UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Bojana Škrbić

Varijacioni problem sa promenljivim graničnim uslovima i primena

Master rad

Mentor:
dr Milica Žigić

Novi Sad, 2022.

Sadržaj

Predgovor

Početak varijacionog računa se vezuje za rad Ojlera, Lagranža, Ležendra, dok su ga dodatno razradili Jakobi i Vajerštras. Njegovom razvoju doprinelo je još mnogo naučnika kroz istoriju, a danas se izučava u sklopu Metoda optimizacije. Veliku ulogu u varijacionom računu igra Ojler - Lagranžova jednačina, o kojoj će biti reči u ovom radu.

Cilj ovog rada je da se upoznamo sa nastankom, osnovnim osobinama, kao i primenom varijacionog računa sa promenljivim graničnim tačkama. Primena varijacionog računa je izuzetno široka, ali je u ovom radu detaljno predstavljen jedan primer - optimalna konstrukcija tobogana za Luna parkove.

Rad se sastoji iz 4 glave. Prvo poglavlje master rada podeljeno je na dva dela. U prvom delu je reč o ranim počecima varijacionog računa, zatim o doprinosu varijacionom računu Hilberta, Adamara i Levija, kao i o doprinosu Jakobija i Vajerštrasa. Drugi deo prvog poglavlja daje osnovne teoreme i definicije koje su neophodne za praćenje i razumevanje daljeg toka rada.

Drugo poglavlje pod nazivom Osnovne osobine varijacionog računa, je takođe podeljeno na dva dela. Prvi deo je posvećen potrebnom uslovu za ekstrem funkcionele, dok je drugi, veći, deo ovog poglavlja posvećen Ojler – Lagranžovoj jednačini. U prvom delu izveden je dokaz koji daje potreban uslov kako bi funkcionela imala ekstrem, u normiranom prostoru. U okviru Ojler – Lagranžove jednačine govorimo o njenom nastanku, o slabom i jakom ekstremu, a dato je i izvođenje Ojler – Lagranžove jednačine, diferencijalne jednačine drugog reda. U okviru ovog izvođenja, uzimajući u obzir činjenicu da je Ojlerova jednačina diferencijalna jednačina drugog reda, njeno rešenje zavisi od dve proizvoljne konstante, koje su određene iz graničnih uslova $y(a) = A$, $y(b) = B$. Problem koji se obično razmatra u teoriji diferencijalnih jednačina je pronalaženje rešenja koje je definisano u okolini neke tačke i zadovoljava date početne uslove (Košijev problem). Međutim u rešavanju Ojlerove jednačine tražimo rešenje koje je definisano u nekom fiksnom intervalu i koje zadovoljava date granične uslove. Iz tog razloga, navedena je teorema Bernštajna, koja se tiče postojanja i jedinstvenosti rešenja određenog varijacionog problema. Data je i teorema koja garantuje da rešenje Ojler –

Lagranžove jednačine ima drugi izvod. Ova jednačina ima izuzetno veliku ulogu u varijacionom računu te zahteva posebnu pažnju.

Treće poglavlje, pod nazivom Varijacioni račun sa promenljivim krajnjim tačkama, ima dva dela. Prvi deo daje vrste graničnih uslova opšteg karaktera i kratko objašnjava svaki od njih. Drugi deo, koji predstavlja i najvažniji deo rada, jeste problem promenljive krajnje tačke. Nekada je potrebno pronaći minimum ili maksimum funkcionele koja je definisana duž krivih γ u (x, y) – ravni, pri čemu jedna ili obe krajnje tačke, ove krive, variraju u datom skupu tačaka. Primer ovog problema je odrediti najkraće vreme za koje može da se stigne od početne tačke $P_0 = (x, y)$, do neke krajnje tačke koja se nalazi na specijalnoj pravoj C, ili nekoj krivoj γ, krećući se duž svih mogućih krivih koje ih spajaju. Ovaj problem se naziva modifikovani problem brahistohrone Džejmsa Bernulija, koji je detaljno obrađen.

Poslednje, četvrto poglavlje je jedna celina, koje zajedno sa prethodnim poglavljem čini temu ovog master rada. Kroz ovaj deo je predstavljen jedan primer primene varijacionog računa sa promenljivim graničnim uslovima. Taj primer jeste konstrukcija zanimljivih tobogana koji se nalaze u Luna parkovima. Dizajneri tobogana znaju da cikloida najbrže spušta od jedne tačke do obližnje niže tačke, ali isto tako znaju da ovakav tobogan ne bi bio previše zanimljiv i bezbedan, jer bi se spuštao samo vertikalno naniže. Iz tog razloga su dizajneri odlučili da razmotre kompozitni tobogan čija bi se putanja sastojala od dela kružnog luka sa horizontalnim početnim nagibom radi bezbednosti, nakon čega sledi deo novog kružnog luka koji je prikladno odabran da čini i tobogan zanimljivijim. U ovom poglavlju će detaljno biti opisano kako doći do ovog kompozitnog tobogana.

Na početku svakog poglavlja navedene su reference na koje se oslanjamo pri njegovoj izradi, kao i izvori iz kojih su preuzete slike u tom poglavlju.

Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru dr Milici Žigić, na izdvojenom vremenu, strpljenju, pomoći i stručnim sugestijama tokom izrade mog master rada.

Zahvaljujem se i članovima komisije dr Sanji Rapajić i dr Nenadu Teofanovu na izdvojenom vremenu za realizaciju odbrane ovog rada.

Najveću zahvalnost dugujem mojoj porodici, prijateljima, kolegama i učenicima, koji su imali razumevanja, strpljenja i pružali mi podršku tokom čitavih studija.

Novi Sad, 2022.

Bojana Škrbić

Glava 1

Uvod

Na početku rada biće reči o tome kada i kako je nastao Varijacioni račun, kako se razvijao kroz istoriju i ko je dao svoj doprinos njegovom nastanku, zatim će biti navedeni osnovni pojmovi, neophodni za razumevanje ostatka rada. U ovom delu rada korišćena je literatura [3] i [4].

1.1 Istorija varijacionog računa

1.1.1 Rani počeci varijacionog računa

Klasični varijacioni račun potiče iz dela Ojlera[1], Lagranža[2], Ležandra[3], a razvili su ga Jakobi[4] i Vajerštras[5]. Možemo reći da se nastanak varijacionog računa vezuje za objavljivanje problema određivanja Brahistohrone Johana Bernulija[6], objavljenog u *Acta Eruditorum.* Ovaj problem su zajedno rešili Njutn[7], Lajbnic[8], Johan i Jakob Bernuli[9].

Obično se godinom nastanka varijacionog računa smatra 1744. kada je Ojler objavio svoju poznatu knjigu *Methodus inreniendi lineus curvas maximi minive proprietate gaudentes* (Metode nalaženja krivih linija koje poseduju

[1] Leonhard Paul Euler (1707-1783), švajcarski matematičar i fizičar

[2] Joseph-Louis, comte de Lagrange (1736-1813), italijansko-francuski matematičar i astronom

[3] Adrien-Marie Legendre (1752-1833), francuski matematičar

[4] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), nemački i jevrejski matematičar

[5] Karl Theodor Wilhelm Weierstras (1815-1897), nemački matematičar

[6] Johann Bernoulli (1667-1748), švajcarski matematičar

[7] Sir Isaac Newton (1643-1727), engleski fizičar, matematičar, astronom, alhemičar i filozof

[8] Gottfried Wilhelm Freiherr (baron) von Leibniz (1646-1717), nemački filozof, matematičar, pronalazač, pravnik, istoričar, diplomata i politički savetnik

[9] Jakob Bernoulli (1654-1705), švajcarski matematičar i naučnik

osobine minimuma i maksimuma). Naravno, knjiga sadrži čuvenu Ojlerovu jednačinu

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0,$$

koja je potreban uslov za postojanje $y(x)$, $x \in [x_0, x_1]$, minimuma funkcionele

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y')\, dx,$$

gde je $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $x_0 < x_1$.

1.1.2 Doprinos Hilberta, Adamara i Levija

David Hilbert (1862-1943)

Na međunarodnoj konferenciji matematičara 1900. godine Hilbert[10] je govorio o temi *Matematički problemi*, gde je kao poslednji naveo i varijacioni račun. U periodu od 1899. do 1901. godine, Hilbert je držao predavanja o varijacionom računa i time uticao na svoje studente, koji su i sami u svojim radovima pisali o varijacionom računu. Hilbertov rad o varijacionom računu *Zur Variationsrechnung* objavljen je u Math. Ann. Vol LXI, 1906. godine.

Žak Adamar (1865-1963)

Krajem 19. veka Adamar[11] se prvi put susreo sa varijacionim računom, kada je radio na delima *Teorija talasa*, *Elastičnost* i *Geometrijski problemi* kao što je geodezija. Razmatrao je o operacijama nad funkcijama 1903. godine u svom radu *On the functional operations*.

U predgovoru njegove knjige *Lecon's sur le calcul des variations*, koja je objavljena u Parizu 1910. godine, može se videti njegov koncept, dat na sledeći način: "Varijacioni račun nije ništa drugo do prvo poglavlje teorije koja se danas naziva funkcionalni račun i čiji će razvoj nesumljivo biti jedan od prvih zadataka budućnosti. Ova ideja me je pre svega inspirisala, tokom predavanja koje sam držao na ovu temu na Collége de France kao i u pripremi ovog rada."

Adamar je uveo pojam "funkcionela" da zameni pojam "linijske funkcije", raniju Volterinu terminologiju.

[10] David Hilbert (1862-1943), nemački matematičar
[11] Jacques Salomon Hadamard (1865-1963), francuski matematičar

U radu *On the functional operations* pokazao je da se proizvoljna funkcionela $U[f]$ na prostoru $C[a,b]$ neprekidnih funkcija f na $[a,b]$ može predstaviti formulom

$$U[f] = \lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_a^b F(t,\lambda) f(t)\, dt,$$

gde je F nezavisno od f i određeno je funkcionelom U na polutraci $\{(t,\lambda) : a \le t \le b, \lambda > 0\}$, što je prethodilo poznatoj Risovoj reprezentaciji, dobijenoj 1909. godine.

Adamar je prvi dobio reprezentaciju linearne funkcionele $U[\omega]$ na skupu analitičkih funkcija preko linijskog integrala

$$U[\omega] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_c \omega(\xi)\phi(\xi)\, d\xi,$$

koristeći funkciju indikatora funkcionele, a to je

$$\phi(\xi) = U\left[\frac{1}{\xi - z}\right].$$

To se može videti u njegovoj knjizi iz 1910. godine, međutim nacrt je dat već u radu iz 1903. godine. Opšte je prihvaćeno da je italijanski matematičar Fantapi uradio isto 1920. godine, koristeći drugi indikator

$$\delta g_A^B = \frac{1}{4\pi} \int \int\limits_S \lambda \frac{dg_A^M}{dn} \frac{dg_B^M}{dn}\, dS_M,$$

gde je λ normalno rastojanje.

Pol Levi (1886-1971)

Uticaj Adamara na Levija[12] može se videti u njegovoj disertaciji (1911.) gde je bilo reči o generalizaciji Adamarove jednačine i integrabilnosti. U svom radu *Sur les équations aux dériv'ees fonctionells at leur application a - a' la phisique, mathematique* iz 1912. godine, govorio je o integrabilnosti Adamarove jednačine, problemu ravnoteže elastične ploče i Dirihleovom principu. U istom časopisu, pisao je o Grinovoj funkciji, opštoj varijacionoj jednačini i odgovarajućem Košijevom problemu. Pre ovih radova, tri njegova kraća rada o varijacionom računu objavljena su u časopisu *Comptes Rendus.*

[12] Paul Levi (1886-1971), francuski matematičar

U I i II delu monografije, koja je objavljena 1951. godine, opširno je razmatrao o varijaciji funkcionela definisanih duž krivih ili površi. Zatim je usledila duža pauza kada je u pitanju ova tema, sve do 1971. godine, kada je neposredno pre svoje smrti pomenuo Adamarovu jednačinu u svom radu *Fonctions de lignes et équations aux dérivés fonctionelles.*

U delu *Cour de Mechanic* može se pronaći oblast koja se bavi fleksibilnim sistemom gde se krive deformišu. Tu je ujedno diskutovao i o rešenju Ojlerove jednačine.

Kriva C je deformisana do krive $C+\delta C$, što se može predstaviti sistemom funkcija $\{\delta n(s)\}$, definisanih preko C, gde $\delta n(s)$ označava normalno rastojanje od C do $C+\delta C$. Treba imati na umu da izbor funkcije $\{\delta n(s)\}$ zavisi od C i $C+\delta C$.

Primer 1.1. *Neka je L dužina krive C, tada je*

$$L[C+\delta C] = -k \int_C \delta n\, ds + o(\delta C).$$

Primer 1.2. *Varijacija funkcionele date preko integrala u funkciji od krive je moguća.*

Ako je

$$I = \int_C u\, ds,$$

onda je

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_C (\delta u\, ds + u\delta\, ds) = \\ &= \int_C \left(\frac{du}{dn} - ku\right) \delta u\, ds. \end{aligned} \tag{1.1}$$

U svom delu *On the variation of the distribution of electricity over a conductor, the surface of which is deformed*, objavljenom 1918. godine, razmatrao je Dirihleov princip[13].

[13] U rešavanju različitih problema, naročito za dokazivanje postojanja objekata koji imaju neko određeno svojstvo, često se primenjuje takozvani Dirihleov princip (P.G.L. Dirichet, francusko-nemački matematičar (1805-1859)), koji izražava jedno od osnovnih svojstava konačnih skupova.

Neka je g_B^A Grinova funkcija i f harmonično polje između naelektrisanih površina S i S' tako da je $f = 0$ u ∞. Neka su A i B tačke između dve površi S i S', P je tačka na površi S i M rubna tačka površi S

$$f(A) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial g_M^A}{\partial n} f(M)\, ds.$$

Deformisanjem S i S' dobija se varijacija Grinove funkcije kao

$$\delta g_B^A = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{S \cup S'} \frac{\partial g_M^A}{\partial n} \frac{\partial g_B^M}{\partial n} \delta n\, ds.$$

Pored toga razmatraju se i varijacije ukupne električne energije na S i S'.

1.1.3 Doprinos Jakobija i Vajerštrasa

Početak varijacionog računa se vezuje za prvu polovinu 19. veka. Jakobijev rad iz 1837. godine je, po mnogo čemu, bio vrhunac klasične faze varijacionog računa. Tokom ove faze, matematičari su samo pretpostavili da imaju posla sa ekstremima koji se neprekidno razlikuju i slabim varijacijama. Tek drugom polovinom 19. veka, matematičari kao što su Isak Todhunter[14], G. Erdman i Karl Vajerštras, preispitali su pretpostavke vezane za varijacioni račun, postavili su ozbiljne osnove varijacionog računa i naučili da se bave špicevima i jakim varijacijama. Vajerštrasova uloga je bila naročito važna.

Isak Todhunter, engleski matematičar, prvi je skrenuo pažnju na rešenja varijacionih problema sa špicevima u svojoj knjizi 1871. godine. Na špicevima, izvodi rešavanja se neprekidno menjaju, stoga je Todhunter sama rešenja nazvao "diskontinuiranim". Nažalost, Todhunter nije mogao da izvede analitičke uslove koji su važili u špicevima. Vajerštras je pronašao uslove špica za ekstreme još 1865. godine, ali te uslove nije objavio. Njegova izvođenja su se pojavila mnogo kasnije, tek nakon njegove smrti, kada su objavljena Vajerštrasova predavanja. Njegova predavanja su bila izuzetno uticajna u vreme kada su održana. Uslovi o špicevima prvi put su se pojavili u štampi u Erdmanovom radu (1877.). Zbog toga, mi danas govorimo o Vajerštras - Erdman uslovima o špicevima. Vajerštras je razvio teoremu jakih varijacija.

Uslovi špiceva su istorijski nastali iz uslova promenljive krajnje tačke. Kao rezultat toga, biće nam potrebno malo vremena da dođemo do uslova špiceva. Pratićemo Vajerštrasov pristup. Da bi dobio veću opštost Vajerštras je posmatrao promenljive x i y za ravansku krivu kao funkcije parametra t. Ovo je u suprotnosti sa uobičajenim pristupom u kojem je x nezavisno

[14]Isaac Todhunter (1820-1884), engleski matematičar

promenljiva, a y zavisno promenljiva. Pristup će se u početku činiti malo čudnim ali će nam omogućiti da izvedemo posebno lep par uslova promenljive krajnje tačke. Potrebni su nam uslovi promenljive krajnje tačke za probleme u kojima granični uslovi nisu fiksni. Poznavajući uslove promenljive krajnje tačke, možemo brzo da izvedemo uslove špiceva.

1.2 Uvodni pojmovi

U prvom uvodnom poglavlju navodimo osnovne pojmove na koje se oslanja čitav rad.

Definicija 1.1. *Metrički prostor je uređen par (X, d), gde je X neprazan skup, a d je metrika na X, odnosno funkcija koja definiše udaljenost između elemenata skupa X, data sa $d : X \times X \to \mathbb{R}$ gde je*

1. $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$,
2. $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako* $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$,
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in X$.

Definicija 1.2. *Struktura X je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, ako je $(X, +)$ komutativna grupa i ukoliko je definisano preslikavanje $\mathbb{R} \times X \to X$, tako da za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$ važi:*

1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \alpha y$,
3. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
4. $1x = x$,

pri čemu je slika para $(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X$, označena sa $\alpha x \in X$. Vektorski prostor se obično definiše nad proizvoljnim poljem skalara.

Definicija 1.3. *Vektorski prostor $(X, \| \cdot \|)$ je normiran ako preslikavanje $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ ispunjava sledeće uslove:*

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$ *i* $\|x\| = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$,
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$,

3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$.

Svaki normirani prostor je metrički, jer normom može da se definiše metrika na sledeći način: $d(x, y) := \|x - y\|$, $x, y \in X$. Kaže se da je ta metrika indukovana normom $\|\cdot\|$. U opštem slučaju, metrički prostor nije normiran. On čak ne mora biti ni vektorski prostor.

Na primer, $\mathbb{R}^n$ je normiran vektorski prostor gde je euklidska norma data sa $\|x\| = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Takođe, prostor $C[a, b]$, neprekidnih funkcija nad intervalom $[a, b]$ je vektorski prostor sa normom $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$. Slično, prostor $C^1[a, b]$, neprekidno diferencijabilnih funkcija nad intervalom $[a, b]$ je vektorski prostor sa normom

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|.$$

U ovom prostoru norma može da se definiše i sa $x \to \max_{t\in[a,b]}\{|x(t)|, |x'(t)|\}$.

Direktnim uopštenjem može se zaključiti da je prostor $C^n[a, b]$, n puta neprekidno diferencijabilnih funkcija nad intervalom $[a, b]$ takođe jedan normiran vektorski prostor.

Ako je normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ kompletan, onda se on naziva *Banahov prostor*.

Definicija 1.4. *Preslikavanje $J : U \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ je diferencijalno u tački $u \in U$, ukoliko postoji vektor $v \in \mathbb{R}^n$, sa osobinom*

$$\Delta J(u) := J(u + h) - J(u) = \langle v, h\rangle + o_u(h),$$

pri čemu važi $\lim\limits_{h\to 0} \frac{o_u(h)}{\|h\|} = 0$. Vektor h pripada nekoj okolini nule, tako da je $u + h \in U$.

Naredni primer daje konstrukciju funkcionele J, koja je data u vidu određenog integrala, čija je tačka ekstrema rešenje posmatranog problema. Naime, traži se funkcija $\tilde{y}$, rešenje problema formulisanog sa

$$J(\tilde{y}) = \min_{y\in Y} J(y) = \min_{y\in Y} \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

gde je Y unapred zadat skup dopustivih rešenja. Za funkciju $\tilde{y} \in Y$ važi da mora da zadovoljava Ojler - Lagranžovu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x), y'(x))\right) = 0.$$

Ova činjenica predstavlja suštinu varijacionog računa.

Oznaka $D[K = k_0]$ označava skup D koji se sastoji od svih vektora x iz D koji ispunjava uslov $K(x) = k_0$.

Teorema 1.3. *(Ojler - Lagranžova teorema množitelja) Neka su J i K funkcije koje su definisane i imaju varijacije na otvorenom podskupu D normiranog vektorskog prostora χ, i neka je x^* vektor lokalnog ekstrema u $D[K = k_0]$ za J, gde je k_0 bilo koji dati fiksirani broj za koji je skup $D[K = k_0]$ neprazan. Pretpostavimo da su i varijacija J i varijacija K slabo neprekidne blizu x^*. Tada mora postojati najmanje jedna od sledeće dve mogućnosti:*

1. *Varijacija K na x^* se anulira, tj.*

$$\delta K(x^*; \Delta x) = 0,$$

za svaki vektor Δx iz χ; ili

2. *Varijacija J na x^* je konstantna višestruka varijacija K u x^*, tj. postoji konstanta λ takva da*

$$\delta J(x^*; \Delta x) = \lambda \delta K(x^*; \Delta x),$$

za svaki vektor Δx iz χ.

Glava 2

Osnovne osobine varijacionog računa

U ovoj glavi ćemo se upoznati sa potrebnim uslovom za ekstrem funkcionele, zatim će biti reči o Ojler - Lagranžovoj jednačini, slabom i jakom ekstremu i prikazaćemo izvođenje Ojler - Lagranžove jednačine. Literatura korišćena za izradu ovog dela je [1], [2], [5] i [6].

Varijacioni princip se zasniva na ideji da se uporedo sa stvarnim procesom posmatra varirani proces koji se od njega malo razlikuje, pri čemu se zahteva da je stvarni proces jedini koji kriterijumu optimalnosti saopštava ekstremnu vrednost.

2.1 Potreban uslov za ekstrem funkcionele

Posmatrajmo normirani prostor $(X, \|\cdot\|)$ i funkcionelu $J : X \to \mathbb{R}$. Jasno, funkcionela J dostiže lokalnu ekstremnu vrednost u tački $x_0 \in X$, ako njen priraštaj $\Delta J_{x_0} = J(x) - J(x_0)$ ne menja znak u nekoj okolini tačke x_0, tačnije, ako postoji $\epsilon > 0$ tako da za sve $x \in X$, za koje je $\|x - x_0\| < \epsilon$ važi $\Delta J_{x_0} \geq 0$ ili $\Delta J_{x_0} \leq 0$.

Teorema 2.1. *Da bi funkcionela $J : X \to \mathbb{R}$ imala lokalni ekstrem u tački x_0 normiranog prostora $(X, \|\cdot\|)$ potrebno je da njen diferencijal u tački x_0 (ako postoji) bude jednak nuli, to jest, potrebno je da $\delta J_{x_0}(h) = 0$, za sve $h \in X$.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ tačka lokalnog minimuma funkcionele J i neka je J diferencijabilna u toj tački. Tad postoji $\epsilon > 0$ tako da važi:

$$J(x_0 + \tilde{h}) - J(x_0) \geq 0 \text{ za sve } \tilde{h} \text{ za koje je } \|\tilde{h}\| < \epsilon.$$

Diferencijabilna funkcionela može da se zapiše u obliku:

$$J(x_0 + \tilde{h}) - J(x_0) = \delta J_{x_0}(\tilde{h}) + r_{x_0}(\tilde{h}),$$

pri čemu je $r_{x_0}(\tilde{h}) = o(\|\tilde{h}\|)$ kada $\|\tilde{h}\| \to 0$.

Neka je $h \in X$ proizvoljno. Tada postoji $a > 0$, tako da je $\tilde{h} = ah \in X$ takvo da je $\|\tilde{h}\| < \epsilon$. Kako je x_0 tačka lokalnog minimuma i $a > 0$, sledi da je:

$$\frac{J(x_0 + ah) - J(x_0)}{a\|h\|} \geq 0.$$

Iz uslova diferencijabilnosti funkcionele J i linearnosti varijacije, dobija se da je:

$$\frac{\delta J_{x_0}(ah) + r_{x_0}(ah)}{a\|h\|} = \frac{1}{\|h\|}\delta J_{x_0}(h) + \frac{r_{x_0}(ah)}{\|ah\|} \geq 0.$$

Kada $a \to 0^+$, tada i $\|ah\| \to 0$, te se dobija da je:

$$0 \leq \lim_{a \to 0^+} \left(\frac{1}{\|h\|}\delta J_{x_0}(h) + \frac{r_{x_0}(ah)}{\|ah\|} \right) = \frac{1}{\|h\|}\delta J_{x_0}(h),$$

to jest, $\delta J_{x_0}(h) \geq 0$. Slično za vektor $\hat{h} = -ah \in X$, $a > 0$ važi da je $\|\hat{h}\| < \epsilon$, pa se dobija da je sada:

$$\frac{J(x_0 - ah) - J(x_0)}{-ah} \leq 0.$$

Ponovo, iz diferencijabilnosti funkcionele J i linearnosti varijacije δJ_{x_0} sledi:

$$\frac{\delta J_{x_0}(-ah) + r_{x_0}(-ah)}{-a\|h\|} = \frac{1}{\|h\|}\delta J_{x_0}(h) - \frac{r_{x_0}(-ah)}{\|-ah\|} \leq 0.$$

Kada $a \to 0^+$ važi da je:

$$0 \leq \lim_{a \to 0^+} \left(\frac{1}{\|h\|}\delta J_{x_0}(h) - \frac{r_{x_0}(-ah)}{\|-ah\|} \right) = \frac{1}{\|h\|}\delta J_{x_0}(h),$$

to jest, $\delta J_{x_0} \leq 0$. Dakle, $\delta J_{x_0} = 0$.[1]

□

Ako je ν neprekidna linearna funkcionela nad X, njena varijacija je data sa $\delta\nu(h) = \nu(h)$, odakle sledi da je potreban uslov za ekstrem neprekidne linearne funkcionele dat sa $\nu \equiv 0$.

[1]Alternativni dokaz se zasniva na lemi

Lema 2.2. *Ako je funkcionela ν diferencijabilna u $x_0 \in X$ onda je, za fiksirano $h \in X$, funkcija $f(t) = \nu(x_0 + th)$, kao funkcija po $t \in \mathbb{R}$, diferencijabilna u $t = 0$, a njen izvod je $f'(0) = \delta\nu_{x_0}(h)$.*

2.2 Ojler-Lagranžova jednačina

2.2.1 Istorijski uvod Ojler - Lagranžove jednačine

Švajcarski matematičar Leonard Ojler[2] izveo je jednačinu

$$F_Y(x, Y(x), Y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{Y'}(x, y(x), Y'(x)) = 0, \tag{2.1}$$

do 1741. godine, koristeći genijalan, ali nezgodan postupak u kome je aproksimirao integral iz

$$J(Y) = \int_{x_0}^{x_1} F_Y(x, Y(x), Y'(x))\, dx,$$

zbirom i funkciju ekstrema $Y(x)$ njenim ordinatama na određene tačke, a zatim menjao ove ordinate jednu po jednu. Lagranž[3] je proučavao Ojlerove rezultate dok je bio tinejdžer i napisao je pismo Ojleru 1755. godine u kom je dobio istu jednačinu (2.1) mnogo jednostavnijom metodom. Ojler je prepoznao opštost i jednostavnost Lagranžove metode i podsticao je Lagranža u njegovom radu. Lagranž je naredne godine izabran u berlinsku akademiju nauka kao strani član pod pokroviteljstvom Ojlera. Ojler je kasnije uveo naziv *varijacioni račun* za opis Lagranžove metode. (2.1) nazivamo Ojler - Lagranžova jednačina po ova dva naučniku.

1879. godine Rejmond[4], profesor na univerzitetu u Tibingenu u Nemačkoj, istakao je da je Lagranžovo izvođenje (2.1) nepotpuno, jer nije dao nikakvo obrazloženje za dodatnu pretpostavku. Zaista, ako je $Y(x)$ bilo koja funkcija lokalnog ekstrema J nad $D[K_0 = y_0, K_1 = y_1]$, sa $D = C^1[x_0, x_1]$ onda je moguće da izvod $Y'(x)$ sam po sebi nije diferencijalan, a ako nije, onda funkcija

$$F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x)), \tag{2.2}$$

[2] Leonhard Euler (1707-1783) je jedan od najproduktivnijih matematičara. Rođen je u Bazelu (Švajcarska), a umro je u Sankt Peterburgu. Bio je veoma značajan matematičar toga vremena koga su njegovi savremenici zvali "otelotvorena analiza" putem koje je otkrivao i tumačio tajne fenomena prirode i određivao dalje tokove razvitka matematike u neprekidnom ljudskom nastojanju da spozna prirodu i da je menja.

[3] Joseph-Louis, comte de Lagrange (1736-1813) je istaknuti francuski matematičar, mehaničar i astronom. Rodio se u Torinu, gde je živeo do 1766. godine. Mnoga Lagranžova otkrića nose njegovo ime: Formula za ostatak Tejlerovog reda, teorema o srednjoj vrednosti, interpolacioni polinom, metode multiplikatora, varijacije konstanti, rešavanje parcijalnih jednačina, uslovi varijacionog problema, Lagranžova metoda multiplikatora u matematici, metoda nalaženja uslovnih ekstrema funkcije dve ili više promenljivih, osnovna teorema diferencijalnog računa (Lagranžova teorema).

[4] Paul du Bois-Reymond (1831-1889), nemački matematičar

uopšte neće biti diferencijalna, pa Lagranžov dokaz ne važi. Rejmond je pokazao, u stvari, da će funkcija (2.2) automatski biti neprekidno diferencijalna za funkciju ekstrema $Y(x)$ kao posledica neophodnog uslova

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_Y(x, Y(x), Y'(x))\Delta Y(x) + F_{Y'}(x, Y(x), Y'x)\Delta Y'(x)]\, dx =$$
$$= \lambda_0 \Delta Y(x_0) + \lambda_1 \Delta Y(x_1). \qquad (2.3)$$

Stoga je Rajmond učinio Lagranžovo izvođenje potpunim.

2.2.2 Slab i jak ekstrem

Ojler - Lagranžova jednačina (ili samo Ojlerova jednačina) je u tesnoj vezi sa potrebnim uslovom za slab ekstrem funkcionele

$$J(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t))\, dt.$$

Prvo je neophodno pojasniti razliku između slabog i jakog ekstrema.

Pretpostavićemo da je podintegralna funkcija dovoljno glatka[5]. Funkcionela $J(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t))\, dt$ je definisana nad prostorom neprekidno diferencijabilnih funkcija, $C^1[a, b]$. Za određivanje lokalnih ekstrema funkcionele J neophodno je precizirati u kojoj normi se definiše okolina nekog elementa $x_0 \in C^1[a, b]$. Primećujemo da važi:

$$\{x \in C^1[a, b] \mid \|x - x_0\|_1 < \epsilon\} \subset \{x \in C^1[a, b] \mid \|x - x_0\| < \epsilon\}.$$

Pojmovi jakog i slabog ekstrema su zasnovani na ovoj primedbi.

Ako za neko $x_0 \in C^1[a, b]$ važi $J(x_0) < J(x)$ za sve $x \in C^1[a, b]$ za koje je $\|x - x_0\|_1 < \epsilon$, onda J ima u tački x_0 *slab lokalni ekstrem*, a ako je $J(x_0) \leq J(x)$, za sve $x \in C^1[a, b]$ za koje je $\|x - x_0\| < \epsilon$ onda je reč o *jakom lokalnom ekstremu*. Jaki ekstremi su uvek i ekstremi u slabom smislu, dok obrnuto ne mora da bude tačno. Na osnovu ovoga možemo zaključiti da je potreban uslov za slab ekstrem i potreban uslov za jak ekstrem.

U slučaju određivanja globalnog ekstrema, jak ekstrem se posmatra u prostoru $(C[a, b], \|\cdot\|)$, a slab ekstrem se posmatra u prostoru $(C^1[a, b], \|\cdot\|)$.

[5]Pretpostavlja se da f ima bar neprekidne izvode drugog reda po svakoj promenljivoj.

Posmatra se problem određivanja slabog ekstrema funkcionele

$$J(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t))\, dt,$$

pri čemu su unapred zadati granični uslovi $x(a) = A,\ x(b) = B$.

Da bi priraštaj $x(t) + h(t),\ t \in [a, b]$ nezavisno promenljive $x(t)$, $t \in [a, b]$ ispunjavao granične uslove, pretpostavlja se da važi $h(a) = h(b) = 0$.

Iz potrebnog uslova za ekstrem funkcionele J, koji je dat sa $\delta J = 0$, preostaje još da se odredi varijacija funkcionele J. Kako je

$$\Delta J_x(h) = \int_a^b \big[F(t, (x+h)(t), (x+h)'(t)) - F(t, x(t), x'(t))\big],$$

iz definicije podintegralne funkcije sledi:

$$F(t, x+h, x'+h') - F(t, x, x') = \Big(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial x'} h'\Big) + r(t, x, x', h, h'),$$

pri čemu važi $r(t, x, x', h, h') \to 0$, kada $\|h\|_1 \to 0$. Odavde je

$$\delta J_x(h) = \int_a^b \Big(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial x'} h'\Big)\, dt = 0. \tag{2.4}$$

Funkcije x za koje važi (2.4) su rešenja izvesnih diferencijalnih jednačina drugog reda, što je posledica narednih razmatranja.

Lema 2.3 (Osnovna lema varijacionog računa)**.**

(a) (Lagranžova lema) Neka je data funkcija $F \in C[a, b]$ i neka važi $\int_a^b F(t)h(t)\, dt = 0$, za sve $h \in C^1[a, b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. Dokazati da je tada $F \equiv 0$.

(b) Neka je data funkcija $g \in C[a, b]$ i neka važi $\int_a^b g(t)h'(t)\, dt = 0$, za sve $h \in C^1[a, b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. Dokazati da je tada $g \equiv const$.

Dokaz. a) Pretpostavimo da postoji $t_0 \in (a, b)$ tako da je $F(t_0) \neq 0$. Neka je, na primer, $F(t_0) > 0$. Kako je funkcija F neprekidna funkcija, sledi da postoji interval $(c,d) \subset (a,b)$ koji sadrži tačku t_0, tako da važi $F(t) > 0$ za sve $t \in (c,d)$. Neka je $h(t) := (c-t)^2(d-t)^2$, $t \in (c,d)$, a $h(t) = 0$ za $t \in [a,b] \setminus (c,d)$. Lako se proverava da je $\int\limits_a^b F(t)h(t)\,dt > 0$, što je u kontradikciji sa uslovom zadatka.

b)Ako iskoristimo teoremu o srednjoj vrednosti za integral, sledi da postoji $c \in \mathbb{R}$, tako da važi:

$$\int\limits_a^b (g(t)-c)\,dt = 0.$$

Treba pokazati da za proizvoljnu neprekidnu funkciju $u(t)$, $t \in [a,b]$, važi:

$$\int\limits_a^b (g(t)-c)u(t)\,dt = 0.$$

Neka je $u \in C[a,b]$. Tada, ako je $\alpha = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b u(t)\,dt$, za funkciju $\lambda(t) = u(t) - \alpha, t \in [a,b]$, važi $\int\limits_a^b \lambda(t)\,dt = 0$.

Vidi se da funkcija $h(t) = \int\limits_a^t \lambda(\tau)\,d\tau$, $t \in [a,b]$ ispunjava uslove zadatka ($h'(t) = \lambda(t)$, $t \in [a,b]$). Dakle,

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b (g(t)-c)u(t)\,dt &= \int\limits_a^b g(t)\lambda(t)\,dt - c\int\limits_a^b \lambda(t)\,dt + \lambda\int\limits_a^b (g(t)-c)\,dt \\ &= 0,\end{aligned}$$

za proizvoljnu funkciju $u \in C[a,b]$. Za funkciju $u(t) = g(t) - c$, $t \in [a,b]$ dobija se:

$$\int\limits_a^b (g(t)-c)^2\,dt = 0,$$

odnosno $g(t) = c$, $t \in [a,b]$. □

Lema 2.4. *(Rejmondova lema) Neka su date funkcije $f, g \in C[a,b]$ i neka važi*

$$\int\limits_a^b \big(f(t)h(t) + g(t)h'(t)\big)\,dt = 0,$$

za sve $h \in C^1[a,b]$ za koje je $h(a) = h(b) = 0$. Tada je g diferencijalna i važi $f(t) - g'(t) = 0,\ t \in [a,b]$.

Dokaz. Neka je $F(t) = \int\limits_a^t f(\tau)\,d\tau, t \in [a,b]$. Parcijalnom integracijom dobija se:

$$\int\limits_a^b f(t)h(t) = h(t)F(t)\Big|_a^b - \int\limits_a^b F(t)h'(t)\,dt = -\int\limits_a^b F(t)h'(t)\,dt.$$

Prema tome

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b \big[f(t)h(t) + g(t)h'(t)\big]\,dt &= \int\limits_a^b \big[g(t) - F(t)\big]h'(t)\,dt \\ &= 0.\end{aligned}$$

Na osnovu leme (2.3) pod a) dobija se $g(t) = F(t) + c$, za neko $c \in \mathbb{R}$ i za svako $t \in [a,b]$. Kako je desna strana ove jednakosti diferencijalna ($F'(t) = f(t),\ t \in [a,b]$), sledi $g \in C^1[a,b]$ i $g'(t) = f(t),\ t \in [a,b]$. $\square$

Pomoću leme Di Boa Rejmonda, iz (2.4) sledi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \tag{2.5}$$

Jednačina (2.5) zove se *Ojlerova jednačina.* Konačno možemo da zaključimo, da je potreban uslov koji funkcija x_0 mora da ispunjava da bi bila ekstrem funkcionele J, da x_0 bude rešenje Ojlerove jednačine.

Teorema 2.5 (Osnovna teorema varijacionog računa)**.** *Neka je data funkcionela $J(x) = \int\limits_a^b F(t, x(t), x'(t))\,dt$, pri čemu $x \in C^1[a,b]$ i važi $x(a) = A, x(b) = B$. Ako funkcionela J ima ekstrem $x_0 \in C^1[a,b]$, onda je x_0 rešenje Ojlerove jednačine*

$$\frac{\partial}{\partial x}F(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x'}F(t, x(t), x'(t))\right) = 0,$$

sa graničnim uslovima $x(a) = A,\ x(b) = B$.

Dokaz. Na osnovu prethodnih razmatranja, sledi direktan dokaz. Imamo, ako je x_0 ekstrem funkcionele J onda, na osnovu Teoreme 2.1, važi $\delta J_{x_0} \equiv 0$

odnosno x_0 zadovoljava (2.4). Konačno, na osnovu Leme 2.4, da bi važilo (2.4), x_0 mora biti rešenje diferencijalne jednačine

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) = \frac{\partial F}{\partial x},$$

što je tačno Ojler-Lagranžova jednačina. □

2.2.3 Izvođenje Ojlerove jednačine

Integralne krive Ojlerove jednačine nazivaju se ekstremima. Pošto je Ojlerova jednačina diferencijalna jednačina drugog reda, njeno rešenje će zavisiti od dve proizvoljne konstante, koje su određene iz graničnih uslova $y(a) = A$, $y(b) = B$. Problem koji se obično razmatra u teoriji diferencijalnih jednačina je pronalaženje rešenja koje je definisano u okolini neke tačke i zadovoljava date početne uslove (Košijev problem). Međutim u rešavanju Ojlerove jednačine tražimo rešenje koje je definisano u nekom fiksnom intervalu i koje zadovoljava date granične uslove. Stoga, pitanje da li određeni varijacioni problem ima rešenje ili ne, se ne svodi samo na uobičajene teoreme postojanja za diferencijalne jednačine. Iz tog razloga sada navodimo teoremu Bernštajna, koja se tiče postojanja i jedinstvenosti rešenja jednačine oblika:

$$y'' = F(x, y, y'). \tag{2.6}$$

Teorema 2.6. *(Bernštajn) Ako su funkcije F, F_y i $F_{y'}$ neprekidne u svakoj tački (x, y) za bilo koje konačno y' i ako postoji konstanta $k > 0$ i funkcije*

$$\alpha = \alpha(x, y) \geq 0,\ \ \beta = \beta(x, y) \geq 0,$$

(koje su ograničene u svakoj konačnoj oblasti neke ravni) tako da

$$F_y(x, y, y') > k,\ \ \left|F(x, y, y')\right| \leq \alpha {y'}^2 + \beta,$$

tada jedna i samo jedna kriva jednačine (2.6) prolazi kroz bilo koje dve tačke (a, A) i (b, B) sa različitim apscisama $(a \neq b)$.

Jednačina $\delta J = 0$ daje potreban uslov za ekstrem, ali on nije i dovoljan. U mnogim slučajevima Ojlerova jednačina je sama po sebi dovoljna da pruži potpuno rešenje problema. U stvari, postojanje ekstrema je često jasno iz fizičkog ili geometrijskog značenja problema, na primer, u problemu brahistohrone[6]. Ako u tom slučaju postoji samo jedan ekstrem, koji zadovoljava granične uslove problema, ovaj ekstrem mora biti kriva.

[6]Problem pronalaženja krive (putanje) takve da telo od tačke A do tačke B stigne za najkraće moguće vreme.

Za funkcionelu oblika
$$\int_a^b F(x, y, y')\,dx,$$
Ojlerova jednačina je diferencijalna jednačina drugog reda, ali se može ispostaviti da kriva za koju funkcionela ima svoj ekstrem nije dvostruko diferencijalna. Na primer, posmatrajmo funkcionelu
$$J(y) = \int_{-1}^{1} y^2(2x - y')^2\,dx,$$
gde je $y(-1) = 0$, $y(1) = 1$.
Minimum $J(y)$ jednak je nuli i postiže se za funkciju
$$y = y(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$
koja nema drugi izvod za $x = 0$. Ipak, $y(x)$ zadovoljava odgovarajuću Ojlerovu jednačinu. U stvari, pošto je u ovom slučaju
$$F(x, y, y') = y^2(2x - y')^2,$$
sledi da su funkcije
$$F_y = 2y(2x - y')^2, \quad F_{y'} = -2y^2(2x - y'), \quad \frac{d}{dx}F_{y'},$$
jednake 0 za $-1 \leq x \leq 1$. Dakle, uprkos činjenici da je Ojlerova jednačina diferencijlna jednačina drugog reda i da $y''(x)$ ne postoji u svim tačkama intervala $[-1, 1]$, zamena $y(x)$ u Ojlerovu jednačinu pretvara je u identitet.

Sada, dajemo uslove koji garantuju da rešenje Ojlerove jednačine ima drugi izvod.

Teorema 2.7. *Pretpostavimo da $y = y(x)$ ima neprekidan prvi izvod i zadovoljava Ojlerovu jednačinu*
$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$
Zatim, ako funkcija $F(x, y, y')$ ima neprekidan prvi i drugi izvod u odnosu na sve svoje argumente, $y(x)$ ima neprekidan drugi izvod u svim tačkama (x, y) gde je
$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \neq 0.$$

Dokaz. Uzmimo u obzir razliku

$$\begin{aligned}\Delta F_{y'} &= F_{y'}(x+\Delta x, y+\Delta y, y'+\Delta y') - F_{y'}(x,y,y') = \\ &= \Delta \bar{F}_{y'x} + \Delta \bar{F}_{y'y} + \Delta y' \bar{F}_{y'y'},\end{aligned}$$

pri čemu nadvučeno pokazuje da se odgovarajući izvodi vrednuju duž određenih međukrivih. Ovu razliku delimo sa Δx i razmatramo granicu rezultujućeg izraza

$$\bar{F}_{y'x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\bar{F}_{y'y} + \frac{\Delta y'}{\Delta x}\bar{F}_{y'y'},$$

kad $\Delta x \to 0$. (Ova granica postoji, pošto $F_{y'}$ ima izvod u odnosu na x, koji je, prema Ojlerovoj jednačini, jednak F_y.) Pošto su po hipotezi drugi izvodi $F(x,y,y')$ neprekidni, onda ako $\Delta x \to 0$, $\bar{F}_{y'x}$ konvergira ka $F_{y'x}$, tj. vrednosti $\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x}$ u tački x. Iz postojanja y' i konstantnog drugog izvoda $F_{y'y}$ sledi da drugi član $\frac{\Delta y}{\Delta x}\bar{F}_{y'y}$ takođe ima granicu kad $\Delta x \to 0$. Ali onda i treći član ima granicu (pošto postoji granica zbira tri člana), tj. postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x}\bar{F}_{y'y'}.$$

Kako $\Delta x \to 0$, $\bar{F}_{y'y'}$ konvergira ka $F_{y'y} \neq 0$, i stoga

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = y''(x),$$

postoji.
Konačno, iz jednačine

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - F_y = 0,$$

možemo naći izraz za y'', iz kojeg je jasno da je y'' konstantno gde god je $F_{y'y'} \neq 0$. Ovo dokazuje teoremu. □

Napomena: Ovde se pretpostavlja da su ekstremi glatki[7].

[7]Kažemo da je funkcija $y(x)$ glatka u intervalu $[a,b]$ ako je neprekidna u $[a,b]$ i ima neprekidan izvod u $[a,b]$. Kažemo da je $y(x)$ čitava glatka u $[a,b]$ ako je konstantna svuda u $[a,b]$ i ima konstantan izvod u $[a,b]$ osim eventualno u konačnom broju tačaka.

Glava 3

Varijacioni račun sa promenljivim krajnjim tačkama

Na početku ove glave ukratko će biti predstavljeni granični uslovi, tj. vrste varijacionog računa u zavisnosti od graničnih uslova, dok će u većem delu rada, detaljnije biti obrađen varijacioni račun sa promenljivim krajnjim tačkama. Literatura korišćena za obradu ove glave je [1], [5] i [6]. Slike korišćene u ovom delu su preuzete iz [5] i [6].

3.1 Vrste graničnih uslova opšteg karaktera

3.1.1 Granični uslovi opšteg karaktera I

Proučavali smo problem traženja ekstrema funkcionele

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx,$$

pri čemu je dejstvo funkcionele J bilo ograničeno na funkcije y, koje zadovoljavaju granične uslove $y(a) = A$ i $y(b) = B$.

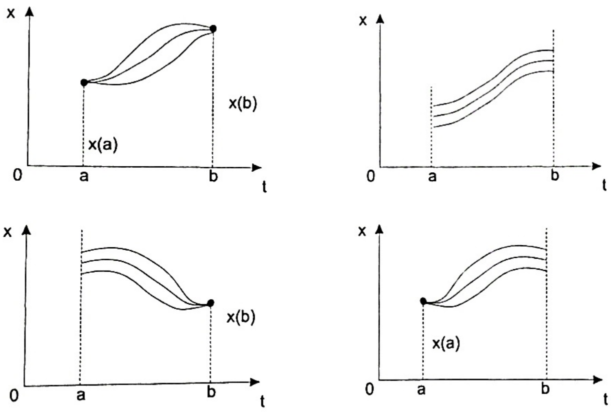
Posmatraju se najpre najjednostavnija uopštenja kada se pretpostavlja da su funkcije y definisane na intervalu $[a, b]$, ali same vrednosti $x(a)$ i $x(b)$ nisu unapred definisane.
Postoje sledeće mogućnosti:

1. Uslovi $y(a) = A$ i $y(b) = B$ su zadati;

2. Funkcija y nije zadata ni u a ni u b;

3. Funkcija y nije zadata u tački a, ali je zadato $y(b) = B$;

4. Zadato je $y(a) = A$, a za $x = b$ funkcija y nije zadata.



Slika 3.1. Granični ualovi 1., 2., 3. i 4.

3.1.2 Granični uslovi opšteg karaktera II

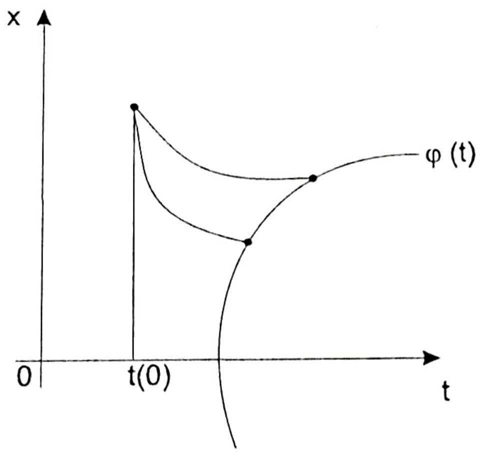
U velikom broju praktičnih situacija neophodno je varirati i nazavisno promenljivu koja figuriše u zadatku, što se često javlja u slučaju kada jedna ili obe granice određenog integrala, kriterijuma optimalnosti, nisu unapred određene.

Radi jednostavnosti posmatraće se problem nalaženja ekstrema funkcionele J, ako je $y(a) = A$, a drugi granični uslov je tačka na grafiku funkcije ϕ.

3.1.3 Granični uslovi opšteg karaktera III

U granične uslove opštijeg karaktera spada i slučaj kada je funkcionela zadata u obliku zbira određenog integrala i vanintegralnog člana, koji je funkcija vrednosti ekstremale u granicama intervala nezavisno promenljive. Takvi problemi se nazivaju problemi Bolcinog[1] tipa. Motivacija za proučavanje problema Bolcinog tipa leži u činjenici da rešenje diferencijalne jednačine, koja opisuje izvesni fizički proces, može biti ekstremala funkcionele u kojoj, osim integrala, postoji i vanintegralni član.

[1] Bolza (1857-1942)



Slika 3.2. Problem sa pokretnom granicom.

3.2 Problem promenljive krajnje tačke

Funkcionela $J = J(Y)$ definisana sa

$$J(Y) = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, Y(x), Y'(x)\right), \tag{3.1}$$

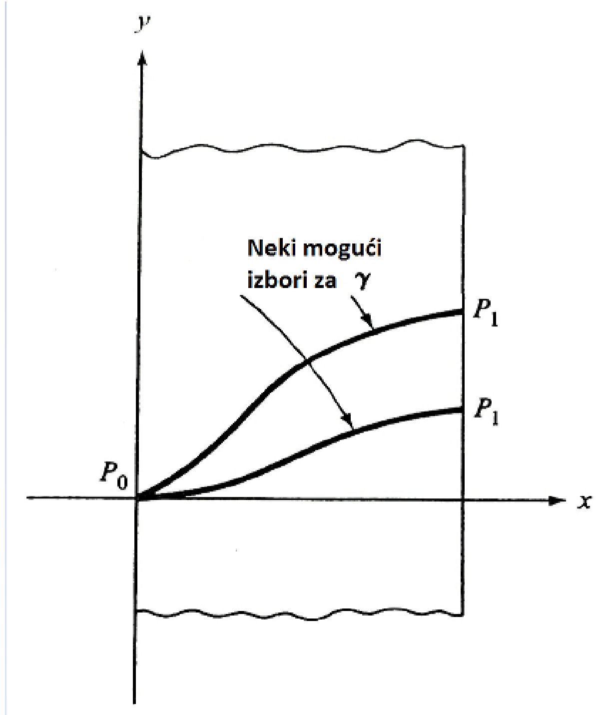
može se smatrati funkcijom koja je definisana za određene krive γ u (x, y)-ravni, koje su date u obliku

$$\gamma : y = Y(x), \qquad x_0 \leq x \leq x_1, \tag{3.2}$$

za neku funkciju $Y(x)$.

Nekada je potrebno pronaći minimum ili maksimum funkcionele (3.1) za krivu γ, pri čemu jedna ili obe krajnje tačke, ove krive, variraju u datom skupu tačaka.

Na primer, želimo da odredimo ugao pod kojim će čamac, za najmanje moguće vreme preći reku od date početne tačke P_0, među svim mogućim putevima γ, do neke tačke na drugoj strani reke, kao što je prikazano na Slika 3.3. U ovom slučaju krajnja tačka P_1 nije data, već se mora odrediti zajedno sa krivom $y = Y(x)$ koja je povezuje sa P_0, kako bi se dobilo najmanje vreme tranzita, među svim putevima koji se kreću iz P_0. Ili, kao još jedan primer, možemo razmotriti modifikovanu formu problema brahistohrone Džona Bernulija u kojoj je početna tačka $P_0 = (x_0, y_0)$ fiksirana, dok se za krajnju tačku P_1 zahteva samo poznavanje x - koordinate kao $x = x_1$,



Slika 3.3

kao što je dato na Slika 3.4. Problem bi bio pronaći krivu (3.2) koja daje najmanju vrednost funkcionele $T = T(Y)$ koja je data sa

$$T(Y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + Y'(x)^2}{2g\,[y_0 - Y(x)]}}\, dx,$$

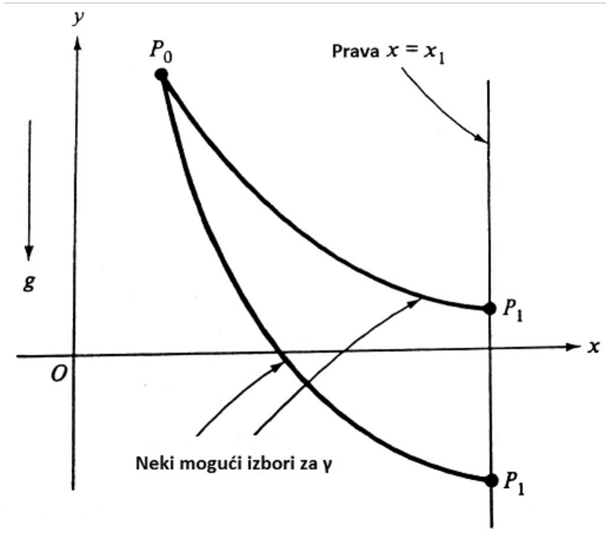
i podložna je jednom ograničenju

$$Y(x_0) = y_0, \tag{3.3}$$

gde se zahteva da se γ završava na pravoj c datoj sa

$$c : x = x_1, \qquad \text{za sve } y. \tag{3.4}$$

Ovaj modifikovani problem brahistohrone postavio je Džejms Bernuli 1697. godine, godinu dana nakon što je njegov mlađi brat Džon izazvao tadašnje matematičare da reše problem brahistohrone fiksne krajnje tačke. Ovaj modifikovani problem nazivamo problem brahistohrone Džejmsa Bernulija.



Slika 3.4

Uopšteno, problem je odrediti najkraće vreme (najmanja vrednost funkcionele T) za koje se stigne od početne tačke $P_0 = (x, y)$, među svim krivama, do neke krajnje tačke koja se nalazi na specijalnoj pravoj C datoj sa

$$C : y = ax + b, \qquad \text{za sve } x, \tag{3.5}$$

gde su a i b dati brojevi (Slika 3.5). U poslednjem slučaju, x - koodinata proizvoljne tačke $P_1 = (x_1, y_1)$ nije čak ni navedena. Potrebno je samo da P_1 zadovoljava relaciju $y_1 = ax_1 + b$. Uopšteno, problem može biti da se odredi minimum ili maksimum funkcionele J iz (3.1), među svim krivama, počevši od $P_0 = (x_0, y_0)$ i završavajući na nekoj datoj proizvoljnoj krivoj C, kao što je prikazano na Slika 3.6, gde se kriva C može opisati kao

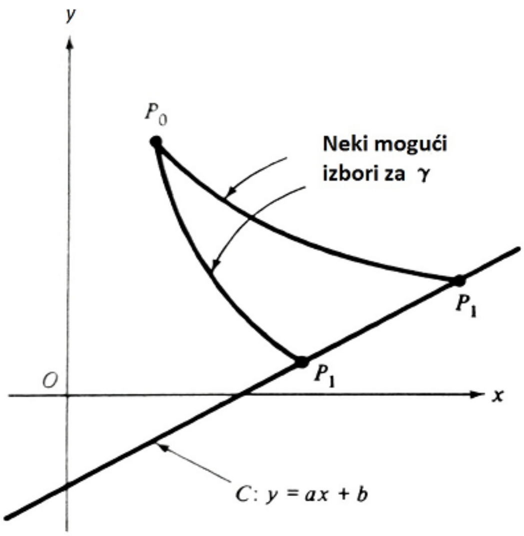
$$C : \Phi(x, y) = 0, \tag{3.6}$$

gde je Φ data funkcija po x i y. Na primer, (3.6) uključuje (3.4) ako definišemo Φ pomoću

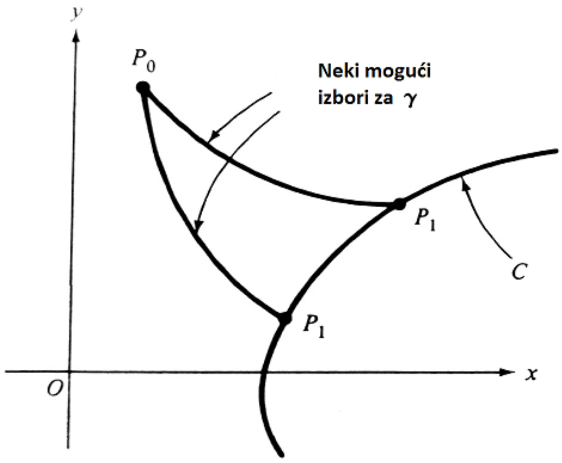
$$\Phi(x, y) = x - x_1,$$

dok (3.4) uključuje (3.5) ako uzmemo

$$\Phi(x, y) = y - ax - b.$$



Slika 3.5



Slika 3.6

Stoga razmatramo opšti problem pronalaženja minimuma ili maksimuma funkcionele

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, Y(x), Y'(x))\, dx, \tag{3.7}$$

između svih krivih γ datih sa (3.2) koje zadovoljavaju početni uslov (3.3) i proizvoljno ograničenje (pogledati (3.2) i (3.6))

$$\Phi(x_1, Y(x_1)) = 0. \tag{3.8}$$

Pošto je u ovom slučaju proizvoljna x - koordinata x_1, koja se pojavljuje u (3.7), slobodna da varira pod uslovom da važi samo (3.8). Smatramo da je funkcionela (3.7) funkcija po x_1, kao i funkcija $Y = Y(x)$. (Imajmo u vidu da je x_0 fiksirano u celom poglavlju.) Otuda uzimamo kao naš osovni vektorski prostor χ, skup svih parova $(x_1, Y) = (x_1, Y(x))$, gde x_1 može biti bilo koji proizvoljan broj u vektorskom prostoru $\mathbb{R}$, svih brojeva i gde $Y = Y(x)$ može biti bilo koja neprekidno diferencijalna funkcija na $\mathbb{R}$, koja je jednaka nuli za sve velike $|x|$. [Pogodno je zahtevati da je $Y(x)$ jednako nuli za velike $|x|$, tako da će desna strana (3.9) u nastavku biti konačna.] Ako su (x_1, Y) i (x^*, Y^*) bilo koja dva vektora u χ, onda njihov zbir definišemo na sledeći način

$$(x_1, Y) + (x_1^*, Y^*) = (x_1 + x_1^*, Y + Y^*),$$

što opet daje vektor u χ. Slično definišemo proizvod $a(x_1, Y)$ sa

$$a(x_1, Y) = (ax_1, aY),$$

koji daje vektor u χ za bilo koji broj $a \in \mathbb{R}$ i bilo koji vektor (x_1, Y) u χ. Konačno dobijamo χ sa normom $\|.\|$ definisano sa

$$\|(x_1, Y)\| = |x_1| + \max_{\forall x \in \mathbb{R}} Y(x) + \max_{\forall x \in \mathbb{R}} Y'(x), \tag{3.9}$$

za bilo koji vektor $(x_1, Y) = (x_1, Y(x))$ iz χ. Naglašavamo da se normirani vektorski prostor χ sastoji od svih vektora (x_1, Y) za sve brojeve x_1 i za sve neprekidno diferencijalne funkcije $Y = Y(x)$. Ne mora postojati nikakva posebna relacija između broja x_1 i neprekidno diferencijalne funkcije $Y = Y(x)$ koja se javlja u paru (x_1, Y). Konkretno, svaki takav par je u χ bez obzira da li par zadovoljava relaciju (3.8).

Problem ekstrema funkcionele (3.7) koji se razmatra, sada se može navesti na sledeći način. Tražimo vektor $(x_1, Y) = (x_1, Y(x))$ u nekom otvorenom skupu D u χ koji će maksimizirati ili minimizirati u D funkcionelu J definisanu sa

$$J(x_1, Y) = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, Y(x), Y'(x)\right)\, dx, \tag{3.10}$$

gde su dozvoljeni vektori $(x_1, Y) = (x_1, Y(x))$ takođe potrebni da zadovolje ograničenja iz (3.3) i (3.8). Domen D, funkcionele (3.10), se uzima kao neki specijalni otvoren podskup normiranog vektorskog prostora χ. Na primer, D se može sastojati od svih vektora (x_1, Y) u χ sa x_1 ograničenih da leže u nekom datom otvorenom intervalu u $\mathbb{R}$ i sa $Y = Y(x)$ ograničenim da bude u nekom pogodnom otvorenom skupu u normiranom vektorskom prostoru $C^1(\mathbb{R})$.

Ako definišemo funkcionele K_0 i K_1 na D kao

$$K_0(x_1, Y) = Y(x_0), \tag{3.11}$$

$$K_1(x_1, Y) = \Phi(x_1, Y(x_1)), \tag{3.12}$$

onda će sadašnji problem pronaći vektore ekstrema u $D[K_0 = y_0, K_1 = 0]$ za funkcionelu J iz (3.10). Naglašavamo da je broj x_0, koji se pojavljuje u (3.10) i (3.11), dat i uvek fiksiran, iako bismo mogli razmotriti i opštiji problem u kome je x_0 kao i x_1 dozvoljeno da varira. [Za takav opštiji problem uzeli bismo vektorski prostor χ kao skup svih trojki (x_0, x_1, Y) gde bi x_0 i x_1 mogli biti bilo koji brojevi i gde bi $Y = Y(x)$ mogla biti bilo koja pogodna neprekidno diferencijalna funkcija.]

Da bismo nastavili u ovom slučaju, potrebno je da izračunamo varijacije funkcionela J, K_0 i K_1, gde je dozvoljeno da x_1 i $Y = Y(x)$ variraju (ali ne i x_0).

Ako definišemo diferencijal funkcionele J na sledeći način

$$\delta J(x; \Delta x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(x + \epsilon \Delta x) - J(x)}{\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon} J(x + \epsilon \Delta x)\bigg|_{\epsilon=0},$$

i tu definiciju primenimo na našu funkcionelu J definisanu u (3.10), dobijamo da važi

$$\delta J(x_1, Y; \Delta x_1, \Delta Y) = \frac{d}{d\epsilon} J(x_1 + \epsilon \Delta x_1, Y + \epsilon \Delta Y)\bigg|_{\epsilon=0}. \tag{3.13}$$

Na sličan način tražimo jednačinu za K_0 i K_1. Neka je $(\Delta x_1, \Delta Y)$ bilo koji vektor u vektorskom prostoru χ i važi $(x_1, Y) + \epsilon(\Delta x_1, \Delta Y) = (x_1 + \epsilon \Delta x_1, Y + \epsilon \Delta Y)$ za bilo koja dva vektora (x_1, Y) i $(\Delta x_1, \Delta Y)$ i za proizvoljno ϵ. Da bismo pronašli jednačinu koju želimo koristićemo (3.10):

$$\begin{aligned} &J(x_1 + \epsilon \Delta x_1, Y + \epsilon \Delta Y) = \\ &= \int_{x_0}^{x_1 + \epsilon \Delta x_1} F\left(x, Y(x) + \epsilon \Delta Y(x), Y'(x) + \epsilon \Delta Y'(x)\right) dx. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Traženi izvod ovog izraza u odnosu na parametar ϵ, može se dobiti primenom

$$\frac{d}{d\epsilon}\int\limits_{x_0}^{\xi(\epsilon)} f(x;\epsilon)\,dx = f(\xi(\epsilon);\epsilon)\xi'(\epsilon) + \int\limits_{x_0}^{\xi(\epsilon)} \frac{\partial f(x;\epsilon)}{\partial\epsilon}\,dx, \tag{3.15}$$

što važi za bilo koju glatku funkciju $f = f(x;\epsilon)$ i bilo koju neprekidno diferencijalnu funkciju $\xi = \xi(\epsilon)$ u zavisnosti od ϵ, gde je $\xi'(\epsilon) = \frac{d\xi(\epsilon)}{d\epsilon}$. Ako uzmemo $\xi(\epsilon) = x_1 + \epsilon\Delta x_1$ i $f(x,\epsilon) = F\left(x, Y(x) + \epsilon\Delta Y(x), Y'(x) + \epsilon\Delta Y'(x)\right)$ u (3.15), sa (3.13) i (3.14) dobijamo

$$\begin{aligned}\delta J(x_1, Y; \Delta x_1, \Delta Y) = {} & F(x_1, Y(x_1), Y'(x_1))\Delta x_1 + \\ & + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial\epsilon} F(x, Y(x) + \epsilon\Delta Y(x), Y'(x) + \epsilon\Delta Y'(x))\Big|_{\epsilon=0}\,dx,\end{aligned} \tag{3.16}$$

iz čega dobijamo:

$$\begin{aligned}\delta J(x_1, Y; \Delta x_1, \Delta Y) = {} & F(x_1, Y(x_1), Y'(x_1))\Delta x_1 + \\ & + \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[F_Y(x, Y(x), Y'(x))\Delta Y(x) + F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x))\Delta Y'(x)\right]\,dx,\end{aligned} \tag{3.17}$$

za bilo koji vektor $(\Delta x_1, \Delta Y)$ iz vektorskog prostora χ.

Sada kada imamo varijaciju funkcionele J, prelazimo na funkcionele K_0 i K_1. Slično kao (3.13), za K_0 imamo

$$\delta K_0(x_1, Y; \Delta x_1, \Delta Y) = \frac{d}{d\epsilon} K_0(x_1 + \epsilon\Delta x_1, Y + \epsilon\Delta Y)\Big|_{\epsilon=0},$$

i iz (3.11) sledi da je

$$K_0(x_1 + \epsilon\Delta x_1, Y + \epsilon\Delta Y) = Y(x_0) + \epsilon\Delta Y(x_0),$$

pa dobijamo da je

$$\delta K_0(x_1, Y; \Delta x_1, \Delta Y) = \Delta Y(x_0), \tag{3.18}$$

za bilo koji vektor $(\Delta x_1, \Delta Y)$ iz χ.

Da bismo izračunali varijaciju K_1, ponovo imamo

$$\delta K_1(x_1, Y; \Delta x_1, \Delta Y) = \frac{d}{d\epsilon} K_1(x_1 + \epsilon\Delta x_1, Y + \epsilon\Delta Y)\Big|_{\epsilon=0}, \tag{3.19}$$

u ovom slučaju iz (3.12) dobijamo da je

$$K_1(x_1+\epsilon\Delta x_1, Y+\epsilon\Delta Y) = \Phi(x_1+\epsilon\Delta x_1, Y(x_1+\epsilon\Delta x_1)+\epsilon\Delta Y(x_1+\epsilon\Delta x_1)).$$

Ako su $x = x(\epsilon)$ i $y = y(\epsilon)$ bilo koje dve neprekidno diferencijalne funkcije parametra ϵ, onda za bilo koju neprekidno diferencijalnu funkciju $\Phi = \Phi(x, y)$ lančano pravilo diferencijalnog računa daje

$$\frac{d}{d\epsilon}\Phi(x(\epsilon), y(\epsilon)) = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x(\epsilon), y(\epsilon))\frac{dx}{d\epsilon} + \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x(\epsilon), y(\epsilon))\frac{dy}{d\epsilon}.$$

Ako uzmemo

$$\begin{aligned} x(\epsilon) &= x_1+\epsilon\Delta x_1, \\ y(\epsilon) &= Y(x_1+\epsilon\Delta x_1)+\epsilon\Delta Y(x_1+\epsilon\Delta x_1), \end{aligned} \tag{3.20}$$

sa

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\epsilon} &= \Delta x_1, \\ \frac{dy}{d\epsilon} &= Y'(x_1+\epsilon\Delta x_1)\Delta x_1 + \Delta Y(x_1+\epsilon\Delta x_1) + \epsilon\Delta Y'(x_1+\epsilon\Delta x_1)\Delta x_1, \end{aligned}$$

tada za poslednjih nekoliko jednačina dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon}K_1(x_1+\epsilon\Delta x_1, Y+\epsilon\Delta Y) = {} & \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x(\epsilon), y(\epsilon))\Delta x_1 + \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x(\epsilon), y(\epsilon))[Y'(x_1+\epsilon\Delta x_1)\Delta x_1 + \\ & + \Delta Y(x_1+\epsilon\Delta x_1) + \epsilon\Delta Y'(x_1+\epsilon\Delta x_1)\Delta x_1], \end{aligned}$$

gde su $x(\epsilon)$ i $y(\epsilon)$ date sa (3.20). Ako sada uzmemo da je $\epsilon = 0$ i ubacimo u poslednju jednačinu, zajedno sa (3.19) i (3.20) dobijamo

$$\begin{aligned} \delta K_1(x_1, Y; \Delta x_1, \Delta Y) = {} & \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x_1, Y(x_1))\Delta x_1 + \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x_1, Y(x_1))[Y'(x_1)\Delta x_1 + \Delta Y(x_1)], \end{aligned} \tag{3.21}$$

za bilo koji vektor $(\Delta x_1, \Delta Y)$ vektorskog prostora χ.

Pretpostavimo sada da je vektor $(x_1, Y) = (x_1, Y(x))$ vektor lokalnog ekstrema J, nad $D[K_0 = y_0, K_1 = 0]$. Prema Ojler - Lagražovoj teoremi množioca (1.3) dobijamo neophodan uslov

$$\begin{aligned} \delta J(x_1, Y; \Delta x_1, \Delta Y) = {} & \lambda_0\delta K_0(x_1, Y; \Delta x_1, Y; \Delta x_1, \Delta Y) + \\ & + \lambda_1\delta K_1(x_1, Y; \Delta x_1, Y; \Delta x_1, \Delta Y), \end{aligned} \tag{3.22}$$

za odgovarajuće konstante λ_0 i λ_1 za sve vrednosti Δx_1, i sve neprekidno diferencijalne funkcije $\Delta Y = \Delta Y(x)$ na intervalu $x_0 \le x \le x_1$. [Svaka takva funkcija $\Delta Y(x)$ može se proširiti tako da bude definisana i neprekidno diferencijalna na $\mathbb{R}$ i tako da bude jednaka nuli za sve velike $|x|$; stoga se $(\Delta x_1, \Delta Y)$ može smatrati da je u χ.] Ako sada iskoristimo (3.17), (3.18) i (3.21) jednačina (3.22) postaje

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_1} \left[F_Y(x, Y(x), Y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x)) \right] \Delta Y(x)\, dx = \\
&= [\lambda_0 + F_{Y'}(x_0, y_0, Y'(x_0))]\, \Delta Y(x_0) + \\
&+ \left[\lambda_1 \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x_1, Y(x_1)) - F_{Y'}(x_1, Y(x_1), Y'(x_1)) \right] \Delta Y(x_1) + \\
&+ \Bigg\{ - F(x_1, Y(x_1), Y'(x_1)) + \\
&+ \lambda_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x_1, Y(x_1)) + Y'(x_1) \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x_1, Y(x_1)) \right] \Bigg\} \Delta x_1,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

koji mora da važi za sve Δx_1 i za sve funkcije koje su neprekidno diferencijalne $\Delta Y = \Delta Y(x)$ ako je $(x_1, Y) = (x_1, Y(x))$ vektor lokalnog ekstrema u $D[K_0 = y_0, K_1 = 0]$ za J. U (3.23) smo koristili (3.2) koje mora da zadovolji svaki takav vektor ekstrema (x_1, Y).

Ako prvo izaberemo $\Delta x_1 = 0$ u (3.23) i posmatramo samo funkcije $\Delta Y(x)$ koje se anuliraju u krajnjim tačkama x_0 i x_1 (to je dozvoljeno), dobijamo uslov

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F_Y\,(x, Y(x), Y'(x)) - \frac{d}{dx} F'_Y\,(x, Y(x), Y'(x)) \right] \Delta Y(x)\, dx = 0, \tag{3.24}$$

koji mora da važi za sve neprekidno diferencijalne funkcije $\Delta Y(x)$ na $[x_0, x_1]$ koje zadovoljavaju $\Delta Y(x_0) = 0$, $\Delta Y(x_1) = 0$. Ovim dobijamo da Ojler - Lagranžova jednačina, data sa

$$F_Y(x, Y(x), Y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x)) = 0, \tag{3.25}$$

mora biti zadovoljena za funkciju $Y = Y(x)$ i $x_0 \le x \le x_1$, ako je (x_1, Y) vektor lokalnog ekstrema na $D[K_0 = y_0, K_1 = 0]$ za funkcionelu J.

Ali, ako koristimo Ojler - Lagranžovu jednačinu (3.25) u (3.23) sledi da je

$$
\begin{aligned}
0 = &\left[\lambda_0 + F_{Y'}(x_0, y_0, Y'(x_0))\right]\Delta Y(x_0)+\\
&+\left[\lambda_1 \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x_1, Y(x_1)) - F_{Y'}(x_1, Y(x_1), Y'(x_1))\right]+\\
&+\Bigg\{ - F(x_1, Y(x_1), Y'(x_1))+\\
&+\lambda_1 \left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x_1, Y(x_1)) + Y'(x_1)\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x_1, Y(x_1))\right]\Bigg\}\Delta x_1, \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

takođe mora važiti za dve vrednosti Δx_1 i za sve neprekidno diferencijalne funkcije $\Delta Y(x)$ na $[x_0, x_1]$. Ako uzmemo da je $\Delta x_1 = 0$ i prvo uzmemo

$$\Delta Y(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0},$$

u (3.26) i to

$$\Delta Y(x) = \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0},$$

dobijamo sledeće neophodne uslove:

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 + F_{Y'}(x_0, y_0, Y'(x_0)) = 0,\\
\lambda_1 \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x_1, Y(x_1)) - F_{Y'}(x_1, Y(x_1), Y'(x_1)) = 0. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Koristeći ove uslove u (3.26) i uzimajući da je $\Delta x_1 = 1$, dobijamo dodatni uslov:

$$F(x_1, Y(x_1), Y'(x_1)) = \lambda_1 \left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x_1, Y(x_1)) + Y'(x_1)\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x_1, Y(x_1))\right]. \qquad (3.28)$$

Možemo eliminisati Ojler - Lagranžov množilac λ_1 između (3.27) i (3.28) tako što ćemo poslednju jednačinu sa obe strane pomnožiti sa $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, tada dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x_1, Y(x_1))F(x_1, Y(x_1), Y'(x_1)) =\\
&= F_{Y'}(x_1, Y(x_1), Y'(x_1))\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x_1, Y(x_1)) + Y'(x_1)\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x_1, Y(x_1))\right], \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

što je onda prirodni granični uslov koji mora da važi na promenljivoj krajnjoj tački $x = x_1$ za bilo koji lokalni vektor ekstrema $(x_1, Y(x))$. Ovaj prirodni granični uslov ima jedinstvenu geometrijsku interpretaciju u posebnom slučaju u kome integralna funkcija $F = F(x, y, z)$ iz (3.10) ima oblik

$$F(x, y, z) = f(x, y)\sqrt{1 + z^2}, \tag{3.30}$$

za neku datu funkciju $f = f(x, y)$. Ako važi (3.30), onda dobijamo

$$F(x, Y(x), Y'(x)) = \frac{f(x, Y(x))Y'(x)}{\sqrt{1 + Y'(x)^2}},$$

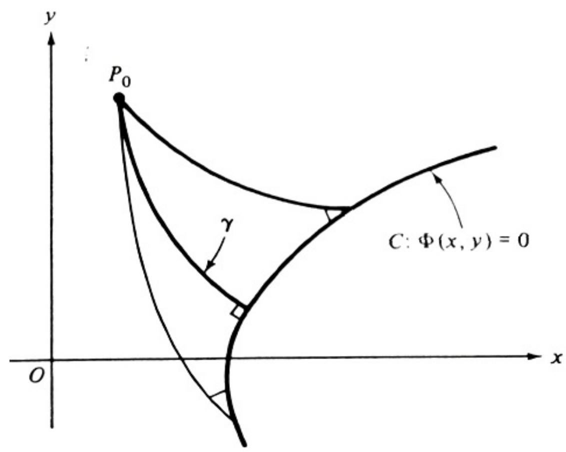
tako da se (3.29) pojednostavljuje sa (3.30) i dobija

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x_1, Y(x_1)) = Y'(x_1)\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x_1, Y(x_1)), \tag{3.31}$$

koji mora da važi na krajnjoj tački $x = x_1$ (osim eventualno ako važi da je $f(x_1, Y(x_1)) = 0$). Uslov (3.31) jednostavno zahteva da kriva ekstrema γ iz (3.2) mora da seče datu krivu C iz (3.6) ortogonalno (pod pravim uglom), kao što je prikazano na Slika 3.7. Zaista, poznato je iz diferencijalnog računa da je nagib $y' = y'_c$ krive C iz (3.6) dat sa

$$y'_c = -\frac{\partial\Phi/\partial x}{\partial\Phi/\partial y},$$

pa (3.31) zahteva da nagib $y' = Y'(x)$ krive ekstrema γ zadovolji



Slika 3.7

$$Y'(x_1) = -\frac{1}{y_c'(x_1)} \tag{3.32}$$

iz čega proizilazi traženi rezultat.

Treba napomenuti, ako terminalna kriva bude vertikalna linija sa $\Phi(x, y) = x - x_1$ u (3.6), za neko dato fiksno x_1, onda moramo smatrati da je funkcionela J iz (3.10) funkcija samo od $Y = Y(x)$ na fiksnom intervalu $x_0 \leq x \leq x_1$. U ovom slučaju je takođe utvrđeno da je rezultujući prirodni granični uslov u krajnjoj tački dat sa (3.29).

Sumirajući, pokazali smo da u traženju ovih krivih, oblika (3.2), koje daju minimum funkcionele J, počevši od $P_0 = (x_0, y_0)$ i završavajući na krivoj C datoj sa (3.6), treba da uzmemo u obzir samo one krive γ koje zadovoljavaju Ojler - Lagranžovu jednačinu (3.25) za $x_0 \leq x \leq x_1$, zajedno sa ograničenjima

$$Y(x_0) = y_0 \quad \text{i} \quad \Phi(x_1, Y(x_1)) = 0,$$

i prirodnim graničnim uslovom (3.29) (ili (3.31) u posebnom slučaju (3.30)).

Glava 4

Primena varijacionog računa

Primena varijacionog računa je izuzetno velika. U ovom delu će biti reči o primeni varijacionog računa sa promenljivim krajnjim tačkama. Govorićemo o tome kako se dizajniraju zanimljivi tobogani u Luna parkovima. Literatura korišćena za sastavljanje ovog dela je [5] i iz iste su preuzete slike.

4.1 Dizajniranje zanimljivih tobogana

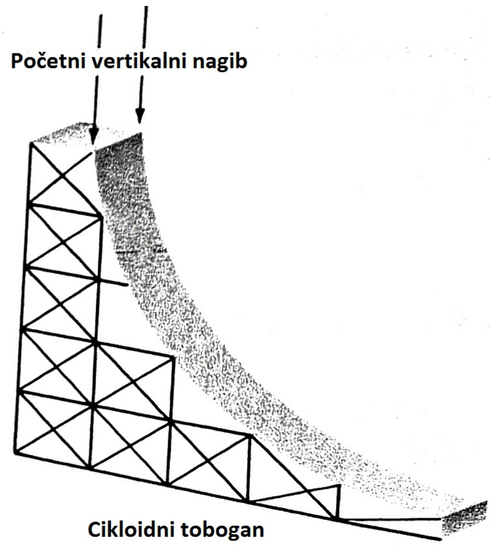
Svi zabavni parkovi se međusobno takmiče ko će imati zanimljiviji tobogan. Dizajneri ovih tobogana znaju da cikloida najbrže spušta od jedne tačke do obližnje niže tačke, ali teško da bi ovakav tobogan bio previše zanimljiv, jer bi se spuštao samo vertikalno naniže (Slika 4.1). Iz tog razloga su dizajneri odlučili da razmotre kompozitni tobogan čija će se putanja sastojati od dela kružnog luka sa horizontalnim početnim nagibom radi bezbednosti, nakon čega sledi deo novog kružnog luka koji je prikladno odabran da napravi zanimljiviji i bezbedniji tobogan (Slika 4.2). Zatim je potrebno naći najbrže spuštanje koje se može postići duž bilo koje složene krive γ koja povezuje fiksnu početnu tačku sa datom terminalnom vertikalnom linijom (Slika 4.3), gde se γ sastoji od početnog dela datog kruga, koji je spojen sa delom bilo kog drugog luka.

Posmatraćemo Dekartov koordinatni sistem, sa koordinatnim početkom u centru kruga i sa datom terminalnom pravom

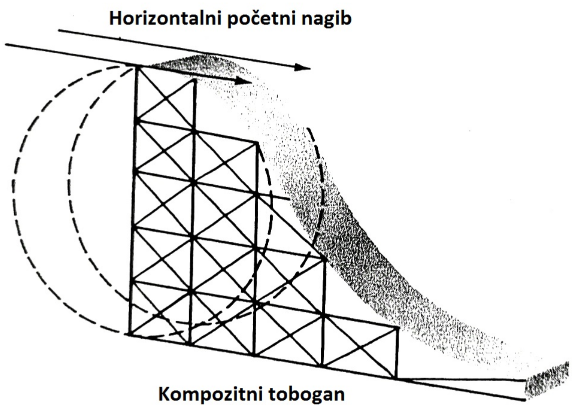
$$x = x_1, \tag{4.1}$$

kao sa Slika 4.4. Početnu tačku označavamo sa $P_0 = (0, y_0)$ i tada jednačinu početne kružnice možemo zapisati kao

$$x^2 + y^2 = y_0^2. \tag{4.2}$$



Slika 4.1

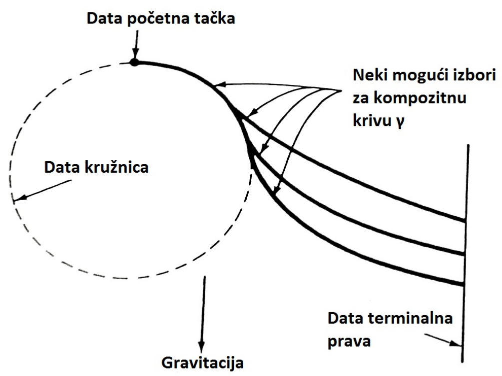


Slika 4.2

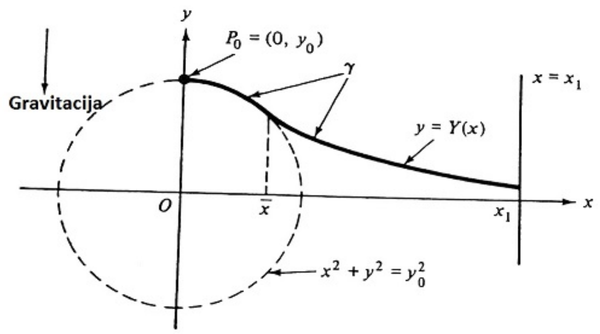
Pretpostavimo da sila Zemljine teže deluje naniže, u smeru negativnog dela y - ose.

Putanja tobogana se može predstaviti kompozitnom krivom datom kao

$$\gamma : y = \begin{cases} \sqrt{y_0^2 - x^2}, & 0 \leq x \leq \tilde{x} \\ Y(x), & \tilde{x} \leq x \leq x_1, \end{cases} \tag{4.3}$$



Slika 4.3



Slika 4.4

za neki odgovarajući broj $\tilde{x}$ koji treba da bude x - koordinata tačke u kojoj se dva luka koja čine γ spajaju $(0 < \tilde{x} < x_1)$ i za neku odgovarajuću funkciju $Y(x)$ koja treba da zadovolji ograničenje

$$Y(\tilde{x}) = \sqrt{y_0^2 - \tilde{x}^2}. \tag{4.4}$$

Ovo ograničenje garantuje da se dva luka spajaju u $x = \tilde{x}$.

Vreme T potrebno da osoba klizi duž γ, dato sa $T = \int\limits_0^T dt = \int\limits_\gamma \frac{ds}{v}$, može se zapisati kao zbir odgovarajućih vremena duž svakog dela krive, je

$$T = \int\limits_0^{\tilde{x}} \frac{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}}{v(x)}\, dx + \int\limits_{\tilde{x}}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}}{v(x)}\, dx, \tag{4.5}$$

gde je $v = v(x)$ brzina kretanja osobe. Ova brzina je data kao brzina promene dužine luka u odnosu na vreme t ($v = \frac{ds}{dt}$) gde smo koristili formulu $ds = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx$ za diferencijalni element dužine luka duž γ.

Da bismo izračunali brzinu $v(x)$ potrebnu u (4.5) potrebna nam je potencijalna energija osobe koja se spušta niz tobogan. Potencijalna energija (E_p), osobe mase m koja se nalazi na visini y (iznad površine zemlje), data je sa

$$E_p = mgy,$$

gde je g konstantno ubrzanje Zemljine teže. Dakle, iz (4.3) imamo da osoba koja se nalazi u tački (x, y) na γ, ima potencijalnu energiju

$$E_p = \begin{cases} mg\sqrt{y_0^2 - x^2}, & 0 \leq x \leq \tilde{x} \\ mgY(x), & \tilde{x} \leq x \leq x_1. \end{cases}$$

Sa druge strane, kinetička energija kretanja osobe je data sa

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

Očuvanje energije zahteva da zbir kinetičke i potencijalne energije ostane konstantan tokom kretanja osobe koja se spušta niz tobogan (trenje zanemarujemo). Zatim sledi da će se osoba, koja krene iz mirovanja u P_0 i klizi duž γ, kretati brzinom $v = v(x)$ datom sa

$$v(x) = \begin{cases} [2g(y_0 - \sqrt{y_0^2 - x^2})]^{\frac{1}{2}}, & 0 \leq x \leq \tilde{x} \\ [2g(y_0 - Y(x))]^{\frac{1}{2}}, & \tilde{x} \leq x \leq x_1. \end{cases}$$

Ako ovaj rezultat ubacimo u (4.5) i takođe upotrebimo (4.3), dobijamo da je vreme T

$$T(\tilde{x}, Y) = \int_0^{\tilde{x}} \frac{y_0\, dx}{\sqrt{2g(y_0^2 - x^2)(y_0 - \sqrt{y_0^2 - x^2})}} + \int_{\tilde{x}}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + Y'(x)^2}{2g(y_0 - Y(x))}}\, dx,$$

gde smo zapisali $T(\tilde{x}, Y)$ da bismo naglasili da vreme T eksplicitno zavisi od $\tilde{x}$ kao i od $Y = Y(x)$ za $\tilde{x} \leq x \leq x_1$. Ovu jednačinu kraće zapisujemo

$$T(\tilde{x}, Y) = \int_0^{\tilde{x}} f(x)\, dx + \int_{\tilde{x}}^{x_1} F(Y(x), Y'(x))\, dx, \tag{4.6}$$

gde je

$$f(x) = y_0\Big[2g(y_0^2 - x^2)(y_0 - \sqrt{y_0^2 - x^2})\Big]^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.7}$$

i

$$F(y,z) = \sqrt{\frac{1+z^2}{2g(y_0 - y)}}. \tag{4.8}$$

Uzmimo osnovni vektorski prostor χ koji odgovara funkciji $T(\tilde{x}, Y)$ kao skup svih parova $(\tilde{x}, Y) = (\tilde{x}, Y(x))$, gde je $\tilde{x}$ proizvoljan broj iz $\mathbb{R}$ i gde $Y = Y(x)$ može biti bilo koja proizvoljna neprekidno diferencijalna funkcnija na fiksnom intervalu $0 \leq x \leq x_1$. Za sada ne mora postojati nikakva posebna relacija između $\tilde{x}$ i funkcije $Y = Y(x)$ koja se javlja u paru $(\tilde{x}, Y)$. Konkretno, relacija (4.4) ne mora da važi čak i ako se $\tilde{x}$ nađe u intervalu $[0, x_1]$ (što možda i nije). Podsetimo se, ako su $(\tilde{x_1}, Y_1)$ i $(\tilde{x_1}, Y_2)$ bilo koja dva vektora u χ, njihov zbir definišemo sa

$$(\tilde{x_1}, Y1) + (\tilde{x_2}, Y2) = (\tilde{x_1} + \tilde{x_2}, Y_1 + Y_2),$$

što daje vektor u χ. Slično definišemo proizvod $a(\tilde{x}, Y)$ pomoću

$$a(\tilde{x}, Y) = (a\tilde{x}, aY),$$

koji daje vektor u χ za bilo koje a iz $\mathbb{R}$ i bilo koji vektor $(\tilde{x}, Y)$. Vektorski prostor χ možemo dopuniti normom $\|.\|$ definisanom na sledeći način

$$\|(\tilde{x}, Y)\| = |\tilde{x}| + \max_{0\leq x\leq x_1} |Y(x)| + \max_{0\leq x\leq x_1} |Y'(x)|,$$

za bilo koji vektor $(\tilde{x}, Y)$ u χ. Konačno, uzimamo domen D, funkcionela $T = T(\tilde{x}, Y)$, tako da bude podskup od χ, koji se sastoji od vektora $(\tilde{x}, Y)$ u χ za koje je $0 \leq \tilde{x} \leq x_1$. Može se proveriti da je D otvoren skup u χ.

Sada tražimo vektor $(\tilde{x}, Y)$ u D koja će u D dati minimum funkcionele T date sa (4.6), podložan promenljivom ograničenju (4.4). Ograničenje (4.4) sada daje relaciju između $\tilde{x}$ i $Y = Y(x)$ koja se nameće svim odgovarajućim parovima $(\tilde{x}, Y)$. Ako je $(\tilde{x}, Y)$ minimizirajući vektor za funkcionelu T u D u skladu sa (4.4) onda je odgovarajuća kriva γ, koja daje putanju najbržeg spuštanja sa tobogana, data sa (4.3).

Ako definišemo funkcionelu K na D pomoću (4.4)

$$K(\tilde{x}, Y) = Y(\tilde{x}) - \sqrt{y_0^2 - \tilde{x}^2}, \tag{4.9}$$

sada se problem svodi na pronalaženje minimalnog vektora u $D[K=0]$ za funkcionelu T iz (4.6). Možemo koristiti Ojler-Lagranžovu teoremu o množitelju da bismo pronašli takav minimalni vektor; ovde su nam potrebne varijacije funkcionela T i K.

Ako uporedimo (3.12) sa (4.9) vidimo da se varijacija K može dati sa (3.21) gde je

$$\Phi(x,y) = y - \sqrt{y_0^2 - x^2}.$$

Otuda nalazimo

$$\delta K(\tilde{x}, Y; \Delta\tilde{x}, \Delta Y) = \left[\frac{\tilde{x}}{\sqrt{y_0^2 - \tilde{x}^2}} + Y'(\tilde{x})\right]\Delta\tilde{x} + \Delta Y(\tilde{x}), \tag{4.10}$$

za bilo koji vektor $(\tilde{x}, Y)$ u D i bilo koji vektor $(\Delta\tilde{x}, \Delta Y)$ u vektorskom prostoru χ. Ostaje još da se pronađe varijacija T. Ako koristimo (4.6) i isti tip izračunavanja kao što je korišćen za (3.17) dobijamo da je

$$\begin{aligned}\delta T(\tilde{x}, Y; \Delta\tilde{x}, \Delta Y) =& [f(\tilde{x}) - F(Y(\tilde{x}), Y'(\tilde{x}))]\Delta\tilde{x} + \\ &+ \int_{\tilde{x}}^{x_1} [F_Y(Y(x), Y'(x))\Delta Y(x) + \\ &+ F_{Y'}(Y(x), Y'(x))\Delta Y'(x)]\, dx.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Koristeći fundamentalnu teoremu analize izvedenu do oblika

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left[F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x))\Delta Y(x)\right] dx = & F_{Y'}(x_1, Y(x_1), Y'(x_1))\Delta Y(x_1) - \\ & - F_{Y'}(x_0, Y(x_0), Y'(x_0))\Delta Y(x_0),\end{aligned}$$

koja nam daje da je

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x))\Delta Y'(x) dx = & F'_Y(x_1, Y(x_1), Y'(x_1))\Delta Y(x_1) - \\ & - F_{Y'}(x_0, Y(x_0), Y'(x_0))\Delta Y(x_0) - \\ & - \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{d}{dx} F_{Y'}(x, Y(x), Y'(x))\right] \Delta Y(x) dx,\end{aligned}$$

prethodni rezultat može zapisati na sledeći način

$$\delta T(\tilde{x}, Y; \Delta\tilde{x}, \Delta Y) = \int\limits_{\tilde{x}}^{x_1} [F_Y(Y(x), Y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{Y'}(Y(x), Y'(x))] \Delta Y(x)\, dx +$$
$$+ F_{Y'}(Y(x_1), Y'(x_1))] \Delta Y(x_1) - F_{Y'}(Y(\tilde{x}), Y'(\tilde{x})) \Delta Y(\tilde{x}) +$$
$$+ [f(\tilde{x}) - F(Y(\tilde{x}), Y'(\tilde{x}))] \Delta\tilde{x}. \tag{4.12}$$

Iz (4.10) i (4.12) može se potvrditi da su sve hipoteze Ojler - Lagranžove teoreme o množitelju (1.3) zadovoljene za K i T. Štaviše ako uzmemo $\Delta\tilde{x} = 0$ i $\Delta Y = \Delta Y(x) = 1$, za svako x, u (4.10), imamo da

$$\delta K(\tilde{x}, Y; \Delta\tilde{x}, \Delta Y) = 1,$$

sada važi, ako je $(\tilde{x}, Y)$ bilo koji vektor ekstrema u $D[K = 0]$ za T, mora postojati množitelj λ, takav da

$$\delta T(\tilde{x}, Y; \Delta\tilde{x}, \Delta Y) = \lambda \delta K(\tilde{x}, Y; \Delta\tilde{x}, \Delta Y), \tag{4.13}$$

važi za sve brojeve $\Delta\tilde{x}$ i sve neprekidno diferencijalne funkcnije $\Delta Y = \Delta Y(x)$ na $[0, x_1]$.

Koristeći (4.10) i (4.12) zajedno sa ograničenjem (4.4), uslov (4.13) postaje

$$\int\limits_{\tilde{x}}^{x_1} \left[F_Y(Y(x), Y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{Y'}(Y(x), Y'(x))\right] \Delta Y(x)\, dx =$$
$$= -F_{Y'}(Y(x_1), Y'(x_1)) \Delta Y(x_1) + \left[F_{Y'}\left(\sqrt{y_0^2 - \tilde{x}^2}, Y'(x)\right) + \lambda\right] \Delta Y(\tilde{x}) +$$
$$+ \left\{F\left(\sqrt{y_0^2 - \tilde{x}^2}, Y'(x)\right) - f(\tilde{x}) + \lambda \left[\frac{\tilde{x}}{\sqrt{y_0^2 - \tilde{x}^2}} + Y'(\tilde{x})\right]\right\} \Delta\tilde{x}, \tag{4.14}$$

što mora da važi za sve brojeve $\Delta\tilde{x}$ i sve neprekidno diferencijalne funkcije $\Delta Y = \Delta Y(x)$. Iz (4.14) možemo izvući potrebne uslove

$$F_Y(Y(x), Y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{Y'}(Y(x), Y'(x)) = 0, \text{ za } \tilde{x} \leq x \leq x_1, \tag{4.15}$$

$$F_{Y'}(Y(x_1), Y'(x_1)) = 0, \tag{4.16}$$

$$F_{Y'}\left(\sqrt{y_0^2 - \tilde{x}^2}, Y'(x)\right) + \lambda = 0 \tag{4.17}$$

i

$$F\left(\sqrt{y_0^2-\tilde{x}^2}, Y'(x)\right) - f(\tilde{x}) + \lambda\left[\frac{\tilde{x}}{\sqrt{y_0^2-\tilde{x}^2}} + Y'(\tilde{x})\right] = 0, \tag{4.18}$$

koji mora biti zadovoljen bilo kojim vektorom lokalnog ekstrema $(\tilde{x}, Y)$ u $D[K=0]$ za vremensku funkcionelu T iz (4.6).

Množitelj λ se može eliminisati iz jednačina (4.17) i (4.18) da bi se dobio jedinstveni prirodni uslov

$$\begin{aligned} F\left(\sqrt{y_0^2-\tilde{x}^2}, Y'(x)\right) - Y'(x)F_{Y'}\left(\sqrt{y_0^2-\tilde{x}^2}, Y'(x)\right) = \\ = f(x) + \frac{\tilde{x}}{\sqrt{y_0^2-\tilde{x}^2}}F_{Y'}\left(\sqrt{y_0^2-\tilde{x}^2}, Y'(x)\right), \end{aligned} \tag{4.19}$$

koji mora da važi u promenljivoj tački $x = \tilde{x}$. Konačno, ako koristimo (4.7) i (4.8) zajedno sa

$$F_{Y'}(F_{Y'}\left(\sqrt{y_0^2-\tilde{x}^2}, Y'(x))\right) = \frac{\partial F(y,z)}{\partial z}\bigg|_{y=\sqrt{y_0^2-\tilde{x}^2}, \quad z=Y'(\tilde{x})},$$

sledi da (4.19) implicira da

$$\sqrt{y_0^2-\tilde{x}^2} = y_0\sqrt{1+Y'(\tilde{x})^2} + \tilde{x}Y'(\tilde{x}),$$

iz čega sledi

$$Y'(\tilde{x}) = -\frac{\tilde{x}}{\sqrt{y_0^2-\tilde{x}^2}}. \tag{4.20}$$

Ovaj prirodni uslov (4.20) jednostavno zahteva da minimizirajuća kriva γ bude tangentna na kružnicu (4.2) na $x = \tilde{x}$.

Sličan proračun pokazuje da prirodni granični uslov (4.16) implicira da

$$Y'(x_1) = 0, \tag{4.21}$$

što zahteva da γ seče pravu $x = \tilde{x}$ pod pravim uglom.

Sada možemo pokazati da se Ojler - Lagranžova jednačina (4.15) duž γ sa ograničenjem (4.4) i prirodnim uslovima (4.20) i (4.21), koristi za određivanje ekstrema krive γ. Činjenice (4.15) i (4.8) impliciraju da

$$Y' = -\sqrt{\frac{A-[y_0-Y(x)]}{y_0-Y(x)}},$$

za neku konstantu integracije A. Ova diferencijalna jednačina ima cikloidna rešenja koja se mogu dati parametarski

$$\begin{aligned} x =& x_0 + \frac{A}{2}(\theta - \sin\theta), \\ Y =& y_0 - \frac{A}{2}(1 - \cos\theta), \text{ za } \tilde{\theta} \le \theta \le \theta_1, \end{aligned} \tag{4.22}$$

gde je rešenje prve jednačine dato sa $\theta = \theta(x)$, duž krive γ, a druga jednačina daje rešenje $Y = Y(x)$ (za $\tilde{x} \le x \le x_1$).

Konstanta x_0 koja se javlja u (4.22) je neodređena konstanta koja fiksira početnu tačku cikloide kada $\theta = 0$, dok su $\tilde{\theta}$ i θ_1 pozitivne konstante koje se moraju izabrati tako da određuju odgovarajuća ograničenja i svi prirodni uslovi su zadovoljeni. Konkretno, θ_1 mora biti izabrano tako da se cikloida završava na pravoj $x = x_1$ iz (4.1) kada je $\theta = \theta_1$. Ovo, zajedno sa (4.22), zahteva uslov

$$x_1 = x_0 + \frac{A}{2}(\theta_1 - \sin\theta_1). \tag{4.23}$$

Takođe, kada $\theta = \tilde{\theta}$, zahtevamo da cikloida seče datu kružnicu (4.2) sa $x = \tilde{x}$ i sa (4.4). Zajedno sa (4.22) dobijamo uslove

$$\tilde{x} = x_0 + \frac{A}{2}(\tilde{\theta} - \sin\tilde{\theta}) \tag{4.24}$$

i

$$\sqrt{y_0^2 - \tilde{x}^2} = y_0 - \frac{A}{2}(1 - \cos\tilde{\theta}). \tag{4.25}$$

Iz prirodnih uslova (4.20) i (4.21) možemo dobiti dva dodatna uslova. U stvari, sa (4.22) lančano pravilo diferencijalnog računa daje

$$Y'(x) = \frac{\frac{dY}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-\sin\theta}{1 - \cos\theta}, \tag{4.26}$$

tako da prirodni uslov (4.20) pri $\theta = \tilde{\theta}$, daje uslov

$$\frac{\sin\tilde{\theta}}{1 - \cos\tilde{\theta}} = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{y_0^2 - \tilde{x}^2}},$$

koji se može rešiti za $\tilde{x}$ dato sa

$$\tilde{x} = \frac{y_0 \sin\tilde{\theta}}{\sqrt{2(1 - \cos\tilde{\theta})}}. \tag{4.27}$$

Konačno, prirodni uslovi (4.21) i (4.26) pri $\theta = \theta_1$, daju uslov $\sin\theta_1 = 0$, koji će biti zadovoljen za $\theta_1 = \pi$. Ako ovaj rezultat ubacimo u (4.23) dobijamo da

$$x_0 = x_1 - \frac{\pi}{2}A. \tag{4.28}$$

Otuda imamo četiri jednačine (4.24), (4.25), (4.27) i (4.28) iz kojih možemo odrediti preostale četiri konstante $\tilde{x}, x_0, A$ i $\tilde{\theta}$ u smislu datih brojeva x_1 i y_0. U stvari, možemo koristiti (4.27) i (4.28) da eliminišemo $\tilde{x}$ i x_0 iz jednačine (4.24) i (4.25) da pronađemo dve jednačine

$$\frac{y_0 \sin\tilde{\theta}}{\sqrt{2(1-\cos\tilde{\theta})}} - x_1 + \frac{\pi}{2}A = \frac{A}{2}(\tilde{\theta} - \sin\tilde{\theta})$$

i

$$y_0\left(1 - \sqrt{\frac{1-\cos\tilde{\theta}}{2}}\right) = \frac{A}{2}(1-\cos\tilde{\theta}), \tag{4.29}$$

zatim se konstanta A može eliminisati iz poslednje dve jednačine da bi se dobila jedna jednačina

$$(\pi - \tilde{\theta})\sqrt{\frac{1-\cos\tilde{\theta}}{2}} = \pi - \tilde{\theta} + \sin\tilde{\theta} - \frac{x_1}{y_0}(1-\cos\tilde{\theta}), \tag{4.30}$$

koja se može rešiti za $\tilde{\theta}$ ($0 \leq \theta \tilde{\leq} \pi$) u smislu datih brojeva x_1 i y_0. Kada se $\tilde{\theta}$ dobije iz (4.30), tada se odgovarajuće vrednosti za $A, \tilde{x}$ i x_0 mogu naći iz (4.29), (4.27) i (4.28).

Primer 4.1. *Razmatramo poseban slučaj u kome x_1 i y_0 zadovoljavaju*

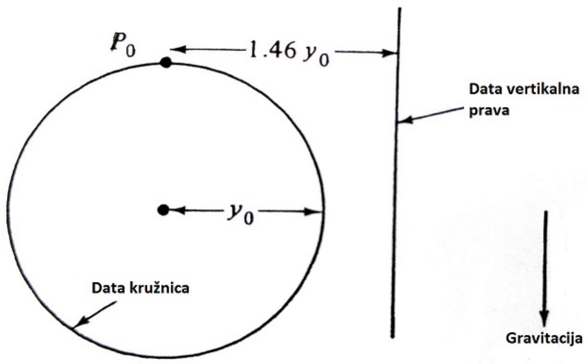
$$x_1 = \left[1 + \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\right] y_0 \approx 1,46 y_0, \tag{4.31}$$

tako da se terminalna linija nalazi na rastojanju $1,46$ puta većem od rastojanja poluprečnika date kružnice od date početne tačke kao što je prikazano na Slika 4.5. Koristeći (4.31) u (4.30) za $\tilde{\theta}$ dobijamo da je

$$\tilde{\theta} = \frac{\pi}{2},$$

a sa (4.29) ovaj rezultat daje

$$A = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) y_0 \approx 0,59 y_0.$$



Slika 4.5

Poslednja dva rezultata se mogu uvrstiti u (4.27) i (4.28) i na taj način se dobija

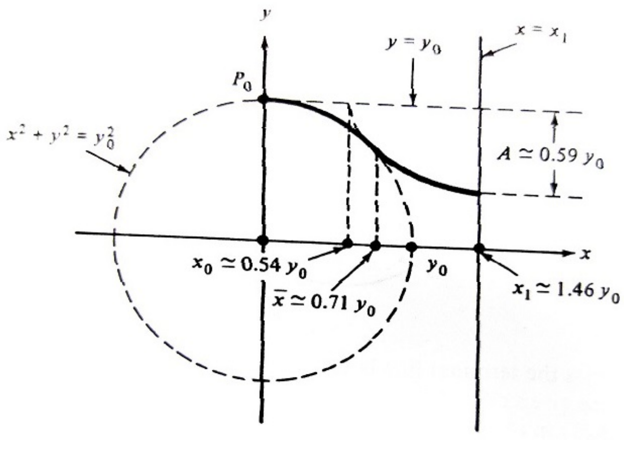
$$\tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} y_0 \approx 0,71 y_0$$

i

$$x_0 = \left[1 - \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\right] y_0 \approx 0,54 y_0,$$

pod uslovom da važi (4.31).

Dakle, u posebnom slučaju u kojem su x_1 i y_0 povezani sa (4.31), najuzbudljiviji tip tobogana, o kome je ovde reč, će pratiti složenu putanju γ koja se sastoji od kružnog luka



Slika 4.6

$$y = \sqrt{y_0^2 - x^2}, \qquad 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} y_0 \approx 0.71 y_0,$$

a zatim sledi cikloidni luk

$$\begin{aligned} x =& y_0 \left[1 - \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})(\theta - \sin\theta) \right] \approx y_0 \left[0,54 + 0.295(\theta - \sin\theta) \right], \\ y =& y_0 \left[1 - (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})(1 - \cos\theta) \right] \approx y_0 \left[1 - 0.295(1 - \cos\theta) \right], \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \end{aligned}$$

koja se proteže od $x = \tilde{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) y_0 \approx 0,71 y_0$ do $x = \tilde{x} \approx 1,46 y_0$. Datu cikloidu generiše kretanje fiksne tačke po kružnici prečnika $A \approx 0,59 y_0$ koja se kotrlja ispod prave $y = y_0$ počevši od $x = \tilde{x} \approx 0,54 y_0$ kao što je prikazano na Slika 4.6.

Zaključak

Za varijacioni račin se može reći da je nastao u 17. veku, delima Ojlera, Lagranža, Ležandra, a razvili su ga Jakobi i Vajerštras. Jedan od prvih problema ovog računa bio je problem Brahistohrone koji je objavio Johan Bernuli. Na njemu su radili naučnici poput Njutna, Lajbnica, Johana i Jakoba Bernulija. U 20. veku značajan doprinos razvoju varijacionog računa dali su David Hilbert, Žak Adamari i Pol Levi.

Rešenje varijacionog problema je funkcija $u(x)$ koja funkcioneli $J(u)$ saopštava minimum ili maksimum. Rešenje $u(x)$, ako postoji, mora da zadovoljava određene uslove. Funkcionela J dostiže lokalnu ekstremnu vrednost u tački x_0 ako njen priraštaj $\Delta J_{x_0} = J(x) - J(x_0)$ ne menja znak u okolini tačke x_0. Ekstrem funkcionele $J(u)$ se naziva lokalni maksimum ako je $\Delta J \leq 0$ svuda u proizvoljno maloj okolini od u, i lokalni minimum ako je $\Delta J \geq 0$. Postoji dve vrste ekstrema, a to su slab i jak ekstrem, u zavisnosti od toga da li su prvi izvodi neprekidnih funkcija svi neprekidni ili ne. Jak ekstrem je istovremeno i slab, dok obrnuto ne mora da važi. Jedan od potrebnih uslova za postojanje slabog ekstrema je Ojler - Lagranžova jednačina. Prema teoremi o potrebnom uslovu za postojanje ekstrema, jednačina $\delta J = 0$ daje potreban uslov za ekstrem, ali on nije i dovoljan. U mnogim slučajevima Ojlerova jednačina je sama po sebi dovoljna da pruži potpuno rešenje problema. U stvari, postojanje ekstrema je često jasno iz fizičkog ili geometrijskog značenja problema, na primer, u problemu brahistohrone. Ako u tom slučaju postoji samo jedan ekstrem, koji zadovoljava granične uslove problema, ovaj ekstrem mora biti kriva.

Prilikom posmatranja problema promenljive krajnje tačke, bazirali smo se na problem pronalaženja krive po kojoj se kreće čamac, među svim mogućim krivama, kako bi prešao sa jedne strane reke na drugu za najkraće vreme i modifikovani problem brahistohrone. Tačnije pokazali smo da u traženju krivih, koje su rešenje ovih problema, koje daju minimum funkcionele J, počevši od neke tačke P_0 i završavajući na krivoj C, treba da uzmemo u obzir samo one krive koje zadovoljavaju Ojler - Lagranžovu jednačinu pod određenim ograničenjima i prirodnim graničnim uslovima koje smo takođe izveli.

Obradom primera pronalaženja rešenja za problem kako konstruisati zanimljiv i bezbedan tobogan, došli smo do zaključka da, bez obzira na to što cikloida najbrže spušta od jedne tačke do obližnje niže tačke, to nije dovoljno. Da bi se konstruisao tobogan koji će biti bezbedan, a i zanimljiv nephodno je da se sastoji iz dela kružnog luka sa horizontalnim početnim nagibom (radi bezbednosti), nakon čega sledi deo novog kružnog luka, koji je prikladno izabran kako bi tobogan učinio i zanimljivim. Ova dva kružna luka spaja kriva koja daje najbrže spuštanje od fiksne početne tačke do date vertikalne prave. Ovakav tobogan se naziva *kompozitni tobogan*. Prilikom pronalaženja ovog rešenja uzeli smo u obzir potencijalnu i kinetičku energiju tela koje se spušta niz tobogan, kao i silu Zemljine teže, dok se trenje zanemaruje.

Literatura

[1] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1989.

[2] I. M. Gelfand, S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Dover Publications, Inc., New York, 2000.

[3] M. Kot, *A First Course in the Calculus of Variations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014.

[4] S. Si, *A breif history of variational calculus in the first half of twentieth century*, Faculty of Information Science and Technology, Aichi Prefectural University, Aichi-ken 480 - 1198, Japan, 2001.

[5] D. R. Smith, *Variational Methods in Optimization*, Dover Publications, Inc., New York, 1998.

[6] N. Teofanov, M. Žigić, *Osnovi optimizacije*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2018.

Biografija

Bojana Škrbić rođena je 28. januara 1996. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu "22. jul" u Krčedinu završila je 2011. godine. Nakon završetka osnovne škole upisuje Srednju medicinsku školu "7. april" u Novom Sadu, smer Farmaceutski tehničar, koju završava 2015. godine. Iste godine upisuje osnovne akademske studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike. U četvrtoj godini (školska 2018/19.) studija prebacuje se i nastavlja na integrisanim akademskim studijama, novi smer Master profesor matematike, na istom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene planom i programom i time stekla pravo na odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Bojana Škrbić
AU

Mentor: dr Milica Žigić
ME

Naslov rada: Varijacioni problem sa promenljivim graničnim uslovima i primena
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: srpski / engleski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2022.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (4/62/6/0/13/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Nelinearna optimizacija
ND

Ključne reči: Varijacioni račun, funkcionela, Ojler - Lagranžova jednačina, slab ekstrem, jak ekstrem, granični uslovi, promenljive krajnje tačke, Ojler - Lagranžova teorema množitelja, tobogan.
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom master radu predstavićemo upotrebu varijacionog računa u teoriji optimizacije. Prvo poglavlje je posvećeno istorijskom uvodu o nastanku i razvoju varijacionog računa. U ovom poglavlju se nalaze i osnovne definicije i teoreme neophodne za razumevanje ostataka rada. Drugo poglavlje se sastoji od osobina varijacionog račun, potrebnog uslova za ekstrem funkcionele

i detaljnog opisa Ojler - Lagranžove jednačine (istorijski uvod, slab i jak ekstrem, izvođenje Ojler - Lagranžove jednačine). U trećoj glavi date su vrste varijacionog računa u zavisnosti od graničnih uslova, gde je detaljno obrađen problem graničnih uslova sa promenljim krajnjim tačkama. Poslednje poglavlje posvećeno je jednom primeru primene varijacionog računa sa promenljivim krajnjim tačkama, a to je izrada tobogana.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 7.6.2022.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: Prof. dr Sanja Rapajić, redovni profesor Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Milica Žigić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član: Prof. dr Nenad Teofanov, redovni profesor prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Bojana Škrbić
AU

Mentor: Milica Žigić, PhD
MN

Title: Variation problem with variable end points and application
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: Serbian / English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2022.
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (4/62/6/0/13/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Nonlinear ptimization
SD

Subject/Key words: The calculuc of variations, functional, Euler - Lagrange equation, weak extreme, strong extreme, limit conditions, variable end points, Euler - Lagrange multiplier theorem, slide.
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: In this master thesis, we will present the use of the variational calculus in the theory of optimization. The first chapter is dedicated to the historical introduction to the origin and development of the variational calculus. This chapter also contains the basic definitions and theorems necessary for understanding the rest of the paper. The second chapter consists of the properties of the variational calculus, the necessary condition for the extremal functional, and a detailed description of the Euler-Lagrange equation

(historical introduction, weak and strong extreme, derivation of the Euler-Lagrange equation). The third chapter gives the types of variational calculus depending on the boundary conditions, where the problem of the variable end point is discussed in detail. The last chapter is dedicated to one example of the application of the variable calculus with variable end points, which is the production of slides.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 07.06.2022.
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Sanja Rapajić, PhD, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor: Milica Žigić, PhD, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Nenad Teofanov, PhD, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad