Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Mirjana Čivčić

Numeričko rešavanje Helmholcove jednačine metodom konačnih elemenata

Master rad

mentor
dr Ivana Vojnović

Sadržaj

Predgovor

U ovom master radu ćemo numerički rešiti Helmholcovu jednačinu drugog reda. To je eliptična parcijalna diferencijalna jednačina koja se primenjuje u različitim oblastima matematičke fizike, gde igra značajnu ulogu u talasnim procesima, protoku toplote, difuziji itd.

Jednačinu ćemo numerički rešavati metodom konačnih elemenata (FEM[1]). Ova metoda je rasprostranjena i vrlo popularna zbog jednostavne primene na domene različitih oblika. Njen razvoj potiče još iz 1941. godine kada se metod počeo razvijati za potrebe proučavanja naprezanja u avionskim strukturama. Danas se koristi u medicini, poslovnom menadžmentu, građevinarstvu, mašinskom inženjerstvu, kao i kod termičkih i fluidnih tokova (Burgersova jednačina). Geometrijski složeni domeni na kojima se problemi posmatraju, uz pomoć ove metode dele se na manje delove, koje nazivamo elementima.

Rad je podeljen u tri celine. U prvom delu će biti opisana metoda konačnih elemenata (FEM). Uvešćemo osnovne teorijske pojmove kao što su prostori integrabilnih funkcija, Soboljevljevi prostori i pojam slabog rešenja za eliptične probleme. U sledećem koraku ćemo opisati konstrukciju metode konačnih elemenata uopšteno kao i u dvodimenzionalnom slučaju. Takođe, uvešćemo i pojam Galjerkinove ortogonalnosti i uvodimo lemu Céa koji predstavljaju osnovu za analizu greške datog metoda. Koristeći lemu Céa izvešćemo optimalnu ocenu greške za aproksimaciju dobijenu metodom konačnih elemenata (a priori ocena greške), a nakon toga uradićemo i a posteriori analizu greške preko dualnosti.

U drugom delu rada će biti opisana, analizirana i numerički rešena Helmholcova jednačina na ograničenom domenu. Metode rešavanja su poznate u nekim slučajevima za homogenu jednačinu u jednoj i dve dimenzije. Za komplikovanije slučajeve, tj. za nehomogenu jednačinu, koristićemo metodu konačnih elemenata da bismo dobili aproksimativno rešenje. Helmholcova jednačina ima važne primene u oblastima optike, akustike, elektrostatike i kvantne mehanike. Jednačina je linearna, pa znamo da je svaka linearna kombinacija njenih rešenja, takođe rešenje.

Za rešavanje jednačine FEM metodom koristiće se softver Matlab i u okviru njega aplikacija PDE Toolbox. Prvo ćemo izvršiti inicijalizaciju mreže za domen na kome se rešava jednačina. Opisaćemo i pojednostavljenu FEM metodu i za nju generisati kod koji rešava Helmholcovu jednačinu. Rešenja dobijena u Matlabu ćemo grafički prikazati.

Poslednji deo rada će biti usmeren ka analizi greške. Testiraćemo proizvoljnu jednačinu za koju već znamo egzaktno rešenje i uporediti sa aproksimacijom dobijenom FEM metodom. Prikazaćemo i 3D grafike greške dobijene FEM metodom u Matlabu. Kao što je već navedeno, FEM je jedna od najmoćnijih numeričkih metoda, ali uspešna primena FEM metode zavisi od njene formulacije, unošenja odgovarajućih parametara kao i pravilnog tumačenja podataka na šta ćemo posebno obratiti pažnju.

[1] skraćenica od finite element method

Zahvalnica

Želim pre svega da izrazim ogromnu zahvalnost mojoj mentorki dr. Ivani Vojnović, koja mi je prilikom pisanja ovog master rada pomagala svojim stručnim savetima i nesebičnim deljenjem znanja i na taj način doprinela da rad bude kvalitetniji i bolji. Do odabira teme za proučavanje smo došle zajednički, a tome je prethodilo obrazovanje na osnovnim i master studijama primenjene matematike, gde mi je profesorica Ivana predavala mnoge predmete. Zahvaljujem joj se na strpljenju i celokupnom trudu da nam prenese znanje, vežbama i predavanjima na kojima sam naučila mnogo.

Takođe se zahvaljujem i uvaženim članovima komisije, dr. Nataši Krklec Jerinkić i dr. Milici Žigić za sve korisne savete i sugestije.

Na kraju, želim da se zahvalim prijateljima i porodici na ogromnoj podršci i razumevanju. Hvala svima.

Mirjana Čivčić,
Novi Sad 2022.

1 Uvod

Herman von Helmholtz (1821 - 1894) je bio jedan od najvećih nemačkih naučnika XIX veka. Rođen je u Potsdamu 31. avgusta 1821. godine kao sin gimnazijskog profesora. Oduvek se zanimao za prirodne nauke, ali ipak nakon završetka srednje škole upisuje Vojnu akademiju u Berlinu i tamo stiče zvanje doktora medicine. Nakon studija se zaposlio kao vojni lekar u Potsdamu, ali njegov naučno - istraživački rad tu ne prestaje. Njegova interesovanja su jako široka, od medicine, fizike, matematike, pa sve do psihologije, filozofije i muzike.

Slika 1 - Herman von Helmholtz

Najveći doprinos medicini Helmholtz je ostvario na polju oftalmologije koja do tada nije bila posmatrana kao egzaktna nauka. Njegovi najznačajniji pronalasci su oftalmoskop koji je učinio mrežnjaču vidljivom i oftalmometar koji meri zakrivljenost rožnjače. Ubrzo nakon toga je napisao "Priručnik za fiziološku optiku" (Handbuch der Physiologischen Optik) koji je bio osnovna literatura u toj oblasti sve do kraja XX veka. Bio je osnivač moderne meteorologije, sprovodio je različite studije o grmljavinama i olujama, vrtlozima i vodenim talasima. Takođe je istraživao područje akustike u čijoj oblasti je izumio Helmholcov rezonator. Godine 1863. izdao je knjigu pod nazivom "Doktrina o senzcijama zvuka kao fiziološka osnova za teoriju muzike" (Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik) koja je bila veoma cenjena među muzičarima sve do kraja XX veka.

Drugu polovinu svoje karijere posvetio je istraživanjima u oblasti matematičke fizike gde se našao u istom rangu sa tadašnjim najistaknutijim fizičarima i matematičarima. Njegov doprinos u matematici i fizici najviše se odnosi na oblasti dinamike, termodinamike, hidrodimanike i elektrodinamike. Helmholtz je prvi matematički formulisao prvu, a ujedno i glavnu teoremu termodinamike. Jednačina Gibbs-Helmholtz koja je rezultat njegovog rada sa učenikom Villardom Gibbsom proširuje drugi zakon termodinamike. Prilikom istraživačkog rada, čak i kada je pisao radove u oblasti filozofije i psihologije, primećeno je njegovo matematičko rezonovanje.

Uopštena Helmholcova jednačina koja će biti predmet istraživanja ovog master rada se pojavljuje u proučavanju različitih fizičkih problema koji zahtevaju rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina i u prostoru i u vremenu. Jednačina koju mi posmatramo je zapravo

PDJ[2] koja predstavlja nezavisan oblik talasne jednačine čije rešenje u nekim slučajevima dobijamo tehnikom razdvajanja promenljivih.

1.1 Motivacija

Motivacija za proučavanje Helmholcove jednačine dolazi iz njene široke primene u svim oblastima nauke. To je parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda koja se pojavljuje u mnogim poljima fizike, a njena rešenja se primenjuju u različitim oblastima kao što su mehanika talasa, kvantna mehanika i elektrostatika. Mi ćemo posmatrati uopšteni oblik Helmholcove jednačine koji je dat sa

$$\Delta u + \lambda u = f \tag{1.1}$$

gde Δ predstavlja matematički operator Laplasijan i λ predstavlja proizvoljan koeficijent. U zavisnosti od vrednosti koeficijenta λ Helmholcova jednačina će imati primene u različitim oblastima fizike, navodimo najvažnije:

1) **Mehanika talasa**

Ako u opštoj formulaciji Helmholcove jednačine koeficijent λ zamenimo sa k^2 gde k predstavlja takođe proizvoljnu konstantu i ako je $f = 0$ dolazimo do PDJ drugog reda oblika

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{1.2}$$

koja nastaje prirodno kada tražimo monofrekventna ili vremenski harmonična rešenja talasne jednačine u tri dimenzije, tj. ako želimo rešenje koje ima odvojene prostorne i vremenske promenljive. To je razlog zašto se još naziva i *jednačina redukovanog talasa*. Konstanta k predstavlja broj talasa. Koeficijent k je najčešće realan broj, ali može u nekim slučajevima biti i kompleksan, npr. ako centar širenja apsorbuje energiju. Za niske vrednosti koeficijenta k imamo malo talasa i u tom slučaju (1.2) se ponaša kao Laplasova jednačina. Ipak, za visoke vrednosti koeficijenta k rešenja su visoko oscilatorna što komplikuje i usložnjava analitičke i numeričke metode za njeno rešavanje.

Neki jednostavni primeri gde nalazimo ovu jednačinu su laseri, vibracione membrane (npr. bubnjevi), zvučni talasi koji se šire, zemljotresi itd.

2)**Kvantna mehanika**

Kvantna mehanika je oblast fizike koja proučava materiju i zračenje na atomskom nivou. U ranom XX veku se počela razvijati jer klasična teorija fizike nije mogla da objasni rezultate nekih eksperimenata. Tada se znalo da elektroni kruže oko jezgra atoma, tako da njihovo kretanje podseća na kruženje planeta oko Sunca. Klasična teorija u ovom slučaju predviđa da će se elektroni spiralom zabiti i srušiti u jezgro atoma, a to se očigledno ne dešava. Ovakvo netačno predviđanje pokazalo je naučnicima da je potrebna neka nova teorija koja bi objasnila nauku na atomskom nivou.
Helmholcova jednačina u kvantnoj fizici se pojavljuje kao produžetak Šredingerove jednačine koja predstavlja osnovnu jednačinu kvantne mehanike. Svaku kvantnu česticu karakteriše talasna funkcija. Austrijski fizičar Ervin Šredinger je 1905. godine razvio diferencijalnu jednačinu koja opisuje evoluciju tih talasnih kretanja. Uz pomoć Šredingerove jednačine

[2] Skraćenica koja se često koristi za pojam parcijalna diferencijalna jednačina

naučnici mogu pronaći talasnu funkciju koja predstavlja rešenje nekog problema u kvantnoj mehanici. Uglavnom, u praksi, tačno rešenje tih problema se ne može naći pa se uz pomoć određenih pretpostavki i numeričkih metoda dolazi do aproksimativnih rešenja datih problema. U nastavku je data matematička formulacija Šredingerove jednačine:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \tag{1.3}$$

gde E predstavlja ukupnu energiju sistema, a H je operator Hamiltonijan koji odgovara ukupnoj energiji sistema (potencijalnoj i kinetičkoj). Operator H je definisan sledećom formulom:

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2m}\Delta + \hat{V}, \tag{1.4}$$

gde je $\hat{V}$ operator potencijalne energije, dok prvi sabirak predstavlja operatora kinetičke energije.

Na osnovu (1.4) jasno vidimo vezu između Helmholcove i Šredingerove jednačine i u kom smislu ona predstavlja proširenje Helmholcove jednačine definisane u (1.1). Rešenje Šredingerove jednačine Ψ nam ne daje konkretan položaj elektrona u određenom trenutku, kao u klasičnoj teoriji fizike, nego verovatnoću da će se elektron naći na određenom mestu u datom trenutku. Mesto koje predviđa ovo rešenje poznato nam je kao orbitala kretanja elektrona u jezgru.[3]

3) **Elektrostatika**

Elektrostatičko polje E nije bilo kakva vektorska funkcija, to je posebna vektorska funkcija za koju znamo da je diferencijalni operator curl od gradijenta uvek jednak nuli ($\nabla \times E = 0$). Ovo je veoma bitno svojstvo električnog polja koje ćemo iskoristiti da bismo vektroski problem pronalaženja E sveli na skalarni problem. Ako sa V označimo električni potencijal, može se pokazati da važi jednakost:[4]

$$E = -\nabla V. \tag{1.5}$$

Kada u Gausovom zakonu $\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ primenimo (1.5) dobijamo $\nabla E = \nabla(-\nabla V) = -\nabla^2 V$. Odavde dalje sledi jednačina poznata kao **Poasonova jednačina** :

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{1.6}$$

U oblastima u kojima nema naelektrisanja imamo $\rho = 0$ i tada se Poasonova jednačina svodi na **Laplasovu jednačinu** :

$$-\nabla^2 V = 0. \tag{1.7}$$

Poasonova jednačina se pored elektrostatike primjenjuje još u oblastima poput astronomije, protoka toplote i dinamike fluida.

[3]Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths, Darrell F. Schroeter, 2018
[4]Introduction to Electrodynamics by David J. Griffiths, 1999

2 Metoda konačnih elemenata (FEM)

2.1 Osnovni pojmovi prostora funkcija

Tačnost numeričkih rešenja PDJ dobijenih metodom konačnih elemenata dosta zavisi od glatkoće analitičkog rešenja jednačine koju posmatramo. Precizne pretpostavke o regularnosti rešenja i podataka može se formulisati posmatranjem klasa funkcija sa specifičnim diferencijalnim i integrabilnim svojstvima, zovemo ih prostori funkcija.

2.1.1 Prostor neprekidnih funkcija

Ovde ćemo opisati neke jednostavne prostore koji se sastoje od neprekidno diferencijabilnih funkcija. Radi lakšeg zapisa, uvodimo pojam multi - indeksa. Neka $\mathbb{N}$ označava skup nenegativnih celih brojeva. Uređena n-torka

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

naziva se multi - indeks. Nenegativan ceo broj $|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n$ zove se red multi - indeksa $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Mi označavamo $(0, ..., 0)$ sa 0 i očigledno važi $|0| = 0$. Neka je

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Da bismo pokazali važnost oznake multi - indeksa navešćmo primer funkcije sa tri promenljive.

Primer 1. Pretpostavimo da je $n = 3$ i $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, 3$. Tada za u koja je funkcija tri promenljive x_1, x_2, x_3 imamo:

$$\sum_{|\alpha|=3} D^\alpha u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_3^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_3^2}$$

Umesto da pišemo celi izraz sa desne strane, pisaćemo samo jedan izraz sa leve strane.

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je $k \in \mathbb{N}$. Označićemo sa $C^k(\Omega)$ skup svih neprekidnih realnih funkcija definisanih na Ω tako da $D^\alpha u$ je neprekidna na Ω za sve $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, gdje je $|\alpha| \leq k$. Pretpostavimo da je Ω ograničen otvoren skup, $C^k(\overline{\Omega})$ će označavati skup svih funkcija u iz $C^k(\Omega)$ takvih da $D^\alpha u$ se može produžiti sa Ω na neprekidnu funkciju na $\overline{\Omega}$, zatvorenje skupa Ω, za sve $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| \leq k$. $C^k(\overline{\Omega})$ se može snabdeti normom

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$$

Posebno, kada je $k = 0$ pisaćemo $C(\overline{\Omega})$ umjesto $C^0(\overline{\Omega})$ da bismo označili skup svih neprekidnih funkcija definisanih na $\overline{\Omega}$. U ovom slučaju imamo:

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} := \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$$

Slično, za $k = 1$

$$\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)| = \sup_{x\in\Omega} |u(x)| + \sum_{j=1}^{n} \sup_{x\in\Omega} |\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)|$$

Primer 2. Posmatrajmo otvoren interval $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}^1$. Funkcija $u(x) = \frac{1}{x}$ pripada $C^k(\Omega)$ za svak $k \geq 0$. Kako je $\overline{\Omega} = [0,1]$ i $\lim_{x\to 0} u(x) = \infty$, jasno je da u nije neprekidna na $\overline{\Omega}$. Isto važi i za njene izvode. Dakle $u \notin C^k(\overline{\Omega})$ za svako $k \geq 0$.

Nosač neprekidne funkcije u definisane na otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se definiše kao zatvaranje u Ω skupa $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$. Nosač funkcije u ćemo označavati sa supp u. Skup supp u je najmanji zatvoren podskup od Ω takav da $u = 0$ na $\Omega \backslash$supp u.

Primer 3. Neka je ω funkcija definisana na $\mathbb{R}^n$ na sledeći način:

$$\omega(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & ina\check{c}e \end{cases}$$

gdje $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$. Očigledno, nosač funkcije ω je zatvorena jedinična lopta $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$.

Označićemo sa $C_0^k(\Omega)$ skup svih funkcija u iz $C^k(\Omega)$ čiji nosač je ograničen podskup od Ω. Neka je

$$C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C_0^k(\Omega)$$

Napomena. Funkcija ω iz primera 3 pripada prostoru $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

2.1.2 Prostori integrabilnih funkcija

Sledeće što ćemo uvesti u ovom odeljku je klasa prostora koji se sastoje od integrabilnih funkcija. Neka je p realan broj takav da je $p \geq 1$. Označićemo sa $L_p(\Omega)$ skup svih realnih funkcija definisanih na otvorenom podskupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tako da je

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \leq \infty.$$

Svake dve funkcije koje su jednake skoro svuda (osim na skupu mere nula) na Ω se smatraju istima. Dakle, $L_p(\Omega)$ sastoji se od klasa ekvivalentnih funkcija.
Na prostoru $L_p(\Omega)$ definisana je norma

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Takođe ćemo razmatrati prostor $L_\infty(\Omega)$ koji se sastoji od funkcija definisanih na Ω takvih da $|u|$ ima konačan esencijalni supremum[5] na Ω.

[5]Postoji pozitivna konstanta M takva da $|u(x)| \leq M$ za skoro sve $x \in \Omega$, najmanji takav broj M naziva se esencijalni(osnovni) supremum od $|u|$ i pišemo M=$ess.sup_{x\in\Omega}|u(x)|$

Na prostoru $L_\infty(\Omega)$ je definisana norma

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = ess.sup_{x\in\Omega}|u(x)|$$

Za nas će biti izuzetno važan slučaj koji dobijemo za $p = 2$, tada je

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Na prostoru $L_2(\Omega)$ može se definisati unutrašnji proizvod sa

$$(u, v) := \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Očigledno, $\|u\|_{L_2(\Omega)} = (u, u)^{\frac{1}{2}}$.
Lema 1.*(Koši - Švarcova nejednakost)* Neka u i v pripadaju $L_2(\Omega)$, tada $uv \in L_1(\Omega)$ i

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)}.$$

Posledica 1. *(Nejednakost trougla)* Neka u i v pripadaju $L_2(\Omega)$, tada $u + v \in L_2(\Omega)$ i

$$\|u + v\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|v\|_{L_2(\Omega)}.$$

Znamo da svaka norma zadovoljava nejednakost trougla , pa i norma definisana na $L_p(\Omega)$ prostorima. Sledi, za $1 \leq p \leq \infty$

$$\|u + v\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} + \|v\|_{L_p(\Omega)}, \qquad u, v \in L_p(\Omega).$$

U nastavku ćemo još navesti **Helderovu** nejednakost koja predstavlja generalizaciju Koši-Švarcove nejednakosti, važi za bilo koje dve funkcije $u \in L_p(\Omega)$ i $v \in L_{p'}(\Omega)$ sa $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$:

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \leq \|u\|_{L_p(\Omega)}\|v\|_{L_{p'}(\Omega)}.$$

2.1.3 Soboljevljevi prostori

U ovom odeljku uvodimo klasu prostora zvani Soboljevljevi prostori koji imaju važnu ulogu u modernoj teoriji diferencijalnih jednačina. Prije nego damo preciznu definiciju Soboljevljeog prostora, uvešćemo pojam *slabog izvoda*.
Neka je $u \in C^k(\Omega)$, gde je Ω otvoren podskup u $\mathbb{R}^n$ i neka je $v \in C_0^\infty(\Omega)$, tada formula parcijalne integracije glasi:

$$\int_\Omega D^\alpha u(x)v(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha v(x)dx, \qquad |\alpha| \leq k, \ \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Treba napomenuti da svi izrazi koji uključuju integrale čije su granice izvan skupa Ω, a koji nastaju tokom parcijalne integracije, su nestali, jer v i svi njeni izvodi su 0 na granici od Ω. Ova jednakost predstavlja polaznu tačku za definisanje slabog izvoda.
Sada pretpostavimo da je u lokalno integrabilna funkcija definisana na Ω ($u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ako

je $\int_K |u(x)|dx < \infty$ za sve $K \subset \Omega$ kompaktne skupove). Pretpostavimo takođe da postoji funkcija ω_α, lokalno integrabilna na Ω i tako da važi

$$\int_\Omega \omega_\alpha(x)v(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha v(x)dx, \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Tada kažemo ω_α je **slabi izvod** funkcije u reda $|\alpha|$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, pišemo $\omega_\alpha = D^\alpha u$. Da bismo se uverili da je ova definicija dobra, mora se pokazati da ako lokalno-integrabilna funkcija ima slabi izvod, onda on mora biti jedinstven. Ovo je direktna posledica DuBois Reymond's leme[6].

Ako je u dovoljno glatka funkcija, tj. $u \in C^k(\Omega)$, onda njen slabi izvod $D^\alpha u$ reda $|\alpha| \leq k$ se poklapa sa odgovarajućim parcijalnim izvodom u klasičnom smislu, $\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$. Da bismo pojednostavili zapis, slovom D ćemo označavati klasični i slabi izvod, a razmatreanjem glatkoće funkcije ćemo uvek znati o kojem se izvodu radi.

Primer 4. Neka je $\Omega = (-1, 1)$ i neka je data funkcija $f(x) = x|x|$. Želimo odrediti slabi izvod prvog reda date funkcije. Primetimo, klasični izvod ove funkcije je

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x \leq 0 \end{cases}$$

Sada, za svako $v \in C_0^\infty(\Omega)$ imamo

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)v'(x)dx &= \int_{-1}^1 x|x|v'(x)dx = \int_{-1}^0 -x^2v'(x)dx + \int_0^1 x^2v'(x)dx \\ &= -x^2v(x)|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 v(x)2xdx + x^2v(x)|_0^1 - \int_0^1 2xv(x)dx \\ &= -\int_{-1}^1 2|x|v(x)dx\end{aligned}$$

U ovom primeru vidimo da je slabi izvod jednak odgovarajućem klasičnom izvodu.

Sada možemo da damo preciznu definiciju prostora Soboljeva. Neka je k nenegativan cijeli broj i pretpostavimo da je $p \in [1, \infty]$. Definišemo

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq k\}$$

$W_p^k(\Omega)$ zovemo Soboljevljev prostor reda k i na njemu možemo defnisati normu na sledeći način

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad za \quad 1 \leq p < \infty.$$

[6]Pretpostavimo da je ω lokalno integrabilna funkcija definisana na otvorenom skupu Ω, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Ako $\int_\Omega \omega(x)v(x)dx = 0$ za sve $v \in C_0^\infty(\Omega)$ onda $\omega(x) = 0$ za skoro svako $x \in \Omega$.

Sa ovom normom prostor $W_p^k(\Omega)$ je Banahov i

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)} \qquad za \quad p=\infty$$

Neka je

$$|u|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

za $p \in [1,\infty)$, možemo napisati

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{j=0}^{k} |u|_{W_p^j(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

Slično,

$$|u|_{W_\infty^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)},$$

imamo

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} = \sum_{j=0}^{k} |u|_{W_\infty^j(\Omega)}.$$

Za $k \geq 1$, $|\cdot|_{W_p^k(\Omega)}$ se zove Soboljevljeva semi-norma na $W_p^k(\Omega)$. Nama će biti važan slučaj za $p=2$, prostor $W_2^k(\Omega)$ je tada Hilbertov prostor sa unutrašnjim proizvodom

$$(u,v)_{W_2^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

Iz tog razloga, često pišemo $H^k(\Omega)$ umesto $W_2^k(\Omega)$. Mi ćemo najčešće koristiti Hilbertovski Soboljevljev prostor $H^1(\Omega)$ i $H^2(\Omega)$. Naše definicije za ove prostore i njihove norme i seminorme su u obliku:

$$H^1(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(\Omega), j=1,...,n\},$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \Big\{ \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{L_2(\Omega)}^2 \Big\}^{\frac{1}{2}},$$

$$|u|_{H^1(\Omega)} = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_{L_2(\Omega)}^2 \Big\}.$$

Slično, za $p=2$ i $k=2$,

$$H^2(\Omega) = \Big\{ u \in L_2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(\Omega), \quad j=1,...,n, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L_2(\Omega), \quad i,j=1,...,n \Big\},$$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \left\{ \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\|^2_{L_2(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$|u|_{H^2(\Omega)} = \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\|^2_{L_2(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Na kraju još definišemo specijalni Soboljevljev prostor $H^1_0(\Omega)$ kao zatvaranje prostora C_0^∞ u normi $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Drugim rečima, $H^1_0(\Omega)$ je skup svih funkcija $u \in H^1(\Omega)$ takvih da je u granična vrednost niza $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ sa $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$. Može se pokazati (pod uslovom da je $\partial\Omega$ dovoljno glatak) da

$$H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \quad na \quad \partial\Omega\}.$$

$H^1_0(\Omega)$ je zapravo skup svih funkcija $u \in H^1(\Omega)$ takvih da je $u = 0$ na rubu od Ω. Primećujemo da je $H^1_0(\Omega)$ Hilbertovski prostor sa istom normom i unutrašnjim proizvodom kao i $H^1(\Omega)$. Ovaj prostor se uglavnom koristi za PDJ sa datim homogenim graničnim uslovom $u = 0$ na $\partial\Omega$ (Dirihleov uslov).

Lema 2. *(Poenkare - Fridrihsova lema)* Pretpostavimo da je Ω otvoren ograničen skup u $\mathbb{R}^n$ (sa dovoljno glatkom granicom $\partial\Omega$) i neka je $u \in H^1_0(\Omega)$. Tada postoji konstanta $c_*(\Omega)$ nezavisna od u, tako da

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \le c_* \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx \tag{2.1}$$

Dokaz. Kako znamo da je $u \in H^1_0(\Omega)$ granična vrednost u $H^1(\Omega)$ niza $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C_0^\infty(\Omega)$, dovoljno je pokazati ovu nejednakost za $u \in C_0^\infty(\Omega)$.
Radi jednostavnosti, posmatraćemo specijalan slučaj pravougaonog domena $\Omega = (a, b) \times (c, d)$ u $\mathbb{R}^2$. Dokaz za uopšten skup Ω je analogan.
Očigledno,

$$u(x, y) = u(a, y) + \int_a^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) d\xi = \int_a^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) d\xi, \qquad c < y < d$$

Zatim, na osnovu Koši-Švarcove nejednakosti,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x,y)|^2 dxdy &= \int_a^b \int_c^d \left| \int_a^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) d\xi \right|^2 dydx \\
&\le \int_a^b \int_c^d (x-a) \left(\int_a^x \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) \right|^2 d\xi \right) dydx \\
&\le \int_a^b (x-a) dx \left(\int_c^d \int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) \right|^2 d\xi dy \right) \\
&= \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right|^2 dxdy.
\end{aligned}$$

Analogno, važi

$$\int_\Omega |u(x,y)|^2\,dxdy \leq \frac{1}{2}(d-c)^2 \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right|^2 dxdy.$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo

$$\int_\Omega |u(x,y)|^2\,dxdy \leq c_* \int_\Omega \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right) dxdy,$$

gde $c_* = \left(\frac{2}{(b-a)^2} + \frac{2}{(d-c)^2}\right)^{-1}$. ■

Npr. za $\Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ imamo $c_* = \frac{1}{4}$, za $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $c_* = \frac{1}{2}$.

2.2 Slaba rešenja za eliptične probleme

Tipičan primer eliptičnih jednačina je Laplasova jednačina

$$\Delta u = 0$$

i njen nehomogen oblik, Poasonova jednačina

$$-\Delta u = f,$$

gde koristimo zapis

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$$

za Laplasov operator.
Uopšteno, neka je Ω otvoren i ograničen skup u $\mathbb{R}^n$ i posmatramo linearnu PDJ drugog reda

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

gde koeficijenti a_{ij}, b_i, c i f zadovoljavaju sledeće uslove:

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in C^1(\overline{\Omega}), \qquad i,j = 1,....,n \\ b_i &\in C(\overline{\Omega}), \qquad i = 1,...,n \\ c &\in C(\overline{\Omega}), \qquad f \in C(\overline{\Omega}), \end{aligned}$$

i

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \tilde{c}\sum_{i=1}^{n} {\xi_i}^2, \qquad \forall \xi = (\xi_1,...,\xi_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{2.3}$$

Konstanta $\tilde{c}$ je pozitivna i nezavisna od x i ξ. Uslov (2.3) se obično naziva **uniformna eliptičnost** i (2.2) se zove **eliptična jednačina**.
Ako posmatramo probleme koji se pojavljuju u praksi, (2.2) se uglavnom javlja sa jednim od sledećih graničnih uslova, gde sa g označavamo datu funkciju definisanu na $\partial\Omega$:

- $u = g$ na $\partial\Omega$ (Dirihleov granični uslov)

- $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ na $\partial\Omega$, gde ν označava spoljašnji jedinični vektor normalan na $\partial\Omega$ (Nojmanov granični uslov)

- $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = g$ na $\partial\Omega$, gde $\sigma(x) \geq 0$ na $\partial\Omega$ (Robinov granični uslov)

- Generalizacija Nojmanovog i Robinovog graničnog uslova je

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos \alpha_j + \sigma(x) u = g$$

  na $\partial\Omega$ gde α_j je ugao između jediničnog vektora normalnog na $\partial\Omega$ i ose x_j (Kosi izvedeni granični uslov)

Napomena. U mnogim problemima koje nalazimo u fizici, na $\partial\Omega$ se nameće više od jednog graničnog uslova (npr. $\partial\Omega$ je unija dva disjunktna podskupa $\partial\Omega_1$ i $\partial\Omega_2$, sa Dirihleovim graničnim uslovom na $\partial\Omega_1$ i Nojmanovim graničnim uslovom na $\partial\Omega_2$). Takve granične slučajeve nećemo razmatrati u ovom radu.

Razmatranje ćemo početi homogenim Dirihleovim graničnim problemom

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2.4}$$

$$u = 0, \qquad \text{na } \partial\Omega \tag{2.5}$$

gde a_{ij}, b_i, c i f su kao u (2.3). Funkcija $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ koja zadovoljava (2.4) i (2.5) se zove **klasično rešenje problema**. Teorija parcijalnih diferencijalnih jednačina tvrdi da (2.4) i (2.5) ima jedinstveno klasično rešenje, pod uslovom da su a_{ij}, b_i, c, f i $\partial\Omega$ dovoljno glatki.

Primer 5. Posmatrajmo sada Poasonovu jednačinu sa nultim Dirihleovim graničnim uslovom na domenu $\Omega = (-1, 1)^n$ u $\mathbb{R}^n$:

$$-\Delta u = sgn\left(\frac{1}{2} - |x|\right), \qquad x \in \Omega$$

$$u = 0, \qquad x \in \partial\Omega$$

Ovaj problem nema klasično rešenje $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, jer bi inače Δu bila neprekidna funkcija na Ω što nije moguće jer $sgn\left(\frac{1}{2} - |x|\right)$ nije neprekidna na Ω.

U ovakvim slučajevima, klasična teorija PDJ više nije prikladna i da bismo prevazišli njena ograničenja, uopštićemo pojam rešenja slabljenjem uslova diferencijabilnosti na u. Na ovaj

način ćemo moći rešiti jednačinu iz prethodnog primera, kao i sve ostale jednačine sa "neglatkim" podacima.
Pretpostavimo da je u klasično rešenje problema (2.4) i (2.5). Tada za bilo koje $v \in C_0^1(\Omega)$,

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx + \int_\Omega c(x)uvdx = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Parcijalnom integracijom prvog integrala i napominjući da $v = 0$ na $\partial\Omega$, dobijamo:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx+\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx+\int_\Omega c(x)uvdx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega).$$

Da bi ova jednakost imala smisla više ne moramo pretpostavljati da je $u \in C^2(\Omega)$ već je dovoljno da $u \in L_2(\Omega)$ i $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2, ..., n$. Kako znamo da u mora da zadovoljava Dirihleov granični uslov, prirodno je tražiti u u prostoru $H_0^1(\Omega)$, gde

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), i = 1, ..., n, \quad u = 0 \ \ na \ \ \partial\Omega\}$$

Dakle, mi razmatramo sledeći problem : pronaći $u \in H_0^1(\Omega)$ tako da

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx &+ \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx \\ &+ \int_\Omega c(x)uvdx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Primetimo da $C_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ i lako se vidi da kada $u \in H_0^1(\Omega)$ i $v \in H_0^1(\Omega)$, izraz na levoj i desnoj strani jednakosti (2.6) i dalje je dobro definisan.[7]
Uvodimo definiciju:

Definicija 1. Neka je $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $i, j = 1, ..., n$, $b_i \in L_\infty(\Omega)$, $i = 1, ..., n$, $c \in L_\infty(\Omega)$ i neka je $f \in L_2(\Omega)$. Funkcija $u \in H_0^1(\Omega)$ koja zadovoljava

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx &+ \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx \\ &+ \int_\Omega c(x)uvdx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).\end{aligned} \tag{2.7}$$

se zove **slabo rešenje** problema (2.4), (2.5). Svi parcijalni izvodi se posmatraju kao slabi izvodi.

[7] Primetimo takođe da se koeficijenti a_{ij} više ne pojavljuju pod znakom izvoda u (2.6) pa nije neophodno pretpostavljati $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$; $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$ ćemo pokazati da je dovoljan uslov. Takođe, zahtevi glatkoće nametnuti na koeficijente b_i i c mogu se ublažiti: $b_i \in L_\infty(\Omega)$ za $i = 1, ..., n$ i $c \in L_\infty(\Omega)$.

Očigledno, ako je u klasično rešenje (2.4), (2.5) onda je ono i slabo rešenje problema (2.4), (2.5). Obrnuto ne važi. Ako za (1.5), (1.6) imamo slabo rešenje, ono možda nije dovoljno glatko da bi bilo klasično rešenje.

Sada ćemo uzeti u obzir pitanje postojanja jedinstvenog slabog rešenja za opšti problem (2.4), (2.5). Radi jednostavnosti usvojićemo sledeći zapis:

$$\begin{aligned} a(w,v) = &\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx + \int_\Omega c(x) w v dx \end{aligned} \tag{2.8}$$

i

$$l(v) = \int_\Omega f(x) v(x) dx \tag{2.9}$$

Sa ovim zapisom, problem (2.7) se može zapisati na sledeći način:

$$\text{pronaći } \; u \in H_0^1(\Omega) \; \text{ tako da } \; a(u,v) = l(v), \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.10}$$

Da bismo dokazali egzistenciju jedinstvenog rešenja ovog problema, koristićemo teoremu iz funkcionalne analize.

Teorema 1. *(Laks-Milgram teorema)* Pretpostavimo da je V realan Hilbertov prostor snabdeven normom $\|\cdot\|_V$. Neka je $a(\cdot,\cdot)$ bilinearna funkcionela na $V \times V$ tako da:

a) $\exists c_0 > 0 \;\; \forall v \in V \;\; a(v,v) \geq c_0 \|v\|_V^2$,

b) $\exists c_1 > 0 \;\; \forall v, w \in V \;\; |a(w,v)| \leq c_1 \|w\|_V \|v\|_V$,

i neka je $l(\cdot)$ linearna funkcionela na V takva da

c) $\exists c_2 > 0 \;\; \forall v \in V, \;\; |l(v)| \leq c_2 \|v\|_V$.

Tada postoji jedinstveno $u \in V$ tako da

$$a(u,v) = l(v) \;\; \forall v \in V.$$

Koristićemo Laks-Milgram teoremu sa $V = H_0^1(\Omega)$ i $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ da bismo pokazali postojanje jedinstvenog slabog rešenja za (2.4), (2.5).

Podsetimo se da $H_0^1(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa unutrašnjim proizvodom

$$(w,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega w v dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

i pridruženom normom $\|w\|_{H^1(\Omega)} = (w,w)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$. Sledeće što ćemo pokazati je da $a(\cdot,\cdot)$ i $l(\cdot)$ definisani u (2.8) i (2.9) zadovoljavaju pretpostavke Laks-Milgram teoreme.

Počinjemo sa (c). Preslikavanje $v \mapsto l(v)$ je linearno: za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} l(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \int_\Omega f(x)(\alpha v_1(x) + \beta v_2(x))dx \\ &= \alpha \int_\Omega f(x)v_1(x)dx + \beta \int_\Omega f(x)v_2(x)dx \\ &= \alpha l(v_1) + \beta l(v_2), \qquad v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

pa je $l(\cdot)$ linearna funkcionela na $H_0^1(\Omega)$. Takođe, na osnovu Koši-Švarcove nejednakosti

$$\begin{aligned} |l(v)| = |\int_\Omega f(x)v(x)dx| &\le \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \le \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

za sve $v \in H_0^1(\Omega)$, gde smo koristili očiglednu nejednakost $\|v\|_{L_2(\Omega)} \le \|v\|_{H^1(\Omega)}$. Ako uzmemo $c_2 = \|f\|_{L_2(\Omega)}$, dobijamo traženi uslov.
Sada ćemo dokazati (b). Za svako fiksirano $w \in H_0^1(\Omega)$, preslikavanje $w \to a(v, w)$ je linearno. Slično, za svako fiksirano $v \in H_0^1(\Omega)$, preslikavanje $w \to a(v, w)$ je linearno. Stoga je $a(\cdot, \cdot)$ bilinearna funkcionela na $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Primenjujući Koši-Švarcovu nejednakost, zaključujemo da

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &\le \sum_{i,j=1}^n \max_{x \in \overline{\Omega}} |a_{ij}(x)| | \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \max_{x \in \overline{\Omega}} |b_i(x)| | \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx| \\ &\quad + \max_{x \in \overline{\Omega}} |c(x)| | \int_\Omega w(x)v(x)dx| \\ &\le \hat{c} \Big\{ \sum_{i,j=1}^n \left(\int_\Omega |\frac{\partial w}{\partial x_i}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x_j}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |\frac{\partial w}{\partial x_i}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_\Omega |w|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \Big\} \\ &\le \hat{c} \Big\{ \left(\int_\Omega |w|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |\frac{\partial w}{\partial x_i}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \Big\} \\ &\quad \times \Big\{ \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^n \left(\int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x_j}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \Big\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

gde

$$\hat{c} = \max \Big\{ \max_{1 \le i,j \le n} \max_{x \in \overline{\Omega}} |a_{ij}(x)|, \max_{1 \le i \le n} \max_{x \in \overline{\Omega}} |b_i(x)|, \max_{x \in \overline{\Omega}} |c(x)| \Big\}.$$

Dalje, zaključujemo da važi

$$|a(w,v)| \leq 2n\hat{c}\Big\{\int_\Omega |w|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\frac{\partial w}{\partial x_i}|^2 dx\Big\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \quad \Big\{\int_\Omega |v|^2 dx + \sum_{j=1}^n \int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x_j}|^2 dx\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

tako da ako označimo $c_1 = 2n\hat{c}$, dobijamo nejednakost pod (b):

$$|a(w,v)| \leq c_1 \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.12}$$

Preostalo nam je još da dokažemo (a). Da bismo to uradili, trebalo bi da pretpostavimo dodatne uslove za glatkoću na koeficijentima b_i zahtevanjem da $b_i \in W^1_\infty(\Omega)$. Korištenjem (2.3) zaključujemo da

$$a(v,v) \geq \tilde{c}\sum_{i=1}^n \int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega b_i(x)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(v^2)dx + \int_\Omega c(x)|v|^2 dx,$$

gde smo koristili $\frac{\partial v}{\partial x_i}v = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(v^2)$. Parcijalnom integracijom drugog izraza sa desne strane dobijamo

$$a(v,v) \geq \tilde{c}\sum_{i=1}^n \int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i}|v|^2 dx + \int_\Omega c(x)|v|^2 dx,$$

tj. imamo

$$a(v,v) \geq \tilde{c}\sum_{i=1}^n \int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2 dx + \int_\Omega \left(c(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right)|v|^2 dx.$$

Pretpostavimo da $b_i, i = 1,..,n$, i c zadovoljavaju nejednakost

$$c(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \geq 0, \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{2.13}$$

Tada

$$a(v,v) \geq \tilde{c}\sum_{i=1}^n \int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2 dx \tag{2.14}$$

Na osnovu Poenkare-Fridrihsove nejednakosti iz leme 2, desna strana se može ograničiti sa donje strane tako da

$$a(v,v) \geq \frac{\tilde{c}}{c_*}\int_\Omega |v|^2 dx. \tag{2.15}$$

Sabiranjem nejednakosti (2.14) i (2.15) dobijamo

$$a(v,v) \geq c_0\left(\int_\Omega |v|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^2 dx\right) = c_0\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{2.16}$$

gde je $c_0 = \tilde{c}/(1 + c_*)$. Dakle, pokazali smo i (a). Proverivši sve hipoteze Laks-Milgram teoreme, zaključujemo da postoji jedinstveno $u \in H_0^1(\Omega)$ koje zadovoljava (2.10). To znači da problem (2.4), (2.5) ima jedinstveno slabo rešenje. Dolazimo do naredne teoreme.

Teorema 2. Pretpostavimo da $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $i, j = 1, ..., n$, $b_i \in W_\infty^1(\Omega)$, $i = 1, ..., n$, $c \in L_\infty(\Omega), f \in L_2(\Omega)$ i pretpostavimo da važe (2.3) i (2.13.). Tada granični problem (2.4), (2.5) ima jedinstveno slabo rešenje $u \in H_0^1(\Omega)$. Važi,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{c_0}\|f\|_{L_2(\Omega)} \tag{2.17}$$

Dokaz. Kako smo u prethodnom dokazivanju uslova Laks-Milgram leme pokazali egzistenciju i jedinstvenost slabog rešenja za granični problem (2.4), (2.5), još preostaje da pokažemo da važi (2.17). Na osnovu (2.16.), (2.10), Koši- Švarcove nejednakosti i podsećajući se definicije $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ imamo,

$$\begin{aligned} c_0\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq a(u,u) = l(u) = (f,u) \\ &\leq |(f,u)| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Napomena 1. Primenjujući teoremu 2 na primer 5 za $1 \leq i, j \leq n$, $\Omega = (-1, 1)^n$ i sa koeficijentima:

$$a_{ij}(x) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$b_i(x) = 0, \quad c(x) = 0, \quad f(x) = sgn(\frac{1}{2} - |x|)$$

vidimo da (2.3) važi za $\tilde{c} = 1$ i (2.13) važi trivijalno. Tada početni problem iz primera 5 ima jedinstveno slabo rešenje $u \in H_0^1(\Omega)$ na osnovu teoreme 2.

Napomena 2. Literatura korišćena prilikom obrade poglavlja:

[1] Süli E., Lecture notes on finite element methods for partial differential equations, Mathematical Institute University of Oxford, 2020.

3 FEM aproksimacija za eliptični granični problem

3.1 Konstrukcija metode konačnih elemenata

U ovom poglavlju opisujemo konstrukciju metode konačnih elementata za eliptični granični problem i naglasićemo neka od njenih ključnih svojstava. Prvi korak u konstrukciji metode konačnih elemenata za eliptični granični poblem (npr. (2.4)-(2.5)) je pretvoriti problem u njegovu slabu formulaciju:

$$\text{pronaći } \ u \in V \ \text{ tako da } \ a(u,v) = l(v), \ \ \forall v \in V, \qquad (P)$$

gde je V prostor rešenja (npr. H_0^1 za homogeni Dirihleov granični problem), $a(\cdot,\cdot)$ je bilinearna funkcionela na $V \times V$ i $l(\cdot)$ je linearna funkcionela na V (npr.(2.8) i (2.9)). Drugi korak je zameniti V u (P) konačno-dimenzionalnim podprostorom $V_h \subset V$ koji se sastoji od po delovima neprekidnih polinomnih funkcija fiksnog stepena. Polinomne funkcije su povezane sa računskim domenom, tj. svaka funkcija deluje na određenom delu računskog domena. Stoga, uzmimo u obzir sledeću aproksimaciju:

$$\text{pronaći } \ u_h \in V_h \ \text{ tako da } \ a(u_h, v_h) = l(v_h), \ \ \forall v_h \in V_h \qquad (P_h)$$

Pretpostavimo npr. da važi

$$dim V_h = N(h) \ \ i \ \ V(h) = span\{\phi_1, ..., \phi_{N(h)}\},$$

gde (linearno nezavisne) bazne funkcije $\phi_i, i = 1, ..., N(h)$ imaju "mali" nosač. Ako izrazimo aproksimaciju u_h preko baznih funkcija ϕ_i, možemo zapisati

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N(h)} U_i \phi_i(x) \qquad (\bigstar)$$

gde $U_i, i = 1, ..., N(h)$ treba odrediti. Tada (P_h) možemo ponovo zapisati:

$$\text{pronaći } \ (U_1, ..., U_{N(h)}) \in \mathbb{R}^{N(h)} \ \text{ tako da}$$

$$\sum_{i=1}^{N(h)} a(\phi_i, \phi_j) U_i = l(\phi_j), \ \ j = 1, ..., N(h) \qquad (P_h')$$

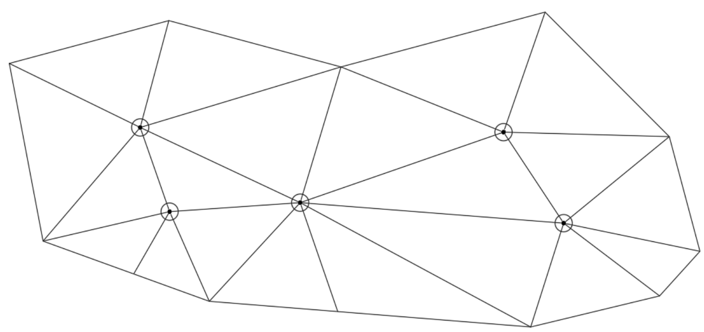
Ovo je sistem linearnih jednačina za $U = (U_1, ..., U_{N(h)})^T$, sa matricom sistema $A = (a(\phi_j, \phi_i))$, dimenzije $N(h) \times N(h)$. Kako ϕ_i imaju "malene" nosače, $a(\phi_j, \phi_i) = 0$ za većinu parova i i j, tako da je matrica A retka[8]. To znači da je većina njenih elemenata jednaka nuli. Ova osobina je izuzetno značajna iz ugla efikasnosti rešenja, jer iterativne metode su naročito brze za retke linearne sisteme. Kada rešimo (P_h') za $(U_1, ..., U_N(h))^T$, na osnovu $(\bigstar)$ dolazimo do aproksimacije za u.

[8] eng. sparse

3.2 Po delovima linearne bazne funkcije

U ovom odeljku opisujemo konstrukciju metode konačnih elemenata kroz jednostavan primer: homogeni Dirihleov granični problem za Poasonovu jednačinu na jediničnom kvadratu u $\mathbb{R}^2$. Pretpostavićemo da se prostor V_h sastoji od po delovima neprekidnih i po delovima linearnih funkcija.

Neka je Ω ograničen domen u $\mathbb{R}^2$ poligonalnog oblika sa rubom $\partial\Omega$. Tada Ω može biti podeljen na konačan broj trouglova. Pretpostavićemo da svaki par trouglova u triangularnoj podeli se dodiruje duž cele ivice, na vrhu ili se uopšte ne presecaju, kao što možemo videti na Slici 2. Označićemo sa h_k dijametar (najdužu stranicu) trougla K, definišemo $h = max_K h_k$.



Slika 2 - Podela domena $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ na trouglove

Trouglovi podele označeni sa K nazivaju se **elementi**. Svaki unutrašnji čvor, na slici označen sa $\odot$ povezujemo sa osnovnom funkcijom ϕ, koja ima vrednost 1 u tom čvoru i ima vrednost 0 u svim drugim čvorovima. Za ϕ pretpostavljamo da je neprekidna funkcija na $\overline{\Omega}$ i linearna na svakom od trouglova, kao što vidimo na slici 3.

Pretpostavimo da su unutrašnji čvorovi označeni sa $1, 2, ...N(h)$, neka su date odgovarajuće osnovne funkcije $\phi_1(x, y), ..., \phi_{N(h)}(x, y)$. Funkcije $\phi_1, ..., \phi_{N(h)}$ su linearno nezavisne i one obrazuju $N(h)$-dimenzionalan linearan potprostor V_h u $H_0^1(\Omega)$.

Razmotrimo sledeći eliptični problem:

$$-\Delta u = f \quad u \quad \Omega$$

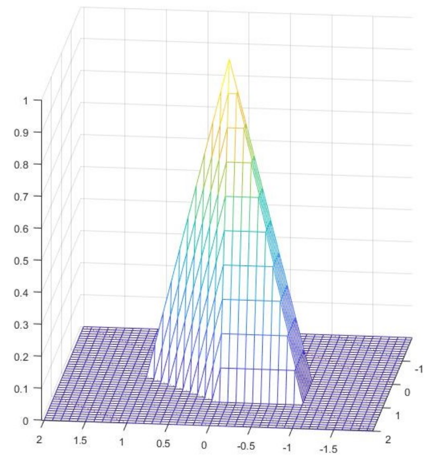
$$u = 0 \quad na \quad \partial\Omega$$

Da bismo konstruisali aproksimaciju datog problema uz pomoć metode konačnih elemenata, počinjemo razmatranjem njegove slabe formulacije:

$$\text{pronaći } \; u \in H_0^1(\Omega) \; \text{ tako da}$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = \int_\Omega fv \; dxdy, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

3 FEM APROKSIMACIJA ZA ELIPTIČNI GRANIČNI PROBLEM



Slika 3 - Bazna funkcija ϕ

Aproksimacija problema po FEM metodi je data sa:

$$\text{pronaći } \; u_h \in V_h \; \text{ tako da}$$
$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\frac{\partial v_h}{\partial x} + \frac{\partial u_h}{\partial y}\frac{\partial v_h}{\partial y} \right) dxdy = \int_\Omega f v_h \; dxdy, \qquad \forall v_h \in V_h.$$

Ako zapišemo

$$u_h(x,y) = \sum_{i=1}^{N(h)} U_i \phi_i(x,y),$$

metoda konačnih elemenata može se ponovo zapisati u obliku:

$$\text{pronaći } \; U = (U_1, ..., U_{N(h)})^T \in \mathbb{R}^{N(h)} \; \text{ tako da}$$
$$\sum_{i=1}^{N(h)} U_i \left[\int_\Omega \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dxdy \right] = \int_\Omega f \phi_j dxdy,$$

za $j = 1, ..., N(h)$.
Ako sa $A = [a_{ji}]$, $F = (F_1, ..., F_{N(h)})^T$ označimo

$$a_{ji} = a_{ij} = \int_\Omega \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dxdy,$$

$$F_j = \int_\Omega f \phi_j dxdy,$$

aproksimaciju našeg problema možemo zapisati kao sistem linearnih jednačina

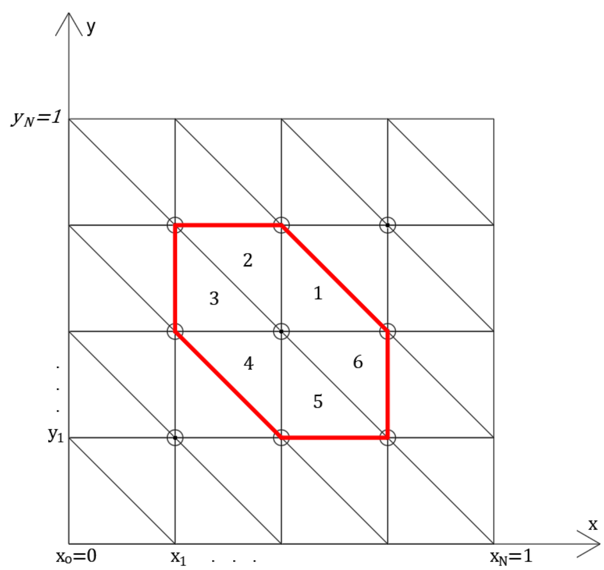
$$AU = F.$$

Rešavajući sistem, dobijamo $U = (U_1, ..., U_{N(h)})^T$, zatim kada uvrstimo U dobijamo i rešenje u_h:

$$u_h(x,y) = \sum_{i=1}^{N(h)} U_i \phi_i(x,y),$$

Matrica A se naziva **matrica krutosti**[9].

Da bismo pojednostavili, pretpostavićemo da je $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ i posmatrajmo ekvidistantnu trijangularnu podelu $\overline{\Omega}$. Na slici 4 možemo primetiti da je svaki unutrašnji čvor date podele okružen sa 6 jednakih trouglova koje numerišemo suprotno od smera kazaljke na satu. Slučaj uopštene triangularne podele ćemo videti kasnije, prilikom numeričkog rešavanja Helmholcove jednačine.



Slika 4 - Triangulacija $\overline{\Omega} = [0,1] \times [0,1]$

Neka ϕ_{ij} označava osnovnu funkciju koja se odnosi na čvor (x_i, y_i):

$$\phi_{ij}(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{x-x_i}{h} - \frac{y-y_j}{h}, & (x,y) \in 1 \\ 1 - \frac{y-y_j}{h}, & (x,y) \in 2 \\ 1 - \frac{x_i-x}{h}, & (x,y) \in 3 \\ 1 - \frac{x_i-x}{h} - \frac{y_j-y}{h}, & (x,y) \in 4 \\ 1 - \frac{y_j-y}{h}, & (x,y) \in 5 \\ 1 - \frac{x-x_i}{h}, & (x,y) \in 6 \\ 0, & inače, \end{cases}$$

[9]eng. stiffness matrix

gde sa 1,2,...,6 označavamo trouglove koji okružuju čvor (x_i, y_j). Tada,

$$\frac{\partial \phi_{ij}(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} -1/h, & (x,y) \in 1 \\ 0, & (x,y) \in 2 \\ 1/h, & (x,y) \in 3 \\ 1/h, & (x,y) \in 4 \\ 0, & (x,y) \in 5 \\ -1/h, & (x,y) \in 6 \\ 0, & inače, \end{cases}$$

Takođe,

$$\frac{\partial \phi_{ij}(x,y)}{\partial y} = \begin{cases} -1/h, & (x,y) \in 1 \\ -1/h, & (x,y) \in 2 \\ 0, & (x,y) \in 3 \\ 1/h, & (x,y) \in 4 \\ 1/h, & (x,y) \in 5 \\ 0, & (x,y) \in 6 \\ 0, & inače, \end{cases}$$

Kako je

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} U_{ij} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial y} \frac{\partial \phi_{kl}}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} U_{ij} \int_{supp\phi_{kl}} \left(\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x} \frac{\partial \phi_{kl}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial y} \frac{\partial \phi_{kl}}{\partial y} \right) dxdy \\ &= 4U_{kl} - U_{k-1,l} - U_{k+1,l} - U_{k,l-1} - U_{k,l+1}, \qquad k,l = 1,...,N-1, \end{aligned}$$

aproksimacija je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} &- \frac{U_{k+1,l} - 2U_{k,l} + U_{k-1,l}}{h^2} - \frac{U_{k,l+1} - 2U_{k,l} + U_{k,l-1}}{h^2} \\ &= \frac{1}{h^2} \int \int_{supp\phi_{kl}} f(x,y) \phi_{kl}(x,y) dxdy, \qquad k,l = 1,...,N-1 \\ &U_{kl} = 0 \text{ na } \partial\Omega \end{aligned}$$

3.3 Samo-adjungovani eliptični problem

Posmatrajmo eliptični granični problem:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3.1}$$

$$u = 0, \qquad \text{na } \partial\Omega \tag{3.2}$$

gde je Ω ograničen otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $i,j = 1,...,n$; $b_i \in W^1_\infty(\Omega)$, $i = 1,...,n$, $c \in L_\infty(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$, i pretpostavimo da postoji konstanta $\tilde{c} > 0$ tako da

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \tilde{c}\sum_{i=1}^{n} {\xi_i}^2, \qquad \forall\xi = (\xi_1,...,\xi_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.3}$$

Podsetimo se iz Poglavlja 2 slabe formulacije problema (3.1), (3.2):

$$\text{pronaći} \;\; u \in H_0^1(\Omega) \;\; \text{tako da} \;\; a(u,v) = l(v), \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.4}$$

gde su bilinearna funkcionela $a(\cdot,\cdot)$ i linearna funkcionela $l(\cdot)$ definisane sa:

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx + \int_\Omega c(x)uvdx$$

i

$$l(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Pretpostavimo još i da je

$$c(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i}{\partial x_i} \geq 0, \;\; x \in \overline{\Omega},$$

tada (3.4) znamo da ima jedinstveno rešenje u u prostoru $H_0^1(\Omega)$. U posebnom slučaju, kada je ispunjeno:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \;\; i,j = 1,...,n \;\; x \in \overline{\Omega},$$

i

$$b_i(x) \equiv 0, \;\; i = 1,...,n, \;\; x \in \overline{\Omega},$$

za eliptični granični problem kažemo da je **samo-adjungovan**. Tada je bilinearna funkcionela $a(\cdot,\cdot)$ simetrična, tj.

$$a(v,w) = a(w,v) \;\; \forall v,w \in H_0^1(\Omega).$$

Do kraja ovog poglavlja ćemo smatrati da je $a(\cdot,\cdot)$ simetrična.

Dakle, sada razmatramo problem:

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + c(x)u = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3.5}$$

$$u = 0, \qquad \text{na} \;\; \partial\Omega \tag{3.6}$$

gde $a_{ij}(x)$ zadovoljava uslov eliptičnosti (3.3), $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $c(x) \geq 0$, $x \in \overline{\Omega}$. Problem (3.5), (3.6) se može predstaviti kao problem minimizacije.
Definišemo preslikavanje $J : H_0^1 \to \mathbb{R}$ tako da,

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v), \;\; v \in H_0^1(\Omega).$$

Lema 3. Neka je $u \in H_0^1(\Omega)$ jedinstveno slabo rešenje za problem (3.1)-(3.2) i pretpostavimo da je $a(\cdot,\cdot)$ simetrično. Tada je u jedinstvena funkcija za koju J dostiže minimum nad $H_0^1(\Omega)$.

Dokaz. Neka je u jedinstveno slabo rešenje za (3.1)-(3.2). Posmatramo $J(v) - J(u)$:

$$\begin{aligned}
J(v) - J(u) &= \frac{1}{2}a(v,v) - l(v) - \frac{1}{2}a(u,u) + l(u) \\
&= \frac{1}{2}a(v,v) - \frac{1}{2}a(u,u) - l(v-u) \\
&= \frac{1}{2}a(v,v) - \frac{1}{2}a(u,u) - a(u,v-u) \\
&= \frac{1}{2}a(v,v) - \frac{1}{2}a(u,u) - a(u,v) + a(u,u) \\
&= \frac{1}{2}a(v,v) + \frac{1}{2}a(u,u) - a(u,v) \\
&= \frac{1}{2}[a(v,v) - 2a(u,v) + a(u,u)] \\
&= \frac{1}{2}[a(v,v) - a(u,v) - a(v,u) + a(u,u)] \\
&= \frac{1}{2}a(v-u,v-u)
\end{aligned}$$

Tada

$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2}a(v-u,v-u).$$

Znamo iz (2.16)

$$a(v-u,v-u) \geq c_0\|v-u\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad c_0 > 0.$$

Sledi,

$$J(v) - J(u) \geq \frac{c_0}{2}\|v-u\|^2_{H^1(\Omega)} \geq 0. \tag{3.7}$$

Na kraju zaključujemo,

$$J(v) \geq J(u), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.8}$$

tj. u minimizuje $J(\cdot)$ nad $H_0^1(\Omega)$.

Pokažimo još da je u jedina funkcija koja minimizuje $J(\cdot)$ nad $H_0^1(\Omega)$. Pretpostavimo da je $\tilde{u}$ takođe funkcija koja minimizuje $J(\cdot)$.
Tada je :

$$J(\tilde{u}) \leq J(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.9}$$

Kada uzmemo $v = \tilde{u}$ iz (3.8) zaključujemo $J(u) \leq J(\tilde{u})$. Takođe, ako uzmemo $v = u$ iz (3.9) imamo $J(\tilde{u}) \leq J(u)$.
Sledi,

$$J(\tilde{u}) = J(u).$$

Sada, na osnovu nejednakosti (3.7) znamo

$$0 = J(\tilde{u}) - J(u) = \frac{1}{2}a(\tilde{u}-u, \tilde{u}-u) \geq \frac{c_0}{2}\|\tilde{u}-u\|^2_{H^1(\Omega)},$$

pa sledi,

$$\|\tilde{u}-u\|^2_{H^1(\Omega)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \tilde{u}. \quad \blacksquare$$

Lema 4. Neka je dato preslikavanje $J : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ definisano sa $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v)$. $J(\cdot)$ je konveksno preslikavanje, tj.

$$J((1-\theta)v + \theta w) \leq (1-\theta)J(v) + \theta J(w), \quad \theta \in [0,1], \quad v, w \in H^1_0(\Omega).$$

Dokaz. Koristeći definiciju preslikavanja $J(\cdot)$, desna strana postaje:

$$\begin{aligned}(1-\theta)J(v) + \theta J(w) &= (1-\theta)\frac{1}{2}a(v,v) - (1-\theta)l(v) + \theta\frac{1}{2}a(w,w) - \theta l(w)\\ &= \frac{1}{2}a(v,v) - \frac{1}{2}\theta a(v,v) - l(v) + \theta l(v) + \theta\frac{1}{2}a(w,w) - \theta l(w)\end{aligned}$$

Sa druge strane imamo,

$$\begin{aligned}J((1-\theta)v+\theta w) &= \frac{1}{2}a((1-\theta)v+\theta w, (1-\theta)v + \theta w) - l((1-\theta)v+\theta w)\\ &= -(1-\theta)l(v) - \theta l(w) + \frac{1}{2}a((1-\theta)v, (1-\theta)v) + \frac{1}{2}a((1-\theta)v, \theta w)\\ &\quad + \frac{1}{2}a(\theta w, (1-\theta)v) + \frac{1}{2}a(\theta w, \theta w)\\ &= -l(v) + \theta l(v) - \theta l(w) + \frac{1}{2}a(v,v) - \theta a(v,v) + \frac{\theta^2}{2}a(v,v) + \frac{1}{2}\theta a(v,w)\\ &\quad - \frac{1}{2}\theta^2 a(v,w) + \frac{1}{2}\theta a(w,v) - \frac{1}{2}\theta^2 a(w,v) + \frac{1}{2}\theta^2 a(w,w)\end{aligned}$$

Sledi,

$$(1-\theta)J(v) + \theta J(w) = J((1-\theta)v + \theta w) + \frac{1}{2}\underbrace{\theta(1-\theta)}_{\geq 0}\underbrace{a(v-w, v-w)}_{\geq 0}.$$

Kako je $a(v-w, v-w) \geq 0$ dobijamo traženu osobinu konveksnosti, tj.

$$J((1-\theta)v + \theta w) \leq (1-\theta)J(v) + \theta J(w). \quad \blacksquare$$

Pretpostavimo da je u minimum za $J(\cdot)$, onda je u stacionarna tačka za $J(\cdot)$:

$$J'(u)v := \lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u+\lambda v) - J(u)}{\lambda} = 0, \quad \text{za sve } v \in H^1_0(\Omega),$$

$$\begin{aligned}\frac{J(u+\lambda v) - J(u)}{\lambda} &= \frac{\frac{1}{2}a(u+\lambda v, u+\lambda v) - l(u+\lambda v) - \frac{1}{2}a(u,u) + l(u)}{\lambda}\\ &= a(u,v) + \frac{\lambda}{2}a(v,v) - l(v)\end{aligned}$$

Sledi,

$$\lim_{\lambda \to 0}(a(u,v) + \frac{\lambda}{2}a(v,v) - l(v)) = 0$$

tj.

$$a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Prethodni zaključak nas dovodi do Leme 5 i ujedno predstavlja njen dokaz.

Lema 5. Neka je $u \in H_0^1(\Omega)$ minimum za preslikavanje $J(\cdot)$ nad $H_0^1(\Omega)$. Tada je u rešenje problema (3.1)-(3.2). Problem (3.1)-(3.2) zovemo ***Ojler-Lagranžova jednačina*** za dati problem minimizacije.

Lema 5 je u potpunosti obratna od Leme 3 i njih dve zajedno daju ekvivalenciju slabe formulacije, tj. :

$$\text{pronaći } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tako da } a(u,v) = l(v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{W}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{pronaći } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tako da } J(u) \leq J(v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{M}$$

Iskoristićemo ovu ekvivalenciju da bismo dali aproksimativni oblik za u, tj. u_h u samo-adjungovanom slučaju. Obzirom da je V_h konačno-dimenzionalan podprostor od $H_0^1(\Omega)$, aproksimacija problema (W) metodom konačnih elemenata je:

$$\text{pronaći } u_h \in V_h \text{ tako da } a(u_h, v_h) = l(v_h), \ \forall v_h \in V_h \tag{W_h}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{pronaći } u_h \in V_h \text{ tako da } J(u_h) \leq J(v_h), \ \forall v_h \in V_h \tag{M_h}$$

Dakle, u_h se može okarakterisati kao jedinstveni minimizator funkcionele $J(\cdot)$ tj.

$$J(u_h) = \min_{v_h \in V_h} J(v_h)$$

Naravno, važi $J(u) < J(u_h)$.

3.4 Galjerkinova ortogonalnost. Lema Céa

U ovom delu ćemo izneti teorijske osnove za analizu greške metode konačnih elemenata. Posmatrajmo ponovo eliptični granični problem

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3.10}$$

$$u = 0, \qquad \text{na } \partial\Omega \tag{3.11}$$

gde je Ω ograničen otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $i, j = 1, ..., n$; $b_i \in W^1_\infty(\Omega)$, $i = 1, ..., n$, $c \in L_\infty(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$ i pretpostavimo da postoji konstanta $\tilde{c} > 0$ tako da

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \tilde{c}\sum_{i=1}^{n} {\xi_i}^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.12}$$

Slaba formulacija problema (3.10)-(3.11) je

$$\text{pronaći } \ u \in H^1_0(\Omega) \ \text{ tako da } \ a(u, v) = l(v), \ \ \forall v \in H^1_0(\Omega), \tag{3.13}$$

gde su bilinearna funkcionela $a(\cdot, \cdot)$ i linearna funkcionela $l(\cdot)$ definisane sa:

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Omega c(x) uv dx$$

i

$$l(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Pokazali smo da ako važi

$$c(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \geq 0, \ \ x \in \overline{\Omega},$$

onda (3.13) ima jedinstveno rešenje $u \in H^1_0(\Omega)$, slabo rešenje problema (3.10)-(3.11). Pokazali smo i više, $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{c_0}\|f\|_{L_2(\Omega)}$ gde je c_0 dato kao u (2.16).

Sada pretpostavimo da je V_h konačno dimenzionalan podprostor od $H^1_0(\Omega)$ bez davanja preciznih pretpostavki o prirodi prostora V_h (jedina pretpostavka je da se V_h sastoji od po delovima neprekidnih i po delovima polonomnih funkcija definisanih na podeli računskog domena Ω).
Aproksimacija metode konačnih elemenata za (3.13) je

$$\text{pronaći } \ u_h \in V_h \ \text{ tako da } \ a(u_h, v_h) = l(v_h), \ \ \forall v_h \in V_h. \tag{3.14}$$

Na osnovu pretpostavke da je $V_h \subset H^1_0(\Omega)$ sledi na osnovu Laks-Milgramove teoreme da (3.14) ima jedinstveno rešenje $u_h \in V_h$. Štaviše, (3.13) važi za bilo koje $v = v_h \in V_h$:

$$a(u, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Oduzimajući (3.14) od prethodnog identiteta zaključujemo da

$$\boxed{a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h.} \tag{3.15}$$

Svojstvo (3.15) zovemo ***Galjerkinova ortogonalnost*** i videćemo da igra glavnu ulogu pri analizi greške metode konačnih elemenata.
Znamo iz (2.16) da za $v = u - u_h \in H^1_0(\Omega)$ imamo:

$$a(u - u_h, u - u_h) \geq c_0\|u - u_h\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Dalje dobijamo,

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|^2_{H^1(\Omega)} &\leq \frac{1}{c_0}a(u-u_h,u-u_h)=\frac{1}{c_0}a(u-u_h,u-v_h+v_h-u_h)\\ &=\frac{1}{c_0}a(u-u_h,u-v_h)+\frac{1}{c_0}\underbrace{a(u-u_h,v_h-u_h)}_{=0 \text{ zbog svojstva } (3.15)}\end{aligned}$$

Sledi,

$$\|u-u_h\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{c_0}a(u-u_h,u-v_h) \leq \frac{1}{c_0}c_1\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}\|u-v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

tj.

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c_1}{c_0}\|u-v_h\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Ovo zapažanje nas dovodi do sledeće leme:

Lema 6.*(Céa lema)* Za aproksimaciju u_h rešenja $u \in H^1_0(\Omega)$ važi:

$$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c_1}{c_0}\min_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Sada ćemo posmatrati samo-adjungovani problem, znamo da su ispunjeni uslovi $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $i,j=1,...,n$ i $b_i(x)=0$, $i=1,...,n$. Dakle, posmatramo problem:

$$\begin{aligned}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+c(x)u=f(x), \qquad x\in\Omega,\\ u=0, \qquad \text{na } \partial\Omega\end{aligned}$$

gde su preslikavanja $a(u,v)$ i $l(v)$ data sa:

$$a(u,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx+\int_\Omega c(x)uvdx$$

i

$$l(v)=\int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Definišemo

$$(v,w)_a := a(v,w), \quad v,w\in H^1_0(\Omega)$$

gde $(\cdot,\cdot)_a : H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)\to\mathbb{R}$, $a(\cdot,\cdot)$ je simetrično, bilinearno preslikavanje i znamo da važi nejednakost (2.16):

$$a(v,v)\geq c_0\|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall v\in H^1_0(\Omega).$$

Sledi da $(\cdot,\cdot)_a$ definiše unutrašnji proizvod na $H_0^1(\Omega)$. Neka je $\|\cdot\|_a$ odgovarajuća norma[10], tj. $\|v\|_a = \sqrt{a(v,v)}$.
Slaba formulacija samo-adjungovanog problema je:

$$\text{pronaći } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tako da } a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Kako je $V_h \subset H_0^1$, sledi

$$a(u, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.16}$$

Takođe,

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.17}$$

Oduzimanjem jednakosti (3.17) od (3.16), dobijamo

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h,$$

tj.

$$(u - u_h, v_h)_a = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.18}$$

Jednakost (3.18) predstavlja Galjerkinovu osobinu ortogonalnosti u samo-adjungovanom slučaju. Greška $u - u_h$ i aproksimacija u_h su ortogonalne u odnosu na unutrašnji proizvod $(\cdot,\cdot)_a$.
Na osnovu svojstva ortogonalnosti (3.18) imamo:

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_a^2 &= (u - u_h, u - u_h)_a \\
&= (u - u_h, u)_a - (u - u_h, u_h)_a \\
&= (u - u_h, u)_a \\
&= (u - u_h, u)_a - (u - u_h, v_h)_a \\
&= (u - u_h, u - v_h)_a \quad \forall v_h \in V_h.
\end{aligned}$$

Sada na osnovu Koši-Švarcove nejednakosti,

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_a^2 &= (u - u_h, v - v_h)_a \\
&\le \|u - u_h\|_a \|u - v_h\|_a \quad \forall v_h \in V_h.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\|u - u_h\|_a \le \|u - v_h\|_a \quad \forall v_h \in V_h.$$

Sledi,

$$\|u - u_h\|_a = \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_a.$$

Pošto smo u gornjem izvođenju dokazali lemu Céa za samo-adjungovani slučaj, sada ćemo je i formalno zapisati.

Lema 7. Za aproksimaciju $u_h \in V_h$ rešenja $u \in H_0^1(\Omega)$ u normi $\|\cdot\|_a$ važi:

$$\|u - u_h\|_a = \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_a.$$

[10] U stranoj literaturi često se koristi izraz **energy norm** tj. energetska norma

Na kraju ovog poglavlja, pošto smo definisali preslikavanje $(\cdot,\cdot)_a$ i odgovarajuću normu $\|\cdot\|_a$, možemo dokazati još jednu osobinu matrice krutosti A.

Teorema 3. Matrica A je pozitivno definitna, tj. važi

$$x^T Ax > 0 \;\text{ ako je }\; x \neq 0 \;\text{ i svi koreni od }\; A \;\text{ su pozitivni.}$$

Dokaz. Kako je matrica A simetrična, znamo da su svi koreni od A realni. Za svako $\eta \neq 0$, pokazaćemo da je $\eta^T A\eta > 0$:

$$\begin{aligned}
\eta^T A\eta = \eta^T(A\eta) &= \sum_{i=1}^{M}\eta_i\sum_{j=1}^{M}a_{ij}\eta_j \\
&= \sum_{i=1}^{M}\eta_i\sum_{j=1}^{M}a(\phi_i,\phi_j)\eta_j \\
&= \sum_{i=1}^{M}\eta_i\sum_{j=1}^{M}a(\phi_i,\eta_j\phi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{M}\eta_i a\left(\phi_i,\sum_{j=1}^{M}\eta_j\phi_j\right) \\
&= a\left(\sum_{i=1}^{M}\eta_i\phi_i,\sum_{j=1}^{M}\eta_j\phi_j\right) \\
&= a(v_s,v_s) = \|v_s\|_a^2 > 0,
\end{aligned}$$

a znamo da je $v_s = \sum_{i=1}^{M}\eta_i\phi_i \neq 0$, jer je η nenula vektor i ϕ_i su linearno nezavisni. ■

Napomena. Literatura korišćena prilikom obrade poglavlja:

[1] Brenner S. C., Scott L. R., The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Third Edition, Springer, 2008

[2] Süli E., Lecture notes on finite element methods for partial differential equations, Mathematical Institute University of Oxford, 2020.

[3] Zhilin Li, Tao Tang, Qiao Zhonghua, Numerical solution of differential equations - Introduction to finite difference and finite element methods, Cambridge University Press, 2018.

4 Aproksimacija Helmholcove jednačine metodom konačnih elemenata

Podsetimo se uopštenog oblika Helmholcove jednačine

$$\Delta u + \lambda u = f \tag{4.1}$$

Ako je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, slaba formulacija Helmholcove jednačine u dvodimenzionalnom slučaju je data sa

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dxdy + \lambda \iint_\Omega uv dxdy = \iint_\Omega fv dxdy,$$

gde je λ prozvoljna konstanta i $v \in H_0^1(\Omega)$.

4.1 Helmholcova jednačina u matematičkoj fizici

4.1.1 Veza između Helmholcove jednačine i pojedinih hiperboličkih i paraboličkih jednačina

Posmatrajmo jednačinu

$$\Delta w = a_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2a_1 \frac{\partial w}{\partial t} + a_2 w, \tag{4.2}$$

gde su $a_0, a_1,$ i a_2 konstante. Ako su sve ove konstante pozitivne, jednačina (4.2) je telegrafska jednačina. Ako su a_1 i a_2 obe nula i ako je a_0 pozitivno, (4.2) postaje talasna jednačina. Dalje, ako su a_0 i a_2 obe nula i a_1 pozitivno, jednačina (4.2) postaje jednačina difuzije i toplotne provodljivosti. Ukoliko je $a = 0$, $a_1 > 0$, $a_2 \neq 0$, jednačina (4.2) postaje difuzna jednačina u sredini u kojoj se odvijaju hemijske ili lančane reakcije.

Koristeći metod razdvajanja promenljivih, pokušajmo pronaći rešenje jednačine (4.2) u obliku:

$$w(x,t) = u(x)v(t), \tag{4.3}$$

gde je $u(x)$ funkcija koja zavisi od prostornih koordinata, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ i $v(t)$ je funkcija koja zavisi od vremena. Kada zamenimo jednakost (4.3) u jednačinu (4.2) dobijamo

$$\frac{1}{u}\Delta u = \frac{1}{v}\left(a_0 \frac{d^2 v}{dt^2} + 2a_1 \frac{dv}{dt} + a_2 v\right).$$

Pošto leva strana jednakosti ne zavisi od t i desna strana ne zavisi od x, sledi

$$\Delta u = k^2 u, \tag{4.4}$$

$$a_0 \frac{d^2 v}{dt^2} + 2a_1 \frac{dv}{dt} + (a_2 - k^2)v = 0, \tag{4.5}$$

gde je k^2 konstanta.
Eliptična jednačina data sa (4.5) predstavlja Helmholcovu jednačinu u matematičkoj fizici. Ova jednačina ima veoma važnu ulogu u matematičkoj fizici zbog svoje jednostavnosti i zbog značaja problema koji dovode do nje (talasni procesi, protok toplote, difuzija itd.). Za procese koji se dešavaju u svim tačkama oblasti koji se ispituje, Helmholcova jednačina odmah određuje intenzitete koji se pridržavaju jednog vremenskog zakona i variraju od tačke do tačke. U specijalnom slučaju, kada je funkcija $v(t)$ konstantna, jednačina (4.5) određuje stabilno stanje. Kombinacijom rešenja koja su u obliku (4.3) može se dobiti skoro svaka prostorno - vremenska zavisnost. Mogućnost konstruisanja proizvoljne vremenske zavisnosti pomoću kombinacije rešenja oblika (4.3) se zadržava, ako umesto proizvoljnih funkcija $v(t)$ posmatramo samo funkcije koje zajedno formiraju kompletan sistem [11].

Bez uticaja na opštost, možemo ispitati drugačiju zamenu, tj. umesto (4.3) možemo ispitati supstituciju harmonijskim oscilacijama sa amplitudom i fazom koje variraju od tačke do tačke. U ovom slučaju, prema Furijeovoj teoremi, kombinacijom oscilacija različitih frekvencija, može se dobiti proizvoljna prostorno-vremenska zavisnost.

Uobičajeno je da harmonijske oscilacije opisujemo kompleksnim funkcijama oblika

$$u(x)e^{-i\omega t} \tag{4.6}$$

ili

$$u(x)e^{i\omega t}, \tag{4.7}$$

gde je ω ugaona frekvencija oscilacija i $u(x)$ je kompleksna funkcija koordinata tačaka x. Realni delovi izraza (4.7) i (4.8) u svakoj tački x određuju istu harmonijsku oscilaciju

$$\Re[u(x)e^{\mp i\omega t}] = |u(x)|\cos(\omega t + \theta) \tag{4.8}$$

gde su $|u(x)|$ amplituda i θ faza. Ako zamenimo izraz (4.6) u jednačinu (4.2) i podelimo sa e^{-iwt} dobijamo Helmholcovu jednačinu (4.4) sa parametrom k^2, koji će u opštem slučaju biti kompleksan:

$$k^2 = \omega^2 a_0 - a_2 + 2a_1 i. \tag{4.9}$$

Ako u jednačinu (4.2) uvrstimo izraz (4.7) dobijamo Helmholcovu jednačinu koja je kompleksno konjugovana u odnosu na jednačinu dobijenu zamenom izraza (4.6). Njena rešenja $u^*(x)$ i rešenja dobijena u prvom slučaju će biti kompleksno konjugovani. Realna funkcija $\Re u^*(x)e^{i\omega t}$ koja predstavlja rešenje polazne jednačine (4.2) biće ista u oba slučaja jer su realni delovi kompleksno konjugovanih brojeva jednaki. Sledi da su obe zamene (4.6) i (4.7) ekvivalentne i uvek koristimo samo jednu od njih.

[11]**Kompletan sistem** u klasičnom smislu u fizici znači da poznajemo vrednosti i trenutne brzine svih stepena slobode tog sistema. Uz to, podrazumevamo i poznavanje zakona dinamike (tj. sile) koja upravlja sistemom. Dakle, to znači da možemo izračunati konfiguraciju datog sistema u bilo kom trenutku u prošlosti, kao i sadašnjosti. Pod stepenima slobode podrazumevamo sve parametre sistema koji se mogu nezavisno menjati. Npr. ako imamo sistem koji se sastoji od materijalne tačke (u inače praznom prostoru), stepeni slobode su tri kartezijanske koordinate (x, y, z) za položaj te tačke. Ako znamo i koordinate brzine materijalne tačke i zakon sile koji deluje na nju, imamo kompletan sistem.

Pored homogene jednačine (4.4), u matematičkoj fizici se posmatra i nehomogeni oblik Helmholcove jednačine

$$\Delta u + k^2 u = -4\pi\rho. \tag{4.10}$$

Funkcija ρ može se posmatrati kao gustina raspodele izvora talasa.

4.2 Pojednostavljeni FE metod za Helmholcovu jednačinu

Ako su dati konstantni koeficijenti, postoji zatvorena forma za matricu krutosti, pa se algoritam za metodu konačnih elemenata može pojednostaviti.
Dakle, posmatramo problem:

$$-\Delta u + \lambda u(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega \tag{4.11}$$

$$u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \partial\Omega \tag{4.12}$$

gde je Ω proizvoljan, ograničen domen. Ako su po delovima linearne bazne funkcije definisane na podeli Ω , možemo izvesti analitički izraz za bazne funkcije, a time ujedno odrediti i elemente matrice krutosti.

Teorema 4. Posmatrajmo trougao određen temenima (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Neka su

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, \tag{4.13}$$

$$b_i = y_j - y_m, \tag{4.14}$$

$$c_i = x_m - x_j, \tag{4.15}$$

gde je i, j, m pozitivna permutacija skupa $\{1, 2, 3\}$. Tada su tri odgovarajuće bazne funkcije date sa

$$\psi_i(x,y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\delta}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.16}$$

gde $\psi_i(x_i, y_i) = 1$, $\psi_i(x_j, y_j) = 0$ za $i \neq j$, i

$$\Delta = \frac{1}{2} det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \pm \text{površina trougla}. \tag{4.17}$$

Dokaz. Teoremu ćemo dokazati za $\psi_1(x,y)$. Zamenimo a_1, b_1, i c_1 u definiciji $\psi_1(x,y)$ kao što je dato u (4.13), (4.14) i (4.15). Tada sledi,

$$\begin{aligned} \psi_1(x,y) &= \frac{a_1 + b_1 x + c_1 y}{2\Delta} \\ &= \frac{(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{2\Delta} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Dalje imamo,

$$\begin{aligned}
\psi_1(x_2,y_2) &= \frac{(x_2y_3-x_3y_2)+(y_2-y_3)x_2+(x_3-x_2)y_2}{2\Delta} = 0,\\
\psi_1(x_3,y_3) &= \frac{(x_2y_3-x_3y_2)+(y_2-y_3)x_3+(x_3-x_2)y_3}{2\Delta} = 0,\\
\psi_1(x_1,y_1) &= \frac{(x_2y_3-x_3y_2)+(y_2-y_3)x_1+(x_3-x_2)y_1}{2\Delta} = \frac{2\Delta}{2\Delta} = 1.
\end{aligned}$$

Dokaz je analogan za ψ_2 i ψ_3. ■

Navodimo još jednu teoremu koja je od suštinskog značaja za pojednostavljenu metodu konačnih elemenata i koja će nam najviše biti od pomoći prilikom generisanja koda u Matlabu.

Teorema 5. Koristeći iste oznake kao u teoremi 4, imamo

$$\iint_{\Omega_e} (\psi_1)^m(\psi_2)^n(\psi_3)^l dxdy = \frac{m!n!l!}{(m+n+l+2)!}2\Delta, \tag{4.19}$$

$$\iint_{\Omega_e} \nabla\psi_i \cdot \nabla\psi_j dxdy = \frac{b_ib_j+c_ic_j}{4\Delta},$$

$$\begin{aligned}
F_1^e &= \iint_{\Omega_e} \psi_1 f(x,y)dxdy \simeq f_1\frac{\Delta}{6} + f_2\frac{\Delta}{12} + f_3\frac{\Delta}{12},\\
F_2^e &= \iint_{\Omega_e} \psi_2 f(x,y)dxdy \simeq f_1\frac{\Delta}{12} + f_2\frac{\Delta}{6} + f_3\frac{\Delta}{12},\\
F_3^e &= \iint_{\Omega_e} \psi_3 f(x,y)dxdy \simeq f_1\frac{\Delta}{12} + f_2\frac{\Delta}{12} + f_3\frac{\Delta}{6},
\end{aligned}$$

gde je $f_i = f(x_i, y_i)$.

Dokaz sledi direktno, obzirom da znamo analitički izraz (4.16) za ψ_i. Aproksimiramo $f(x,y)$ izrazom

$$f(x,y) \simeq f_1\psi_1 + f_2\psi_2 + f_3\psi_3, \tag{4.20}$$

pa sledi

$$\begin{aligned}
F_1^e &\simeq \iint_{\Omega_e} \psi_1 f(x,y)dxdy\\
&= f_1\iint_{\Omega_e} \psi_1^2 dxdy + f_2\iint_{\Omega_e} \psi_1\psi_2 dxdy + f_3\iint_{\Omega_e} \psi_1\psi_3 dxdy.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Integrali iz poslednjeg izraza mogu se izračunati uz pomoć formule date u (4.19). Greška koja nastaje aproksimiranjem funkcije $f(x,y)$ je zanemarljiva u poređenju sa greškom aproksimacije dobijene metodom konačnih elemenata. Na sličan način dobijamo aproksimacije za F_2^e i F_3^e.

4.2.1 Pseudo kodovi i rezultati dobijeni u Matlabu

Koristićemo Matlab PDE Toolbox da bismo generisali trijangularnu podelu na domenu Ω. Radi jednostavnosti, posmatraćemo ograničen skup $\Omega = (-2.5, 2.5) \times (-2.5, 2.5)$ i neka je dato $\lambda = 1$. Kada generišemo mrežu u Matlabu i izvezemo je (Export Mesh), u radnom okruženju imamo 3 varijable p, e i t. Sledi,

$$p(1,1), p(1,2), ..., p(1, nnode) \quad \text{su } x \text{ koordinate čvorova,}$$

$$p(2,1), p(2,2), ..., p(2, nnode) \quad \text{su } y \text{ koordinate čvorova,}$$

i niz t je dat sa

$$t(1,1), t(1,2), ..., t(1, nele) \quad \text{su prvi čvorovi elementa,}$$

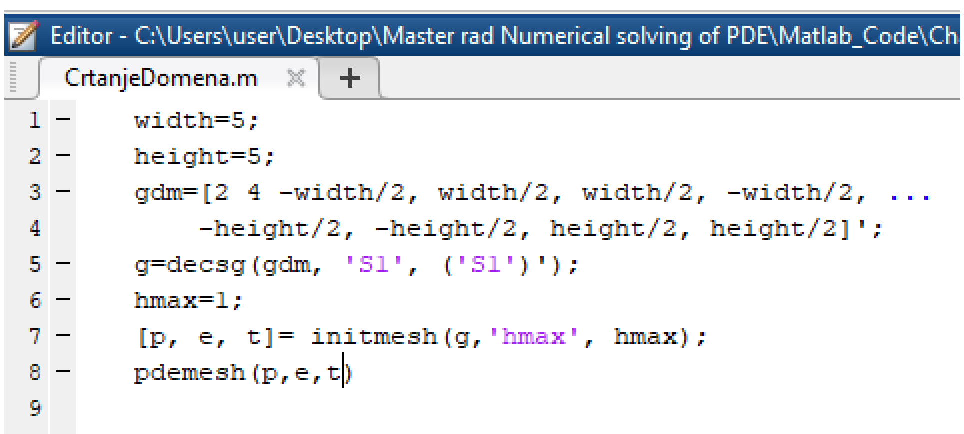
$$t(2,1), t(2,2), ..., t(2, nele) \quad \text{su drugi čvorovi elementa,}$$

$$t(3,1), t(3,2), ..., t(3, nele) \quad \text{su treći čvorovi elementa,}$$

i niz e opisuje čvorove koji se nalaze na rubu domena

$$e(1,1), e(1,2), ..., e(1, nbc) \quad \text{je indeks za početni čvor na rubu domena,}$$

$$e(2,1), e(2,2), ..., e(2, nbc) \quad \text{je indeks za krajnji čvor na rubu domena.}$$

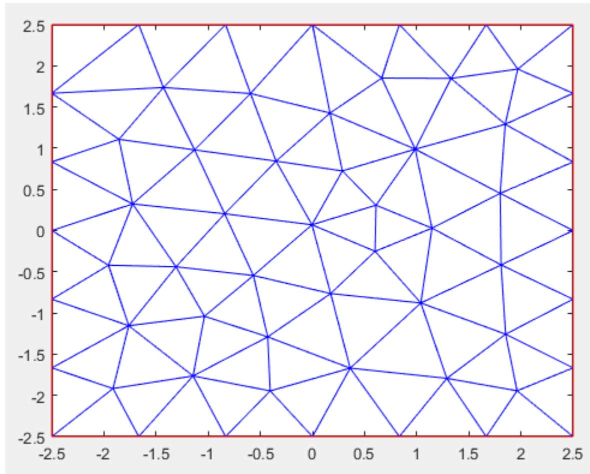


Slika 5 - Script za crtanje domena $\overline{\Omega} = [-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5]$

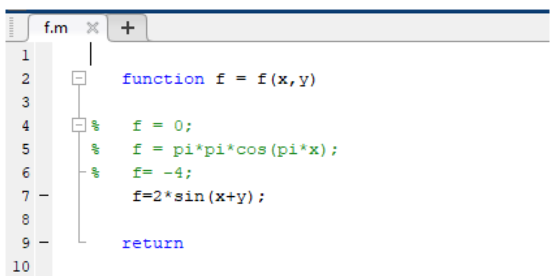
Kada pokrenemo program u Matlabu, u radnom prostoru nam se učitavaju prethodno navedene varijable i dobijamo proizvoljnnu triangulaciju domena $\Omega = (-2.5, 2.5) \times (-2.5, 2.5)$.

U nastavku ćemo prikazati Matlab kod za pojednostavljenu metodu konačnih elemenata.

4 APROKSIMACIJA HELMHOLCOVE JEDNAČINE METODOM KONAČNIH ELEMENATA

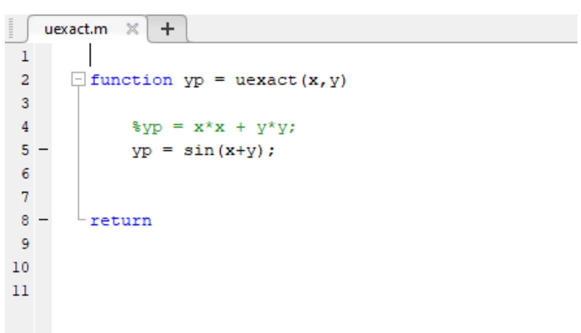


Slika 6 - Triangulacija domena $\overline{\Omega} = [-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5]$



```
f.m

function f = f(x,y)

%    f = 0;
%    f = pi*pi*cos(pi*x);
%    f= -4;
     f=2*sin(x+y);

return
```

Slika 7 - Prikaz funkcije f za koju testiramo kod



```
uexact.m

function yp = uexact(x,y)

    %yp = x*x + y*y;
    yp = sin(x+y);


return
```

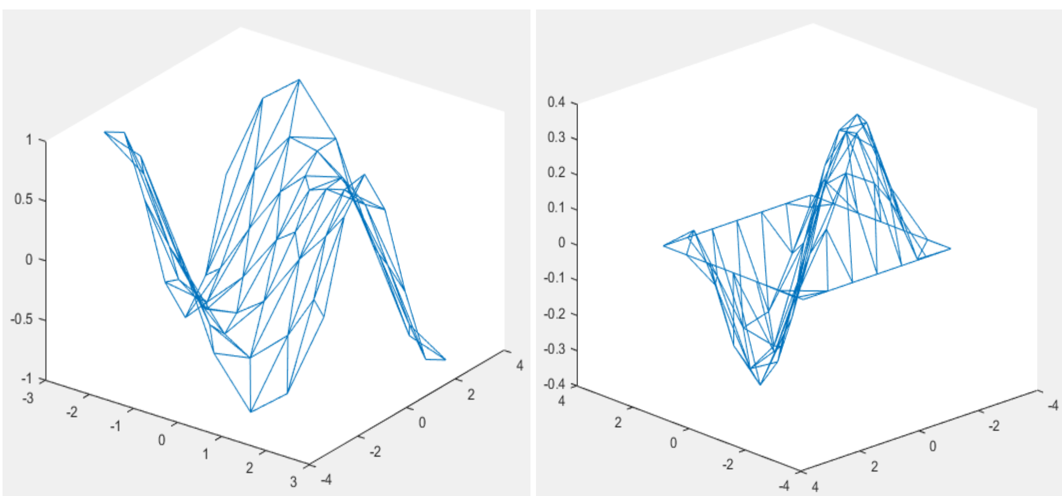
Slika 8 - Egzaktno rešenje jednačine koju testiramo

Helmholtz.m

```
  % Učitaćemo podatke iz Matlab PDETOOL Box: Export Mesh:

      [ijunk,nelem] = size(t);
      [ijunk,nnode] = size(p);
      lambda=1;                  %lambda je koeficijent Helmholcove jednačine
                                 %koji smo ručno podesili

      for i=1:nelem
        nodes(1,i)=t(1,i);
        nodes(2,i)=t(2,i);
        nodes(3,i)=t(3,i);
      end

      gk=zeros(nnode,nnode);
      gf = zeros(nnode,1);

      for nel = 1:nelem,    % Počinjemo prolaziti po elementima.

        for j=1:3,        % Učitavamo koordinate čvorova svakog
          jj = nodes(j,nel);    % elementa.
      xx(j) = p(1,jj);
          yy(j) = p(2,jj);
        end

        for i=1:3
      j = i+1 - fix((i+1)/3)*3;
          if j == 0
             j = 3;
          end
          m = i+2 - fix((i+2)/3)*3;
          if m  == 0
             m = 3;
          end

      a(i) = xx(j)*yy(m) - xx(m)*yy(j);
          b(i) = yy(j) - yy(m);
          c(i) = xx(m) - xx(j);
        end

        delta = ( c(3)*b(2) - c(2)*b(3) )/2.0;

        for ir = 1:3
      ii = nodes(ir,nel);
          for ic=1:3
              if ir==ic
                  helm=delta/6;
              else
```

```
                  helm=delta/12;
              end
            ak = (b(ir)*b(ic) + c(ir)*c(ic))/(4*delta)+ lambda*helm;
            jj = nodes(ic,nel);
            gk(ii,jj) = gk(ii,jj) + ak;
        end
      j = ir+1 - fix((ir+1)/3)*3;
         if j == 0
                j = 3;
             end
      m = ir+2 - fix((ir+2)/3)*3;
             if m == 0
                m = 3;
             end
      gf(ii) = gf(ii)+( f(xx(ir),yy(ir))*2.0 + f(xx(j),yy(j)) ...
                      + f(xx(m),yy(m)) )*delta/12.0;
      end

    end

%------------------------------------------------------
% Sada prelazimo na Dirihleov granični uslov

    [ijunk,npres] = size(e);
    for i=1:npres,
       xb = p(1,e(1,i));   yb=p(2,e(1,i));
       g1(i) = uexact(xb,yb);
    end

    for i=1:npres,
      nod = e(1,i);
      for k=1:nnode,
     gf(k) = gf(k) - gk(k,nod)*g1(i);
         gk(nod,k) = 0;
     gk(k,nod) = 0;
      end
     gk(nod,nod) = 1;
     gf(nod) = g1(i);
    end

    u=gk\gf;        % Rešavamo linearni sistem.
```

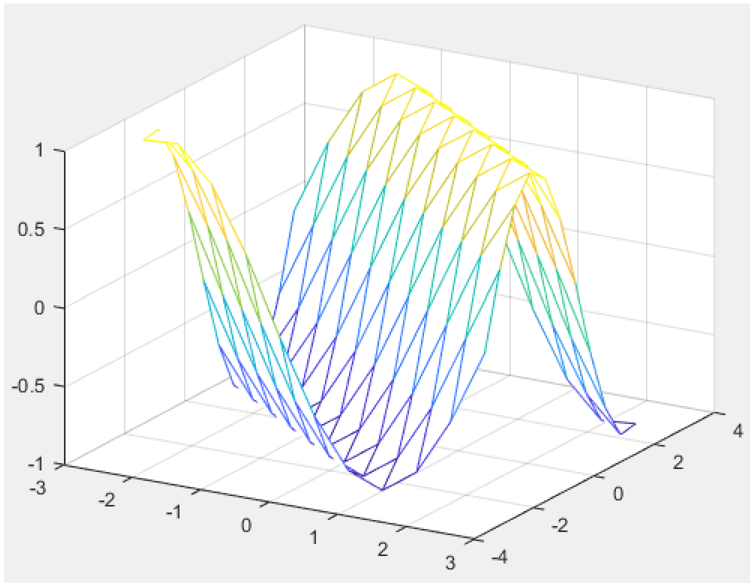
```
% Na kraju još želimo vektor greške da dobijemo.

        err = u;
    for i=1:nnode
            xt = p(1,i); yt=p(2,i);
            err(i) = u(i) - uexact(xt,yt);
        end


    pdemesh(p,e,t,u)
    figure(2); pdemesh(p,e,t,err)

% Kraj koda.
```



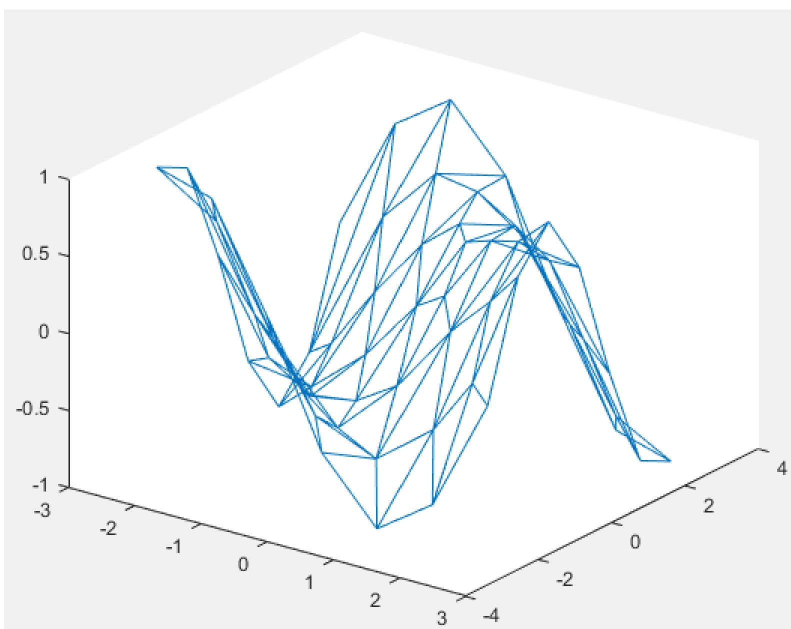
(a) Grafik rešenja jednačine za $f(x,y)=2\sin(x+y)$ (b) Odgovarajući grafik greške

Slika 9 - Grafici generisani u Matlabu pokretanjem koda Helmholtz.m

4 APROKSIMACIJA HELMHOLCOVE JEDNAČINE METODOM KONAČNIH ELEMENATA



Slika 10 - Tačno rešenje jednačine $-\Delta u+u(x,y)=2\sin(x+y)$



Slika 11 - Aproksimativno rešenje jednačine $-\Delta u+u(x,y)=2\sin(x+y)$ dobijeno pojednostavljenom FE metodom

4.3 Optimalna ocena greške

U ovom poglavlju ćemo izvesti optimalne ocene greške za aproksimaciju dobijenu metodom konačnih elemenata (W_h) za problem (W), ako su date linearne osnovne funcije.

4.3.1 A priori ocena greške

Radi jednostavnosti, posmatraćemo jednodimenzionalan problem sa datim početnim uslovima u dve tačke. Formulisaćemo i dokazati teoremu o oceni greške za jednodimenzionalan slučaj, za dvodimenzionalan slučaj ćemo navesti formulaciju teoreme.

Posmatramo problem

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f(x), \quad 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0, \quad f \in L_2(0,1) \end{aligned}$$

Treba naći $u \in H_0^1(0,1)$ tako da je $a(u,v) = l(v)$, za sve $v \in H_0^1(0,1)$ gde su

$$a(u,v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x) + u(x)v(x))dx$$

i

$$l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Primetimo da je ovaj problem samo-adjungovani i $b_i = 0$. Važi:

$$\|w\|_a = (a(w,w))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a(w,w)} = \left(\int_0^1 (|w'(x)|^2 + |w(x)|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|w\|_{H^1(0,1)}. \qquad (*)$$

Neka je data podela intervala $(0,1)$ koja ne mora biti ekvidistantna

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = 1, \quad N \geq 2.$$

Pretpostavkom da je $N \geq 2$ obezbeđujemo bar jednu tačku unutar intervala (0,1). Neka je $h_i = x_i - x_{i-1}$ i $h = \max_i h_i$.
Posmatramo bazne funkcije,

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & x_{i+1} < x \end{cases}$$

za $i = 1, ..., N-1$. Neka je $V_h = span\{\phi_1, ..., \phi_{N-1}\}$ i treba

$$\text{pronaći } \; u_h \in V_h \; \text{ tako da } \; a(u_h, v_h) = l(v_h), \;\; \forall v_h \in V_h.$$

Očigledno, V_h je $(N-1)$-dimenzionalan potprostor od $H_0^1(0,1)$. Pošto je $a(\cdot,\cdot)$ simetrična funkcija, lema Céa implicira:

$$\|u-u_h\|_{H^1(0,1)} = \|u-u_h\|_a = \min_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_a = \min_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_{H^1(0,1)}. \qquad (**)$$

Neka je $\mathcal{I}_h u \in V_h$ neprekidna i po delovima linearna funkcija takva da je $i = 0,1,...,N$. Definišemo,

$$\mathcal{I}_h u(x) = \sum_{i=1}^{N-1} u(x_i)\phi_i(x).$$

Funkcija $\mathcal{I}_h u(x)$ se zove **interpolant** za rešenje u u prostoru V_h. Primetimo da $\mathcal{I}_h u \in V_h$. Ako v_h zamenimo interpolantom $\mathcal{I}_h u$ u $(**)$ imamo:

$$\|u-u_h\|_{H_0^1(0,1)} \le \|u-\mathcal{I}_h u\|_{H_0^1(0,1)}. \qquad (***)$$

Teorema 6. Pretpostavimo da $u \in H^2(0,1)$ i neka je $\mathcal{I}_h u$ interpolant za u u prostoru V_h. Tada:

$$\|u-\mathcal{I}_h u\|_{L^2(0,1)} \le \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \|u''\|_{L^2}$$
$$\|u'-(\mathcal{I}_h u)'\|_{L^2(0,1)} \le \frac{h}{\pi}\|u''\|_{L^2}.$$

Dokaz. Posmatrajmo podinterval $[x_{i-1},x_i]$, $1 \le i \le N$ i definišemo funkciju $\xi(x) = u(x) - \mathcal{I}_h u(x)$, $x \in [x_{i-1},x_i]$. Sledi da $\xi \in H^2(x_{i-1},x_i)$ i $\xi(x_{i-1}) = 0 = \xi(x_i)$. Funkciju ξ možemo razviti u Furijeov red:

$$\xi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi(x-x_{i-1})}{h_i}, \qquad x \in [x_{i-1},x_i].$$

Sada imamo,

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\xi(x)]^2dx &= \sum_{l,k=1}^{\infty} a_k a_l \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin\frac{k\pi(x-x_{i-1})}{h_i}\sin\frac{l\pi(x-x_{i-1})}{h_i}dx \\ &= \left|\text{smena: } t = \frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right| = h_i\sum_{l,k=1}^{\infty} a_k a_l \int_0^1 \sin(k\pi t)\sin(l\pi t)dt \\ &= \frac{h_i}{2}\sum_{l,k=1}^{\infty} a_k a_l \delta_{kl} = \frac{h_i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2,\end{aligned}$$

gde je $\delta_{kl} = \begin{cases}1, & k=l\\ 0, & k\neq l\end{cases}.$

Diferenciranjem Furijeovog reda za ξ dva puta, dobijamo:

$$\xi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{k\pi}{h_i} \cos \frac{k\pi(x - x_{i-1})}{h_i},$$
$$\xi''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{k\pi}{h_i}\right)^2 \sin \frac{k\pi(x - x_{i-1})}{h_i}.$$

Sledi,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\xi'(x)|^2 dx = \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{h_i}\right)^2 |a_k|^2$$
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\xi''(x)|^2 dx = \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{h_i}\right)^4 |a_k|^2.$$

Kako je $k^4 \geq k^2 \geq 1$, sledi

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\xi(x)|^2 dx &= \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^4 |a_k|^2 = \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^4 \left(\frac{\pi}{h_i}\right)^4 \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^4 |a_k|^2 \\ &= \frac{h_i}{2} \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{h_i}\right)^4 |a_k|^2 = \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^4 \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{h_i}\right)^4 |a_k|^2,\end{aligned}$$

tj.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\xi(x)|^2 dx \leq \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\xi''(x)|^2 dx.$$

Analogno, važi

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\xi'(x)|^2 dx \leq \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\xi''(x)|^2 dx.$$

Sa druge strane, znamo da je $\xi''(x) = u''(x) - (\mathcal{I}_h u)''(x) = u''(x)$, $x \in (x_{i-1}, x_i)$ pa sledi

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\xi(x)|^2 dx \leq \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\xi''(x)|^2 dx = \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(x)|^2 dx.$$

Sada sumiramo integrale po $i = 1, ..., N$ i koristeći činjenicu da je $h_i \leq h$ imamo:

$$\int_0^1 |\xi(x)|^2 dx \leq \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(x)|^2 dx \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 \int_0^1 |u''(x)|^2 dx,$$

tj. dobili smo traženu nejednakost

$$\|\xi\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 \|u''\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Analogno:

$$\|\xi'\|^2_{L^2(0,1)} \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \|u''\|^2_{L^2(0,1)}. \qquad \blacksquare$$

Na osnovu definicije norme $\|\cdot\|_{H^1}$ i teoreme 6 imamo:

$$\|u - \mathcal{I}_h u\|_{H^1(0,1)} = \sqrt{\|\xi\|^2_{L^2(0,1)} + \|\xi'\|^2_{L^2(0,1)}} \leq \sqrt{\left(\left(\frac{h}{\pi}\right)^4 + \left(\frac{h}{\pi}\right)^2\right)\|u''\|^2_{L^2(0,1)}}$$

$$\leq \|u''\|_{L^2(0,1)}\frac{h}{\pi}\sqrt{1+\frac{h^2}{\pi}}.$$

Kada u $(***)$ ubacimo prethodni rezultat, dobijamo ***a priori*** ocenu greške za metodu konačnih elemenata:

$$\boxed{\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq \frac{h}{\pi}\sqrt{1+\frac{h^2}{\pi^2}}\|u''\|_{L^2(0,1)}.} \tag{4.22}$$

Primetimo još da iz naše pretpostavke da $f \in L^2(0,1)$ sledi da $u'' \in L^2(0,1)$. Ako u slaboj formulaciji graničnog problema koji posmatramo izaberemo $u = v$, primenom Koši-Švarcove nejednakosti sledi

$$\int_0^1 |u'(x)|^2 dx + \int_0^1 |u(x)|^2 dx = \int_0^1 f(x)u(x)dx$$

$$\leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dalje zaključujemo,

$$\int_0^1 (u(x))^2 dx \leq \int_0^1 (u'(x))^2 dx + \int_0^1 (u(x))^2 dx \leq \|f\|_{L^2(0,1)}\|u\|_{L^2(0,1)}$$

tj.

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Analogno sledi:

$$\|u'\|_{L^2(0,1)} \leq \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Na kraju, iz diferencijalne jednačine znamo da je $u'' = u - f$ pa sledi

$$\|u''\|_{L^2(0,1)} = \|u - f\|_{L^2(0,1)} \leq \|u\|_{L^2(0,1)} + \|f\|_{L^2(0,1)} \leq 2\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Ovim smo pokazali da $u \in L_2(0,1)$. Obzirom na to da je $u' \in L_2(0,1)$ i $u \in L_2(0,1)$, zapravo smo pokazali i više od toga tj. $u \in H^2(0,1)$.
Kada zamenimo ograničenje za $\|u''\|_{L^2(0,1)}$ u (4.22) dobijamo ocenu:

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq \frac{2h}{\pi}\sqrt{1+\frac{h^2}{\pi^2}}\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Prethodna nejednakost nam omogućava računanje ocene greške samo na osnovu poznavanja vrednosti parametra podele $h = \max_i h_i$ i funkcije f.

Dvodimenzionalni problem

Neka je dat skup $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ i posmatramo dvodimenzionalni granični problem

$$-\Delta u = f \quad u \quad \Omega \tag{4.23}$$

$$u = 0 \quad na \quad \partial\Omega \tag{4.24}$$

Ponovo imamo samo-adjungovani problem:

$$a(v,w) = \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} \right) dxdy = (v,w)_a$$

Podsetimo se leme Céa :

$$\|u - u_h\|_a = \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_a \leq \|u - \mathcal{I}_h u\|_a,$$

gde je

$$(\mathcal{I}_h u)(x,y) = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} u(x_i, y_j)\phi_{ij}(x,y).$$

Teorema 7. Neka je u slabo rešenje problema (4.23), (4.24) i neka je u_h aproksimativno rešenje. Pretpostavimo da $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Tada:

$$\|u - u_h\|_a \leq 2h|u|_{H^2(\Omega)},$$

$$|u|_{H^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|^2 \right) dxdy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \blacksquare$$

Posledica 2. Pod pretpostavkom prethodne teoreme važi:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{5}h|u|_{H^2(\Omega)}.$$

Dokaz. Na osnovu teoreme 7 znamo,

$$\|u - u_h\|_a = |u - u_h|^2_{H^1(\Omega)} \leq 4h^2|u|^2_{H^2(\Omega)} \tag{4.25}$$

Kako $u \in H_0^1(\Omega)$, $u_h \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$, sledi da $u - u_h \in H_0^1(\Omega)$, pa možemo primeniti Poenkare-Fridrihsovu nejednakost:

$$\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{4}|u - u_h|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Sledi,

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|^2_{H^1(\Omega)} &= \|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} + |u - u_h|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{4}|u - u_h|^2_{H^1} + |u - u_h|^2_{H^1} \\ &= \frac{5}{4}|u - u_h|^2_{H^1} \leq 5h^2|u|^2_{H^2(\Omega)}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

4.3.2 A posteriori ocena greške

U ovom poglavlju ćemo izvesti a posteriori ocenu za globalnu grešku preko dualnosti. Dobijeni rezultat kasnije ćemo primeniti u adaptivnom algoritmu, gde je moguće kontrolisati grešku aproksimacije dobijene metodom konačnih elemenata. Da bismo naglasili ključne teorijske ideje i izbegli tehničke poteškoće, posmatraćemo jednodimenzionalni granični problem sa homogenim Dirihleovim graničnim uslovom u dve tačke.

Dakle, posmatramo problem

$$\begin{aligned} -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \end{aligned}$$

gde su $b \in W^{1,\infty}(0,1)$, $c \in L^\infty(0,1)$ i $f \in L^2(0,1)$. Neka su

$$a(w,v) = \int_0^1 [w'(x)v'(x) + b(x)w'(x)v(x) + c(x)w(x)v(x)]dx$$

i

$$l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Slabu formulaciju datog problema sada možemo zapisati u obliku:

$$\text{pronaći } \; u \in H_0^1(0,1) \; \text{ tako da } \; a(u,v) = l(v), \;\; \forall v \in H_0^1(0,1).$$

Pretpostavićemo da je

$$c(x) - \frac{1}{2}b'(x) \geq 0, \tag{4.26}$$

tada znamo da postoji jedinstveno slabo rešenje $u \in H_0^1(0,1)$. Neka je data proizvoljna podela intervala $[0,1]$ tako da $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$. Podprostor $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ se sastoji od po delovima neprekidnih i po delovima linearnih osnovnih funkcija. Aproksimacija problema metodom konačnih elemenenata je data sa:

$$\text{pronaći } \; u_h \in V_h \; \text{ tako da } \; a(u_h, v_h) = l(v_h), \;\; \forall v_h \in V_h.$$

Neka je $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, ..., N$, i označimo $h = \max_i h_i$. Cilj nam je izvesti ocenu greške $u - u_h$ preko parametra h i aproksimacije u_h. Sa tim ciljem uvodimo pomoćni problem:

$$\begin{aligned} -z''(x) - (b(x)z)' + c(x)z = (u - u_h)(x), \quad 0 < x < 1 \\ z(0) = 0, \quad z(1) = 0 \end{aligned}$$

koji zovemo dualni problem.
Znamo da je $(u - u_h) = 0$ i $(u - u_h)(1) = 0$. Sledi,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2}^2 &= (u - u_h, u - u_h) = (u - u_h, -z'' - (bz)' + cz) \\ &= \int_0^1 (u - u_h)(x)(-z'' - (bz)' + cz)dx \\ &= \int_0^1 (u - u_h)'(x)z'(x)dx + \int_0^1 (u - u_h)'(x)bzdx + \int_0^1 (u - u_h)zcdx \\ &= a(u - u_h, z). \end{aligned}$$

Na osnovu Galjerkinove osobine ortogonalnosti

$$a(u - u_h, z_h) = 0.$$

Specijalno, kada izaberemo $z_h = \mathcal{I}_h z \in V_h$ dobijamo

$$a(u - u_h, \mathcal{I}_h z) = 0.$$

Sledi,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2}^2 &= a(u - u_h, z) = a(u - u_h, z - \mathcal{I}_h z) - a(u_h, z - \mathcal{I}_h z) \\ &= (f, z - \mathcal{I}_h z) - a(u_h, z - \mathcal{I}_h z) \end{aligned} \tag{4.27}$$

Primetimo da za sada desna strana ne sadrži analitičko rešenje u. Parcijalnom integracijom N integrala prve sume na desnoj strani jednakosti i znajući da je $(z - \mathcal{I}_h z)(x_i) = 0$, sledi:

$$\begin{aligned} a(u_h, z - \mathcal{I}_h z) &= \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_h'(x)(z - \mathcal{I}_h z)'(x)dx + \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b(x)u_h'(x)(z - \mathcal{I}_h z)(x)dx \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x)u_h(x)(z - \mathcal{I}_h z)(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [-u_h''(x) + b(x)u_h'(x) + c(x)u_h(x)](z - \mathcal{I}_h z)(x)dx \end{aligned}$$

$$(f, z - \mathcal{I}_h z) = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(z - \mathcal{I}_h z)(x)dx.$$

Kada zamenimo ova dva identiteta u (4.27) dobijamo:

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,1)}^2 = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_i - 1}^{x_i} R(u_h)(x)(z - \mathcal{I}_h z)(x)dx, \tag{4.28}$$

gde za $i = 1, ..., N$,

$$R(u_h)(x) = f(x) + u_h''(x) - b(x)u_h'(x) - c(x)u_h(x), \quad x \in (x_{i-1}, x_{i+1}).$$

Funkcija $R(u_h)$ se zove ***konačno-elementni ostatak*** i "meri" do kojeg stepena funkcija u_h ne zadovoljava diferencijalnu jednačinu $-u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x)$ na intervalu $(0, 1)$. Sada, primenjujući Koši-Švarcovu nejednakost sledi:

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \sum_{i=1}^{N} \|R(u_h)\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \|z - \mathcal{I}_h z\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}.$$

Na osnovu teoreme 6 znamo:

$$\|z - \mathcal{I}_h z\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \leq \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^2 \|z''\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}, \quad i = 1, ..., N,$$

pa sledi:

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|^2_{L^2(0,1)} &\leq \frac{1}{\pi^2}\sum_{i=1}^{N} h_i^2\|R(u_h)\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}\|z''\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \\ &\leq \frac{1}{\pi^2}\left(\sum_{i=1}^{N} h_i^4\|R(u_h)\|^2_{L^2(x_{i-1},x_i)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{N}\|z''\|^2_{L^2(x_{i-1},x_i)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\pi^2}\left(\sum_{i=1}^{N} h_i^4\|R(u_h)\|^2_{L^2(x_{i-1},x_i)}\right)^{\frac{1}{2}}\|z''\|_{L^2(0,1)}.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Ostatak analize ćemo posvetiti eliminisanju z'' sa desne strane nejednakosti (4.29). Znamo iz dualnog problema:

$$z'' = u_h - u - (bz)' + cz = u_h - u - b'z - bz' + cz = u_h - u - bz' + z(c-b')$$

Sledi,

$$\begin{aligned}\|z''\|_{L^2(0,1)} &\leq \|u-u_h\|_{L^2(0,1)} + \|bz'\|_{L^2(0,1)} + \|z(c-b')\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \|u-u_h\|_{L^2(0,1)} + \|b\|_{L^\infty(0,1)}\|z'\|_{L^2(0,1)} \\ &\quad + \|c-b'\|_{L^\infty(0,1)}\|z\|_{L^2(0,1)}, \quad b' \in L^\infty(0,1).\end{aligned} \tag{4.30}$$

Pokazaćemo da se $\|z'\|_{L^2(0,1)}$ i $\|z\|_{L^2(0,1)}$ mogu ograničiti preko $\|u-u_h\|_{L^2(0,1)}$, a zatim na osnovu nejednakosti (4.30) moći ćemo to uraditi i sa $\|z''\|$.
Primetimo:

$$(u-u_h, z) = (-z'' - (bz)' + cz, z), \quad .$$

Parcijalnom interacijom i znajući da je $z(0) = 0$ i $z(1) = 0$, sledi

$$\begin{aligned}(-z'' - (bz)' + cz, z) &= (z', z') + (bz, z') + (cz, z) \\ &= \|z'\|^2_{L^2(0,1)} + \int_0^1 b(x)z(x)z'(x)dx + \int_0^1 c(x)(z(x))^2dx \\ &= \|z'\|^2_{L^2(0,1)} + \frac{1}{2}\int_0^1 b(x)(z^2(x))'dx + \int_0^1 c(x)(z(x))^2dx \\ &= \|z'\|^2_{L^2(0,1)} - \frac{1}{2}\int_0^1 b'(x)z^2(x)dx + \int_0^1 c(x)z^2(x)dx \\ &= \|z'\|^2_{L^2(0,1)} + \int_0^1 (c(x) - \frac{1}{2}b'(x))z^2(x)dx.\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo

$$(u-u_h, z) = \|z'\|^2_{L^2(0,1)} + \int_0^1 (c(x) - \frac{1}{2}b'(x))z^2(x)dx$$

Sada, zbog (4.26) znamo da je integral sa desne strane jednakosti nenegativan. Zaključujemo da važi,

$$\|z'\|^2_{L^2(0,1)} \leq (u-u_h, z) \leq \|u-u_h\|^2_{L^2(0,1)}\|z'\|^2_{L^2(0,1)} \tag{4.31}$$

Koristeći Poenkare-Fridrihsovu nejednakost znamo:

$$\|z\|^2_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{2}\|z'\|^2_{L^2(0,1)}, \tag{4.32}$$

pa sledi,

$$\|z\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{2}\|u-u_h\|_{L^2(0,1)}. \tag{4.33}$$

Kada (4.32) i (4.33) uvrstimo u desnu stranu nejednakosti dobijenu pod (4.31), zaključujemo:

$$\|z'\|_{L^2(0,1)} \leq \|u-u_h\|_{L^2(0,1)}\frac{1}{2}\|u-u_h\|L^2(0,1) = \frac{1}{2}\|u-u_h\|^2_{L^2(0,1)},$$

tj.

$$\|z'\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|u-u_h\|_{L^2(0,1)}. \tag{4.34}$$

Na kraju, kada zamenimo (4.34) i (4.33) u (4.30), dobićemo traženo ograničenje za $\|z''\|$:

$$\|z''\|_{L^2(0,1)} \leq K\|u-u_h\|_{L^2(0,1)} \tag{4.35}$$

gde je

$$K = 1 + \frac{\|b\|_{L^\infty}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\|c-b'\|_{L^\infty(0,1)}.$$

Kada nejednakost (4.35) uvrstimo u (4.29) dobijamo ***a posteriori ocenu greške*** :

$$\|u-u_h\|L^2(0,1) \leq \frac{K}{\pi^2}\left(\sum_{i=1}^{N} h_i^4\|R(u_h)\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ocena za $\|u-u_h\|^2_L(0,1)$ zove se a posteriori, jer se dobija nakon što se izračuna u_h.

Adaptivni algoritam

Pretpostavimo da je TOL unapred zadata ocena (tolerancija) i da je cilj da izračunamo aproksimativno rešenje u_h za nepoznato rešenje u (neka su u_h i u definisani kao u prethodnoj analizi a posteriori greške). Treba da važi:

$$\|u-u_h\|_{L^2(0,1)} \leq TOL.$$

Koristićemo *a posteriori* ocenu greške. Prave se sve finije podele intervala $(0,1)$ dok se ne postigne kriterijum zaustavljanja, tj.

$$K_0\left(\sum_{i=1}^{N} h_i^4\|R(u_h)\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq TOL, \quad K_0 = \frac{K}{\pi^2}.$$

Algoritam se sastoji od tri koraka:

4 APROKSIMACIJA HELMHOLCOVE JEDNAČINE METODOM KONAČNIH ELEMENATA

1) Biramo početnu podelu intervala [0,1]

$$\tau_0 : 0 = x_0^{(0)} < x_{i-1}^{(0)} < ... < x_{N_0-1}^{(0)} < x_{N_0}^{(0)} = 1$$

sa $h_i^{(0)} = x_i^{(0)} - x_{i-1}^{(0)}$, za $i = 1, ..., N_0$, i $h^{(0)} = \max_i h_i^0$ i neka je $V_{h^{(0)}}$ konačno-dimenzionalni podprostor dimenzije $(N_0 - 1)$ u kome tražimo rešenje.

2) Računa se $u_h^{(0)} \in V_{h^{(0)}}$. Ako je $\|u - u_h^{(0)}\| \leq TOL$, algoritam se završava. U suprotnom, podela intervala se nastavlja.

3) Za dato rešenje $u_h^{(m)} \in V_h^{(m)}$ za neko $m \geq 0$ definisano na podeli τ_m, stati ako je

$$K_0 \left(\sum_{i=1}^{N_m} (h^{(m)})^4 \|R(u_h^{(m)})\|_{L^2(x_{i-1}^{(m)}, x_i^{(m)})} \right)^{\frac{1}{2}} \leq TOL.$$

4) Ako nije, podeliti elemente $[x_{i-1}^{(m)}, x_i^{(m)}]$ u τ_m, $1 \leq i \leq N_m$ za koje je

$$(h_i^m)^4 \|R(u_h^{(m)})\|^2_{L^2(x_{i-1}^{(m)}, x_i^{(m)})} > \left(\frac{TOL}{K_0} \right)^2 \frac{1}{N_m}$$

Prethodnu nejednakost zovemo **kriterijum profinjenja**. Označimo sa τ_{m+1} novu podelu intervala $[0, 1]$ sa N_{m+1} elemenata $[x_{i-1}^{(m+1)}, x_i^{(m+1)}]$ čije su dužine $h^{(m+1)} = x_i^{(m+1)} - x_{i-1}^{(m+1)}$.

Ako se osvrnemo na primer koji smo testirali u Matlabu, za $\lambda = 1$ i $f(x) = 2\sin(x + y)$, konačno - elementni ostatak je:

$$R(u_h)(x, y) = 2\sin(x + y) + \Delta u_h(x, y) - u_h(x, y).$$

Za dato rešenje $u_h^{(m)} \in V_h^{(m)}$ za neko $m \geq 0$ i podelu τ_m, algoritam se završava ako je

$$K_0 \left(\sum_{i=1}^{N_m} (h^{(m)})^4 \|R(u_h^{(m)})\|_{L^2(x_{i-1}^{(m)}, x_i^{(m)})} \right)^{\frac{1}{2}} \leq TOL.$$

Možemo primetiti da za unapred zadatu toleranciju TOL = 0.5, adaptivni algoritam se završava prikazanim grafikom, tj. $m = 0$. Podela intervala $\overline{\Omega} = [-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5]$ je takva da je odmah postignut kriterijum zaustavljanja.
Sa grafika vidimo da je $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq 0.4 \leq TOL$. Ako bismo želeli da $TOL < 0.4$ onda bismo natavili da delimo interval prikazan na slici 6. U praksi, korišćenjem FEA (Finite Element Analysis) softvera postoji nekoliko načina kojima možemo postići kriterijum profinjenja:

- **Smanjenje veličine elemenata u mreži**: Predstavlja najlakšu strategiju za profinjenje mreže radi svoje jednostavnosti, ali mana je to što nema preferencije prilikom profinjenja mreže u regionima gde je lokalno potrebna finija mreža.

- **Povećanje redosleda elemenata u mreži**: Predstavlja korisnu strategiju u smislu da nije potrebno profinjenje, može se koristiti ista mreža, ali sa različitim redosledom elemenata. U slučaju složenih 3D geometrija, ponovno deljenje mreže može biti dugotrajno, pa se ovaj način smatra najpoželjnijim.

- **Globalno adaptivno profinjenje mreže**: Koristi strategiju procene greške, da odredi tačku u domenu modeliranja gde je lokalna greška najveća. Na osnovu te procene greške, softver pravi potpuno novu mrežu. Manji elementi se koriste u regionima gde je lokalna greška značajna. Nedostatak ovog načina je što korisnik nema kontrolu nad mrežom i kao posledica može doći do profinjenja mreže u regionima koji su od manjeg interesa, tj. regionima gde je veća lokalna greška prihvatljiva.

- **Lokalno adaptivno profinjenje mreže**: Razlikuje se od globalnog adaptivnog profinjenja mreže jer se greška procenjuje samo na nekom podskupu celog prostora modela.

- **Ručno podešavanje mreže**: Ovo je naintenzivniji pristup gde analitičar kreira više različitih mreža konačnih elemenata na osnovu fizike određenog problema i procene gde bi mogli biti potrebni finiji elementi. U 2D geometriji mogu se kombinovati trougaoni i četvorougaoni elementi. U slučaju 3D modela može se koristiti kombinacija tetraedarskih i heksaedarskih elemenata.

Napomena. Literatura korišćena prilikom obrade poglavlja:

[1] Koshlyakov N. S., Smirnov M. M., Gliner E. B., Differential equations of mathematical physics, North-Holland publishing company - Amsterdam, 1964
[2] Lin T., The Numerical Solution of Helmholtz's Equation for the Exterior Dirihlet Problem in Three Dimensions, Siam Journal on Numerical Analysis, 1985
[3] Rangogni R., The solution of the nonhomogeneous Helmholtz equation by means of the boundary element method, Appl. Math. Modelling, 1984
[4] Süli E., Lecture notes on finite element methods for partial differential equations, Mathematical Institute University of Oxford, 2020.
[5] Zhilin Li, Tao Tang, Qiao Zhonghua, Numerical solution of differential equations - Introduction to finite difference and finite element methods, Cambridge University Press, 2018.

5 Zaključak

Poslednjih godina, tehnologija u svetu napreduje u velikoj meri, samim tim se i postojeći metodi prilagođavaju novim softverima i pronalaze sve veće primene. Još u ranim 70-im godinama dvadesetog veka kada je izdata prva monografija o matematičkim osnovama FEM-a, koju su napisali Strang i Fix (1973), u prvoj rečenici metod je nazvan zapanjujućim uspehom. FEM je zaista bila prava ideja u pravo vreme, obzirom da je tada povećana dostupnost digitalnih računara. Koristili su je najviše inženjeri raznih struka, a potpuni preokret je donela u statičkim proračunima u građevinarstvu. Doprinos se u današnjem vremenu raširio na sve oblasti nauke, čak do otkrića najsavremenijih metoda lečenja u medicini.
Međutim, taj veliki uspeh sa sobom nosi opasnosti. Metoda je već od ranih 80-ih godina smatrana sigurnom za korištenje. Taj osećaj je do sada toliko napredovao da je u današnjem vremenu veoma teško dobiti značajnu istraživačku podršku za fundamentalni rad sa FEM-om. Savremene kompanije su omogućile softverska rešenja koja pokreću analizu sa samo par klikova na računaru, pa je nekada teško uočiti greške i rešenja se mogu smatrati tačnima, iako su u ulaznim podacima učinjene ogromne greške.
Prednosti FEM-a su široka rasprostranjenost i dostupnost istraživačkih i komercijalnih kodova, a metoda može dati fizički tačan opis većine geometrije problema. Nažalost, zahtevi od FEM-a mogu biti komplikovani i obično postoji kompromis između tačnosti metode i brzine računara. S jedne strane, problem treba da bude predstavljen velikim brojem elemenata u mreži konačnih elemenata da bi se obezbedila adekvatna tačnost. To uglavnom uključuje proučavanje konvergencije mreže da bi se odredila tačka u kojoj rešenje konvergira na zajedničku vrednost unutar granica greške. Sa druge strane, vreme značajno raste sa veličinom mreže.

U ovom radu objašnjena je teorijska osnova metode konačnih elemenata i primenjena je na Helmholcovu jednačinu. U tom smislu, osnova ovog rada su prostori neprekidnih, integrabilnih funkcija, Soboljevljevi prostori i teorija slabog rešenja. Takođe, opisana je i konstrukcija FEM metode koja obuhvata određivanje baznih linearnih funkcija i podelu domena na elemente, te određivanje aproksimacije rešenja za eliptični problem. Objašnjena je osobina Galjerkinove ortogonalnosti i lema Céa koji predstavljaju teorijsku osnovu za obradu greške.

U poslednjem delu rada je korištenjem pojednostavljene metode konačnih elemenata rešena Helmholcova jednačina i korištenjem PDE Toolboxa su prikazani grafici rešenja i greške. Takođe je urađena analiza optimalne ocene greške (a priori i a posteriori) i predstavljen adaptivni algoritam uz pomoć koga možemo unapred zadati toleranciju i izračunati aproksimativno rešenje u_h za nepoznato rešenje u.[12]

[12]Mi Wang, Industrial Tomography, Systems and Applications, Woodhead Publishing, 2015

Literatura

[1] Brenner S. C., Scott L. R., The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Third Edition, Springer, 2008

[2] David J. Griffiths, Darrell F. Schroeter, Introduction to Quantum Mechanics, Third Edition, Cambridge University Press, 2018

[3] David J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, Prentice Hall - New Jersey, 1999

[4] Koshlyakov . N. S., Smirnov M. M., Gliner E. B., Differential equations of mathematical physics, North-Holland publishing company – Amsterdam, 1964

[5] Lin, T, The Numerical Solution of Helmholtz's Equation for the Exterior Dirichlet Problem in Three Dimensions, SIAM Journal on Numerical Analysis, 1985

[6] Mi Wang, Industrial Tomography, Systems and Applications, Woodhead Publishing, 2015

[7] Rangogni R., The solution of the nonhomogeneous Helmholtz equation by means of the boundary element method, Appl. Math. Modelling, 1984

[8] Süli E., Lecture notes on finite element methods for partial differential equations, Mathematical Institute University of Oxford, 2020

[9] Zhilin Li, Tao Tang, Qiao Zhonghua, Numerical solution of differential equations - introduction to finite difference and finite element methods, Cambridge University Press, 2018

Biografija

Mirjana Čivčić je rođena 09. juna 1994. godine u Kupresu, BiH. U Prijedoru je završila Osnovnu školu „Petar Kočić“ 2009. godine kao nosilac Vukove diplome. Zatim upisuje Gimnaziju „Sveti Sava“ u Prijedoru, opšti smer i završava je 2013. godine sa odličnim uspehom. Odmah nakon srednje škole upisuje Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer Primenjena matematika (modul matematika finansija) i uspešno ih završava 2017. godine. Iste godine nastavila je master studije primenjene matematike na Departmanu za matematiku i informatiku. Zaključno sa julskim rokom 2020. godine položila je sve ispite predviđene planom i programom. Septembra 2019. godine počinje da radi kao nastavnik matematike u Osnovnoj školi „Branko Ćopić“ u Prijedoru. Od maja 2021. je zaposlena na poziciji sistem analitičara u MF banci u Banja Luci.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Mirjana Čivčić
AU
Mentor: Dr Ivana Vojnović
MN
Naslov rada: Numeričko rešavanje Helmholcove jednačine metodom konačnih elemenata
NR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2022
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 5 poglavlja, stranica, referenca, slika, tabela
FO
Naučna oblast: Primenjena matematika
NO
Naučna disciplina: Numerička analiza
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: Metoda konačnih elemenata, Soboljevi prostori, Eliptični granični problem, Slabo rešenje, Helmholcova jednačina, Galjerkinova ortogonalnost, Optimalna ocena greške, Aproksimacija Helmholcove jednačine, Pojednostavljeni FE metod
PO

UDK
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Cilj master rada je da se numerički reši Helmholcova jednačina korištenjem metode konačnih elemenata. Prvo je predstavljena motivacija za proučavanje i analiziranje jednačine, koja proizilazi iz njene prisutnosti u različitim fizičkim pojavama. Nakon toga je objašnjena teorijska pozadina rada i opisana je konstrukcija metode konačnih elemenata. Zatim je objašnjena pojednostavljena metoda konačnih elemenata i implementiran je kod za pojednostavljenu metodu u slučaju Helmholcove jednačine. Potom je uvedena i teorijska osnova za analizu greške metode konačnih elemenata i izvedena je optimalna ocena greške. Posmatranjem rezultata dobijenih u Matlabu možemo zaključiti da za unapred zadatu toleraanciju $TOL \geq 0.4$ nije potrebno profinjenje mreže koju smo inicijalizovali. U suprotnom, profinjenje mreže može se izvršiti na više načina uz pomoć softvera za FE analizu, u zavisnosti od fizike problema koji se posmatra.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 22.06.2021
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Nataša Krklec Jerinkić, vanredni profesor
Mentor: dr Ivana Vojnović, docent
član: dr Milica Žigić, vanredni profesor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Content Code: Master's thesis
CC
Author: Mirjana Čivčić
AU
Mentor: Ivana Vojnović PhD
MN
Title: Numerical solving of the Helmholtz equation using finite element method
TI
Language of text: Serbian (latin)
LT
Language of abstract: Serbian / English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2022
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publication place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty od Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 5 chapters, pages, references, pictures, tables
PD
Scientific field: Applied mathematics
SF
Scientific Discipline: Numerical analysis
SD
Finite element method, Sobolev spaces, Elliptic boundary problem, Weak solution, Helmholtz equation, Galerkin orthogonality, Optimal error bound, Approximation of Helmholtz equation, Simplified FE Method
SKW
UC

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: The aim of this master's thesis is to solve Helmholtz equation using finite element method. First the motivation to study and analyze equation, which arises from its presence in various physical phenomena, was introduced. Next, the theoretical foundation of master's thesis was explained and the construction of the finite element method was described. Furthermore, the simplified finite element method was explained and the code for simplified method in the case of Helmholtz equation was implemented. Next, the theoretical foundation for error analysis was introduced and optimal error estimate was derived. By observing the results obtained in Matlab, we can conclude that for the tolerance TOL given in advance $TOL \geq 0.4$, it was not necessary to refine the mesh which we initialized at the beginning. Otherwise, mesh refinement can be performed in several ways using software for finite element analysis, depending on the physics of the problem being observed.
AB
Accepted by the Scientific Board on: 22.06.2021.
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
DB
President: Dr. Nataša Krklec Jerinkić, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Mentor: Dr. Ivana Vojnović, assistant professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member: Dr. Milica Žigić, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad