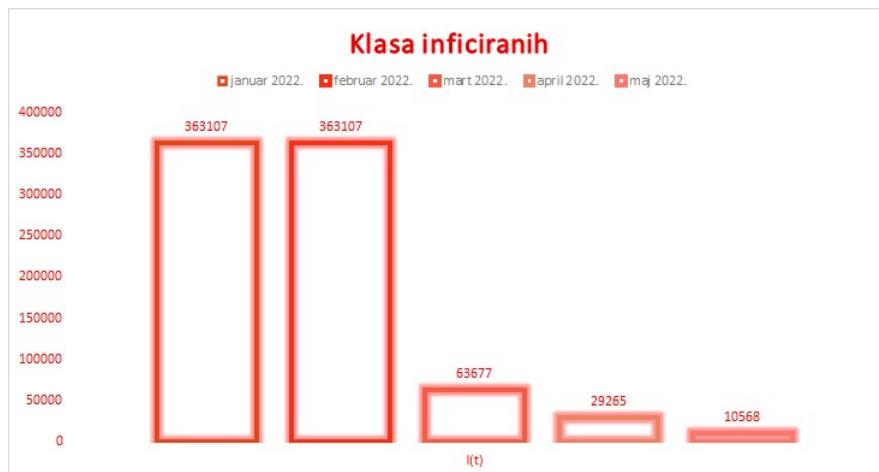
²¹Ukoliko bismo posmatrali cijeli period od januara 2021. do maja 2022. godine, sa slike 8 i 9 vidimo da postoji više lokalnih maksimuma što je u suprotnosti sa prepostavkama SIR modela.

²²Da bismo zadovoljili prepostavku koja kaže da je $s_0 + i_0 = 1$, uzimamo nula početnu vrijednost broja oporavljenih članova posmatrane populacije, tj. $R(0) = 0$.

U svrhu lakšeg praćenja dalje analize, podatke iz tabele 3 ilustrujemo narednim graficima:



Slika 11. Broj osjetljivih pripadnika populacije Republike Srbije



Slika 12. Broj inficiranih pripadnika populacije Republike Srbije

Narednim korakom, izdvojićemo podatke iz tabele 3 koji će nam predstavljati početne uslove sistema (5)-(6)²³:

$$S(0) = 6434601, \quad (31)$$

$$I(0) = 363107, \quad (32)$$

$$N = 6797708. \quad (33)$$

Naime, $s_0 = 6434601/6797708 = 0.94658$ i $i_0 = 363107/6797708 = 0.05342$, stoga možemo zaključiti da je zadovoljen kriterijum $s_0 + i_0 = 1$.

Sada, na osnovu (28) (lema 2.4) imamo da važi:

$$i_0 + s_0 - \frac{\alpha}{\beta} \ln s_0 = i_\infty + s_\infty - \frac{\alpha}{\beta} \ln s_\infty,$$

odakle dalje slijedi da je

$$\frac{\beta}{\alpha} - \ln s_0 = \frac{\beta}{\alpha} (i_\infty + s_\infty) - \ln s_\infty.$$

Uzimajući u obzir činjenicu da je udio inficiranih pojedinaca u ukupnoj populaciji vremenom sve manji, kako tvrdi lema 2.1, možemo prepostaviti da je $i_\infty = 0$, dok je sa s_∞ označen broj onih pripadnika populacije koji su izbjegli zarazu u posmatranom periodu i iznosi $s_\infty = 5544159/6797708 = 0.81559$.

Konačno,

$$\frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{\ln s_0 / s_\infty}{1 - s_\infty}. \quad (34)$$

Uopšteno, stopu infekcije β nije lako procijeniti. Postoji mnoštvo faktora koji bi morali biti uzeti u obzir, kako bi se sprovela odgovarajuća analiza. Stoga, koristeći formulu (34) i procjenu stope oporavka α , dobićemo željenu procjenu stope β .

²³Kako bismo zadovoljili prepostavku SIR modela koja kaže da u posmatranoj populaciji nema rađanja ni imigracije, smatraćemo da broj pripadnika populacije, N , nije podložan promjenama.

U dosadašnjem radu smo utvrdili da se prosječno vrijeme trajanja oporavka od bolesti može izraziti sa $\frac{1}{\alpha}$. Stoga, na osnovu podataka preuzetih sa sajta Instituta za javno zdravlje Srbije „dr Milan Jovanović Batut“²⁴, prosječno vrijeme trajanja oporavka od infekcije izazvane koronavirusom, trajalo je 15 dana (0.5 mjeseci).

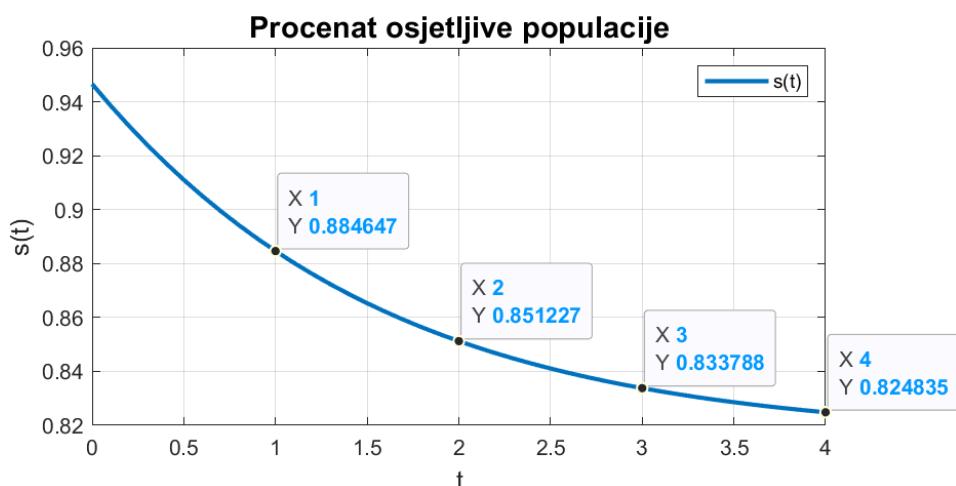
Dakle,

$$\frac{1}{\alpha} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 2,$$

dok je

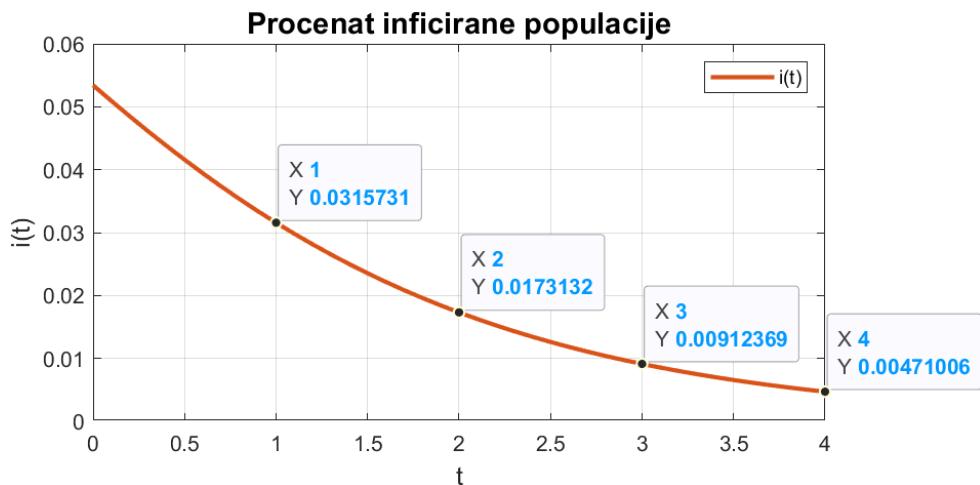
$$\beta = 1.61535.$$

Koristeći ugrađenu funkciju za rješavanje SDJ, ode45 programskog paketa MATLAB, uz pomoć računara smo riješili analizirani sistem (kod je dat u Prilogu rada). Naime, opisanim postupcima smo došli do sledećeg rješenja:



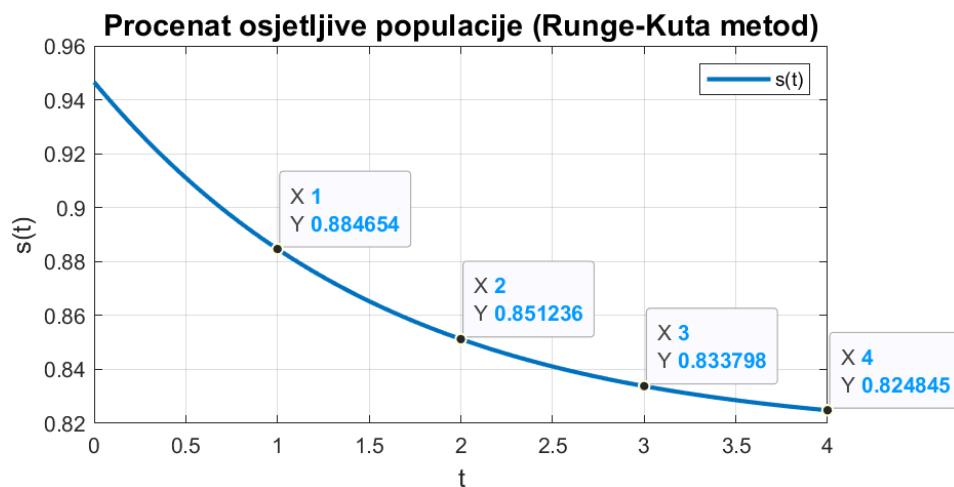
Slika 13. Procenat osjetljivih pripadnika populacije Republike Srbije

²⁴Institut za javno zdravlje Srbije „dr Milan Jovanović Batut“ je osnovala *Stalna epidemiološka komisija* 1919. godine, čiji je prvi predsednik bio dr Milan Jovanović Batut, sa ciljem praćenja, procjene i analize zdravstvenog stanja i zdravstvene pismenosti stanovništva. Sajt instituta je dostupan na adresi <https://www.batut.org.rs/index.php>.

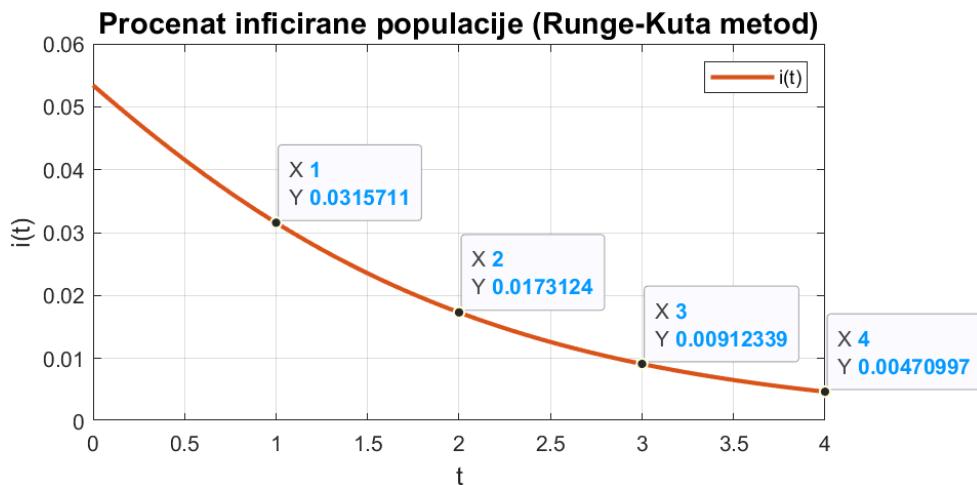


Slika 14. Procenat inficiranih pripadnika populacije Republike Srbije

U kontekstu sveobuhvatne analize i objektivne procjene podataka, SIR model smo riješili i na drugi način, pomoću gore pomenute Runge-Kuta metode (kod je naveden u Prilogu rada). Dobijene rezultate prikazujemo u vidu sledećih grafika:



Slika 15. Procenat osjetljivih pripadnika populacije Republike Srbije (RK metod)



Slika 16. Procenat inficiranih pripadnika populacije Republike Srbije (RK metod)

Bitno je skrenuti pažnju na uslov leme 2.1, koji u našem slučaju glasi:

$$s_0 \leq \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow 0.94658 \leq \frac{2}{1.61535} = 1.23812.$$

Shodno tome, funkcija $i(t)$ je zaista monotono opadajuća, kao što se može vidjeti iz priloženog (slika 14 i slika 16).

Štaviše, možemo izračunati i osnovni reproduktivni broj, R_0 , uvrštavajući prethodno dobijene parametre. Dakle,

$$R_0 = s_0 \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 0.94658 \cdot \frac{1.61535}{2} = 0.76453,$$

što je očigledno manje od 1, stoga zaključujemo da u posmatranom periodu, jedan zaraženi pojedinac može da zarazi u prosjeku manje od jedne osjetljive osobe. U tom slučaju, dolazi do izumiranja bolesti i njenog potpunog istrebljenja. Drugim riječima, na kraju posmatranog perioda (maj 2022. godine), infekcija koronavirusa je bila zastupljena u znatno manjim razmjerama u odnosu na početak perioda posmatranja (slika 12). Nameće se pitanje da li je pandemija koronavirusa zaista na izdisaju, ili je ovo samo zatišje pred nadolazeći talas.

Narednim tabelarnim prikazom dobijenih rezultata, obuhvatamo sve tri grupe podataka:

1. Podatke dobijene iz pouzdanih izvora ([11], [12] i [13]);
2. Podatke dobijene pomoću ode45 ugrađene funkcije;
3. Podatke dobijene pomoću Runge-Kuta numeričke metode.

mjesec (t)	$S_T(t)$	$I_T(t)$	$S_{SIR}(t)$	$I_{SIR}(t)$	$S_{RK}(t)$	$I_{RK}(t)$
februar 2022.	5826737	230474	6013571.99	214624.71	6013619.57	214611.12
mart 2022.	5648211	63677	5786392.59	117690.08	5786453.77	117684.64
april 2022.	5573111	29265	5667847.36	62020.18	5667915.33	62018.14
maj 2022.	5544159	10568	5606987.48	32017.61	5607055.45	32017.00

Tabela 4. Tabelarni prikaz dobijenih rezultata

Konačno, procjenimo tačnost SIR modela i numeričke Runge-Kuta metode, uz pomoć sledeće tabele:

mjesec (t)	$S_T(t)$	$S_T(t) - S_{SIR}(t)$	$S_T(t) - S_{RK}(t)$
februar 2022.	5826737	-186834.99	-186882.57
mart 2022.	5648211	-138181.59	-138242.77
april 2022.	5573111	-94736.36	-94804.33
maj 2022.	5544159	-62828.48	-62896.45

Tabela 5. Tabelarni prikaz odstupanja od tačnog broja osjetljivih

mjesec (t)	$I_T(t)$	$I_T(t) - I_{SIR}(t)$	$I_T(t) - I_{RK}(t)$
februar 2022.	230474	+15849.29	+15862.88
mart 2022.	63677	-54013.08	-54007.64
april 2022.	29265	-32755.18	-32753.14
maj 2022.	10568	-21449.61	-21449

Tabela 6. Tabelarni prikaz odstupanja od tačnog broja inficiranih

Na osnovu tabela 5 i 6 možemo donijeti zaključak da su u većini slučajeva i SIR model (ugrađena funkcija ode45) i Runge-Kuta metod precijenili tačan broj osjetljivih i inficiranih pripadnika populacije Republike Srbije. Razlog tome leži u jednostavnosti oba primjenjena načina procjenjivanja i analiziranja dinamike širenja pandemije koronavirusa. Drugim riječima, postoji mnogo faktora koji dodatno utiču na cjelokupnu sprovedenu studiju, kao što su broj vakcinisanih, migracije na različitim nivoima i slično.

U nastavku rada, reći ćemo nešto više o daleko primjenjivijem SEIR modelu, koji uzima u obzir migracione tokove i vakcinaciju stanovništva, ali prije toga osvrnimo se na zavisnost oblika funkcije beneficijske rezerve $V(t)$ od intervala kom pripada stopa premije π .

Naime, u lemama 2.3 i 2.4 ustanovili smo granice koje određuju osobine monotonosti, konveksnosti i konkavnosti posmatrane funkcije $V(t)$. Kako bismo odredili oblik funkcije $V(t)$, u daljoj analizi izračunaćemo pomenute granice:

$$\frac{\alpha}{\beta s_0} - 1 = 0.3080; \quad (35)$$

$$\frac{\alpha}{\beta s_\infty} - 1 = 0.5181; \quad (36)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \exp \left\{ \frac{\beta c}{\alpha} - 1 \right\} - 1 = 0.0791. \quad (37)$$

Demonstrirajmo naznačenu zavisnost sa nekoliko grafičkih primjera:



Slika 17. $V(t)$ za $\pi = 0.03$



Slika 18. $V(t)$ za $\pi = 0.05$



Slika 19. $V(t)$ za $\pi = 0.09$

Slika 17 nam ilustruje slučaj kada je vrijednost premijske stope π manja od (35), odnosno od broja 0.3080. Kao što možemo primijetiti, funkcija $V(t)$ u tom slučaju poprima konveksan oblik (lema 2.3). S druge strane, kada je vrijednost premijske stope $\pi = 0.09$ (slika 19) veća od (37), odnosno od broja 0.0791, što odgovara uslovu definisanom u lemi 2.4, funkcija $V(t)$ zadobija oblik strogo rastuće funkcije. Štaviše, vidimo znatnu razliku u odnosu na sliku 18, na kojoj funkcija $V(t)$ ne ispoljava izrazito strogi rast.

Defakto, kada bismo se odlučivali za jednu od ponuđenih stopa, sigurno ne bismo uzimali u obzir prve dvije izložene stope, $\pi = 0.03$ i $\pi = 0.05$, jer je funkcija benefičijske rezerve u tim slučajevima negativna u određenim tačkama domena. Međutim, stopa $\pi = 0.09$ bi bila prihvatljiva, jer odražava kontinualni rast visine benefičijske rezerve. Drugim riječima, zamislimo hipotetičku situaciju u kojoj svi osjetljivi pripadnici populacije Republike Srbije kupuju polisu zdravstvenog osiguranja u trajanju od 5 mjeseci (da bismo simulirali stvarni vremenski period), pri čemu se osiguravajuća kuća obavezuje da će inficiranim osiguranicima svaki mjesec isplaćivati nadoknade za hospitalizaciju u vrijednosti od 10,000 RSD. Recimo da obaveze po osnovu osiguranja prestaju nakon smrti osiguranika. Opisani scenario omogućuje da nivo benefičijske rezerve na kraju posmatranog perioda iznosi $V(4) = 0.256977$, što dalje implicira da bi svaki preživjeli osiguranik dobio nagradu u visini od 2,569.77 RSD.

2.1.2 SIS model

Funkciju benefičiske rezerve $V(t)$ možemo primijeniti i u slučaju SIS modela. Oblik date funkcije u velikoj mjeri zavisi od odnosa *stope infekcije* β i *stope oporavka* α , ali i od intervala kom pripada *stopa premje* π . U naredne dvije leme ćemo se osvrnuti na ovu povezanost (za više informacija pogledati rad [3]).

Lema 2.6. ([3]) (*Monotonost*)

Pretpostavimo da je stopa infekcije β veća od stope oporavka α , odnosno da važi $\beta > \alpha$. Tada,

- (1) $V(t)$ je **neopadajuća** na intervalu $\pi \in \left[\frac{1}{s_\infty} - 1, \infty\right)$ i **nerastuća** na intervalu $\pi \in \left(-\infty, \frac{1}{s_\infty} - 1\right)$, pri čemu je $s_0 > \frac{\alpha}{\beta}$;
- (2) $V(t)$ je **neopadajuća** na intervalu $\pi \in \left[\frac{1}{s_0} - 1, \infty\right)$ i **nerastuća** na intervalu $\pi \in \left(-\infty, \frac{1}{s_0} - 1\right)$, pri čemu je $s_0 \leq \frac{\alpha}{\beta}$.

Lema 2.7. ([3]) (*Konveksnost i konkavnost*)

Ako je stopa infekcije β veća od stope oporavka α , odnosno ako važi je $\beta > \alpha$, onda:

- (1) $V(t)$ je **konkavna** na intervalu $\pi \in [-1, \infty)$ i **konveksna** na intervalu $\pi \in (-\infty, -1)$, pri čemu je $s_0 > \frac{\alpha}{\beta}$;
- (2) $V(t)$ je **konveksna** na intervalu $\pi \in [-1, \infty)$ i **konkavna** na intervalu $\pi \in (-\infty, -1)$, pri čemu je $s_0 \leq \frac{\alpha}{\beta}$.

Dokaz. ([3]) Lema 2.7 je posljedica same definicije funkcije rezerve, stoga je konveksnost (konkavnost) određena uz pomoć drugog izvoda $V''(t)$.

$$V'(t) = \pi s(t) - i(t) \implies V''(t) = \pi s'(t) - i'(t)$$

Koristeći jednakosti (8) i (9) dobijamo sledeći izraz:

$$\begin{aligned} V''(t) &= \pi(-\beta si + \alpha i) - (\beta si - \alpha i) \\ &= \pi i(-\beta s + \alpha) + i(-\beta s + \alpha) \\ &= (\pi + 1)i(-\beta s + \alpha). \end{aligned}$$

Dakle, posmatrajući navedeni izraz za početnu vrijednost $s(0) = s_0$, dobijamo intervale naznačene u formulaciji leme: (1) i (2). Konveksnost i konkavnost jedinstveno slijede na osnovu utvrđenih intervala.

□

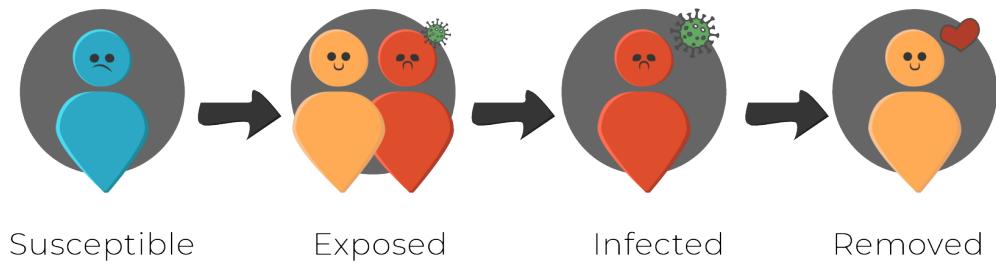
2.2 Optimalna premijska stopa u povezanom SEIR modelu

U prethodnim poglavljima, pažnju smo usmjerili na jednostavne KM, koji čine osnovu za dalji razvoj u okviru futurističke oblasti istraživanja dinamike širenja bolesti i njenog uticaja na osiguranje. Nasuprot tome, u ovom poglavlju akcenat ćemo staviti na daleko primjenjiviji model koji u svojoj realizaciji uzima u obzir *migracione tokove*²⁵ i *vakcinaciju stanovništva*. Drugim riječima, proučavaćemo deterministički i stohastički **SEIR** model, u cilju određivanja *optimalne premijske stope*. Štaviše, analiziraćemo kako program vakcinacije utiče na troškove osiguranja, upoređujući uštede u okviru naknada i izdatke uzrokovane vakcinacijom. Istraživanje ovako konstruisanog modela, od velikog je značaja u razumijevanju ključnih tačaka tokom napredovanja epidemije ili pandemije, što može značiti utvrđivanje *optimalne strategije vakcinacije* koja bi zaustavila dalju ekspanziju i ograničila ekonomske troškove. Kao krajnji rezultat, navešćemo jasne pokazatelje različitosti implementacije determinističkog i stohastičkog modela, a potom ćemo odrediti *osnovni reproduktivni broj* R_0 za dva povezana SEIR centra.

Naime, dvije vodeće struje koje enormno utiču na formiranje **optimalne premijske stope** su *optimalna strategija alokacije vakcina* i *zdravstveni status posmatrane populacije*. Primjetno je da su vakcinacija i zdravstveno stanje svakog pojedinca u žiži intresovanja kako domaćih, tako i stranih medija. Međutim, ključnu ulogu u rješavanju globalnih zdravstvenih izazova preuzima **SZO** kao renomirano koordinacijsko tijelo.

²⁵Migracioni tokovi odnose se na broj migranata koji ulaze ili napuštaju datu zemlju tokom određenog vremenskog perioda (priliv i odliv stanovništva). Podaci o migracionim tokovima su od suštinskog značaja za utvrđivanje globalnih migracionih obrazaca i načina na koji unutrašnje politike matičnih zemalja i konačnih odredišta mogu biti povezane sa posmatranim kretanjima populacije.

Defakto, aktuarska struka zahtjeva efikasna djelovanja realizovana u što kraćem vremenskom periodu, koja posljedično uticaj istaknutih faktora svode na minimum. Podstaknuti navedenim uslovima, u nastavku rada izložićemo gore pomenuti deterministički i stohastički SEIR model *sa povezanim centrima*.



Slika 20. Klase SEIR modela

Kako bismo što prirodnije opisali situaciju iz svakodnevnog života, model ćemo analizirati pod sledećim okolnostima:

- Kao pripadnik grupe KM, SEIR model razlikuje četiri klase (ilustrovano na slici 20):
 - Susceptible*** ili *Osjetljivi (S)*
 - Exposed*** ili *Izloženi (E)*
 - Infected*** ili *Inficirani (I)*
 - Removed*** ili *Oporavljeni (R)*

Klase se definišu saglasno prethodno izloženim KM (SIR, SIS i SEIRD).

- Bitni pokazatelji koji geopolitički utiču na formiranje optimalne premjiskske stope su **migracioni tokovi**. Uvrštavanje ovih trendova, funda-

mentalno će doprinijeti stvaranju realnog okruženja u okviru kog posmatramo ponašanje populacije tokom epidemije ili pandemije. Razmatraćemo samo konstantne migracione tokove vremenskog perioda za kog testiramo model.

- C. Aludirajući na realnu sliku u kojoj stanovništvo snosi troškove epidemije, bilo kroz poreski sistem u okviru centralizovanog programa zdravstvene zaštite ili direktno, kupujući zdravstveno osiguranje, razmotrićemo situaciju u kojoj se pripadnici klase *Osjetljivih* odlučuju za plaćanje premije i ostvarivanje pogodnosti polise zdravstvenog osiguranja. S tim u vezi, pretpostavitićemo da nakon početka epidemije, osiguravajuća kuća sprovodi politiku kojom se obavezuje da će inficiranom pojedincu omogućiti potrebnu vakcinaciju ili izdati obavezno produženje trenutne polise zdravstvenog osiguranja koja pokriva buduće troškove u slučaju neophodnog bolničkog liječenja.
- D. Aktuarska matematika nudi brojne *principle premije* koji određuju premiju polise zdravstvenog osiguranja (*Princip varijanse*²⁶, *Ešerov princip*²⁷ i mnogi drugi). Mi ćemo se opredijeliti za **Osnovni princip ekvivalentcije**²⁸ (OPE), koji glasi:

$$E[\text{beneficijski rashod}] = E[\text{premijski prihod}].$$

²⁶Princip varijanse (eng. *The variance principle*) koji je izložen u radu [14], formulisan je na sledeći način: $\Pi = E(X) - \alpha \text{Var}(X)$, za $\alpha > 0$, gdje je Π premija koju plaća osiguranik i X slučajna promjenljiva koja opisuje iznos štete.

²⁷Ešerov princip (eng. *The Esscher principle*) koji je takođe izložen u radu [14], formulisan je na sledeći način: $\Pi = E(Y)$, $Y = \frac{X e^{hX}}{E(e^{hX})}$, za $h > 0$, pri čemu je h faktor opterećenja i Y transformacija slučajne promjenljive X .

²⁸Princip ekvivalentcije (eng. *The basic equivalence principle*) odnosi se na jednakost uplate i isplate svedenih na isti vremenski rok.

E. Ono što posebno ističe ovaj model u odnosu na već predstavljene KM, jeste postojanje *povezanih centara*. Pod pojmom *centar* podrazumijevamo gradove, države, zdravstvene ustanove i slično, dok se njihova povezanost odražava u vidu migracija iz jednog u drugi posmatrani centar, što posljedično utiče na optimalnu strategiju alokacije dostupnih zaliha vakcina.

2.2.1 Deterministički SEIR model sa povezanim centrima

2.2.1.1 Povezani SEIR model

Povezani **SEIR** model sa n centara i konstantnim migracionim tokovima definisan je pomoću sledećeg SDJ:

$$S'_i = -\frac{\beta_i}{N_i} S_i I_i - \sum_{j \neq i} k_{ij} S_i + \sum_{j \neq i} k_{ji} S_j \quad (38)$$

$$E'_i = \frac{\beta_i}{N_i} S_i I_i - \sum_{j \neq i} k_{ij} E_i + \sum_{j \neq i} k_{ji} E_j - \gamma E_i \quad (39)$$

$$I'_i = \gamma E_i - \delta_i I_i - \sum_{j \neq i} l_{ij} I_i + \sum_{j \neq i} l_{ji} I_j \quad (40)$$

$$R'_i = \delta_i I_i - \sum_{j \neq i} k_{ij} R_i + \sum_{j \neq i} k_{ji} R_j \quad (41)$$

Početni uslovi: $S_i(0) = S_{i,0}$, $E_i(0) = E_{i,0}$, $I_i(0) = I_{i,0}$, $R_i(0) = 0$, gdje $i = 1, 2, \dots, n$.

Prateći metodološki pristup, navodimo kliničku interpretaciju parametara sadržanih u SDJ (38)-(41):

β_i je *stopa infekcije*;

γ je *stopa transmisije* ili *stopa napredovanja* iz klase E u klasu I ;

δ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, jeste *stopa oporavka*;

k_{ij} su *migracione stope* koje odgovaraju onim pripadnicima klase *Osjetljivih, Izloženih i Oporavljenih* koji migriraju iz i -tog u j -ti centar;

l_{ij} su *migracione stope* koje odgovaraju onim pripadnicima klase *Inficiranih* koji migriraju iz i -tog u j -ti centar;

$S_{i,0}$, $E_{i,0}$, $I_{i,0}$ i $R_{i,0}$ su *inicijalni brojevi* osjetljivih, izloženih, inficiranih i oporavljenih članova koji se nalaze u i -tom centru, respektivno.

Veličinu populacije u i -tom centru definišemo na sledeći način:

$$N_i(t) = S_i(t) + E_i(t) + I_i(t) + R_i(t).$$

Shodno prethodnim modelima, veličina ukupne populacije ostaje konstantna tokom čitavog perioda posmatranja, odnosno, matematičkim simbolima zapisano:

$$N \equiv N(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t).$$

U nastavku ćemo navesti još četiri parametra koji su nam od presudnog značaja za dalje analiziranje SEIR modela:

- $T_e = \frac{1}{\delta_i}$ je *prosječna dužina trajanja infekcije* u klasi I_i prije oporavka zaraženog i njegovog prelaska u klasu R_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

- $T_l = \frac{1}{\gamma}$ je prosječan period inkubacije.
- *Osnovni reproduktivni broj* R_0 , slijedstveno prethodnim definicijama, označava prosječan broj osjetljivih članova populacije koje novoprdošla zaražena osoba može da zarazi. Na samom kraju ovog poglavlja prikazaćemo način izračunavanja broja R_0 uz pomoć „*next-generation*“ matične metode.
- Ključni parametar ovog modela, T , predstavlja *vremenski trenutak* kada epidemija ili pandemija ulazi u svoju završnicu i prestaje da postoji. Kao što smo već naglasili kod stohastičkog SIR modela (odjeljak 1.2), ovaj parametar možemo tumačiti i kao prvi trenutak u kom više nema inficiranih pojedinaca u populaciji. Međutim, ako pokušamo da riješimo SDJ (38)-(41) koristeći integraciju, kao opštepoznati matematički aparat, dolazimo do zaključka da su sva *netrivijalna rješenja* datog sistema isključivo *eksponencijalnog karaktera*. Drugim riječima, nikada ne možemo dobiti nula inficiranih pripadnika populacije kao netrivijalno rješenje. Prirodno je pretpostaviti da ukoliko imamo manje inficiranih od određene vrijednosti, smatraćemo da je epidemija ili pandemija iskorijenjena. Stoga ćemo koristiti parametar θ kao *graničnu vrijednost* koja označava procenat živuće populacije dovoljan za okončanje epidemije ili pandemije. Dakle, parametar T određujemo sledećom formulom:

$$T = \inf \left\{ t : \sum_{i=1}^n [I_i(t) + E_i(t)] < \theta N \right\}. \quad (42)$$

U procesu realizacije osnovne ideje *određivanja optimalne premijske stope* π pomoću OPE, ključne komponente potrebne za njeno izračunavanje će biti **vrijeme infektivnosti** i **vrijeme osjetljivosti**. Našu pozornost ćemo prevashodno usmjeriti na vrijeme infektivnosti, a potom ćemo reći nešto

više i o vremenu osjetljivosti.

2.2.1.2 Vrijeme infektivnosti

Vrijeme infektivnosti (eng. *the infectivity time*) koristimo u svrhu računanja *ligeve strane* izraza za OPE.

Polazimo od funkcije $A_i(T)$ koja opisuje *ukupan broj izgubljenih radnih dana* tokom epidemije ili pandemije u i -tom centru, a definisana je na sledeći način:

$$A_i(T) = \int_0^T I_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Datu funkciju možemo tumačiti i kao površinu ispod grafika funkcije $I_i(t)$, koja nam pomaže u izračunavanju medicinskih troškova neophodnih za zbrinjavanje inficiranih pojedinaca.

Kako bismo stekli jasnu sliku o stanju u kom se nalazi ukupna populacija, uzećemo u obzir svih n centara i definisaćemo funkciju A_T kao:

$$A_T \equiv \sum_{i=1}^n A_i(T) = \sum_{i=1}^n \int_0^T I_i(t) dt, \quad (43)$$

koja označava *ukupan broj izgubljenih radnih dana* tokom epidemije ili pandemije ako posmatramo kompletну mrežu (svih n centara).

Da bismo inkorporirali vremensku distancu, pridružujemo *diskontni faktor* funkciji A_T . Drugim riječima, procijenićemo troškove liječenja za članove klase *Inficiranih* uz pomoć *dnevne diskontne stope* σ . Dakle, funkcija A_T određena izrazom (43) sada ima oblik:

$$A_T^\sigma = \sum_{i=1}^n \int_0^T e^{-\sigma t} I_i(t) dt. \quad (44)$$

Prethodno definisana funkcija A_T^σ predstavlja **vrijeme infektivnosti** našeg SEIR modela.

2.2.1.3 Vrijeme osjetljivosti

S druge strane, vrijeme osjetljivosti (eng. *the susceptibility time*) nam pruža informacije o količini prikupljenih premija tokom trajanja epidemije ili pandemije, uplaćenih od strane pripadnika klase *Osjetljivih* i klase *Izloženih*. Premije pristižu u osiguravajuću kompaniju sa optimalnom premijskom stopom π koju ćemo opsežno razmotriti u narednom odjeljku. Za razliku od vremena infektivnosti, vrijeme osjetljivosti primjenjujemo za računanje *desne strane* izraza za OPE.

Po uzoru na prethodni odjeljak u kom smo pažnju usmjerili na vrijeme infektivnosti, dajemo taksativan prikaz funkcija korišćenih u svrhu određivanja vremena osjetljivosti.

Funkcija $B_i(t)$ opisuje *ukupan broj premija plaćenih od strane osjetljivih i izloženih članova populacije* tokom trajanja epidemije ili pandemije u i -tom centru. Definisana je na sledeći način:

$$B_i(T) = \int_0^T [S_i(t) + E_i(t)] dt, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Analogno, formulisaćemo funkciju B_T kao:

$$B_T \equiv \sum_{i=1}^n B_i(T) = \sum_{i=1}^n \int_0^T [S_i(t) + E_i(t)] dt, \quad (45)$$

koja predstavlja *ukupan broj premija plaćenih od strane osjetljivih i izloženih članova populacije* tokom trajanja epidemije ili pandemije ako posmatramo sveobuhvatnu mrežu.

Naposljetu, uvodeći *dnevnu diskontnu stopu* σ , dobijamo **vrijeme osjetljivosti** kao funkciju b_T^σ :

$$B_T^\sigma = \sum_{i=1}^n \int_0^T e^{-\sigma t} [S_i(t) + E_i(t)] dt. \quad (46)$$

2.2.1.4 Određivanje optimalne premijske stope π

Osnovni princip ekvivalencije (OPE) je nosilac glavne uloge u određivanju optimalne premijske stope π . Shodno tome, analiziraćemo tri osnovne komponente potrebne za izračunavanje željene stope.

Prva komponenta odnosi se na beneficije koje osiguravajuća kuća isplaćuje zaraženim članovima populacije po *konstantnoj stopi* c_1 . Zatim, druga komponenta determiniše *paušalnu sumu*²⁹ u iznosu c_2 uplaćenu svakom pojedincu koji je postao član klase *Operavljenih* (stekao imunitet). Poslednja, treća komponenta odražava *zalihe vakcina* ν koje osiguravajuća kuća pohranjuje sa ciljem obezbjeđivanja doza neophodnih za imunizaciju zaraženih osiguranika, pri čemu cijena svake jedinice iznosi c_3 .

Po uzoru na rad [15]³⁰, pretpostavićemo da se sva potraživanja izmiruju do trenutka T , kada epidemija ili pandemija doživljava svoj konačan krah. Dakle, **ukupne očekivane obaveze** osiguravajuće kuće su izražene sledećom formulom:

$$E[\text{beneficijski rashod}] = c_1 A_T^\sigma + c_2 e^{-\sigma T} \sum_{i=1}^n R_i(T) + c_3 \nu. \quad (47)$$

²⁹Paušalno je termin latinskog porijekla (lat. *pauschale*), sa značenjem: prosječno, otprilike, iznos koji se plaća na osnovu procjene i prosječnog predračuna ili na osnovu prethodnog perioda.

³⁰U ovom radu autori analiziraju LMNV primjenjen na scenario širenja zarazne bolesti u oblasti jednog centra, gdje se razmatraju različiti ishodi: opšta i fatalna epidemija, slučaj sa eksponencijalno zavisnim stopama i dr.

Napomena 2.8. Značajno je uočiti da prethodna formula važi i za deterministički model, jer se posmatrani benefičijski rashodi u ovom slučaju poklapaju sa njihovim očekivanim vrijednostima.

S druge strane, osiguravajuća kuća prikuplja premije po konstantnoj stopi π , uplaćene od strane osjetljivih i izloženih članova populacije sve do njihovog potpunog ozdravljenja ili do trenutka u kom epidemija ili pandemija biva okončana. Stoga, **ukupni očekivani prihodi** osiguravajuće kuće su utvrđeni sledećom formulom:

$$E[\text{premijski prihod}] = \pi B_T^\sigma. \quad (48)$$

Napomena 2.9. Na osnovu prethodne formule, donosimo zaključak da je mehanizam plaćanja premije u korist dobijanja neophodne bolničke njege, „*pošten*“ prema korisnicima osiguranja. Drugim riječima, primjetno je da premije plaćaju samo pripadnici klase *Osjetljivih* i klase *Izloženih*. Ovaj trend nije prisutan u stvarnom životu, u kom protivrječno zastupljenoj politici, premije plaćaju svi članovi posmatrane populacije tokom čitavog perioda trajanja epidemije ili pandemije.

Najzad, koristeći OPE i formule (47) i (48) dobijamo izraz za određivanje **optimalne premijske stope π** :

$$E[\text{benefičijski rashod}] = E[\text{premijski prihod}]$$

$$\Leftrightarrow c_1 A_T^\sigma + c_2 e^{-\sigma T} \sum_{i=1}^n R_i(T) + c_3 \nu = \pi B_T^\sigma,$$

odakle slijedi da je:

$$\pi = \frac{1}{B_T^\sigma} \left(c_1 A_T^\sigma + c_2 e^{-\sigma T} \sum_{i=1}^n R_i(T) + c_3 \nu \right). \quad (49)$$

Napomena 2.10. Uslijed izbijanja pandemije prouzrokovane koronavirusom, došlo je do narušavanja povjerenja i integriteta u okviru sektora osiguranja. Mnoge osiguravajuće kompanije su bile onemogućene da isplate novonastale štete i izmire svoja dugovanja. Uslijedili su brojni sudski postupci, kao odgovor na aktuelnu kriznu situaciju. S druge strane, advokatske kancelarije koje su zastupale interes sektora osiguranja, apelovali su na državne i međunarodne institucije da zakonom ograniče zahtjeve preduzeća u skladu sa kojim bi nadoknadili profesionalne gubitke praćene vanrednim mjerama. Zaista, Majkl Krejn (eng. *Michael Crane*), advokat osiguravajuće kompanije **QBE QBE.AX³¹**, izjavio je tokom jednog od saslušanja da je pandemija u određenoj razmjeri, bila predviđena, ali da niko nije očekivao uvođenje mjera u vidu blokada i restrikcija koje su zaustavile cijelokupan razvoj, kako na državnom, tako i na svjetskom nivou. Ovo je samo jedan od jasnih pokazatelja koji svjedoče narušavanju **Osnovnog principa ekvivalencije**. Drugim riječima, premije koje su naplaćivane od strane osiguravajućih društava, nisu bile dovoljne za postizanje uspješnog poslovnog rezultata, jer su očekivani rizici prerasli u zaprepašćujući katastrofu. Na ovaj način, koronavirus je uticao na donošenje odluka u okviru osiguranja, koje su se do momenta izbijanja pandemije, bazirale samo na aktuarskoj matematici. Za više informacija, pogledati rad [16].

³¹QBE je međunarodna osiguravajuća i reosiguravajuća kompanija, sa sjedištem u Sidneju. Njena priča počinje u oktobru 1886. godine, kada su mladi Škoti, Džejms Berns (eng. *James Burns*) i Robert Filip (eng. *Robert Philp*) osnovali kompaniju pod nazivom *The North Kueensland Insurance Compani Limited* (KI). Kompanija posluje sa ciljem pružanja rješenja za upravljanje rizicima, kako bi svojim korisnicima omogućila otporniju i sigurniju budućnost.

2.2.1.5 Optimalna strategija alokacije vakcina - deterministički model

Vakcina stimuliše imuni sistem u proizvodnji antitijela koja štite vakcinisanu osobu od određene bolesti. Stoga kažemo da je *imunizacija* dokazana, isplativa strategija u borbi protiv zaraznih bolesti, koja djelotvorno doprinosi zaštiti svakog pojedinca. Ako je većina populacije vakcinisana, svi njeni članovi će biti zaštićeni, uzimajući u obzir i one pripadnike koji nisu primili vakcinu.

Naime, da bi se osigurao kolektivni imunitet – imunitet cijele populacije, neophodno je da bude zastupljen trend *tradicionalno visoke pokrivenosti imunizacijom*. Drugim riječima, ukoliko dođe do pojave opadanja stope pokrivenosti imunizacijom, uslijed širenja dezinformacija i negativnih glasina koje doprinose formiranju ličnih stavova svakog pojedinca, neuspjeh u ovoj borbi je zagarantovan.

U cilju obezbjeđivanja uspjeha u bici protiv epidemije ili pandemije, osiguravajuće kuće skladište *zalihe vakcina* ν potrebne za imunizaciju pojedinih klijenata. Izuzetno je važno donijeti pravovremenu i promišljenu odluku o *optimalnoj raspodjeli dostupnih vakcina* između posmatranih centara. Međutim, u stvarnom životu vakcinacija nije opšteprihvaćena među svim članovima populacije. Pojedinci koji smatraju da je vakcina nedovoljno ispitana, kao posljedica njenog skorašnjeg otkrića, ne žele da se podvrgnu vakcinaciji i time naruše zdravlje.

Imajući u vidu sve navedene okolnosti, transformisaćemo SEIR model (38)-(41) tako što ćemo posmatrati *alokaciju vakcina* kao dodatnu promjenljivu.

Neka je ω_i udio zaliha vakcina dodijeljen i -tom centru, $i = 1, 2, \dots, n$. Dakle, alokaciju vakcina ćemo predstaviti kao n -torku $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, pri čemu je $\omega_i \geq 0$ i važi $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 1$.

Štaviše, analiziraćemo realnu situaciju u kojoj proces vakcinacije ostvaruje postepeni napredak. S tim u vezi, prepostavljamo da je a_i stopa vakcinacije u i -tom centru, $i = 1, 2, \dots, n$.

Shodno tome, SEIR model (38)-(41) sa alokacijom vakcina $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ poprima oblik:

$$S'_i = -\frac{\beta_i}{N_i} S_i I_i - k_{ij} S_i + k_{ji} S_j - a_i \cdot 1_{(V_i > 0)} \cdot 1_{(S_i > 0)} \quad (50)$$

$$E'_i = \frac{\beta_i}{N_i} S_i I_i - k_{ij} E_i + k_{ji} E_j - \gamma E_i \quad (51)$$

$$I'_i = \gamma E_i - \delta_i I_i - l_{ij} I_i + l_{ji} I_j \quad (52)$$

$$R'_i = \delta_i I_i - k_{ij} R_i + k_{ji} R_j \quad (53)$$

$$W'_i = a_i \cdot 1_{(V_i > 0)} \cdot 1_{(S_i > 0)} - k_{ij} W_i + k_{ji} W_j \quad (54)$$

$$V'_i = -a_i \cdot 1_{(V_i > 0)} \cdot 1_{(S_i > 0)} \quad (55)$$

Početni uslovi: $S_i(0) = S_{i,0}$, $E_i(0) = E_{i,0}$, $I_i(0) = I_{i,0}$, $R_i(0) = 0$, $W_i(0) = 0$, $V_i(0) = \omega_i \nu$, gdje $i = 1, 2, \dots, n$.

Funkcija $\mathbf{1}(\cdot)$ je *indikator funkcija*³² korišćena zbog jednostavnijeg zapisa, $\mathbf{V}_i = \omega_i \boldsymbol{\nu}$ je preostala količina vakcina dostupna u centru i i \mathbf{W}_i je broj vakcinisanih pojedinaca u centru i , pri čemu $i = 1, 2, \dots, n$.

³²Indikator funkcija ili karakteristična funkcija je funkcija definisana na skupu X , koja odražava pripadnost elemenata skupu $A \subseteq X$. Matematičkim simbolima zapisano:

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x \in A \\ 0 & \text{za } x \notin A \end{cases}.$$

Napomena 2.11. Funkciju $1(\cdot)$ u slučaju V_i i S_i definišemo na sledeći način:

$$1_{(V_i>0)} = \begin{cases} 1 & \text{za } V_i > 0 \\ 0 & \text{za } V_i \leq 0 \end{cases}$$

$$1_{(S_i>0)} = \begin{cases} 1 & \text{za } S_i > 0 \\ 0 & \text{za } S_i \leq 0 \end{cases}$$

Jedan od mehanizama za određivanje optimalne alokacije vakcina koja bi rezultovala smanjenjem premije za osjetljive i izložene članove populacije, podrazumijeva minimiziranje optimalne premijske stope π (49). Da bi omogućile obaveznu zdravstvenu zaštitu za svakog pripadnika posmatrane populacije, osiguravajuće kuće obezbjeđuju niže premije polisa zdravstvenog osiguranja. Formalnije, za date zalihe vakcina ν i ostale parametre modela (50)-(55), raspoređujemo vakcine na način da minimiziramo stopu premije zdravstvene zaštite:

$$\pi^* = \min_{\substack{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n): \omega_i \geq 0, \\ \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 1}} \frac{1}{B_T^\sigma} \left(c_1 A_T^\sigma + c_2 e^{-\sigma T} \sum_{i=1}^n R_i(T) + c_3 \nu \right). \quad (56)$$

Kao alternativno rješenje, možemo koristiti metod smanjenja troškova liječenja. Željeni cilj postižemo redukcijom broja izgubljenih radnih dana tokom epidemije ili pandemije, što je više moguće. Prema tome, optimalna alokacija vakcina je određena na način da minimiziramo funkciju A_T (43):

$$A_T^* = \min_{\substack{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n): \omega_i \geq 0, \\ \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 1}} \sum_{i=1}^n \int_0^T I_i(t) dt. \quad (57)$$

Napomena 2.12. Alokacija vakcina $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ utiče na promjenu broja članova klase *Osjetljivih* (prikazano u (50)), što se posljedično odražava na A_T^σ , B_T^σ i $R_i(T)$. S druge strane, bitno je primijetiti odstupanje u broju populacije svakog posmatranog centra. Naime, ukoliko se određenom centru

dodijeli veća količina vakcina u odnosu na broj njegovih pripadnika, evidentirani višak treba preusmjeriti u preostale centre. Takođe, zanimljivo je uočiti različitost između dvije tačke gledišta „*optimalnosti*“:

- (56) je više naklonjena finansijskoj zaštiti, u smislu smanjenja premija za osjetljive i izložene članove populacije;
- (57) je usresređena na smanjenje troškova liječenja, što doprinosi povećanju zdravstvene pokrivenosti i sprečavanju daljih oboljenja svih pripadnika populacije.

2.2.2 Stohastički SEIR model sa povezanim centrima

Stohastički SEIR model, kao što nam iskustvo nalaže, predstavlja prirodno proširenje *determinističkog SEIR modela sa povezanim centrima*. Da bismo uspostavili vezu između determinističkog i stohastičkog pristupa, označićemo sa $S(t)$ broj osjetljivih, $E(t)$ broj izloženih, $I(t)$ broj inficiranih i $R(t)$ broj oporavljenih članova populacije u trenutku t , gdje $t \in [0, \infty)$. Dakle, po uzoru na odjelak 1.2, posmatraćemo **lanac Markova sa neprekidnim vremenom** (LMNV), pri čemu navedene diskretne slučajne promjenljive ostvaruju *skup stanja* $\{0, 1, \dots, N\}$. Shodno tome, model posjeduje **Markovsko svojstvo**, što u epidemiološkom smislu označava povezanost između broja osjetljivih³³ u datom trenutku u odnosu na broj osjetljivih u prethodnom trenutku. Drugim riječima, ukoliko posmatramo proizvoljan vremenski interval $[t, t + \Delta t]$, broj osjetljivih u trenutku $t + \Delta t$ zavisi **samo** od broja osjetljivih članova populacije posmatranih u trenutku t , zanemarujući trenutke koji su prethodili trenutku t .

³³Uočena povezanost važi i u slučaju broja izloženih, inficiranih i oporavljenih članova populacije.

Napomena 2.13. U cilju simuliranja realne epidemije, razmotrićemo okolnosti u kojima broj zaraženih zavisi samo od broja kontakata sa zaraženim pojedincima, tj. uzimamo u obzir samo *stopu infekcije* β . Stoga nećemo proučavati situacije u kojima postoji mogućnost zaraze iz drugih izvora (voda, nehigijenski uslovi, namjerno oslobođanje bolesti itd). Analogno, *stopa oporavka* α zavisi samo od zdravstvenog stanja zaraženog pojedinca i sposobnosti njegovog imunog sistema da se izbori sa uzročnikom bolesti.

Napomena 2.14. Stohastički modeli koji su razvijeni u medicinske svrhe, oslanjaju se na pretpostavku da je tokom širenja infekcije među stanovništvom prisutan *mali broj inicijalno zaraženih pojedinaca*. Ako je zastupljen ovakav trend, infekcija može biti prirodno potisnuta. Dakle, u stvarnosti širenje patogenih mikroorganizama neće usloviti izbijanje epidemije ili pandemije, ukoliko je izvorno ostvaren mali broj inficiranih članova posmatrane populacije. Međutim, deterministički modeli opisuju evoluciju epidemije u *velikim populacijama sa visokom zastupljenosti inficiranih članova*. Naime, osmišljen je algoritam koji spaja navedena dva pristupa (stohastički i deterministički), dostupan u radu [17].

2.2.2.1 Lanac Markova u slučaju jednog centra

Za razliku od **vjerovatnoća prelaza** izloženih u odjeljku 1.2 (definicija 1.2), analizu stohastičkog SEIR modela ćemo sprovesti pomoću **stopa (brzina) prelaza**, čiju definiciju navodimo u nastavku.

Definicija 2.1. ([18]) *Stopa prelaza (brzina prelaza) je jedna od osnovnih osobina stohastičkog procesa sa više stanje (kao što je lanac Markova), koja mjeri vjerovatnoću da sistem pređe iz jednog u drugo stanje u beskonačno malom vremenskom intervalu.*

Formalnije, stopu prelaza definišemo na sledeći način:

Neka je \mathbf{a}_{ij} definisana sledećim izrazom:

$$a_{ij} = \alpha_i \cdot p_{ij}, \quad \forall i \neq j.$$

Pošto je α_i brzina kojom stohastički proces napušta stanje i , dok je p_{ij} vjerovatnoća prelaza iz i -tog u j -to stanje, slijedi da je \mathbf{a}_{ij} stopa prelaza (brzina prelaza) kojom stohastički proces (u našem slučaju lanac Markova) prelazi iz stanja i u stanje j .

Napomena 2.15. Naime, za beskonačno mali vremenski interval $[t, t + \Delta t]$ postojana je veza između vjerovatnoće prelaza p_{ij} i stope prelaza a_{ij} data sledećom formulom:

$$p_{ij}(t + \Delta t, t) = 1 - e^{-a_{ij}\Delta t}.$$

Opisana veza je posljedica činjenice da slučajna promjenljiva koja odražava vrijeme zadržavanja u datom stanju, ima **eksponencijalnu raspodjelu** sa parametrom a_{ij} (detaljnije u radu [18]).

Napomena 2.16. U kontekstu stope prelaza, Markovsko svojstvo interpretiramo kao *nezavisnost* posmatrane stope prelaza od onog što se desilo u prošlosti. Dakle, brzina prelaza zadržava svojstvo da budućnost ne zavisi od prošlosti, koje je karakteristično za vjerovatnoće prelaza.

U nastavku rada navodimo tabelarni prikaz stopa prelaza stohastičkog modela sa konstantnim koeficijentima β , γ i δ , uzimajući u obzir samo jedan centar.

Događaj	Stopa	Uslov
$S \rightarrow S - 1, E \rightarrow E + 1$	$\frac{\beta}{N}SI$	$S > 0$
$E \rightarrow E - 1, I \rightarrow I + 1$	γE	$E > 0$
$I \rightarrow I - 1, R \rightarrow R + 1$	δI	$I > 0$
Stanje apsorpcije	0	$E = 0, I = 0$

Tabela 7. Stope prelaza LMNV u slučaju jednog centra

Dalje, označimo sa t_j vrijeme j -og skoka (promjene stanja), a potom sa s_j odgovarajuće vrijeme čekanja (vrijeme između j -og i $(j-1)$ -og skoka ili vrijeme zadržavanja u datom stanju).

Prethodno pomenuti parametar T , sa stohastičkog stanovišta, predstavlja slučajnu promjenljivu koja zavisi od dinamike promjene posmatrane lančane strukture analiziranog SEIR modela. Stoga, **kraj epidemije** definisemo kao:

$$T = \inf \{t : I(t) = 0, E(t) = 0\}.$$

Napomena 2.17. Kažemo da je stanje x_j **apsorbujuće** ukoliko važi da je vjerovatnoća prelaza iz datog stanja x_j u identično stanje x_j jednaka 1, tj. $p_{jj} = 1$. Drugim riječima, *apsorbujuća stanja* su ona stanja u kojima se sistem konstanto zadržava.

Naredni algoritam simulira lanac Markova u slučaju jednog centra:

Algoritam 2: Simulacija lanca Markova u slučaju jednog centra

input: $S_0, E_0, I_0, \beta, \delta, \gamma$

output: realizacija jednog lanca Markova

Korak 1: $S \leftarrow S_0, E \leftarrow E_0, I \leftarrow I_0, R \leftarrow 0;$

Korak 2: $N \leftarrow S + E + I + R;$

Korak 3: $t_0 \leftarrow 0;$

Korak 4: $j \leftarrow 1;$

Korak 5: **while** ($I > 0$ ili $E > 0$) **do**

generišemo: $s_j \sim \text{Exp}(\frac{\beta}{N}SI + \gamma E + \delta I);$

$t_j \leftarrow t_{j-1} + s_j;$

generišemo: $u_j \sim \text{Unif}(0,1);$

računamo vjerovatnoće:

$$\begin{aligned} p_1 &\leftarrow \frac{\beta SI/N}{\beta SI/N + \gamma E + \delta I} \\ p_2 &\leftarrow \frac{\gamma E}{\beta SI/N + \gamma E + \delta I} \\ p_3 &\leftarrow \frac{\delta I}{\beta SI/N + \gamma E + \delta I} \end{aligned}$$

if $u_j < p_1$ **then**

$S \leftarrow S - 1, E \leftarrow E + 1;$

else if $u_j \in [p_1, p_2)$ **then**

$E \leftarrow E - 1, I \leftarrow I + 1;$

else

$I \leftarrow I - 1, R \leftarrow R + 1;$

postavi: $j \leftarrow j + 1;$

Korak 6: Kraj epidemije je u trenutku $T \leftarrow t_j;$

Naime, osnovna ideja za razvoj Algoritma 2 sadrži obrasce potrebne za računanje svih stopa prelaza u trenutku t_j , pri čemu se vrijeme zadržavanja u datom stanju, s_j , generiše pomoću eksponencijalne raspodjele sa parametrom koji označava zbir svih stopa prelaza naznačenih u tabeli 7 (Korak 5). Potom, generišemo standardnu uniformnu slučajnu promjenljivu u_j , kako bismo utvrdili koji se događaj (iz tabele 7) odigrao. Za svaki pomenuti događaj, računa se vjerovatnoća njegove realizacije, na način da se odgovarajuća stopa prelaza podijeli sa zbirom svih stopa. U zavisnosti od odnosa slučajne promjenljive u_j i vjerovatnoća p_1, p_2, p_3 , određuje se koji se događaj zaista desio.

Konačno, u *Koraku 6* se trenutak u kom epidemija doživljava krah T poistovjećuje sa trenutkom t_j .

2.2.2.2 Lanac Markova u slučaju više centara

Osmišljavanje modela koji uzima u obzir više posmatranih centara, predstavlja svojevrsnu prekretnicu u daljem analiziranju i simuliranju realnih prilika nastalih uslijed širenja zaraznih bolesti. U ovom odjeljku, akcenat ćemo staviti na **stohastički SEIR model sa više povezanih centara**.

Budući da model sa više centara karakteriše usložnjavanje modela sa jednim centrom, primjeničemo prethodno sprovedenu analizu sa pojedinim razlikama u samoj realizaciji.

Dakle, označimo sa $S_i(t)$ broj osjetljivih, $E_i(t)$ broj izloženih, $I_i(t)$ broj inficiranih i $R_i(t)$ broj oprovljenih u i -tom centru, $i = 1, 2, \dots, n$, respektivno.

Prateći obrazac u prethodnom odjeljku, navodimo tabelarni prikaz stopa prelaza u slučaju n povezanih centara, gdje $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Dogadaj	Stopa	Uslov
$S_i \rightarrow S_i - 1, E_i \rightarrow E_i + 1$	$\frac{\beta_i}{N} S_i I_i$	$S_i > 0$
$E_i \rightarrow E_i - 1, I_i \rightarrow I_i + 1$	γE_i	$E_i > 0$
$I_i \rightarrow I_i - 1, R_i \rightarrow R_i + 1$	$\delta_i I_i$	$I_i > 0$
$S_i \rightarrow S_i - 1, S_j \rightarrow S_j + 1$	$k_{ij} S_i$	$S_i > 0, i \neq j$
$E_i \rightarrow E_i - 1, E_j \rightarrow E_j + 1$	$k_{ij} E_i$	$E_i > 0, i \neq j$
$I_i \rightarrow I_i - 1, I_j \rightarrow I_j + 1$	$l_{ij} I_i$	$I_i > 0, i \neq j$
$R_i \rightarrow R_i - 1, R_j \rightarrow R_j + 1$	$k_{ij} R_i$	$R_i > 0, i \neq j$
Stanje apsorpcije	0	$\sum_{i=1}^n I_i + \sum_{i=1}^n E_i = 0$

Tabela 8. Stopa prelaza LMNV u slučaju više centara

Analogno, kraj epidemije definišemo kao:

$$T = \inf \left\{ t : \sum_{i=1}^n [E_i(t) + I_i(t)] = 0 \right\},$$

tj. slučajna promjenljiva T označava trenutak u kom više ne egzistiraju izloženi i inficirani članovi populacije.

Prezentovani **Algoritam 2** je moguće prilagoditi modelu sa više centara. Ključna razlika je zasnovana na *dimenziji prostora stanja*. Shodno tome, uzimajući u obzir model sa više centara, naznačenu dimenziju izražavamo formulom $4n - 1$, pri čemu $4n$ odgovara istaknutoj četvorci *Osjetljivi-Izloženi-Inficirani-Oporavljeni*, dok -1 označava posmatranih n centara sa konstantnom populacijom N . Specijalno, u slučaju modela sa jednim centrom, dimezija prostora iznosi $4n - 1 = 4 - 1 = 3$.

2.2.2.3 Optimalna strategija alokacije vakcina - stohastički model

Očekivano, povećanje broja posmatranih centara zahtjeva određene promjene u formiranju *optimalne strategije alokacije vakcina*. Defakto, uvođenje dodatnih centara znatno otežava definisanje optimalne raspodjele dostupnih zaliha vakcina ν .

Premda govorimo o stohastičkom modelu, iskoristićemo prethodno dobijenu formulu (49) iz odjeljka 2.2.1.4, koju smo definisali u slučaju determinističkog modela. Razumljivo, za određivanje *optimalne premijske stope* π , u kontekstu teorije vjerovatnoće, uvodimo *srednju vrijednost* (očekivanje), na sledeći način:

$$\pi = \frac{1}{E[B_T^\sigma]} \left(c_1 E[A_T^\sigma] + c_2 \sum_{i=1}^n E[e^{-\sigma T} R_i(T)] + c_3 \nu \right). \quad (58)$$

Neka su ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$ elementi skupa \mathbb{Z} , takvi da važi $\omega_i \geq 0$ i $\sum_{i=1}^n \omega_i = \nu$. Nasuprot determinističkom modelu, u kom smo konstruisali SDJ (50)-(55), sa stohastičkog stanovišta moramo prevashodno da razjasnimo šta podrazumi-jeva optimalna alokacija vakcina. Uzimajući u obzir populaciju sa malim brojem pripadnika, analiziraćemo samo trenutnu vakcinaciju. Drugim riječima, posmatraćemo situaciju u kojoj je prisutan trenutni pad broja osjetljivih članova populacije $S_i(0)$, uslijed porasta broja vakcinisanih pojedinaca u centru i u trenutku $t = 0$, tj. $W_i(0)$.

U nastavku rada navodimo algoritam koji određuje optimalnu alokaciju vakcina u slučaju stohastičkog SEIR modela sa n povezanih centara:

Algoritam 3: Određivanje optimalne alokacije vakcina za stohastički SEIR model sa n povezanih centara

input: količina vakcine ν , funkcija $q \in \{\pi, A_T\}$, broj simulacija N_{sim}

output: optimalna alokacija vakcina ω^*

Korak 1: **forall** $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = \nu$ **do**

neka je $Q \leftarrow \vec{0}^{N_{sim} \times 1}$;

for $k \leftarrow 1$ **to** N_{sim} **do**

simuliraj k -ti lanacMarkova;

izračunaj funkciju $Q_k \leftarrow q(\text{lanacMarkova})$;

izračunaj i zapamti prosjek $Q(\omega) = N_{sim}^{-1} \sum_{i=1}^{N_{sim}} Q_k$;

Korak 2: izaberi $\omega^* \leftarrow \operatorname{argmin}_{\omega} Q(\omega)$;

Naime, Algoritam 3 generiše pseudoslučajne brojeve³⁴ koji predstavljaju sve moguće alokacije vakcina (*Korak 1*). U narednom redu se funkciji Q pridružuje inicijalna vrijednost koja je definisana *nula vektorom* dimenzije N_{sim} . Za svako $k : k = 1, 2, \dots, N_{sim}$ se vrši simulacija lanca Markova uzimajući u obzir svaku dobijenu alokaciju (ukupno N_{sim} realizacija). Potom se izračunava vrijednost funkcije q (rezultujuća optimalna stopa premije π i broj izgubljenih radnih dana A_T) za k -ti lanac Markova, te se dobijena vrijednost pridružuje k -toj koordinati vektora Q , Q_k . U pretposlednjem redu se izračunava prosjek $Q(\omega)$, na osnovu kog se konačno određuje tražena alokacija vakcina $\boldsymbol{\omega}^* = (\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \dots, \boldsymbol{\omega}_n)$ kao argument za koji se dostiže minimum.

Napomena 2.18. Algoritam 3 predstavlja jednu simulaciju *Monte Karlo metode*³⁵.

³⁴Pseudoslučajni brojevi su oni brojevi koji su generisani putem numeričkih algoritama koji deterministički stvaraju niz brojeva. Stoga, ove brojeve ne možemo u potpunosti smatrati slučajnim i nepredvidivim.

³⁵Monte Karlo metod (eng. *The Monte Carlo Method*) je metod koji označava širok spektar matematičkih problema čija se rješenja ne mogu odrediti analitički, stoga zahtjevaju primjenu slučajnih brojeva. Osnovna ideja ove metode je aproksimacija očekivane vrijednosti $E(X)$ sa aritmetičkom sredinom svih realizacija X_i , pri čemu je $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ niz slučajnih promjenljivih sa istom raspodjelom i konačnim očekivanjem. Drugim riječima, ovaj metod se bazira na *Hinčinovom zakonu velikih brojeva*.

2.2.3 Određivanje broja R_0 pomoću „next-generation“ matrične metode

Prije nego što pokažemo kako se određuje **osnovni reproduktivni broj R_0** za SDJ (38)-(41) u slučaju dva povezana centra, podsjetimo se definicija: tačke ravnoteže bez bolesti (DFE³⁶), spektralnog radijusa matrice ρ , Z oblika matrice, M -matrice i spektralne apscise matrice s .

Definicija 2.2. ([19]) Tačka ravnoteže bez bolesti ili DFE se definiše kao tačka koju karakteriše odsustvo inficiranih pojedinaca u populaciji.

Napomena 2.19. U kontekstu SDJ (38)-(41), tačku DFE definišemo kao tačku koja odražava odsustvo izloženih i inficiranih pripadnika posmatrane populacije, tj. $E_1 = E_2 = I_1 = I_2 = 0$.

Definicija 2.3. ([20]) Neka je $\sigma(A)$ **spektar kvadratne matrice A** koji predstavlja skup svih njenih karakterističnih korijena. Tada sa $\rho(A)$ označavamo **spektralni radius matrice A** kao maksimalni modul karakterističnih korijena date matrice A . Matematičkim simbolima zapisano:

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Definicija 2.4. ([20]) Za matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ kažemo da je **Z oblika** ako su joj svi vandijagonalni elementi nepozitivni. Za matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ kažemo da je **Z^+ oblika** ako su joj svi vandijagonalni elementi nepozitivni, a svi dijagonalni elementi pozitivni.

Definicija 2.5. ([20]) Matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ koja je Z oblika zove se **M matrica** ako je regularna i njena inverzna matrica je nenegativna, tj. $A^{-1} \geq 0$.

³⁶eng. *The disease-free equilibrium point*.

Definicija 2.6. ([21]) Neka je $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ i $\sigma(A)$ spektar matrice A . Dalje, neka su **spektralni realni dijelovi** matrice A realni brojevi

$$\alpha_n(A) \leq \dots \leq \alpha_1(A),$$

takvi da važi $\{\alpha_1(A), \dots, \alpha_n(A)\} = \{\operatorname{Re}(\lambda_1), \dots, \operatorname{Re}(\lambda_n)\}$. **Spektralnu apscisu matrice A** , u oznaci $\alpha_{\max}(A)$ definišemo kao najveći realan dio karakterističnih korijena matrice A . Formalno zapisano:

$$\alpha_{\max}(A) = \max\{\operatorname{Re}(\lambda_i) : \lambda_i \in \sigma(A), i = 1, 2, \dots, n\} = \alpha_1(A).$$

U nastavku rada ćemo navesti dvije dodatne definicije M matrice koja su ekvivalentna definiciji 2.5. Razlog zbog kog smo se opredijelili za naredne definicije jeste kompatibilnost sa dokazima koji slijede.

Definicija 2.7. ([22]) Neka je matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ takva da važi $A = sI - P$, gdje su I i P , jedinična i nenegativna matrica, respektivno. Razlikujemo sledeća dva slučaja:

(1) $s > \rho(P) \Leftrightarrow A$ je **regularna M matrica**;

(2) $s = \rho(P) \Leftrightarrow A$ je **singularna M matrica**.

Definicija 2.8. ([23]) Neka je matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ Z oblika i neka pritom važi da je $\alpha_{\max}(A) > 0$. U tom slučaju kažemo da je matrica A **regularna M matrica**. S druge strane, ukoliko važi da je $\alpha_{\max}(A) = 0$, zaključujemo da je matrica A **singularna M matrica**.

U narednom koraku posvetimo se određivanju broja R_0 . Naime, u dosadašnjem izlaganju smo već nekoliko puta naglasili važnost pomenutog broja. Jedna od krucijalnih karakteristika *praga imuniteta stada* je nastala

kao posljedica opservacije napredovanja zarazne bolesti u okviru populacije. S tim u vezi, razvijeni su epidemiološki modeli koji uzimaju u obzir stanje DFE, tj. stanje u kom je postojana ravnoteža bez bolesti. U nastavku rada, pokazaćemo na koji je način *asimptotska stabilnost* tačke DFE uslovljena vrijednošću osnovnog reproduktivnog broja R_0 , koristeći „*next-generation*“ matrični metod.

Neka je $x = (x_1, x_2, \dots, x_l)^T$ broj pojedinaca unutar svake posmatrane klase, gdje prvih $m < l$ klasa sadrži inficirane članove populacije. U slučaju SEIR modela, datog SDJ (38)-(41), imaćemo $x = (x_1, x_2, \dots, x_8) = (S_1, E_1, I_1, R_1, S_2, E_2, I_2, R_2)^T$, pri čemu je $m = 4$ i $l = 8$, tj. imaćemo četiri klase koje sadrže zaražene pripadnike: E_1, E_2, I_1 i I_2 . Dalje, zapišimo SDJ (38)-(41) na sledeći način:

$$\dot{x} = f(x). \quad (59)$$

Zatim, prepostavimo da postoji DEF sistema (59) i označimo ga sa \mathbf{x}_{eq} . Štaviše, ukoliko uvrstimo inicijalnu vrijednost $x_0 = (S_1(0), S_2(0), 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ u sistem (59), vidjećemo da je tačka x_0 zaista DFE pomenutog sistema.

Razmotrimo sledeće diferencijalne jednačine:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (60)$$

pri čemu je \mathcal{F}_i stopa pojavljivanja novih infekcija u klasi i (u slučaju SEIR modela sa dva povezana centra, posmatrane klase su E_1, E_2, I_1 i I_2), dok je \mathcal{V}_i stopa prelaska pripadnika jedne inficirane klase u drugu (analogno, u našem slučaju se posmatra prelazak članova klasa E_1, E_2, I_1 i I_2). Da bismo zadovoljili sve uslove, koji će nam biti neophodni u nastavku rada, pretpostavitićemo da $\mathcal{F}_i, \mathcal{V}_i \in \mathcal{C}^2$, te da je $\mathcal{F}_i = 0$, za $i = m + 1, \dots, l$.

Dakle, interpretacija funkcija \mathcal{F}_i i \mathcal{V}_i , $i = 1, 2, 3, 4$, u kontekstu SEIR

modela sa dva povezana centra, glasi:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{F}_3 \\ \mathcal{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1 S_1 I_1}{N_1} \\ \frac{\beta_2 S_2 I_2}{N_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_3 \\ \mathcal{V}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma E_1 + k_{12} E_1 - k_{21} E_2 \\ \gamma E_2 + k_{21} E_3 - k_{12} E_1 \\ -\gamma E_1 + \delta_1 I_1 + l_{12} I_1 - l_{21} I_2 \\ -\gamma E_2 + \delta_2 I_2 + l_{21} I_2 - l_{12} I_1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

Definišimo matrice \mathbf{F} i \mathbf{V} na sledeći način:

$$F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i(x_0)}{\partial x_j} \right] \quad (63)$$

$$V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i(x_0)}{\partial x_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (64)$$

U kontekstu SEIR modela sa dva povezana centra, matrice F , V i V^{-1} interpretiramo kao:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta_1 S_1(0)}{N_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_2 S_2(0)}{N_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$V = \begin{bmatrix} \gamma + k_{12} & -k_{21} & 0 & 0 \\ -k_{12} & \gamma + k_{21} & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & \delta_1 + l_{12} & -l_{21} \\ 0 & -\gamma & -l_{12} & \delta_2 + l_{21} \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma + k_{21}}{\gamma A} & \frac{k_{21}}{\gamma A} & 0 & 0 \\ \frac{k_{12}}{\gamma A} & \frac{\gamma + k_{12}}{\gamma A} & 0 & 0 \\ \frac{\gamma(\delta_2 + l_{21}) + \delta_2 k_{21} + l_{21}(k_{12} + k_{21})}{AB} & \frac{l_{21} A + \delta_2 k_{21}}{AB} & \frac{\delta_2 + l_{21}}{B} & \frac{l_{21}}{B} \\ \frac{l_{12} A + \delta_1 k_{12}}{AB} & \frac{\gamma(\delta_1 + l_{12}) + \delta_1 k_{12} + l_{12}(k_{12} + k_{21})}{AB} & \frac{l_{12}}{B} & \frac{\delta_1 + l_{12}}{B} \end{bmatrix}, \quad (67)$$

pri čemu je $A = (\gamma + k_{12} + k_{21})$, $B = (\delta_1\delta_2 + \delta_1l_{21} + \delta_2l_{12})$.

Napomena 2.20. Na osnovu epidemiološke interpretacije matrica F i V , zaključujemo da matrica F nema *nenegativnih* elemenata, dok je matrica V regularna *M matrica* (definicija 2.5). Zaista, elementi matrice F su ili nule ili $\frac{\beta_i S_i(0)}{N_i}$, $i = 1, 2$, dok su vandijagonalni elementi matrice V nepozitivni i njena inverzna matrica V^{-1} je nenegativna.

Konačno, matrica FV^{-1} se naziva „*next-generation*“ matrica. U cilju jednoznačnog definisanja broja R_0 , interpretiraćemo navedenu matricu, naglašavajući njen epidemiološki značaj. Dakle, posmatrajmo sudbinu zaraženog pojedinca koji je ubačen u klasu **k** (klasa u kojoj je prisutno stanje bez bolesti). Element matrice V^{-1} , označen sa (j, k) , predstavlja *prosječnu dužinu trajanja perioda inkubacije* tokom kog zaraženi pojedinc boravi u klasi **j**, prije nego što bude ubačen u klasu **k**, uz pretpostavku da se os-tatak populacije zadržava u stanje bez bolesti, onemogućen da se ponovo inficira. Zatim, element matrice F , označen sa (i, j) , odražava *stopu pojavljivanja novih infekcija u klasi i*, uzrokovanih jednim zaraženim pojedincem iz klase **j**. Naposljetu, element matrice FV^{-1} , označen sa (i, k) , prikazuje *očekivani broj novih infekcija u klasi i* koje je proizvela zaražena osoba pr-vobitno ubačena u klasu **k**.

Zaista, matricu FV^{-1} na jedinstven način dovodimo u vezu sa osnovnim reproduktivnim brojem R_0 . Formalni zapis uočene povezanosti glasi:

$$R_0 = \rho(FV^{-1}), \quad (68)$$

pri čemu ρ označava *spektralni radijus* matrice FV^{-1} .

Slijedi teorema koja govori o lokalnoj asimptotskoj stabilnosti broja DFE, u zavisnosti od vrijednosti koju prima osnovni reproduktivni broj R_0 .

Teorema 2.21. ([22]) Neka je x_0 DFE sistema (60) i $R_0 = \rho(FV^{-1})$. Tada važi:

- (1) \mathbf{x}_0 ja lokalno asimptotski stabilno ako je $R_0 < 1$;
- (2) \mathbf{x}_0 ja lokalno asimptotski nestabilno ako je $R_0 > 1$.

Prije nego što dokažemo teoremu 2.21, navešćemo dvije leme koje će nam koristiti u realizaciji samog dokaza.

Lema 2.22. ([22]) Neka je $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ regularna M matrica. Dalje, pretpostavimo da B i BA^{-1} imaju Z oblik. Tada važi da je i B regularna M matrica **ako i samo ako** je BA^{-1} regularna M matrica.

Lema 2.23. ([22]) Neka je $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ regularna M matrica i $K \geq 0$. Razlikujemo dva slučaja:

- (1) $(A - K)$ je regularna M matrica **ako i samo ako** je $(A - K)A^{-1}$ regularna M matrica;
- (2) $(A - K)$ je singularna M matrica **ako i samo ako** je $(A - K)A^{-1}$ singularna M matrica.

Dokaz. ([22]) Neka je $J_1 = F - V$. Kako su F i V nenegativna i regularna M matrica, respektivno, na osnovu definicije 2.4 slijedi da $-J_1 = V - F$ ima **Z oblik**.

Prvenstveno, pretpostavimo da važi da je $\alpha_{\max}(-J_1) > 0$. Naime, sada su ispunjeni uslovi definicije 2.8, koji kažu da $-J_1$ mora da ima Z oblik i pritom da važi $\alpha_{\max}(-J_1) > 0 \Leftrightarrow \alpha_{\max}(J_1) < 0$, gdje α_{\max} označava *spektralni radius*. Dakle, pošto su ispunjeni svi potrebni uslovi, možemo da zaključimo da je $-J_1$ **regularna M matrica**.

Prethodno smo utvrdili da su i F i V^{-1} nenegativne matrice. Shodno tome, važiće da je i FV^{-1} nenegativna matrica. Ukoliko izraz $-J_1 = V - F$ pomnožimo sa desne strane sa V^{-1} dobijamo sledeću jednakost:

$$-J_1 V^{-1} = VV^{-1} - FV^{-1} = I - FV^{-1},$$

što nas ponovo, na osnovu definicije 2.4, dovodi do zaključka da je i matrica $-J_1 V^{-1}$ željenog **Z oblika**.

U nastavku, primijenimo lemu 2.22 u slučaju $A = V$ i $B = -J_1 = V - F$. Dakle, imamo da je V **regularna M matrica** i da su $-J_1$ i $-J_1 V^{-1}$ **Z oblika**. Posljedično, važi sledeća ekvivalencija:

$-J_1$ je regularna M matrica $\Leftrightarrow -J_1 V^{-1} = I - FV^{-1}$ je regularna M matrica.

U narednom koraku primijenjujemo definiciju 2.7. Naime, zaključili smo da je FV^{-1} **nenegativna matrica** i da je $I - FV^{-1}$ **regularna M matrica**. Na osnovu definicije 2.7 (1) važi sledeća ekvivalencija:

$$I - FV^{-1} \text{ je regularna M matrica} \Leftrightarrow \rho(FV^{-1}) < 1.$$

Konačno, sumiranjem svih dobijenih zaključaka dolazimo do finalnog zaključka, koji glasi:

$$\alpha_{\max}(J_1) < \mathbf{0} \Leftrightarrow \rho(FV^{-1}) < 1. \quad (69)$$

Sa izvjesnim razlikama, predstavićemo dokaz i drugog dijela navedene teoreme. U ovom slučaju, pretpostavimo da važi da je $\alpha_{\max}(J_1) = 0$. Analogno, na osnovu definicije 2.8 dobijamo da važi sledeća ekvivalencija:

$$\alpha_{\max}(J_1) = 0 \Leftrightarrow -J_1 \text{ je singularna M matrica.}$$

Potom, na osnovu leme 2.23 u slučaju $A = V$ i $K = F$ dolazimo do zaključka:

$$-J_1 = V - F \text{ je singularna M matrica} \Leftrightarrow I - FV^{-1} \text{ je singularna M matrica.}$$

Saglasno, na osnovu definicije 2.7 (2) važi sledeća ekvivalencija:

$$I - FV^{-1} \text{ je singularna } M \text{ matrica} \Leftrightarrow \rho(FV^{-1}) = 1.$$

Naposljetku, ponovnim sumiranjem svih zaključaka dobijenih u slučaju (2) posmatrane teoreme, zaključujemo sledeće:

$$\alpha_{\max}(J_1) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \rho(FV^{-1}) = 1. \quad (70)$$

Dakle, dobili smo da važi (69) i (70). Slijedstveno tome, imaćemo:

$$\alpha_{\max}(J_1) > \mathbf{0} \Leftrightarrow \rho(FV^{-1}) > 1. \quad (71)$$

□

Napomena 2.24. Neophodno je naglasiti da u radu [22] postoji dodatno objašnjenje lokalne asimptotske stabilnosti tačke x_0 (tačke DFE). Naime, u okviru navedenog rada je analiziran sistem $\dot{x} = \mathcal{D}f(x_0)(x - x_0)$, čime je utvrđeno da ukoliko svi karakteristični korijeni matrice $\mathcal{D}f(x_0)$ imaju *negativne realne dijelove*, tačka x_0 će biti lokalno asimptotski stabilna, dok ukoliko postoji bar jedan karakteristični korijen sa *pozitivnim* realnim dijelom, tačka x_0 će biti lokalno asimptotski nestabilna. Kako bi pojednostavili datu analizu, karakteristične korijene matrice $\mathcal{D}f(x_0)$ su podijelili u dvije grupe: karakteristični korijeni matrice $F - V$ i karakteristični korijeni matrice $-J_4$. Iz opravdanih razloga, uzeti su u obzir samo karakteristični korijeni matrice $F - V$, što nas dovodi do prethodno izloženog dokaza.

Na samom kraju, interpretirajmo matricu FV^{-1} u kontekstu SEIR modela sa dva povezana centra. Dakle, matrica FV^{-1} poprima oblik:

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta_1 S_1(0)[\gamma(\delta_2 + l_{21}) + \delta_2 k_{21} + l_{21}(k_{12} + k_{21})]}{N_1 AB} & \frac{\beta_1 S_1(0)(l_{21}A + \delta_2 k_{21})}{N_1 AB} & \frac{\beta_1 S_1(0)(\delta_2 + l_{21})}{N_1 B} & \frac{\beta_1 S_1(0)l_{21}}{N_1 B} \\ \frac{\beta_2 S_2(0)(l_{12}A + \delta_1 k_{12})}{N_2 AB} & \frac{\beta_2 S_2(0)[\gamma(\delta_1 + l_{12}) + \delta_1 k_{12} + l_{12}(k_{12} + k_{21})]}{N_2 AB} & \frac{\beta_2 S_2(0)l_{12}}{N_2 B} & \frac{\beta_2 S_2(0)(\delta_1 + l_{12})}{N_2 B} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

S obzirom da su elementi matrice (72) u 3. i 4. vrsti nule, nenula karakteristični korijeni navedene matrice se poklapaju sa karakterističnim korijenima sledeće matrice:

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1 S_1(0)[\gamma(\delta_2 + l_{21}) + \delta_2 k_{21} + l_{21}(k_{12} + k_{21})]}{N_1 AB} & \frac{\beta_1 S_1(0)(l_{21}A + \delta_2 k_{21})}{N_1 AB} \\ \frac{\beta_2 S_2(0)(l_{12}A + \delta_1 k_{12})}{N_2 AB} & \frac{\beta_2 S_2(0)[\gamma(\delta_1 + l_{12}) + \delta_1 k_{12} + l_{12}(k_{12} + k_{21})]}{N_2 AB} \end{bmatrix} \quad (73)$$

Kao što smo prethodno naglasili, koristeći „*next-generation*“ matričnu metodu, dolazimo do konačnog zaključka. Drugim riječima, dobijena formula (68), u kontekstu SEIR modela sa dva povezana centra, glasi:

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{1}{2} \left(a + d + \sqrt{a^2 + 4bc - 2ad + d^2} \right), \quad (74)$$

pri čemu a, b, c , i d označavaju:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\beta_1 S_1(0)[\gamma(\delta_2 + l_{21}) + \delta_2 k_{21} + l_{21}(k_{12} + k_{21})]}{N_1(\gamma + k_{12} + k_{21})(\delta_1 \delta_2 + \delta_1 l_{21} + \delta_2 l_{12})}, \\ b &= \frac{\beta_1 S_1(0)[l_{21}(\gamma + k_{12} + k_{21}) + \delta_2 k_{21}]}{N_1(\gamma + k_{12} + k_{21})(\delta_1 \delta_2 + \delta_1 l_{21} + \delta_2 l_{12})}, \\ c &= \frac{\beta_2 S_2(0)[l_{12}(\gamma + k_{12} + k_{21}) + \delta_1 k_{12}]}{N_2(\gamma + k_{12} + k_{21})(\delta_1 \delta_2 + \delta_1 l_{21} + \delta_2 l_{12})}, \\ d &= \frac{\beta_2 S_2(0)[\gamma(\delta_1 + l_{12}) + \delta_1 k_{12} + l_{12}(k_{12} + k_{21})]}{N_2(\gamma + k_{12} + k_{21})(\delta_1 \delta_2 + \delta_1 l_{21} + \delta_2 l_{12})}. \end{aligned}$$

U nastavku rada navodimo dva primjera pomoću kojih ćemo prikazati primjenu formule (74).

Primjer 2.25. ([24]) Posmatrajmo dva nezavisna SEIR centra. Njihova nezavisnost se ispoljava u vidu scenarija kojeg karakteriše odsustvo migracije stanovništva. Drugim riječima, važe sledeći uslovi:

$$k_{12} = k_{21} = l_{12} = l_{21} = 0.$$

U ovom slučaju $b = c = 0$, dok je $a = \frac{\beta_1 S_1(0)}{\delta_1 N_1}$ i $d = \frac{\beta_2 S_2(0)}{\delta_2 N_2}$. Dakle,

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{2}(a + d + \sqrt{a^2 - 2ad + d^2}) \\ &= \frac{1}{2}(a + d + |a - d|) \\ &= \max(a, d) \\ &= \max\left(\frac{\beta_1 S_1(0)}{\delta_1 N_1}, \frac{\beta_2 S_2(0)}{\delta_2 N_2}\right). \end{aligned}$$

Možemo zaključiti da se u slučaju odsustva migracije, R_0 poklapa sa maksimalnim osnovnim reproduktivnim brojem uzimajući u obzir osnovni reproduktivni broj koji odgovara jednom od dva posmatrana nezavisna centra. Naime, ukoliko su oba osnovna reproduktivna broja manja od 1, dolazi do izumiranja bolesti, tj. ako važi $\frac{\beta_1 S_1(0)}{\delta_1 N_1} < 1$ i $\frac{\beta_2 S_2(0)}{\delta_2 N_2} < 1$ bolest će biti ugušena.

Primjer 2.26. ([24]) Sada ćemo analizirati nešto složeniji model. Posmatrajmo dva identična SEIR centra, sa simetričnim migracionim stopama. Drugim riječima, neka važi:

$$S_1(0) = S_2(0) = S(0)$$

$$N_1 = N_2 = N$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta$$

$$k_{12} = k_{21} = k$$

$$l_{12} = l_{21} = l.$$

U ovom slučaju $a = d = \frac{\beta S(0)[\gamma(\delta + l) + \delta k + 2kl]}{N(\gamma + 2k)\delta(\delta + 2l)}$ i $b = c = \frac{\beta S(0)[l(\gamma + 2k) + \delta k]}{N(\gamma + 2k)\delta(\delta + 2l)}$.
Dakle,

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{2}(a + a + \sqrt{a^2 + 4b^2 - 2a^2 + a^2}) \\ &= \frac{1}{2}(2a + \sqrt{4b^2}) \\ &= a + b \\ &= \frac{\beta S(0)(\gamma\delta + 2\gamma l + 2\delta k + 4kl)}{N(\gamma + 2k)\delta(\delta + 2l)} \\ &= \frac{\beta S(0)(\gamma + 2k)(\delta + 2l)}{N(\gamma + 2k)\delta(\delta + 2l)} \\ &= \frac{\beta S(0)}{\delta N}. \end{aligned}$$

Upoređujući rezultate dobijene iz oba primjera, možemo iznijeti zaključak, kako u slučaju odsustva migracija, tako i u slučaju identičnih centara sa simetričnim migracionim stopama, da se osnovni reproduktivni broj R_0 poklapa sa osnovnim reproduktivnim brojem SIR modela sa samo jednim posmatranim centrom (formula (4) za specijalan slučaj kada je $t = 0$).

Zaključak

U poslednjih nekoliko godina, cjelokupna svjetska populacija se našla u centru društveno - ekonomskih okolnosti u kojima vladajuću ulogu preuzima pandemija uzrokovana koronavirusom. Naime, mentalno zdravlje svakog pojedinca je narušeno uslijed uvođenja mjera koje su podrazumijevale prinuđenu izolaciju, onemogućenu socijalizaciju i manjak komunikacije. Štaviše, zabilježen je nagli porast depresivnih epizoda kod adolescenata i djece u osjetljivoj fazi emotivnog i socijalnog razvoja. S druge strane, industrija osiguranja, kao i većina uslužnih djelatnosti, je osjetila značajne promjene u domenu poslovanja, kako na svjetskom, tako i na domaćem tržištu. Kako ne bi bili samo nijemi posmatrači u situaciji u kojoj je narušen poslovni integritet, aktuari su bili primorani na efikasna djelovanja realizovana u što kraćem periodu. Kao produkt njihovog angažmana, osiguravajuće kuće su uspješno obezbjedile sigurnost za život i poslovanje onih koji su odlučili da upravljaju svojim rizicima kroz polise osiguranja.

Podstaknuti navedenim uslovima, u početku rada smo prezentovali ustanovljene KM, determinističkog i stohastičkog karaktera, pri čemu smo posebnu pažnju posvetili detaljnomy argumentovanom pojašnjenu *Osnovnog reproduktivnog broja*. Naime, broj R_0 predstavlja glavni pokazatelj daljeg napredovanja infektivne bolesti, nakon njenog izbijanja. Kao takav, određuje jednu od ključnih prepostavki na kojima se bazira dalje djelovanje u cilju suzbijanja zaraze. Naime, u primjeru 2.5 smo demonstrirali na koji način se izračunava broj R_0 , uvrštavajući prethodno dobijene parametre. Za dati posmatrani period, došli smo do zaključka da je $R_0 < 1$, što u kontekstu pandemije uzrokovane koronavirusom znači da jedan zaraženi pojedinac može da zarazi u prosjeku manje od jedne osjetljive osobe. Drugim riječima, dobijeni

rezultat ukazuje na potpuno izumiranje bolesti.

Drugi dio rada je podijeljen na dva dijela – Rezerve i Optimalna premijska stopa u povezanom SEIR modelu. U okviru potpoglavlja Rezerve, formulisali smo funkciju benefičske rezerve, $V(t)$, koja predstavlja jedinstvenu sponu između aktuarske i epidemiološke tačke gledišta. Takođe, pomoću primjera 2.5 smo prikazali na koji način se dolazi do rješenja SDJ (5)-(6) (SDJ kojim smo definisali SIR model). Štaviše, prezentovali smo dva načina rješenje pomenutog SDJ - ugrađena funkcija ode45 programskog paketa MATLAB i Runge Kuta numerička metoda. Dobijene rezultate smo predstavili u vidu grafika. Zatim smo odredili i optimalnu premijsku stopu π , koja odražava kontinualni rast visine benefičske rezerve i samim tim obezbjeđuje nagradu za svakog preživjelog osiguranika u visini od 2,569.77 RSD. U poslednjem dijelu rada, proučavali smo povezani deterministički i stohastički SEIR model, u cilju određivanja optimalne premijske stope. Za njeno utvrđivanje, prvenstveno smo definisali vrijeme osjetljivosti i vrijeme infektivnosti, a potom dobijene zaključke uvrstili u Osnovni princip ekvivalencije. U slučaju stohastičkog SEIR modela sa povezanim centrima, formulisali smo algoritam za simulaciju lanca Markova u slučaju jednog centra i algoritam za određivanje optimalne strategije alokacije vakcina u odnosu na zastupljene migracione tokove u okviru posmatrane populacije. Na samom kraju, koristeći „next generation“ matričnu metodu, odredili smo osnovni reproduktivni broj u slučaju SEIR modela sa dva povezana centra.

Suma sumarum, prezentovane KM možemo smatrati polaznom tačkom za dalje izučavanje u integrisanoj oblasti aktuarskih i epidemioloških nauka.

Prilog

U *Prilogu* rada su prikazani kodovi u programskom paketu **MATLAB**, korišćeni u svrhu rješavanja SDJ i crtanja dobijenih rješenja u okviru primjera 2.5.

MATLAB kod za SIR model korišćen u primjeru 2.5

```

1 % SISTEM DIFERENCIJALNIH JEDNACINA:
2 % s '(t) = -1.61535*i(t)*s(t);
3 % i '(t) = 1.61535*i(t)*s(t)-2*i(t)
4 % s(0) = 0.94658
5 % i(0) = 0.05342
6
7 clear;
8
9 % Formiranje SDJ.
10 f=@(t,x) [-1.61535*x(2)*x(1); 1.61535*x(2)*x(1)-2*x(2)];
11 % Rjesavanje SDJ pomocu ode45; definisanje pocetnih uslova.
12 [t xsol]=ode45(f,[0 4], [0.94658 0.05342]);
13
14 % Crtanje rjesenja s(t), tj. rjesenja xsol(:,1).
15 subplot(2,2,1);
16 h1=plot(t ,xsol(:,1));
17 set(h1,'LineWidth',2)
18 set(h1,'color','#0072BD')
19 xlabel('t')
20 h=get(gca,'xlabel');
21 set(h,'FontSize',12)
22 ylabel('s(t)')
23 h=get(gca,'ylabel');
24 set(h,'FontSize',12)
25 title('Procenat osjetljive populacije');
26 h=get(gca,'title');
27 set(h,'FontSize',14)
28 legend('s(t)');
29 grid on
30
31 % Crtanje rjesenja i(t), tj. rjesenja xsol(:,2).
32 subplot(2,2,2);
33 h2=plot(t ,xsol(:,2));
34 set(h2,'LineWidth',2)
35 set(h2,'color','#D95319')
36 xlabel('t')
37 h=get(gca,'xlabel');
38 set(h,'FontSize',12)
39 ylabel('i(t)')
40 h=get(gca,'ylabel');
41 set(h,'FontSize',12)
42 title('Procenat inficirane populacije');
43 h=get(gca,'title');
44 set(h,'FontSize',14)
45 legend('i(t)');
46 grid on

```

MATLAB kod za Runge-Kuta metod korišćen u primjeru 2.5

```

1 % N – ukupan broj populacije Republike Srbije
2 % S(0) – broj osjetljivih pojedinaca u januaru 2022.
3 % I(0) – broj inficiranih pojedinaca u januaru 2022.
4 % alfa – stopa oporavka
5 % beta – stopa infekcije
6
7 N=6797708;
8 sPocetno=6434601;% S(0)
9 iPocetno=363107;% I(0)
10
11 parametri.alfa=2;% alfa
12 parametri.beta=1.61535; % beta
13
14 % Definisemo funkciju f.
15 f=@(t,x) RungeKutaSistem(x,parametri);
16
17 % Definisemo pocetne uslove.
18 x0=[sPocetno/N; iPocetno/N];
19
20 % Definisemo pocetno vrijeme.
21 t0=0;
22 % Definisemo krajnje vrijeme.
23 tf=4;
24 % Definisemo vremenski skok.
25 h=0.01;
26
27 % Pozivamo funkciju RungeKuta4.
28 [x,t]=RungeKuta4(f,x0,t0,tf,h);
29
30 figure;
31
32 % Crtanje rjesenja s(t), tj. rjesenja x(1,:).
33 subplot(2,2,1);
34 h1=plot(t,x(1,:));
35 set(h1,'LineWidth',2)
36 set(h1,'color','#0072BD')
37 xlabel('t')
38 h=get(gca,'xlabel');
39 set(h,'FontSize',12)
40 ylabel('s(t)')
41 h=get(gca,'ylabel');
42 set(h,'FontSize',12)
43 title('Procenat osjetljive populacije (Runge–Kuta metod)');
44 h=get(gca,'title');
45 set(h,'FontSize',14)
46 legend('s(t)');
47 grid on
48
49 % Crtanje rjesenja i(t), tj. rjesenja x(2,:).
50 subplot(2,2,2);
51 h2=plot(t,x(2,:));
52 set(h2,'LineWidth',2)
53 set(h2,'color','#D95319')
54 xlabel('t')
55 h=get(gca,'xlabel');
56 set(h,'FontSize',12)
57 ylabel('i(t)')
58 h=get(gca,'ylabel');
59 set(h,'FontSize',12)
60 title('Procenat inficirane populacije (Runge–Kuta metod)');

```

```

61 | h=get(gca , 'title ');
62 | set(h, 'FontSize' ,14)
63 | legend('i(t)');
64 | grid on

```

Kod 1. Pomoćna funkcija kojom definišemo sistem

```

1 % SISTEM DIFERENCIJALNIH JEDNACINA:
2 % s'(t) = -1.61535*i(t)*s(t);
3 % i'(t) = 1.61535*i(t)*s(t)-2*i(t)
4 % s(0) = 0.94658
5 % i(0) = 0.05342
6
7
8 % Formiramo funkciju xprim pomocu koje rjesavamo SDJ.
9 function xprim=RungeKutaSistem(x, parametri)
10
11 % Definisemo parametre sistema.
12 alfa=parametri. alfa;
13 beta=parametri. beta;
14
15 % Definisemo SDJ.
16 xprim=[-beta*x(2)*x(1)
17         beta*x(2)*x(1)-alfa*x(2) ];
18
19 end

```

Kod 2. Pomoćna funkcija kojom definišemo rekurzivne formule

```

1 % Numericka aproksimacija Runge-Kuta metodom.
2 % INPUT: f – funkcija SDJ
3 % x0 – pocetni uslovi SDJ
4 % t0 – pocetno vrijeme
5 % tf – krajnje vrijeme
6 % h – korak (vremenski skok)
7 % OUTPUT: x – vektor (s(t),i(t))
8 % t – vrijeme
9
10 function [x,t]=RungeKuta4(f,x0,t0,tf,h)
11
12 % Definisemo vektor t sa korakom h.
13 t=t0:h:tf;
14 % Broj elemenata vektora t.
15 nt=numel(t);
16
17 % Broj elemenata vekora x0.
18 nx=numel(x0);
19 % Formiramo matricu x sa nx vrsta i nt kolona.
20 x=nan(nx,nt);
21
22 % Definisemo vektor x0.
23 x(:,1)=x0;
24
25 % Uz pomoc for petlje prolazimo
26 % kroz rekurzivne formule RK metode.
27 for k=1:nt-1
28
29     k1=h*f(t(k),x(:,k));
30     k2=h*f(t(k)+h/2,x(:,k)+k1/2);
31     k3=h*f(t(k)+h/2,x(:,k)+k2/2);

```

```
32 k4=h*f(t(k)+h,x(:,k)+k3);  
33  
34 dx=(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;  
35  
36 x(:,k+1)=x(:,k)+dx;  
37 end  
38 end
```

Literatura

- [1] W. Kermack, A. McKendrick, *A contribution to the mathematical theory of epidemics*. Proceedings of the royal society of London. Ser. A, Contain. Pap. Math. Phys. Character 115(772), 700-721, 1927.
- [2] Edwin B. Wilson and Jane Worcester, *The Law of Mass Action in Epidemiology*, PNAS 31 (1) 24-34, January 1, 1945.
- [3] María del Carmen Boado-Penas, Julia Eisenberg, Şule Şahin, *Pandemics: Insurance and Social Protection*, Springer International Publishing, 13-40, January 2022.
- [4] P. Fine, K. Eames, D. Heymann, “*Herd immunity*”: a rough guide, Clin. Infect. Dis. 52(7), 911–916, 2011.
- [5] Van den Driessche P., *Reproduction numbers of infectious disease models*, *Infectious Disease Modelling*, Department of Mathematics and Statistics, University of Victoria, Victoria, BC, Canada, V8W 2Y2, 2017.
- [6] S. Zhao, Q. Lin, J. Ran, S. Musa, G. Yang, W. Wang, Y. Lou, D. Gao, L. Yang, D. He et al., *Preliminary estimation of the basic reproduction number of novel coronavirus (2019-nCoV) in China, from 2019 to 2020: a data-driven analysis in the early phase of the outbreak* Int. J. Infect. Dis. 92, 214–217, 2020.
- [7] A. Hill, *Modeling COVID-19 spread versus healthcare capacity*, 2020.
<https://alhill.shinyapps.io/COVID19seir/>
- [8] S.Ross, *Introduction to Probability Models Eighth Edition*, Academic Press, 2003.

- [9] BRAUER, F.; DRIESSCHE, P. V. D.; WU, J. *Mathematical Epidemiology*, Berlin: Springer Science and Bussines Media, 2008.
- [10] R. Feng, J. Garrido, *Actuarial applications of epidemiological models*, N. Am. Actuar. J. 15(1), 112–136, 2011.
- [11] WHO COVID-19 Explorer. Geneva: World Health Organization, 2022.
- [12] Ministarstvo zdravlja Republike Srbije, 2022.
- [13] Republički zavod za statistiku, Republika Srbija, 2022.
- [14] David C. M. Dickson, *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge University Press, 38-50, 2005.
- [15] Claude Lefèvre, Philippe Picard, Matthieu Simon, *EPIDEMIC RISK AND INSURANCE COVERAGE*, . Appl. Prob. 54, 286–303, 2017.
- [16] María del Carmen Boado-Penas, Julia Eisenberg, Şule Şahin, *Pandemics: Insurance and Social Protection*, Springer International Publishing, 1-12, January 2022.
- [17] I. Sazonov, M. Kelbert and M.B. Gravenor, *A two-stage model for the SIR outbreak: Accounting for the discrete and stochastic nature of the epidemic at the initial contamination stage*, Math. Biosci, 108–117, 2011.
- [18] M. Rausand, A. Høyland, *System Reliability Theory; Models, Statistical Methods and Applications*, Second Edition, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 301-361, 2004.
- [19] Quinn Morris, *Analysis of a Co-Epidemic Model*, Department of Mathematics, Wake Forest University, 2011.

- [20] Ljiljana Cvetković, *Numela I*, Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, Novi Sad, 2015.
- [21] Dennis S. Bernstein, *Scalar, Vector, and Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas - Revised and Expanded Edition*, Princeton University Press, 2018.
- [22] P. van den Driessche and J. Watmough, *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission* Math. Biosci. 180, 29–48, 2002.
- [23] A. Berman, R.J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, New York, 1970.
- [24] Alexey A. Chernov, Aleksandr A. Shemendyuk, Mark Y. Kelbert, *Fair insurance premium rate in connected SEIR model under epidemic outbreak*, Mathematical Modelling of Natural Phenomena, EDP Sciences, 2021.

Biografija



Nikolina Jukić je rođena 3. januara 1997. godine u Prijedoru, Bosna i Hercegovina. Završila je Osnovnu školu „Branko Ćopić“ u Prijedoru, kao nosilac prestižne Vukove diplome. Po završetku osnovnog obrazovanja, 2011. godine upisuje Gimnaziju „Sveti Sava“ u Prijedoru, opšti smjer.

Kako bi ostvarila svoj puni potencijal, 2015. godine upisuje osnovne studije primjenjene matem-

atike (modul: matematika finansijsa) na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. U svrhu daljeg usavršavanja, nakon sticanja diplome visokog obrazovanja i dobijanja stručnog naziva *Matematičar*, 2019. godine upisuje master studije sa istim poljem interesovanja. Sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija je položila u roku, 2021. godine, sa prosječnom ocjenom 9,00 i time stekla uslov za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Nikolina Jukić

AU

Mentor: prof. dr Dora Seleši

ME

Naslov rada: Aktuarski aspekti i matematički modeli za osiguravajuće pokriće epidemijskih i pandemijskih rizika

NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / en

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2022.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (2/110/24/8/20)(broj poglavlja/broj strana/broj referenci/broj tabela/broj slika)

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Aktuarska matematika

ND

Ključne reči: Kompartmentalni modeli, pandemija koronavirusa, funkcija benefičijske rezerve, osnovni reproduktivni broj

PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Rad se bavi kompartamentalnim modelima i njihovom aktuarskom primjenom. Predstavljeni su sledeći modeli: deterministički SIR, SIS, SEIRD i SEIR model sa povezanim centrima, te stohastički SIR i SEIR model sa povezanim centrima. Štaviše, obezbjeđena je veza između oblika funkcije benefičijske rezerve $V(t)$ i intervala kom pripada stopa premije π . Ne samo da smo uspostavili značajnu vezu, već smo uspjeli ilustrovati primjer koji demonstrira naznačenu zavisnost u slučaju pandemije koronavirusa. Definišani su algoritmi za određivanje stope premije π , simulaciju lanca Markova u

slučaju jednog centra i određivanje optimalne alokacije vakcina za stohastički SEIR model sa n povezanih centara. Konačno, određen je osnovni reproduktivni broj R_0 pomoću „next generation“ matrične metode.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 10.5.2022.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

ČK

Predsednik: dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor PMF-a

Mentor: dr Dora Seleši, redovni profesor PMF-a

Član: dr Ivana Vojnović, docent PMF-a.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: Master's thesis

CC

Author: Nikolina Jukić

AU

Mentor: prof. dr Dora Seleši

MN

Title: Acturial aspects and mathematical models for insurance covering epidemic and pandemic risks

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: s / en

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2022.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

PP

Physical description: (2/110/24/8/20)(chapters/pages/literature/tables/pictures)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Actuarial mathematics

SD

Subject/Key words: Compartmental models, COVID-19 pandemic (coronavirus pandemic), Benefit reserve function, Basic reproduction number

SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: This thesis is based on compartmental models and their actuarial application. The following models were presented: deterministic SIR, SIS, SEIRD, and SEIR model with connected centers, and stochastic SIR and SEIR model with connected centers. Moreover, a connection has been provided between possible shapes of the benefit reserve function $V(t)$ and the interval for values of π . Not only have we established a significant link, but we have also been able to illustrate an example that shows the indicated dependence in the case of a coronavirus pandemic. Algorithms for determining the premium rate π , Markov chain simulation for one center, and calculation

of optimal vaccine allocation for stochastic model for n centers were defined. Finally, the basic reproductive number R_0 was computed by the next generation matrix method.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 10.5.2022.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: : Dr Danijela Rajter-Ćirić, Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: : Dr Dora Seleši , Full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr Ivana Vojnović, Assistant Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad.