UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Karolina Čović

Subdiferencijal u konveksnom programiranju i primene

Master rad

Mentor:
dr Milica Žigić

Novi Sad, 2022.

Sadržaj

Predgovor

Ovaj master rad može se tematski podeliti na dva dela. Prvi deo odnosi se na konveksne skupove na kojima definišemo konveksne (konkavne) funkcije. Pomenute funkcije imaju široku primenu u mnogim oblastima, a u ovom radu naglasak je na primeni konkavnih funkcija u ekonomiji i to se pre svega odnosi na Kob Daglasovu proizvodnu funkciju. Drugi deo master rada nadovezuje se na prvi, jer po definisanju konveksnih funkcija, formulišemo zadatak konveksnog programiranja, kao i pojam i osnovne karakteristike subdiferencijala. Osim toga, dajemo i primenu subdiferencijala u konveksnom programiranju, kroz teoremu Kuna – Takera, a na kraju i primenu teoreme Kuna - Takera u ekonomiji.

Prvo poglavlje ovog rada podeljeno je na tri dela u kojima smo definisali osnovne pojmove i tvrđenja, koji će se koristiti u daljem radu. Na početku smo uveli definicije i osobine metričkih, vektorskih i topoloških prostora, nad kojima se definišu funkcije. Potom je potrebno opisati pomenute funkcije, s toga definišemo pojmove neprekidnosti i diferencijabilnosti. Na kraju poglavlja, govorimo o pojmovima koji imaju primenu u teoriji optimizacije, a to su ekstremne tačke - lokalni i globalni minimum (maksimum). Osim toga dat je i potreban uslov prvog reda, kao i potreban i dovoljan uslov drugog reda za postojanje lokalnih minimuma (maksimuma).

Drugo poglavlje odnosi se na konveksnost skupova i funkcija i u sklopu njega nalazi se devet podnaslova. Ovde smo, na početku, definisali konveksne skupove i njihove osnovne karakteristike, kao što su operacije sa konveksnim skupovima (sabiranje i oduzimanje, distributivnost, presek i unija). Bitno mesto u teoriji optimizacije osim konveksnih skupova zauzimaju i konusi, s toga smo u nastavku govorlii o njima, a u jednom od narednih poglavlja nastavićemo sa obradom ovog pojma. Nakon toga, uvešćemo pojmove konveksnih (konkavnih) i kvazikonveksnih (kvazikonkavnih) funkcija i njihove osobine, koje će se koristiti u kasnijim dokazima. Osim toga, definišemo pojam hiperravni i potporne hiperravni, formulišemo teoreme separacije, među kojima i teoremu Minkovski – Farkaš. Na poslednjim stranicama ovog poglavlja govorimo o ključnom pojmu, zadatku konveksnog programiranja, u sklopu kojeg definišemo Lagranžovu funkciju, sedlastu tačku i potreban i dovoljan uslov za njeno postojanje, kao i rešenje zadatka konveksnog programiranja.

Treće poglavlje za cilj ima da pokaže primenu funkcija opisanih u drugom poglavlju. Tu je, pre svega, reč o Kob Daglasovoj proizvodnoj funkciji, koja iako za račun jednostavna, ispostavlja se da daje veoma precizne rezultate, što joj obezbeđuje značajno mesto u ekonomiji. Kako je cilj svake proizvodnje da maksimizira profit i minimizira troškove, pokazujemo kako Kob Daglasovu funkciju primeniti u postizanju ovog cilja.

Četvrta glava posvećena je subdiferencijalima, njihovom izračunavanju, karakteristikama i geometrijskoj interpretaciji. Značaj ovog pojma je u tome što olakšava račun. Primer toga je računanje izvoda po pravcu pomoću subdiferencijala zahvaljujući kojima nije potrebno računati graničnu vrednost.

Tema poslednje, pete glave, jeste teoremama tipa Kuna - Takera. Značaj ove teoreme je u tome što daje potrebne uslove za rešavanje zadatka konveksnog programiranja. Osim klasične verzije teoreme, formulišemo teoremu sa primenom subdiferencijala. Na kraju prikazujemo primer primene teoreme Kuna - Takera u ekonomiji, tačnije u maksimizaciji funkcije korisnosti.

Na kraju, želim da se zahvalim svima koji su mi pružali podršku tokom studija, pre svega porodici, prijateljima i profesorima. Najveću zahvalnost za motivaciju, podršku i mnogobrojne savete u izradi rada dugujem profesorici i mentorki, dr Milici Žigić.

Novi Sad, 2022.

Karolina Čović

Glava 1

Uvod

U uvodnom poglavlju definisaćemo metričke, vektorske i topološke prostore i osnovne pojmove u vezi sa njima. To su prostori nad kojima ćemo u ovom radu definisati funkcije. U nastavku tema ovog poglavlja biće i neprekidnost i diferencijabilnost, zatim i značajne osobine funkcija. Na samom kraju reč će biti i o ekstremnim vrednostima funkcije, odnosno pronalaženju njenih minimalnih i maksimalnih vrednosti. Više detalja čitalac može pronaći u literaturi [9] i [10].

1.1 Metrički, vektorski i topološki prostori

Na samom početku dati su osnovni pojmovi metričkih, vektorskih i topoloških prostora, koji će imati značajnu ulogu u ovom radu.

Definicija 1.1. *Uređeni par* (X, d), *u kojem je* $X \neq \emptyset$ *i za preslikavanje* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *važi:*

1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$,

2. $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako je* $x = y$,

3. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$,

4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$,

naziva se metrički prostor.

Definicija 1.2. *Struktura* X *je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, *ako je* $(X, +)$ *komutativna grupa, pri čemu je definisano preslikavanje* $\mathbb{R} \times X \to X$ *takvo da za svako* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in X$ *važi:*

1. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$,

2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

3. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,

4. $1x = x$.

Slika para $(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X$ označena je sa $\alpha x \in X$.

Definicija 1.3. *Vektorski prostor $(X, \|\cdot\|)$ je normiran ako je za preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ ispunjeno:*

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$,

2. $\|x\| = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$,

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$,

4. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X$.

Napomena 1.1. Svaki normirani prostor je metrički, jer se normom može definisati metrika $d(x, y) := \|x - y\|$ za $x, y \in X$.

Metrički prostor ne mora biti normiran, a čak ni vektorski prostor.

Napomena 1.2.

1. Prostor neprekidnih funkcija nad intervalom $[a, b]$, u oznaci $C[a, b]$, jeste vektorski prostor sa normom $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

2. Prostor neprekidno diferencijabilnih funkcija nad intervalom $[a, b]$, koji označavamo sa $C^1[a, b]$, takođe je vektorski prostor sa normom $\|x\|_1 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$.

3. Prostor n puta neprekidno diferencijabilnih funkcija nad intervalom $[a, b]$, $C^n[a, b]$, predstavlja jedan normirani vektorski prostor.

Definicija 1.4. *Skalarni proizvod u vektorskom prostoru X nad poljem realnih brojeva je preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ za koje je ispunjeno:*

1. $\langle x, x\rangle \geq 0, \forall x \in X$,

2. $\langle x, x\rangle = 0$ *ako i samo ako je* $x = 0$,

3. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in X$,

4. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \forall x, y \in X$.

Napomena 1.3. Skalarni proizvod indukuje normu $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$, za $x \in X$.

Vektorski prostor $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitarni vektorski prostor.

Sledeća jednakost, poznata pod nazivom zakon paralelograma, daje potreba i dovoljan uslov za postojanje skalarnog proizvoda $\langle\cdot,\cdot\rangle$ koji generiše normu $\|\cdot\|$.

Teorema 1.4. *(Zakon paralelograma) Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor. Potreban i dovoljan uslov za postojanje skalarnog proizvoda $\langle\cdot,\cdot\rangle$ koji generiše normu $\|\cdot\|$, dat je sa*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall x, y \in X.$$

U nastavku ćemo definisati i Koši - Švarcovu nejednakost.

U normiranom prostoru $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ skalarni proizvod vektora definisan je sa

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos\gamma, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Sa γ je označen "ugao" između vektora x i y. Iz činjenice $|cos\gamma| \leq 1$, direktno sledi Koši - Švarcova nejednakost $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ugao između ne - nula vektora x i y definiše se svojim kosinusom, odnosno,

$$\cos\gamma := \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Nakon metričkih i vektorskih prostora, definišemo pojam otvorene lopte.

Definicija 1.5. *Neka je (X, d) metrički prostor. Otvorena lopta poluprečnika $\delta > 0$, sa centrom u $x_0 \in X$ je data sa $L_\delta(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < \delta\}$.*

Iz date definicije vidimo da za svaku tačku x iz neke otvorene lopte, postoji takođe otvorena lopta sa centrom u tački x koja se nalazi unutar početne otvorene lopte. Koristeći se ovom idejom, definišemo otvoreni i zatvoreni skup.

Definicija 1.6. *Neka je (X, d) metrički prostor. Otvoreni skup $\mathcal{O} \subset X$ je svaki skup za koji važi da za svaki element $x \in \mathcal{O}$ postoji $\delta > 0$, tako da je $L_\delta(x) \subset \mathcal{O}$.*

Napomena 1.5. Zatvoren skup je komplement otvorenog skupa.

Sada možemo da uvedemo definiciju topoloških prostora.

Definicija 1.7. *Neka je τ kolekcija otvorenih skupova $\mathcal{O}$ metričkog prostora (X, d). Tada je:*

1. $X, \emptyset \in \tau$,

2. $\mathcal{O}_k \in \tau, k = 1, ..., m \implies \bigcap_{k=1}^{m} \mathcal{O}_k \in \tau$,

3. $\mathcal{O}_\lambda \in \tau,\ \lambda \in \Lambda \implies \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda \in \tau$.

Ovako definisana struktura naziva se topološki prostor.

Definicija 1.8. *Kolekcija zatvorenih skupova $\mathcal{F}$ topološkog prostora (X, τ) data je sa $\mathcal{F} = \{F \subset X \mid F = X \backslash O, O \in \tau\}$, i za nju važi:*

1. $X, \emptyset \in \mathcal{F}$,

2. $F_\lambda \in \mathcal{F}, \lambda \in \Lambda \implies \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$,

3. $F_k \in \mathcal{F}, k = 1, ..., m \implies \bigcup_{k=1}^{m} F_k \in \mathcal{F}$.

U narednim redovima uvode se najznačajniji pojmovi topoloških prostora i njihove karakteristike.

Definicija 1.9. *Tačka $x \in X$ je unutrašnja tačka skupa A, ako postoji otvoren skup $\mathcal{O}$, takav da je $x \in \mathcal{O} \subset A$.*

Skup svih unutrašnjih tačaka skupa A zove se unutrašnjost skupa A i označava se sa A°.

Definicija 1.10. *Tačka x je rubna tačka skupa A, ako svaki otvoreni skup koji sadrži tačku x ima neprazan presek sa skupom A i sa njegovim komplementom.*

Skup rubnih tačaka naziva se rub skupa A i označava se sa ∂A.

Definicija 1.11. *Skup U je okolina tačke x, ukoliko on sadrži neki otvoreni skup u kojem se nalazi tačka x. Otvoren skup je okolina svake svoje tačke.*

Definicija 1.12. *Tačka x je adherentna tačka skupa A, ako svaka njena okolina seče skup A.*

Skup svih adherentnih tačaka naziva se adherencija, odnosno, zatvaranje skupa A i označava se sa $\overline{A}$.

Definicija 1.13. *Tačka x je tačka nagomilavanja skupa A, ako svaka okolina tačke x seče skup $A \backslash \{x\}$. Svaka tačka nagomilavanja je ujedno i adherentna tačka tog skupa.*

Skup tačaka nagomilavanja označava se sa A'.

Definicija 1.14. *Tačka x je izolovana tačka skupa A, ako postoji okolina U te tačke, tako da je $U \cap A = \{x\}$.*

Definicija 1.15. *Neka je $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz u topološkom prostoru (X, τ). Tačka x je tačka nagomilavanja tog niza ako postoji njegov podniz $\{x_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, koji konvergira ka x.*

Teorema 1.6. *Neka je (X, τ) topološki prostor i neka $A \subset X$. Tada je:*

1. *$\overline{A}$ najmanji zatvoreni skup koji sadrži skup A.*
2. *A zatvoren ako i samo ako je $A = \overline{A}$.*
3. *$A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.*
4. *$\overline{A} = A^{\circ} \cup \partial A = A \cup A'$.*
5. *A je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.*

Na kraju preostaje da se definiše kompaktnost skupa, osobina skupova koja će u narednim poglavljima imati značajnu primenu.

Definicija 1.16. *U topološkom prostoru (X, τ) klasa otvorenih skupova, koju označavamo sa $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, zove se otvoreni pokrivač skupa $A \subset X$, ako je $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{O}_\lambda$.*

Definicija 1.17. *Skup A je kompaktan u (X, τ), ako svaki njegov pokrivač sadrži konačan potpokrivač.*

1.2 Neprekidnost i diferencijabilnost

Nastavak poglavlja posvećen je dvema značajnim osobinama svake funkcije. Kao što se može videti u naslovu, reč je o neprekidnosti i diferencijabilnosti. Za početak, uvešćemo pojmove neprekidnosti u topološkim i metričkim prostorima.

Definicija 1.18. *(Neprekidnost u topološkom prostoru) Neka su (X, τ_X) i (Y, τ_Y) topološki prostori i x_0 proizvoljna tačka u X. Funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna u tački x_0, ako za svaku okolinu V tačke $f(x_0) \in Y$ postoji okolina U tačke x_0 da $f(x) \in V$ za sve $x \in U$.*

Definicija 1.19. *(Neprekidnost u metričkom prostoru) U metričkim prostorima (X, d_X) i (Y, d_Y) funkcija $f : X \to Y$ je neprekidna u tački x_0, ako je:*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in X)(d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

Slede definicije koje su u vezi sa diferencijabilnošću funkcije.

Definicija 1.20. *Neka je* $U \subset \mathbb{R}^n$ *neprazan skup. Preslikavanje* $f : U \to \mathbb{R}$ *je diferencijabilno u tački* $x \in U^{o}$*, ako postoji vektor* $y \in \mathbb{R}^n$ *tako da je:*

$$\Delta f(x) := f(x+h) - f(x) = \langle y, h \rangle + o_x(h),$$

gde je $\lim_{h\to 0} \frac{o_x(h)}{\|h\|} = 0$.

Napomena 1.7. U prethodnoj definiciji vektor y predstavlja gradijent funkcije f u tački x. Pomenuti pojam označavaćemo i računati na sledeći način $f'(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$, tako da je $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(x+\alpha e^k)-f(x)}{\alpha}$, gde je e^k vektor čije su sve koordinate jednake nuli, osim $k-te$ koordinate koja je jednaka 1, pri tome $k = 1, ..., m$.

Definicija 1.21. *Neka je funkcija* f *definisana u nekoj okolini tačke* $x \in \mathbb{R}^n$*. Ona je dva puta diferencijabilna u tački* x*, ako osim gradijenta* $\nabla f(x)$ *postoji i simetrična matrica* $\nabla^2 f(x)$*, odnosno* $f''(x)$*, reda* $n \times n$*, takva da se priraštaj funkcije* f *u tački* x *može predstaviti u obliku*

$$f(x+h) - f(x) = \langle f'(x), h \rangle + \frac{1}{2}\langle f''(x)h, h \rangle + o_x(h),$$

gde je $\lim_{h\to 0} \frac{o_x(h)}{\|h\|^2} = 0$.

Napomena 1.8. U prethodnoj definiciji drugi izvod funkcije f označavamo i sa $\nabla^2 f(x)$, i on se naziva matrica Hesijana i računa se kao

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial (x_1)^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial (x_n)^2} \end{pmatrix}.$$

Definisali smo neprekidne, a potom i diferencijabilne funkcije. Preostaje da se definišu funkcije čiji diferencijal je istovremeno i neprekidna funkcija.

Definicija 1.22. *Funkcija* f *je neprekidno diferencijabilna (glatka) na skupu* $U \in \mathbb{R}^n$*, ukoliko je diferencijabilna na skupu* U *i ukoliko je*

$$\lim_{h\to 0} \|f'(x+h) - f'(x)\| = 0, \forall x, x+h \in U.$$

Klasu glatkih funkcija nad skupom U *označavamo sa* $C^1(U)$.

Definicija 1.23. *Funkcija* f *je dva puta neprekidno diferencijabilna na skupu* $U \in \mathbb{R}^n$*, ukoliko je dva puta diferencijabilna na skupu* U *i ukoliko je*

$$\lim_{h\to 0} \|f''(x+h) - f''(x)\| = 0, \forall x, x+h \in U.$$

Klasu ovako definisanih funkcija nad skupom U *označavamo sa* $C^2(U)$.

1.3 Ekstremne tačke

Na početku ćemo definisati lokalni i globalni minimum (maksimum) funkcije, a zatim i potrebne i dovoljne uslove za njihovo pronalaženje.

Definicija 1.24. *Tačka $x^* \in S$ je lokalni minimum funkcije f na S ako i samo ako postoji $\varepsilon > 0$, tako da je*

$$f(x) \geq f(x^*),$$

za sve $x \in S$ za koje je $\|x - x^*\| < \varepsilon$.

Definicija 1.25. *Tačka $x^* \in S$ je globalni minimum funkcije f na S ako i samo ako je*

$$f(x) \geq f(x^*),$$

za sve $x \in S$.

Napomena 1.9. Ako se u prethodne dve definicije zameni znak $\geq$ znakom $>$, uz uslov $x \neq x^*$, reč je o strogom lokalnom, odnosno, globalnom minimumu.

Analogno se definiše maksimum funkcije. U nastavku su dati potrebni i dovoljni uslovi za lokalni minimum.

Teorema 1.10. *(Potrebni uslovi prvog reda) Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, i neka je $f \in C^1$. Ako je x^* lokalni minimum funkcije f na $\mathbb{R}^n$, onda je:*

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Teorema 1.11. *(Potrebni i dovoljni uslovi drugog reda) Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, i neka je $f \in C^2$. Tačka x^* je lokalni minimum funkcije f na $\mathbb{R}^n$, ako i samo ako je ispunjeno.*

1. $\nabla f(x^*) = 0$,
2. $\nabla^2 f(x^*)$ *je pozitivno semidefinitna.*[1]

Jedna od primena diferencijabilnosti jeste u pronalaženju ekstremnih tačaka. Uvodimo pojam stacionarne tačke kao primer primene pronalaženja minimalnih (maksimalnih) vrednosti funkcije.

[1]Simetrična matrica A dimenzije n je pozitivno semidefinitna ako i samo ako su svi minori matrice A simetrični u odnosu na glavnu dijagonalu negativni.

Definicija 1.26. *(Stacionarna tačka) Neka je f diferencijabilna na $\mathbb{R}^n$. Tačke za koje je $f'(x) = 0$, ili u obliku sistema:*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0, i = 1, ..., n.$$

nazivaju se stacionarne tačke funkcije f na $\mathbb{R}^n$.

Napomena 1.12. Ekstremne tačke funkcije f nad $\mathbb{R}^n$ mogu biti samo one tačke koje su stacionarne.

Definicija 1.27. *Potreban i dovoljan uslov za pozitivnu definitnost jeste da su glavni minori matrice Hesijana pozitivni. Za negativnu definitnost uslov je $(-1)^k M_k(x) > 0$, $k = 1, ..., n$, gde su $M_k(x)$ glavni minori matrice Hesijana.*

U nastavku pretpostavljamo da je funkcija f dva puta diferencijabilna u nekoj okolini stacionarne tačke x i da su svi parcijalni izvodi drugog reda te funkcije neprekidni po x. Tada važe sledeće osobine:

- Tačka x je tačka strogog lokalnog minimuma funkcije f nad $\mathbb{R}^n$ ako za sve $h \neq 0$ takve da $x + h$ pripada okolini tačke x važi $\langle f''(x), h \rangle > 0$, odnosno, matrica Hesijana je pozitivno definitna.
- Tačka x je tačka strogog lokalnog maksimuma funkcije f nad $\mathbb{R}^n$ ako za sve $h \neq 0$ takve da $x + h$ pripada okolini tačke x važi $\langle f''(x), h \rangle < 0$.
- Tačka x nije ekstremna tačka funkcije f nad $\mathbb{R}^n$, ako za različite izbore vektora h, $\langle f''(x), h \rangle$ uzima i pozitivne i negativne vrednosti.

Glava 2

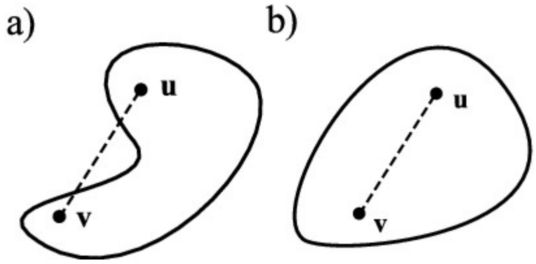
Konveksnost i konkavnost

Konveksne funkcije zbog svojih osobina zauzimaju značajno mesto u teoriji optimizacije. Osim toga, imaju široku primenu u mnogim oblastima, među kojima se izdvaja ekonomija. U ovom poglavlju govorićemo o konveksnim skupovima i njihovim karakteristikama, potom ćemo nad tim skupovima definisati konveksne, ali i kvazikonveksne funkcije. Osim toga, reči će biti i o teoremama separacije koje, kako je rečeno u [5], imaju fundamentalnu ulogu u konveksnoj analizi. Na kraju poglavlja govori se o rešenju problema konveksnog programiranja, a čija će primena biti naknadno data u radu. Više o narednim temama može se pronaći u literaturi koja je upotrebljena za realizaciju ovog poglavlja: [2], [5], [7], [8], [10]. Slike koje se nalaze u ovom poglavlju preuzete su iz: [3], [13], [14], [15] i [16].

2.1 Pojam i osnovne karakteristike konveksnih skupova

Definicija 2.1. *Neka je dat vektorski prostor X nad $\mathbb{R}$, i neka je $S \subset X$. Za skup S kažemo da je konveksan skup ako za sve $x, y \in S$ i za sve $\alpha \in (0,1)$ važi $\alpha x + (1-\alpha)y \in S$.*

Definicija 2.2. *Neka su $x_1, ..., x_m$ tačke vektorskog prostora X. Tačka $x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$ je konveksna kombinacija tačaka $x_1, ..., x_m$, ako je $\alpha_k \geq 0$ za sve $k = 1, ..., m$ i $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$.*



Slika 2.1. Primer nekonveksnog (a) i konveksnog (b) skupa

2.1.1 Operacije sa konveksnim skupovima

U nastavku su date osnovne operacije sa konveksnim skupovima.

Definicija 2.3. *Neka su dati skupovi A i B i skalar λ. Operacije sabiranja i množenja skalarom definišu se na sledeći način:*

$$A + B = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in B\},$$

$$\lambda A = \{x \mid x = \lambda a, a \in A\}.$$

Teorema 2.1. *(Sabiranje i oduzimanje) Neka je dat vektorski prostor X, neka su $A_1, ..., A_m, A, B$ njegovi konveksni podskupovi i neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada su skupovi $A_1 + ... + A_m, A - B$ i λA konveksni skupovi.*

Teorema 2.2. *(Distributivnost) Neka je A konveksan skup i neka su zadati brojevi $\lambda, \mu > 0$, tada je $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.*

Teorema 2.3. *(Presek konveksnih skupova) Neka su A_1 i A_2 konveksni skupovi, tada je i $A_1 \cap A_2$ konveksan skup.*

Teorema 2.4. *(Presek familije konveksnih skupova) Neka je A_λ, za $\lambda \in \Lambda$, familija konveksnih skupova, tada je i $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ konveksan skup.*

Napomena 2.5. Unija dva konveksna skupa ne mora biti konveksan skup.

2.1.2 Osnovna tvrđenja za konveksne skupove

U sledećim tvrđenjima pretpostavljamo postojanje konveksnih skupova u normiranom prostoru $(X, \|\cdot\|)$.

Teorema 2.6. *Neka je A konveksan skup, tada je njegovo zatvaranje (adherencija), $\overline{A}$, takođe konveksan skup.*

Teorema 2.7. *Neka je A konveksan skup, tada je njegova unutrašnjost, A°, konveksan skup.*

Teorema 2.8. *Neka je A konveksan skup neprazne unutrašnjosti, tada je $(\overline{A^{\circ}}) = \overline{A}$ i $(\overline{A})^{\circ} = A^{\circ}$.*

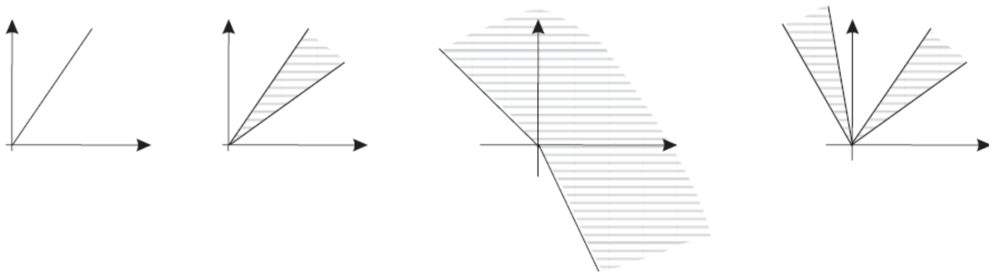
Sada ćemo definisati pojam konveksnog omotača, koji je takođe konveksan skup.

Definicija 2.4. *Neka je dat vektorski prostor X i neka je $A \subset X$. Presek svih konveksnih skupova koji sadrže skup A naziva se konveksni omotač skupa A i označava se sa coA.*

2.2 Konusi

U ovom poglavlju uvešćemo pojam konusa, koji takođe ima značajno mesto u teoriji optimizacije. Konusi će biti i jedna od tema narednih poglavlja u kojima će se pokazati još neke bitne osobine.

Definicija 2.5. *Skup $K \subset \mathbb{R}^n$ je konus sa vrhom u nuli ako za sve $x \in K$ i sve $t > 0$ važi da je $tx \in K$.*



Slika 2.2. Neki konusi u $\mathbb{R}^2$, primer iz [10]

.

Definicija 2.6. *Ako je K konus sa vrhom u nuli, tada je $K_{x_0} = x_0 + K$ konus sa vrhom u x_0. Elementi ovog konusa su oblika $x_0 + \lambda(y - x_0)$ za $y \in K_{x_0}, \lambda > 0$.*

Propozicija 2.9. *Skup $K \subset \mathbb{R}^n$ je konveksan konus sa vrhom u nuli ako i samo ako za sve $x, y \in K$ i sve $\alpha, \beta > 0$ važi $\alpha x + \beta y \in K$.*

Presek proizvoljne familije konusa sa tim vrhom je konus sa tim vrhom (pod pretpostavkom da je presek neprazan). Suma konveksnih konusa sa istim vrhom je konveksan konus sa istim vrhom, takođe i unija konusa sa tim vrhom je konus sa tim vrhom. Ne podrazumeva se da je unija konveksnih konusa konveksan skup. Osim toga i unutrašnjost, zatvaranje i konveksni omotač konusa je konus.

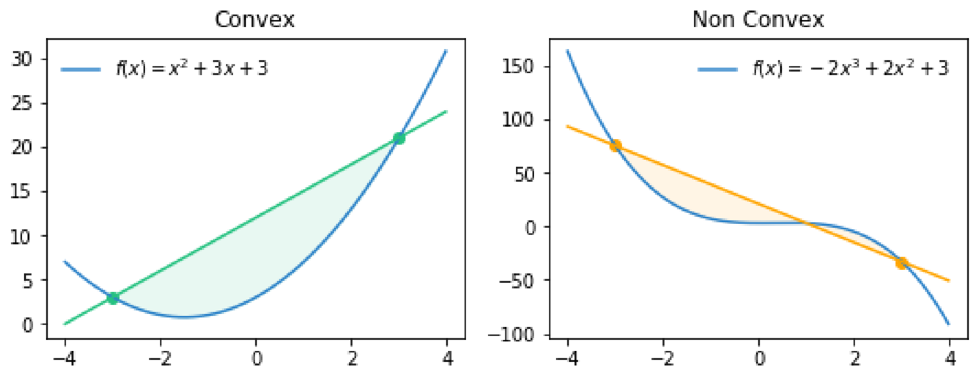
2.3 Konveksne funkcije

Kao što je rečeno na početku poglavlja, definisali smo konveksne skupove, a sada ćemo se baviti funkcijama koje definišemo nad njima.

Definicija 2.7. *Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ konveksan skup. Funkcija f koja je definisana nad skupom U je konveksna na tom skupu ako za sve $x, y \in U$ i sve $\alpha \in (0, 1)$ važi:*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Napomena 2.10. Strogo konveksna funkcija definiše se na isti način kao konveksna funkcija, a jedina razlika je što se u strogo konveksnoj funkciji pojavljuje znak $<$, umesto znaka $\leq$.



Slika 2.3. Grafički prikaz konveksne i nekonveksne funkcije.

Konveksna funkcija f nad intervalom $[a, b]$ je neprekidna nad (a, b) i u svakoj tački $x \in (a, b)$ ima konačan levi i desni izvod za koje je ispunjeno $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

Neka je f diferencijabilna na $[a, b]$. Funkcija f je konveksna na $[a, b]$ ako i samo ako je f' neopadajuća na $[a, b]$. Funkcija f, koja je dva puta diferencijabilna na $[a, b]$, je konveksna na $[a, b]$ ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$, za sve $x \in [a, b]$.

Teoreme u nastavku daju potrebne i dovoljne uslove da funkcija f bude konveksna na konveksnom skupu, uz pretpostavku diferencijabilnosti funkcije f.

Teorema 2.11. *Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ neprazan i konveksan skup. Neka je funkcija f jedanput neprekidno diferencijabilna na skupu U, odnosno, $f \in C^1(U)$. Funkcija f je konveksna na skupu U ako i samo ako je za sve $x, y \in U$*

$$\langle f'(x) - f'(y), x - y \rangle \geq 0.$$

Teorema 2.12. *Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ konveksan skup neprazne unutrašnjosti i neka je $f \in C^2(U)$. Funkcija f je konveksna na U ako i samo ako je*

$$\langle f''(x)u, u \rangle \geq 0,$$

za sve $u \in \mathbb{R}^n$ i sve $x \in U$.

Sada ćemo definisati zatvorene konveksne funkcije, a nakon toga uvesti teoreme koje ćemo koristiti u dokazima teorema u nastavku rada. Pre svega toga, uvešćemo pojam epigrafa funkcije f.

Definicija 2.8. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Epigraf funkcije f je neprazan skup i definiše se kao*

$$epi f = \{(x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid k \geq f(x)\}.$$

Definicija 2.9. *Zatvorena, konveksna funkcija je funkcija čiji je epigraf zatvoren skup.*

Teorema 2.13. *Neka su f_1 i f_2 zatvorene, konveksne funkcije definisane na konveksnim skupovima S_1 i S_2 i neka je $\beta \geq 0$. Tada su funkcije:*

1. $f(x) = \beta f_1(x), S = S_1,$
2. $f(x) = f_1(x) + f_2(x), S = S_1 \cap S_2,$
3. $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}, S = S_1 \cap S_2.$

zatvorene, konveksne funkcije na skupu S.

2.4 Kvazikonveksne funkcije

Na početku uočimo dva pristupa definiciji kvazikonveksne funkcije.

Definicija 2.10. *Funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$, gde je $D_f = [a, b]$ je strogo kvazikonveksna na D_f ako u nekoj tački $x^* \in D_f$ postiže infimum $f^* = \inf_{x \in D_f} f(x)$ i ako postoje $c, d \in [a, b]$ tako da je*

1. *funkcija f strogo monotono opadajuća na $[a, c)$ za $a < c$,*

2. *funkcija f strogo monotono rastuća na $(d, b]$ za $d < b$,*

3. *$f(x) = f^*$ za sve $x \in (c, d)$ za $c < d$.*

Definicija 2.11. *Neka je $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}$. Funkcija f je kvazikonveksna na D_f ako je*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}, \forall x, y \in D_f, \forall \alpha \in [0, 1].$$

Definicija 2.12. *Neka je $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}$. Funkcija f je strogo kvazikonveksna na D_f ako je*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \max\{f(x), f(y)\}, \forall x, y \in D_f, \forall \alpha \in [0, 1], x \neq y.$$

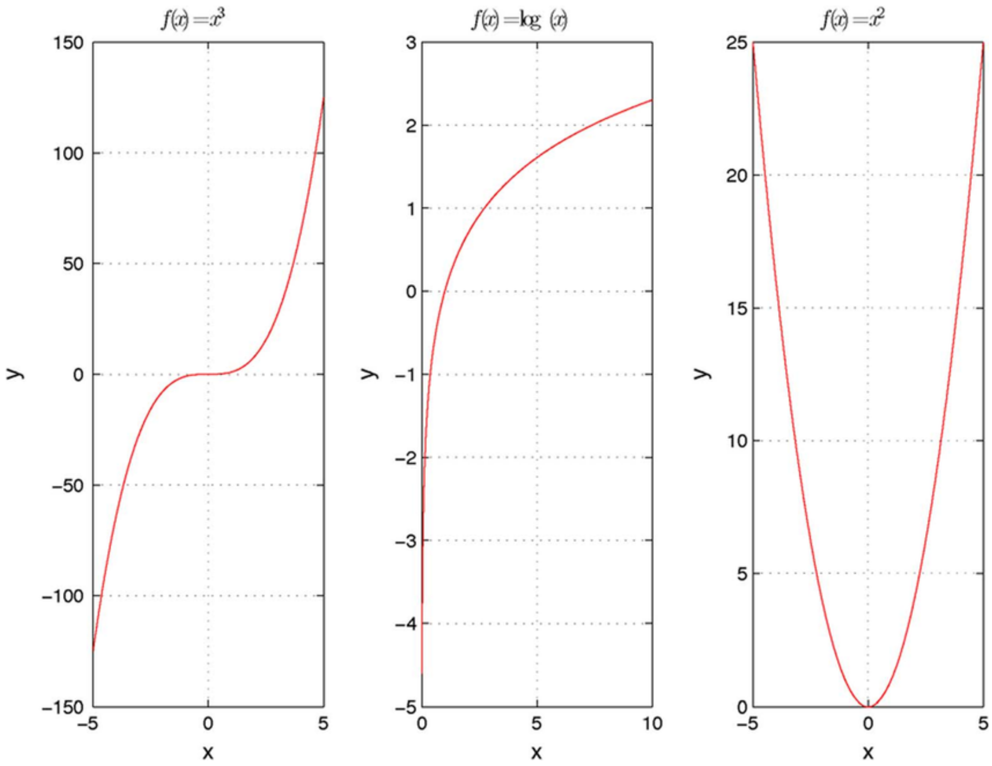
Na sličan način definišemo kvazikonkavne funkcije.

Definicija 2.13. *Neka je $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}$. Funkcija f je kvazikonkavna na D_f ako je*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}, \forall x, y \in D_f, \forall \alpha \in [0, 1].$$

Definicija 2.14. *Neka je $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}$. Funkcija f je strogo kvazikonkavna na D_f ako je*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \min\{f(x), f(y)\}, \forall x, y \in D_f, \forall \alpha \in [0, 1], x \neq y.$$



Slika 2.4. Tri primera kvazikonveksne funkcije.

U nastavku je data veza između konveksnih i kvazikonveksnih funkcija, kao i neke karakteristike pomenutih funkcija.

Lema 2.14. *Svaka konveksna (konkavna) funkcija je ujedno i kvazikonveksna (kvazikonkavna) funkcija. Obrnuto ne važi.*

Lema 2.15. *Neka su funkcije $f_i : D_f \to \mathbb{R}$ kvazikonveksne na D_f, $i = 1, ..., m$. Tada je i funkcija $f(x) = \max_{i=1,...,m} f_i(x)$ kvazikonveksna funkcija.*

Lema 2.16. *Funkcije $f : D_f \to \mathbb{R}$ je kvazikonveksna na D_f ako i samo ako je za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ nivo skup*[1] *$S_\alpha = \{x \in S \mid f(x) \leq \alpha\}$ konveksan skup.*

Definicija 2.15. *Monotona transformacija kvazikonveksne (kvazikonkavne) funkcije je kvazikonveksna (kvazikonkavna) funkcija.*

[1] Lebegov skup

2.5 Hiperravan i separacija

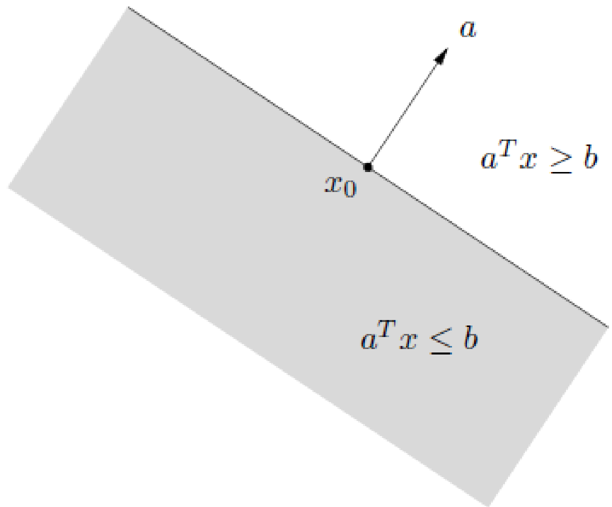
Definicija 2.16. *Hiperravan $H_{c,\gamma}$, definišemo kao*

$$H_{c,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c\rangle = \gamma\},$$

pri čemu je $c \in \mathbb{R}^n$ fiksirani ne-nula vektor i $\gamma \in \mathbb{R}$.

Napomena 2.17. Vektor c je normalni vektor hiperravni $H_{c,\gamma}$ ukoliko $x_0 \in H_{c,\gamma}$, odnosno

$$H_{c,\gamma} = H_{c,x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x - x_0, c\rangle = 0\}.$$

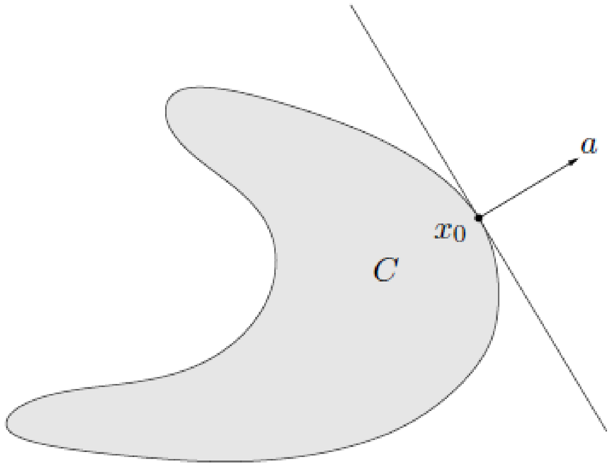


Slika 2.5. Primer hiperravni definisane u $\mathbb{R}^2$ sa $a^T x = b$, sastoji se od dva poluprostora $a^T x \geq b$ (neosenčeno) u pravcu vektora a, i $a^T x \leq b$ (osenčeno), u pravcu vektora $-a$. Vektor a je normalan na ovaj poluprostor.

Definicija 2.17. *Hiperravan $H_{c,\gamma}$ je potporna hiperravan za skup X u tački $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ako je $\langle c, x\rangle \geq \gamma$ za sve $x \in X$ i $\langle c, x_0\rangle = \gamma$. Vektor c je potporni vektor za skup X u tački x_0.*

Teorema 2.18. *Neka je C zatvoren, konveksan skup. Ako se tačka x_0 nalazi na rubu skupa C, tada postoji potporna hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja sadrži tačku x_0.*

(Vektor c je potporni vektor skupa C u tački x_0).



Slika 2.6. Primer potporne hiperravni.

Uveli smo pojam hiperravni. Taj pojam će se često spominjati u definicijama i teoremama separacije koje slede.

Definicija 2.18. *Neka su dati neprazni skupovi $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Hiperravan $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove A i B ako je*

$$\sup_{b \in B} \langle c, b \rangle \leq \gamma \leq \inf_{a \in A} \langle c, a \rangle.$$

Napomena 2.19. 1. Skupovi A i B su jako razdvojeni ako je

$$\sup_{b \in B} \langle c, b \rangle < \inf_{a \in A} \langle c, a \rangle.$$

2. Skupovi A i B su strogo razdvojeni ako je za sve $a \in A$, i sve $b \in B$:

$$\langle c, b \rangle < \langle c, a \rangle.$$

3. Ako hiperravan $H_{c,\gamma}$ razdvaja skupove A i B, onda ih razdvaja i hiperravan $H_{\mu c, \mu \gamma}$, za $\mu \neq 0$.

2.5.1 Teoreme separacije

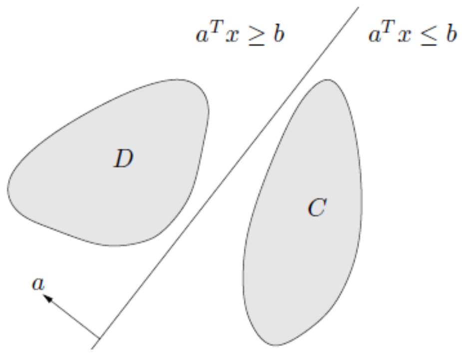
Teorema 2.20. *Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ konveksan skup. Ako $y \notin \overline{A}$ onda se skupovi $\overline{A}$ i $\{y\}$ mogu jako razdvojiti.*

Ako je $A \subset \mathbb{R}^n$ konveksan skup neprazne unutrašnjosti, tada za svako $y \notin A^{\circ}$ postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja razdvaja skupove A i $\{y\}$.

Lema 2.21. *Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$. Ako je $y \in A^o$, tada ne postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$, koja razdvaja skupove A i $\{y\}$.*

Lema 2.22. *Ako za skupove A i B važi $A^o \cap B^o \neq \emptyset$, onda se oni ne mogu razdvojiti.*

Teorema 2.23. *Neka su $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjunktni, konveksni skupovi nepraznih unutrašnjosti. Tada postoji hiperravan $H_{c,\gamma}$ koja razdvaja skupove A i B, ali i skupove $\overline{A}$ i $\overline{B}$. Ako je pri tome $y \in \overline{A} \cap \overline{B}$ onda je $\gamma = \langle c, y \rangle$.*



Slika 2.7. Primer razdvajanja zatvorenih, konveksnih, disjunktnih skupova.

Teorema 2.24. *Neka su $A, B \subset \mathbb{R}^n$ zatvoreni, disjunktni, konveksni skupovi, pri čemu je bar jedan od njih ograničen. Tada se oni mogu jako razdvojiti.*

Sada dajemo definicije i teoremu koja će se kasnije koristiti u dokazima.

Definicija 2.19. *Neka je S proizvoljan skup. Definišemo funkciju $\xi_S(x) = \sup\{\langle g, x \rangle \mid g \in S\}$. Ovako definisana funkcija naziva se potporna funkcija skupa S.*

Primetimo da je potporna funkcija zatvorena, konveksna i homogena sa stepenom homogenosti 1. Osim ove funkcije, definisaćemo i funkciju Minkovskog.[2]

Definicija 2.20. *Neka je S ograničen, zatvoren, konveksan skup koji sadrži 0. Funkcija definisana sa $\psi_S(x) = \min_{\tau \geq 0}\{\tau \mid x \in \tau S\}$, naziva se funkcija Minkovskog.*

Može se pokazati da je funkcija $\psi_S(\cdot)$ homogena.

[2] Hermann Minkowski (1864 - 1909)

Posledica 2.25. *Neka su S_1 i S_2 zatvoreni, konveksni skupovi.*

1. *Ako $\xi_{S_1}(g) \leq \xi_{S_2}(g)$, za sve $g \in D_{\psi_{S_2}}$, onda je $S_1 \subset S_2$.*

2. *Neka je $D_{\xi_{S_1}} = D_{\xi_{S_2}}$, onda za svako $g \in D_{\xi_{S_1}}$ imamo $\xi_{S_1}(g) = \xi_{S_2}(g)$.*

Tada je $S_1 \equiv S_2$.

Naredna teorema imaće primenu u konveksnoj optimizaciji.

Teorema 2.26. *(Minkovski - Farkaš[3]) Data je matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ i vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Neka je:*

$$F = \{x \in \mathbb{R}^m_+ \mid Ax = b\},$$

$$G = \{y \in \mathbb{R}^n \mid yA \in \mathbb{R}^m_+ \wedge \langle y, b\rangle < 0\}.$$

Tada je $F \neq \emptyset$ ako i samo ako je $G = \emptyset$.

2.6 Konveksno programiranje

Neka je dat konveksan skup $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ i neka je funkcija f konveksna funkcija nad tim skupom. Dalje, neka su $g_k(x)$, $k = 1, ..., m$ konveksne funkcije nad U_0, a $g_k(x) = \langle a_k, x\rangle - b_k$, linearne funkcije za $k = m+1, ..., s$, $a_k \in \mathbb{R}^n$, $b_k \in \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}^n$.

Definicija 2.21. *(Zadatak konveksnog programiranja (KP)) Odrediti infimum funkcionele f nad skupom U zadatim sa $U = U_0 \cap ... \cap U_s$. Pri tome, skup $U_0 \subseteq D_f$ je zadat konveksan skup u $\mathbb{R}^n$, a ostali skupovi se definišu kao:*

$$U_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_k(x) \leq 0\}, k = 1, ..., m$$

$$U_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_k(x) = 0\}, k = m+1, ..., s.$$

Definicija 2.22. *Ako tačka $u \in U_k$, za neko $k = 1, ..., s$, kažemo da je ta tačka dopustiva pri ograničenju U_k.*

Neka je $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^s \mid \lambda_k \geq 0, \forall k = 1, ..., m\}$. Primetimo da za $k = m+1, ..., s$, λ_k može biti proizvoljan realan broj.

Sada definišemo funkciju Lagranža[4] i sedlastu tačku, a potom navodimo neke njene osobine i dajemo potrebne i dovoljne uslove za njeno postojanje. Na kraju govorimo o rešenju problema (KP) i dajemo potreban uslov za njegovo rešenje. Primetićemo da nije dat i dovoljan uslov, a to će biti tema poslednjeg poglavlja ovog rada.

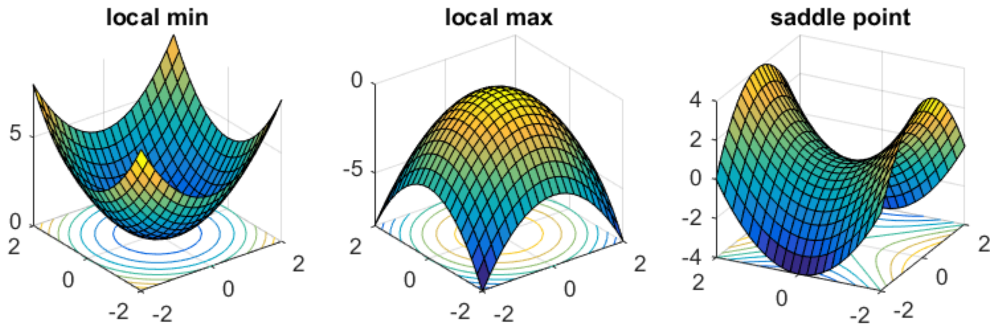
[3]Gyula Farkas (1847 - 1930)

[4]Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813)

Definicija 2.23. *Funkcija Lagranža* $L : U_0 \times \lambda \to \mathbb{R}$ *zadatka (KP) definiše se kao*

$$L(u, \lambda) = f(u) + \lambda_1 g_1(u) + ... + \lambda_s g_s(u).$$

Definicija 2.24. *(Sedlasta tačka Lagranžove funkcije) Neka je* $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$*. Ako za sve* $u \in U_0$ *i sve* $\lambda \in \Lambda$ *važi* $L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*)$*, kažemo da je tačka* (u_*, λ^*) *sedlasta tačka Lagranžove funkcije* $L(u, \lambda)$*.*



Slika 2.8. Lokalni minimum, maksimum i sedlasta tačka.

Lema 2.27. *Ako je* $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ *sedlasta tačka Lagranžove funkcije* $L(u, \lambda)$*, tada je* $u_* \in U$*.*

Lema 2.28. *Ako je tačka* $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ *sedlasta tačka Lagranžove funkcije* $L(u, \lambda)$*, onda je* $\lambda_k^* g_k(u_*) = 0$*, za sve* $k = 1, ..., s$*.*

Lema 2.29. *Ako je* $\lambda_k^* g_k(u_*) = 0$*, za sve* $k = 1, ..., s$ *i* $u_* \in U$*, tada je* $L(u_*, \lambda) \leq L(u, \lambda^*)$

Teorema 2.30. *Tačka* $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ *je sedlasta tačka Lagranžove funkcije* $L(u, \lambda)$ *za (KP) ako i samo ako je*

$$L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*), \forall u \in U_0,$$

$$\lambda_k^* g_k(u_*) = 0, \forall k = 1, ..., s, u_* \in U.$$

Teorema 2.31. *Neka je* $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda$ *sedlasta tačka Lagranžove funkcije* $L(u, \lambda)$*. Tada je* $u_* \in U_*$ *i* $f_* = L(u_*, \lambda^*) = f(u_*)$*, odnosno* u_* *je rešenje (KP).*

Glava 3

Primena konkavnih funkcija u ekonomiji - Kob Daglasova proizvodna funkcija

Proizvodna funkcija ima zadatak da opiše odnos između obima proizvodnje i faktora proizvodnje. S toga, ona predstavlja preslikavanje iz skupa $\mathbb{R}_+^n$ u skup $\mathbb{R}_+$. Dakle, ako se zapiše $y = f(x)$, misli se da se korišćenjem x vektora inputa-a[1] može proizvesti y jedinica output-a[2]. Ovako opisane funkcije su neprekidne, strogo rastuće i strogo kvazikonkavne na $\mathbb{R}_+^n$, a ispunjeno je i $f(0) = 0$. [4]

Centralni deo ovog poglavlja zauzimaće jedna takva funkcija. Naime, reč je o Kob Daglasovoj proizvodnoj funkciji, nazvanoj po njenim autorima, Čarlsu Kobu[3] i Polu Daglasu[4]. Ona je prvi put korištena u proučavanju modela rasta američke ekonomije u periodu od 23 godine (1899 – 1922). Za više detalja o ovoj funkciji pogledati literaturu [4], [9] i [11].

Kob Daglasova proizvodna funkcija definiše se na sledeći način:

$$f(L, K) = AL^\alpha K^\beta \tag{3.1}$$

pri čemu je sa $f(L, K)$ označena količina proizvedenih dobara u toku jedne godine. Sa L je označen ukupan broj radnih sati u periodu od godinu dana, dok K predstavlja kapital investiran da bi se dobio gotov proizvod. Konstanta A za koju važi da je realna i nenegativna, predstavlja promenu proizvodnje ukoliko se menja L, odnosno K. U ovoj funkciji parametri α i β predstavl-

[1]Ulazni element u proizvodnji.
[2]Izlazni proizvod.
[3]Charles Wiggins Cobb (1875 – 1949)
[4]Paul Howard Douglas (1892 – 1976)

jaju konstante elastičnosti, a o njima će se detaljnije govoriti u nastavku ovog poglavlja.

Dakle, Kob Daglasova proizvodna funkcija zavisi od broja radnih sati i od kapitala, što je prilično oskudno za analizu proizvodnje, ali, bez obzira na to, rezultati koji su dobijeni imali su visoki stepen preciznosti. Osim toga, ova funkcija ima osobine kojima se preciznije mogu odrediti neke karakteristike proizvodnje.

3.1 Osnovne karakteristike

3.1.1 Konstante elastičnosti proizvodnje

Da bi se pokazala mera promene u količini proizvedenih dobara koja nastaje pri promeni u količini uloženog rada ili kapitala, uvode se konstante elastičnosti. Kao što je već rečeno u samoj definiciji Kob Daglasove funkcije (3.1), te konstante označene su sa α i β.

Konstanta α odnosi se na elastičnost proizvodnje s obzirom na rad, dok konstanta β predstavlja elastičnost proizvodnje s obzirom na kapital. Dakle, ukoliko se u proizvodnju uloži 1% više rada, kao posledica toga doći će do povećanja proizvodnje za približno α%. Analogno, prilikom uvećanja kapitala za 1%, proizvodnja se povećava za oko β%. Važno je još napomenuti da se pomenute konstante elastičnosti proizvodnje biraju iz intervala $[0, 1]$.

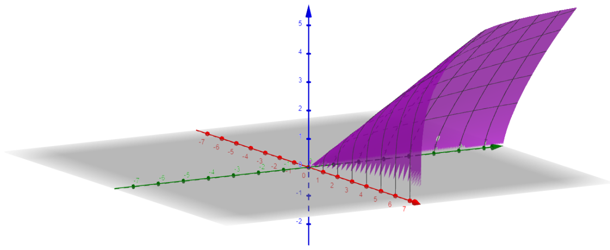
Ukoliko je u Kob Daglasovoj funkciji $\beta = 1 - \alpha$, odnosno, funkcija ima sledeći oblik:

$$f(L, K) = AL^{\alpha}K^{1-\alpha} \tag{3.2}$$

reč je o strogoj Kob Daglasovoj funkciji.

Konstante elastičnosti pokazuju i da li funkcija f opada, odnosno raste. U slučaju $\alpha + \beta < 1$ radi se o opadajućoj funkciji f. Sa druge strane, kada je $\alpha + \beta > 1$, tada je funkcija f rastuća.

U nastavku je dat grafik Kob Daglasove funkcije za primer koji se u praksi najčešće koristi, i to kada je $A = 1,01$, $\alpha = 0,75$ i $\beta = 0,25$. Za crtanje grafika korištena je aplikacija GeoGebra.



Slika 3.1. Kob Daglasova proizvodna funkcija $f(L, K) = 1,01L^{0,75}K^{0,25}$

Na grafiku se može videti da proizvodnja označena sa f, raste sa rastom L ili K. Takođe, sa nestankom rada ili kapitala nestala bi i proizvodnja.

3.1.2 Homogenost, konkavnost i kvazikonkavnost

Na početku ćemo navesti definiciju homogene funkcije, a nakon toga ćemo dati vezu između homogenosti i Kob Daglasove funkcije.

Definicija 3.1. *Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je homogena sa stepenom homogenosti k ako je:*

$$f(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, ..., x_n).$$

Teorema 3.1. *Kob Daglasova funkcija proizvodnje je homogena sa stepenom homogenosti $\alpha + \beta$.*

Dokaz. Posmatramo Kob Daglasova proizvodnu funkciju i $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada važi:

$$\begin{aligned} f(\lambda L, \lambda K) &= A(\lambda L)^\alpha (\lambda K)^\beta \\ &= A\lambda^{\alpha+\beta} L^\alpha K^\beta \\ &= \lambda^{\alpha+\beta} f(L, K) \end{aligned}$$

□

Ovim je pokazano da ukoliko se L i K uvećaju λ puta, tada se i proizvodnja uveća $\lambda^{\alpha+\beta}$ puta. Slično se pokazuje da je i stroga Kob Daglasova funkcija (3.2) homogena, ali je njen stepen homogenosti 1.

Posledica 3.2. *Stroga Kob Daglasova funkcija je homogena sa stepenom homogenosti 1.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} f(\lambda L, \lambda K) &= A(\lambda L)^\alpha (\lambda K)^{1-\alpha} \\ &= A\lambda^{\alpha+1-\alpha} L^\alpha K^{1-\alpha} \\ &= \lambda f(L, K) \end{aligned}$$

□

To znači da prilikom uvećanja radnih sati i kapitala λ puta, dolazi do povećanja funkcije proizvodnje λ puta.

U nastavku se pokazuje kada je Kob Daglasova funkcija konkavna.

Teorema 3.3. *Kob Daglasova funkcija je konkavna za $\alpha + \beta \leq 1$.*

Dokaz. Da bismo dokazali konkavnost, koristimo matricu Hesijana, koja za pomenutu funkciju ima sledeći oblik:

$$\nabla^2 f(L, K) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(L,K)}{\partial L^2} & \frac{\partial^2 f(L,K)}{\partial L \partial K} \\ \frac{\partial^2 f(L,K)}{\partial K \partial L} & \frac{\partial^2 f(L,K)}{\partial K^2} \end{bmatrix}$$

Kada uvrstimo druge izvode dobijamo:

$$\nabla^2 f(L, K) = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)AL^{\alpha-2}K^{\beta} & \alpha\beta AL^{\alpha-1}K^{\beta-1} \\ \alpha\beta AL^{\alpha-1}K^{\beta-1} & \beta(\beta-1)AL^{\alpha}K^{\beta-2} \end{bmatrix}$$

Sledeći korak je pronalaženje vodećih glavnih minora. Tako dobijamo dva vodeća glavna minora reda jedan:

$$M_1 = \alpha(\alpha-1)AL^{\alpha-2}K^{\beta},$$

$$M_1' = \beta(\beta-1)AL^{\alpha}K^{\beta-2},$$

kao i jedan vodeći glavni minor reda dva:

$$M_2 = \alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)A^2L^{\alpha-2+\alpha}K^{\beta+\beta-2} - \alpha^2\beta^2A^2L^{\alpha-1+\alpha-1}K^{\beta-1+\beta-1}$$

Sređivanjem izraza dobijamo:

$$M_2 = 1 - (\alpha+\beta)A^2L^{2\alpha-2}K^{2\beta-2}.$$

Da bi važila konkavnost mora biti ispunjeno sledeće:

$$M_1 \leq 0 \wedge M_1' \leq 0 \wedge M_2 \geq 0.$$

Kako su $A, L, K \geq 0$ realni brojevi, za M_1, odnosno, M_1' važi: $\alpha(\alpha-1) \leq 0$ i $\beta(\beta-1) \leq 0$. Nejednakosti su ispunjene u slučaju $\alpha \in (0,1)$, odnosno, $\beta \in (0,1)$, a to uvek važi.

Slično, za M_2 važi: $1 - (\alpha+\beta) \geq 0$, odakle se konačno dobija da je Kob Daglasova proizvodna funkcija konkavna ako je $\alpha + \beta \leq 1$. □

Preostaje da se pokaže kvazikonkavnost.

Teorema 3.4. *Kob Daglasova funkcija je kvazikonkavna.*

Dokaz. U lemi 2.14 pokazano je da je svaka konkavna funkcija i kvazikonkavna, kao i da monotone transformacije očuvavaju kvazikonkavnost (definicija 2.15). U nastavku se pokazuje da je uvek moguće Kob Daglasovu funkciju zapisati kao monotonu transformaciju konkavne funkcije. Pokazujemo sledeće:

$$f(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta} \qquad \Big/ \ln$$

$$g(L, K) = \ln(AL^{\alpha}K^{\beta})$$

$$g(L, K) = \ln(A) + \alpha \ln(L) + \beta \ln(K).$$

Ovako dobijena funkcija g predstavlja Kob Daglasovu funkciju sa smanjenjem prosečne profitabilnosti. Ona je konkavna jer važi:

$$\det(\nabla^2 g(L, K)) = \frac{\partial g(L, K)}{\partial L^2} + \frac{\partial g(L, K)}{\partial K^2} - \frac{\partial g(L, K)}{\partial L \partial K}$$

$$\det(\nabla^2 g(L, K)) = -\frac{\alpha}{L^2} \cdot \left(-\frac{\beta}{K^2}\right) = \frac{\alpha\beta}{L^2 K^2} > 0,$$

kao i $\frac{\partial g(L,K)}{\partial L^2} = -\frac{\alpha}{L^2} < 0$. Ovo je ispunjeno na osnovu činjenice da je funkcija $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konkavna ako je $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x^2} < 0$ i $\det(H) > 0$, gde je sa H označena matrica Hesijana funkcije g. Ako uzmemo

$$g(L, K) = \ln(AL^{\alpha}K^{\beta}) \qquad \Big/ e$$

dobijamo:

$$e^{g(L,K)} = AL^{\alpha}K^{\beta} = f(L, K).$$

Dakle, monotona transformacija funkcije g, kao rezultat je dala funkciju f. Ovim je pokazano da je Kob Daglasova funkcija kvazikonkavna, jer se svaka funkcija Kob Daglasovog tipa može napisati kao monotona transformacija konkavne funkcije. $\square$

3.2 Marginalna proizvodnja

Posmatramo Kob Daglasovu funkciju $f = f(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$. Prosečna količina proizvodnje po jedinici radnih sati data je sa: f/L. Ukoliko se pri fiksiranom kapitalu posmatra promena radnih sati od L do $L + \Delta L$, tada se i proizvodnja menja i postaje:

$$\Delta f = f(L + \Delta L, K) - f(L, K).$$

Promena u proizvodnji, pri promeni po jedinici radnih sati dobija se kada se data jednakost podeli sa ΔL, odnosno:

$$\frac{\Delta f}{\Delta L} = \frac{f(L + \Delta L, K) - f(L, K)}{\Delta L}. \tag{3.3}$$

Ukoliko u (3.3) $\Delta L \to 0$ dobija se parcijalni izvod funkcije f po L: $\partial f/\partial L$, u ekonomiji termin poznat pod nazivom marginalna (granična) proizvodnja rada. Dakle,

$$\frac{\partial f}{\partial L} = A\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta} = \alpha\frac{f}{L}, \tag{3.4}$$

marginalna proizvodnja rada jednaka je proizvodu konstante α i prosečne količne proizvodnje po jedinici radnih sati.

Naravno, umesto radnih sati, možemo posmatrati kapital, pa je tako:

$$\frac{\partial f}{\partial K} = A\beta L^{\alpha}K^{\beta-1} = \beta\frac{f}{K}, \tag{3.5}$$

promena proizvodnje u odnosu na kapital ili marginalna proizvodnja kapitala.

Vezu između marginalne proizvodnje rada i kapitala daje sledeća teorema.

Teorema 3.5. *Neka je data Kob Daglasova funkcija proizvodnje $f(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$, pri čemu $\partial f/\partial L$ i $\partial f/\partial K$ predstavljaju marginalnu proizvodnju rada i marginalnu proizvodnju kapitala, respektivno. Tada važi:*

$$L\frac{\partial f}{\partial L} + K\frac{\partial f}{\partial K} = (\alpha + \beta)f.$$

Dokaz. Iz (3.4) i (3.5) sledi:

$$L\frac{\partial f}{\partial L} + K\frac{\partial f}{\partial K} = LA\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta} + KA\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}.$$

Sređivanjem date jednakosti dobija se:

$$L\frac{\partial f}{\partial L} + K\frac{\partial f}{\partial K} = A\alpha L^{\alpha}K^{\beta} + A\beta L^{\alpha}K^{\beta} = (\alpha + \beta)AL^{\alpha}K^{\beta},$$

odnosno,

$$L\frac{\partial f}{\partial L} + K\frac{\partial f}{\partial K} = (\alpha + \beta)f,$$

što je trebalo pokazati. □

3.3 Maksimizacija profita i minimizacija troškova Kob Daglasove funkcije

Cilj svake proizvodnje jeste da se uz minimalne troškove ostvari što veći profit. Kada je reč o Kob Daglasovoj proizvodnoj funkciji (3.1), koja zavisi od dve promenljive - rada i kapitala, u nastavku ćemo pokazati kako se ostvaruje maksimizacija proizvodnje pomoću Lagranžove funkcije.

Neka je:

- m - cena po jedinici rada,
- n - cena po jedinici kapitala,
- p - budžet preduzeća.

Tada je ograničenje prilikom maksimizacije funkcije (3.1) dato sa:

$$mL + nK = p.$$

Odnosno,

$$g(L, K) = mL + nK - p. \tag{3.6}$$

Kako je data funkcija i ograničenje, konačno možemo definisati Lagranžovu funkciju na sledeći način:

$$F(L, K, \lambda) = f(L, K) + \lambda g(L, K). \tag{3.7}$$

Te uvrštavanjem datih funkcija u (3.7) dobijamo:

$$F(L, K, \lambda) = AL^{\alpha}K^{\beta} + \lambda(mL + nK - p).$$

Naredni korak je pronalaženje parcijalnih izvoda prvog reda funkcije F i njihovo izjednačavanje sa nulom:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta} + \lambda m = 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \beta AL^{\alpha}K^{\beta-1} + \lambda n = 0, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = mL + nK - p = 0. \tag{3.10}$$

Primetimo da se za m, odnosno, n iz (3.8) i (3.9) dobija:

$$m = \frac{-\alpha A L^{\alpha} K^{\beta}}{\lambda L},$$

$$n = \frac{-\beta A L^{\alpha} K^{\beta}}{\lambda K}.$$

Do L se dolazi na sledeći način:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial K}}{\frac{\partial F}{\partial L}} = \frac{n}{m},$$

te uvrštavanjem dobijenih vrednosti za m i n, i sređivanjem razlomka:

$$\frac{L}{K} = \frac{n}{m} \cdot \frac{\alpha}{\beta},$$

konačno dobijamo:

$$L = K \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{\alpha}{\beta}. \tag{3.11}$$

U narednom koraku u funkciju (3.6) uvrstićemo dobijenu vrednost za L (3.11).

$$m \left(K \frac{n}{m} \frac{\alpha}{\beta} \right) + nk - p = 0.$$

Odavde se može izraziti i K, za koje se dobija:

$$K = \frac{p}{n} \cdot \frac{\beta}{\alpha + \beta}. \tag{3.12}$$

Ovako dobijeno K uvrštavamo u (3.11), kako bismo dobili L koje zavisi samo od n, m, α i β:

$$L = \frac{p}{m} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \tag{3.13}$$

Na kraju, kao rešenje dobijamo stacionarnu tačku:

$$S = \left(\frac{p}{m} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \frac{p}{n} \cdot \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right).$$

Kako je cilj postići maksimalni profit Kob Daglasove funkcije, potrebno je proveriti, da li u ovako dobijenoj tački funkcija dostiže maksimum. Posmatraćemo matricu Hesijana Lagranžove funkcije F u pomenutoj tački, a ona ima sledeći oblik:

$$\nabla^2 F(S) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial L}(S) & \frac{\partial g}{\partial K}(S) \\ \frac{\partial g}{\partial L}(S) & \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}(S) & \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K}(S) \\ \frac{\partial g}{\partial K}(S) & \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L}(S) & \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(S) \end{bmatrix}.$$

Za zadatu funkciju (3.7), matrica je data sa:

$$\nabla^2 F(S) = \begin{bmatrix} 0 & m & n \\ m & \alpha(\alpha-1)AL^{\alpha-2}K^{\beta} & \alpha\beta AL^{\alpha-1}K^{\beta-1} \\ n & \alpha\beta AL^{\alpha-1}K^{\beta-1} & \beta(\beta-1)AL^{\alpha}K^{\beta-2} \end{bmatrix}.$$

Treba pokazati da za vodeći glavni minor reda 3, u oznaci M_3, u tački S važi: $M_3 > 0$. Kako ovo zaista važi, tačka S je tačka maksimuma funkcije F. Neka je funkcija profita označena sa P, tada se posmatra problem:

$$P(m,n,A,L,K) = AL^{\alpha}K^{\beta} \to \max.$$

Rešenje problema dobija se uvrštavanjem vrednosti za L (3.13) i K (3.12):

$$P(m,n,A,L,K) = A\left(\frac{p}{m}\right)^{\alpha}\left(\frac{p}{n}\right)^{\beta}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{\beta}.$$

U nastavku ćemo posmatrati problem minimizacije troškova pri konstantnoj proizvodnji označenoj sa Y. Neka je C funkcija troškova proizvodnje čiji će se minimum tražiti, odnosno, posmatra se sledeći problem:

$$C(m,n,A,L,K) = mL + nK \to \min. \tag{3.14}$$

Ponovo se formira funkcija Lagranža:

$$G(L,K,\lambda) = mL + nK + \lambda(Y - AL^{\alpha}K^{\beta}).$$

Kao i u prethodnom primeru, pronaći ćemo parcijalne izvode prvog reda, koje ćemo potom izjednačiti sa nulom. Tako dobijamo sledeće jednakosti:

$$\frac{\partial G}{\partial L} = m - \lambda\alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta} = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial K} = n - \lambda \beta A L^{\alpha} K^{\beta - 1} = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = Y - A L^{\alpha} K^{\beta} = 0.$$

Na isti način dolazimo do L i do K, te tako dobijamo:

$$L = \left(\frac{Y}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}, \tag{3.15}$$

$$K = \left(\frac{Y}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}. \tag{3.16}$$

Dakle, dobijamo stacionarnu tačku koju ćemo označiti sa $\hat{S}$ i ona je jednaka:

$$\left(\left(\frac{Y}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}, \left(\frac{Y}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \right).$$

Analogno prethodnom primeru, proveravamo da li je data tačka, tačka minimuma posmatrane funkcije. Ispostavlja se da tačka $\hat{S}$ jeste tačka minimuma, te rešenje problema (3.14) dobijamo uvrštavanjem tačke $\hat{S}$ u funkciju C, odnosno:

$$C(m,n,A,L,K) = \left(\frac{Y}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} m^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} n^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right).$$

Napomena 3.6. Ako se umesto Kob Daglasove funkcije posmatra stroga Kob Daglasova funkcija (3.2), maksimalni profit dat je sa:

$$P(m,n,A,L,K) = A \left(\frac{p}{m}\alpha\right)^{\alpha} \left(\frac{p}{n}(1-\alpha)\right)^{1-\alpha},$$

dok je minimalni trošak proizvodnje dat sa:

$$C(m,n,A,L,K) = m\frac{Y}{A}\left(\frac{m(1-\alpha)}{n\alpha}\right)^{\alpha-1} + n\frac{Y}{A}\left(\frac{m(1-\alpha)}{n\alpha}\right)^{\alpha}.$$

Glava 4

Subdiferencijali

Diferencijabilnost je jedno od osnovnih svojstava funkcija u analizi, pomoću kojeg se ostvaruju značajne primene. Međutim, problem nastaje kada posmatrana funkcija nije diferencijabilna. Takve su, na primer, funkcije čiji su gradijenti prekidni. Da bi ovaj problem bio rešen, umesto da se posmatra gradijent, posmatraće se njegova generalizacija, subgradijent. Ovu činjenicu najbolje opisuje konstatacija data u [2] u kojoj se derivacija opisuje kao lokalno, a subgradijent kao globalno svojstvo date konveksne funkcije. U ovom poglavlju definisaćemo subgradijent i subdiferencijal, a potom i pokazati neka njihova osnovna svojstva, dok ćemo u narednom poglavlju dati i njihovu primenu. Osim u [2], čitalac može pronaći više o temi subdiferencijala u literaturi [1], [3], [5] i [6].

4.1 Pojam subdiferencijala

Na samom početku poglavlja uvešćemo centralne pojmove o kojima će se u nastavku govoriti.

Definicija 4.1. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ je subgradijent funkcije f u tački $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ako za svako $x \in \mathbb{R}^n$ važi:*

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle d, x - x_0 \rangle. \tag{4.1}$$

U slučaju da se posmatra konkavna funkcija f, tada je $d \in \mathbb{R}^n$ supergradijent funkcije f u tački $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ukoliko je $-d$ subgradijent konveksne funkcije $-f$ u tački $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dakle, supergradijent konkavne funkcije definiše se kao:

$$f(x) \leq f(x_0) + \langle d, x - x_0 \rangle. \tag{4.2}$$

Definicija 4.2. *Skup svih subgradijenata (supergradijenata) konveksne (konkavne) funkcije f u tački $x_0 \in \mathbb{R}^n$, naziva se subdiferencijal (superdiferencijal) funkcije f u tački x_0 i označava se sa $\partial f(x_0)$.*

Napomena 4.1. Neka je $S \subseteq D_f$ proizvoljan skup. Ukoliko je (4.1), odnosno, (4.2) ispunjeno za sve $x \in S$, tada $d \in \partial_S f(x_0)$. To je subdiferencijal (ili superdiferencijal) ograničen na skup S. Očigledno, za svaki konveksan skup $S \subseteq D_f$, važi: $\partial f(x_0) \subseteq \partial_S f(x_0)$.

U narednom primeru prikazan je postupak izračunavanje subdiferencijala funkcije $f(x) = |x|$.

Primer 4.2. *Potrebno je pronaći subdiferencijal funkcije $f(x) = |x|$. Primetimo da je domen funkcije f skup $\mathbb{R}$, da je ona konveksna funkcija koja je diferencijabilna na $\mathbb{R}$ svuda osim u nuli što ćemo sada pokazati:*

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Dakle, kako nam se leva i desna granična vrednost funkcije ne poklapaju, zaključak je da funkcija f nije diferencijabilna u tački 0. Ipak, pronaći ćemo subdiferencijal u toj tački. Sada iz (4.1) za $x_0 = 0$ sledi:

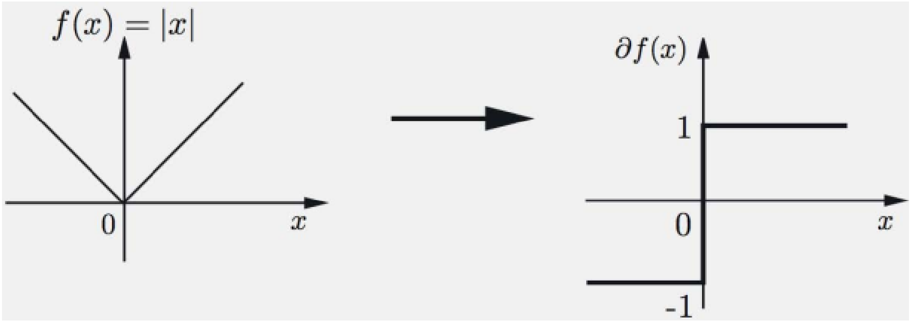
$$f(x) \geq f(0) + \langle d, x - 0 \rangle,$$

odnosno,

$$f(x) \geq f(0) + d(x - 0),$$

$$f(x) \geq dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Odavde dolazimo do zaključka da je subdiferencijal funkcije f u tački 0 dat sa: $\partial f(0) = [-1, 1]$, što pokazuje naredna slika preuzeta iz [1].



Slika 4.1. Grafik funkcije $f(x) = |x|$ (levo), i grafik njenog subdiferencijala (desno).

4.2 Osnovne karakteristike

Neke od osnovnih karakteristika subdiferencijala razmatraćemo u nastavku poglavlja. To se, pre sega, odnosi na osobine skupa $\partial f(x)$. Sledeća lema pokazuje da iz subdiferencijabilnosti funkcije f u svim tačkama konveksnog skupa S, sledi konveksnost i zatvorenost funkcije f.

Lema 4.3. *Neka je S konveksan skup. Pretpostavimo da je subdiferencijal funkcije f na skupu S, $\partial_S f(x)$, neprazan skup za svako $x \in S$. Tada je funkcija f zatvorena i konveksna na skupu S.*

Dokaz. Za dokaz ove leme biće korištena naredna teorema, čiji dokaz se može pronaći u [7].

Teorema 4.4. *Neka je S proizvoljan skup i neka važi:*

$$f(x) = \sup\{\phi(x, y) \mid y \in S\}.$$

Pretpostavimo da je za svako $y \in S$, funkcija $\phi(\cdot, y)$ zatvorena i konveksna na nekom skupu Q. Tada je $f(\cdot)$ zatvorena i konveksna funkcija na skupu

$$\hat{Q} = \left\{ x \in Q \mid \sup_{y \in S} \phi(x, y) < +\infty \right\}.$$

Nastavljamo dokaz leme. Definisaćemo za svako $x \in S$:

$$\hat{f}(x) = \sup\{f(x_0) + \langle d(x_0), x - x_0 \rangle \mid x_0 \in S\} \geq f(x),$$

gde je $d(x_0)$ proizvoljan subgradijent iz $\partial_S f(x_0)$. Iz teoreme 4.4 dobija se da je $\hat{f}$ zatvorena, konveksna funkcija za koju važi $\hat{f}(x) \geq f(x)$ za svako $x \in S$, te zbog (4.1) važi tvrđenje. $\square$

Naredna teorema daje vezu između konveksne funkcije i subdiferencijala.

Teorema 4.5. *Neka je f konveksna funkcija. Ako je $x_0 \in D_f$, onda je subdiferencijal funkcije f u tački x_0, $\partial f(x_0)$, neprazan i ograničen skup.*

Dokaz. Primetimo da tačka $(f(x_0), x_0)$ pripada granici epigrafa funkcije f. Iz teoreme 2.18 postojaće potporna hiperravan $H_{g,\alpha}$ epigrafa funkcije f u tački $(f(x_0), x_0)$. Dakle,

$$-\alpha\tau + \langle g, x\rangle \leq -\alpha f(x_0) + \langle g, x_0\rangle, \tag{4.3}$$

za sve $(\tau, x) \in epi(f)$. U narednom koraku normalizovaćemo koeficijente hiperravni da bi uslov bio zadovoljen:

$$\|g\|^2 + \alpha^2 = 1. \tag{4.4}$$

Kako je $(\tau, x_0) \in epi(f)$ za sve $\tau \geq f(x_0)$, zaključujemo da je $\alpha \geq 0$.

U nastavku dokaza koristiće se teorema koja daje vezu između konveksnih funkcija i Lipšic neprekidnosti. Podsetimo se, funkcija f je Lipšic neprekidna na skupu S, ukoliko za svako $x, y \in S$, postoji konstanta $L \geq 0$ tako da važi:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|. \tag{4.5}$$

Teorema 4.6. *Neka je f konveksna funkcija, i neka je $x_0 \in D_f$. Tada je f lokalno ograničena i Lipšic neprekidna u x_0.*

Dokaz i ove teoreme čitalac može pronaći u [7].

Odavde dobijamo da postoji neko $\varepsilon > 0$ i $M > 0$, tako da se lopta $B(x_0, \varepsilon)$ nalazi u domenu funkcije f, pri čemu je za svako $x \in B(x_0, \varepsilon)$ ispunjeno:

$$f(x) - f(x_0) \leq M\|x - x_0\|. \tag{4.6}$$

Sada iz (4.3) i (4.6), za svako $x \in B(x_0, \varepsilon)$ važi:

$$\langle g, x - x_0\rangle \leq \alpha(f(x) - f(x_0)) \leq \alpha M\|x - x_0\|.$$

Birajući $x = x_0 + \varepsilon g$, dobijamo $\|g\|^2 \leq M\alpha\|g\|$. Dakle, iz (4.4), dobijamo $\alpha \geq \sqrt{\frac{1}{1+M^2}}$. S toga, izaberemo li $d = g/\alpha$, dobijamo da za svako $x \in D_f$ iz (4.3) važi:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle d, x - x_0\rangle.$$

Na kraju, ukoliko je $d \neq 0$, i $d \in \partial f(x_0)$, birajući $x = \frac{x_0 + \varepsilon d}{\|d\|}$, možemo zaključiti da važi:

$$\varepsilon\|d\| = \langle d, x - x_0\rangle \leq f(x) - f(x_0) \leq M\|x - x_0\| = M\varepsilon.$$

Odavde dolazimo do zaključka da je $\partial f(x_0)$ ograničen skup. $\square$

4.3 Izvod po pravcu i subdiferencijal

Naredni redovi ovog rada biće posvećeni vezi između izvoda po pravcu posmatrane funkcije i subdiferencijala. Zbog toga, na početku dajemo definiciju izvoda po pravcu.

Definicija 4.3. *(Izvod po pravcu vektora) Izvod po pravcu vektora $c \in \mathbb{R}^n$ funkcije f u tački x dat je sa:*

$$f'(x,c) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+tc) - f(x)}{t}. \tag{4.7}$$

Napomena 4.7. Ako je funkcija f iz prethodne definicije diferencijabilna u tački $x \in \mathbb{R}^n$, onda postoje izvodi po svim pravcima vektora $c \in \mathbb{R}^n$ u tački x_0, i tada je $f'(x,c) = \nabla f(x) \cdot c$.

Lema koja sledi imaće primenu u dokazima teorema koje su date u nastavku, dok dokaz leme čitalac može pronaći u [7].

Lema 4.8. *Neka je funkcija $f : D_f \to \mathbb{R}$ konveksna i neka je $x \in D_f$. Neka je izvod po pravcu $f'(x,\cdot)$ konveksna i homogena funkcija sa stepenom homogenosti 1 po drugoj promenljivoj. Tada za sve $y \in D_f$ važi:*

$$f(y) \geq f(x) + f'(x, y-x).$$

Nakon uvođenja osnovnih definicija izvoda po pravcu, sledi teorema koja pokazuje koja je veza između pomenutih izvoda i subdiferencijala.

Teorema 4.9. *Neka je f konveksna funkcija i neka je $x_0 \in D_f$. Tada:*

$$\partial_2 f'(x_0, 0) = \partial f(x_0),$$

pri čemu je sa ∂_2 označen subdiferencijal drugog argumenta funkcije $f(x_0,\cdot)$. Štaviše, za svako $p \in \mathbb{R}^n$ imamo:

$$f'(x_0,p) = \max\{\langle d, p\rangle \mid d \in \partial f(x_0)\}.$$

Dokaz. Neka je $d \in \partial f(x_0)$ proizvoljan vektor. Primetimo da je ispunjeno:

$$f'(x_0,p) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha p) - f(x_0)}{\alpha} \geq \langle d, p\rangle. \tag{4.8}$$

Dakle, subdiferencijal funkcije $f'(x_0,\cdot)$ u tački $p = 0$ je neprazan skup i $\partial f(x_0) \subseteq \partial_2 f'(x_0, 0)$. Kako je $f'(x_0,p)$ konveksna u p iz leme 4.8, za svako $x \in D_f$ imamo da je:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0, x - x_0) \geq f(x_0) + \langle d, x - x_0\rangle,$$

za $d \in \partial_2 f'(x_0, 0)$. Dakle, $\partial_2 f'(x_0, 0) \subseteq \partial f(x_0)$. To znači da se ovi skupovi poklapaju, odnosno, $\partial_2 f'(x_0, 0) = \partial f(x_0)$.

Neka je $d \in \partial_2 f'(x_0, p)$. Onda iz leme 4.8, za sve $\tau > 0$ i $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$:

$$\tau f'(x_0, \varepsilon) = f'(x_0, \tau\varepsilon) \geq f'(x_0, p) + \langle d, \tau\varepsilon - p \rangle.$$

Kada $\tau \to \infty$ dobijamo

$$f'(x_0, \varepsilon) \geq \langle d, \varepsilon \rangle. \tag{4.9}$$

Pretpostavimo da $\tau \to 0$, tada

$$f'(x_0, p) - \langle d, p \rangle \leq 0. \tag{4.10}$$

Iz nejednakosti (4.9) dobijamo da $d \in \partial_2 f'(x_0, 0)$. Poređenjem (4.8) i (4.10) zaključujemo da je $\langle d, p \rangle = f'(x_0, p)$. $\square$

Primetimo da se zahvaljujući prethodnoj teoremi izvod po pravcu ne mora nužno računati pomoću granične vrednosti, čime račun može biti značajno olakšan.

Sledi značajna veza između gradijenta i subgradijenta.

Lema 4.10. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Pretpostavimo da je ona diferencijabilna u $x_0 \in D_f$. Tada je $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ i*

$$\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0), \tag{4.11}$$

za svako $x \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz. Kako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ da za $\|x - x_0\| < \delta$:

$$-\varepsilon\|x - x_0\| \leq f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \leq \varepsilon\|x - x_0\|. \tag{4.12}$$

Posmatrajmo sada konveksnu funkciju

$$\phi(x) := f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \varepsilon\|x - x_0\|,$$

za $x \in \mathbb{R}^n$. Uočimo da je $\phi(x) \geq \phi(x_0) = 0$ za svako, $x \in B(x_0, \delta)$. Iz konveksnosti funkcije ϕ dobija se $\phi(x) \geq \phi(x_0)$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$. Dakle, ispunjeno je:

$$\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0) + \varepsilon\|x - x_0\|,$$

za sve $x \in \mathbb{R}^n$, pa kada $\varepsilon \to 0$ ispunjena je nejednakost (4.11).

Iz pomenute nejednakosti sledi da $\nabla f(x_0) \in \partial f(x_0)$. Birajući $d \in \partial f(x_0)$, dobijamo:

$$\langle d, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0).$$

Sada iz druge nejednakosti u (4.12) za $\|x - x_0\| < \delta$ imamo:

$$\langle d - \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \leq \varepsilon \|x - x_0\|.$$

Primetimo da je $\|d - \nabla f(x_0)\| \leq \varepsilon$, za $d = \nabla f(x_0)$, $\varepsilon > 0$ proizvoljno birano. Dakle, ispunjeno je $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. $\square$

Posledica 4.11. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strogo konveksna funkcija. Iz diferencijabilnosti funkcije f u tački $x_0 \in D_f$, sledi stroga nejednakost*

$$\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle < f(x) - f(x_0),$$

za $x \neq x_0$.

Dokaz. Kako je f konveksna funkcija, iz prethodne leme dobijamo:

$$\langle \nabla f(x_0), u - x_0 \rangle \leq f(u) - f(x_0),$$

za sve $u \in \mathbb{R}^n$. Za fiksirano $x \neq x_0$ i $u := \frac{x+x_0}{2}$, dobijamo:

$$\left\langle \nabla f(x_0), \frac{x + x_0}{2} - x_0 \right\rangle \leq f\left(\frac{x + x_0}{2}\right) - f(x_0) < \frac{f(x)}{2} + \frac{f(x_0)}{2} - f(x_0),$$

što je trebalo pokazati. $\square$

Lema 4.12. *Neka je F diferencijabilna, konveksna i monotona funkcija na $\mathbb{R}^m$ i neka su funkcije f_i konveksne na otvorenom, konveksnom skupu S. Tada je funkcija*

$$\phi = F(f_1(x), ..., f_m(x)),$$

konveksna na skupu S, a njen subdiferencijal jednak je

$$\partial \phi(x) = \sum_{i=1}^{m} \nabla_i F(f(x)) \cdot \partial f_i(x),$$

za $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))^T \in \mathbb{R}^m$.

Dokaz. Kako je skup S konveksan, tada za svako $x, y \in S$ i $\alpha \in [0, 1]$ imamo:

$$\phi(\alpha x + (1 - \alpha) y) \leq F(\alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y)) \leq \alpha \phi(x) + (1 - \alpha) \phi(y).$$

Dalje, za svaki pravac $p \in \mathbb{R}^m$ važi:

$$\phi'(x,p) = \sum_{i=1}^{m} \nabla_i F(f(x)) f_i'(x,p),$$

pa na osnovu teoreme o vezi između izvoda po pravcu i subdiferencijala dobija se:

$$\phi'(x,p) = \sum_{i=1}^{m} \nabla_i F(f(x)) \xi_{\partial f_i(x)}(p).$$

Ako je ovo ispunjeno primenom posledice 2.25, dobija se traženo tvrđenje. $\square$

Lema koja sledi pokazuje da iz neprekidne subdiferencijabilnosti sledi diferencijabilnost.

Lema 4.13. *Neka je f konveksna funkcija i neka $x_0 \in D_f$. Pretpostavimo da postoji vektorska funkcija $g(x) \in \partial f(x)$ neprekidna u x_0. Tada je f diferencijabilna u x_0 i važi $\nabla f(x_0) = g(x_0)$.*

Dokaz. Za svaki pravac $h \in \mathbb{R}^n$ i dovoljno malo $\alpha > 0$ iz definicije subgradijenta 4.1 imamo

$$\langle g(x_0), h \rangle \leq \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha} \leq \langle g(x_0 + \alpha h), h \rangle.$$

Kada $\alpha \to 0$, dobijamo $f'(x_0, h) = \langle g(x_0), h \rangle$ za sve $h \in \mathbb{R}^n$. Odavde vidimo da je $g(x_0) = \nabla f(x_0)$, što je trebalo pokazati. $\square$

U nastavku dokazujemo teoremu koja govori o konveksnosti funkcije, a koja će imati primenu u narednim dokazima.

Teorema 4.14. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana na otvorenom konveksnom skupu i neka je diferencijabilna na tom skupu. Funkcija f je konveksna ako i samo ako*

$$\langle \nabla f(u), x - u \rangle \leq f(x) - f(u), \tag{4.13}$$

za sve $x, u \in D_f$.

Dokaz. Neka je f konveksna funkcija. Iz leme 4.10 direktno sledi traženo tvrđenje. Pretpostavimo sada da važi (4.13). Fiksiramo $x_1, x_2 \in D_f$ i $t \in (0,1)$. Neka je $x_t := tx_1 + (1-t)x_2$. Kako je D_f konveksan skup, tada $x_t \in D_f$. Tada je

$$\langle \nabla f(x_t), x_1 - x_t \rangle \leq f(x_1) - f(x_t),$$

$$\langle \nabla f(x_t), x_2 - x_t \rangle \leq f(x_2) - f(x_t).$$

Štaviše,

$$t\langle \nabla f(x_t), x_1 - x_t \rangle \leq tf(x_1) - tf(x_t), \tag{4.14}$$

$$(1-t)\langle \nabla f(x_t), x_2 - x_t \rangle \leq (1-t)f(x_2) - (1-t)f(x_t). \tag{4.15}$$

Kada se sabere (4.14) i (4.15), dobija se:

$$0 \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - f(x_t).$$

Na kraju imamo $f(x_t) \leq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$, čime je pokazano da je funkcija f konveksna. □

4.4 Operacije sa subdiferencijalima

U ovom delu poglavlja akcenat će biti na osnovnim računskim operacijama sa subdiferencijalima. Za početak uočimo kako se subdiferencijal množi skalarom.

Propozicija 4.15. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in D_f$. Tada je za svako $\alpha > 0$ ispunjeno:*

$$\partial(\alpha f)(x_0) = \alpha \partial f(x_0).$$

U nastavku se uvodi jedno od osnovnih pravila, pravilo sabiranja subdiferencijala.

Lema 4.16. *Neka su funkcije f_1 i f_2 zatvorene i konveksne i $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. Tada je funkcija $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ zatvorena i konveksna, a njen subdiferencijal je*

$$\partial f(x) = \alpha_1 \partial f_1(x) + \alpha_2 \partial f_2(x), \tag{4.16}$$

za sve $x \in D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$.

Dokaz. Na osnovu teoreme 2.13, ostaje da se pokaže samo (4.16). Neka je $x_0 \in D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$. Iz teoreme 4.5, oba subdiferencijala su ograničena. Za svako $p \in \mathbb{R}^n$ imamo:

$$f'(x_0, p) = \alpha_1 f_1'(x_0, p) + \alpha_2 f_2'(x_0, p).$$

Datu jednakost možemo napisati kao:

$$\max\{\langle d_1, \alpha_1 p \rangle \mid d_1 \in \partial f_1(x_0)\} + \max\{\langle d_2, \alpha_2 p \rangle \mid d_2 \in \partial f_2(x_0)\}.$$

Koristeći osobine skalarnog proizvoda dalje dobijamo:

$$\max\{\langle \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2, p\rangle \mid d_1 \in \partial f_1(x_0), d_2 \in \partial f_2(x_0)\},$$

te na kraju dobijamo:

$$\max\{\langle d, p\rangle \mid d \in \alpha_1 \partial f_1(x_0) + \alpha_2 \partial f_2(x_0)\}.$$

Dokaz date teoreme sledi iz teoreme o izvoda po pravcu 4.9 i iz posledice 2.25. □

Posledica 4.17. *Neka su date $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, za $i = 1, ..., m$. Pretpostavimo da postoji $u \in \cap_{i=1}^m D_{f_i}$, tako da za sve funkcije f_i (osim eventualno jedne) važi da su neprekidne u u. Tada je za svako $x \in \cap_{i=1}^m D_{f_i}$ ispunjeno:*

$$\partial\left(\sum_{i=1}^m f_i\right)(x) = \sum_{i=1}^m \partial f_i(x).$$

Sada ćemo pokazati vezu između homogenih funkcija i subdiferencijala, a pre toga napomenimo da se svaka homogena funkcija f stepena homogenosti 1 može napisati kao $f(x) = \langle d, x\rangle,\ \ \forall x \in D_f, \forall d \in \partial f(x)$.

Lema 4.18. *Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna i homogena sa stepenom homogenosti 1. Tada je:*

$$\partial f(x) = \{d \in \partial f(0) \mid \langle d, x\rangle = f(x)\},$$

za sve $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Neka je $D(x) = \{d \in \partial f(0) \mid \langle d, x\rangle = f(x)\}$. Ako je $d \in \partial f(x)$, tada za svako $x_0 \in \mathbb{R}^m$ iz definicije subgradijenta (4.1) imamo:

$$f(x_0) \geq f(x) + \langle d, x_0 - x\rangle = \langle d, x_0\rangle,$$

jer je funkcija f homogena sa stepenom homogenosti 1, što znači da se može napisati kao $\langle d, x\rangle = f(x)$. Dakle, $d \in \partial f(0)$. Takođe, $d \in D(x)$, što je trebalo pokazati.

Neka je sada $d \in D(x)$, za svako $x_0 \in \mathbb{R}^n$ imamo:

$$f(x_0) \geq \langle d, x_0\rangle = f(x) + \langle d, x_0 - x\rangle.$$

To implicira da $d \in \partial f(x)$. □

4.5 Konveksna optimizacija i subdiferencijali

Slede osobine subdiferencijala koje su značajne u konveksnoj optimizaciji.

Propozicija 4.19. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna i neka je $x_0 \in D_f$ lokalni minimum funkcije f. Tada se u x_0 postiže globalni minimum funkcije f.*

Dokaz. Neka je x_0 lokalni minimum funkcije f, što znači da postoji neko $\delta > 0$, tako da je $f(u) \geq f(x_0)$, za sve u iz lopte sa centrom u x_0, poluprečnika δ, $u \in B(x_0, \delta)$.

Konstruišemo niz, tako što fiksiramo $x \in \mathbb{R}^n$ i posmatramo $x_k := (1 - \frac{1}{k})x_0 + \frac{1}{k}x$ za $k \in \mathbb{N}$. Odavde vidimo da za dovoljno veliko k važi $x_k \in B(x_0, \delta)$. Dalje, iz konveksnosti funkcije f dobija se:

$$f(x_0) \leq f(x_k) \leq (1 - \frac{1}{k})f(x_0) + \frac{1}{k}f(x).$$

Odavde se vidi da je: $\frac{1}{k}f(x_0) \leq \frac{1}{k}f(x)$, odnosno, $f(x_0) \leq f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Prisetimo se Fermaovog[1] uslov: ako je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilna i ima lokalni minimum u tački x_0, tada $\nabla f(x_0) = 0$. Narednom propozicijom pokazaće se da je subdiferencijal pandan ovog rezultata za konveksne funkcije.

Propozicija 4.20. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija i neka je $x_0 \in D_f$. Tada, funkcija f dostiže lokalni, odnosno, globalni minimum u tački x_0 ako i samo ako $0 \in \partial f(x_0)$.*

Dokaz. Neka funkcija f dostiže globalni minimum u tački x_0, što znači da je za sve $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x_0) \leq f(x).$$

Ako datu nejednakost napišemo kao:

$$0 = \langle 0, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0), \tag{4.17}$$

za sve $x \in \mathbb{R}^n$, iz definicije subdiferencijala vidimo da je ona ekvivalentna sa $0 \in \partial f(x_0)$. $\square$

U nastavku uvodimo skup koji ima osobine pogodne za analizu subdiferencijala.

[1] Pierre de Fermat (1607 – 1665)

Definicija 4.4. *Neka je* $X \subseteq D_f$ *zatvoren i konveksan skup. Presek svih subdiferencijala funkcije*[2] f *nad skupom* X *označava se sa:*

$$\widehat{\partial f}(X) = \bigcap_{x \in X} \partial f(x). \tag{4.18}$$

Teorema 4.21. *Neka je* X *zatvoren i konveksan skup i neka je* $\widehat{\partial f}(X) \neq \emptyset$*. Tada za svako* $x_0, x_1 \in X$ *i* $\alpha \in [0,1]$ *važi:*

$$f((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) = (1-\alpha)f(x_0) + \alpha f(x_1).$$

Štaviše, za svako $d \in \widehat{\partial f}(X)$*, i sve* $x_0, x_1 \in X$*, važi:*

$$f(x_1) = f(x_0) + \langle d, x_1 - x_0 \rangle. \tag{4.19}$$

Dokaz. Očigledno, neka $d \in \widehat{\partial f}(X) \subseteq \partial f(x_0) \cap \partial f(x_1)$. Tada iz (4.1) imamo:

$$f(x_0) + \langle d, x_1 - x_0 \rangle \leq f(x_1) \leq f(x_0) + \langle d, x_1 - x_0 \rangle.$$

Čime je dokazan drugi deo tvrđenja.

Za dokaz prvog dela tvrđenja, uzećemo $x_\alpha = (1-\alpha)x_0 + \alpha x_1$ za sve $\alpha \in [0,1]$. Iz konveksnosti funkcije f dobija se:

$$f(x_\alpha) = f((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) \leq (1-\alpha)f(x_0) + \alpha f(x_1). \tag{4.20}$$

Takođe, iz definicije subgradijenta (4.1) imamo:

$$\begin{aligned} f(x_\alpha) \geq f(x_0) + \langle d, x_\alpha - x_0 \rangle &= f(x_0) + \alpha \langle d, x_1 - x_0 \rangle \\ &= (1-\alpha)f(x_0) + \alpha f(x_1) \end{aligned} \tag{4.21}$$

Na osnovu nejednakosti (4.20) i (4.21) dokazan je i prvi deo tvrđenja. □

Naredna teorema pokazuje još jedno značajno svojstvo skupa kojeg smo ranije definisali.

Teorema 4.22. *Neka je* X^* *skup tačaka minimuma funkcije* $f(x)$*. Tada postoji zatvoreni konveksan skup* $\overline{X}$ *podskup skupa* X^* *ako i samo ako* $0 \in \widehat{\partial f}(\overline{X})$*.*

Dokaz. Neka je $0 \in \widehat{\partial f}(\overline{X})$. Tada za svako $x^* \in \overline{X}$ i sve $x \in D_f$, važi:

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle 0, x - x^* \rangle = f(x^*),$$

te $x^* \in X^*$.

Neka je sada $f(x) \geq f(x^*)$ za sve $x \in D_f$ i $x^* \in \overline{X}$. Tada na osnovu definicije subgradijenta (4.1) $0 \in \bigcap_{x^* \in \overline{X}} \partial f(x^*)$. □

[2]Epigraph facet of the set X

Teorema i njena posledica koje su date u nastavku imaće primenu u rešavanju problema konveksne optimizacije.

Teorema 4.23. *Za svako $x_0 \in D_f$ važi da su svi vektori $d \in \partial f(x_0)$ potporni vektori nivo skupa $\mathcal{L}_f(f(x_0)) = \{x \in D_f \mid f(x) \leq f(x_0)\}$, odnosno:*

$$\langle d, x_0 - x \rangle \geq 0,$$

za svako $x \in \mathcal{L}_f(f(x_0))$.

Dokaz. Kako $f(x) \leq f(x_0)$ i $d \in \partial f(x_0)$, tada je:

$$f(x_0) + \langle d, x - x_0 \rangle \leq f(x) \leq f(x_0).$$

Oduzimanjem $f(x_0)$ sa obe strane nejednakosti, dobija se:

$$\langle d, x - x_0 \rangle \leq 0,$$

to jest

$$-\langle d, x_0 - x \rangle \leq 0.$$

Množenjem date nejednakosti sa -1, dolazimo do traženog tvrđenja:

$$\langle d, x_0 - x \rangle \geq 0. \qquad \square$$

Posledica 4.24. *Neka je $S \subseteq D_f$ zatvoren i konveksan skup, $x_0 \in S$ i neka je*

$$x^* \in Arg \min_{x \in S} f(x).$$

Tada za svako $d \in \partial f(x_0)$ važi $\langle d, x_0 - x^* \rangle \geq 0$.

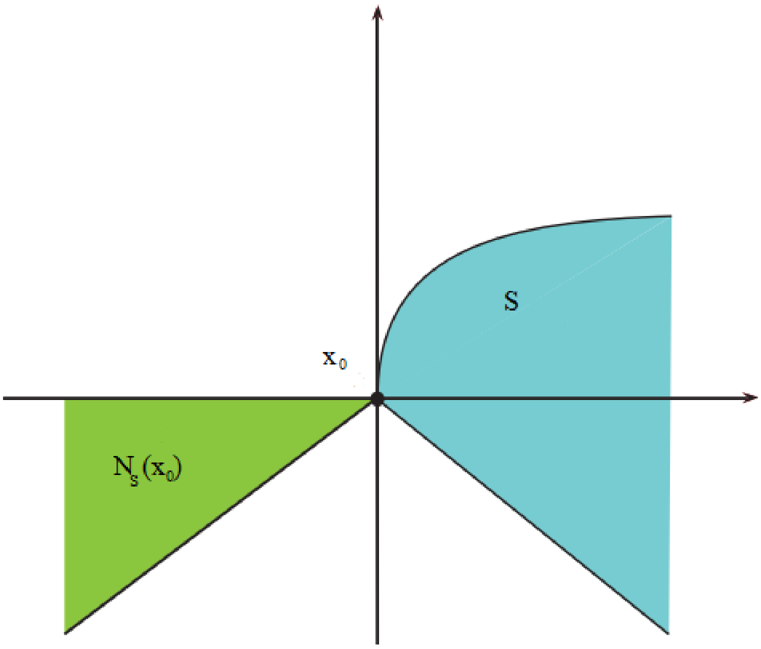
4.6 Geometrijska interpretacija

Ovaj deo poglavlja posvećen je geometrijskom pristupu subdiferencijalu. Na početku ćemo uvesti pojmove o kojima će se u nastavku govoriti.

Definicija 4.5. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup. Normalan konus skupa S u tački x_0 definišemo kao*

$$N_S(x_0) := \{\nu \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nu, x - x_0 \rangle \leq 0, \forall x \in S\}.$$

U slučaju $x_0 \notin S$ definišemo $N_S(x_0) := \emptyset$.



Slika 4.2. Normalni konus, preuzeto iz [6]

Propozicija koja sledi pokazuje da je subdiferencijal funkcije f u tački x_0, $\partial f(x_0)$, u geometrijskom smislu normalni konus epigrafa f u $(x_0, f(x_0))$.

Propozicija 4.25. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Za svako $x_0 \in D_f$ važi:*

$$\partial f(x_0) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid (d, -1) \in N_{epif}(x_0, f(x_0))\}.$$

Dokaz. Neka je $d \in \partial f(x_0)$ fiksirano, i neka je $(x, \lambda) \in epif$. Primetimo da je:

$$\langle (d, -1), (x, \lambda) - (x_0, f(x_0)) \rangle = \langle d, x - x_0 \rangle - (\lambda - f(x_0)).$$

Za $\lambda \geq f(x)$ imamo:

$$\langle d, x - x_0 \rangle - (\lambda - f(x_0)) \leq \langle d, x - x_0 \rangle - (f(x) - f(x_0)) \leq 0,$$

što implicira da $(d, -1) \in N_{epif}(x_0, f(x_0))$.

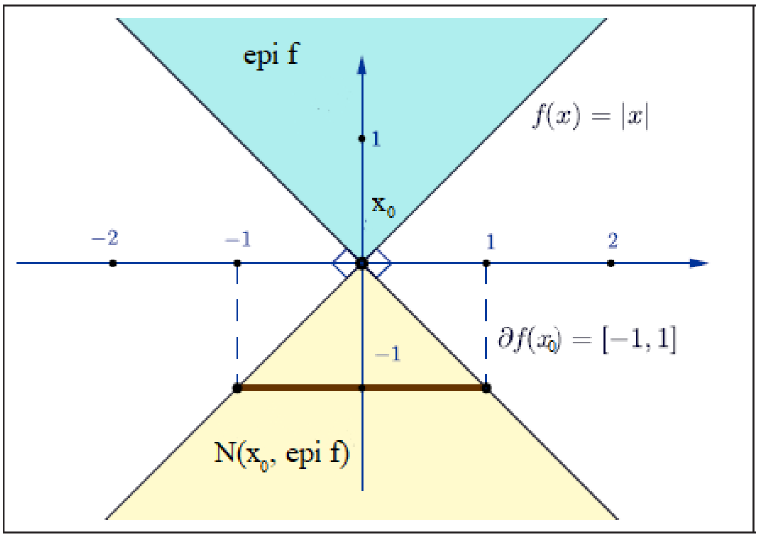
Pokažimo da važi i obrnuta inkluzija: Neka je sada $(d, -1) \in N_{epif}(x_0, f(x_0))$

za proizvoljan vektor $d \in \mathbb{R}^n$. Za svako $x \in D_f$ imamo da je $(x, f(x)) \in epi f$. Odatle,

$$\langle d, x - x_0 \rangle - (f(x) - f(x_0)) = \langle (d, -1), (x, f(x)) - (x_0, f(x_0)) \rangle \leq 0.$$

Dakle, $d \in \partial f(x_0)$, što je trebalo pokazati. $\square$

Ako se prisetimo primera sa početka ovog poglavlja primer 4.2, primetimo da bi se grafički taj primer mogao posmatrati kao na sledećoj slici.



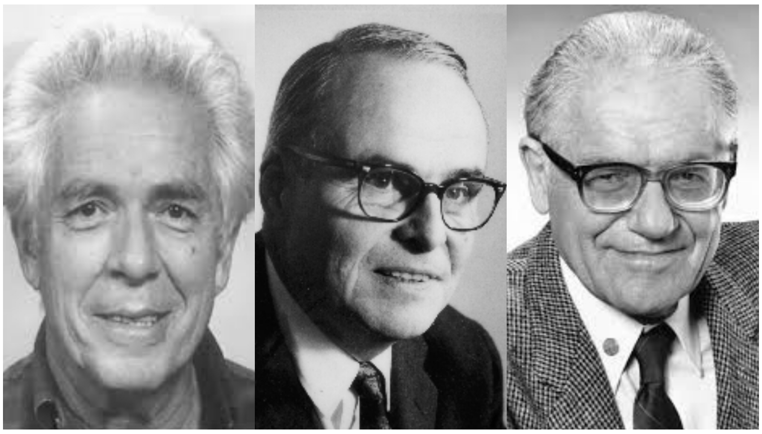
Slika 4.3. Geometrijska interpretacija subdiferencijala iz primera 4.2.

Plavom bojom označen je epigraf funkcije f, dok narandžasta boja predstavlja normalni konus, odnosno, subdiferencijal funkcije $f(x) = |x|$. Dati primer preuzet je iz [5] .

Glava 5

Primena subdiferencijala na teoreme tipa Kuna - Takera

Na početku rada dali smo dovoljan uslov za rešavanje problema konveksnog programiranja teorema 2.31. Kako bi se obezbedili potrebni uslovi za traženi problem, treba nametnuti dodatne uslove. U tu svrhu iskoristićemo teoreme tipa Kuna - Takera. Njihova uloga je da obezbede egzistenciju sedlaste tačke. U ovom poglavlju formulisaćemo osnovne uslove Kuna - Takera, ali i modifikaciju tih uslova u kojem će oni biti dati pomoću subdiferencijala koji su bili tema prethodnog poglavlja. Na kraju dat je i primer primene teoreme Kuna - Takera u ekonomiji koji je preuzet iz [12]. Osim toga, korištena je i literatura [6], [7] i [10].



Slika 5.1. Harold Kun, Albert Taker i Vilijam Karuš

Iako se u naslovu poglavlja pominju prezimena dva matematičara, Kuna[1] i Takera[2], za teoreme koje će se razmatrati u ovom poglavlju, vezuje se i ime Vilijama Karuša[3]. Naime, Kun i Taker objavili su svoje uslove u radu 1951. godine. Kasnije je, međutim, otkriveno da je još 1939. godine u svom master radu, pomenute uslove naveo Karuš. Zbog svega navedenog, u literaturi se može naći i naziv Karuš - Kun - Takerovi uslovi.

5.1 Osnovna teorema Kuna - Takera

Da bismo formulisali teoremu Kuna - Takera, potrebno je uvesti dodatne pojmove. Na početku ćemo definisati modifikaciju zadatka konveksnog programiranja u odnosu na definiciju 2.21.

Definicija 5.1. *(Modifikacija zadatka konveksnog programiranja) Neka je* $U = U_0 \cap U_1 \cap ... \cap U_m$*, gde je* $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ *konveksan skup, a* $U_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_k(x) \leq 0\}$*,* $k = 1, ..., m$*, za* g_k *konveksne funkcije na* U_0*. Odrediti infimum konveksne funkcije* f *nad skupom* U*.*

U nastavku se definiše regularnost ograničenja i uslov Slejtera koji će obezbediti da su uslovi Kuna - Takera potrebni i dovoljni. Primetimo da ako ne važi uslov Slejtera, tada na osnovu teoreme 2.31 imamo samo dovoljan uslov za rešenje problema konveksnog programiranja (KP).

Definicija 5.2. *Ograničenje* $g(u) \leq 0$ *je regularno na skupu* $\hat{U} \subset \mathbb{R}^n$*, ako postoji* $u \in \hat{U}$ *da je* $g(u) < 0$*.*

Definicija 5.3. *Skup* $\hat{U} = \bigcap_{k=1}^{m} U_k$ *je regularan ako su sva ograničenja u njemu regularna.*

Lema 5.1. *(Uslov Slejtera) Neka je* U_0 *konveksan skup i neka su* g_k *konveksne funkcije na* U_0*,* $k = 1, ...m$*. Neka je* $\hat{U}$ *regularan skup. Tada postoji tačka* $u_0 \in U_0$ *da za sve* $k = 1, ..., m$ *važi* $g_k(u_0) < 0$*.*

Na kraju ćemo formulisati osnovnu teoremu Kuna - Takera čiji dokaz se može pronaći u [10].

Teorema 5.2. *Neka je dat konveksan skup* U_0 *i neka za funkcije* f *i* g_k*,* $k = 1, ..., m$ *važi da su konveksne na skupu* U_0*. Neka je ispunjen Slejterov uslov, odnosno, neka je* $\hat{U}$ *regularan skup. Dalje, neka je skup* $\hat{U}_*$ *neprazan. Tada postoje Lagranžovi množitelji* $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*)$*,* $\lambda_k^* \geq 0$*,* $k = 1, ..., m$ *takvi da za svaku tačku* $u_* \in \hat{U}_*$ *važi da je sedlasta tačka funkcije Lagranža za posmatrani problem.*

[1] Harold William Kuhn (1925 - 2014)
[2] Albert William Tucker (1905 - 1995)
[3] William Karush (1917 - 1997)

5.2 Subdiferencijal i teorema Kuna - Takera

Razmotrimo sledeći problem konveksne optimizacije (P):

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija.

- Traži se $\min f(x)$,
- po funkcijama $g_k(x) \leq 0$, za $k = 1, ..., m$,
- za $x \in S$, gde je S neprazan konveksan skup.

Potom ćemo definisati Lagranžovu funkciju kao što sledi:

$$L(x, \lambda) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x),$$

za $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ i skup $I(x) := \{i \in \{1, ..., m\} \mid g_i(x) = 0\}$.

Nakon definisanja problema, uvodimo teoremu koja će kasnije biti korišćena u dokazu Kun - Takerove teoreme, a čiji dokaz se može pronaći u [5].

Teorema 5.3. *Neka je $\hat{x}_0$ optimalno rešenje problema konveksne optimizacije (P). Tada postoje Lagranžovi množitelji $\lambda_0 \geq 0$ i $\lambda = (\lambda_1, ...\lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ koji nisu jednaki nuli istovremeno, tako da je $\lambda_i \geq 0$ za $i = 0, ..., m$ i pri tome je*

$$0 \in \lambda_0 \partial f(\hat{x}_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial g_i(\hat{x}_0) + N_S(\hat{x}_0),$$

i $\lambda_i g_i(\hat{x}_0) = 0$, za $i = 1, ..., m$.

Dokaz. Razmotrimo konveksnu funkciju

$$\phi(x) := \max\{f(x) - f(\hat{x}_0), g_i(x) \mid i = 1, ..., m\}.$$

Primetimo da je $\hat{x}_0$ rešenje problema $\min_{x \in S} \phi(x)$. Kako je ϕ, konačna, a time i lokalno Lipšic neprekidna, na osnovu teoreme 4.14. iz [5], imamo da je $0 \in \partial\phi(\hat{x}_0) + N_S(\hat{x}_0)$. Na osnovu pravila maksimuma subdiferencijala u kojem se tvrdi:

Propozicija 5.4. *Neka su $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$, konveksne funkcije. Za bilo koje $\hat{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} D_{f_i}$ važi da su $f_i(\hat{x})$, za $i = 1, ..., m$, neprekidne u datoj tački. Tada važi pravilo maksimuma*

$$\partial(\max f_i)(\hat{x}) = co \bigcup_{i \in I(\hat{x})} \partial f_i(\hat{x}).$$

Imamo da je

$$0 \in co \left[\partial f(\hat{x}_0) \cup (\bigcup_{i \in I(\hat{x}_0)} \partial g_i(\hat{x}_0)) \right] + N_S(\hat{x}_0).$$

Odavde dobijamo da je $\lambda_0 \geq 0$ i $\lambda_i \geq 0$ za sve $i \in I(\hat{x}_0)$ tako da je $\lambda_0 + \sum_{i \in I(\hat{x}_0)} \lambda_i = 1$ i

$$0 \in \lambda_0 \partial f(\hat{x}_0) + \sum_{i \in I(\hat{x}_0)} \lambda_i \partial g_i(\hat{x}_0) + N_S(\hat{x}_0). \tag{5.1}$$

Biramo $\lambda_i := 0$ za se $i \notin I(\hat{x}_0)$, čime dobijamo $\lambda_i g_i(\hat{x}_0) = 0$ za sve $i = 1, ..., m$ i $(\lambda_0, \lambda) \neq 0$. □

Na samom kraju preostaje da se pokaže Kun - Takerova teorema koja daje potrebne i dovoljne uslove za rešavanje problema (P).

Teorema 5.5. *Neka važi Slejterov uslov za rešavanje problema (P). Tačka $\hat{x}_0$ je optimalno rešenje problema (P) ako i samo ako postoje nenegativni Lagranžovi množitelji, $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ za koje važi*

$$0 \in \partial f(\hat{x}_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial g(\hat{x}_0) + N_S(\hat{x}_0),$$

i $\lambda_i g_i(\hat{x}_0) = 0$ za sve $i = 1, ..., m$.

Dokaz. Da bismo pokazali da je uslov potreban, potrebno je da u (5.1) pokažemo da je $\lambda \neq 0$. Stoga, pretpostavimo suprotno, neka je $\lambda = 0$. Treba pronaći $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \neq 0$, $\nu_i \in \partial g_i(\hat{x}_0)$ i $\nu \in N_S(\hat{x}_0)$ za koje je

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nu_i + \nu.$$

Lako se uočava da za sve $x \in S$ važi:

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle \nu_i, x - \hat{x}_0 \rangle + \langle \nu, x - \hat{x}_0 \rangle \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(g_i(x) - g_i(\hat{x}_0) \right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x).$$

Dakle, došli smo do kontradikcije i to sa Slejterovim uslovom $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) < 0$.

Pokažimo sada da je uslov dovoljan. Neka je $\nu_0 \in \partial f(\hat{x}_0), \nu_i \in \partial g_i(\hat{x}_0)$ i $\nu \in N_S(\hat{x}_0)$ tako da je

$$0 = \nu_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nu_i + \nu,$$

za $\lambda_i g_i(\hat{x}_0) = 0$ i $\lambda_i \geq 0$ za sve $i = 1, ..., m$. Tada iz definicije subdiferencijala i normalnog konusa direktno sledi optimalnost u $\hat{x}_0$ u (P). Zaista, za svako $x \in S$ i $g_i(x) \leq 0$, $i = 1, ..., m$ imamo

$$0 = \langle \lambda_i \nu_i + \nu, x - \hat{x}_0 \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle \nu_i, x - \hat{x}_i \rangle + \langle \nu, x - \hat{x}_0 \rangle$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(x) - g_i(\hat{x}_0)] + f(x) - f(\hat{x}_0). \tag{5.2}$$

Vidimo da je (5.2) jednako sa:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + f(x) - f(\hat{x}_0) \leq f(x) - f(\hat{x}_0),$$

što je trebalo dokazati. □

5.3 Primena teoreme Kuna - Takera u ekonomiji

Teoreme tipa Kuna - Takera našle su svoje mesto i u teoriji ekonomije, odnosno, mikroekonomije. Primena se odnosi na teoriju potrošača u kojoj je cilj da se prilikom ograničenog budžeta maksimizira korisnost, odnosno, dobit, a minimiziraju se rashodi. Osim toga, koristi se u ekonomiji blagostanja i to za karakterizaciju Pareto optimalnih alokacija kao rešenje za maksimizaciju funkcije blagostanja. U nastavku razmotrićemo sledeći primer koji se odnosi na maksimizaciju korisnosti sa ograničenjima racionalizacije.

Neka je data funkcija korisnosti $U = U(x, y)$ i neka su data ograničenja budžeta (B) pri ceni (P), tako da posmatramo sledeći problem:

$$U = U(x, y) \to \max$$

$$B = P_x x + P_y y$$

$$x \geq \overline{x}.$$

Formiramo Lagranžovu jednačinu:

$$L(x, y) = U(x, y) + \lambda_1(B - P_x x - P_y y) + \lambda_2(x - \overline{x}).$$

Za rešavanje ovog problema koristimo teoremu Kuna - Takera. Prvo treba da odredimo parcijalne izvode prvog reda po x i y, koje potom izjednačavamo sa nulom.

$$L_x = U_x - P_x\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \ \ x \geq 0, \tag{5.3}$$

$$L_y = U_y - P_y\lambda_1 = 0, \ \ y \geq 0. \tag{5.4}$$

Zatim je potrebno naći parcijalne izvode prvog reda po λ_1 i λ_2.

$$L_{\lambda_1} = B - P_x x - P_y y \geq 0, \ \ \lambda_1 \geq 0, \tag{5.5}$$

$$L_{\lambda_2} = \overline{x} - x \geq 0, \ \ \lambda_2 \geq 0. \tag{5.6}$$

Iz Lagranžove jednačine treba da je $\lambda_1(B - P_x x - P_y y) = 0$, odakle dobijamo da je $\lambda_1 = 0$, ili je $B - P_x x - P_y y = 0$. Dalje, potrebno je da je $\lambda_2(x - \overline{x}) = 0$, odakle je $\lambda_2 = 0$ ili je $x = \overline{x}$.

Sledi razmatranje slučajeva:

1. slučaj: Neka je $\lambda_2 = 0, \lambda_1 > 0$. Dakle, zanemarili smo drugo ograničenje budžeta. Tada imamo sledeće uslove:

$$L_x = U_x - P_x\lambda_1 = 0,$$

$$L_y = U_y - P_y\lambda_1 = 0,$$

$$L_{\lambda_1} = B - P_x x - P_y y = 0.$$

Potom pronalazimo rešenja x^* i y^*, pa proveravamo da li smo prekršili ograničenje koje smo zanemarili. Ako ograničenje jeste prekršeno, moramo preći na naredni slučaj.

2. slučaj: Neka važe oba ograničenja to jest, neka je $\lambda_2 > 0, \lambda_1 > 0$. Tada imamo:

$$L_x = U_x - P_x\lambda_1 - \lambda_2 = 0,$$

$$L_y = U_y - P_y\lambda_1 = 0,$$

$$L_{\lambda_1} = B - P_x x - P_y y = 0,$$

$$L_{\lambda_2} = \overline{x} - x \geq 0, \ \ \lambda_2 = 0.$$

Rešenje ovog problema će biti u preseku data dva ograničenja.

3. slučaj: Neka je sada zanemareno prvo ograničenje budžeta, odnosno, neka je $\lambda_2 > 0$, a $\lambda_1 = 0$. Dobijamo:

$$L_x = U_x - \lambda_2 = 0,$$

$$L_y = U_y = 0,$$

$$L_{\lambda_2} = \overline{x} - x \geq 0, \;\; \lambda_2 = 0.$$

Ovaj slučaj rešava se kao slučaj 1.

Pokažimo opisani postupak na sledećem primeru:

Primer 5.6. *Data je funkcija korisnosti $U(x,y) = xy$ i ograničenja $x + y \leq 100$ i $x \leq 40$. Potrebno je maksimizirati funkciju korisnosti koristeći teoremu Kuna - Takera. Prvo ćemo formirati Lagranžovu funkciju*

$$L(x,y) = xy + \lambda_1(100 - x - y) + \lambda_2(40 - x).$$

Potom postavljamo uslove teoreme Kuna - Takera:

$$L_x = y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \;\; x \geq 0,$$

$$L_y = x - \lambda_1 = 0, \;\; y \geq 0,$$

$$L_{\lambda_1} = 100 - x - y \geq 0, \;\; \lambda_1 \geq 0,$$

$$L_{\lambda_2} = 40 - x \geq 0, \;\; \lambda_2 \geq 0.$$

Sada pristupamo proveri slučajeva. Neka je $\lambda_2 = 0$, a $\lambda_1 > 0$, tada je:

$$L_x = y - \lambda_1 = 0,$$

$$L_y = x - \lambda_1 = 0,$$

pa izjednačavanjem levih i desnih strana jednakosti dobijamo: $y - \lambda_1 = x - \lambda_1$, ili $x = y$. Iz uslova $L_{\lambda_1} = 100 - x - y = 0$, dobijamo $x + y = 100$, pa je rešenje početnog problema $x^* = y^* = 50$. Primetimo da za x postoji ograničenje $x \leq 40$, pa rešenje $x^* \neq 50$, zato prelazimo na naredni slučaj, te dobijamo $x^* = 40, y^* = 60$. Uvrštavanjem dobijenih vrednosti dobijamo da je $\lambda_1^* = 40$, a $\lambda_2^* = 20$.

Glava 6

Zaključak

Ovaj rad se bavi konveksnom optimizacijom, pa su, u skladu sa tim, njegove centralne teme konveksne funkcije, Kob Daglasova proizvodna funkcija, subdiferencijal i njegova primena.

Na početku smo uveli pojam konveksnog skupa i konveksnih funkcija. Zbog svojih korisnih svojstava, ove funkcije imaju široku primenu u različitim oblastima matematike i drugim naukama, od kojih je najznačajnija ona u optimizaciji. O značaju konveksnih funkcija u matematičkoj optimizaciji govori i činjenica da prava prekretnica u optimizaciji nije između linearnosti i nelinearnosti, već između konveksnosti i nekonveksnosti.[1]

Funkcija koju odlikuje jednostavnost, a koristi se u određivanju nivoa tehnološkog razvoja neke zemlje, te poređenju više zemalja po tehnološkom razvoju jeste Kob Daglasova proizvodna funkcija. Ova konkavna funkcija koristi se za predstavljanje veze između količine ulaznih i količine izlaznih elemenata u proizvodnji.

Sadržaj ovog rada uključuje i subdiferencijale. To je skup pravih koje se nalaze ispod grafika konveksne funkcije. Najveći značaj subdiferencijala jeste što predstavlja alat za rad sa neglatkim funkcijama u konveksnoj analizi.

Poslednja tema u ovom radu bila je teorema tipa Kuna - Takera u osnovnom i modifikovanom obliku. U ovom radu predstavili smo njenu primenu u ekonomiji, međutim, ona ima i široki spektar primena u drugim oblastima.

[1]"...in fact, the great watershed in optimization isn't between linearity and nonlinearity, but convexity and nonconvexity.", R. Tyrrell Rockafellar, objavljeno u SIAM Review, 1993. godine.

Literatura

[1] Dimitri P. Bertsekas, Angelia Nedić, Asuman E. Ozdaglar, *Convex Analysis and Optimization*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2003.

[2] Jonathan M. Borwein, Adrian S. Lewis, *Convex Analysis and Nonlinear Optimization*, Springer, Switzerland, 2006.

[3] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghen, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[4] Geoffrey A. Jehle, Philip J. Reny, *Advanced Microeconomic Theory*, Pearson Education Limited, Essex, England, 2011.

[5] Boris S. Mordukhovich, Ngyuyen Mau Nam, *An Easy Path to Convex Analysis and Applications*, Morgan & Claypool, San Rafael, California (USA), 2014.

[6] Boris S. Mordukhovich, Ngyuyen Mau Nam, *Geometric Approach to Convex Subdifferential Calculus*, PDXScholar, Portland, 2015.

[7] Yurii Nesterov, *Lectures on Convex Optimization*, Springer, Switzerland, 2018.

[8] Rudolf Scitovski, Ninoslav Truhar, Zoran Tomljanović, *Metode optimizacije*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera, Osijek, 2014.

[9] James Stewart, *Multivariable Calculus*, Brooks/Cole Cengage Learning, USA, 2012.

[10] Nenad Teofanov, Milica Žigić, *Osnovi optimizacije*, PMF Novi Sad, 2018.

[11] www.e.math.hr/Vol31/Cudina

[12] www.sfu.ca/ wainwrig/Econ400/lecture-notes-Kuhntucker.pdf

[13] www.researchgate.net/figure/a-Non-convex-set-b-convex-set.fig2.325276345

[14] www.researchgate.net/figure/Examples-of-quasi-convex-functions.fig1.224242536

[15] www.offconvex.org/2016/03/22/saddlepoints/

[16] www.medium.com/@rhome/convex-optimization-unconstrained-836a44182f9d

Biografija

Karolina Čović rođena je 11. januara 1996. godine u Subotici. Gimnaziju "Svetozar Marković" u Subotici, društveno - jezički smer, završila je 2015. godine. Iste godine upisala je osnovne studije na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Matematika finansija. Osnovne studije završava u februaru 2020. godine, a u oktobru 2020. upisuje master studije na istom fakultetu, smer Primenjena matematika. Zaključno sa aprilskim rokom 2022. godine, položila je sve ispite uključujući i ispite psiholoških, pedagoških i metodičkih predmeta, kao i praksu u nastavi, čime je stekla pravo za odbranu master rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Master rad
VR

Autor: Karolina Čović
AU

Mentor: dr Milica Žigić
ME

Naslov rada: Subdiferencijal u konveksnom programiranju i primene
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: s / en
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2022.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (5/72/16/0/13/0/0)(broj poglavlja/broj strana/broj literarnih citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga)
FO:

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Nelinearna optimizacija
ND

Ključne reči: konveksni skupovi, konveksne funkcije, kvazikonveksne funkcije, hiperravni, teoreme separacije, konveksna optimizacija, Kob Daglasova proizvodna funkcija, subdiferencijal, teoreme Kuna - Takera
PO, UDK

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U ovom master radu su predstavljene konveksne i konkavne funkcije i njihove osobine. Zahvaljujući svojim karakteristikama, našle su svoju primenu u različitim oblastima. S toga je, jedna od tema ovog rada njihova primena u ekonomiji. Naime, reč je o Kob Daglasovoj proizvodnoj funkciji. Osim toga, centralni pojam ovog rada odnosi se na subdiferencijale koji se koriste u konveksnoj analizi kako bi se olakšao rad sa funkcijama koje nisu

glatke. Takođe, dat je i problem konveksnog programiranja. Osim klasičnog rešenja ovog problema u vidu teorema tipa Kuna - Takera, dato je i modifikovano rešenje pomoću subdiferencijala, a na kraju i primena teoreme Kuna - Takera u maksimizaciji funkcije korisnosti.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 06.04.2022.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
ČK

Predsednik: dr Nenad Teofanov, redovni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Mentor: dr Milica Žigić, vanredni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: dr Sanja Rapajić, redovni profesor Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Master's thesis
CC

Author: Karolina Čović
AU

Mentor: dr Milica Žigić
MN

Title: Subdifferential in convex optimization and applications
TI

Language of text: Serbian (Latin)
LT

Language of abstract: s / en
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2022
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4
PP

Physical description: (5/72/16/0/13/0/0)(chapters/ pages/ quotations/ tables/ pictures/ graphics/ enclosures)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Nonlinear optimization
SD

Subject/Key words: convex sets, convex functions, quasiconvex functions, hyperplane, separation theorems, convex optimization, subdifferential, Cobb Douglas production function, Kuhn - Tucker theorem
SKW

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract: The subject of this master thesis are convex and concave functions and their main characteristics. These functions can be applied towards many different fields. One of the subjects that will be covered is the implementation of these functions in the field of economics, more precisely, the Cobb-Douglas production function. The main section focuses on subdifferentials that are used in convex analysis (for dealing with non-smooth functions), and also includes the problem of convex programming. Finally,

the thesis also covers the application of Kuhn-Tucker's theorem along with its classical and modified solutions (that use subdifferentials) and explains how Kuhn-Tucker's theorem is used in maximization of utility functions.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 6th April 2022
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: dr Nenad Teofanov, full professor of Faculty of Science in Novi Sad
Mentor: dr Milica Žigić, associate professor at Faculty of Science in Novi Sad
Member: dr Sanja Rapajić, full professor of Faculty of Science in Novi Sad